UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

Polinomios Ortogonales y el Problema de Momentos de Hausdorff

TESIS

Que para obtener el grado de Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

Presenta:
APOLINAR DE JESÚS GONZÁLEZ

Asesor:
Dr. Abdon E. Choque Rivero

MORELIA MICHOACÁN, MÉXICO, JUNIO DEL 2011.

Índice general

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a Dios por ayudarme siempre . Agradezco sinceramente a mi asesor de tesis Dr. Abdon Eddy Choque Rivero, por el valioso tiempo dedicado y asesoría brindada en todo momento, su paciencia y su motivación han sido fundamentales en la realización de este trabajo.

Finalmente quiero agradecer a todas aquellas personas que de alguna manera hicieron posible la terminación de este trabajo de tesis y que no las mencioné, gracias a todos.

Dedicatorias

Esta tesis se la dedico a mis padres

Elena González Claudio
Odilón de Jesús Margarito

por la confianza y paciencia que depositaron en mi para realizar este proyecto en mi vida. Y de igual manera a mis hermanos que me apoyaron.

Resumen

En la presente tesis se considera el problema de hallar los polinomios ortogonales en un intervalo acotado, a partir de la matriz resolvente (MR) del problema de momentos de Hausdorff. La MR representa una matriz polinomial 2×2 de la forma

$$U(z) = \begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{pmatrix},$$

donde los elementos α, β, γ y δ son polinomios, y llevan la información de los momentos.
La matriz resolvente es usada para dar la solución de un problema de momentos de Hausdorff en términos de la función asociada

$$I(\sigma, z) = \frac{\alpha(z)\omega(z) + \beta(z)}{\gamma(z)\omega(z) + \delta(z)}$$

donde ω pertenece a una cierta clase de funciones holomorfas (clase de funciones $\mathcal{R}[a, b]$ y $\mathcal{S}[a, b]$, ver Anexo).

En esta tesis se obtienen los polinomios ortogonales correspondientes al caso número impar de momentos, caso escalar.

Una nueva forma para la MR, del caso mencionado (ver lema 3.1) permite el desarrollo en polinomios ortogonales de manera análoga como en [8].

En los casos de la MR de un número par o impar de momentos destacan para cada problema, dos familias de polinomios ortogonales de primera especie respecto de medidas positivas o distribuciones distintas; y dos familias de polinomios, llamados de segunda especie.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo daremos un enfoque breve sobre la historia y actualidad de los polinomios ortogonales y del problema de momentos de Hausdorff.

1.1. Breve reseña de los polinomios ortogonales

Vamos a comenzar dando una de las definiciones de la familia de polinomios ortogonales.

Definición 1.1. *Dada una sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ con grado $P_n(x) = n$, diremos que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a una distribución μ si se cumple que:*

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(x)P_m(x)d\mu(x) = \delta_{n,m}K_n, \qquad n,m = 0,1,2,\ldots$$

donde $\delta_{n,m}$ es el símbolo de Kronecker ($\delta_{n,m} = 1 \quad si \quad n = m \quad y \quad 0 \quad si \quad n \neq m$).

Con los polinomios ortogonales su historia se remonta al siglo $XVIII$ y está estrechamente relacionada con la resolución de problemas de inmediata aplicación práctica (teoría de la gravedad de Newton).

La teoría de polinomios ortogonales, además de estar estrechamente relacionada con las ecuaciones diferenciales, también está vinculada con la teoría de aproximaciones y la de fracciones continuas, es más, la conexión con esta última dan lugar al nacimiento de la teoría general sobre polinomios ortogonales.

Dentro de la gran familia que forman los polinomios ortogonales (respecto a medidas soportadas sobre el eje real) se encuentran los polinomios ortogonales clásicos, que a su vez están divididas en discretos y continuos.

Con la familia de polinomios ortogonales clásicos continuos, se debe a que satisfacen una ecuación diferencial y en ellos se encuentran por nombrar algunos:

(a) Legendre

(b) Hahn

(c) Hermite

(d) Chebyshev

(e) Jacobi

(f) Laguerre

Y con respecto a los polinomios ortogonales clásicos discretos, se debe a que su ortogonalidad viene dada mediante sumas, o bien son solución de una ecuación en diferencias.

(a) Chebyshev

(b) Hahn

(c) Charlier

(d) Meixner

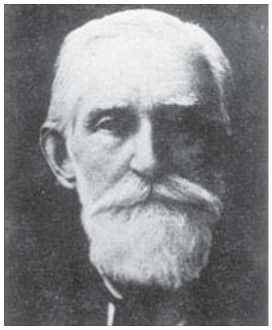
1.2. Breve reseña del problema de momentos de Hausdorff

El matemático ruso Chebyshev fue, aparentemente, el primero en consider el problema de momentos.

$$c_0 = \int_a^b f(u)du, \qquad c_1 = \int_a^b uf(u)du, \qquad c_k = \int_a^b u^k f(u)du.$$

El concepto de problema de momentos lo introdujo Stieltjes en 1894, el cual introdujo el concepto de integral de Stieltjes [1].

Dar una distribución de masa positiva en la recta $[0, \infty)$, significa dar una función no decreciente $\sigma(u)$ $(u \geq 0)$ tal que el incremento $\sigma(\beta) - \sigma(\alpha)$ representa



Chebyshev [1821 - 1894]

La interpretación mecánica del problema de Chebyshev [1] se describe así: Sean dados la longitud, el peso, el lugar del centro de gravedad y los momentos de inercia de una barra rectilínea con densidad desconocida que cambia de un punto a otro. Se requiere hallar la función densidad, es decir,

Stieltjes [1856 - 1894]

En su manuscrito sobre fracciones continuas Stieltjes escribió:. ”Vamos a llamar problema de momentos al siguiente problema: Encontrar la distribución de una masa positiva en el intervalo $[0,\infty)$, si son dados sus momentos de orden k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.”

para cualquier $\alpha \geq 0$ y $\beta > \alpha$ la masa que corresponde al intervalo $[\alpha, \beta]$. La masa completa del conjunto $[0, \infty)$ se representa en la forma

$$\lim_{\beta\to\infty}[\sigma(\beta) - \sigma(0)] = \int_0^\infty d\sigma(u),$$

mientras que

$$\int_0^\infty u d\sigma(u), \qquad \int_0^\infty u^2 d\sigma(u),$$

representan los momentos estáticos de la distribución de masa considerada y el momento de inercia respecto del punto $u = 0$. Stieltjes llama momento generalizado de orden k a la integral

$$\int_0^\infty u^k d\sigma(u).$$

Consecuentemente en el problema de Stieltjes se tiene una sucesión de números s_k $(k = 1, 2, \ldots)$ y se busca una función no negativa $\sigma(u)$, para $u \geq 0$, tal que se satisface

$$\int_0^\infty u^k d\sigma(u) = s_k, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

El matemático alemán Felix Hausdorff (8 de noviembre de 1868, 26 de enero de 1942)

Hausdorff [1868 - 1942]

Resolvió el problema de momentos: Dada una secuencia de números $\{s_j\}_{j=0}^{k}$ hallar una medida positiva μ (o función monótona no decreciente de variación acotada $\mu(t)$) sobre $[0, 1]$ tal que

$$s_j = \int_0^1 t^j d(\mu(t)), \quad j = 0, \dots, k$$

Nuestro enfoque para el desarrollo de los polinomios ortogonales en el intervalo $[a, b]$ está basado en la técnica de los Problemas de Momentos de Hausdorff, cuya solución está en términos de la función asociada

$$s(z) = \frac{\alpha(z)\omega(z) + \beta(z)}{\gamma(z)\omega(z) + \delta(z)},$$

donde ω pertenece a una cierta clase de funciones holomorfas (clase de funciones $\mathcal{R}[a, b]$ y $\mathcal{S}[a, b]$, ver Anexo).

La relación que existe entre la función asociada $s(z)$ y la función distribución $\sigma(z)$ es la siguiente:

Dado $s \in R[a, b]$, la distribución σ satisface la ecuación

$$s(z) = \int_a^b (\tau - z)^{-1} d\sigma(\tau)$$

y normalizado por la condición

$$\sigma(t) = (\sigma(t + 0) - \sigma(t - 0))/2, \qquad \sigma(0) = 0,$$

es determinado únicamente por la siguiente fórmula inversa de Stieltjes:

$$\sigma(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^t Im\, s(x + i\varepsilon) dx, \qquad t \in [a, b].$$

Con esta notación el problema de momentos de Hausdorff puede formularse como sigue:

Describir el conjunto $R([a, b], \{s_j\}_{j=0}^{k})$ de la transformada de Stieltjes para toda medida no negativa en $M([a, b], \{s_j\}_{j=0}^{k})$

Las MR que utilizamos en el presente trabajo son las obtenidas en [3], [4].

Los polinomios ortogonales, caso matricial para el caso par de momentos, se obtuvo como parte de una tesis de doctorado de H. Thiele (Universidad de Leipzig, 2006), [8].

Los polinomios ortogonales para el caso impar de momentos, en su versión matricial, se anunciaron por primera vez por el Doctor. Abdón Choque Rivero en el seminario CA "Ecuaciones de Física y Matemáticas del IFM" en mayo del 2010.

En el desarrollo de la tesis, en particular en los capítulos 3 y 4 se usa la técnica de la Desigualdad fundamental de Potapov [3], [4].

La organización de la tesis es como sigue: En el capítulo 1 se da la introducción de la tesis. En el capítulo 2 describimos los conceptos del momento funcional y la ortogonalidad de polinomios. En el capítulo 3 se calculan y se presentan los polinomios ortogonales sobre un intervalo acotado en el caso par de momentos. En el capítulo 4 se calculan y se presentan los polinomios ortogonales sobre un intervalo acotado en el caso impar de momentos. Y en el capítulo 5 se muestran las conclusiones, aplicaciones y aportaciones y al final de la tesis se incluye un apéndice el cual se manejan conceptos y definiciones usadas en la tesis.

Capítulo 2

El momento Funcional y Ortogonalidad

2.1. Momento Funcional

Los polinomios que consideraremos son polinomios con coeficientes reales.

Definición 2.1. *Sea* $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de números reales, y definamos la siguiente aplicación* $\mathfrak{L}\colon \Pi \to \mathbb{R}$*, donde* Π *es el espacio de los polinomios con coeficientes reales tal que*

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[x^n] &= \mu_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \\ \mathfrak{L}[\alpha_1\pi_1(x) + \alpha_2\pi_2(x)] &= \alpha_1\mathfrak{L}[\pi_1(x)] + \alpha_2\mathfrak{L}[\pi_2(x)] \end{aligned}$$

para todo número real α_i *y todo polinomio* $\pi_i(x)$ $(i = 1, 2)$*. Entonces* $\mathfrak{L}$ *se llama el* ***momento funcional lineal*** *determinado por la sucesión de momentos* $\{\mu_n\}$*. El número* μ_n *se llama el* ***momento de orden*** n*.*

Ejemplo:

Sea $\mu_n = \frac{1}{n+1}$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$

Consideremos el funcional $\mathfrak{L}[x^n] = \int_0^1 x^n dx$.

La condición (i) se cumple directamente.

La condición (ii) se cumple por las propiedades de la integral.

De esto se sigue inmediatamente que si $\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, entonces

$$\mathfrak{L}[\pi(x)] = \sum_{k=0}^{n} c_k \mu_k.$$

Definición 2.2. *Una sucesión* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *se llama una* ***sucesión de polinomios ortogonales*** *con respecto a un momento funcional* $\mathfrak{L}$ *si para todo los enteros* m *y* n *no negativos se satisfacen*

(i) $P_n(x)$ *es un polinomio de grado* n*,*

(ii) $\mathfrak{L}\,[P_m(x)P_n(x)] = 0$ *para* $m \neq n$*,*

(iii) $\mathfrak{L}\,[P_n^2(x)] \neq 0.$

Una sucesión de polinomios ortogonales lo abreviaremos como SPO y usaremos la frase "$\{P_n(x)\}$ es una SPO para $\mathfrak{L}$". De las condiciones (ii) y (iii) de la definición (2.2) se observa que

$$\mathfrak{L}[P_m(x)P_n(x)] = K_n\delta_{mn}, \qquad K_n \neq 0.$$

Ahora notemos algunas equivalencias de la definición (2.2).

Teorema 2.1. *Sea* $\mathfrak{L}$ *un momento funcional y sea* $\{P_n(x)\}$ *una sucesión de polinomios. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\{P_n(x)\}$ *es una SPO con respecto a* $\mathfrak{L}$*,*

(b) $\mathfrak{L}[\pi(x)P_n(x)] = 0$ *para todo polinomio* $\pi(x)$ *de grado* $m < n$*, mientras que* $\mathfrak{L}[\pi(x)P_n(x)] \neq 0$ *si* $m = n$*,*

(c) $\mathfrak{L}[x^m P_n(x)] = K_n\delta_{mn}$*, donde* $K_n \neq 0$*,* $m = 0, 1, \ldots, n.$

Demostración

$(a) \Rightarrow (b)$

Para demostrar esta implicación primero demostremos el siguiente lema

Lema 2.1. *Sea* $F_j(x)$ *una familia de* $(j+1)$ *polinomios de grado* j

$$F_0(x), F_1(x), \ldots, F_j(x)$$

entonces cualquier polinomio $Q_m(x)$ *de grado* $m \leq j$ *se presentan de manera unívoca como*

$$Q_m(x) = a_0F_0(x) + a_1F_1(x) + a_2F_2(x) + \ldots + a_{m-1}F_{m-1}(x) + a_mF_m(x), \quad a_m \neq 0$$

Demostración:

Sea

$$F_k(x) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)}x + c_2^{(k)}x^2 + \ldots + c_{k-1}^{(k-1)}x^{k-1} + c_k^{(k)}x^k, \quad c_k^{(k)} \neq 0$$

y sea

$$Q_m(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \ldots + q_{m-1}x^{m-1} + q_mx^m, \quad q_m \neq 0$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
&q_0 + q_1x + q_2x^2 + \ldots + q_{m-1}x^{m-1} + q_mx^m \\
&= a_0c_0^{(0)} + a_1[c_0^{(1)} + c_1^{(1)}x] + a_2[c_0^{(2)} + c_1^{(2)}x + c_2^{(2)}x^2] + \ldots + \\
&\quad a_m[c_0^{(m)} + c_1^{(m)}x + c_2^{(m)}x^2 + \ldots + c_{m-1}^{(m-1)}x^{m-1} + c_m^{(m)}x^m] \\
&= a_0c_0^{(0)} + a_1c_0^{(1)} + a_1c_1^{(1)}x + a_2c_0^{(2)} + a_2c_1^{(2)}x + a_2c_2^{(2)}x^2 + \ldots + \\
&\quad a_mc_0^{(m)} + a_mc_1^{(m)}x + a_mc_2^{(m)}x^2 + \ldots + a_mc_{m-1}^{(m-1)}x^{m-1} + a_mc_m^{(m)}x^m \\
&= [a_0c_0^{(0)} + a_1c_0^{(1)} + a_2c_0^{(2)} + \ldots + a_mc_0^{(m)}] + \\
&\quad [a_1c_1^{(1)} + a_2c_1^{(2)} + \ldots + a_mc_1^{(m)}]x + \\
&\quad [a_2c_2^{(2)} + a_3c_2^{(3)} + \ldots + a_mc_2^{(m)}]x^2 + \ldots + a_mc_m^{(m)}x^m.
\end{aligned}
$$

Igualando coeficientes tenemos,

$$
\begin{aligned}
a_0c_0^{(0)} + a_1c_0^{(1)} + a_2c_0^{(2)} + \ldots + a_mc_0^{(m)} &= q_0 \\
a_1c_1^{(1)} + a_2c_1^{(2)} + \ldots + a_mc_1^{(m)} &= q_1 \\
a_2c_2^{(2)} + \ldots + a_mc_2^{(m)} &= q_2 \\
\vdots &= \vdots \\
a_mc_m^{(m)} &= q_m.
\end{aligned}
$$

El cual es equivalente al siguiente sistema

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} c_0^{(0)} & c_0^{(1)} & c_0^{(2)} & \ldots & c_0^{(m)} \\ 0 & c_1^{(1)} & c_1^{(2)} & \ldots & c_1^{(m)} \\ 0 & 0 & c_2^{(2)} & \ldots & c_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_m^{(m)} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix}}_{C}.
$$

Como $c_k^{(k)} \neq 0$ para $k = 0, \ldots, m$ y $a_m \neq 0$ y haciendo uso de las propiedades de los determinantes obtenemos que $det(A) \neq 0$, lo que significa que el sistema tiene una única solución para $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$.

Con esto queda demostrado el Lema 2.1.

Así que continuando con la demostración del teorema, tenemos por hipótesis que $\{P_n(x)\}$ es una SPO con respecto a $\mathfrak{L}$ y haciendo uso del Lema 2.1, si $\pi(x)$ es un polinomio de grado $m < n$, entonces existen constantes c_k tal que

$$
\pi(x) = \sum_{k=0}^{m} c_kP_k(x), \quad c_m \neq 0.
$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por $P_n(x)$ y aplicando $\mathfrak{L}$, tenemos

$$\mathfrak{L}[\pi(x)P_n(x)] = \sum_{k=0}^{m} c_k\mathfrak{L}[P_k(x)P_n(x)] = 0, \quad si\ m < n,$$

$$= c_n\mathfrak{L}[P_n^2(x)] \neq 0, \quad si\ \ m = n.$$

$(b) \Rightarrow (c)$

Como $\mathfrak{L}[\pi(x)P_n(x)] = 0$ para todo polinomio $\pi(x)$ de grado $m < n$, y $\mathfrak{L}[\pi(x)P_n(x)] \neq 0$ si $m = n$, entonces haciendo $\pi(x) = P_m(x)$ y asociando ambas condiciones obtenemos que $\mathfrak{L}[x^m P_n(x)] = K_n\delta_{mn}$, donde $K_n \neq 0$, $m = 0, 1, \ldots, n$.

$(c) \Rightarrow (a)$

Para esta implicación demostraremos las condiciones (iii), (ii) y (i) de la definición (2.2) y sea $\mathfrak{L}[x^m P_n(x)] = K_n\delta_{mn}$, $K_n \neq 0$.

(iii) Notemos que x^m es un polinomio de grado m, entonces haciendo $m = n$

$$\mathfrak{L}[\sum_{k=0}^{n} c_k x^k P_n(x)] = \mathfrak{L}[x^n P_n(x)] = K_n \neq 0$$

por tanto $\mathfrak{L}[P_n^2(x)] \neq 0$.

(ii) Para cualquier polinomio $P_m(x)$ de grado menor que $P_n(x)$ y por la definición de δ_{mn}, $\mathfrak{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0$.

(i) Vamos a mostrar que $P_n(x)$ es un polinomio de grado n. Supongamos que $P_n(x)$ es de grado q, es decir;

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_q x^q + 0x^{q+1} + 0x^{q+2} + \ldots + 0x^n$$

y tenemos por hipótesis que $\mathfrak{L}[x^m P_n(x)] = K_n\delta_{mn}$ donde $K_n \neq 0$, $m = 0, 1, \ldots, n$.

$$\mathfrak{L}[x^m \sum_{k=0}^{q} c_k x^k] = \sum_{k=0}^{q} c_k \mathfrak{L}[x^m x^k] = \sum_{k=0}^{q} c_k \mu_{m+k} = K_n\delta_{mn}$$

el cual es equivalente al siguiente sistema

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_q \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{q+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_q & \mu_{q+1} & \dots & \mu_{2q} \\ \mu_{q+1} & \mu_{q+2} & \dots & \mu_{2q+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{n+q} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix}}_{C}.$$

Para que el sistema tenga solución debe cumplir que el

$$rg(A, C) = rg(A) \tag{2.1}$$

esto por la compatibilidad del sistema (ver Apéndice).

Sea l el rango de A, denotado por $rg(A) = l$. Tenemos que $l \leq q + 1$ debido a que la matriz A tiene $q + 1$ columnas ($q < n$).

Es puede de verificar (2.1) mediante el uso del método de Gauss-Jordan de la matriz (A, C), es decir;

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_q & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{q+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \mu_q & \mu_{q+1} & \dots & \mu_{2q} & 0 \\ \mu_{q+1} & \mu_{q+2} & \dots & \mu_{2q+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{n+q} & K_n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{l-1} & \mu_l & \dots & \mu_q & 0 \\ 0 & \hat{c}_2 & \dots & \hat{c}_l & \hat{c}_{l+1} & \dots & \hat{c}_q & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{c}_{2(l-1)} & \hat{c}_{2l} & \dots & \hat{c}_{2q} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación (2.1) se satisface si la matriz A tiene rango completo, es decir $rg(A) = n + 1$ entonces

$$n + 1 = rg(A, C) = rg(A) = n + 1.$$

Pero si $rg(A) = n + 1$ entonces $det(A) = \Delta_n \neq 0$, por tanto $P_n(x)$ es un polinomio de grado n y con esto $\{P_n(x)\}$ es una SPO con respecto a $\mathfrak{L}$. Así se completa la demostración del teorema.■

Teorema 2.2. *Sea $\{P_n(x)\}$ una SPO con respecto a $\mathfrak{L}$. Entonces para cada polinomio $\pi(x)$ de orden n,*

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$$

donde

$$c_k = \frac{\mathfrak{L}[\pi(x)P_k(x)]}{\mathfrak{L}[P_k^2(x)]}, \qquad k = 0, 1, 2, ..., n \tag{2.2}$$

es decir que un polinomio cualquiera $\pi(x)$ de orden n se puede escribir como combinación lineal de los polinomios ortogonales.

Demostración

Sea $\pi(x)$ un polinomio de grado n, entonces existen constantes c_k tal que

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x), \quad c_n \neq 0.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $P_m(x)$ y aplicando $\mathfrak{L}$ obtenemos

$$\mathfrak{L}[\pi(x)P_m(x)] = \sum_{k=0}^{n} c_k \mathfrak{L}[P_k(x)P_m(x)] = 0, \quad \textit{para} \quad n < m,$$

$$= c_m \mathfrak{L}[P_m^2(x)], \quad \text{para} \quad n = m.$$

Como $\mathfrak{L}[P_m^2(x)] \neq 0$, obtenemos (2.2).■

Corolario 2.1. *Si $\{P_n(x)\}$ es una SPO para $\mathfrak{L}$, entonces cada $P_n(x)$ está determinado únicamente por un factor arbitario no cero. Es decir, si $\{Q_n(x)\}$ es también una SPO para $\mathfrak{L}$, entonces existen constantes $c_n \neq 0$ tal que*

$$Q_n(x) = c_n P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.3}$$

Demostración

Si $\{Q_n(x)\}$ es una SPO para $\mathfrak{L}$, entonces por el Teorema (2.1),

$$\mathfrak{L}[P_k(x)Q_n(x)] = 0, \quad \text{para} \ \ k < n.$$

Así, haciendo $\pi(x) = Q_n(x)$ en el Teorema (2.2), tenemos

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + ... + c_n P_n(x)$$

y como

$$c_k = \frac{\mathfrak{L}[Q_n(x)P_k(x)]}{\mathfrak{L}[P_k^2(x)]}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n.$$

entonces queda demostrado el corolario.■

OBS 1. Es claro que si $\{P_n(x)\}$ es una SPO para $\mathfrak{L}$, entonces también lo es $\{c_n P_n(x)\}$ para cada suceción de constantes $c_n \neq 0$.

OBS 2. Ahora bien, si $\{P_n(x)\}$ es una SPO y a_n denota el coeficiente principal de $P_n(x)$, entonces

$$\hat{P}_n(x) = a_n^{-1} P_n(x)$$

nos da los correspondientes SPO mónicos, $\{\hat{P}_n(x)\}$.

2.2. Existencia de Sucesiones de Polinomios Ortogonales

Definamos el siguiente determinante como

$$\Delta_n = det\left(\mu_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n} = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

El siguiente teorema garantiza la existencia única de una sucesión de polinomios ortogonales si y sólo si $\Delta_n \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, ...$

Previamente mediante como ejemplo mostraremos que esta condición es importante.

Ejemplo:

Sea $\mathfrak{L}[x^n] = a^n \ (n \geq 0)$, y sea $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$. De acuerdo al teorema 2.1 la secuencia $\{P_n(x)\}$ es una SPO si y solo si

$$\mathfrak{L}[x^m P_n(x)] = \sum_{k=0}^{n} c_k a^{k+m} = K_n \delta_{mn}, \quad K_n \neq 0, \qquad m \leq n. \quad (2.5)$$

Demostraremos que esta relación no se satisface. En efecto, reescribiendo en forma matricial (2.5), tenemos,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ a & a^2 & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n-1} & a^{n-2} & \dots & a^{2n} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}}_{C}. \tag{2.6}$$

Utilizando la propiedad de los determinantes, tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ a & a^2 & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n-1} & a^{n-2} & \dots & a^{2n} \end{vmatrix} = a^{n(n-1)/2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{2n-2} & a^{2n-2} & \dots & a^{2n-2} \end{vmatrix} = 0.$$

Vemos que el $det(A) = 0$ o denotado de otra manera, $\Delta_n = 0$. Este sistema no tiene solución para $n > 0$ ya que $rg(A, C) \neq rg(A)$. Por lo tanto mediante el funcional dado no se puede construir una SPO.

Teorema 2.3. *Sea $\mathfrak{L}$ un momento funcional con una sucesión de momentos $\{\mu_n\}$. Entonces existe una SPO para $\mathfrak{L}$ si y sólo si $\Delta_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, ...$*

Demostración

Supongase que existe una SPO para $\mathfrak{L}$, tenemos que probar que $\Delta_n \neq 0$.

Entonces sea $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} x^k, \quad c_{nn} \neq 0,$
multiplicamos en ambos lados de la ecuación por x^m y aplicando el funcional $\mathfrak{L}$

$$\mathfrak{L}[x^m P_n(x)] = \sum_{k=0}^{n} c_{nk}\mu_{k+m} = K_n \delta_{mn}, \quad K_n \neq 0, \qquad m \leq n. \tag{2.7}$$

Esto último se sigue por la condición del Teorema (2.1), el cual es quivalente al siguiente sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} c_{n0} \\ c_{n1} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}}_{C}. \tag{2.8}$$

Para que el sistema tenga solución el $rg(A, C) = rg(A)$, pero resulta que el $rg(A) = n + 1$ ya que C es combinación lineal de A, entonces $det(A) = \Delta_n \neq 0$ y se sigue entonces que es única.

De manera recíproca, supongamos que $\Delta_n \neq 0$, y sea $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{nk}x^k, \quad c_{nn} \neq 0$ entonces multiplicamos en ambos lados de la ecuación por x^m y aplicando el funcional $\mathfrak{L}$,

$\mathfrak{L}[x^m P_n(x)] = \sum_{k=0}^{n} c_{nk}\mu_{k+m} = K_n, \quad K_n \neq 0,$

y por (c) del teorema 2.1 existe la SPO para $\mathfrak{L}$. ■

Teorema 2.4. *Sea $\{P_n(x)\}$ una SPO para $\mathfrak{L}$.Entonces para cualquier polinomio $\pi(x)$ de grado n,*

$$\mathfrak{L}[\pi_n(x)P_n(x)] = a_n\mathfrak{L}[x^n P_n(x)] = \frac{a_n b_n \Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad \Delta_{-1} = 1, \tag{2.9}$$

donde a_n denota el coeficiente principal de $\pi_n(x)$ y b_n denota el coeficiente principal de $P_n(x)$.

Demostración

Sea

$$\pi_n(x) = a_n x^n + \pi_{n-1}(x)$$

donde $\pi_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, entonces tenemos

$$\mathfrak{L}[\pi_n(x)P_n(x)] = a_n\mathfrak{L}[x^n P_n(x)] + \underbrace{\mathfrak{L}[\pi_{n-1}(x)P_n(x)]}_{0} = a_n\mathfrak{L}[x^n P_n(x)].$$

Entonces por (c) del teorema (2.1)

$$\mathfrak{L}[x^m P_n(x)] = K_n\delta_{mn}, \quad K_n \neq 0$$

haciendo $m = n$

$$\mathfrak{L}[x^n P_n(x)] = K_n$$

donde K_n se puede calcular utilizando la Regla de Cramer (ver Apéndice) en la ecuación (2.8), es decir

$$K_n = \frac{c_{nn}\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad n \geq 1$$

válido para $n = 0$ y $\Delta_{-1} = 1$.

Por tanto

$$\mathfrak{L}[\pi_n(x)P_n(x)] = a_n\mathfrak{L}[x^n P_n(x)] = a_n K_n = a_n \frac{c_{nn}\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Entonces haciendo $c_{nn} = b_n$ se demuestra el teorema. ■

Corolario 2.2. *[9] Sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales asociado a la distribución μ. Entonces*

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} D_n(x) \tag{2.10}$$

$$\text{donde } D_n(x) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}, \qquad n \geq 1$$

$D_{-1} = 1$, $D_0 = 1$

2.3. Problema de Momentos de Hamburger

En 1894 y 1895, Stieltjes propuso y resolvió completamente el siguiente problema que él denominó "Problema de Momentos":

Dada una sucesión $\{s_j\}_{j=0}^{\infty}$ de números reales. Encontrar condiciones necesarias y suficientes para exista una función $\sigma(t)$ no decreciente sobre $[0, \infty)$ tal que

$$\int_0^{\infty} t^j d\sigma(t) = s_j, \qquad j = 0, 1, \dots, n.$$

Posteriormente , en 1920-1921, H. Hamburger hizo la contribución de extender al intervalo de integración a todo el eje real $(-\infty, \infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^j d\sigma(t) = s_j, \qquad j = 0, 1, \dots, n.$$

Observación. Los problemas de momentos anteriores son determinados si su solución es única, de otro modo se dice que es indeterminado.

Teorema 2.5. *El problema de momentos de Hamburger tiene solución si y sólo si los determinantes $\triangle_k$ satisfacen*

$$\triangle_k = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{vmatrix} \geq 0, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Observación 1. En el caso donde $\triangle_k > 0, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ la distribución $\sigma(t)$ no es única, es decir, una misma sucesión de momentos pueda representarse mediante una cantidad no numerable de distribuciones diferentes.

2.4. Problema de Momentos de Hausdorff Truncado

Dados $s_0, s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ una sucesión de momentos, hallar el conjunto de medidas positivas $\sigma(t)$ (funciones no decrecientes (ver Apéndice)) tal que

$$s_j = \int_a^b t^j d\sigma(t), \qquad j = 0, 1, \ldots n.$$

En esta tesis no consideramos el problema de hallar $\sigma(t)$, más bien, nuestro objetivo es construir los polinomios ortogonales directamente de los momentos.

Usualmente en lugar de buscar $\sigma(t)$, se busca una función holomorfa en $\mathbb{C}\backslash[a, b]$ denominada la función asociada $I(\sigma, z)$:

$$I(\sigma, z) = \frac{\alpha(z)\omega(z) + \beta(z)}{\gamma(z)\omega(z) + \delta(z)}$$

donde ω es una función analítica arbitraria $\omega : \mathbb{C}_+ \longrightarrow \mathbb{C}_+ \cup \{\infty\}$ tal que cuando

$$n = 2j + 1, \qquad \omega(z) = \int_a^b \frac{d\mu(t)}{t - z}, \qquad \forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

y

$$n = 2j, \qquad \omega(z) = (b - z) \int_a^b \frac{d\mu(t)}{t - z}, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

$\mu(t)$ recorre el conjunto de todas las medidas positivas sobre $[a, b]$

Teorema 2.6. *El problema de momentos de Hausdorff tiene solución con un número finito de momentos $s_0, s_1, \ldots, s_k$ si y sólo si:*

a) en el caso par de momentos, es decir, cuando $k = 2j$, las matrices $H_{1,j}$ y $H_{2,j}$ son positivas semidefinidas. Estas matrices están definidas en la sección 3.1.

b) en el caso impar de momentos, es decir, cuando $k = 2j + 1$, las matrices $H_{1,j}$ y $H_{2,j}$ son positivas semidefinidas. Estas matrices están definidas en la sección 4.1.

Demostración
La demostración se encuentra en [7].

En adelante vamos a asumir que $H_{1,j}$ y $H_{2,j}$ son positivos definidos. Esta condición garantiza la existencia de un número infinito de soluciones del problema de momentos de Hausdorff, (ver [7]).

2.5. Matrix resolvente

La matriz resolvente, introducida por M.G.Krein [7], representa una matriz polinomial 2×2 de la forma

$$U_j(z) = \begin{pmatrix} \alpha_j(z) & \beta_j(z) \\ \gamma_j(z) & \delta_j(z) \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Donde α, β, γ y δ son polinomios de grado menor o igual a j.

A continuación describimos las matrices resolventes que corresponden al problema de momentos de Hausdorff en las casos par e impar de momentos, ver [3],[4].

Para el problema de momentos de Hausdorff, caso par de momentos es decir; $s_0, s_1, \ldots, s_{2j+1}, \quad j \geq 0$, la MR tiene la forma:

$$V_j(z) = \begin{bmatrix} 1-(z-a)u_{2,j}^*[R_j(\bar{z})]^* H_{2,j}^{-1} R_j(a) v_j & u_{1,j}^*[R_j(\bar{z})]^* H_{1,j}^{-1} R_j(a) u_{1,j} \\ -(b-z)(z-a)v_j^*[R_j(\bar{z})]^* H_{2,j}^{-1} R_j(a) v_j & 1+(z-a)v_j^*[R_j(\bar{z})]^* H_{1,j}^{-1} R_j(a) u_{1,j} \end{bmatrix}$$

donde los elementos de esta matriz se describen en la sección (3.1), suponemos que $H_{2,j}$ y $H_{1,j}$ son positivos definidos, es decir, existe la inversa de ambas matrices.

Para el problema de momentos de Hausdorff, caso impar de momentos es decir; $s_0, s_1, \ldots, s_{2n}, \quad n \geq 0$, la MR tiene la forma:

$$U_{1,n}(z) = \begin{bmatrix} \alpha_n(z) & \beta_n(z) \\ \gamma_n(z) & \delta_n(z) \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_n(z) &= 1-(z-a)u_{1,n}^*[R_{1,n}(\bar{z})]^* H_{1,n}^{-1} R_{1,n}(a) v_{1,n}, \\ \beta_n(z) &= (b-a)^{-1}\{s_0 + (u_{2,n}^* + z s_0 v_{2,n}^*)[R_{2,n}(\bar{z})]^* H_{2,n}^{-1} R_{2,n}(a)(u_{2,n} + a v_{2,n} s_0)\}, \\ \gamma_n(z) &= -(z-a)v_{1,n}^*[R_{1,n}(\bar{z})]^* H_{1,n}^{-1} R_{1,n}(a) v_{1,n}, \\ \delta_n(z) &= (b-z)(b-a)^{-1}\{1+(z-a)v_{2,n}^*[R_{2,n}(\bar{z})]^* H_{2,n}^{-1} R_{2,n}(a)(u_{2,n} + a v_{2,n} s_0)\}. \end{aligned}$$

los elementos de esta matriz también se describen en la sección 4.1.

Un objetivo importante de esta tesis consiste en hallar una representación de la MR mediante polinomios ortogonales y polinomios de segunda especie, por ejemplo, en el caso impar de momentos demostraremos que la MR tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\alpha_n(z) &= 1-(z-a)\sum_{j=0}^{n} Q^*_{1,j}(\bar{z})P_{1,j}(a),\\
\beta_n(z) &= (b-a)^{-1}\{s_0+\sum_{j=0}^{n} Q^*_{2,j}(\bar{z})Q_{2,j}(a)\},\\
\gamma_n(z) &= -(z-a)\sum_{j=0}^{n} P^*_{1,j}(\bar{z})P_{1,j}(a),\\
\delta_n(z) &= (b-z)(b-a)^{-1}\{1+(z-a)\sum_{j=0}^{n} P^*_{2,j}(\bar{z})Q_{2,j}(a)\}.
\end{aligned}$$

aquí $Q_{k,j}$ y $P_{k,j}$ para $k=\{1,2\}$, $j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ se describen en (3.21) y (3.22).

La equivalencia de estas dos últimas formas las demostraremos en la sección 4.1 y 4.2.

Capítulo 3

Polinomios ortogonales sobre un intervalo acotado. Caso par de momentos

En este capítulo obtendremos los polinomios ortogonales, a partir de la matriz resolvente en el caso par de momentos, es decir cuando tenemos los momentos $s_0, s_1, \ldots, s_{2j+1}, \quad j \geq 0$.

El resultado principal de este capítulo, los teoremas 3.1 y 3.2, se obtuvieron como parte de la Tesis de doctorado H.Thiele, Universidad de Leipzig, 2006. En este capítulo se utiliza la matriz resolvente que aparecen en el trabajo [3].

3.1. Matrices auxiliares

Sean los momentos $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{2j+1}, \quad j \geq 0$. Entonces para $a < b$ y $\forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ definimos las matrices

$$H_j = [s_{k+l}]_{k,l=0}^{j}, \qquad K_j = [s_{k+l+1}]_{k.l=0}^{j},$$

$$H_{1,j} = -aH_j + K_j, \qquad \text{y} \qquad H_{2,j} = bH_j - K_j,$$

Sea

$$\begin{aligned} u_{1,0} &= -s_0, && (3.1)\\ u_{2,0} &= s_0, && (3.2)\\ v_0 &= 1, && (3.3)\\ T_0 &= 0. && (3.4) \end{aligned}$$

Así para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$u_{1,j} = -\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_j \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 0 \\ s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{j-1} \end{bmatrix}, \qquad u_{2,j} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_j \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} 0 \\ s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{j-1} \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

$$v_j = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{j\times 1} \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

y

$$T_j = \begin{bmatrix} 0_{1\times j} & 0 \\ I_j & 0_{j\times 1} \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Sea $R_j : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{(j+1)\times(j+1)}$ tal que $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$R_j(z) = (I - zT_j)^{-1} \tag{3.8}$$

Ejemplo:

$$H_0 = s_0, \qquad H_1 = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix}, \qquad H_2 = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{bmatrix}.$$

$$K_0 = s_1, \qquad K_1 = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix}, \qquad K_2 = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \\ s_3 & s_4 & s_5 \end{bmatrix}.$$

$$H_{1,0} = -as_0 + s_1, \qquad H_{1,1} = -a\begin{bmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix}.$$

$$H_{2,0} = bs_0 - s_1, \qquad H_{2,1} = b\begin{bmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix}.$$

La matriz resolvente $\forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

De aquí en adelante asumimos que $H_{1,j} > 0$ y $H_{2,j} > 0$.

$$V_j(z) = \begin{bmatrix} 1 - (z-a)u^*_{2,j}[R_j(\bar{z})]^* H^{-1}_{2,j} R_j(a) v_j & u^*_{1,j}[R_j(\bar{z})]^* H^{-1}_{1,j} R_j(a) u_{1,j} \\ -(b-z)(z-a)v^*_j[R_j(\bar{z})]^* H^{-1}_{2,j} R_j(a) v_j & 1 + (z-a)v^*_j[R_j(\bar{z})]^* H^{-1}_{1,j} R_j(a) u_{1,j} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Introducimos

$$Y_{1,j} = -a\begin{bmatrix} s_j \\ s_{j+1} \\ \vdots \\ s_{2j-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{j+1} \\ s_{j+2} \\ \vdots \\ s_{2j} \end{bmatrix}, \qquad Y_{2,j} = b\begin{bmatrix} s_j \\ s_{j+1} \\ \vdots \\ s_{2j-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{j+1} \\ s_{j+2} \\ \vdots \\ s_{2j} \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

$$D_{1,j} = -as_{2j} + s_{2j+1} \qquad \text{y} \qquad D_{2,j} = bs_{2j} - s_{2j+1}. \tag{3.11}$$

$$H_{1,j} = \begin{bmatrix} H_{1,j-1} & Y_{1,j} \\ Y^*_{1,j} & D_{1,j} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad H_{2,j} = \begin{bmatrix} H_{2,j-1} & Y_{2,j} \\ Y^*_{2,j} & D_{2,j} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Así para $\forall j \in \{1,2,\dots,n\}$ y $k \in \{1,2\}$

$$H_{k,j} = \begin{bmatrix} H_{k,j-1} & Y_{k,j} \\ Y^*_{k,j} & D_{k,j} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

donde $H_{k,j}$ es una matriz Hermitiana, entonces

$$\begin{aligned} H_{k,j} &= \begin{bmatrix} H_{k,j-1} & Y_{k,j} \\ Y^*_{k,j} & Y^*_{k,j}H^{-1}_{k,j-1}Y_{k,j} + D_{k,j} - Y^*_{k,j}H^{-1}_{k,j-1}Y_{k,j} \end{bmatrix} \\ & \quad \text{donde} \qquad L_{k,j} = D_{k,j} - Y^*_{k,j}H^{-1}_{k,j-1}Y_{k,j} > 0 \\ &= \begin{bmatrix} H_{k,j-1} & Y_{k,j} \\ Y^*_{k,j} & Y^*_{k,j}H^{-1}_{k,j-1}Y_{k,j} + L_{k,j} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_{k,j-1} & 0 \\ Y^*_{k,j} & Y^*_{k,j} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & H^{-1}_{k,j-1}Y_{k,j} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y^*_{k,j}H^{-1}_{k,j-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_{k,j-1} & 0 \\ 0 & L_{k,j} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & H^{-1}_{k,j-1}Y_{k,j} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$H_{k,j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y^*_{k,j}H^{-1}_{k,j-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_{k,j-1} & 0 \\ 0 & L_{k,j} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & H^{-1}_{k,j-1}Y_{k,j} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Para calcular la inversa de $H_{k,j}$, hagamos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y^*_{k,j}H^{-1}_{k,j-1} & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} H_{k,j-1} & 0 \\ 0 & L_{k,j} \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & H^{-1}_{k,j-1}Y_{k,j} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$H_{k,j}^{-1} = (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

donde

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -Y_{k,j}^{*}H_{k,j-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} H_{k,j-1}^{-1} & 0 \\ 0 & L_{k,j}^{-1} \end{bmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -H_{k,j-1}^{-1}Y_{k,j} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Así

$$\begin{aligned} H_{k,j}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -H_{k,j-1}^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_{k,j-1}^{-1} & 0 \\ 0 & L_{k,j}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -Y_{k,j}^{*}H_{k,j-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_{k,j-1}^{-1} + H_{k,j-1}^{-1}Y_{k,j}L_{k,j}^{-1}Y_{k,j}^{*}H_{k,j-1}^{-1} & -H_{k,j-1}^{-1}Y_{k,j}L_{k,j}^{-1} \\ -L_{k,j}^{-1}Y_{k,j}^{*}H_{k,j-1}^{-1} & L_{k,j}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_{k,j-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{k,j-1}^{-1}Y_{k,j}L_{k,j}^{-1}Y_{k,j}^{*}H_{k,j-1}^{-1} & -H_{k,j-1}^{-1}Y_{k,j} \\ -L_{k,j}^{-1}Y_{k,j}^{*}H_{k,j-1}^{-1} & L_{k,j}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_{k,j-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{k,j-1}^{-1}Y_{k,j} \\ 1 \end{bmatrix} L_{k,j}^{-1}[-Y_{k,j}^{*}H_{k,j-1}^{-1}, 1]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$H_{k,j}^{-1} = \begin{bmatrix} H_{k,j-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{k,j-1}^{-1}Y_{k,j} \\ 1 \end{bmatrix} L_{k,j}^{-1}[-Y_{k,j}^{*}H_{k,j-1}^{-1}, 1]. \tag{3.15}$$

De la ecuación (3.9) podemos escribir la matriz resolvente de la siguiente forma

$$V_j(z) = \begin{bmatrix} \alpha_j(z) & \beta_j(z) \\ \gamma_j(z) & \delta_j(z) \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

donde

$$
\begin{aligned}
\alpha_j(z) &= 1-(z-a)u_{2,j}^*[R_j(\bar{z})]^* H_{2,j}^{-1} R_j(a) v_j \\
&= 1-(z-a)u_{2,j}^*[R_j(\bar{z})]^* \left(\begin{bmatrix} H_{2,j-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j} \\ 1 \end{bmatrix} L_{2,j}^{-1} [-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, 1] \right) R_j(a) v_j \\
&= 1-(z-a)u_{2,j}^*[R_j(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} H_{2,j-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R_j(a) v_j \\
&\quad -(z-a)u_{2,j}^*[R_j(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j} \\ 1 \end{bmatrix} L_{2,j}^{-1} [-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, 1] R_j(a) v_j \\
&= \alpha_{j-1}(z) - (z-a)u_{2,j}^*[R_j(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j} \\ 1 \end{bmatrix} L_{2,j}^{-1} [-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, 1] R_j(a) v_j. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_j(z) &= u_{1,j}^*[R_j(\bar{z})]^* H_{1,j}^{-1} R_j(a) u_{1,j} \\
&= u_{1,j}^*[R_j(\bar{z})]^* \left(\begin{bmatrix} H_{1,j-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{1,j-1}^{-1} Y_{1,j} \\ 1 \end{bmatrix} L_{1,j}^{-1} [-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, 1] \right) R_j(a) u_{1,j} \\
&= u_{1,j}^*[R_j(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} H_{1,j-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R_j(a) u_{1,j} \\
&\quad + u_{1,j}^*[R_j(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H_{1,j-1}^{-1} Y_{1,j} \\ 1 \end{bmatrix} L_{1,j}^{-1} [-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, 1] R_j(a) u_{1,j} \\
&= \beta_{j-1}(z) + u_{1,j}^*[R_j(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H_{1,j-1}^{-1} Y_{1,j} \\ 1 \end{bmatrix} L_{1,j}^{-1} [-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, 1] R_j(a) u_{1,j}. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_j(z) &= -(b-z)(z-a)v_j^*[R_j(\bar{z})]^* H_{2,j}^{-1} R_j(a) v_j \\
&= -(b-z)(z-a)v_j^*[R_j(\bar{z})]^* \left(\begin{bmatrix} H_{2,j-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j} \\ 1 \end{bmatrix} L_{2,j}^{-1} [-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, 1] \right) R_j(a) v_j \\
&= -(b-z)(z-a)v_j^*[R_j(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} H_{2,j-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R_j(a) v_j \\
&\quad -(b-z)(z-a)v_j^*[R_j(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j} \\ 1 \end{bmatrix} L_{2,j}^{-1} [-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, 1] R_j(a) v_j \\
&= \gamma_{j-1}(z) - (b-z)(z-a)v_j^*[R_j(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j} \\ 1 \end{bmatrix} L_{2,j}^{-1} [-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, 1] R_j(a) v_j. \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_j(z) &= 1+(z-a)v_j^*[R_j(\bar{z})]^*H_{1,j}^{-1}R_j(a)u_{1,j}\\
&= 1+(z-a)v_j^*[R_j(\bar{z})]^*\left(\begin{bmatrix} H_{1,j-1}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -H_{1,j-1}^{-1}Y_{1,j}\\ 1\end{bmatrix}L_{1,j}^{-1}[-Y_{1,j}^*H_{1,j-1}^{-1},1]\right)R_j(a)u_{1,j}\\
&= 1+(z-a)v_j^*[R_j(\bar{z})]^*\begin{bmatrix} H_{1,j-1}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}R_j(a)u_{1,j}\\
&\quad +(z-a)v_j^*[R_j(\bar{z})]^*\begin{bmatrix} -H_{1,j-1}^{-1}Y_{1,j}\\ 1\end{bmatrix}L_{1,j}^{-1}[-Y_{1,j}^*H_{1,j-1}^{-1},1]R_j(a)u_{1,j}\\
&= \delta_{j-1}(z)+(z-a)v_j^*[R_j(\bar{z})]^*\begin{bmatrix} -H_{1,j-1}^{-1}Y_{1,j}\\ 1\end{bmatrix}L_{1,j}^{-1}[-Y_{1,j}^*H_{1,j-1}^{-1},1]R_j(a)u_{1,j}. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

3.2. Polinomios ortogonales. Caso par

Ya que $H_{k,j} > 0$ y $L_{k,j} = D_{k,j} - Y_{k,j}^*H_{k,j-1}^{-1}Y_{k,j} > 0$ entonces definimos los polinomios como

$$
\begin{aligned}
P_{1,0}(z) &= (-as_0+s_1)^{-1/2},\\
P_{2,0}(z) &= (bs_0-s_1)^{-1/2},\\
Q_{1,0}(z) &= -(-as_0+s_1)^{-1/2}s_0,\\
Q_{2,0}(z) &= (bs_0-s_1)^{-1/2}s_0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{k,j}(z) &= (D_{k,j}-Y_{k,j}^*H_{k,j-1}^{-1}Y_{k,j})^{-1/2}[-Y_{k,j}^*H_{k,j-1}^{-1},1]R_j(z)v_j\\
&= (L_{k,j})^{-1/2}[-Y_{k,j}^*H_{k,j-1}^{-1},1]R_j(z)v_j, \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{k,j}(z) &= (D_{k,j}-Y_{k,j}^*H_{k,j-1}^{-1}Y_{k,j})^{-1/2}[-Y_{k,j}^*H_{k,j-1}^{-1},1]R_j(z)u_{k,j}\\
&= (L_{k,j})^{-1/2}[-Y_{k,j}^*H_{k,j-1}^{-1},1]R_j(z)u_{k,j}, \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

para $k \in \{1,2\}$ y para todo $j \in \{1,2,3,...\}$. Los $P_{k,j}(z)$ y $Q_{k,j}(z)$ son polinomios ya que

$(L_{k,j})^{-1/2} \longrightarrow$ es un escalar
$[-Y^*_{k,j}H^{-1}_{k,j-1}, 1] \longrightarrow$ es un vector fila
$R_j(z) \longrightarrow$ es una matriz
$u_{k,j} \longrightarrow$ es un vector columna

$$\begin{aligned} P^*_{k,j}(\bar{z}) &= [(L_{k,j})^{-1/2}[-Y^*_{k,j}H^{-1}_{k,j-1}, 1]R_{k,j}(\bar{z})v_{k,j}]^* \\ &= v^*_j[R_j(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H^{-1}_{k,j-1}Y_{k,j} \\ 1 \end{bmatrix} (L_{k,j})^{-1/2}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} Q^*_{k,j}(\bar{z}) &= [(L_{k,j})^{-1/2}[-Y^*_{k,j}H^{-1}_{k,j-1}, 1]R_{k,j}(\bar{z})v_{k,j}]^* \\ &= u^*_{k,j}[R_j(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H^{-1}_{k,j-1}Y_{k,j} \\ 1 \end{bmatrix} (L_{k,j})^{-1/2}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Lema 3.1. *La matriz resolvente (3.9) admite la siguiente forma de escritura*

$$V_j(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{j} \begin{bmatrix} -(z-a)Q^*_{2,k}(\bar{z})P_{2,k}(a) & Q^*_{1,k}(\bar{z})Q_{1,k}(a) \\ -(b-z)(z-a)P^*_{2,k}(\bar{z})P_{2,k}(a) & (z-a)P^*_{1,k}(\bar{z})Q_{1,k}(a) \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

Demostración

Para demostrar el lema, vamos recurrir a las ecuaciones (3.17)- (3.20) el cual podemos notar que se transforman en lo siguiente

$$\begin{aligned} \alpha_j(z) &= \alpha_{j-1}(z) - (z-a)u^*_{2,j}[R_j(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H^{-1}_{2,j-1}Y_{2,j} \\ 1 \end{bmatrix} L^{-1}_{2,j}[-Y^*_{2,j}H^{-1}_{2,j-1}, 1]R_j(a)v_j \\ &= \alpha_{j-1}(z) - (z-a)u^*_{2,j}[R_j(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H^{-1}_{2,j-1}Y_{2,j} \\ 1 \end{bmatrix} L^{-1/2}_{2,j}L^{-1/2}_{2,j}[-Y^*_{2,j}H^{-1}_{2,j-1}, 1]R_j(a)v_j \\ &= \alpha_{j-1}(z) - (z-a)\underbrace{u^*_{2,j}[R_j(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H^{-1}_{2,j-1}Y_{2,j} \\ 1 \end{bmatrix} L^{-1/2}_{2,j}}_{Q^*_{2,j}(\bar{z})}\underbrace{L^{-1/2}_{2,j}[-Y^*_{2,j}H^{-1}_{2,j-1}, 1]R_j(a)v_j}_{P_{2,j}(a)} \\ &= \alpha_{j-1}(z) - (z-a)Q^*_{2,j}(\bar{z})P_{2,j}(a), \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
\beta_j(z) &= \beta_{j-1}(z) + u_{1,j}^*[R_j(\bar{z})]^*\begin{bmatrix} -H_{1,j-1}^{-1}Y_{1,j} \\ 1 \end{bmatrix} L_{1,j}^{-1}[-Y_{1,j}^*H_{1,j-1}^{-1}, 1]R_j(a)u_{1,j} \\
&= \beta_{j-1}(z) + \underbrace{u_{1,j}^*[R_j(\bar{z})]^*\begin{bmatrix} -H_{1,j-1}^{-1}Y_{1,j} \\ 1 \end{bmatrix} L_{1,j}^{-1/2}}_{Q_{1,j}^*(\bar{z})} \underbrace{L_{1,j}^{-1/2}[-Y_{1,j}^*H_{1,j-1}^{-1}, 1]R_j(a)u_{1,j}}_{Q_{1,j}(a)} \\
&= \beta_{j-1}(z) + Q_{1,j}^*(\bar{z})Q_{1,j}(a), \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_j(z) &= \gamma_{j-1}(z) - (b-z)(z-a)v_j^*[R_j(\bar{z})]^*\begin{bmatrix} -H_{2,j-1}^{-1}Y_{2,j} \\ 1 \end{bmatrix} L_{2,j}^{-1}[-Y_{2,j}^*H_{2,j-1}^{-1}, 1]R_j(a)v_j \\
&= \gamma_{j-1}(z) - (b-z)(z-a)\underbrace{v_j^*[R_j(\bar{z})]^*\begin{bmatrix} -H_{2,j-1}^{-1}Y_{2,j} \\ 1 \end{bmatrix} L_{2,j}^{-1/2}}_{P_{2,j}^*(\bar{z})} \underbrace{L_{2,j}^{-1/2}[-Y_{2,j}^*H_{2,j-1}^{-1}, 1]R_j(a)v_j}_{P_{2,j}(a)} \\
&= \gamma_{j-1}(z) - (b-z)(z-a)P_{2,j}^*(\bar{z})P_{2,j}(a), \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_j(z) &= \delta_{j-1}(z) + (z-a)v_j^*[R_j(\bar{z})]^*\begin{bmatrix} -H_{1,j-1}^{-1}Y_{1,j} \\ 1 \end{bmatrix} L_{1,j}^{-1}[-Y_{1,j}^*H_{1,j-1}^{-1}, 1]R_j(a)u_{1,j} \\
&= \delta_{j-1}(z) + (z-a)\underbrace{v_j^*[R_j(\bar{z})]^*\begin{bmatrix} -H_{1,j-1}^{-1}Y_{1,j} \\ 1 \end{bmatrix} L_{1,j}^{-1/2}}_{P_{1,j}^*(\bar{z})} \underbrace{L_{1,j}^{-1/2}[-Y_{1,j}^*H_{1,j-1}^{-1}, 1]R_j(a)u_{1,j}}_{Q_{1,j}(a)} \\
&= \delta_{j-1}(z) + (z-a)P_{1,j}^*(\bar{z})Q_{1,j}(a). \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación (3.16) se transforma en lo siguiente

$$\begin{aligned}
V_j(z) &= \begin{bmatrix} \alpha_{j-1}(z) - (z-a)Q_{2,j}^*(\bar{z})P_{2,j}(a) & \beta_{j-1}(z) + Q_{1,j}^*(\bar{z})Q_{1,j}(a) \\ \gamma_{j-1}(z) - (b-z)(z-a)P_{2,j}^*(\bar{z})P_{2,j}(a) & \delta_{j-1}(z) + (z-a)P_{1,j}^*(\bar{z})Q_{1,j}(a) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_{j-1}(z) & \beta_{j-1}(z) \\ \gamma_{j-1}(z) & \delta_{j-1}(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(z-a)Q_{2,j}^*(\bar{z})P_{2,j}(a) & Q_{1,j}^*(\bar{z})Q_{1,j}(a) \\ -(b-z)(z-a)P_{2,j}^*(\bar{z})P_{2,j}(a) & (z-a)P_{1,j}^*(\bar{z})Q_{1,j}(a) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1-(z-a)Q_{2,j}^*(\bar{z})P_{2,j}(a) & Q_{1,j}^*(\bar{z})Q_{1,j}(a) \\ -(b-z)(z-a)P_{2,j}^*(\bar{z})P_{2,j}(a) & 1+(z-a)P_{1,j}^*(\bar{z})Q_{1,j}(a) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por tanto $\forall\, z \in \mathbb{C}$ la matriz resolvente V_j tiene la forma:

$$V_j(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{j} \begin{bmatrix} -(z-a)Q^*_{2,k}(\bar{z})P_{2,k}(a) & Q^*_{1,k}(\bar{z})Q_{1,k}(a) \\ -(b-z)(z-a)P^*_{2,k}(\bar{z})P_{2,k}(a) & (z-a)P^*_{1,k}(\bar{z})Q_{1,k}(a) \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Lema 3.2. *El siguiente resultado es válido*

$$\left(\int_a^b \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} d\sigma(t) \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^m \end{bmatrix}^* \right) = \begin{pmatrix} -as_0 + s_1 & -as_1 + s_2 & \cdots & -as_m + s_{m+1} \\ -as_1 + s_2 & -as_2 + s_3 & \cdots & -as_{m+1} + s_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -as_{n-1} + s_n & -as_n + s_{n+1} & \cdots & -as_{n+m-1} + s_{n+m} \\ -as_n + s_{n+1} & -as_{n+1} + s_{n+2} & \cdots & -as_{n+m} + s_{n+m+1} \end{pmatrix}.$$

Demostración

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} d\sigma(t) \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^m \end{bmatrix}^* \right) &= \left(\int_a^b \begin{bmatrix} d\sigma(t) & td\sigma(t) & \cdots & t^m d\sigma(t) \\ td\sigma(t) & t^2 d\sigma(t) & \cdots & t^{m+1} d\sigma(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^n d\sigma(t) & t^{n+1} d\sigma(t) & \cdots & t^{n+m} d\sigma(t) \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \int_a^b d\sigma(t) & \int_a^b td\sigma(t) & \cdots & \int_a^b t^m d\sigma(t) \\ \int_a^b td\sigma(t) & \int_a^b t^2 d\sigma(t) & \cdots & \int_a^b t^{m+1} d\sigma(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b t^n d\sigma(t) & \int_a^b t^{n+1} d\sigma(t) & \cdots & \int_a^b t^{n+m} d\sigma(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -as_0 + s_1 & -as_1 + s_2 & \cdots & -as_m + s_{m+1} \\ -as_1 + s_2 & -as_2 + s_3 & \cdots & -as_{m+1} + s_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -as_n + s_{n+1} & -as_{n+1} + s_{n+2} & \cdots & -as_{n+m} + s_{n+m+1} \end{pmatrix}. \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 3.3. *Es válida la siguiente identidad*

$$H^{-1}_{1,n-1} W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
W &= H_{1,n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} -as_0+s_1 & -as_1+s_2 & \cdots & -as_{m-1}+s_m\\ -as_1+s_2 & -as_2+s_3 & \cdots & -as_m+s_{m+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -as_{n-1}+s_n & -as_n+s_{n+1} & \cdots & -as_{n+m-2}+s_{n+m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} -as_0+s_1 & -as_1+s_2 & \cdots & -as_m+s_{m+1}\\ -as_1+s_2 & -as_2+s_3 & \cdots & -as_{m+1}+s_{m+2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -as_n+s_{n+1} & -as_{n+1}+s_{n+2} & \cdots & -as_{n+m-1}+s_{n+m} \end{pmatrix}. \blacksquare
\end{aligned}
$$

Lema 3.4. *Es cierta la siguiente identidad*

$$
[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]\begin{pmatrix} -as_0+s_1 & -as_1+s_2 & \cdots & -as_m+s_{m+1}\\ -as_1+s_2 & -as_2+s_3 & \cdots & -as_{m+1}+s_{m+2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -as_n+s_{n+1} & -as_{n+1}+s_{n+2} & \cdots & -as_{n+m}+s_{n+m+1} \end{pmatrix} = 0.
$$

Demostración

$$
[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]\begin{pmatrix} -as_0+s_1 & -as_1+s_2 & \cdots & -as_m+s_{m+1}\\ -as_1+s_2 & -as_2+s_3 & \cdots & -as_{m+1}+s_{m+2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -as_n+s_{n+1} & -as_{n+1}+s_{n+2} & \cdots & -as_{n+m}+s_{n+m+1} \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= [-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]\begin{pmatrix} W \\ (-as_n + s_{n+1}, -as_{n+1} + s_{n+2}, \cdots, -as_{n+m} + s_{n+m+1}) \end{pmatrix} \\
&= -Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}W + (-as_n + s_{n+1}, -as_{n+1} + s_{n+2}, \cdots, -as_{n+m} + s_{n+m+1}) \\
&= -Y^*_{1,n}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + (-as_n + s_{n+1}, -as_{n+1} + s_{n+2}, \cdots, -as_{n+m} + s_{n+m+1}) \\
&= -(-as_n + s_{n+1}, -as_{n+1} + s_{n+2}, \cdots, -as_{n+m} + s_{n+m+1})\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad +(-as_n + s_{n+1}, -as_{n+1} + s_{n+2}, \cdots, -as_{n+m} + s_{n+m+1}) \\
&= -(-as_n + s_{n+1}, -as_{n+1} + s_{n+2}, \cdots, -as_{n+m} + s_{n+m+1}) \\
&\quad +(-as_n + s_{n+1}, -as_{n+1} + s_{n+2}, \cdots, -as_{n+m} + s_{n+m+1}) \\
&= 0. \blacksquare
\end{aligned}
$$

Teorema 3.1. *Sea $H_{1,n}$ positiva hermitiana . Sea $\sigma(t)$ una función monótona no decreciente sobre $[a, b]$ tal que $\forall j \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$ existe la integral $\int_a^b d\sigma(t)$ y*

$$\int_a^b t^j d\sigma(t) = -as_j + s_{j+1}$$

entonces los polinomios $\{P_{1,j}\}_{j=0}^{2n}$ son ortogonales respecto a $\sigma(t)$.

Demostración

Sea $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$

$\int_a^b P_{1,n}(t)d\sigma(t)P^*_{1,m}(t) =$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b L_{1,n}^{-1/2}[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]R_n(t)v_n d\sigma(t)\left(L_{1,m}^{-1/2}[-Y^*_{1,m}H^{-1}_{1,m-1}, 1]R_m(t)v_m\right)^*\\
&= \int_a^b L_{1,n}^{-1/2}[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]R_n(t)v_n d\sigma(t)(R_m(t)v_m)^*\left(L_{1,m}^{-1/2}[-Y^*_{1,m}H^{-1}_{1,m-1}, 1]\right)^*\\
&= L_{1,n}^{-1/2}[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]\left(\int_a^b R_n(t)v_n d\sigma(t)(R_m(t)v_m)^*\right)\left(L_{1,m}^{-1/2}[-Y^*_{1,m}H^{-1}_{1,m-1}, 1]\right)^*\\
&= L_{1,n}^{-1/2}[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]\left(\int_a^b R_n(t)v_n d\sigma(t)(R_m(t)v_m)^*\right)\left([-Y^*_{1,m}H^{-1}_{1,m-1}, 1]\right)^* L_{1,m}^{-1/2}\\
&= L_{1,n}^{-1/2}[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]\left(\int_a^b R_n(t)v_n d\sigma(t)(R_m(t)v_m)^*\right)\begin{bmatrix} -H^{-1}_{1,m-1}Y_{1,m} \\ 1 \end{bmatrix} L_{1,m}^{-1/2}\\
&= L_{1,n}^{-1/2}[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]\left(\int_a^b \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} d\sigma(t) \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^m \end{bmatrix}^*\right)\begin{bmatrix} -H^{-1}_{1,m-1}Y_{1,m} \\ 1 \end{bmatrix} L_{1,m}^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

Por el lema 3.2, 3.3 y 3.4, tenemos,

$$\int_a^b P_{1,n}(t)d\sigma(t)P^*_{1,m}(t) = 0. \blacksquare$$

El teorema queda demostrado.

De manera análoga se puede demostrar que

$$\int_a^b P_{1,n}(t)d\sigma(t)P^*_{1,0}(t) = 0, \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Cuando $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $n < m$

$$\int_a^b P_{1,n}(t)d\sigma(t)P^*_{1,m}(t) = \left(\int_a^b P_{1,m}(t)d\sigma(t)P^*_{1,n}(t)\right)^* = 0.$$

Teorema 3.2. *Sea $H_{2,n}$ positiva hermitiana. Sea $\sigma(t)$ una medida no negativa sobre $[a, b]$ tal que $\forall j \in \{0, 1, ..., 2n\}$ existe la integral $\int_a^b t^j d\sigma(t)$ y*

$$\int_a^b t^j d\sigma(t) = bs_j - s_{j+1}$$

entonces los polinomios $\{P_{2,j}\}_{j=0}^{2n}$ son ortogonales respecto a $\sigma(t)$.

Demostración

La demostración es análoga al teorema anterior.■

3.3. Ejemplo

Ahora apliquemos los teoremas anteriores para obtener los polinomios clásicos de Legendre en el intervalo $[0,1]$, sean dados $a=0, \quad b=1$ y los momentos

$$s_0 = 1, \quad s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{1}{3}, \quad s_3 = \frac{1}{4}, \quad s_4 = \frac{1}{5}, \quad s_5 = \frac{1}{6}, \quad s_6 = \frac{1}{7}$$

$$H_{1,0} = \frac{1}{2}, \quad H_{1,1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad H_{1,2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

$$H_{2,0} = 1, \qquad H_{2,1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \qquad H_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Y podemos verificar que los $H_{k,n}$ son definidos positivos de acuerdo al criterio de Silvester.

$$\begin{aligned} D_{1,1} &= \frac{1}{4}, \qquad D_{1,2} = \frac{1}{6}, \qquad D_{1,3} = \frac{1}{8} \\ D_{2,1} &= \frac{1}{12}, \qquad D_{2,2} = \frac{1}{30}, \qquad D_{2,3} = \frac{1}{56} \end{aligned}$$

Tomando en cuenta (3.1),(3.2),(3.4),(3.6) encontramos los siguientes elementos

$$Y_{1,1} = \frac{1}{3}, \qquad Y_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \qquad Y_{1,3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

$$Y_{2,1} = \frac{1}{6}, \qquad Y_{2,2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix}, \qquad Y_{2,3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{1}{30} \\ \frac{1}{42} \end{pmatrix}.$$

$$R_0(z) = 1, \qquad R_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & 1 & 0 \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix}.$$

$$u_{1,0} = -1, \qquad u_{1,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad u_{1,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$u_{2,0} = 1, \qquad u_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad u_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

$$v_0 = 1, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sea $V_2(z)$ la matriz resolvente, escrito para $j = 2$

$$V_2(z) = \begin{pmatrix} 1 - zu_{2,2}^*[R_2(\bar{z})]^* H_{2,2}^{-1} R_2(0) v_2 & u_{1,2}^*[R_2(\bar{z})]^* H_{1,2}^{-1} R_2(0) u_{1,2} \\ -(1-z) z v_2^* [R_2(\bar{z})]^* H_{2,2}^{-1} R_2(0) v_2 & 1 + z v_2^* [R_2(\bar{z})]^* H_{1,2}^{-1} R_2(0) u_{1,2} \end{pmatrix}$$

Sea la matriz resolvente para $j = 2$ en término de los polinomios ortogonales.

$$V_2(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{2} \begin{pmatrix} -zQ_{2,k}^*(\bar{z}) P_{2,k}(0) & Q_{1,k}^*(\bar{z}) Q_{1,k}(0) \\ -(1-z) z P_{2,k}^*(\bar{z}) P_{2,k}(0) & z P_{1,k}^*(\bar{z}) Q_{1,k}(0) \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
P_{1,0}(t) &= \sqrt{2}.\\
P_{1,1}(t) &= 6\left(-\frac{2}{3}+t\right).\\
P_{1,2}(t) &= 10\sqrt{6}\left(\frac{3}{10}-\frac{6t}{5}+t^2\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{2,0}(t) &= \sqrt{2}.\\
P_{2,1}(t) &= 6\left(-\frac{1}{3}+t\right).\\
P_{2,2}(t) &= 10\sqrt{6}\left(\frac{1}{10}-\frac{4t}{5}+t^2\right).
\end{aligned}
$$

El polinomio $P_{1,n}(t), \quad n \geq 0$ es ortogonal respecto a la medida $d\sigma(t) = tdt$ en el intervalo $[0,1]$, es decir; $\int_0^1 tP_{1,j}P_{1,s}dt = 0, \quad j \neq s.$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 tP_{1,0}P_{1,1}dt &= \int_0^1 6\sqrt{2}t\left[-\frac{2}{3}+t\right]dt\\
&= 6\sqrt{2}\left[-\frac{2}{3}\int_0^1 tdt+\int_0^1 t^2dt\right]\\
&= 6\sqrt{2}\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\right]\\
&= 0.\\
\int_0^1 tP_{1,0}P_{1,2}dt &= \int_0^1 10\sqrt{12}t\left[\frac{3}{10}-\frac{6t}{5}+t^2\right]dt\\
&= 10\sqrt{12}\left[\frac{3}{10}\int_0^1 tdt-\frac{6}{5}\int_0^1 t^2dt+\int_0^1 t^3dt\right]\\
&= 10\sqrt{12}\left[\frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}\right]\\
&= 0.\\
\int_0^1 tP_{1,1}P_{1,2}dt &= \int_0^1 60\sqrt{6}t\left(-\frac{2}{3}+t\right)\left(\frac{3}{10}-\frac{6t}{5}+t^2\right)dt\\
&= 60\sqrt{6}\left[-\frac{1}{5}\int_0^1 tdt+\frac{11}{10}\int_0^1 t^2dt-\frac{28}{15}\int_0^1 t^3dt+\int_0^1 t^4dt\right]\\
&= 60\sqrt{6}\left[-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{11}{10}\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{28}{15}\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)\right]\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

De igual forma el polinomio $P_{2,n}(t), \quad n \geq 0$ es ortogonal respecto a la medida $d\sigma(t) = (1-t)dt$ en el intervalo $[0,1]$, es decir; $\int_0^1 (1-t)P_{2,j}P_{2,s}dt = 0, \quad j \neq s$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-t)P_{2,0}P_{2,1}dt &= \int_0^1 6\sqrt{2}(1-t)\left[-\frac{1}{3}+t\right]dt \\
&= 6\sqrt{2}\left[-\frac{1}{3}\int_0^1 dt + \frac{4}{3}\int_0^1 tdt - \int_0^1 t^2dt\right] \\
&= 6\sqrt{2}\left[-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)\right] \\
&= 0. \\
\int_0^1 (1-t)P_{2,0}P_{2,2}dt &= \int_0^1 10\sqrt{12}(1-t)\left[\frac{1}{10}-\frac{4t}{5}+t^2\right]dt \\
&= 0. \\
\int_0^1 (1-t)P_{2,1}P_{2,2}dt &= \int_0^1 60\sqrt{6}(1-t)\left(-\frac{1}{3}+t\right)\left(\frac{1}{10}-\frac{4t}{5}+t^2\right)dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sin embargo hace falta determinar la medida de los siguientes polinomios para que sean ortogonales

$$\begin{aligned}
Q_{1,0}(t) &= -\sqrt{2} \\
Q_{1,1}(t) &= 6\left(\frac{1}{6}-t\right) \\
Q_{1,2}(t) &= 10\sqrt{6}\left(-\frac{1}{30}+\frac{7t}{10}-t^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{2,0}(t) &= \sqrt{2} \\
Q_{2,1}(t) &= 6\left(-\frac{5}{6}+t\right) \\
Q_{2,2}(t) &= 10\sqrt{6}\left(\frac{1}{3}-\frac{13t}{10}+t^2\right)
\end{aligned}$$

Por tanto se puede observar que no se obtuvieron los polinomios de Legendre.

Capítulo 4

Polinomios ortogonales sobre un intervalo acotado. Caso impar de momentos

Ahora en este capítulo obtendremos los polinomios ortogonales a partir de la matriz resolvente en el caso impar es decir $s_0, s_1, \ldots, s_{2n}, \quad n \geq 0$.

4.1. Matrices auxiliares

Sean los momentos $s_0, s_1, \ldots, s_{2n}$ y sea $R_{k,n} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}, \quad k \in \{1, 2\}$ tal que

$$
\begin{aligned}
R_{1,n}(z) &= (I - zT_n)^{-1}, \qquad n \geq 0. && (4.1)\\
R_{2,n}(z) &= (I - zT_{n-1})^{-1}, \qquad n \geq 1. && (4.2)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
R_{2,0}(z) &= 1. && (4.3)\\
T_0 &= 0. && (4.4)\\
T_n &= \begin{bmatrix} 0_{1\times n} & 0 \\ I_n & 0_{n\times 1} \end{bmatrix}, \qquad n \geq 0. && (4.5)\\
& && (4.6)
\end{aligned}
$$

Sea

$$
\begin{aligned}
v_{1,0} &= 1 && (4.7)\\
v_{1,p} &= 0, \quad \text{si} \quad p < 0. && (4.8)\\
v_{1,n} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{n\times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,n-1} \\ 0_{n\times 1} \end{pmatrix}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. && (4.9)\\
v_{2,n} &= v_{1,n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. && (4.10)
\end{aligned}
$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada sucesión $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$ de números reales, sea

$$
\tilde{H}_{0,n} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \end{pmatrix}.
$$

Si $n \in \mathbb{N}$ y si $\{s_j\}_{j=1}^{2n+1}$ es una sucesión de números reales, entonces

$$
\tilde{H}_{1,n} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n+1} \end{pmatrix}.
$$

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada secuencia $\{s_j\}_{j=2}^{2n+2}$ de números reales,

$$
\tilde{H}_{2,n} = \begin{pmatrix} s_2 & s_3 & \dots & s_{2n+2} \\ s_3 & s_4 & \dots & s_{2n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n+2} & s_{n+3} & \dots & s_{2n+2} \end{pmatrix}.
$$

Por tanto, para todo número real a y b tal que $a < b$, para cada entero positivo n, y para toda secuencia $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$,

$$
\begin{aligned}
H_{1,n} &= \tilde{H}_{0,n}, \qquad \forall n \geq 0. && (4.11)\\
H_{2,0} &= 0. && (4.12)\\
H_{2,n} &= -ab\tilde{H}_{0,n-1} + (a+b)\tilde{H}_{1,n-1} - \tilde{H}_{2,n-1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. && (4.13)
\end{aligned}
$$

Si n es un entero positivo y si $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$ es una sucesión de números reales, entonces usaremos la siguiente notación:

$\forall j, k \in \mathbb{N}_{2n}$ con $j \leq k$,

$$y_{[j,k]} = \begin{pmatrix} s_j \\ s_{j+1} \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad z_{[j,k]} = (s_j, s_{j+1}, \ldots, s_k). \tag{4.14}$$

$$y_{[j,k]} = 0, \quad \text{si} \quad k < j. \tag{4.15}$$

Además, sea

$$u_{1,0} = 0, \tag{4.16}$$

$$u_{1,n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y_{[0,n-1]} \end{pmatrix}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.17}$$

$$u_{2,0} = 0. \tag{4.18}$$

$$u_{2,n} = -abu_{1,n-1} - (a+b)y_{[0,n-1]} + y_{[1,n]}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.19}$$

Proposición 4.1. *Sea* $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$ *una sucesión de números reales y sea* $\tilde{J}_q = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ *una matriz tal que los bloques de las matrices de Hankel* $H_{1,n}$ *y* $H_{2,n}$ *ambos son Hermitianos positivos. Para cada* $k \in \{1, 2\}$, $\tilde{U}_{k,n} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{2\times 2}$ *definido por*

$$\tilde{U}_{k,n}(z) = I_2 + i(z-a)(u_{k,n}, v_{k,n})^*[R_{k,n}(\bar{z})]^* H_{k,n}^{-1} R_{k,n}(a) \cdot (u_{k,n}, v_{k,n})\tilde{J}_q \tag{4.20}$$

es una matriz polinomial de 2×2 *de grado no mayor que* $n + 2 - k$.

Lema 4.1. *Sea* $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$ *una sucesión de números reales tal que los bloques de las matrices de Hankel* $H_{1,n}$ *y* $H_{2,n}$ *ambos son Hermitianos positivos. Entonces la matriz*

$$B_1 = v_{1,n}^*[R_{1,n}(a)]^* H_{1,n}^{-1} R_{1,n}(a) v_{1,n}$$

es hermitiana positiva y la matriz

$$\begin{aligned} M_1 = \; & \{(b-a)v_{1,n}^*[R_{1,n}(a)]^* H_{1,n}^{-1} R_{1,n}(a) v_{1,n}\}^{-1} \\ & \{1 + (b-a)(v_{1,n}^*[R_{1,n}(a)]^* H_{1,n}^{-1} R_{1,n}(a) u_{1,n} - v_{2,n}^*[R_{2,n}(a)]^* H_{2,n}^{-1} R_{2,n}(a) u_{2,n} \\ & -av_{2,n}^*[R_{2,n}(a)]^* H_{2,n}^{-1} R_{2,n}(a) v_{2,n} s_0)\} \end{aligned}$$

es Hermitiana.

Lema 4.2. *Sea* $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$ *una sucesión de números reales tal que los bloques de las matrices de Hankel* $H_{1,n}$ *y* $H_{2,n}$ *ambos son Hermitianos positivos. Sea* M_1 *definido por lema (4.1), sea*

$$M_2 = -as_0, \qquad N_2 = -(b-a)^{-1} v_{1,n}^*[R_{1,n}(a)]^* H_{1,n}^{-1} R_{1,n}(a) v_{1,n} \tag{4.21}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & M_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad y \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & M_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N_2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Observación Sea $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$ una sucesión de números reales tal que los bloques de las matrices de Hankel $H_{1,n}$ y $H_{2,n}$ son hermitianas positivas. Sea $k \in \{1,2\}$, sea $\tilde{U}_{k,n}$ la matriz polinomial definido por (4.20), sea A_k la matriz definido por (4.22), y sea $U_{k,n} = \tilde{U}_{k,n}A_k$. Entonces con cálculos sencillos se muestra que $U_{1,n}$ y $U_{2,n}$ admite la representación

$$U_{1,n}(z) = \begin{pmatrix} U^{(1)}_{11,n}(z) & U^{(1)}_{12,n}(z) \\ U^{(1)}_{21,n}(z) & U^{(1)}_{22,n}(z) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U_{2,n}(z) = \begin{pmatrix} U^{(2)}_{11,n}(z) & U^{(2)}_{12,n}(z) \\ U^{(2)}_{21,n}(z) & U^{(2)}_{22,n}(z) \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

donde

$$\begin{aligned}
U^{(1)}_{11,n}(z) &= 1-(z-a)u^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^*H^{-1}_{1,n}R_{1,n}(a)v_{1,n}.\\
U^{(1)}_{12,n}(z) &= (1-(z-a)u^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^*H^{-1}_{1,n}R_{1,n}(a)v_{1,n})M_1\\
&\quad +(z-a)u^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^*H^{-1}_{1,n}R_{1,n}(a)u_{1,n}.\\
U^{(1)}_{21,n}(z) &= -(z-a)v^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^*H^{-1}_{1,n}R_{1,n}(a)v_{1,n}.\\
U^{(1)}_{22,n}(z) &= -(z-a)v^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^*H^{-1}_{1,n}R_{1,n}(a)v_{1,n}M_1\\
&\quad +1+(z-a)v^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^*H^{-1}_{1,n}R_{1,n}(a)u_{1,n}.\\
U^{(2)}_{11,n}(z) &= (1-(z-a)u^*_{2,n}[R_{2,n}(\bar{z})]^*H^{-1}_{2,n}R_{2,n}(a)v_{2,n})(1+M_2N_2)\\
&\quad +(z-a)u^*_{2,n}[R_{2,n}(\bar{z})]^*H^{-1}_{2,n}R_{2,n}(a)u_{2,n}N_2.\\
U^{(2)}_{12,n}(z) &= (1-(z-a)u^*_{2,n}[R_{2,n}(\bar{z})]^*H^{-1}_{2,n}R_{2,n}(a)v_{2,n})M_2\\
&\quad +(z-a)u^*_{2,n}[R_{2,n}(\bar{z})]^*H^{-1}_{2,n}R_{2,n}(a)u_{2,n}.\\
U^{(2)}_{21,n}(z) &= -(z-a)v^*_{2,n}[R_{2,n}(\bar{z})]^*H^{-1}_{2,n}R_{2,n}(a)v_{2,n}(1+M_2N_2)\\
&\quad +(1+(z-a)v^*_{2,n}[R_{2,n}(\bar{z})]^*H^{-1}_{2,n}R_{2,n}(a)u_{2,n})N_2.\\
U^{(2)}_{22,n}(z) &= -(z-a)v^*_{2,n}[R_{2,n}(\bar{z})]^*H^{-1}_{2,n}R_{2,n}(a)v_{2,n}M_2\\
&\quad +1+(z-a)v^*_{2,n}[R_{2,n}(\bar{z})]^*H^{-1}_{2,n}R_{2,n}(a)u_{2,n}.
\end{aligned}$$

Proposición 4.2. *Sea $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$ una sucesión de números reales tal que los bloques de las matrices de Hankel $H_{1,n}$ y $H_{2,n}$ ambos son Hermitianos positivos. Entonces $V_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{2\times 2}$ está definido por*

$$V_n(z) = \begin{pmatrix} V_{11,n}(z) & V_{12,n}(z) \\ V_{21,n}(z) & V_{22,n}(z) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}
V_{11,n}(z) &= (z-a)(b-z)(1-(z-a)u_{1,n}^*)[R_{1,n}(\bar{z})]^* H_{1,n}^{-1} R_{1,n}(a) v_{1,n}) \\
&\quad + z s_0 (z-a) v_{1,n}^* [R_{1,n}(\bar{z})]^* H_{1,n}^{-1} R_{1,n}(a) v_{1,n}. \\
V_{12,n}(z) &= (z-a)(b-z)(M_1-(z-a)u_{1,n}^*)[R_{1,n}(\bar{z})]^* H_{1,n}^{-1} R_{1,n}(a) v_{1,n} M_1 \\
&\quad + (z-a) u_{1,n}^* [R_{1,n}(\bar{z})]^* H_{1,n}^{-1} R_{1,n}(a) u_{1,n}) \\
&\quad - z s_0 (-(z-a) v_{1,n}^* [R_{1,n}(\bar{z})]^* H_{1,n}^{-1} R_{1,n}(a) v_{1,n} M_1 \\
&\quad + 1 + (z-a) v_{1,n}^* [R_{1,n}(\bar{z})]^* H_{1,n}^{-1} R_{1,n}(a) u_{1,n}). \\
V_{21,n}(z) &= -(z-a) v_{1,n}^* [R_{1,n}(\bar{z})]^* H_{1,n}^{-1} R_{1,n}(a) v_{1,n}. \\
V_{22,n}(z) &= -(z-a) v_{1,n}^* [R_{1,n}(\bar{z})]^* H_{1,n}^{-1} R_{1,n}(a) v_{1,n} M_1 \\
&\quad + 1 + (z-a) v_{1,n}^* [R_{1,n}(\bar{z})]^* H_{1,n}^{-1} R_{1,n}(a) u_{1,n},
\end{aligned}$$

es una matriz polinomial 2×2 de grado no mayor que $n+3$. Además, las siguientes afirmaciones son válidas:

(a) Para todo número complejo z, las identidades

$$V_n(z) = \begin{pmatrix} 1 & -s_0 z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (z-a)(b-z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_{1,n}(z) \tag{4.24}$$

y

$$V_n(z) = U_{2,n}(z) \begin{pmatrix} (b-a)(z-a) & 0 \\ 0 & \frac{b-z}{b-a} \end{pmatrix}, \tag{4.25}$$

donde $U_{1,n} = \tilde{U}_{1,n} A_1$ y $U_{2,n} = \tilde{U}_{2,n} A_2$ y $\tilde{U}_{1,n}, \tilde{U}_{2,n}, A_1,$ y A_2 son definidos por (4.20) y (4.22).

(b) Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ la matriz $V_n(z)$ es no singular.

Lema 4.3. *Tiene lugar la siguiente identidad*

$$V_n(z) = U_{1,n}(z), \qquad n \geq 0.$$

Demostración

De las ecuaciones (4.24) y (4.25) del artículo [4] se tiene lo siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & -s_0 z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (z-a)(b-z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_{1,n}(z) = U_{2,n}(z) \begin{pmatrix} (b-a)(z-a) & 0 \\ 0 & \frac{b-z}{b-a} \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} (z-a)(b-z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_{1,n}(z) = \begin{pmatrix} 1 & s_0 z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_{2,n}(z) \begin{pmatrix} (b-a)(z-a) & 0 \\ 0 & \frac{b-z}{b-a} \end{pmatrix},$$

Donde tenemos,

$$\begin{aligned} U_{1,n}(z) &= \begin{pmatrix} (z-a)^{-1}(b-z)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_0 z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_{2,n}(z) \begin{pmatrix} (b-a)(z-a) & 0 \\ 0 & \frac{b-z}{b-a} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} (z-a)^{-1}(b-z)^{-1} & (z-a)^{-1}(b-z)^{-1}s_0 z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{(2)}_{11,n}(z) & U^{(2)}_{12,n}(z) \\ U^{(2)}_{21,n}(z) & U^{(2)}_{22,n}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b-a)(z-a) & 0 \\ 0 & \frac{b-z}{b-a} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} (b-z)^{-1}(b-a)[U^{(2)}_{11,n}(z) + s_0 z U^{(2)}_{21,n}(z)] & (z-a)^{-1}(b-a)^{-1}[U^{(2)}_{12,n}(z) + s_0 z U^{(2)}_{22,n}(z)] \\ (b-a)(z-a)U^{(2)}_{21,n}(z) & (b-z)(b-a)^{-1}U^{(2)}_{22,n}(z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Con esto observamos

$$\begin{aligned} (b-z)^{-1}(b-a)[U^{(2)}_{11,n}(z) + s_0 z U^{(2)}_{21,n}(z)] &= 1 - (z-a)u^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^* H^{-1}_{1,n} R_{1,n}(a) v_{1,n} \\ (z-a)^{-1}(b-a)^{-1}[U^{(2)}_{12,n}(z) + s_0 z U^{(2)}_{22,n}(z)] &= (1 - (z-a)u^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^* H^{-1}_{1,n} R_{1,n}(a) v_{1,n}) M_1 \\ &\quad + (z-a)u^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^* H^{-1}_{1,n} R_{1,n}(a) u_{1,n}. \\ (b-a)(z-a)U^{(2)}_{21,n}(z) &= -(z-a)v^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^* H^{-1}_{1,n} R_{1,n}(a) v_{1,n} \\ (b-z)(b-a)^{-1}U^{(2)}_{22,n}(z) &= -(z-a)v^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^* H^{-1}_{1,n} R_{1,n}(a) v_{1,n} M_1 + 1 \\ &\quad + (z-a)v^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^* H^{-1}_{1,n} R_{1,n}(a) u_{1,n}. \blacksquare \end{aligned}$$

Como los elementos de la parte izquierda y derecha del lema son iguales, escribimos la matriz resolvente de la siguiente forma

$$U_{1,n}(z) = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_n(z) &= 1 - (z-a)u^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^* H^{-1}_{1,n} R_{1,n}(a) v_{1,n}, \\ \beta_n(z) &= (b-a)^{-1}\{s_0 + (u^*_{2,n} + z s_0 v^*_{2,n})[R_{2,n}(\bar{z})]^* H^{-1}_{2,n} R_{2,n}(a)(u_{2,n} + a v_{2,n} s_0)\}, \\ \gamma_n(z) &= -(z-a)v^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^* H^{-1}_{1,n} R_{1,n}(a) v_{1,n}, \\ \delta_n(z) &= (b-z)(b-a)^{-1}\{1 + (z-a)v^*_{2,n}[R_{2,n}(\bar{z})]^* H^{-1}_{2,n} R_{2,n}(a)(u_{2,n} + a v_{2,n} s_0)\}. \end{aligned}$$

Introducimos

$$Y_{1,n} = \begin{bmatrix} s_n \\ s_{n+1} \\ \vdots \\ s_{2n-1} \end{bmatrix}, \qquad D_{1,n} = s_{2n}, \qquad n \geq 1. \tag{4.27}$$

$$Y_{2,n} = \begin{bmatrix} \hat{s}_{n-1} \\ \hat{s}_n \\ \vdots \\ \hat{s}_{2n-3} \end{bmatrix}, \qquad D_{2,n} = \hat{s}_{2n-2}, \qquad n \geq 2. \tag{4.28}$$

donde

$$\hat{s}_n = -abs_n + (a+b)s_{n+1} - s_{n+2}, \qquad n \geq 0. \tag{4.29}$$

$$Y_{2,1} = s_0. \tag{4.30}$$

$$\hat{u}_{2,n}(z) = u_{2,n} + zs_0 v_{2,n}. \tag{4.31}$$

$$\hat{u}^*_{2,n}(\bar{z}) = u^*_{2,n} + zs_0 v^*_{2,n}. \tag{4.32}$$

Entonces de (4.31) y (4.32) la matriz resolvente de (4.26) queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\alpha_n(z) &= 1 - (z-a)u^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^* H^{-1}_{1,n} R_{1,n}(a) v_{1,n}, \\
\beta_n(z) &= (b-a)^{-1}\{s_0 + \hat{u}^*_{2,n}(\bar{z})[R_{2,n}(\bar{z})]^* H^{-1}_{2,n} R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a)\}, \\
\gamma_n(z) &= -(z-a)v^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^* H^{-1}_{1,n} R_{1,n}(a) v_{1,n}, \\
\delta_n(z) &= (b-z)(b-a)^{-1}\{1 + (z-a)v^*_{2,n}[R_{2,n}(\bar{z})]^* H^{-1}_{2,n} R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a)\}.
\end{aligned}$$

Vamos a reescribir los elementos $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ y δ_n

$$
\begin{aligned}
\alpha_n(z) &= 1-(z-a)u_{1,n}^*[R_{1,n}(\bar{z})]^* H_{1,n}^{-1} R_{1,n}(a)v_{1,n} \\
&= 1-(z-a)u_{1,n}^*[R_{1,n}(\bar{z})]^* \\
&\quad \left(\begin{bmatrix} H_{1,n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{1,n-1}^{-1} Y_{1,n} \\ 1 \end{bmatrix} L_{1,n}^{-1} [-Y_{1,n}^* H_{1,n-1}^{-1}, 1] \right) R_{1,n}(a)v_{1,n} \\
&= 1-(z-a)u_{1,n}^*[R_{1,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} H_{1,n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R_{1,n}(a)v_{1,n} \\
&\quad -(z-a)u_{1,n}^*[R_{1,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H_{1,n-1}^{-1} Y_{1,n} \\ 1 \end{bmatrix} L_{1,n}^{-1} [-Y_{1,n}^* H_{1,n-1}^{-1}, 1] R_{1,n}(a)v_{1,n} \\
&= \alpha_{n-1}(z)-(z-a)u_{1,n}^*[R_{1,n}(\bar{z})]^* \\
&\qquad \begin{bmatrix} -H_{1,n-1}^{-1} Y_{1,n} \\ 1 \end{bmatrix} L_{1,n}^{-1} [-Y_{1,n}^* H_{1,n-1}^{-1}, 1] R_{1,n}(a)v_{1,n}.
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_n(z) &= (b-a)^{-1}\{s_0 + \hat{u}_{2,n}^*(\bar{z})[R_{2,n}(\bar{z})]^* H_{2,n}^{-1} R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a)\} \\
&= (b-a)^{-1}\{s_0 + \hat{u}_{2,n}^*(\bar{z})[R_{2,n}(\bar{z})]^* \\
&\quad \left(\begin{bmatrix} H_{2,n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{2,n-1}^{-1} Y_{2,n} \\ 1 \end{bmatrix} L_{2,n}^{-1} [-Y_{2,n}^* H_{2,n-1}^{-1}, 1] \right) R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a)\} \\
&= (b-a)^{-1}\{s_0 + \hat{u}_{2,n}^*(\bar{z})[R_{2,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} H_{2,n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a) \\
&\quad +\hat{u}_{2,n}^*(\bar{z})[R_{2,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H_{2,n-1}^{-1} Y_{2,n} \\ 1 \end{bmatrix} L_{2,n}^{-1} [-Y_{2,n}^* H_{2,n-1}^{-1}, 1] R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a)\} \\
&= \beta_{n-1}(z) + (b-a)^{-1}\{\hat{u}_{2,n}^*(\bar{z})[R_{2,n}(\bar{z})]^* \\
&\quad \begin{bmatrix} -H_{2,n-1}^{-1} Y_{2,n} \\ 1 \end{bmatrix} L_{2,n}^{-1} [-Y_{2,n}^* H_{2,n-1}^{-1}, 1] R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a)\}.
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_n(z) &= -(z-a)v_{1,n}^*[R_{1,n}(\bar{z})]^* H_{1,n}^{-1} R_{1,n}(a)v_{1,n} \\
&= -(z-a)v_{1,n}^*[R_{1,n}(\bar{z})]^* \left(\begin{bmatrix} H_{1,n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{1,n-1}^{-1} Y_{1,n} \\ 1 \end{bmatrix} L_{1,n}^{-1} [-Y_{1,n}^* H_{1,n-1}^{-1}, 1] \right) R_{1,n}(a)v_{1,n} \\
&= -(z-a)v_{1,n}^*[R_{1,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} H_{1,n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R_{1,n}(a)v_{1,n} \\
&\quad -(z-a)v_{1,n}^*[R_{1,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H_{1,n-1}^{-1} Y_{1,n} \\ 1 \end{bmatrix} L_{1,n}^{-1} [-Y_{1,n}^* H_{1,n-1}^{-1}, 1] R_{1,n}(a)v_{1,n} \\
&= \gamma_{n-1}(z)-(z-a)v_{1,n}^*[R_{1,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H_{1,n-1}^{-1} Y_{1,n} \\ 1 \end{bmatrix} L_{1,n}^{-1} [-Y_{1,n}^* H_{1,n-1}^{-1}, 1] R_{1,n}(a)v_{1,n}.
\end{aligned} \tag{4.35}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_n(z) &= (b-z)(b-a)^{-1}\{1+(z-a)v_{2,n}^*[R_{2,n}(\bar{z})]^* H_{2,n}^{-1} R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a)\\
&= (b-z)(b-a)^{-1}\{1+(z-a)v_{2,n}^*[R_{2,n}(\bar{z})]^*\\
&\quad \left(\begin{bmatrix} H_{2,n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{2,n-1}^{-1} Y_{2,n} \\ 1 \end{bmatrix} L_{2,n}^{-1}[-Y_{2,n}^* H_{2,n-1}^{-1}, 1] \right) R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a)\}\\
&= (b-z)(b-a)^{-1}\{1+(z-a)v_{2,n}^*[R_{2,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} H_{2,n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a)\\
&\quad +(z-a)v_{2,n}^*[R_{2,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H_{2,n-1}^{-1} Y_{2,n} \\ 1 \end{bmatrix} L_{2,n}^{-1}[-Y_{2,n}^* H_{2,n-1}^{-1}, 1] R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a)\}\\
&= \delta_{n-1}(z) + (b-z)(b-a)^{-1}\{(z-a)v_{2,n}^*[R_{2,n}(\bar{z})]^*\\
&\quad \begin{bmatrix} -H_{2,n-1}^{-1} Y_{2,n} \\ 1 \end{bmatrix} L_{2,n}^{-1}[-Y_{2,n}^* H_{2,n-1}^{-1}, 1] R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a)\}. \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

4.2. Polinomios orgonales. Caso impar de momentos

Ya que $H_{k,n} > 0$ y $L_{k,n} = D_{k,n} - Y_{k,n}^* H_{k,n-1}^{-1} Y_{k,n} > 0$ entonces definimos los polinomios como

$$
\begin{aligned}
P_{1,0}(z) &= s_0^{-1/2}.\\
P_{2,0}(z) &= 0.\\
Q_{1,0}(z) &= 0.\\
Q_{2,0}(z) &= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{k,n}(z) &= (D_{k,n} - Y_{k,n}^* H_{k,n-1}^{-1} Y_{k,n})^{-1/2}[-Y_{k,n}^* H_{k,n-1}^{-1}, 1] R_{k,n}(z) v_{k,n}\\
&= (L_{k,n})^{-1/2}[-Y_{k,n}^* H_{k,n-1}^{-1}, 1] R_{k,n}(z) v_{k,n}. \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{1,n}(z) &= (D_{1,n} - Y_{1,n}^* H_{1,n-1}^{-1} Y_{1,n})^{-1/2}[-Y_{1,n}^* H_{1,n-1}^{-1}, 1] R_{1,n}(z) u_{1,n}\\
&= (L_{1,n})^{-1/2}[-Y_{1,n}^* H_{1,n-1}^{-1}, 1] R_{1,n}(z) u_{1,n}. \qquad (4.38)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{2,n}(z) &= (D_{2,n} - Y_{2,n}^* H_{2,n-1}^{-1} Y_{2,n})^{-1/2}[-Y_{2,n}^* H_{2,n-1}^{-1}, 1] R_{2,n}(z)\hat{u}_{2,n}(z)\\
&= (L_{2,n})^{-1/2}[-Y_{2,n}^* H_{2,n-1}^{-1}, 1] R_{2,n}(z)\hat{u}_{2,n}(z). \qquad (4.39)
\end{aligned}
$$

para $k \in \{1,2\}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P^*_{k,n}(\bar{z}) &= [(L_{k,n})^{-1/2}[-Y^*_{k,n}H^{-1}_{k,n-1}, 1]R_{k,n}(\bar{z})v_{k,n}]^* \\ &= v^*_{k,n}[R_{k,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H^{-1}_{k,n-1}Y_{k,n} \\ 1 \end{bmatrix} (L_{k,n})^{-1/2}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned} Q^*_{1,n}(\bar{z}) &= [(L_{1,n})^{-1/2}[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]R_{1,n}(\bar{z})u_{1,n}]^* \\ &= u^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H^{-1}_{1,n-1}Y_{1,n} \\ 1 \end{bmatrix} (L_{1,n})^{-1/2}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned} Q^*_{2,n}(\bar{z}) &= [(L_{2,n})^{-1/2}[-Y^*_{2,n}H^{-1}_{2,n-1}, 1]R_{2,n}(\bar{z})\hat{u}_{2,n}(\bar{z})]^* \\ &= \hat{u}^*_{2,n}(\bar{z})[R_{2,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H^{-1}_{2,n-1}Y_{2,n} \\ 1 \end{bmatrix} (L_{2,n})^{-1/2}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

entonces las ecuaciones (4.33)-(4.36) se transforman en lo siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha_n(z) &= \alpha_{n-1}(z) - (z-a)u^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H^{-1}_{1,n-1}Y_{1,n} \\ 1 \end{bmatrix} L^{-1}_{1,n} \\ &\qquad .[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]R_{1,n}(a)v_{1,n} \\ &= \alpha_{n-1}(z) - (z-a)u^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H^{-1}_{1,n-1}Y_{1,n} \\ 1 \end{bmatrix} L^{-1/2}_{1,n}L^{-1/2}_{1,n} \\ &\qquad .[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]R_{1,n}(a)v_{1,n} \\ &= \alpha_{n-1}(z) - (z-a)\underbrace{u^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H^{-1}_{1,n-1}Y_{1,n} \\ 1 \end{bmatrix} L^{-1/2}_{1,n}}_{Q^*_{1,n}(\bar{z})} \\ &\qquad .\underbrace{L^{-1/2}_{1,n}[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]R_{1,n}(a)v_{1,n}}_{P_{1,n}(a)} \\ &= \alpha_{n-1}(z) - (z-a)Q^*_{1,n}(\bar{z})P_{1,n}(a). \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
\beta_n(z) &= \beta_{n-1}(z) + (b-a)^{-1}\{\hat{u}^*_{2,n}(\bar{z})[R_{2,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H^{-1}_{2,n-1}Y_{2,n} \\ 1 \end{bmatrix} L^{-1}_{2,n} \\
&\qquad .[-Y^*_{2,n}H^{-1}_{2,n-1}, 1]R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a)\} \\
&= \beta_{n-1}(z) + (b-a)^{-1}\{\hat{u}^*_{2,n}(\bar{z})[R_{2,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H^{-1}_{2,n-1}Y_{2,n} \\ 1 \end{bmatrix} L^{-1/2}_{2,n}L^{-1/2}_{2,n} \\
&\qquad .[-Y^*_{2,n}H^{-1}_{2,n-1}, 1]R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a)\} \\
&= \beta_{n-1}(z) + (b-a)^{-1}\{\underbrace{\hat{u}^*_{2,n}(\bar{z})[R_{2,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H^{-1}_{2,n-1}Y_{2,n} \\ 1 \end{bmatrix} L^{-1/2}_{2,n}}_{Q^*_{2,n}(\bar{z})} \\
&\qquad .\underbrace{L^{-1/2}_{2,n}[-Y^*_{2,n}H^{-1}_{2,n-1}, 1]R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a)\}}_{Q_{2,n}(a)} \\
&= \beta_{n-1}(z) + (b-a)^{-1}Q^*_{2,n}(\bar{z})Q_{2,n}(a).
\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_n(z) &= \gamma_{n-1}(z) - (z-a)v^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H^{-1}_{1,n-1}Y_{1,n} \\ 1 \end{bmatrix} L^{-1}_{1,n} \\
&\qquad .[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]R_{1,n}(a)v_{1,n} \\
&= \gamma_{n-1}(z) - (z-a)v^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H^{-1}_{1,n-1}Y_{1,n} \\ I_q \end{bmatrix} L^{-1/2}_{1,n}L^{-1/2}_{1,n} \\
&\qquad .[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]R_{1,n}(a)v_{1,n} \\
&= \gamma_{n-1}(z) - (z-a)\underbrace{v^*_{1,n}[R_{1,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H^{-1}_{1,n-1}Y_{1,n} \\ 1 \end{bmatrix} L^{-1/2}_{1,n}}_{P^*_{1,n}(\bar{z})} \\
&\qquad .\underbrace{L^{-1/2}_{1,n}[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]R_{1,n}(a)v_{1,n}}_{P_{1,n}(a)} \\
&= \gamma_{n-1}(z) - (z-a)P^*_{1,n}(\bar{z})P_{1,n}(a).
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
\delta_n(z) &= \delta_{n-1}(z) + (b-z)(b-a)^{-1}\{(z-a)v_{2,n}^*[R_{2,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H_{2,n-1}^{-1}Y_{2,n} \\ 1 \end{bmatrix} L_{2,n}^{-1} \\
&\qquad .[-Y_{2,n}^*H_{2,n-1}^{-1}, 1]R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a)\} \\
&= \delta_{n-1}(z) + (b-z)(b-a)^{-1}\{(z-a)v_{2,n}^*[R_{2,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H_{2,n-1}^{-1}Y_{2,n} \\ 1 \end{bmatrix} L_{2,n}^{-1/2}L_{2,n}^{-1/2} \\
&\qquad .[-Y_{2,n}^*H_{2,n-1}^{-1}, 1]R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a)\} \\
&= \delta_{n-1}(z) + (b-z)(b-a)^{-1}\{(z-a)\underbrace{v_{2,n}^*[R_{2,n}(\bar{z})]^* \begin{bmatrix} -H_{2,n-1}^{-1}Y_{2,n} \\ 1 \end{bmatrix} L_{2,n}^{-1/2}}_{P_{2,n}^*(\bar{z})} \\
&\qquad .\underbrace{L_{2,n}^{-1/2}[-Y_{2,n}^*H_{2,n-1}^{-1}, 1]R_{2,n}(a)\hat{u}_{2,n}(a)}_{Q_{2,n}(a)} \\
&= \delta_{n-1}(z) + (b-z)(b-a)^{-1}(z-a)P_{2,n}^*(\bar{z})Q_{2,n}(a). \qquad (4.46)
\end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz resolvente de la ecuación (4.26) se transforma en lo siguiente

$$U_{1,n}(z) = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}(z) - (z-a)Q_{1,n}^*(\bar{z})P_{1,n}(a) & \beta_{n-1}(z) + (b-a)^{-1}Q_{2,n}^*(\bar{z})Q_{2,n}(a) \\ \gamma_{n-1}(z) - (z-a)P_{1,n}^*(\bar{z})P_{1,n}(a) & \delta_{n-1}(z) + (b-z)(b-a)^{-1}(z-a)P_{2,n}^*(\bar{z})Q_{2,n}(a) \end{bmatrix} \qquad (4.47)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}(z) & \beta_{n-1}(z) \\ \gamma_{n-1}(z) & \delta_{n-1}(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(z-a)Q_{1,n}^*(\bar{z})P_{1,n}(a) & (b-a)^{-1}Q_{2,n}^*(\bar{z})Q_{2,n}(a) \\ -(z-a)P_{1,n}^*(\bar{z})P_{1,n}(a) & (b-z)(b-a)^{-1}(z-a)P_{2,n}^*(\bar{z})Q_{2,n}(a) \end{bmatrix}. \qquad (4.48)$$

Consecuentemente $\forall\, z \in \mathbb{C}$ la matriz resolvente $U_{1,n}$ tiene la form:

$$U_{1,n}(z) = \begin{bmatrix} 1-(z-a)\sum_{j=0}^n Q_{1,j}^*(\bar{z})P_{1,j}(a) & (b-a)^{-1}\{s_0 + \sum_{j=0}^n Q_{2,j}^*(\bar{z})Q_{2,j}(a)\} \\ -(z-a)\sum_{j=0}^n P_{1,j}^*(\bar{z})P_{1,j}(a) & (b-z)(b-a)^{-1}\{1+(z-a)\sum_{j=0}^n P_{2,j}^*(\bar{z})Q_{2,j}(a)\} \end{bmatrix}. \qquad (4.49)$$

Lema 4.4.

$$\left(\int_a^b \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} d\sigma(t) \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^m \end{bmatrix}^* \right) = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{n+m} \end{pmatrix}.$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
\left(\int_a^b \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} d\sigma(t) \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^m \end{bmatrix}^*\right) &= \left(\int_a^b \begin{bmatrix} d\sigma(t) & td\sigma(t) & \cdots & t^m d\sigma(t) \\ td\sigma(t) & t^2 d\sigma(t) & \cdots & t^{m+1} d\sigma(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^n d\sigma(t) & t^{n+1} d\sigma(t) & \cdots & t^{n+m} d\sigma(t) \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \int_a^b d\sigma(t) & \int_a^b td\sigma(t) & \cdots & \int_a^b t^m d\sigma(t) \\ \int_a^b td\sigma(t) & \int_a^b t^2 d\sigma(t) & \cdots & \int_a^b t^{m+1} d\sigma(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b t^n d\sigma(t) & \int_a^b t^{n+1} d\sigma(t) & \cdots & \int_a^b t^{n+m} d\sigma(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{n+m} \end{pmatrix} . \blacksquare
\end{aligned}
$$

Lema 4.5. *Es válida la siguiente identidad*

$$
H_{1,n-1}^{-1} W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.
$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
W &= H_{1,n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{n+m-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{n+m-1} \end{pmatrix}. \blacksquare
\end{aligned}
$$

Lema 4.6. *También es cierta la siguiente identidad*

$$
[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{n+m} \end{pmatrix} = 0.
$$

Demostración

$$
[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}, 1]\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{n+m} \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= [-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1},1]\begin{pmatrix} W \\ (s_n, s_{n+1}\cdots s_{n+m}) \end{pmatrix} \\
&= -Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1}W + (s_n, s_{n+1}\cdots s_{n+m}) \\
&= -Y^*_{1,n}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + (s_n, s_{n+1}\cdots s_{n+m}) \\
&= -(s_n, s_{n+1}\cdots s_{n+m})\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + (s_n, s_{n+1}\cdots s_{n+m}) \\
&= -(s_n, s_{n+1}\cdots s_{n+m}) + (s_n, s_{n+1}\cdots s_{n+m}) \\
&= 0.\blacksquare
\end{aligned}
$$

Teorema 4.1. *Sea $H_{1,n}$ positiva hermitiana. Sea $d\sigma(t)$ una medida no negativa sobre $[a,b]$ tal queda $\forall j \in \{0,1,...,2n\}$ existe la integral $\int_a^b t^j d\sigma(t)$ y*

$$\int_a^b t^j d\sigma(t) = s_j$$

entonces los polinomios $\{P_{1,j}\}_{j=0}^{2n}$ son ortogonales respecto a $d\sigma(t)$.

Demostración

Sea $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$

$\int_a^b P_{1,n}(t)d\sigma(t)P^*_{1,m}(t) =$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b L_{1,n}^{-1/2}[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1},1]R_{1,n}(t)v_{1,n}d\sigma(t)\left(L_{1,m}^{-1/2}[-Y^*_{1,m}H^{-1}_{1,m-1},1]R_{1,m}(t)v_{1,m}\right)^* \\
&= \int_a^b L_{1,n}^{-1/2}[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1},1]R_{1,n}(t)v_{1,n}d\sigma(t)(R_{1,m}(t)v_{1,m})^*\left(L_{1,m}^{-1/2}[-Y^*_{1,m}H^{-1}_{1,m-1},1]\right)^* \\
&= L_{1,n}^{-1/2}[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1},1]\left(\int_a^b R_{1,n}(t)v_{1,n}d\sigma(t)(R_{1,m}(t)v_{1,m})^*\right)\left(L_{1,m}^{-1/2}[-Y^*_{1,m}H^{-1}_{1,m-1},1]\right)^* \\
&= L_{1,n}^{-1/2}[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1},1]\left(\int_a^b R_{1,n}(t)v_{1,n}d\sigma(t)(R_{1,m}(t)v_{1,m})^*\right)\left([-Y^*_{1,m}H^{-1}_{1,m-1},1]\right)^* L_{1,m}^{-1/2} \\
&= L_{1,n}^{-1/2}[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1},1]\left(\int_a^b R_{1,n}(t)v_{1,n}d\sigma(t)(R_{1,m}(t)v_{1,m})^*\right)\begin{bmatrix} -H^{-1}_{1,m-1}Y_{1,m} \\ 1 \end{bmatrix} L_{1,m}^{-1/2} \\
&= L_{1,n}^{-1/2}[-Y^*_{1,n}H^{-1}_{1,n-1},1]\left(\int_a^b \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} d\sigma(t) \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^m \end{bmatrix}^*\right)\begin{bmatrix} -H^{-1}_{1,m-1}Y_{1,m} \\ 1 \end{bmatrix} L_{1,m}^{-1/2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto por el lema 4.4, 4.5 y 4.6

$$\int_a^b P_{1,n}(t)d\sigma(t)P^*_{1,m}(t) \quad = \quad 0.\blacksquare$$

Por tanto queda demostrado el teorema. De manera análoga se puede demostrar que

$$\int_a^b P_{1,n}(t)d\sigma(t)P^*_{1,0}(t) = 0, \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Cuando $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $n < m$

$$\int_a^b P_{1,n}(t)d\sigma(t)P^*_{1,m}(t) = \left(\int_a^b P_{1,m}(t)d\sigma(t)P^*_{1,n}(t)\right)^* = 0.$$

Teorema 4.2. *Sea $H_{2,n}$ positiva hermitiana. Sea $\sigma(t)$ una medida no negativa sobre $[a,b]$ tal queda $\forall j \in \{1,2,...,n\}$ existe la integral $\int_a^b t^j d\sigma(t)$ y $\int_a^b t^j d\sigma(t) = \hat{s}_j$ entonces los polinomios $\{P_{2,j}\}_{j=0}^{2n}$ son ortogonales respecto a $d\sigma(t)$.*

Demostración

La demostración es análoga al teorema anterior.■

4.3. Ejemplo

Nuevamente volvamos a ocupar la matriz resolvente para el caso impar para obtener los polinomios clásicos de Legendre en el intervalo $[0, 1]$, sean dados $a = 0, \quad b = 1$ y los momentos

$$s_0 = 1, \quad s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{1}{3}, \quad s_3 = \frac{1}{4}, \quad s_4 = \frac{1}{5}, \quad s_5 = \frac{1}{6}, \quad s_6 = \frac{1}{7}$$

Entonces de acuerdo a (4.11), (4.12) y (4.13), construyamos las matrices de Hankel $H_{k,n}$

$$H_{1,0} = 1, \quad H_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad H_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad H_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

$$\hat{H}_{0,0} = s_0, \qquad \hat{H}_{1,0} = s_1, \qquad \hat{H}_{2,0} = s_2.$$

$$\hat{H}_{0,1} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix}, \qquad \hat{H}_{1,1} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix}, \qquad \hat{H}_{2,1} = \begin{bmatrix} s_2 & s_3 \\ s_3 & s_4 \end{bmatrix}.$$

$$\hat{H}_{0,2} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{bmatrix}, \qquad \hat{H}_{1,2} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \\ s_3 & s_4 & s_5 \end{bmatrix}, \qquad \hat{H}_{2,2} = \begin{bmatrix} s_2 & s_3 & s_4 \\ s_3 & s_4 & s_5 \\ s_4 & s_5 & s_6 \end{bmatrix}.$$

$$H_{2,0} = 0, \qquad H_{2,1} = \frac{1}{6}$$

$$H_{2,2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \qquad H_{2,3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

Y podemos verificar que los $H_{k,n}$ son definidos positivos de acuerdo al criterio de Silvester.

$$D_{1,1} = \frac{1}{3}, \qquad D_{1,2} = \frac{1}{5},$$
$$D_{2,1} = \frac{1}{6}, \qquad D_{2,2} = \frac{1}{20},$$
$$D_{2,3} = \frac{1}{42}, \qquad D_{1,3} = \frac{1}{7}$$

Tomando en cuenta (4.1.26) y (4.1.27) encontramos los siguientes elementos

$$
\begin{aligned}
Y_{1,1} &= \frac{1}{2}, \qquad Y_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \qquad Y_{1,3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \\
Y_{2,1} &= \frac{1}{12}, \qquad Y_{2,2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{1}{30} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{1,1}(z) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_{1,2}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & 1 & 0 \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_{1,3}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ z & 1 & 0 & 0 \\ z^2 & z & 1 & 0 \\ z^3 & z^2 & z & 1 \end{pmatrix}. \\
R_{2,1}(z) &= 1, \qquad R_{2,2}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_{2,3}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & 1 & 0 \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_{1,0} &= 0, \qquad y_{0,0} = 1, \qquad y_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad y_{0,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \\
y_{1,1} &= \frac{1}{3}, \qquad y_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad y_{1,3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \\
u_{1,1} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad u_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{1,1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \\
v_{2,1} &= 1, \qquad v_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Sea $U_{1,3}(z)$ la matriz resolvente, escrito para $n = 3$

$$U_{1,3}(z) = \begin{pmatrix} 1 - zu^*_{1,3}[R_{1,3}(\bar{z})]^* H^{-1}_{1,3} R_{1,3}(0) v_{1,3} & \{s_0 + (u^*_{2,3} + zs_0 v^*_{2,3})[R_{2,3}(\bar{z})]^* H^{-1}_{2,3} R_{2,3}(0)(u_{2,3})\} \\ -zv^*_{1,3}[R_{1,3}(\bar{z})]^* H^{-1}_{1,3} R_{1,3}(0) v_{1,3} & (1-z)\{1 + zv^*_{2,3}[R_{2,3}(\bar{z})]^* H^{-1}_{2,3} R_{2,3}(0)(u_{2,3})\} \end{pmatrix}$$

Sea la matriz resolvente para $n = 3$, en término de los polinomios ortogonales

$$U_{1,3}(z) = \begin{bmatrix} 1 - (z-a)\sum_{j=0}^{3} Q^*_{1,j}(\bar{z}) P_{1,j}(a) & (b-a)^{-1}\{s_0 + \sum_{j=0}^{3} Q^*_{2,j}(\bar{z}) Q_{2,j}(a)\} \\ -(z-a)\sum_{j=0}^{3} P^*_{1,j}(\bar{z}) P_{1,j}(a) & (b-z)(b-a)^{-1}\{1 + (z-a)\sum_{j=0}^{3} P^*_{2,j}(\bar{z}) Q_{2,j}(a)\} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_{1,0}(t) &= 1 \\ P_{1,1}(t) &= 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + t\right). \\ P_{1,2}(t) &= 6\sqrt{5}\left(\frac{1}{6} - t + t^2\right) \\ P_{1,3}(t) &= 20\sqrt{7}\left(-\frac{1}{20} + \frac{3t}{5} - \frac{3t^2}{2} + t^3\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{2,0}(t) &= \sqrt{\frac{3}{2}}. \\ P_{2,1}(t) &= 4\sqrt{\frac{30}{19}}\left(-\frac{3}{8} + t\right) \\ P_{2,2}(t) &= \frac{5}{2}\sqrt{\frac{133}{2}}\left(-\frac{1}{5} + t + t^2\right) \end{aligned}$$

El polinomio $P_{1,n}(t), \quad n \geq 0$ es ortogonal con respecto a la medida $\sigma(t) = t$ es decir; $\int_0^1 P_{1,j} P_{1,s} d\sigma(t) = 0, \quad k \neq s$. Y estos mismos son los polinomios de Legendre que queriamos obtener.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P_{1,0}P_{1,1}dt &= \int_0^1 2\sqrt{3}\left[-\frac{1}{2}+t\right]dt\\
&= 2\sqrt{3}\left[-\frac{1}{2}\int_0^1 dt+\int_0^1 tdt\right]\\
&= 2\sqrt{3}\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]\\
&= 0.\\
\int_0^1 P_{1,0}P_{1,2}dt &= \int_0^1 6\sqrt{5}\left[\frac{1}{6}-t+t^2\right]dt\\
&= 6\sqrt{5}\left[\frac{1}{6}\int_0^1 dt-\int_0^1 tdt+\int_0^1 t^2dt\right]\\
&= 6\sqrt{5}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right]\\
&= 0.\\
\int_0^1 P_{1,0}P_{1,3}dt &= \int_0^1 20\sqrt{7}\left(-\frac{1}{20}+\frac{3t}{5}-\frac{3t^2}{2}+t^3\right)dt\\
&= 20\sqrt{7}\left[-\frac{1}{20}\int_0^1 dt+\frac{3}{5}\int_0^1 tdt-\frac{3}{2}\int_0^1 t^2dt+\int_0^1 t^3dt\right]\\
&= 20\sqrt{7}\left[-\frac{1}{20}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)\right]\\
&= 0.\\
\int_0^1 P_{1,1}P_{1,2}dt &= \int_0^1 12\sqrt{15}\left(-\frac{1}{2}+t\right)\left(\frac{1}{6}-t+t^2\right)dt\\
&= 12\sqrt{15}\left[-\frac{1}{12}\int_0^1 dt+\frac{2}{3}\int_0^1 tdt-\frac{3}{2}\int_0^1 t^2dt+\int_0^1 t^3dt\right]\\
&= 12\sqrt{15}\left[-\frac{1}{12}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)\right]\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos la siguiente familia de polinomios

$$\begin{aligned}
Q_{1,0}(t) &= -2\sqrt{3}\\
Q_{1,1}(t) &= 6\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}-t\right)\\
Q_{1,2}(t) &= 20\sqrt{7}\left(-\frac{11}{60}+t-t^2\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q_{2,0}(t) &= 0 \\
Q_{2,1}(t) &= \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}+t\right) \\
Q_{2,2}(t) &= 4\sqrt{\frac{30}{19}}\left(-\frac{41}{48}+\frac{t}{8}+t^2\right) \\
Q_{2,3}(t) &= \frac{5}{2}\sqrt{\frac{133}{2}}\left(-\frac{61}{60}-\frac{11t}{30}+\frac{3t^2}{2}+t^3\right)
\end{aligned}
$$

Sin embargo los polinomios $P_{2,n}(t)$, $Q_{1,n}(t)$ y $Q_{2,n}(t)$ con $n \geq 0$ hace falta determinar sus medidas respectivas para que sean ortogonales.

Capítulo 5

Conclusiones

En el presente trabajo se obtuvieron cuatro familias de polinomios ortogonales para cada caso, par e impar respectivamente a partir de la matriz resolvente.

$$P_{1,n}(z) \quad \text{y} \quad P_{2,n}(z) \quad n \geq 0,$$

$$Q_{1,n}(z) \quad \text{y} \quad Q_{2,n}(z) \quad n \geq 0.$$

Por ejemplo, los polinomios de Legendre $P_{1,n}(z)$ corresponden al caso impar de momentos $s_0, s_1, \ldots, s_{2n}, \quad n \geq 0$ con distribución $\sigma(z) = z$, o función de peso $h(z) = 1$. Recordemos que $d\sigma(z) = h(z)dz$ para σ-diferenciable. Los polinomios $P_{2,n}$ tienen peso $h(z) = (b - z)(z - a)$.

Ambos polinomios $P_{1,n}(z)$ y $P_{2,n}(z)$ pertenecen a la familia de polinomios de Jacobi (ver Apéndice): $P_{1,n}(z) = P_1^{(0,0)}$, $P_{2,n}(z) = P_1^{(1,1)}$ con $a = -1$, $b = 1$. De esta manera podemos afirmar que la relación entre $P_{1,n}(z)$ y $P_{2,n}(z)$ es muy estrecha. Ambos se derivan de una misma matriz resolvente.

5.1. Aplicaciones

Los resultados obtenidos se pueden aplicar en Ecuaciones Diferenciales, teoría de aproximaciones, en Física e ingeniería y en la teoría de control [5].

5.2. Aportación

En este trabajo hemos hallado la familia de polinomios $P_{2,j}(t)$ respecto a la medida μ con momentos

$$\int_a^b t^l d\mu(t) = -abs_l + (a+b)s_{j+1} - s_{l+2}, \qquad 0 \leq l \leq 2j-2$$

También encontramos que cada familia de polinomios ortogonales $P_{1,j}(t)$ están estrechamente relacionados con $Q_{1,j}(t)$ y $Q_{2,j}(t)$ los cuales en general no son ortogonales respecto de $\sigma(t) = t$ y $\sigma(t) = (b-t)(t-a)dt$.

Apéndice

.1. Funciones holomorfas, analíticas

Definición .1. *Sea la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ diferenciable. Su derivada en el punto $z_0 \in \Omega$ se llama* $\lim\limits_{\Delta\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = f^{'}(z_0)$

Definición .2. *La función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se llama holomorfa en el dominio Ω si f es holomorfa en cada punto de Ω.*

Teorema .1. *Si una función es holomorfa en el dominio Ω entonces es infinitamente diferenciable en Ω.*

Definición .3. *La función $f(z)$ definida en el dominio de $\Omega \subset \mathbb{C}$ se llama analítica en una vecindad de cada punto $z_0 \in \Omega$ se desarrolla en una suma exponencial de la forma*

$$f(x) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$
$$\forall z \in |z - z_0| < \epsilon(z_0),$$

tal que la serie converge, ($c_j \in \mathbb{C}$).

Teorema .2. *Para que la función $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ sea holomorfa es necesario y sufuciente que esta función sea analítica. Además la suma exponencial que aparece en la definición de una función analítica es la serie de Taylor de la función f:*

$$f(z) = f(z_0) + f^{'}(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}f^{''}(z_0)(z - z_0)^2 + \dots, \qquad |z - z_0| < \epsilon(z_0)$$

.2. La integral de Stieltjes

Definición .4. *Una función $f : [a, b]$ se llama de variación acotada cuando existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que cualquiera que sea la partición $P \in \mathbb{P}([a, b])$ siendo $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ se cumple que*

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| \leq C$$

.

Sea $[a,b]$ un intervalo acotado de $\mathbb{R}$. Consideremos la función $\sigma(t)$ definida en $[a,b]$ que crece monótonamente.

Sea la función $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ acotada en $[a,b]$. Sea $a = t_0 < t_1 < \ldots, < t_i < \ldots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$, cuyo diámetro de partición denotamos como $d = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |t_{i+1} - t_i|$.

La suma integral de Stieltjes se llama a la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)[\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})], \;\; \zeta_i \in (t_i, t_{i-1}].$$

Definición .5. *La función f se llama integrable en el sentido de Stieltjes si existe el límite de las sumas integrales*

$$\lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)[\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})] = \int_a^b f(t)d\sigma(t).$$

En la definición anterior asumimos que f y σ no tienen puntos comunes de discontinuidad.

Clase de funciones $\mathcal{R}[a,b]$ y $\mathcal{S}[a,b]$

Clase $\mathcal{R}[a,b]$. Esta clase de funciones $s : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}$ son tales que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) s es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$,

(ii) $\operatorname{Im} s(z) \geq 0$ para $\operatorname{Im} z > 0$,

(iii) $s(t) \geq 0$ para cada $t \in (-\infty, a)$,

(iv) $-s(t) \geq 0$ para cada $t \in (b, +\infty)$.

Teorema .3. *Una función s pertenece a $\mathcal{R}[a,b]$ si y sólo si existe una medida $\sigma \in \mathcal{M}[a,b]$ tal que*

$$s(z) = \int_a^b (\tau - z)^{-1} d\sigma(\tau) \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus [a,b], \tag{.1}$$

donde $\mathcal{M}[a,b]$ denota el conjunto de medidas positivas sobre $[a,b]$.

La función holomorfa $z \mapsto s(z)$ definido por (.1) es llamada la transformada de Stieltjes de medida σ que pertenece a $\mathcal{M}[a,b]$. Así, por el Teorema .3, la transformada de Stieltjes de una medida $\sigma \in \mathcal{M}[a,b]$ pertenece a la clase $\mathcal{R}[a,b]$.

.3. Criterio de Sylvester

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz compleja Hermitiana de $n \times n$. A es definido positivo si y sólo si

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

.4. Polinomios de Jacobi

Los polinomios mónicos de Jacobi $\{P_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\geq 0}$ constituye una familia dependiente de dos parámetros $\alpha > -1, \beta > -1$ y son ortogonales respecto al funcional definido positivo

$$\mathcal{L}[P(x)] = \int_{-1}^{1} P(x)h(x)dx$$

con $h(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, donde $h(x)$ se llama función peso.

.5. Compatibilidad del sistema

Teorema .4. *(Teorema de Rouche-Frobenius). Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es compatible si y sólo si, el rango de la matriz A del sistema coincide con el rango de la matriz B ampliada. Además:*

(a) Si el rango de A es n y coincide con el rango de la matriz ampliada, el sistema es compatible determinado.

(b) Si el rango de A coincide con el rango de la matriz ampliada y es menor que n, el sistema es compatible indeterminado.

.6. Regla de Cramer

Dado un sistema de ecuaciones $Ax = b$ donde A es la matriz de coeficientes del sistema, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es el vector columna de las incógnitas y b es el vector columna de los términos independientes, es decir;

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b}$$

Entonces la solución al sistema se presenta así:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(\mathbf{A})}, \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

donde A_j es la matriz resultante de reemplazar la j-ésima columna de A por el vector columna b. Hágase notar que para que el sistema sea compatible determinado, el determinante de la matriz A ha de ser no nulo.

Bibliografía

[1] Akhiezer N. I.: *The Classical Moment Problem*, 1965, Oliver and Boyd

[2] Chihara T. S.: An introduction to orthogonal polynomials, Gordon and Breach, 1978;

[3] Choque Rivero A.E., Dyukarev Yu.M., Fritzsche B., Kirstein B.: A truncated Matricial Moment Problem on a Finite Interval. Series: Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 165 (2006), 121–173.

[4] Choque Rivero A.E., Dyukarev Yu.M., Fritzsche B., Kirstein B.: A Truncated Matricial Moment Problem on a Finite Interval. The Case of an Odd Number of Prescribed Moments. Series: Operator Theory: Advances and Applications 176 (2007), 99–174.

[5] A. E. Choque Rivero, V. I. Korobov, G. M. Sklyar, The admissible control problem from the moment problem point of view. *Applied Mathematics Letters* **23** (2010), No. 1, pp 58-63.

[6] Krein M., Ahiezer N. I.: *Some questions in the theory of moments*, 1962, American Mathematical Society, Vol. 2

[7] Krein M.G., Nudelman A.A.: *The Markov moment problem and extremal problems*,

[8] H.Thiele: Tesis de doctorado, Universidad de Leipzig, 2006.

[9] Deift Percy Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Aproach, lecture notes Courant 3