UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

La independencia del Principio de Coherencia Cercana de Filtros

T E S I S

Que para obtener el título de:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

Presenta:
JONATHAN CANCINO MANRÍQUEZ

Asesor:
DR. DAVID MEZA ALCÁNTARA

Morelia, Michoacán, México.
Junio de 2011.

Agradecimientos

A mis padres, J. Trinidad Cancino García y Ma. Teresa Manríquez Guzmán, que me han apoyado en todo momento, sin importar las contrariedades y los momentos difíciles por los cuales hemos pasado. A mi hermana Melissa, que sin duda ha sido una gran motivación en todo momento. Los amo a todos ustedes.

A David Meza Alcántara, por toda su generosidad, su valiosa ayuda, su apoyo, todo el tiempo dedicado, y por haber confiado en mí proyecto de tesis. Muchísimas gracias David.

A Santiago, que también ha sido parte de esta travesía en numerosos momentos.

A mi sobrino Jerome, que me enseño que no es necesario decir palabra alguna para cambiar más de una vida.

A mi tío Javier, que, aunque previamente encausado al mundo de las Matemáticas, fue definitivamente quien me mostró el camino hacia el *maravilloso mundo creado por Cantor*.

A mi tía Paty, que no dudó en apoyarme en aquel duro momento, y que siempre ha confiado en mi, pero sobre todo, por recordarme lo que había olvidado.

A toda mi familia.

A mis amigos Oscar, Faby, Bere y Anahí. A pesar del tiempo nunca nos hemos olvidado.

A todos mis amigos y compañeros de la Facultad de Ciencias Fisico Matemáticas: Hector Téllez, Jonatan Soffer, Manuel Sedano, Cristina Salto Alegre, Luis Ruiz, Kephani Raya, Luis Fernando Peña, Saul Ortiz, Alfonso Ortiz, Carlos Mendoza, Salvador Lucas, Julian Jara, Rafael Contreras, José González.

A todas las personas que conocí en el Diplomado La Ciencia en tu Escuela, que sin duda constituyen un capítulo importante de mi estancia en la Licenciatura. En especial, a Tamara, por su siempre generosa y espléndida persona.

Índice general

INTRODUCCIÓN

El *principio de Coherencia Cercana de Filtros* (NCF, por sus siglas en inglés), fue introducido por Andreas Blass, como respuesta a un problema de Análisis Funcional.

Dada una función $f : \omega \to \omega$, y un filtro $\mathcal{U}$ sobre ω, se define la imagen de $\mathcal{U}$ bajo f, denotado $f(\mathcal{U})$, como el la colección de de subconjuntos de ω que tienen preimagen bajo f en $\mathcal{U}$.

El principio de Coherencia Cercana de Filtros, afirma que para cualesquiera dos ultrafiltros no principales $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$, existe una función finito a uno f (esto es, cada elemento de $Im(f)$ tiene preimagen finita), de manera que $f(\mathcal{U}) = f(\mathcal{V})$. Esta afirmación resulta tener importantes consecuencias en diferentes areas de las Matemáticas.

Matemáticos familiarizados con algunos tipos especiales de ultrafiltros notarán que este principio no puede ser demostrado en ZFC. Por ejemplo, la existencia de dos ultrafiltros selectivos no equivalentes en el orden de Rudin-Keisler, nos proporciona un contraejemplo a NCF. Sin embargo, como es sabido, la existencia de ultrafiltros selectivos resulta independiente de ZFC, por lo que aún queda lugar para cuestionar la consistencia de NCF realtiva a ZFC. Este problema fue resuelto por Saharon Shelah, en 1984, de manera afirmativa, es decir, si ZFC es una teoría consistente, entonces también lo es la teoría $ZFC + NCF$.

El propósito del trabajo presente es demostrar la independencia respecto a ZFC, la teoría usual de Conjuntos, del principio de Coherencia Cercana de Filtros. El trabajo está dividido en tres capítulos.

El el primer capítulo, se presentan la notación que utilizaremos y algunos conceptos preliminares, sin abundar en detalles, tratando de cubrir solamente los conceptos fundamentales que serán necesarios en el desarrollo del resto del trabajo. Sin embargo, se supondrá que el lector se encuentra familiarizado con conceptos generales de Teoría de Conjuntos y Teoría de Modelos.

En el capítulo 2, se enuncia el principio de Coherencia Cercana de Filtros, y se prueba que este no puede ser demostrado en ZFC, probando que dos populares principios (la Hipótesis de Continuo y el Axioma de Martin) implican la negación de NCF. Aunque la demostración de $CH \implies \neg NCF$ seguramente es de dominio público, posiblemente podría atribuirse a Andreas Blass (ver Preliminares, 1.1). En [Bla86] se menciona que el Axioma de Martin y otra vasta cantidad de hipótesis implican $\neg NCF$, aunque no se consigna demostración alguna.

El capítulo 3, está dedicado a probar la consistencia de NCF relativa a ZFC. Se establecen algunos aspectos importantes del forcing de Miller, como ser propio (de hecho satisface una propiedad un poco más fuerte, el axioma A) y la preservación de p-puntos. También trabajamos con la iteración con soporte numerable del forcing en cuestión. Tomamos una versión un poco diferente de *nombres hereditariamente numerables* a la que se adopta en [BS87b], y la construcción de un conjunto denso de cardinal $\aleph_1$ en $\mathbb{M}_\alpha$

también es un poco distinta. Sin embargo, la finalidad de lidiar con tales conceptos permanece inalterada.

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1. Marco histórico.

El principio de Coherencia Cercana de Filtros, fue introducido por Andreas Blass en [Bla86], y surge como solución al problema de encontrar dos subideales propios del ideal de operadores compactos en un espacio de Hilbert complejo, de forma que su suma directa sea el ideal de operadores compactos [Ala71]. Previamente, A. Blass junto con Gary Weiss demostró que bajo CH existen tales ideales. En 1986, Blass publica *"Near Coherence of Filters I: Cofinal Equivalence of Models of Arithmetic"*, en el cual presenta NCF, así como una serie de equivalencias y consecuencias. Entre otras cosas , demuestra que NCF está intimamente relacionado a la clasificación de modelos de la aritmética módulo equivalencia cofinal. También expone algunas consecuencias con respecto a invariantes cardinales del continuo. Blass demuestra en [Bla87] que el problema del ideal de operadores compactos es equivalente a la negación de NCF.

En 1984, Saharon Shelah (ver [And]) demuestra la consistencia relativa de NCF con ZFC, aunque su demostración es publicada hasta 1987, en el artículo [BS87b]. La noción de forcing ahí utilizada fue construida con la intención de probar también la consistencia de otra hipótesis, la existencia de p_λ-puntos simples, siendo $\lambda = \aleph_1, \aleph_2$. Posteriormente publican una demostración más sencilla, utilizando el forcing de Miller.

Al parecer, NCF ha encontrado importantes aplicaciones en diferentes ramas de las Matemáticas, desde Teoría de Modelos, pasando por Análisis Funcional, hasta la Topología de Conjuntos, en especial lo que refiere a la compactación de Stone-Cech de los números naturales.

Las consecuencias que de NCF se desprenden, han servido de motivación a T. Banakh y L. Zdomskyy, que califican a NCF como *"uno de los más exitantes y contraintuitivos principios conjuntistas"*. Ellos generalizan ligeramente el concepto de filtro, proponiendo los *semifiltros*, para los cuales definen una relación de coherencia, que generaliza a NCF. También exponen algunas aplicaciones de sus resultados a otros campos de las Matemáticas ([Tar09]).

1.2. Notación y conceptos preliminares.

1.2.1. Conceptos generales de Teoría de Conjuntos.

La teoría de referencia utilizada en este trabajo es la Teoría de Conjuntos usual ZFC (los axiomas de Zermelo-Freankel incluyendo el axioma de Elección). Obviamente algunas veces necesitaremos hipótesis adicionales a ZFC, y cuando esto sea necesario se indicará, ya sea en el teorema a demostrar, o como convenio a partir de cierto punto.

Utilizaremos la notación estándar en la Teoría de Conjuntos: el símbolo $\in$ está destinado a la relación de pertenencia usual, $\subseteq$ denota la contención de conjuntos, $\cup$ es la unión, $\cap$ la intersección, por $A \setminus B$ la diferencia de conjuntos, y $\mathcal{P}(A)$ será el conjunto potencia del conjunto A. B^A denota el conjunto de todas las funciones de A en B, y si $f \in B^A$, y $C \subseteq A$, $f{\restriction}C$ será la restricción de f al conjunto C.

De la vasta cantidad de hipótesis independientes de ZFC, las únicas que usaremos serán la *"Hipótesis del Continuo(CH)"* y el *"Axioma de Martin (MA)"*.

La Hipótesis del Continuo es la siguiente afirmación:

$$CH: \ 2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Es bien sabido que esta hipótesis fue introducida por George W. Cantor, y que casi llegó a la locura en sus árduos intentos por demostrarla. Sin embargo, no fue hasta 1930, que Kurt Gödel dio el primer gran avance significativo en la investigación de CH, demostrando que CH es relativamente consistente con ZFC (de hecho, demostró que la forma generalizada de CH era relativamente consistente a ZFC). Tuvieron que pasar otros 30 años para que Paul Cohen finalmente demostrará que $\neg CH$ es también relativamente consistente con ZFC.

El Axioma de Martin fue introducido por D. A. Martin y R. M Solovay en 1970. CH implica trivialmente MA, pero en 1971, Solovay y Tenennbaum demostraron la consistencia de $MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$. El Axioma de Martin, en su forma más común, involucra conjuntos preordenados.

Recordemos que un *conjunto preordenado* es un par ordenado $\langle P, \leq \rangle$, donde $\leq$ es un subconjunto de $P \times P$, que es una relación reflexiva y transitiva. Como es usual, abusaremos de la notación y escribiremos simplemente P en lugar de $\langle P, \leq \rangle$. A los elementos de P los llamamos *condiciones*. Dado un conjunto $D \subseteq P$, diremos que D es *denso* si para cualquier $p \in P$ existe $q \in D$ que extiende a p, es decir, $q \leq p$. Dos condiciones $p, q \in P$ son *incompatibles*, $p \perp q$, si no existe una tercer condición r que extienda a las dos primeras. En caso contrario p y q serán *compatibles*, y lo denotaremos por $p \parallel q$. Diremos que P es *separativo* si dados p y q tal que p no extiende a q, existe $r \leq p$ incompatible con q. Una *anticadena* $A \subseteq P$ es un conjunto de condiciones incompatibles dos a dos. Una *anticadena maximal* es una anticadena maximal respecto a la contención. Un conjunto $D \subseteq P$ es predenso si dada cualquier condición $p \in P$ existe $q \in D$ compatible con p.

Convenimos en que todos los conjuntos preordenados que aquí utilizaremos serán separativos y tendrán un elemento máximo denotado por 1.

Un conjunto preordenado satisface la *condición de la κ cadena*, abreviado κ-c.c. si toda anticadena tiene cardinalidad estrictamente menor que κ. Cuando $\kappa = \omega_1$, decimos que se satisface la condición de la cadena numerable (c.c.c.).

Un conjunto $G \subseteq P$ es un *filtro* si cumple lo siguiente:

i) $1 \in G$.

ii) Si $p, q \in G$, entonces existe $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$.

iii) Si $p \in G$ y $q \geq p$, entonces $q \in G$.

Dada una familia $\mathcal{D} = \{D_i : i \in \mathcal{I}\}$ de conjuntos densos en P, G será un filtro *$\mathcal{D}$-genérico* si para cada $i \in \mathcal{I}$, $D_i \cap G \neq \emptyset$.

La versión que utilizaremos del Axioma de Martin es la siguiente:

$MA:$ Si P un conjunto preordenado que tiene la condición de la cadena numerable y $\mathcal{D}$ una familia de conjuntos densos en P, de cardinalidad estrictamente menor que $2^{\aleph_0}$, entonces existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico.

Dado un conjunto A, un *filtro sobre* A es un filtro sobre el orden parcial $\langle \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq \rangle$. Diremos que un filtro $\mathcal{F}$ es principal si existe $a \in A$ tal que $\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{P}(A) : a \in B\}$, en caso contrario llamaremos a $\mathcal{F}$ libre o no principal. Un filtro $\mathcal{F}$ es llamado $maximal$, o $ultrafiltro$, si no existe otro filtro $\mathcal{G}$ que extiende propiamente a $\mathcal{F}$. Un hecho bien conocido, demostrado por A. Tarski, es que el axioma de Elección implica que todo filtro puede ser extendido a un ultrafiltro. A lo largo de este trabajo nos enfocaremos en filtros sobre ω. En particular, denotaremos por $\mathcal{F}_{cof}$ al filtro que consta exactamente de los subconjuntos cofinitos de ω.

Por último haremos mención de una función $\rho : \omega \to \omega \times \omega$ que resultará de utilidad en el tercer capítulo. Para cada natural n, exiten k, l números naturales únicos tales que $n = k^2 + l$, y $0 \leq l \leq 2k$. Esto lo probamos por inducción sobre n. Para $n = 0$, tenemos $k = l = 0$. Supongamos que es cierto para n, y sean k, l tales que $n = k^2 + l$, y $0 \leq l \leq 2k$. Entonces $n + 1 = k^2 + l + 1$. Si $l < 2k$, entonces $l + 1 \leq 2k$, por lo que $n + 1 = k'^2 + l'$, siendo $k' = k$ y $l' = l + 1$. Si $l = 2k$, entonces $n + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$, y $n + 1 = k'^2 + l'$, siendo $k' = k + 1$ y $l' = 0$. La función ρ la definimos como sigue: si $0 \leq l < k$, entonces $\rho(n) = (k, l)$, y si $k \leq l \leq 2k$, entonces $\rho(n) = (l - k, k)$. Notemos que $\rho(0) = (0, 0)$ y $\rho(0) = (1, 0)$. También, si $\rho(n) = (k, l)$, entonces $n > \text{máx}\{k, l\}$, para todo $n \geq 2$.

Con la función anterior, definimos también una partición de ω que nos será útil para la construcción de un conjunto denso de cierto conjunto preordenado. Para cada $n \in \omega$, definimos $B_n = \{k \in \omega : (\exists m \in \omega)(\rho(k) = (m, n))\}$. Hacemos $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \omega\}$. Notemos que esta partición satisface que $n \in B_j$, para algún $j \leq n$.

1.2.2. Teoría elemental de modelos.

Un modelo de la Teoría de Conjuntos, es un conjunto M, junto con una interpretación de la relación $\in$, en el cual todos los axiomas de ZFC son verdaderos. Para nosotros, la interpretación de $\in$, será la interpretación usual de pertenencia de conjuntos.

Dado un conjunto A, definimos recursivamente una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n\in\omega}$ como sigue:

$$A_n = \begin{cases} A & \text{si } n = 0, \\ \bigcup A_{n-1} & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Definimos la clausura transitiva de A, denotada $cltr(A)$, a ser el conjunto $\bigcup_{n\in\omega} A_n$. Fácilmente se ve que $cltr(A)$ es el mínimo conjunto transitivo que contiene a A.

Dado un cardinal regular no numerable λ, definimos el conjunto de todos los conjuntos de cardinalidad hereditariamente menor que λ, $H(\lambda)$, como el conjunto formado por todos los A, tales que $|cltr(A)| < \lambda$. Se demuestra que $H(\lambda)$ es un conjunto transitivo, y que satisface todos axiomas de ZFC a excepto el axioma del conjunto potencia. De hecho, $H(\lambda)$ es un modelo de ZFC si y sólo si λ es un cardinal inaccesible.

Dado un modelo $\mathcal{M}$ de un fragmento de ZFC, y $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$, diremos que $\mathcal{N}$ es un submodelo elemental de $\mathcal{M}$, $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$, si para cada fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, y $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{N}$, tenemos

$$\mathcal{N} \models \text{“}\psi(a_1, \ldots, a_n)\text{”} \Longleftrightarrow \mathcal{M} \models \text{“}\psi(a_1, \ldots, a_n)\text{”}$$

Recuerdese que la expresión $\mathcal{N} \models$ “ψ” significa que la fórmula ψ es verdadera en el modelo $\mathcal{N}$.

Un teorema que resulta de particular importancia en la Teoría de Modelos es el teorema de Löwenheim-Skolem, en su versión descendiente. Utilizaremos este teorema libremente para demostrar algunas propiedades de los forcing propios y el lema de fusión para iteraciones con soporte numerable.

Teorema 1.2.1 (Löwenheim-Skolem)**.** *Para cualquier cardinal regular no numerable λ y cualquier $X \subseteq H(\lambda)$, hay un submodelo elemental $\mathcal{M} \prec H(\lambda)$, tal que $X \subseteq \mathcal{M}$ y $|\mathcal{M}| \leq$ máx$\{|X|, \aleph_0\}$.*

1.2.3. Forcing.

En 1964, Cohen demostró que la Hipótesis del Continuo resultaba independiende de los axiomas de ZFC. En su demostración introdujo un método totalmente nuevo y poderoso denominado *forcing*. Este método consiste básicamente en construir nuevos modelos a partir de un *modelo base* ya existente V, adjuntando un nuevo conjunto G, no existente en el modelo V. El modelo obtenido de esta manera es denotado $V[G]$ y se le llama *extensión genérica*. El conjunto G es un filtro sobre un orden parcial $\mathcal{P}$ existente en el modelo V, que tiene la propiedad de intersectar todos los subconjuntos densos de $\mathcal{P}$ que están en V, y es llamado filtro $\mathcal{P}$-genérico sobre V (o filtro genérico sobre V cuando no haya confusión). Procedemos a describir brevemente los conceptos básicos de la teoría.

Definimos la clase de los $\mathcal{P}$-*nombres* de manera recursiva sobre la relación de pertenencia $\in$ como sigue: $\dot{x}$ es un $\mathcal{P}$-nombre si es un conjunto de pares ordenados (a, b) de tal manera que a es un $\mathcal{P}$-nombre y b es una condición en $\mathcal{P}$. Notemos que podemos definir recursivamente un nombre canónico para cada elemento de $\mathcal{M}$, dado por $\check{x} = \{(\check{y}, 1) : y \in x\}$. Para el filtro genérico G tenemos el nombre canónico $\dot{G} = \{(\check{p}, p) : p \in \mathcal{P}\}$. A la clase de los $\mathcal{P}$-nombres se les denota por $V^{\mathcal{P}}$. Al lenguaje obtenido del lenguaje $\{\in\}$ agregando cada $\mathcal{P}$-nombre como una constante, se le llama *lenguaje de forcing*.

Dado un $\mathcal{P}$-nombre $\dot{x}$, y un filtro genérico G definimos la interpretación de $\dot{x}$ bajo G recursivamente como $\dot{x}_G = \{\dot{y}_G : (\exists p \in \mathcal{P})((\dot{y}, p) \in \dot{x})\}$. Es costumbre definir la extensión genérica $V[G]$ de un modelo V, como el conjunto formado por todas las interpretaciones de los $\mathcal{P}$-nombres del modelo base V.

La relación de forcing es la herramienta fundamental al momento de establecer resultados de consistencia, ya que establece un nexo directo entre las fórmulas del lenguaje de forcing, y los elementos de la noción de forcing. Aunque esta relación puede ser definida completamente en ZFC, es decir, puede ser formalizada utilizando los axiomas de ZFC, no entraremos en estos detalles, y diremos que una condición $p \in \mathcal{P}$ *fuerza* una fórmula $\psi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)$, si para cada filtro G $\mathcal{P}$-genérico sobre V, se tiene que $V[G] \vDash \psi(\dot{a}_{1G}, \ldots, \dot{a}_{nG})$, y lo denotaremos por $p \Vdash \psi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)$. Notemos que bajo interpretación con un filtro genérico, una fórmula del lenguaje de forcing se convierte en una fórmula de la Teoría de Conjuntos, teniendo como universo de discurso $V[G]$. De lo anterior es fácil ver que para demostrar que una fórmula particular ψ

es consistente relativa a ZFC, basta con construir una noción de forcing $\mathcal{P}$ de tal manera que existe una condición $p \in \mathcal{P}$ tal que $p \Vdash \psi$.

Entre las propiedades importantes de la relación de forcing que utilizaremos se encuentran las siguientes:

i) Si $q \leq p$ y $p \Vdash \psi$, entonces $q \Vdash \psi$.

ii) No existe $p \in \mathcal{P}$ que fuerce ψ y $\neg\psi$ a la vez.

iii) Para cualquier condición p y cualquier fórmula ψ, existe $q \leq p$ tal que $q \Vdash \psi$ ó $q \Vdash \neg\psi$

iv) $p \Vdash \psi$ si y sólo si el conjunto de condiciones $q \leq p$ tal que $q \Vdash \psi$ es denso debajo de p.

v) $p \Vdash \psi \wedge \phi$ si y sólo si $p \Vdash \psi$ y $p \Vdash \phi$.

vi) $p \Vdash \forall x \psi(x)$ si y sólo si para todo $\dot{a} \in V^{\mathcal{P}}$, $p \Vdash \psi(\dot{a})$.

vii) $p \Vdash \exists x \psi(x)$ si y sólo si existe $q \leq p$ y $\dot{a} \in V^{\mathcal{P}}$ tal que $q \Vdash \psi(\dot{a})$.

Se demuestra que $V[G]$ resulta ser un modelo de ZFC, siempre y cuando V ya lo era con anterioridad.

Otras características de la extensión genérica $V[G]$ son las siguientes:

i) V y $V[G]$ tienen los mismos ordinales.

ii) Todos los elementos de V están en $V[G]$.

iii) $V[G]$ resulta ser el mínimo modelo que extiende a V y contiene a G.

Por último presentamos el lema de completitud existencial, que utilizaremos en el lema 3.4.11.

Teorema 1.2.2 (Completitud existencial)**.** *Sean $p \in \mathcal{P}$ y $\psi(x)$ una fórmula tales que $p \Vdash$ "$\exists x \psi(x)$". Entonces existe un $\mathcal{P}$-nombre $\dot{\tau}$ tal que $p \Vdash$ "$\psi(\dot{\tau})$".*

Capítulo 2

LA CONSISTENCIA DE $\neg NCF$

2.1. Consistencia de $\neg NCF$.

Definiciones.

(1) Sean A y B conjuntos. Decimos que A está *casi contenido* en B, si $A \setminus B$ es finito, y lo denotamos por $A \subseteq^* B$.

(2) Una familia de conjuntos $\mathscr{F}$ tiene la *propiedad de la intersección finita fuerte* (PIFF), si cada dos elementos de $\mathscr{F}$ tienen intersección infinita.

(3) Si un conjunto U es tal que para cada $V \in \mathscr{F}$ se tiene $U \subseteq^* V$, llamaremos a U una *pseudointersección* de $\mathscr{F}$.

(4) Una función $f : \omega \to \omega$ es *finito a uno* si para cada $n \in f[\omega]$, $f^{-1}(\{n\})$ es finito.

Cada subconjunto infinito $A = \{a_k\}_{k\in\omega} \subseteq \omega$ (enumeración creciente) define una función finito a uno como sigue

$$f_A(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in [0, a_0] \\ k & \text{si } n \in [a_{k-1}+1, a_k] \end{cases}$$

Como hay $\mathfrak{c}$ subconjuntos infinitos de ω, existen $\mathfrak{c}$ funciones finito a uno.

(5) Sean $\mathcal{U}$ un filtro y $f \in \omega^\omega$. Definimos la *imagen de* $\mathcal{U}$ *bajo* f como sigue:

$$f(\mathcal{U}) = \{A \in \mathcal{P}(\omega) : f^{-1}[A] \in \mathcal{U}\}.$$

Como f^{-1} preserva intersecciones y contenciones, $f(\mathcal{U})$ es un filtro. También f^{-1} preserva complementos, por lo que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, entonces $f(\mathcal{U})$ es un ultrafiltro.

(6) Dados dos filtros $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ sobre ω que contienen todos los conjuntos cofinitos, diremos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son *cercanamente coherentes* si existe una función f finito a uno tal que $f(\mathcal{U}) \cup f(\mathcal{V})$ tiene la propiedad de la intersección finita (PIF).

Presentamos a continuación el principio de Coherencia Cercana de Filtros como la siguiente afirmación:

NCF: Dos filtros cualesquiera $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$, cada uno de los cuales contiene al filtro $\mathcal{F}_{cof}$, son cercanamente coherentes.

Es fácil ver la siguiente equivalencia de NCF.

Teorema 2.1.1. *NCF es verdadero si y sólo si para cualesquiera dos ultrafiltros no principales $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$, existe un función finito a uno f tal que $f(\mathcal{U}) = f(\mathcal{V})$.*

Demostración. Supongamos que NCF es verdadero y sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ ultrafiltros no principales. Entonces existe una función finito a uno tal que $f(\mathcal{U}) \cup f(\mathcal{V})$ tiene la PIF, pero por la observación en el punto (5) de las definiciones anteriores, tenemos que $f(\mathcal{U})$ y $f(\mathcal{V})$ son ultrafiltros, por lo tanto deben de ser iguales (de ser diferentes $f(\mathcal{U}) \cup f(\mathcal{V})$ no tendría la PIF).

Supongamos ahora que para cualesquiera dos ultrafiltros $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ existe una función finito a uno f, de forma que $f(\mathcal{U}) = f(\mathcal{V})$. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ filtros sobre ω, cada uno de los cuales contiene a $\mathcal{F}_{cof}$. Tomemos $\bar{\mathcal{F}}$ y $\bar{\mathcal{G}}$ ultrafiltros que extienden a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, respectivamente. Por hipótesis, existe una función finito a uno f, la cual cumple que $f(\bar{\mathcal{F}}) = f(\bar{\mathcal{G}})$. Entonces $f(\mathcal{F}) \cup f(\mathcal{G}) \subseteq f(\bar{\mathcal{F}})$, por lo que $f(\mathcal{F}) \cup f(\mathcal{G})$ tiene la PIF. □

El resto del capítulo está destinado a probar que NCF no puede ser demostrado a partir de ZFC. Para demostrar esto necesitaremos el siguiente lema.

Lema 2.1.2 (Booth)**.** *Toda familia numerable con la PIFF tiene una pseudointersección infinita.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$ una familia con la PIFF. Definamos recursivamente una sucesión $\{a_i\}_{i \in \omega}$ como sigue:

$$a_0 \in A_0$$
$$a_n \in \bigcap_{i=0}^{n} A_i \ ; \ a_n \neq a_i, \ i \leq n-1$$

Claramente el conjunto formado por los a_i es una pseudointersección de la familia $\mathcal{A}$, dado que a partir de n todos los términos de la sucesión están dentro de A_n. □

El siguiente teorema es debido a Andreas Blass.

Teorema 2.1.3 (A. Blass)**.** *CH implica $\neg NCF$.*

Demostración. Construiremos por recursión dos familias de conjuntos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ con la PIFF, de tal forma que para cada función f finito a uno, existen $U \in \mathcal{F}$ y $V \in \mathcal{G}$ tal que $f[U] \cap f[V] = \emptyset$. Así, los filtros generados por $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ no serán cercanamente coherentes.

Sea $\Lambda = \omega_1 \setminus \{\alpha \in \omega_1 : \alpha \textit{ es ordinal límite}\}$ y tomemos $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una enumeración de las funciones finito a uno. Tomemos f_0 y sean U_0 y V_0 conjuntos infinitos tal que $f_0[U_0] \cap f_0[V_0] = \emptyset$ (esto lo podemos hacer en virtud de que $Im(f_0)$ es infinito, dado que f_0 es finito a uno: basta tomar $A \subseteq Im(f_0)$ infinito de forma que $Im(f_0)\setminus A$ es infinito; hacemos $U_0 = f^{-1}[A]$ y $V_0 = f^{-1}[Im(f) \setminus A]$). Supongamos que hemos construido U_α y V_α para todo $\alpha < \beta$, de manera que si $\gamma \in \Lambda$ y $\gamma < \beta$, entonces $f_\gamma[U_\gamma] \cap f_\gamma[V_\gamma] = \emptyset$. Para β escogemos U_β y V_β como sigue:

(i) Si $\beta = \alpha + 1$. Tenemos dos casos según sea $Z_\beta = f_\beta[U_\alpha] \cap f_\beta[V_\alpha]$ finito ó infinito:

   a) Z_β es finito. En este caso tomamos $U_\beta = U_\alpha$ y $V_\beta = f_\beta^{-1}[f_\beta[V_\alpha] \setminus f_\beta[U_\alpha]]$.

   b) Z_β es infinito. Tomemos $X \subseteq Z_\beta$ infinito tal que $Z_\beta \setminus X$ es infinito, y sean $U_\beta = f_\beta^{-1}[X]$, $V_\beta = f_\beta^{-1}[Z_\beta \setminus X]$.

(ii) Si β es ordinal límite. Como antes de β tenemos solo una cantidad numerable de ordinales, las familias $\{U_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ y $\{V_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ son numerables, y además tienen la PIFF. Aplicando el lema 2.1.2, obtenemos X y Y pseudointersecciones de $\{U_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ y $\{V_\alpha\}_{\alpha<\beta}$, respectivamente. Tomamos $U_\beta = X$ y $V_\beta = Y$.

Hacemos $\mathcal{F} = \{U_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ y $\mathcal{G} = \{V_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$. Por la manera en que se construyeron, es claro que cualesquiera dos filtros generados por $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ no son cercanamente coherentes. $\square$

Cabe mencionar que si en lugar de CH suponemos el axioma de Martin, la demostración anterior puede ser adaptada para obtener $MA \Longrightarrow \neg NCF$. En efecto, lo único que debemos cambiar es la manera en la cual escogemos los conjuntos en el paso límite. Diremos que una sucesión $s \in \omega^{<\omega}$ es *rápida* si es estrictamente creciente y no contiene 2 términos consecutivos. Definimos el siguiente conjunto:

$$\mathbb{P} = \{r \in \omega^{<\omega} : r \ \textit{es rápida}\}$$

Dotamos a $\mathbb{P}$ del orden parcial dado por contención inversa, es decir, $s \leq r$ si y solo si $r \subseteq s$. La modificación procede de la manera siguiente:

(ii') Sea $\beta < \mathfrak{c}$ ordinal límite. Sean $\{U_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ y $\{V_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ como como en (ii) de la demostración anterior, con la posible excepción de que β puede ser no numerable. Para cada $\alpha < \beta$ sea $D_\alpha = \{s \in \mathbb{P} : \max(s) \in U_\alpha \ y \ s(|s|-2) \in \omega \setminus U_\alpha\}$. Cada D_α es denso. Ahora, para cada $s \in D_\alpha$, tomemos $E_{\alpha,s} = \{r \in D_\alpha : r < s\} \cup \{r \in \mathbb{P} : r \perp s\}$. Entonces cada $E_{\alpha,s}$ es denso en $\mathbb{P}$. Tomemos la familia de conjuntos $\mathcal{D} = \{E_{\alpha,s} : \alpha <$

$\beta,\ s \in D_\alpha\} \cup \{D_\alpha\}_{\alpha<\beta}$. Entonces $\mathcal{D}$ tiene cardinalidad estrictamente menor que $\mathfrak{c}$. Por MA existe G filtro $\mathcal{D}$-genérico. Tomemos $f = \bigcup G$. Dado que G es una familia de funciones compatibles, f es una función. Sea $U = Im(f)$. Veamos que $U \cap U_\alpha$ es infinito para cada $\alpha < \beta$. Fijemos α. Inductivamente construimos una sucesión $\{s_k : k \in \omega\} \subseteq G$ tal que para cada k, $\max(s_k) \in U_\alpha$. Esto lo hacemos como sigue:

a) Para $k = 0$, tomamos $s_0 \in \mathcal{D}_\alpha \cap G$.

b) Supongamos que hemos construido el término n-ésimo de la sucesión. Tomemos a s_n, y escojamos $s_{n+1} \in E_{\alpha,s_n} \cap G$.

De esta manera, cada s_n tiene su máximo en U_α, y dado que la sucesión $\{s_k : k \in \omega\}$ es estricamente creciente respecto a la contención, $U \cap U_\alpha$ es infinito. Notemos también que por la manera en que se construyó $\mathcal{D}_\alpha$, $U \setminus U_\alpha$ es no vacío, y por la manera en que se eligió $\mathbb{P}$, $U \neq \omega$. Hacemos $U_\beta = U$. Para construir V_β procedemos de manera similar.

Así, queda demostrado el teorema mencionado.

Teorema 2.1.4. *MA implica$\neg NCF$.* □

Como se ha dicho en la sección 2 del capítulo anterior, tanto CH como MA son relativamente consistentes con ZFC, por lo que tambén lo es cualquiera de las consecuencias de estas dos hipótesis. Tenemos por lo tanto, que $Con(ZFC + CH) \implies Con(ZFC + \neg NCF)$, y $Con(ZFC + MA) \implies Con(ZFC + \neg NCF)$, con lo que establecemos el objetivo del capítulo.

Teorema 2.1.5. *Si ZFC es una teoría consistente, entonces también lo es la teoría $ZFC + \neg NCF$.* □

Capítulo 3

LA INDEPENDENCIA DE NCF

Al término del capítulo anterior se mencionaron algunas hipótesis que implican la negación de NCF. Estas hipótesis pueden considerarse a la vez información heurística en el estudio de la consistencia de NCF. En [Bla86], A. Blass demuestra que NCF implica que existen ultrafiltros con bases de cardinalidad estrictamente menor que $\mathfrak{d}$. En ese mismo artículo prueban también que NCF implica la desigualdad estricta entre $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$. Todos estos resultados proporcionan información que descarta los modelos de Laver, Cohen, Mathias, Random reals y Sacks como posibles modelos en los cuales investigar la consistencia de NCF, dejando un modelo ya existente en el cual experimentar: el modelo de Miller.

La primer prueba de la consistencia de NCF no fue realizada de la manera anterior, pero no por eso el valor heurištico de la información del parrafo precedente puede ser despreciado. La primera demostración de $Con(ZFC) \Rightarrow$

$Con(ZFC + NCF)$ fue dada conocer en [BS87b]. En ese mismo artículo se demuestra que la existencia de $p_{\aleph_1}$-puntos y $p_{\aleph_2}$-puntos es consistente. La noción de forcing allí utilizada fue construida con la intención de probar la consistencia relativa a ZFC de las dos hipótesis, mutuamente incompatibles, haciendo solamente ligeras modificaciones en las demostraciones.

En [BS87a], Blass y Shelah presentan una demostración más sencilla. El propósito de este capítulo es estudiar tal demostración. Comenzaremos por presentar el forcing de Miller y los resultados que necesitaremos de él.

3.1. El forcing de Miller

En lo subsecuente se presentará y estudiará el forcing de Miller, que nos mantendrá ocupados en la primera parte de este capítulo. Esta noción de forcing fue introducida por Arnold W. Miller en 1984, en su artículo "*Rational Perfect Set Forcing*". Él mismo lo describe como "una noción de forcing intermedia entre el forcing de Sacks y el forcing de Laver". Una idea topológica de como construir este forcing es tomar conjuntos perfectos $P \subseteq 2^\omega$ de tal manera que los racionales (sucesiones de 0's y 1's eventualemente iguales a 0) que contienen los conjuntos P, son densos en P. Sin embargo, una construcción combinatoria resulta más útil. No se realizará un estudio exhaustivo de tal orden parcial, pero si se analizarán todas las propiedades que nos serán de utilidad. El lector interesado puede consultar [Mil84] para un estudio detallado.

Sea $T \subseteq \omega^{<\omega}$. Diremos que T es un *árbol* si T es no vacío, y para cada $s \in T$ y $n < |s|$ tenemos $s{\restriction}n \in T$. Notemos que $\emptyset \in T$ para todo árbol T.

Los elementos de T son llamados *nodos*. Si T tiene un nodo $s \in T$ no vacío, tal que para todo $t \in T$ $t \subseteq s$ o $s \subseteq t$, y s es $\subseteq$-maximal en T con respecto a esta propiedad, s será llamado *tronco* de T.

Si $r,\ s \in T$, decimos que r *es sucesor de* s si existe $n \in \omega$ tal que $s^\frown n = r$. Si $s \subseteq r$, diremos que r es una *extensión* de s en T. Para cada nodo $s \in T$ definimos el *conjunto de sucesores* de s en T como $succ_T(s) = \{n \in \omega : s^\frown n \in T\}$. Un nodo s será de *ramificación infinita* si $succ_T(s)$ es infinito.

Dado $X \subseteq \omega$, definimos $SP(T, X)$ como el conjunto de nodos en T de ramificación infinita con máximo en X. Si $X = \omega$ escribimos simplemente $SP(T)$.

Sean T un árbol y $s \in T$ un nodo, definimos *el nivel de ramificación de s en T*, denotado $R_T(s)$, a ser el número

$$R_T(s) = |\{i \leq |s| : succ_T(s \upharpoonright i)\ es\ infinito\}|.$$

Sea $n \geq 1$. El *n-ésimo nivel de ramificación de T* será el siguiente conjunto:

$$N_T(n) = \{s \in T : R_T(s) = n\ y\ s\ es\ minimal\ con\ esta\ propiedad\}.$$

Es decir, $N_T(n)$ son todos los nodos de ramificación infinita tales que antes de cada uno de ellos hay exactamente $n - 1$ nodos de ramificación infinita. Para $n = 0$ convenimos $N_T(0) = \emptyset$.

Si T es un árbol y si para cada nodo $s \in T$ existe $r \in T$ extensión de s que es de ramificación infinita, diremos que T es árbol *superperfecto*.

Definición 3.1.1. Definimos el *forcing de Miller* $\mathbb{M}$, como el conjunto formado por todos los árboles superperfectos que constan de sucesiones finitas estrictamente crecientes, parcialmente ordenado por contención.

Sean $T \in \mathbb{M}$ y $s \in SP(T)$, definimos T_s como el conjunto $\{r \in T : r \subseteq s \text{ o } s \subseteq r\}$. Es inmediato que T_s es árbol superperfecto, tiene tronco s y que $T_s \leq T$. Con esto tenemos que el conjunto de todos los árboles con tronco es un conjunto denso en $\mathbb{M}$, por lo que si G es $\mathbb{M}$-genérico sobre V, G intersecta a tal denso, y debido a que G es filtro, si dos condiciones con tronco están en G, un tronco debe extender al otro. Por lo tanto el conjunto $\{s \in \omega^{<\omega} : (\forall T \in G)(s \in T)\}$ es no vacio, y por la genericidad de G, determina una función estrictamente creciente en ω que no pertenece al modelo base, dada por $\bigcup\{s \in \omega^{<\omega} : (\forall T \in G)(s \in T)\}$. Esta función la denotaremos por $\bar{G}$.

Si $A \subseteq T$ es un conjunto de nodos incomparables en T, y $\{q^s : s \in A\}$ es un conjunto de condiciones en $\mathbb{M}$ tal que $q^s \leq T_s$, llamaremos la *amalgamación* de $\{q^s : s \in A\}$ en T al árbol $Am_T(\{q^s : s \in A\}) = \bigcup\{q^s : s \in A\}$. De esta definición se sigue que $Am_T(\{q^s : s \in A\}) \in \mathbb{M}$ y que $Am_T(\{q^s : s \in A\}) \leq T$.

Lema 3.1.2. *Si T y S son tales que $N_T(n) = N_S(n)$ para algún $n > 0$, entonces $N_T(k) = N_S(k)$ para todo $k \leq n$.*

Demostración. La demostración es por inducción sobre n. Para $n = 1$ es inmediato: $N_T(0) = \emptyset = N_S(0)$. Supongamos que es cierto para n. Basta demostrar que $N_T(n+1) = N_S(n+1)$ implica $N_T(n) = N_S(n)$. Tomemos $s \in N_T(n)$, por ser T árbol superperfecto, existe $t \in N_T(n+1)$ que extiende a s. Entonces $t\upharpoonright|s| \in S$, y como $s = t\upharpoonright|s|$, tenemos $s \in S$. De la misma manera vemos que para cada $m \in succ_T(s)$, $s^\frown m \in S$, por lo que s tiene infinitos sucesores en S. Por ser $s = t\upharpoonright|s|$ para algún $t \in N_S(n+1)$, $R_S(s) \leq n$. Supongamos $R_S(s) < n$, entonces existe $r \in N_S(n)$ que extiende a s, y por cada $m \in succ_S(r)$ tenemos un nodo $t_m \in N_S(n+1)$ que extiende a $r^\frown m$, por lo que $r^\frown m \in T$ para cada $m \in succ_S(r)$, por lo que $r \in SP(T)$, como extiende a s, antes de r hay n nodos de ramificación infinita, por lo tanto $R_T(r) = n+1$, y $r \in N_T(n+1) = N_S(n+1)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $R_S(s) = n$, y por ser s de ramificación infinita en S, $s \in N_S(n)$. Con esto hemos demostrado que $N_T(n) \subseteq N_S(n)$. La otra contención se demuestra de manera similar. $\square$

Definición 3.1.3. Para cada $n \in \omega$ definimos una relación de orden $\leq_n$ como sigue:

$$S \leq_n T \iff S \leq T \text{ y } N_S(n) = N_T(n)$$

Gracias al lema anterior, $S \leq_n T$ implica $S \leq_k T$ para toda $k \leq n$. Entonces $\leq_n \subseteq \leq_k$ para toda $k \leq n$, en particular, para cada $n \in \omega$, se cumple $\leq_{n+1} \subseteq \leq_n$. De esta manera, obtenemos una sucesión decreciente $\{\leq_n\}_{n\in\omega}$ de órdenes parciales sobre $\mathbb{M}$. Observese que $\leq_0 = \leq$.

Una sucesión $\{T^n\}_{n\in\omega} \subseteq \mathbb{P}$ tal que $T^n \geq_n T^{n+1}$ para toda n es llamada una *sucesión de fusión*. El siguiente lema muestra una propiedad importante de las sucesiones de fusión en el forcing de Miller.

Lema 3.1.4 (de fusión)**.** *Para cualquier* $\{T^n\}_{n\in\omega} \subseteq \mathbb{M}$*, sucesión de fusión, existe una condición* $T^\omega \in \mathbb{M}$ *tal que* $T^\omega \leq_n T^n$ *para cada* $n \in \omega$*.*

Demostración. Tomemos $T^\omega = \bigcap_{n\in\omega} T^n$. Si $s \in T^\omega$, entonces para todo $k < |s|$, $s \upharpoonright k \in T^\omega$, por ser cada T^n árbol, por lo que T^ω es árbol. Veamos que T^ω es un árbol superperfecto. Sea $s \in T^\omega$, y $n = R_{T^\omega}(s)$. Tomemos $r \in N_{T^{n+1}}(n+1)$ extensión de s. Por el lema 3.1.2, r es nodo de ramificación infinita en T^{n+2}, y cada nodo sucesor t de r en T^{n+2} tiene una extensión $r_t \in N_{T^{n+2}}(n+2)$. Nuevamente por el lema 3.1.2, $N_{T^{n+2}}(n+2)$ está contenido en todo T_k para $k \geq n+2$, por lo que $\{r_t : t \in succ_{T^{n+2}}(r)\}$ está contenido en T^ω, y por ser T^ω árbol, cada t nodo sucesor de r en T^{n+2} está en T^ω. Por lo tanto T^ω es árbol superperfecto. □

Corolario 3.1.5. *El conjunto de árboles superperfectos tales que todos sus nodos de ramificación son de ramificación infinita es denso en* $\mathbb{M}$.

Demostración. Sea $T \in \mathbb{M}$. Construyamos una sucesión de fusión recursivamente. Tomemos un nodo $s \in SP(T)$. Hagamos $T^0 = T$ y $T^1 = T_s$. Supongamos que hemos construido la sucesión hasta el término n-ésimo de tal manera que para cualquier nodo $s \in N_{T^n}(n)$, si para algún $k \leq |s|$, $s \upharpoonright k$ es de ramificación, entonces es de ramificación infinita. Para cada $s \in N_{T^n}(n)$ y cada $k \in succ_{T^n}(s)$ sea $r(s,k) \in SP(T^n)$ extensión de $s^\frown k$. Definimos T^{n+1} como el siguiente árbol:

$$T^{n+1} = Am_{T^n}(\{T^n_{r(s,k)} : s \in N_{T^n}(n+1) \wedge k \in succ_{T^n}(s)\}).$$

Por la manera en que se construyó T^{n+1} es claro que $T^{n+1} \leq_n T^n$. También cumple que para cada $s \in N_{T^{n+1}}(n+1)$ todos los nodos de ramificación antes de s son de ramificación infinita. Por el lema de fusión existe una condición T^ω tal que $T^\omega \leq_n T^n$ para todo n. Todos los nodos de ramificación de T^ω son de ramificación infinita. □

Definición 3.1.6. Decimos que un árbol $T \in \mathbb{M}$ tiene *estructura de intervalo* si existe una partición $\{I_k\}_{k\in\omega}$ de ω en intervalos finitos de tal forma que para cada nodo $s \in T$ de ramificación infinita se tiene lo siguiente:

a) Si $\max(s) \in I_k$, entonces para cada $m > k$, $|succ_T(s) \cap I_m| = 1$, y para cada $m \leq k$, $succ_T(s) \cap I_m = \emptyset$.

b) Para cada $n \in succ_T(s)$, existe $b \in T$ de ramificación infinita tal que $s \subseteq b$ y $\max(b)$ está en el mismo intervalo que n.

El conjunto de los árboles con estructura de intervalo lo denotaremos por $\mathcal{IS}$.

Teorema 3.1.7. *$\mathcal{IS}$ es denso en $\mathbb{M}$.*

Demostración. Sea $T \in \mathbb{M}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que T tiene tronco t y que todos sus nodos de ramificación tienen una infinidad de sucesores. Construiremos recursivamente una sucesión decreciente $T = T^0 \geq T^1 \geq T^2 \ldots$ tal que para cada $k \in \omega$, T^k tiene definida una estructura de intervalo parcial sobre un subárbol finito, dada por $k+1$ intervalos consecutivos.

Definamos I_0 a ser el intervalo $[0, a_0]$, donde $a_0 = \max(t)$. Tomemos $n_0 = \min\ succ_T(t)$, y sea $r \in T$ tal que $t^\frown n_0 \subseteq r$, r tiene longitud mínima y $succ_T(r)$ es infinito. Si existieran varios con la misma longitud mínima, tomamos el que tiene el menor término máximo. Tomemos ahora $a_1 = \max(r)$ y hagamos $I_1 = [a_0 + 1, a_1]$. Obtenemos T^1 de la siguiente manera:

(i) Para cada $n \in succ_T(t)$, si $n > a_1$, tomamos $T_{t^\frown n}$. Llamemos A a esta familia de condiciones. Es decir, sea $A = \{T_{t^\frown n} : n > a_1\}$.

(ii) Para $n \in succ_T(r)$, si $n > a_1$, tomamos $T_{r^\frown n}$. La familia de condiciones obtenida la llamamos B. Es decir, sea $B = \{T_{r^\frown n} : n > a_1\}$.

(iii) Hacemos $T^1 = Am_T(A \cup B)$.

De manera general, supongamos que hemos construido hasta el término k-ésimo de la sucesión, tenemos $I_0,\ I_1,\ \ldots,\ I_k$ intervalos que proporcionan estructura de intervalo parcialmente a la condiciones construidas y que los nodos de ramificación infinita en T^k que tienen su máximo en $I_k = [a_{k-1}+1, a_k]$, tienen todos sus nodos sucesores después de a_k.

Primero, para cada $s \in SP(T^k, [0, a_{k-1}])$ tomemos $A_s = \{m \in succ_{T^k}(s) : a_k < m\}$. Sea $a \in \omega$ tal que para todo $s \in SP(T^k, [0, a_{k-1}])$, $A_s \cap [a_k+1, a] \neq \emptyset$.

Ahora, para cada $s \in SP(T^k, [0, a_{k-1}])$, tomemos un solo $n_s \in A_s$, y sea $r_s \in T^k$ de forma que $s^\frown n_s \subseteq r_s$, r_s es de ramificación infinita y tiene longitud mínima. Escojamos $b \in \omega$ para el cual todo $\max(r_s) \leq b$, siendo $s \in SP(T^k, [0, a_{k-1}])$.

Para cada $s \in SP(T^k, I_k)$ tomemos $m_s = \min\ succ_{T^k}(s)$, y sea $t_s \in T_k$ tal que $s^\frown m_s \subseteq t_s$, t_s es de ramificación infinita y tiene longitud mínima. Tomemos $c \in \omega$ de forma que para todo $s \in SP(T^k, I_k)$, $\max(t_s) \leq c$.

Tomemos $a_{k+1} = \max\{a, b, c\}$. Definimos T^{k+1} como sigue:

(i) Para cada $s \in SP(T^k, [0, a_{k-1}])$, si $m \in succ_{T^k}(r_s)$ es tal que $m \geq a_{k+1}$, tomamos $T^k_{r_s^\frown m}$. Sea $A_1 = \{T^k_{r_s^\frown m} : s \in SP(T^k, [0, a_{k-1}]) \wedge m \in succ_{T^k}(r_s) \wedge m \geq a_{k+1}\}$.

(ii) Para cada $s \in SP(T^k, [0, a_k])$, si $m \in succ_{T^k}(s)$ es tal que $m \geq a_{k+1}$ tomamos $T^k_{s^\frown m}$. Hacemos $A_2 = \{T^k_{s^\frown m} : s \in SP(T^k, [0, a_k]) \wedge m \in succ_{T^k}(s) \wedge m \geq a_{k+1}\}$.

(iii) Para cada $s \in SP(T^k, I_k)$, si $m \in succ_{T^k}(t_s)$ es tal que $m \geq a_{k+1}$, escogemos $T^k_{t_s^\frown m}$. Tomamos $A_3 = \{T^k_{t_s^\frown m} : s \in SP(T^k, I_k) \wedge m \in succ_{T^k}(t_s) \wedge$

$m \geq a_{k+1}\}$.

(iv) Para cada $s \in SP(T^k, I_k)$, si $m \in succ_{T^k}(s)$ es tal que $m \geq a_{k+1}$ tomamos $T^k_{s^\frown m}$. Hacemos $A_4 = \{T^k_{s^\frown m} : s \in SP(T^k, I_k) \wedge m \in succ_{T^k}(s)$ $\wedge m \geq a_{k+1}\}$.

(v) Hacemos $T^{k+1} = Am_{T^k}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$.

Una vez construida la sucesión $\{T^n\}_{n\in\omega}$, tomamos $T^\omega = \bigcap_{n\in\omega} T^n$. Veamos que T^ω tiene estructura de intervalo dada por $\{I_n\}_{n\in\omega}$. Sean $k \in \omega$ y $s \in SP(T^\omega, I_k)$. Entonces en T^{k+1}, por la manera en que se construyó, s tiene un solo nodo sucesor en I_{k+1}, y todos los demás después de a_{k+1}. Análogamente, en T^{k+2}, s tiene el mismo nodo sucesor en I_{k+1}, uno solo en I_{k+2}, y todos los demás después de a_{k+2}. Para cualquier $n \geq k$ y $m \in [a_k + 1, n]$, s tiene un solo nodo sucesor con máximo en I_m dentro del árbol T^n, y todos los demás tienen máximos mayores a a_n. Por ser T^ω la intersección de todos los T^n, s tiene un solo nodo sucesor en I_n para cada $n \geq k$. También, para cada $m \in succ_{T^\omega}(s)$, si $m \in I_n$, $n > k$, al construir el intervalo I_n se aseguro que existiera un nodo de ramificación infinita t con máximo en I_n, que extendiera a $s^\frown m$, y que todos sus sucesores estuvieran después de a_n, por lo que la segunda condición de la definición también se cumple. □

Lema 3.1.8. *Dados un conjunto $X \in [\omega]^\omega$ y $T \in \mathcal{IS}$, existe un árbol $S \in \mathcal{IS}$, $S \leq T$ tal que cada intervalo J_k intersecta al conjunto X.*

Demostración. Sea $\{I_n : n \in \omega\}$ una sucesión de intervalos que estructuran a T. Hagamos $J'_k = I_{n_k}$ tal que $X \cap I_{n_k} \neq \emptyset$. Construiremos una sucesión de fusión $T = T^0 \geq_0 T^1 \geq_1 T^2 \geq_2 \ldots$. Sea $s \in T$ nodo de ramificación infinita que tiene su máximo en J'_0 y tomemos $T^1 = Am_T(\{s^\frown n : n \in succ_T(s) \wedge (\exists k > 0)(n \in J'_k)\})$. Supongamos que hemos construido el término n-ésimo de la sucesión de tal manera que para cada $s \in N_{T^n}(n)$ cada $j \in succ_{T^n}(s)$ está en un J'_k. Para cada $s \in N_{T^n}(n+1)$, sea A_s el conjunto de sucesores de s que están en uno de los J'_k. Tomemos $T^{n+1} = Am_{T^n}(\{T^n_{s^\frown j} : j \in A_s, s \in N_{T^n(n+1)}\})$.

Sea $S = \bigcap_{n\in\omega} T^n$. Sea J_k la unión de los intervalos entre J'_{k-1}(sin incluir) y J'_k(inclusive) para $k \geq 1$, y $J'_0 = \{n \in \omega : n \leq \text{máx}(J_0)\}$. Entonces $\{J_n\}_{n\in\omega}$ da estructura de intervalo a S. $\square$

Regresemos con nuestra función genérica $\bar{G}$. Al ser $\bar{G}$ una función estrictamente creciente, nos define una partición de ω en intervalos finitos, dada por

$$I_k = \begin{cases} [0, \bar{G}(0)] & \text{si } k = 0, \\ (\bar{G}(k-1), \bar{G}(k)] & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Con esta partición definimos una nueva función f_G, dada por $f_G(n) = k$ si $n \in I_k$. El siguiente lema presenta una propiedad muy importante de f_G.

Lema 3.1.9. *Sean $X \subseteq \omega$ y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal, ambos en el modelo base V. Sea G conjunto $\mathbb{M}$-genérico sobre V. Entonces existe un conjunto $Y \in \mathcal{U}$ tal que $f_G[Y] \subseteq f_G[X]$.*

Demostración. Sean $X \subseteq \omega$ y $\mathcal{U}$ como en las hipótesis. Demostraremos que el conjunto

$$\{T \in \mathbb{M} : (\exists Y \in \mathcal{U})(T \Vdash \text{“}f_G(Y) \subseteq f_G(X)\text{”})\}$$

es denso. Tomemos una condición $T \in \mathbb{M}$. Gracias a los dos lemas precedentes podemos suponer que $T \in \mathcal{IS}$ y que todos los intervalos I_k intersectan a X. Por ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, $\bigcup_{k\in\omega} I_{2k} \in \mathcal{U}$ ó $\bigcup_{k\in\omega} I_{2k+1} \in \mathcal{U}$. Denotemos por Y' a la unión que está en $\mathcal{U}$. Por el lema anterior existe una extensión S de T tal que todos los intervalos que estructuran a S intersectan a Y'. Como $S \Vdash$ "$S \in G$", S también fuerza cualquier consecuencia de "$S \in G$". De esta manera, $S \Vdash$ "$\bar{G} \subseteq \bigcup S$". Tomemos uno de los intervalos I_k contenidos en Y', y que están después del intervalo en el cual está el máximo del tronco t de S. Por la manera en que se eligio S, cada sucesor de $s \in SP(S, I_{k-1})$ tiene su máximo a partir del intervalo I_{k+1}, por lo que el intervalo $[\text{máx}(s), m]$ siendo $m \in succ_S(s)$, siempre contiene al intervalo I_k completo. Por lo tanto, $S \Vdash$ "$(\exists n \in \omega)(I_k \subseteq (\bar{G}(n), \bar{G}(n+1)])$". Como supusimos que X intersectaba a todos los intervalos I_k, tenemos que $S \Vdash$ "$(\exists n \in \omega)(I_k \cap X \cap (\bar{G}(n), \bar{G}(n+1)] \neq \emptyset)$". Como antes de $\text{máx}(t)$ hay solamente una cantidad finita de intervalos I_i y $\mathcal{U}$ es no principal, el conjunto $Y = \{n \in Y' : n > \text{máx}(t)\}$ está en $\mathcal{U}$. Por la definición de f_G, $S \Vdash$ "$f_G(Y) \subseteq f_G(X)$". $\square$

En [Tom93], ha sido demostrado que siempre que un forcing agrega nuevos reales al modelo base, también se *destruyen ultrafiltros*. Lo anterior en el sentido de que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en el modelo base, $\mathcal{U}$ no necesariamente genera un ultrafiltro en la extensión genérica. Denotaremos por $\langle\mathcal{U}\rangle$ el filtro generado por $\mathcal{U}$ en la extensión genérica.

El siguiente teorema goza de elevado grado de importancia para nuestro propósito, ya que nos dice que al extender una vez con el de Miller, los ultrafiltros del modelos base son acercados coherentemente en la extensión genérica, mediante la misma función. Resulta ser uno de los puntos clave en la demostración que presentamos de $Con(ZFC) \Longrightarrow Con(ZFC + NCF)$.

Teorema 3.1.10. *Si $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ son ultrafiltros no principales que están en el modelo base, entonces $\langle\mathcal{U}\rangle$ y $\langle\mathcal{V}\rangle$ son cercanamente coherentes en $V[G]$.*

Demostración. Sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ ultrafiltros no principales en el modelo base V. Entonces $\langle\mathcal{U}\rangle$ y $\langle\mathcal{V}\rangle$ son filtros en la extensión genérica. Sea $X \in f_G(\langle\mathcal{U}\rangle)$. Existe $Z \in \mathcal{U}$ tal que $Z \subseteq f_G^{-1}[X]$. Por el lema anterior existe $Y \in \mathcal{V}$ tal que $f_G[Y] \subseteq f_G[Z] \subseteq X$. Por lo tanto $f_G(\langle\mathcal{U}\rangle) \subseteq f_G(\langle\mathcal{V}\rangle)$, por lo que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son cercanamente coherentes. □

3.2. Miller y filtros en el modelo $V[G]$.

Lema 3.2.1. *Sea $T \in \mathbb{M}$. Si $SP(T)$ es partido en dos conjuntos, entonces existe un árbol $S \leq T$ tal que $SP(S)$ está contenido en uno solo de los dos conjuntos.*

Demostración. Sea A, B una partición de $SP(T)$. Si existe un nodo $s \in T$ tal que $T_s \cap SP(T) \subseteq A$ ó $T_s \cap SP(T) \subseteq B$, entonces T_s es la extensión buscada. En cambio, si para cualquier nodo $s \in T$ existen extensiones tanto en A como en B, construimos una sucesión de fusión como sigue:

i) Tomamos $s \in A$, y hacemos $T^0 = T$ y $T^1 = T_s$.

ii) Para cada sucesor $n \in succ_{T_s}(s)$ tomamos $r_n \in A$ extensión de $s^\frown n$, y hacemos $T^2 = Am_{T^1}(\{T^1_{r_n} : n \in succ_{T_s}(s)\})$. Claramente cada $r_n \in SP(T^2)$.

iii) Supongamos que hemos construido hasta el término T^n de tal manera que los k-nodos de ramificación para $k \leq n$, están todos en A. Para cada $s \in N_{T^n}(n)$ y cada $k \in succ_{T^n}(s)$, tomamos $r_{s,k} \in A$ extensión de $s^\frown k$, y hacemos $T^{n+1} = Am_{T^n}(\{T^n_{r_{s,k}} : s \in N_{T^n}(n), k \in succ_{T^n}(s)\})$.

Tomemos $S = \bigcap_{n\in\omega} T^n$. Por la manera en que se construyó S, tiene todos sus nodos de ramificación infinita en A. $\square$

Lema 3.2.2. *Sean $T \in \mathbb{M}$ y $\dot{X}$ un $\mathbb{M}$-nombre tal que $T \Vdash$ "$\dot{X} \subseteq \omega$". Entonces para cada nodo $s \in SP(T)$, existe una extensión $R \leq T_s$ y un conjunto $Y_s \subseteq \omega$ de tal forma que $s \in SP(R)$, y para todo $n \in \omega$, y casi todo[1] $m \in succ_R(s)$, se tiene $R_{s^\frown m} \Vdash$ "$\dot{X} \cap n = Y_s \cap n$".*

Demostración. Tomemos $s \in SP(T)$, y para cada $n \in succ_T(s)$, sea $R_n \leq T_{s^\frown n}$ una extensión que decide[2] si "$k \in \dot{X}$", para cada $k \leq n$. Tomemos $n_0 = \text{mín } succ_T(s)$. Existen 2^{n_0+1} combinaciones distintas en las cuales pueden aparecer los elementos de $[0, n_0]$ en $\dot{X}$. Como n_0 es el mínimo de los sucesores de s en T y cada R_n decide a $[0, n] \cap \dot{X}$, existen una infinidad de condiciones R_n las cuales deciden a $[0, n_0] \cap \dot{X}$ en la misma manera. Sea $\{R_{f_0(k)} : k \in \omega\}$ una subsucesión tal que todos los $R_{f_0(k)}$ deciden a $[0, n_0] \cap \dot{X}$ en la misma manera. Tomemos $S_0 = R_{f_0(0)}$. Ahora, tomemos el intervalo $[0, f_0(1)]$. De forma análoga, existe una infinidad de condiciones $R_{f_0(k)}$ que deciden a $[0, f_0(1)] \cap \dot{X}$ en la misma manera. Tomemos $\{R_{f_1(k)} : k \in \omega\}$ subsucesión de tal forma que todos sus elementos deciden igualmente a $[0, f_0(1)] \cap \dot{X}$, y hagamos $S_1 = R_{f_1(1)}$. De forma general, supongamos que tenemos constru-

[1] Esto es, todos a posible excepción de una cantidad finita.

[2] Para abreviar, diremos que la condición $T_{s^\frown n}$ decide a $[0, n] \cap \dot{X}$.

idos, para $j \leq n$, S_j y subsucesiones $\{R_{f_j(k)} : k \in \omega\}$, de tal manera que para cada $j < n$,

i) $\{R_{f_{j+1}(k)} : k \in \omega\}$ es subsucesión de $\{R_{f_j(k)} : k \in \omega\}$.

ii) Para cada $k \in \omega$, $R_{f_j(k)}$ decide a $[0, f_{j-1}(j)] \cap \dot{X}$, para $j > 0$.

iii) $S_j = R_{f_j(0)}$.

Tomemos el intervalo $[0, f_n(n+1)]$, repitiendo el argumento ya mencionado, encontramos una subsucesión $\{R_{f_{n+1}(k)} : k \in \omega\}$ de tal forma que todos sus términos deciden a $[0, f_n(n+1)] \cap \dot{X}$ en la misma manera. Hagamos $S_{n+1} = R_{f_{n+1}(0)}$.

Una vez construida la sucesión $\{S_n : n \in \omega\}$, tomemos $R = Am_T(\{S_n : n \in \omega\})$. Afirmamos que R cumple lo requerido. En efecto, por la manera en que se eligieron los S_n, cada uno decide cuales elementos del intervalo $[0, f_n(n+1)]$ pertenecen $\dot{X}$. Notemos que $succ_R(s) = \bigcup_{n\in\omega} succ_{S_n}(s)$. Como cada una de las funciones f_j que aparecen en la construcción es estrictamente creciente, tenemos que $f_j(k) \geq k$, para todo $k \in \omega$. Tomemos $Y_s = \{k \in \omega : (\exists n \in \omega)(S_n \Vdash \text{“}k \in \dot{X}\text{”})\}$. Sea $n \in \omega$ y consideremos S_n. Entonces S_n decide a $[0, f_n(n)] \cap \dot{X}$, por lo que también decide cuales elementos en el intervalo $[0, n)$ están en $\dot{X}$, los cuales son precisamente $Y_s \cap n$. Para cada $k \geq n$, S_k decide a $[0, f_n(n)] \cap \dot{X}$ en la misma manera que lo hace S_n, por lo que para todo $k \geq n$, se tiene $S_k \Vdash \text{“}\dot{X} \cap n = Y_s \cap n\text{”}$. □

Lema 3.2.3. *Sea $\dot{X}$ un $\mathbb{M}$-nombre y $T \in \mathbb{M}$ tal que $T \Vdash \text{“}\dot{X} \subseteq \omega\text{”}$. Entonces existe una extensión $S \leq T$ tal que para todo $s \in SP(S)$, existe un conjunto $Y_s \subseteq \omega$ de forma que para todo $n \in \omega$, y casi todo $m \in succ_S(s)$, se tiene*

$$T_{s^\frown m} \Vdash \text{“}\dot{X} \cap n = Y_s \cap n\text{”}$$

Demostración. Construimos una sucesión de fusión como sigue:

i) $T^0 = T$.

ii) Supongamos construido T^n. Para cada $s \in N_{T^n}(n)$, sean R_s y Y_s como en el lema anterior, y hagamos $T^{n+1} = Am_{T^n}(\{R_s : s \in N_{T^n}(n)\})$.

Claramente $S = \bigcap_{n\in\omega} T^n$ satisface el teorema. □

Lema 3.2.4. *Si $\mathcal{U}$ es un p-punto, entonces $\mathcal{U}$ genera un ultrafiltro en la extensión genérica.*

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en el modelo base, $\dot{X}$ un $\mathbb{M}$-nombre y $T \in \mathbb{M}$ tal que $T \Vdash$ “$\dot{X} \subseteq \omega$”. Demostraremos que existe una condicón $R \leq T$ y un conjunto $A \in \mathcal{U}$ tales que $R \Vdash$ “$A \subseteq \dot{X}$” ó $R \Vdash$ “$A \cap \dot{X} = \emptyset$”. Por el lema anterior, existe una extensión $R^1 \leq T$ tal que para cada $s \in SP(R^1)$ existe Y_s de manera que para cada $n \in \omega$, y para casi todo $m \in succ_{R^1}(s)$, $R^1_{s^\frown m} \Vdash$ “$\dot{X} \cap n = Y_s \cap n$”. Tomemos $A = \{s \in SP(R^1) : Y_s \in \mathcal{U}\}$ y $B = SP(R^1) \setminus B$. Por el lema 3.2, existe $R^2 \leq R^1$ tal que $SP(R^2) \subseteq A$ ó bien $SP(R^2) \subseteq B$. Supongamos que $SP(R^2) \subseteq A$. El caso $SP(R^2) \subseteq B$ se trata de manera analoga, tomando $\omega \setminus Y_s$, para cada $s \in B$. Sea $Y \in \mathcal{U}$ pseudointersección de A. Construimos una sucesión de nodos $\{s_n : n \in \omega\}$ y una sucesión $\{k_n : n \in \omega\}$. Para esto tomemos nuestra función ρ, la biyección entre ω y $\omega \times \omega$ mencionada en el capítulo 1. Procedemos de la siguiente manera:

i) Tomamos un nodo arbitrario $s \in SP(R^2)$, y hacemos $s_0 = s_1 = s$, $k_0 = 0$. Podemos suponer que $Y \subseteq Y_{s_0}$.

ii) Supongamos que hemos construido hasta el término s_{n+1} de la sucesión de nodos, y hasta el término k_n de la sucesión de naturales. Construiremos s_{n+2} y k_{n+1}. Tomemos $\rho(n+2) = (m,l)$. Dado que $n + 2 > \text{máx}\{m,l\}$, tenemos que s_m ya ha sido definido. Tomemos $j \in succ_{R^2}(s_m)$ de tal forma que $R^2_{s_k^\frown j} \Vdash$ "$\dot{X} \cap k_n = Y_{s_m} \cap k_n$". Sea $t \in SP(R^2)$ que extiende a $s_m^\frown j$, y hagamos $s_{n+2} = t$. Escogemos k_{n+1} de forma que $Y \setminus k_{n+1} \subseteq Y_{s_{n+2}}$.

Tomemos el árbol $R^3 = \{s_k \restriction n : k \in \omega \wedge n < |s_k|\}$. Por la manera en que se construyó la sucesión $\{s_k : k \in \omega\}$, R^3 es un árbol superperfecto, y exitiende a R^2.

Debido a la forma en que se escogieron los nodos de la sucesión, tenemos que $R^3_{s_{n+2}} \Vdash$ "$\dot{X} \cap k_n = Y_{s_m} \cap k_n$", siendo $\rho(n+2) = (m,l)$. También, para n' tal que $\rho(n') = (n+2, l')$, tenemos que $R^3_{s_{n'}} \Vdash$ "$\dot{X} \cap k_{n'-2} = Y_{s_{n+2}} \cap k_{n'-2}$" por lo que $R^3_{s_{n'}} \Vdash$ "$Y_{s_m} \cap k_n = Y_{s_{n+2}} \cap k_n$", lo cual puede ocurrir si y sólo si $Y_{s_{n+2}} \cap k_n = Y_{s_m} \cap k_n$. Por lo tanto, si $\rho(n+2) = (n,l)$, entonces $Y_{s_m} \cap k_n = Y_{s_{n+2}} \cap k_n$, y $Y \setminus k_{n+1} \subseteq Y_{s_{n+2}}$.

Para cada $n \in \omega$, consideremos la sucesión $(\pi_0 \circ \rho)(n), \ldots, (\pi_0 \circ \rho)^k(n), \ldots$ Dado que la sucesión es estrictamente decreciente, tendremos $(\pi_0 \circ \rho)^k(n) = 0$ ó $(\pi_0 \circ \rho)^k(n) = 1$, para algún k. De esta manera partimos a ω en dos conjuntos: $C = \{n \in \omega : (\exists k \in \omega)((\pi_0 \circ \rho)^k(n) = 0)\}$, y $D = \{n \in \omega : (\exists k \in \omega)((\pi_0 \circ \rho)^k(n)) = 1)\}$. Notemos que si $n \in C$, entonces $(\pi_0 \circ \rho)(n) \in C$; lo mismo aplica para D.

Con la sucesión $\{k_n : n \in \omega\}$ y la partición anterior, partimos el conjunto Y de la siguiente manera:

$$Y_0 = Y \cap \bigcup_{n+2 \in D} [k_n, k_{n+1})$$

$$Y_1 = Y \cap \bigcup_{n+2\in C}[k_n, k_{n+1})$$

Afirmamos que para cada $n \in C$, $Y_0 \subseteq Y_{s_n}$, y para cada $n \in B$, $Y_1 \subseteq Y_{s_n}$. Esto lo probamos por inducción sobre n. Para $n = 0$ y $n = 1$, es trivial, ya que $Y \subseteq Y_{s_0} = Y_{s_1}$. Supongamos que es cierto para todo $k \leq n+1$, lo probaremos para $n+2$. Si $n+2 \in C$, entonces $m = (\pi_0 \circ \rho)(n+2) \in C$, y s_{n+2} extiende a s_m, por lo que tendremos $Y_{s_m} \cap k_n = Y_{s_{n+2}} \cap k_n$, y k_{n+1} es elegido de forma que $Y \setminus k_{n+1} \subseteq Y_{s_{n+2}}$. Como $n+2 \in C$, tenemos que $[k_n, k_{n+1}) \cap Y_0 = \emptyset$, y por lo tanto $Y_0 = (Y_0 \cap k_n) \cup (Y_0 \setminus k_n) = (Y_0 \cap k_n) \cup (Y_0 \setminus k_{n+1}) \subseteq (Y_{s_m} \cap k_n) \cup (Y \setminus k_{n+1}) \subseteq (Y_{s_{n+2}} \cap k_n) \cup Y_{s_{n+2}} = Y_{s_{n+2}}$. Para $n+2 \in D$ se prueba de manera análoga.

R^3 tiene una extensión S^0 cuyos nodos de ramificación están en $\{s_k : k \in C\}$, y otra extensión S^1 con nodos de ramificación en $\{s_k : k \in D\}$. Por ser $\mathcal{U}$ ultrafiltro, $Y_0 \in \mathcal{U}$ ó $Y_1 \in \mathcal{U}$. Supongamos $Y_0 \in \mathcal{U}$. Veamos que $S^0 \Vdash$ "$Y_0 \subseteq \dot{X}$". Supongamos que no es así. Entonces existe una extensión $S' \leq S^0$ y un natural $n \in Y_0$ tales que $S' \Vdash$ "$n \notin \dot{X}$". Por otro lado, sea $s \in SP(S')$, entonces $s \in SP(S^0)$, y $s = s_k$ para algún $k \in C$, y para $m \in succ_{S'}(s)$ suficientemente grande tenemos $S'_{s^\frown m} \Vdash$ "$\dot{X} \cap (n+1) = Y_{s_k} \cap (n+1)$", por lo que $S'_{s^\frown m} \Vdash$ "$\dot{X} \cap (n+1) = Y_{s_k} \cap (n+1) \wedge n \notin \dot{X}$", y por lo tanto $S'_{s^\frown m} \Vdash$ "$n \notin Y_{s_k}$", lo cual ocurre sólo si $n \notin Y_{s_k}$, lo cual contradice que $Y_0 \subseteq Y_{s_k}$ para todo $k \in C$. Por lo tanto $S^0 \Vdash$ "$Y_0 \subseteq \dot{X}$". $\square$

3.3. Miller es propio.

En la sección anterior demostramos que si $\mathcal{U}$ es un p-punto en el modelo base, entonces $\mathcal{U}$ genera un ultrafiltro en la extensión genérica $V[G]$, siendo G filtro $\mathbb{M}$-genérico.

Podemos decir más acerca del ultrafiltro $\langle \mathcal{U} \rangle$, y es el hecho de que $\langle \mathcal{U} \rangle$ resulta ser un p-punto también. Esta sección tiene dos objetivos: primero, establecer que el forcing de Miller es *propio*; y segundo, que el ultrafiltro generado por $\mathcal{U}$ es un p-punto. Comenzamos con algunas definiciones.

Definición 3.3.1. Sean $\mathcal{P}$ una noción de forcing, $\lambda > 2^{|\mathcal{P}|}$ un cardinal regular de tal manera que $\mathcal{P} \in H(\lambda)$, y $\mathcal{M} \prec H(\lambda)$ un submodelo elemental numerable en el cual $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$. Decimos que una condición $q \in \mathcal{P}$ es $(\mathcal{M}, \mathcal{P})$-*genérica* si para cada conjunto D denso en $\mathcal{P}$ tal que $D \in \mathcal{M}$, $D \cap \mathcal{M}$ es predenso debajo de q. Diremos que el forcing $\mathcal{P}$ es *propio* si cada $\mathcal{M} \prec H(\lambda)$ tal que $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$, cada $p \in \mathcal{P} \cap \mathcal{M}$ tiene una extensión $(\mathcal{M}, \mathcal{P})$-genérica.

Definición 3.3.2. Sea $\mathcal{P}$ una noción de forcing. Decimos que $\mathcal{P}$ *satisface el Axioma A*, si tiene las siguientes propiedades:

a) Existe una sucesión de órdenes $\{\leq_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\leq_0 = \leq$ y $\leq_{n+1} \subseteq \leq_n$.

b) Para cada sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$ satisfaciendo $p_{n+1} \leq_n p_n$, existe p_ω tal que $p_\omega \leq_n p_n$ para toda n.

c) Para cualesquiera $p \in \mathcal{P}$, $A \subseteq \mathcal{P}$ anticadena maximal y $n \in \omega$ existe $q_n \leq_n p$ tal que el conjunto $\{r \in A : q_n \parallel r\}$ es a lo más numerable.

El siguiente teorema nos dice que todo forcing que satisface el Axioma A es propio.

Teorema 3.3.3. *Toda noción de forcing $\mathcal{P}$ que satisface el Axioma A es propio.*

Demostración. Sean $\lambda > 2^{|\mathcal{P}|}$ y $\mathcal{M} \prec H(\lambda)$ numerable tal que $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$. Sea $\{D_n : n \in \omega\}$ una enumeración de todos los conjuntos densos que están en $\mathcal{M}$ y tomemos una condición arbitraria $p \in \mathcal{P} \cap \mathcal{M}$. Para cada n, sea $A_n \subseteq D_n$ tal que $A_n \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{M} \vDash$ "A_n *es anticadena maximal*" (tal anticadena existe por elementaridad). Como $H(\lambda) \vDash$ "$\mathcal{P}$ *tiene satisface el axioma A*", por elementaridad $\mathcal{M} \vDash$ "$\mathcal{P}$ *satisface el axioma A*". Construiremos por recursión una sucesión de fusión de condiciones que están el el submodelo $\mathcal{M}$. Hagamos $p_0 = p$, y supongamos que hemos construido hasta el término n-ésimo de la sucesión, de manera que $p_0 \geq_0 p_1 \geq_1 \ldots p_{n-1} \geq_{n-1} p_n$, y para cada $k \leq n$, $\mathcal{M} \vDash$ "$\{a \in A_k : a \parallel p_k\}$ *es numerable*". Ya que $\mathcal{P}$ satisface el axioma A en $\mathcal{M}$, por el inciso c) de la definición tenemos $\mathcal{M} \vDash$ "$(\exists q \in \mathcal{P})(q \leq_n p_n) \wedge \{a \in A_{n+1} : a \parallel q\}$ *es numerable*". Tomemos $p_{n+1} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{M}$ que testifica lo anterior. Notemos que $\{a \in A_{n+1} : a \parallel p_{n+1}\}$ es definible con parámetros en $\mathcal{M}$, por lo que $\{a \in A_{n+1} : a \parallel p_{n+1}\} \in \mathcal{M}$, y por lo tanto $\{a \in A_{n+1} : a \parallel p_{n+1}\} \subseteq A_{n+1} \cap \mathcal{M}$, y $A_n \cap \mathcal{M}$ es predenso debajo de p_{n+1}. Por el inciso b), existe una condición $p_\omega \leq_n p_n$ para todo n. Sea $q \leq p_\omega$, entonces para cada n, existe $a \in A_n$ compatible con q, y como $q \leq p_n$, a es compatible con p_n, por lo tanto $a \in A_n \cap \mathcal{M}$, con lo cual tenemos que $A_n \cap \mathcal{M}$ es predenso debajo de p_ω. Por lo tanto $\mathcal{P}$ es propio. $\square$

Ahora procederemos a demostrar que el forcing de Miller es propio demostrando que $\mathbb{M}$ satisface el axioma A.

Teorema 3.3.4. *El forcing* $\mathbb{M}$ *satisface el Axioma A.*

Demostración. Gracias a la definición 3.1.3 y al lema 3.1.4, los primeros dos puntos de la definición están establecidos y solamente tenemos que comprobar el tercer inciso. Sean $T \in \mathbb{M}$ y $A \subseteq \mathbb{M}$ una anticadena maximal. Tomemos n número natural, y sea $\{s_k\}_{k\in\omega}$ una enumeración de $N_T(n)$. Para cada $k \in \omega$ y $m \in succ_T(s_k)$, existe $a_{k,m} \in A$ compatible con $T_{s_k^\frown m}$. Sea $q_{k,m} \in \mathbb{M}$ de forma que $q_{k,m} \leq T_{s^\frown m}$ y $q_{k,m} \leq a_{k,m}$, y hagamos $T^n = Am_T(\{q_{k,m} : k \in \omega, m \in succ_T(s_k)\})$. Notemos que $\{q_{k,m} : k \in \omega, m \in succ_T(s_k)\}$ es una familia de condiciones incompatibles dos a dos; más aún, cualesquiera dos de ellas no tienen ramas en común. Si $a \in A$ es compatible con T^n, tomemos $r \leq T^n$ y $r \leq a$. Si $t \subseteq r$ es una rama de r, entonces por lo dicho anteriormente t está contenido en un solo $q_{k,m}$, y para cualquier $u \in t$ con $s_k^\frown m \subseteq u$, si $v \in r$ es nodo de ramificación infinita y $u \subseteq v$, entonces $v \in q_{k,m}$. Por lo tanto $r \cap q_{k,m}$ es un árbol superperfecto, y por la forma en que se escogio $q_{k,m}$, tenemos $r \cap q_{k,m} \leq a_{k,m}$, por lo que a y $a_{k,m}$ son compatibles. Como A es anticadena, la única posibilidad es $a = a_{k,m}$. Entonces $\{a \in A : T^n \parallel a\}$ es numerable, lo cual completa la demostración y $\mathbb{M}$ satisface el axioma A. $\square$

Lema 3.3.5. *Si $\mathcal{P}$ es una noción de forcing propio, entonces todo conjunto numerable de elementos de V en la extensión genérica está contenido en un conjunto numerable de V.*

Demostración. Basta con demostrar que para cada función en $V[G]$ de ω en V, su imagen está contenida en un conjunto numerable en V. Sean $\dot{f}$ un $\mathcal{P}$-nombre para una función con dominio ω y codominio contenido en V, y $p \in \mathcal{P}$ una condición tal que $p \Vdash$ "$\dot{f}$ *es una función*". Tomemos $\lambda > 2^{|\mathcal{P}|}$ y sea $\mathcal{M} \prec H(\lambda)$ numerable con $\mathcal{P}$, $\dot{f}$, $p \in \mathcal{M}$. Para cada $n \in \omega$ definamos el siguiente conjunto,

$$D_n = \{q \in \mathcal{P} : (q \leq p) \wedge (\exists a)(q \Vdash \text{“}\dot{f}(n) = a\text{”})\} \cup \{q \in \mathcal{P} : q \perp p\}$$

Entonces D_n es denso en $\mathcal{P}$ y definible en $\mathcal{M}$, por lo tanto $D_n \in \mathcal{M}$. Sea $q \in \mathcal{P}$, $q \leq p$ una condición $(\mathcal{M}, \mathcal{P})$-genérica. Tomemos $A_n \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \vDash$ "$A_n \subseteq D_n$ *es anticadena maximal*". Entonces $A_n \cap \mathcal{M}$ es predenso debajo de q. Sea $B_n = \{r \in A_n : r \parallel q\}$. Observese que para cada $r \in B_n$, existe un solo a_r en el modelo base de forma que $r \Vdash$ "$\dot{f}(n) = a_r$". Consideremos la siguiente fórmula

$$\phi_n(x, y) := (x \in B_n \wedge x \Vdash \text{“}\dot{f}(n) = y\text{”}) \vee (x \notin B_n \wedge x = y).$$

Por el axioma de reemplazo, $S_n = \{a : (\exists r \in B_n)(\phi_n(r, a))\} = \{a : (\exists r \in B_n)(r \Vdash \text{“}\dot{f}(n) = a\text{”})\}$ es un conjunto en V, y por ser B_n numerable, S_n es numerable. Sea $r \leq q$. Por ser B_n predenso debajo de q, r es compatible con algún $s \in B_n$. Sea t extensión común a r y s. Entonces existe $a_s \in S_n$ tal que $t \Vdash$ "$\dot{f}(n) = a_s$", por lo que $t \Vdash$ "$\dot{f}(n) \in S_n$". Así, el conjunto de condiciones que fuerzan $\dot{f}(n) \in S_n$ es denso debajo de q, por lo que $q \Vdash$ "$\dot{f}(n) \in S_n$", para cada $n \in \omega$. Por lo tanto $q \Vdash$ "$Im(\dot{f}) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} S_n$". $\square$

Teorema 3.3.6. *El ultrafiltro generado por* $\mathcal{U}$ *en la extensión genérica es un p-punto.*

Demostración. Sea $\dot{X}$ un $\mathbb{M}$-nombre y una condición $p \in \mathbb{M}$ tales que $p \Vdash$ "$\dot{X} \subseteq \langle \mathcal{U} \rangle \wedge |\dot{X}| = \aleph_0$". Encontraremos una extensión $q \leq p$ y un conjunto $B \in \mathcal{U}$ de manera que $q \Vdash$ "$(\forall A \in \dot{X})(B \subseteq^* A)$". Por la elección de p, p fuerza la existencia de una enumeración de $\dot{X}$, es decir, $p \Vdash$ "$(\exists \dot{f})(\dot{f}$ *enumera a* $\dot{X})$". Por otro lado, p también fuerza que $p \Vdash$ "$(\forall n \in \omega)(\exists \dot{A}_n \in \mathcal{U})(\dot{A}_n \subseteq \dot{f}(n))$", con lo cual p fuerza la existencia de una función $\dot{g}$ de ω a $\mathcal{U}$, tal que $p \Vdash$ "$(\forall n \in \omega)(\dot{g}(n) \subseteq \dot{f}(n))$". Por el lema 3.19, tenemos que existe una extensión $q \leq p$, y un conjunto numerable $\mathcal{A}$ en V, tal que $q \Vdash$ "$Im(\dot{g}) \subseteq \mathcal{A}$". Tomemos

$B \in \mathcal{U}$ pseudointersección de $\mathcal{U} \cap \mathcal{A}$. Tenemos $B \subseteq^* A$, por lo que $q \Vdash$ "$(\forall A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{U})(B \subseteq^* A)$", por lo tanto $q \Vdash$ "$(\forall n \in \omega)(B \subseteq^* \dot{f}(n))$", que es lo que buscabamos. $\square$

3.4. La iteración del forcing de Miller.

Ahora comenzaremos a estudiar la iteración del forcing de Miller, sin profundizar en detalles propios de la teoría general del forcing. Se hará uso libremente de teoremas generales de la teoría de iteraciones de forcing. Todo aquel interesado puede consultar [She92], [Abr10], [BJ95], para las pruebas de estos teoremas.

El propósito de las iteraciones de forcing es simplificar(en un sentido a precisar), la extensión sucesiva por medio de nociones de forcing. Esto es, si tenemos un modelo V, podemos extender por medio del forcing a un modelo genérico $V[G_0]$, el cual puede ser extendido a otro modelo $V[G_0][G_1]$, y así sucesivamente, con lo cual obtenemos una sucesión de modelos $V \subset V[G_0] \subseteq V[G_0][G_1] \dots V[G_0] \dots [G_n]$. El proposito de la iteración es encontrar una noción de forcing $\mathcal{P}$ en el modelo V de tal manera que $V[G_0] \dots [G_n]$ sea equivalente a una sola extensión de V mediante $\mathcal{P}$. El el caso finito esto siempre es posible, mientras que en el caso infinito la situación se vuelve un poco más complicada, con lo cual surgen diferentes maneras de tratar este caso, cada una con diferentes propósitos.

Definición 3.4.1. Sea $\mathcal{P}$ una noción de forcing en V, y $\dot{\mathcal{Q}}$ un $\mathcal{P}$-nombre para una noción de forcing. Definimos $\mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}}$ como todos los pares ordenados $(p, \dot{q})$ tales que $p \in \mathcal{P}$ y $\mathcal{P} \Vdash$ "$\dot{q} \in \dot{\mathcal{Q}}$".

Notemos que la definición anterior deja abierta la posibilidad de que $\mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}}$ sea una clase propia, ya que pueden existir nombres para elementos de $\dot{\mathcal{Q}}$ con rango arbitrariamente grande. Esto podemos arreglarlo escogiendo aquellos nombres de rango mínimo o fijando un ordinal α suficientemente grande de tal manera que cada nombre que sea forzado a estar en $\dot{\mathcal{Q}}$, tenga un nombre equivalente en V_α. En realidad, el requisito que resulta indispensable es que cada nombre $\dot{r}$ tal que para alguna condición p, se tiene $p \Vdash$ "$\dot{r} \in \dot{\mathcal{Q}}$", entonces exista $\dot{q}$ $\mathcal{P}$-nombre de rango mínimo (o siguiendo alguna otra convención), de tal manera que $\mathcal{P} \Vdash$ "$\dot{q} \in \dot{\mathcal{Q}}$" y además $p \Vdash$ "$\dot{r} = \dot{q}$". Este requisito resulta indispensable para evitar comportamientos no deseados en las iteraciones (e. g., la no preservación de condiciones de cadena), y también para garantizar comportamientos deseados (e. g. preservación de ser propio).

Teorema 3.4.2. *Sean $\mathcal{P}$ y $\dot{\mathcal{Q}}$ como en la definición anterior. Sean G un filtro $\mathcal{P}$ genérico sobre V, y H filtro $\dot{\mathcal{Q}}_G$ genérico sobre $V[G]$. Entonces existe un filtro $\mathcal{P} * \dot{\mathcal{Q}}$ genérico, denotado $G * \dot{H}$, de tal manera que $V[G][H] = V[G * \dot{H}]$.* ∎

Para tratar el caso límite, se tienen variar maneras de hacerlo. En general, todas ellas difieren en lo que se llama el *soporte de la iteración*. Nosotros uilizaremos la *iteración con soporte numerable.*

Definición 3.4.3. Sea α un ordinal. Definimos recursivamente lo que es una *iteración con soporte numerable de longitud* α. Para todo $\beta < \alpha$, supongamos definido $\mathcal{P}_\beta$, iteración con soporte numerable de longitud β (para el caso $\beta = 0$, hacemos $\mathcal{P}_0 = \{\emptyset\}$). Diremos que $\mathcal{P}_\alpha = \langle \mathcal{P}_\beta, \dot{\mathcal{Q}}_\beta : \beta < \alpha \rangle$ *es una iteración de longitud* α *con soporte numerable* si cumple lo siguiente:

1) Cada $f \in \mathcal{P}_\alpha$ es una función con dominio α.

2) Si $\alpha = \beta + 1$, entonces $\mathcal{P}_\beta = \{f\restriction\beta : f \in \mathcal{P}_\alpha\}$, y existe un $\mathcal{P}_\beta$-nombre $\dot{\mathcal{Q}}_\beta$ para un ordena parcial, tal que $f \in \mathcal{P}_\alpha$ si y solo si $f\restriction\beta \in \mathcal{P}_\beta$, y $f\restriction\beta \Vdash$ "$f(\beta) \in \dot{\mathcal{Q}}_\beta$". Si $f, g \in \mathcal{P}_\alpha$, diremos que $g \leq_\alpha f$ si y solo si $g\restriction\beta \leq_\beta f\restriction\beta$ y $g\restriction\beta \Vdash$ "$g(\beta) \leq f(\beta)$".

3) Si α es un ordinal límite, entonces para todo $\beta < \alpha$, $\mathcal{P}_\beta = \{f\restriction\beta : f \in \mathcal{P}_\alpha\}$. Diremos que $g \leq_\alpha f$ si y solo si para todo $\beta < \alpha$, $g\restriction\beta \leq_\beta f\restriction\beta$.

4) $supp(f) = \{\beta < \alpha : f(\beta) \neq 1_\beta\}$ es a lo más numerable.

Fácilmente se demuestra que para cualquier ordinal β, $\mathcal{P}_{\beta+1}$ es isomorfo a $\mathcal{P}_\beta * \dot{\mathcal{Q}}_\beta$.

El siguiente teorema es debido a S. Shelah, y es uno de los pilares en la teoría del forcing propio. Una demostración puede ser encontrada en el artículo *"Proper forcing"*, de Uri Abraham [Abr10].

Teorema 3.4.4 (S. Shelah)**.** *Sea $\mathcal{P} = \langle \mathcal{P}_\alpha, \dot{\mathcal{Q}}_\alpha : \alpha < \beta\rangle$ una iteración de forcings con soporte numerable cada uno de los cuales cumple que $\mathcal{P}_\alpha \Vdash$ "$\dot{\mathcal{Q}}_\alpha$ es propio". Entonces $\mathcal{P}$ es propio.* ■

Pensaremos en los reales como funciones de ω en 2. Así, un nombre para un real es un nombre para una tal función. Un tipo de $\mathcal{P}$-nombres muy usados son los *nice names*. Dado un nombre $\dot{f}$ para un real, diremos que $\dot{f}$ es un nice name si es de la forma $\{((n, b_a), a) : a \in A_n\}$, siendo cada A_n una anticadena y b_a es el valor que a decide para $\dot{f}$ en n. Dado un nombre $\dot{f}$ y una condición $p \in \mathcal{P}$ tales que $p \Vdash$ "$\dot{f} \in 2^\omega$", siempre podemos encontrar un nice name $\tilde{f}$ de forma que $p \Vdash$ "$\dot{f} = \tilde{f}$". Esto lo hacemos como sigue: para cada $n \in \omega$ consideramos el conjunto

$$D_n = \{q \leq p : q \text{ decide el valor de } \dot{f}(n)\} \cup \{r \in \mathcal{P} : q \perp p\}.$$

D_n es un conjunto denso en $\mathcal{P}$. Sea $A_n \subseteq D_n$ una anticadena maximal. Tomemos $\tilde{f} = \{((n, b_q), q) : n \in \omega, q \in A_n, q \leq p \ y \ q \Vdash \text{“}\dot{f}(n) = b_q\text{”}\}$. Sean $r \leq p$ y $n \in \omega$. Existe $s \in A_n$ compatible con p, y por la manera en que se construyó D_n, tenemos $s \leq p$. Sea $t \in \mathcal{P}$ tal que $t \leq s$ y $t \leq r$. Entonces, por la manera en que se eligió A_n, $t \Vdash$ “$\dot{f}(n) = b_s$”, y por la manera como se construyó $\tilde{f}$, $t \Vdash$ “$\tilde{f}(n) = b_s$”, por lo que $t \Vdash$ “$\dot{f}(n) = \tilde{f}(n)$”. Por lo tanto, el conjunto de condiciones que fuerzan “$\dot{f}(n) = \tilde{f}(n)$” es denso debajo de p para cada $n \in \omega$,de lo cual deducimos $p \Vdash$ “$\dot{f} = \tilde{f}$”.

Si además tenemos que nuestro forcing $\mathcal{P}$ es propio, entonces para todo $\mathcal{P}$-nombre $\dot{f}$ existe un $\mathcal{P}$-nice name $\tilde{f}$ numerable y una condición p tales que $p \Vdash$ “$\dot{f} = \tilde{f}$”. Más aun, el conjunto de condiciones para las cuales existe un nice name equivalente a $\dot{f}$ es un conjunto denso.

La siguiente definición generaliza este tipo de nombres para iteraciones de forcing. A partir de ahora V será un modelo de $ZFC + CH$, y $\mathbb{M}_\alpha$ será la iteración con soporte numerable de longitud α, del forcing de Miller en ese modelo.

Definición 3.4.5. Sea $\dot{f}$ un $\mathcal{P}_\alpha$-nice name para un real. Diremos que $\dot{f}$ es un $\mathcal{P}_\alpha$-*nombre hereditariamente numerable* si para cada $n \in \omega$, la anticadena A_n es a lo más numerable, y para cada condición $p \in A_n$, y cada ordinal $\beta < \alpha$, $p(\beta)$ es un $\mathcal{P}_\beta$-nombre hereditariamente numerable. Denotaremos por $\mathcal{HN}_\alpha$ el conjunto de $\mathcal{P}_\alpha$-nombres hereditariamente numerables, y por $\mathcal{N}_\alpha$ a todas las condiciones $p \in \mathcal{P}_\alpha$ tales que para cada $\beta < \alpha$, $p(\beta)$ es un $\mathcal{P}_\beta$-nombre hereditariamente numerable.

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que el conjunto de condiciones

$\mathcal{N}_\alpha$ es un subconjunto denso de $\mathbb{M}_\alpha$, y que para cada ordinal $\alpha < \omega_2$, la cardinalidad de $\mathcal{N}_\alpha$ es a lo más $\aleph_1$.

Definición 3.4.6. Sea $\mathcal{P}_\alpha = \langle \mathcal{P}_\beta, \dot{\mathcal{Q}}_\beta : \beta < \alpha \rangle$ una iteración con soporte numerable de forcings que satisfacen el axioma A. Sean $F \in [\alpha]^{<\omega}$ y $n \in \omega$. Definimos la relación de orden $\leq_{n,F}$ de la siguiente manera

$$(\forall p, q \in \mathcal{P}_\alpha)(q \leq_{n,F} p) \iff (q \leq p) \wedge (\forall \beta \in F)(q{\restriction}\beta \Vdash \text{``}q(\beta) \leq_n p(\beta)\text{''})$$

En base a la definición anterior, tenemos el siguiente lema de fusión para iteraciones con soporte numerable:

Lema 3.4.7. *Sean $\mathcal{P}_\alpha$ una iteración con soporte numerable de forcings que satisfacen el axioma A, $\{n_k \in \omega : k \in \omega\}$ sucesión estrictamente creciente, $\{p_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}_\alpha$, y $\{F_k : k \in \omega\} \subseteq [\alpha]^{<\omega}$ sucesiones tales que*

1. *Para todo $k \in \omega$, $p_{k+1} \leq_{n_k, F_k} p_k$.*
2. *$F_k \subseteq F_{k+1}$.*
3. *$\bigcup_{k\in\omega} supp(p_k) = \bigcup_{k\in\omega} F_k$.*

Entonces existe una $q \in \mathcal{P}_\alpha$ tal que $q \leq_{n_k, F_k} p_k$, para cualquier $k \in \omega$.

Demostración. Construimos la condición q por recursión. Tomemos $\alpha_0 = \min \bigcup_{n\in\omega} supp(p_n)$. Si $\alpha_0 = 1$, entonces la sucesión $p_{n\alpha_0}$ es una sucesión de fusión de $\mathcal{P}_{\alpha_0}$, y por lo tanto existe q_1 tal que $q_1 \leq_n p_{n\alpha_0}$ para toda $n \in \omega$. Si $\alpha_0 \geq 1$, entonces para cada n, $p_n{\restriction}\alpha_0 = 1_{\alpha_0}$. En este caso, $p_n{\restriction}\alpha_0 = 1_{\alpha_0}$ fuerza que la sucesión $p_{n\alpha_0}$ forma una sucesión de fusión, por lo que también fuerza que existe una condición q_{α_0} tal que $q_{\alpha_0} \leq_n p_{n\alpha_0}$ para cada $n \in \omega$. Para el caso $\gamma = \beta + 1$, q_γ se construye de manera similar, y para γ ordinal límite tomamos simplemente la unión de las condiciones ya construidas. $\square$

Necesitaremos los siguientes teoremas para probar el lema 3.4.11, una demostración de ellos se puede encontrar en [She92].

Teorema 3.4.8. *Una condición $p \in \mathcal{P}_{\alpha+1}$ es $(\mathcal{M}, \mathcal{P}_{\alpha+1})$-genérica si y solo si $p\restriction\alpha$ es $(\mathcal{M}, \mathcal{P}_\alpha)$-genérica y $p\restriction\alpha \Vdash$ "$p(\alpha)$ es $(\mathcal{M}[G_\alpha], \mathcal{Q}_\alpha)$-genérica"* ■

Teorema 3.4.9. *Sean $\mathcal{P}$ una noción de forcing propio y $\mathcal{M} \prec H(\lambda)$ tales que $P \in \mathcal{M}$. Sea G filtro $\mathcal{P}$-genérico sobre V. Hagamos $\mathcal{M}[G] = \{\dot{x} : \dot{x} \in \mathcal{M}\}$. Entonces $\mathcal{M}[G] \prec H(\lambda)^{V[G]} = H(\lambda)[G]$.* ■

Teorema 3.4.10. *Sean α un ordinal, $\beta < \alpha$, y $\mathcal{P}_\alpha$ una iteración con soporte numerable de forcings propios. Sea $\mathcal{M} \prec H(\lambda)$ forma que $\alpha, \beta, \mathcal{P}_\alpha \in \mathcal{M}$. Tomemos $p \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}_\alpha$. Si $q \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}_\beta$ es $(\mathcal{M}, \mathcal{P}_\beta)$-genérica y $q \leq p\restriction\beta$, entonces existe $q' \in \mathcal{P}_\alpha$-genérica tal que $q' \leq p$ y $q = q'\restriction\beta$.* ■

Lema 3.4.11. *Sean $\mathbb{M}_\alpha$, $F \in [\alpha]^{<\omega}$, $p \in \mathbb{M}_\alpha$, y $n \in \omega$. Sea $\mathcal{M} \prec H(\lambda)$ submodelo elemental numerable tal que $p, \mathbb{M}_\alpha, F \in \mathcal{M}$. Entonces existe una condición $q \leq_{n,F} p$ que es $(\mathcal{M}, \mathbb{M}_\alpha)$-genérica.*

Demostración. Notemos que si $T, \mathbb{M} \in \mathcal{M}$, entonces para cualquier $n \in \omega$ existe una condición S $(\mathcal{M}, \mathbb{M})$-genérica tal que $S \leq_n T$. En efecto, dado que cada condición en $\mathbb{M}$ es numerable, $T \subseteq \mathcal{M}$, por lo que para cada $s \in N_n(T)$, y cada $m \in succ_T(s)$, tenemos $T_{s^\frown m} \in \mathcal{M}$, y para esta condición existe una extensión $(\mathcal{M}, \mathbb{M})$-genérica $R_{s^\frown m}$. Tomemos $S = Am_T(\{R_{s^\frown m} : s \in N_n(T) \wedge m \in succ_T(s)\})$, esta es la extensión buscada.

La prueba es por inducción sobre α. Sean $n \in \omega$ y $F \subseteq \alpha$ finito.

1. $\alpha = \beta + 1$. Tenemos dos casos:

a) $F \subseteq \beta$. Por hipótesis de inducción, existe $q' \leq_{n,F} p\restriction\beta$ que es $(\mathcal{M}, \mathbb{M}_\beta)$-genérica. Por el teorema 3.4.10, existe $q \leq p$ que es $(\mathcal{M}, \mathbb{M}_\alpha)$-genérica, y $q\restriction\beta = q'$. Esta es la condición buscada.

b) $\beta \in F$. Sea $F' = F \setminus \{\beta\}$. Por hipótesis de inducción existe $q' \leq_{n,F'} p\restriction\beta$ que es $(\mathcal{M}, \mathbb{M}_\beta)$-genérica. Tomemos un filtro G $\mathbb{M}_\beta$-genérico que contiene a q'. Por teorema 3.4.9, $\mathcal{M}[G] \prec H(\lambda)^{V[G]}$. También, dado que $F \subseteq \mathcal{M}$ por ser F finito, y $\beta \in \mathcal{M}$, y por lo tanto $\dot{\mathbb{M}}_\beta$ (el $\mathbb{M}_\beta$-nombre para el forcing de Miller) pueder ser definido en $\mathcal{M}$, y así $\mathbb{M}^{V[G]} \in \mathcal{M}[G]$. También $p(\beta) \in \mathcal{M}$, por lo que $p(\beta)_G \in \mathcal{M}[G]$. Por la observación al principio de la demostración, existe $r \leq_n p(\beta)_G$ que es $(\mathcal{M}[G], \mathbb{M}^{V[G]})$-genérica. Dado que el único requerimiento sobre G fue que $q' \in G$, tenemos que

$$q' \Vdash \text{“}\exists r \in \dot{\mathbb{M}} \textit{ tal que } r \leq_n p(\beta) \textit{ y es } (\mathcal{M}[G], \mathbb{M}) - \textit{genérica}\text{”}.$$

Por lema de completitud existencial, existe $\dot{r}$ $\mathbb{M}_\beta$-nombre tal que

$$q' \Vdash \text{“}\dot{r} \in \dot{\mathbb{M}},\ \dot{r} \leq_n p(\beta) \textit{ y es } (\mathcal{M}[G], \mathbb{M}) - \textit{genérica}\text{”}.$$

Por lo que $q = q'^\frown\dot{r}$ es $(\mathcal{M}, \mathbb{M}_\alpha)$-genérica debido al lema 3.4.8, y también $q \leq_{n,F} p$. La condición q satisface el teorema.

2. Para α ordinal límite, al ser F finito, existe $\gamma < \beta$ para el cual $F \subseteq \gamma$. Aplicamos la hipótesis de inducción para obtener $q' \leq_{n,F} p\restriction\gamma$ que sea $(\mathcal{M}, \mathbb{M}_\gamma)$-genérica, y utilizamos el teorema 3.4.10 para obtener $q \leq p$ tal que $q\restriction\gamma = q'$ y es $(\mathcal{M}, \mathbb{M}_\alpha)$-genérica. Esta es la condición requerida. □

Lema 3.4.12. *Sean α un ordinal, $A \subseteq \mathcal{P}_\alpha$ anticadena maximal, $p \in \mathbb{M}_\alpha$, y $F \in [\alpha]^{<\omega}$, entonces existe una condición $q \leq_{n,F} p$ tal que $\{a \in A : a \parallel q\}$ es* *numerable.*

Demostración. Tomemos un submodelo elemental numerable $\mathcal{M} \prec H(\lambda)$ tal que $p, \mathbb{M}_\alpha, F, A \in \mathcal{M}$. Por el lema anterior, existe $q \leq_{n,F} p$ que es $(\mathcal{M}, \mathbb{M}_\alpha)$-genérica, por lo que $A \cap \mathcal{M}$ es predenso debajo de q. Afirmamos que $\{a \in A : a \parallel q\} \subseteq A \cap \mathcal{M}$. Sea $a \in A$, $a \parallel q$. Entonces existe $r \leq a, q$. Por otro lado, existe $b \in A \cap \mathcal{M}$ compatible con r, por lo que existe $s \leq r, b$, pero entonces $s \leq r \leq a$ y $s \leq b$, y por lo tanto a y b son compatibles. Esto solo puede ocurrir solo si $b = a$, por ser A anticadena, por lo que $a \in A \cap \mathcal{M}$. □

Lema 3.4.13. *Sean $\mathbb{M}_{\alpha+1}$, $q \in \mathbb{M}_{\alpha+1}$ y $\{p_n : n \in \omega\}$ una sucesión de condiciones en $\mathbb{M}_{\alpha+1}$. Para cada $n \in \omega$ y cada $s \in \omega^{<\omega}$ sea $\dot{N}_n(p_{n\alpha})$ un $\mathbb{M}_\alpha$-nombre para el n-ésimo nivel de ramificación de $p_{n\alpha}$,y $A^n_s \subseteq \mathbb{M}_\alpha$ anticadena maximal. Supongamos lo siguiente:*

a) Para cada $n \in \omega$ y cada $s \in \omega^{<\omega}$, cada condición $a \in A^n_s$ decide el valor de verdad de la fórmula "$s \in \dot{N}_n(p_{n\alpha})$".

b) Para cada $n \in \omega$, $p_{n+1} \leq_{n+1,\{\alpha\}} p_n$, y $q \leq_{n,\{\alpha\}} p_n$.

c) Para cada $n \in \omega$, y cada $s \in \omega^{<\omega}$, el conjunto $\{a \in A^n_s : a \parallel p_{n+1}\}$ es numerable y predenso debajo de p_{n+1}.

Entonces q_α puede ser reemplazado por un $\mathbb{M}_\alpha$-nombre numerable equivalente respecto a $q{\restriction}\alpha$.

Demostración. Dado que $q \leq_{n,\{\alpha\}} p_n$ para cada $n \in \omega$, tenemos que $q{\restriction}\alpha \Vdash$ "$\dot{N}_n(q_\alpha) = \dot{N}_n(p_{n\alpha})$", y como para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $\{a \in A^n_s : a \parallel p_{n+1}\}$ es numerable, también lo es $\{a \in A^n_s : a \parallel q\}$, por ser $q \leq p_{n+1}$. Denotemos por

B^n_s al conjunto $\{a \in A^n_s : a \parallel q \wedge a \Vdash \text{“}s \in \dot{N}_n(p_{n\alpha})\text{”}\}$. Tomemos el siguiente nombre:

$$q'_\alpha = \{(s{\restriction}k, a) : (s \in \omega^{<\omega}) \wedge (k \leq |s|) \wedge (\exists n \in \omega)(a \in B^n_s)\}.$$

Afirmamos que $q{\restriction}\alpha \Vdash$ “$q_\alpha = q'_\alpha$”. Sea $G \subseteq \mathbb{M}_\alpha$ un filtro genérico tal que $q{\restriction}\alpha \in G$. Tomemos $s \in q_{\alpha G}$, entonces existe $r \in N_k(q_{\alpha G})$ que extiende a s, para algún k. Como $N_k(q_{\alpha G}) = N_k(p_{k\alpha G})$, existe una condición $a \in A^k_r \cap G$ tal que $a \Vdash$ “$r \in \dot{N}_k(p_{k\alpha})$”, por lo que $a \parallel q{\restriction}\alpha$, y por lo tanto para todo $m \leq |r|$, tenemos $(r{\restriction}m, a) \in q'_\alpha$. Pero al ser r extensión de s, $s = r{\restriction}m$, para algún m, por lo que $(s, a) \in q'_\alpha$. Por lo tanto $s \in q'_{\alpha G}$, con lo que tenemos $q_{\alpha G} \subseteq q'_{\alpha G}$. Tomemos ahora $s \in q'_{\alpha G}$. Entonces existen $r \in \omega^{<\omega}$, $k \leq |r|$, y $a \in B^n_r \cap G$ para algún n, tales que $s = r{\restriction}k$ y $a \Vdash$ “$r \in \dot{N}_n(p_{n\alpha})$”. Así, tenemos $r \in N_n(p_{n\alpha G}) = N_n(q_{\alpha G})$, y por lo tanto $s \in q_{\alpha G}$, con lo cual tenemos la contención $q'_{\alpha G} \subseteq q_{\alpha G}$. Por lo tanto $q{\restriction}\alpha \Vdash$ “$q_\alpha = q'_\alpha$”. □

Lema 3.4.14. *Sea $p = \langle p_\beta \rangle \in \mathbb{M}_\alpha$ una condición, $\beta_0 < \alpha$, $F \in [\alpha]^{<\omega}$ y $k, n_0 \in \omega$. Sea $\dot{N}_k(p_{\beta_0})$ un $\mathbb{M}_{\beta_0}$-nombre para el k-ésimo nivel de ramificación de p_{β_0}. Entonces existe una condición $q \leq_{n_0,F} p$, tal que para cada $s \in \omega^{<\omega}$ existe una anticadena numerable A_s predensa debajo de q tal que todas sus condiciones deciden la verdad de “$s \in \dot{N}_k(p_{\beta_0})$”.*

Demostración. Sea $\{s_n : n \in \omega\}$ una enumeración de $\omega^{<\omega}$. Sea $\mathcal{B} = \{B_i : i \in \omega\}$ la partición de los naturales que introducimos en la sección preliminar. Recordemos que para cada $n \in \omega$, se cumple $n \in B_0 \cup \ldots \cup B_n$. Para cada n, sea A'_n anticadena maximal (en $\mathcal{P}_{\beta_0}$) tal que sus elementos deciden la fórmula “$s_n \in \dot{N}_n(p_{\beta_0})$”. Construimos una sucesión de fusión como sigue:

1. Para $n = 0$, hacemos $F_0 = F$, y escogemos $q_0 \leq_{n_0,F_0} p$ de tal manera que para cada $j \leq n_0$, $\{a \in A'_j : a \parallel q_1\}$ sea numerable. Pedimos además que $F_0 \subseteq supp(q_0)$.

2. Para $n = 1$, sea f_0 biyección entre B_0 y $supp(q_0)$. Hacemos $F_1 = F_0 \cup \{f_0(0)\}$, y escojemos $q_1 \leq_{n_0+1,F_1} q_0$, de forma que el conjunto $\{a \in A'_{n_0+1} : a \parallel q_1\}$ sea a lo más numerable.

3. Supongamos que hemos construido el término n-ésimo de la sucesión. Sin perder generalidad podemos suponer que $supp(q_n) \setminus supp(q_{n-1})$ es infinito. Sea f_n una biyección entre B_n y $supp(q_n) \setminus supp(q_{n-1})$. Hacemos $F_{n+1} = F_n \cup \{f_j(n)\}$, siendo $j \leq n$ tal que $n \in B_j$. Escogemos $q_{n+1} \leq_{n_0+n+1,F_{n+1}} q_n$ de forma que el conjunto $\{a \in A'_{n_0+n+1} : a \parallel q_{n+1}\}$ sea a lo más numerable.

Notemos que la sucesión obtenida satisface las hipótesis del lema 3.4.7. En efecto, a partir de la construcción es obvio que $q_{k+1} \leq_{n_k,F_k} q_k$, siendo $n_k = n_0+k$, y también que $F_k \subseteq F_{k+1}$. Veamos que $\bigcup_{k\in\omega} supp(q_k) = \bigcup_{k\in\omega} F_k$. La contención $\supseteq$ es inmediata, pues cada F_k está contenido en $supp(q_k)$. Para la otra contención, tomemos $\alpha \in \bigcup_{k\in\omega} supp(q_k)$, entonces existe un solo $k \in \omega$ de tal manera que $\alpha \in supp(q_k) \setminus supp(q_{k-1})$. Tomemos a f_k, que es la biyección entre B_k y $supp(q_k) \setminus supp(q_k)$. Entonces existe $m \in \omega$ de tal manera que $f_k(m) = \alpha$, y por la construcción de los F_k, tenemos $F_{m+1} = F_m \cup \{f_k(m)\}$, con lo cual queda demostrada la contención que faltaba. Por lo tanto existe una condición q_ω tal que $q_\omega \leq_{n_k,F_k} q_k$ para toda k. Por ser $q_\omega \leq q_k$ para todo $k \in \omega$, tenemos $A_j = \{a \in A'_j : a \parallel q_\omega\}$ es numerable para cada $j \in \omega$. También, por construcción, tenemos da $q_\omega \leq_{n_0,F_0} p$. $\square$

Finalmente estamos preparados para demostrar que $\mathcal{N}_\alpha$ es un denso en $\mathbb{M}_\alpha$.

Teorema 3.4.15. *Sean α un ordinal, $\mathbb{M}_\alpha$ la iteración con soporte numerable del forcing de Miller de longitud α, y $p \in \mathbb{M}_\alpha$. Entonces existe una condición $q \in \mathcal{N}_\alpha$ tal que $q \leq p$.*

Demostración. Inducción sobre α. Supongamos que el resultado es cierto para todo $\beta < \alpha$. Tomemos $p = \langle p_\beta : \beta < \alpha \rangle \in \mathcal{P}_\alpha$. Sea nuevamente $\mathcal{B}$ la partición de ω del primer capítulo, y $\{s_k : k \in \omega\}$ una enumeración de $\omega^{<\omega}$. Construimos una sucesión de fusión como sigue:

i) Para $n = 0$, hacemos $q_0 = p$, $F_0 = \emptyset$.

ii) Para $n = 1$, sea f_0 una biyección entre B_0 y $supp(p)$. Sea $F_1 = \{f_0(0)\}$, y consideremos la coordenada $q_{0f_0(0)}$ de q_0. Sea $\dot{N}_0(q_{0f_0(0)})$ un $\mathbb{M}_{f_0(0)}$-nombre para el primer nivel de ramificación de $q_{0f_0(0)}$, y para cada $k \in \omega$, tomemos una anticadena maximal $A^k_{f_0(0)}$ formada por condiciones hereditariamente numerables en $\mathbb{M}_{f_0(0)}$ (es decir, formada por condiciones en $\mathcal{N}_{f_0(0)}$), tal que cada uno de sus elementos decide la verdad de la fórmula $s_k \in \dot{N}_0(p_{0f_0(0)})$. Tomemos una condición q_1 en $\mathbb{M}_\alpha$ tal que $q_1 \leq_{1,F_1} q_0$, y para cada $k \in \omega$, el conjunto $\{a \in A^k_{f_0(0)} : a \parallel q_1\}$ es numerable. Con esto tenemos totalmente determinado el 0-ésimo nivel de ramificación de $p_{f_0(0)}$ por medio de anticadenas numerables.

iii) De forma general, supongamos que hemos construido hasta el término n-ésimo de la sucesión,

$$q_n \leq_{n,F_n} q_{n-1} \leq_{n-1,F_{n-1}} \cdots \leq_{2,F_2} q_1 \leq_{1,F_1} q_0 \leq_{0,F_0} p$$

Construiremos q_{n+1}. Sin perder generalidad, supongamos que $supp(q_n)\setminus supp(q_{n-1})$ es infinito, y tomemos f_n una biyección entre B_n y $supp(q_n)\setminus supp(q_{n-1})$. Hagamos $F_{n+1} = F_n \cup \{f_j(n)\}$, siendo j tal que $n \in B_j$. Para cada $\beta \in F_{n+1}$, tomamos un $\mathbb{M}_\beta$-nombre $\dot{N}_n(q_{n\beta})$ para el n-ésimo nivel de ramificación de $q_{n\beta}$, y para cada $k \in \omega$, consideremos una anticadena maximal A^k_β (de condiciones en $\mathcal{N}_\beta$) tal que cada elemento de A^k_β decide la verdad de la fórmula "$s_k \in \dot{N}_n(q_{n\beta})$". Por lema 3.4.14, existe q_{n+1} tal que $q_{n+1} \leq_{n+1,F_{n+1}} q_n$, y para cada $\beta \in F_n$, y cada $k \in \omega$, el conjunto $\{a \in A^k_\beta : a \parallel q_{n+1}\}$ es numerable.

Una vez construida la sucesión $\{q_k : k \in \omega\}$, notemos que esta es de tal manera que $q_{k+1} \leq_{k+1,F_{k+1}} q_k$, y además, $\bigcup_{k\in\omega} supp(q_k) = \bigcup_{k\in\omega} F_k$. Lo primero es obvio por la construcción. Lo segundo se demuestra de la misma manera en que se hizo en el lema 3.4.14. Por lo tanto, la sucesión $\{r_k : k \in \omega\}$ satisface todas las condiciones del lema 3.4.7, por lo que existe una condición q_ω tal que $q_\omega \leq_{n,F_n} q_n$, para toda $n \in \omega$. Por lema 3.4.13, utilizando la misma construcción que ahí se hace, para cada $\beta \in supp(q_\omega)$ existe un nombre numerable q'_β equivalente a q_β, respecto a $q_\omega \restriction \beta$, y por la manera en que se escogieron las anticadenas, cada uno de esos nombres será hereditariamente numerable. Reemplazando cada $q_{\omega\beta}$ por su respectivo nombre hereditariamente numerable q'_β obtenemos la condición buscada. □

Lema 3.4.16. *Para cualquier $\alpha < \omega_2$, $\mathcal{HN}_\alpha$ y $\mathcal{N}_\alpha$ tienen cardinalidad a lo más $\aleph_1$.*

Demostración. Lo probaremos por inducción sobre α. Supongamos que el resultado es cierto para todo $\beta < \alpha$. Veamos primero que $|\mathcal{N}_\alpha| = \aleph_1$. Como cada condición $p \in \mathcal{N}_\alpha$ es una sucesión de nombres en $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{HN}_\beta$, basta con acotar el numero de sucesiones de longitud α, con soporte numerable y rango $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{HN}_\beta$. Dado que $\alpha < \omega_2$, tenemos que $|[\alpha]^{\leq\omega}| = \aleph_1$. Por otro lado, para cada $A \in [\alpha]^{\leq\omega}$, tenemos $\aleph_1$ funciones de A en $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{HN}_\beta$. Por lo tanto tenemos a lo más $\aleph_1$ funciones de α en $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{HN}_\beta$ con soporte numerable.

Ahora veamos que $|\mathcal{HN}_\alpha| = \aleph_1$. Como $\mathcal{N}_\alpha$ tiene cardinalidad $\aleph_1$, tendremos que existen $\aleph_1$ conjuntos numerables de condiciones en $\mathcal{N}_\alpha$, en particular, tendremos a lo más $\aleph_1$ anticadenas numerables formadas por condiciones en $\mathcal{N}_\alpha$, por lo que también tendremos a lo más $\aleph_1$ sucesiones de anticadenas numerables. Cada una de estas sucesiones define $\aleph_1$ nombres numerables (contando todas las posibles combinaciones en que cada elemento de cada anticadena puede decidir). Por lo tanto tenemos $\aleph_1$ $\mathbb{M}_\alpha$-nombres hereditariamente numerables. □

El siguiente resultado es un hecho muy conocido en la teoría de Forcing. Una demostración puede ser consultada en [Jec02].

Teorema 3.4.17. *Toda noción de forcing que satisface la κ-c.c. preserva todos los cardinales $\geq \kappa$.* ■

Notemos que del lema 3.4.16 se deduce que para todo $\alpha < \omega_2$, $\mathcal{N}_\alpha$ satisface la condición de la $\aleph_2$-c.c. Este también resulta ser el caso para $\alpha = \omega_2$, pero hay que trabajar un poco más. Necesitaremos el siguiente lema, cuya demostración se puede encontrar en [Kun80].

Lema 3.4.18. *(del $\Delta -$ sistema) Sean κ y λ cardinales tal que λ es regular y para todo $\nu < \lambda$, se cumple la desigualdad $\nu^{<\kappa} < \lambda$. Si B es un conjunto de cardinal λ tal que $|b| < \kappa$ para todo $b \in B$, entonces existe un subconjunto*

A de B de cardinalidad λ, y un conjunto r, tales que para todo $a, b \in A$, $b \cap b = r$ (A es llamado un Δ-sistema). ■

Lema 3.4.19. *$\mathcal{N}_{\omega_2}$ satisface la $\aleph_2$-c.c.*

Demostración. Sea $S = \{p_i \in \mathcal{N}_{\omega_2} : i < \omega_2\}$. Para cada $i < \omega_2$ sea s_i el soporte de la condición p_i, y hagamos $B = \{s_i : i < \omega_2\}$. Con la notación del lema anterior, sean $\kappa = \aleph_1$ y $\lambda = \aleph_2$. Entonces las condiciones sobre λ y κ son satisfechas, por lo que existe un subconjunto $A \subseteq B$ que forma un Δ-sistema. Sea r la raíz de dicho sistema. Tomemos $R = \{p_i \in S : s_i \in A\}$. Tomemos $\alpha < \omega_2$ tal que $r \subseteq \alpha$. Tomemos la función $F : R \to \mathcal{N}_\alpha$ tal que $F(p) = p{\restriction}\alpha$. Esta función no es inyectiva, ya que va de un conjunto de cardinalidad $\aleph_2$ a uno de cardinalidad $\aleph_1$. Por lo tanto, existen dos condiciones p_i y p_j en R tales que $p_i{\restriction}\alpha = p_j{\restriction}\alpha$. Definamos la siguiente condición:

$$s(\beta) = \begin{cases} p_i(\beta) & \text{si } \beta < \alpha, \\ p_i(\beta) & \text{si } \beta \geq \alpha \wedge \beta \in s_i, \\ p_j(\beta) & \text{si } \beta \geq \alpha \wedge \beta \in s_j, \\ 1_\beta & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Esta condición extiende tanto a p_i como a p_j. Por lo tanto $\mathcal{N}_{\omega_2}$ satisface la condición de la $\aleph_2$ cadena. □

Corolario 3.4.20. *$\mathcal{N}_{\omega_2}$ preserva todos los cardinales.*

Demostración. Por lema 3.3.4, $\mathcal{N}_{\omega_2}$ es propio, y por lema 3.3.5, preserva a $\aleph_1$. Por el lema anterior, $\mathcal{N}_{\omega_2}$ preserva todos los ordinales mayores o iguales a $\aleph_2$. □

El siguiente lema es de caracter general y no sólo involucra al forcing de Miller.

Lema 3.4.21. *Sean β ordinal de cofinalidad no numerable, $\mathcal{P}_\beta = \langle \mathcal{P}_\alpha, \dot{\mathcal{Q}}_\alpha : \alpha < \beta \rangle$ una iteración con soporte numerable de forcings propios, y G un filtro $\mathcal{P}_\beta$-genérico. Entonces para cualquier real $f \in V[G]$ existe un ordinal $\gamma < \beta$ tal que $f \in V[G_\gamma]$.*

Demostración. Sea $\dot{f}$ un $\mathcal{P}$-nombre para un real y $p \in \mathcal{P}$ tal que $p \Vdash$ "$\dot{f} \in 2^\omega$". Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\dot{f}$ es un nice-name. Tomemos $\lambda > 2^{|\mathcal{P}|}$, y sean $\mathcal{M} \prec H(\lambda)$ numerable tal que $p, \dot{f}, \mathcal{P} \in \mathcal{M}$, y $q \leq p$ $(\mathcal{M}, \mathcal{P})$-genérica. Como cada anticadena A_n que aparece en $\dot{f}$ es definible en $\mathcal{M}$ $(A_n = \{a \in \mathcal{P} : (\exists b_a \in 2^\omega)((n, b_a), a) \in \dot{f})\})$, tenemos que cada anticadena A_n pertenece a $\mathcal{M}$. Para cada $n \in \omega$ tomemos la anticadena $A'_n = A_n \cap \mathcal{M}$, y formemos el nombre $\tilde{f} = \{((n, b_a), a) \in \dot{f} : a \in A'_n, n \in \omega\}$. Como cada una de las anticadenas A'_n es numerable, y los soportes de las condiciones son numerables, existe $\gamma < \beta$ que contiene a todos los soportes de las condiciones en las anticadenas A'_n. Tomemos el nombre $\tilde{f}_\gamma = \{((n, b_a), a \restriction \gamma) : ((n, b_a), a) \in \tilde{f}\}$ y sea G filtro $\mathcal{P}$-genérico tal que $q \in G$. Como cada una de las anticadenas A'_n es maximal respecto a q, y sus condiciones deciden los valores de $\tilde{f}$, para cada $n \in \omega$ existe $a_n \in G \cap A'_n$ $a_n \Vdash$ "$\tilde{f}(n) = b_n$", por lo tanto $a_n \restriction \gamma$ está en G_γ, y por la forma en que se construyó $\tilde{f}_\gamma$, $a_n \restriction \gamma$ decide ese mismo valor para $\tilde{f}_\gamma(n)$. Por lo tanto $\tilde{f}_\gamma$ es interpretado por G_γ de la misma manera en que $\tilde{f}$ es interpretado por G. Por otro lado, notemos que $q \Vdash$ "$\dot{f} = \tilde{f}$", ya que las anticadenas A'_n son maximales debajo de q. Por lo tanto $\dot{f}_G = \tilde{f}_{G_\gamma}$. $\square$

Lema 3.4.22. *Dado G un filtro genérico sobre $\mathcal{N}_{\omega_2}$ y un conjunto de reales*

$\mathcal{F}$ en la extensión genérica, para cualquier ordinal $\alpha < \omega_2$ existe $\gamma \in \omega_2 \setminus \alpha$, tal que $\mathcal{F} \cap V[G_\alpha] \in V[G_\gamma]$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de reales en $V[G]$, y $\dot{\mathcal{F}}$ un $\mathcal{N}_{\omega_2}$-nombre para $\mathcal{F}$ como antes. Tomemos $\alpha < \omega_2$, y para cada $\dot{f} \in \mathcal{HN}_\alpha$ consideremos una anticadena maximal (en $\mathcal{N}_{\omega_2}$) $A_{\dot{f}}$ que decide la veracidad de la fórmula "$\dot{f} \in \dot{\mathcal{F}}$".

Para cada $\dot{f} \in \mathcal{HN}_\alpha$, la anticadena $A_{\dot{f}}$ tiene cardinal a lo más $\aleph_1$. Por el lema 3.4.16, $\mathcal{HN}_\alpha$ tiene cardinalidad a lo más $\aleph_1$. Por lo tanto $S = \bigcup\{A_{\dot{f}} : \dot{f} \in N_\alpha\}$ contiene a lo más $\aleph_1$ condiciones distintas. Como el soporte de la iteración $\mathbb{M}_{\omega_2}$ es numerable, existe un ordinal $\gamma < \omega_2$ que contiene los soportes de todas las condiciones en S. Tomemos el siguiente conjunto en $V[G_\gamma]$

$$\mathcal{F}_\gamma = \{\dot{f}_{G_\alpha} : (\dot{f} \in \mathcal{HN}_\alpha) \wedge (\exists p \in G_\gamma)(p \Vdash_{\omega_2} \text{"}\dot{f} \in \dot{\mathcal{F}}\text{"})\}$$

Veamos que $\dot{\mathcal{F}} \cap V[G_\alpha] = \mathcal{F}_\gamma$. Tomemos $\dot{f} \in \mathcal{HN}_\alpha$ y supongamos $\dot{f}_{G_\alpha} \in \mathcal{F}_\gamma$. Entonces existe $q \in G_\gamma$ que fuerza(en $\mathcal{N}_{\omega_2}$) "$\dot{f} \in \dot{\mathcal{F}}$". También existe $p \in G \cap A_{\dot{f}}$ tal que $p \Vdash$ "$\dot{f} \in \dot{\mathcal{F}}$". Por la manera en que se eligió γ, se tiene $p \in G_\gamma$. Como p decide si "$\dot{f} \in \dot{\mathcal{F}}$", y es compatible con q, p no puede decidir $\dot{f} \notin \dot{\mathcal{F}}$, por lo que tenemos que $p \Vdash_{\omega_2}$ "$\dot{f} \in \dot{\mathcal{F}}$". Dado que $\dot{f}_{G_\alpha} = \dot{f}_G$, tenemos que $\mathcal{F}_\gamma \subseteq \mathcal{F} \cap V[G_\alpha]$.

Tomemos ahora $\dot{f} \in \mathcal{HN}_\alpha$, y supongamos $\dot{f}_G \in \mathcal{F} \cap V[G_\alpha]$. Entonces existe una condición $p \in G \cap A_{\dot{f}}$ tal que $p \Vdash_{\omega_2}$ "$\dot{f} \in \dot{\mathcal{F}}$". Ninguna condición $q \in G_\gamma$ fuerza "$\dot{f} \notin \dot{\mathcal{F}}$", ya que todo $q \in G_\gamma$ es restricción de alguna condición $q' \in G$, y q' es compatible con p, con lo cual q es compatible con p. Por lo tanto $\dot{f}_{G_\alpha} \in \mathcal{F}_\gamma$, y $\mathcal{F} \cap V[G_\alpha] \subseteq \mathcal{F}_\gamma$. $\square$

Lema 3.4.23. *Sea G un filtro $\mathcal{N}_{\omega_2}$-genérico sobre V. Entonces para cada $\mathcal{F} \in V[G]$ conjunto de reales existe un conjunto $\mathcal{C}$ de ordinales en ω_2 cerrado bajo sucesiones de longitud ω_1 y no acotado, tal que para cada $\alpha \in \mathcal{C}$, $\mathcal{F} \cap V[G_\alpha] \in V[G_\alpha]$.*

Demostración. Primero veamos que el conjunto de ordinales $\alpha < \omega_2$ para los cuales $\mathcal{F} \cap V[G_\alpha] \in V[G_\alpha]$ es no acotado. Tomemos $\alpha \in \omega_2$. Construiremos una sucesión $\{\gamma_\beta : \beta < \omega_1\}$ creciente de ordinales tal que para cada $\beta < \omega_1$, se cumple $\mathcal{F} \cap V[G_{\gamma_\beta}] \in V[G_{\gamma_{\beta+1}}]$. La construcción es como sigue:

i) Para $\beta = 0$ hacemos $\gamma_0 = \alpha$.

ii) Para $\beta + 1$ ordinal sucesor, tomamos el mínimo ordinal $\gamma_{\beta+1} > \gamma_\beta$ tal que $\mathcal{F} \cap V[G_{\gamma_\beta}] \in V[G_{\gamma_{\beta+1}}]$ (tal ordinal existe gracias al lema 3.27).

iii) Si β es ordinal límite tomamos $\gamma_\beta = sup\{\gamma_\epsilon : \epsilon < \beta\}$.

Afirmamos que $\delta = sup\{\gamma_\beta : \beta < \omega_1\}$ cumple $\mathcal{F} \cap V[G_\delta] \in V[G_\delta]$. Tomemos un real $f \in \mathcal{F} \cap V[G_\delta]$. Por la manera en que se eligio δ, $cf(\delta) > \aleph_0$, por lo que existe un ordinal $\eta < \delta$ para el cual $f \in V[G_\eta]$, y podemos suponer que $\eta = \gamma_\beta$, para algun $\beta < \omega_2$. Es claro que $f \in \mathcal{F} \cap V[G_{\gamma_\beta}]$, que es un conjunto en $V[G_{\gamma_{\beta+1}}]$, y por lo tanto, $\mathcal{F} \cap V[G_\delta] \subseteq \bigcup_{\beta<\omega_1} \mathcal{F} \cap V[G_{\gamma_\beta}]$. Dado que $\mathcal{F} \cap V[G_\gamma] \subseteq \mathcal{F} \cap V[G_\delta]$ para todo $\gamma < \delta$, tenemos la igualdad $\mathcal{F} \cap V[G_\delta] = \bigcup_{\beta<\omega_1} \mathcal{F} \cap V[G_{\gamma_\beta}]$. Como $V[G_\delta]$ extiende a todos los modelos $V[G_\beta]$ para $\beta < \delta$, y para cada $\beta < \omega_1$, $\mathcal{F} \cap V[G_{\gamma_\beta}] \in V[G_\delta]$, por el axioma de reemplazo tenemos que $\{\mathcal{F} \cap V[G_{\gamma_\beta}] : \beta < \omega_1\}$ es un conjunto de $V[G_\delta]$ (para ver esto sólo hay que notar que $\mathcal{F} \cap V[G_{\gamma_\beta}]$ puede ser definido en $V[G_\delta]$ de la misma manera en que se definió $\mathcal{F}_\gamma$ en el lema anterior). Así,

$\bigcup_{\beta<\omega_1} \mathcal{F} \cap V[G_{\gamma_\beta}]$ pertenece a $V[G_\delta]$. Por lo tanto $\mathcal{F} \cap V[G_\delta] \in V[G_\delta]$.

Hagamos $\mathcal{C} = \{\alpha < \omega_2 : \mathcal{F} \cap V[G_\alpha] \in V[G_\alpha] \wedge cf(\alpha) = \aleph_1\}$. El parrafo anterior demuestra que $\mathcal{C}$ es no acotado. Para ver que $\mathcal{C}$ es ω_1-cerrado sea $\{\gamma_\beta\}_{\beta<\omega_1} \subseteq \mathcal{C}$ una sucesión creciente. Procediendo de la misma manera que se hizo en el párrafo anterior, vemos que $\delta = sup\{\gamma_\beta\}_{\beta<\omega_1}$ es tal que $\mathcal{F} \cap V[G_\delta] \in V[G_\delta]$, con lo cual el lema queda demostrado. $\square$

El siguiente teorema fue demostrado por W. Rudin, en 1956, en su artículo *"Homogeneity problems in the theory of Cech compactifications"*[Rud56].

Teorema 3.4.24. *La Hipótesis del Continuo implica la existencia de p-puntos.*

Demostración. Sea $\mathcal{I} = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1,\ \alpha \textit{ es ordinal sucesor}\}$ una enumeración de de $[\omega]^\omega$, y tomemos $\mathcal{F}$ el filtro de los conjuntos cofinitos en ω. Construiremos inductivamente una sucesion de extensiones de $\mathcal{F}$, cada una con la $PIFF$. La construcción es como sigue:

i) Para $\alpha = 0$, tomamos $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \cup \{A_0\}$.

ii) Para $\alpha + 1$, supongamos que ya hemos construido hasta el término α de la sucesión de tal manera que $\mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\beta < \alpha$, $\mathcal{F}_\alpha$ tiene la $PIFF$ y es cerrado bajo intersecciones finitas. Tomemos $A_{\alpha+1}$. Veamos que no pueden existir $B, C \in \mathcal{F}_\alpha$ de tal forma que $A_{\alpha+1} \cap B = \emptyset$ y $(\omega \setminus A_{\alpha+1}) \cap C = \emptyset$. Supongamos que existen tales conjuntos, entonoces $A_{\alpha+1} \subseteq \omega \setminus B$ y $\omega \setminus A_{\alpha+1} \subseteq \omega \setminus C$, por lo que $C \subseteq A_{\alpha+1}$, y así $C \cap B \subseteq A_{\alpha+1} \cap B \subseteq \omega \setminus B \cap B = \emptyset$, lo cual no puede ser ya que $B \cap C \in \mathcal{F}_\alpha$. Por lo tanto, para todo $B \in \mathcal{F}_\alpha$, ó bien $A_{\alpha+1} \cap B \neq \emptyset$, ó bien $(\omega \setminus A_{\alpha+1}) \cap B \neq \emptyset$. En el primer caso hagamos $S = \mathcal{F}_\alpha \cup \{A_{\alpha+1}\}$, y en el segundo $S = \mathcal{F}_\alpha \cup \{\omega \setminus A_{\alpha+1}\}$. Tomemos $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ como la cerradura de S bajo intersecciones finitas.

iii) Para α ordinal límite, hagamos $S = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_\beta$. Como S es numerable, tiene una pseudointersección A. Tomemos $\mathcal{F}_\alpha$ como la cerradura de $S \cup \{A\}$ bajo intersecciones finitas.

Sea $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ la sucesión construida. Afirmamos que $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{F}_\alpha$ es un ultrafiltro. En efecto:

a) $\emptyset \notin \mathcal{U}$. Si fuera $\emptyset \in \mathcal{U}$, existiría $\alpha < \omega_1$ para el cual $\emptyset \in \mathcal{F}_\alpha$, lo cual no puede ser. También $\omega \in \mathcal{U}$, ya que para algún $\alpha < \omega_1$, $\omega = A_\alpha$, y por lo tanto $\omega \in \mathcal{F}_\alpha$.

b) Si $A, B \in \mathcal{U}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{U}$. Existe $\alpha < \omega_1$ tal que $A, B \in \mathcal{F}_\alpha$, y por lo tanto $A \cap B \in \mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{U}$.

c) Si $A \in \mathcal{U}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{U}$. Dado que la sucesión $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es creciente respecto a la contención, y $A \in \mathcal{F}_\alpha$ para algún α, no existe β para el cual $B \in \mathcal{F}_\beta$, ya que de lo contrario tomando γ adecuado, tendríamos $A, \omega \setminus B \in \mathcal{F}_\gamma$, y por lo tanto $\emptyset = A \cap \omega \setminus B \in \mathcal{F}_\gamma$, que contradice que $\mathcal{F}_\gamma$ satisface la $PIFF$. Entonces, si α es tal que $B = A_\alpha$, por la manera en que se construyó la sucesión $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, al construir $\mathcal{F}_\alpha$ se decide si $B \in \mathcal{F}_\alpha$ ó $\omega \setminus B \in \mathcal{F}_\alpha$, como lo último no puede ocurrir, tenemos forzosamente $B \in \mathcal{F}_\alpha$. Por lo tanto $B \in \mathcal{F}_\alpha$.

d) Para todo $A \subseteq \omega$, $A \in \mathcal{U}$ ó $\omega \setminus A \in \mathcal{U}$. Si $A = A_\alpha$, entonces en $\mathcal{F}_\alpha$ está A ó $\omega \setminus A$.

Sólo resta ver que $\mathcal{U}$ es p-punto. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ numerable. Por ser ω_1 regular, existe un ordinal $\alpha < \omega_1$ para el cual $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_\alpha$. Tomemos $\beta < \omega_1$ ordinal límite mayor que α. Por la manera en que se construye $\mathcal{F}_\beta$, el conjunto $\bigcup_{\gamma<\beta} \mathcal{F}_\gamma$ tiene una pseudointersección $S \in \mathcal{F}_\beta$. En particular, S también es pseudointersección de $\mathcal{A}$. Por lo tanto $\mathcal{U}$ es un p-punto. □

Diremos que una noción de forcing *preserva p-puntos*, si siempre que tenemos un p-punto $\mathcal{U}$ en el modelo base, $\mathcal{U}$ genera un ultrafiltro en la extensión genérica, es decir,

$$\mathcal{P} \Vdash \text{“}\{X \in \mathcal{P}(\omega) : (\exists A \in \mathcal{U})(A \subseteq X)\} \; es\ un\ ultrafiltro\text{”}$$

Por el lema 3.2.4, tenemos que $\mathbb{M}$ preserva p-puntos.

El siguiente teorema fue demostrado por Shelah y Blass en [BS87b], y una demostración puede ser consultada en [BJ95].

Teorema 3.4.25. *Sea $\mathcal{P}_\alpha = \langle \mathcal{P}_\beta, \dot{\mathcal{Q}}_\beta : \beta < \alpha \rangle$ una iteración con soporte numerable de forcings propios, tal que $\mathcal{P}_\beta \Vdash$ “$\dot{\mathcal{Q}}_\beta$ preserva p-puntos”. Entonces $\mathcal{P}_\alpha$ preserva p-puntos.* ■

Corolario 3.4.26. *Cualquier iteración con soporte numerable del forcing de Miller preserva p-puntos.* □

Lema 3.4.27. *Sean $\mathbb{M}_{\omega_2}$ y G $\mathbb{M}_{\omega_2}$-filtro genérico sobre V. Si $\mathcal{U}$ es un p-punto en V, y $\mathcal{V}$ es un ultrafiltro en $V[G]$, existe una función f finito a uno en $V[G]$ que acerca coherentemente a $\mathcal{U}$ y a $\mathcal{V}$.*

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ como en las hipótesis. Denotaremos por $\bar{\mathcal{U}}$ el ultrafiltro generado por $\mathcal{U}$ en $V[G]$, y por $\bar{\mathcal{U}}_\alpha$ el ultrafiltro generado por $\mathcal{U}$ en $V[G_\alpha]$ (tales conjuntos son ultrafiltros gracias al corolario). Por el corolario

3.4.26, $\bar{\mathcal{U}}_\alpha$ es un p-punto en $V[G_\alpha]$ para cada $\alpha \leq \omega_2$. Sean $\mathcal{C}_{\bar{\mathcal{U}}}$ y $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$ los conjuntos cerrados no acotados proporcionados por el lema 3.4.23. Veamos que para cada $\alpha \in \mathcal{C}_{\bar{\mathcal{U}}}$ se cumple $\bar{\mathcal{U}}_\alpha = \bar{\mathcal{U}} \cap V[G_\alpha]$. Claramente tenemos $\bar{\mathcal{U}}_\alpha \subseteq \bar{\mathcal{U}} \cap V[G_\alpha]$, dado que $\bar{\mathcal{U}} \cap V[G_\alpha]$ es un filtro y contiene a $\mathcal{U}$, por lo que el filtro generado por $\mathcal{U}$ en $V[G_\alpha]$ está contenido en $\bar{\mathcal{U}} \cap V[G_\alpha]$. Por otro lado, $\bar{\mathcal{U}}_\alpha$ es un ultrafiltro y no existe filtro en $V[G_\alpha]$ que lo extienda propiamente. Por lo tanto debemos tener la igualdad entre los dos filtros. También, para cada $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathcal{V}}$, $\mathcal{V} \cap V[G_\alpha]$ es un ultrafiltro: sea $A \in \mathcal{P}(\omega)^{V[G_\alpha]}$, entonces $A \in V[G]$, y como $\mathcal{V}$ es ultrafiltro en $V[G]$, $A \in \mathcal{V}$ ó $\omega \setminus A \in \mathcal{V}$. Si $A \in \mathcal{V}$, tenemos $A \in \mathcal{V} \cap V[G_\alpha]$. Si $\omega \setminus A \in \mathcal{V}$, como $\omega \setminus A \in V[G_\alpha]$, se sigue $\omega \setminus A \in \mathcal{V} \cap V[G_\alpha]$.

Tomemos $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\bar{\mathcal{U}}} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{V}}$. Sea $\alpha \in \mathcal{C}$ suficientemente grande de tal manera que $\mathcal{V} \cap V[G_\alpha]$ sea no vacío. Claramente se tiene $\bar{\mathcal{U}} \cap V[G_\alpha] = \bar{\mathcal{U}}_\alpha \in V[G_\alpha]$ y $\mathcal{V} \cap V[G_\alpha] \in V[G_\alpha]$. Por el teorema 3.1.10, en $V[G_{\alpha+1}]$ existe una función f finito a uno que acerca coherentemente a todos los filtros generados por filtros de $V[G_\alpha]$, en particular a $\bar{\mathcal{U}}_\alpha$ y a $\mathcal{V} \cap V[G_\alpha]$. Afirmamos que esta misma función acerca coherentemente a $\bar{\mathcal{U}}$ y $\mathcal{V}$ en $V[G]$.

Primero veamos que $f(\mathcal{U})$ genera un ultrafiltro en $V[G]$. Para cualquier $A \in \mathcal{P}(\omega)^{V[G]}$, tenemos $f^{-1}[A] \in \bar{\mathcal{U}}$ ó $f^{-1}[\omega \setminus A] = \omega \setminus f^{-1}[A] \in \bar{\mathcal{U}}$. Supongamos $f^{-1}[A] \in \bar{\mathcal{U}}$, entonces, por ser $\bar{\mathcal{U}}$ generado por $\mathcal{U}$, existe $X \in \mathcal{U}$ tal que $X \subseteq f^{-1}[A]$, por lo tanto $f[X] \subseteq A$. Para el otro caso, similarmente obtenemos $f[X] \subseteq f[\omega \setminus f^{-1}[A]] \subseteq \omega \setminus A$. Por lo tanto $f(U)$ genera un ultrafiltro en $V[G]$, al cual denotaremos por P.

Sea $\langle \mathcal{V} \cap V[G_\alpha] \rangle$ el filtro generado por $\mathcal{V} \cap V[G_\alpha]$ en $V[G_{\alpha+1}]$. Por el teorema 3.1.10, tenemos $f(\bar{\mathcal{U}}_{\alpha+1}) = f(\langle \mathcal{V} \cap V[G_\alpha] \rangle)$, por lo tanto $f(U) \subseteq$

$f(\langle \mathcal{V} \cap V[G_\alpha] \rangle) \subseteq f(\mathcal{V})$. Tenemos entonces que el ultrafiltro P generado por $f(\mathcal{U})$, está contenido en $f(\mathcal{V})$. Dado que P y $f(\mathcal{V})$ son ultrafiltros, se deduce que $P = f(\mathcal{V})$. Es claro que $f(\bar{\mathcal{U}}) = P$. Por lo tanto $f(\bar{\mathcal{U}}) = f(\mathcal{V})$. $\square$

Finalmente, estamos preparados para probar que NCF es válido en el modelo de Miller, lo cual será el último teorema que presentamos.

Teorema 3.4.28. $V[G] \models$ "NCF".

Demostración. Sea nuevamente $\mathcal{U}$ un p-punto en V. Seguimos la misma notación del lema anterior. Tomemos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{V}$ ultrafiltros no principales en $V[G]$. Sean $\mathcal{C}_{\bar{\mathcal{U}}}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ y $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$ cerrados no acotados dados por el lema 3.4.23. Hagamos $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\bar{\mathcal{U}}} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{V}}$. Entonces para cada ordinal $\alpha \in \mathcal{C}$, $\mathcal{U}_\alpha$ y $\mathcal{F} \cap V[G_\alpha]$ son cercanamente coherentes en $V[G_{\alpha+1}]$, y también lo son $\mathcal{U}_\alpha$ y $\mathcal{V} \cap V[G_\alpha]$. Como son acercados coherentemente por la misma función f, tenemos que $f(\langle \mathcal{V} \cap V[G_\alpha] \rangle) = f(\mathcal{U}_\alpha) = f(\langle \mathcal{F} \cap V[G_\alpha] \rangle)$, en $V[G_{\alpha+1}]$. Usando el mismo argumento del lema anterior vemos que $f(\mathcal{F}) = f(\mathcal{V})$. Por lo tanto NCF es válido en $V[G]$. $\square$

Bibliografía

[Abr10] Uri Abraham. Proper forcing. In Matthew Foreman and Akihiro Kanamori, editors, *Handbook of Set Theory*, volume 1. Springer, 2nd edition, 2010.

[Ala71] Alan Brown, Carl Pearcy and Norberto Salinas. Ideals of Compact Operators on Hilbert space. *Michigan Math*, 18:373–384, 1971.

[And] Andreas Blass. Applications of superperfect forcing and its relatives.

[BJ95] Tomek Bartoszyński and Haim Judah. *Set Theory: On the Structure of the Real Line.* A. K. Peters, 1995.

[Bla86] Andreas Blass. Near Coherence of Filters I: Cofinal equivalence of models of arithmetic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 27, 1986.

[Bla87] Andreas Blass. Near Coherence of Filters II: Applications to operator ideals, the Stone-Cech remainder of a half-line, order ideals of sequences, and slenderness of groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 300:557–581, 1987.

[BS87a] Andreas Blass and Saharon Shelah. Near Coherence of Filters III: a simplified consistecy proof. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30:213–243, 1987.

[BS87b] Andreas Blass and Saharon Shelah. There may be simple $p_{\aleph_1}$- and $p_{\aleph_2}$-points and the Rudin-Keisler ordering may be downward directed. *Annals of Pure and Applied Logic*, 30, 1987.

[Jec02] Thomas Jech. *Set Theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 3rd millenium edition, 2002.

[Kun80] Kenneth Kunen. *Set Theory. An introduction to independency proofs.* North Holland, Amsterdand, 1980.

[Mil84] Arnold W. Miller. Rational perfect set forcing. *Contemporary Mathematics*, 31, 1984.

[Rud56] Walter Rudin. Homogeneity problems in the theory of Stone-Cech compactifications. *Duke Mathematical Logic*, 1956.

[She92] Saharon Shelah. *Proper and Improper Forcing.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer, Berlin, 2nd edition, 1992.

[Tar09] Taras Banakh and Lubomyr Zdomskyy. Coherence of Semifilters: A survey. `http://www.franko.lviv.ua/faculty/mechmat/Departments/Topology/booksite.html`, 2009.

[Tom93] Tomek Bartoszyński, Martin Goldstern, Haim Judah and Saharon Shelah. All meager filters may be null. *Proceedings of the American Mathematical Society*, pages 515–521, 1993.