



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLAS DE HIDALGO

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

“Mat. Luís Manuel Rivera Gutiérrez”

ONDAS DE SONIDO Y ONDAS
MAGNETOHIDRODINAMICAS

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE

LIC. EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

ROCIO MENDOZA FLORES

ASESOR

DR. THOMAS ZANNIAS

MORELIA, MICHOACAN, DICIEMBRE DEL 2011

Contenido

1	Introducción	7
2	Dinámica de fluidos	11
2.1	Introducción a la dinámica de fluidos	11
2.2	Ondas de Sonido.	17
2.3	Guía de ondas	22
3	Magnetohidrodinámica	29
3.1	Introducción a la Magnetohidrodinámica.	29
3.2	Ecuaciones de Magnetohidrodinámica.	32
3.3	La ecuación de inducción.	35
3.4	Magnetohidrodinámica ideal.	38
3.5	Ondas Magnetohidrodinámicas.	39
3.5.1	Modos longitudinales magnetosónicos.	45
3.5.2	Ondas de Alfven y acústicas	50
4	Conclusiones	59
5	Apéndices	61
5.1	Apéndice A1: Derivación de la Ley de Ohm para fluidos conductores	61
	Bibliografía	69

Resumen

En esta tesis discutimos el comportamiento de pequeñas perturbaciones alrededor de una solución de hidrodinámica Euleriana y también el comportamiento de pequeñas perturbaciones alrededor de una solución de Magnetohidrodinámica ideal. Mostramos que para fluidos ideales existe una familia de modos longitudinales, llamados modos de sonido. En contraste a lo que ocurre en el régimen de fluidos ideales, el comportamiento de las pequeñas perturbaciones de Magnetohidrodinámica ideal representan diversos comportamientos. La presencia del campo magnético de la solución de fondo implica la existencia de perturbaciones magnetosónicas, perturbaciones que representan las ondas de Alfvén y también perturbaciones puramente acústicas, es decir ondas de sonido, la derivación y propiedades de estos modos se discuten con más detalle.

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis abarcamos dos ramas de la física: dinámica de fluido y dinámica de Magnetofluidos, es decir, fluidos conductores en presencia de campos electromagnéticos. La finalidad de la presente es el estudio de las propiedades de las ondas magnetohidrodinámicas. Hemos dedicado el siguiente capítulo con el cual se pretende que sirva para tener un mejor entendimiento del análisis que hacemos para obtener dichas ondas. Pero antes de entrar a fondo veamos el porqué del interés del estudio de las ondas magnetohidrodinámicas. Para ello comenzaremos con algunos antecedentes. La presencia de campos magnéticos en escenarios astrofísico es un hecho común, posiblemente los primeros que asociaron la palabra magnetismo y astronomía fue en idea lanzada por Kepler de que el magnetismo podría ser causante del movimiento planetario aunque es erróneo. De hecho el campo magnético de la tierra es el primero conocido asociado a un astro. El siguiente astro en el que se detectó campo magnético fue el sol. Este campo magnético fue detectado por G. H. Hale en 1908. Hoy en día sabemos que la dinámica del campo magnético está asociado a la formación y evolución de las manchas solares, al viento solar, a la dinámica de la corona etc. En la actualidad el estudio de la dinámica de la atmósfera solar incluyendo el campo magnético, es uno de los campos más detectados de la astrofísica. Se siguió detectando en estrellas un campo magnético. El método que se usa para determinar la existencia de campo magnético es la detección del efecto

Zeeman en el espectro de emisión. En 1942 da una comunicación Hannes Alfvén, del real instituto de Tecnología de Estocolmo, en la que se describía un nuevo tipo de onda. Combinando las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones fundamentales de Hidrodinámica Euleriana, Alfvén pudo prescindir la existencia de un nuevo tipo de movimiento ondulatorio que hoy lleva su nombre. Su consecuencia inmediata fue la teoría de las manchas solares que empañan la superficie de nuestro astro rey, teoría basada en la idea de que bajo ciertas condiciones un campo magnético puede ser congelado en un fluido. Creciendo y disminuyendo con un periodo de once años. Al comienzo de un ciclo, estas manchas solares aparecen en las latitudes solares más altas, despertando luego hacia el ecuador y desapareciendo ahí cuando comienza un nuevo ciclo. La velocidad de las ondas de Alfvén es de alrededor de 0.61m por segundo, esta desacuerdo con la velocidad de aproximación de las zonas de manchas hacia el ecuador durante un ciclo. A pesar del conocimiento que hoy en día tenemos de él, aun estamos lejos de entender la dinámica de dicho campo en su totalidad, lo cual es la motivación para realizar esta tesis ya que si entendemos la naturaleza será más fácil tratar de dar explicación a lo que falta.

Como mencionamos anteriormente el capítulo 2 contiene una breve introducción a la dinámica de fluidos. En la sección 2,1 se dan la ecuaciones que la rigen bajo la descripción Euleriana. Hemos considerado una clase particular de fluidos, llamados fluidos ideales, cuyo estado está descrito por variables como: velocidad de un elemento de fluido, presión isotrópica, densidad, etc. Estas variables satisfacen el sistema de ecuaciones de la hidrodinámica Euleriana ideal. La ausencia de intercambio de calor y ausencia de fuerzas de fricción implica que flujos ideales son flujos adiabáticos, por lo cual tenemos que la densidad de entropía satisface la ecuación de la continuidad. Discutimos también flujos de fluidos ideales, referidos como isoentrópicos. En la misma sección discutimos la dinámica de los llamados fluidos de Navier Stokes. En estos fluidos existe una fuerza adicional (fuerza de fricción) como consecuencia de la viscosidad, esto nos produce disipación de energía. Considerando un fluido ideal hacemos un análisis para ver la variación de la energía al interior de un elemento

de volumen. Otra propiedad que pueden tener los fluidos es la vorticidad, definida como $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$. De un análisis partiendo de la ecuación de Euler llegamos a que tiene sentido buscar flujos tales que $\nabla \times \vec{v} = 0$, flujos con esta propiedad se denominan flujos potenciales. En la sección 1.3 se considera un flujo particular de un fluido ideal, tal flujo toma lugar en todo \mathbb{R}^3 . El flujo es espacialmente y temporalmente homogéneo y se considera la propagación de perturbaciones de pequeña amplitud. Linealizando el sistema de ecuaciones a través de la solución de fondo obtenemos que las perturbaciones $\delta\vec{v}$, δp y $\delta\rho$ satisfacen un sistema de ecuaciones lineales que se encuentra acoplado, combinando estas ecuaciones obtenemos que $\delta\rho$ satisface el operador de onda en el cual aparece la velocidad del sonido. Tomando una familia de soluciones particulares llamadas ondas monocromáticas planas, mostramos que las perturbaciones $\delta\rho$ inducen perturbaciones $\delta\vec{v}$ y δp . Finalmente se muestra que las perturbaciones forman una familia de ondas longitudinales, llamadas ondas de sonido monocromáticas planas.

En el capítulo 2 empezamos con un fluido conductor en presencia de un campo electromagnético. El objetivo principal es analizar las características de las llamadas ondas magnetohidrodinámicas. Primero empezamos con una sección donde definimos el término magnetohidrodinámico y vemos bajo qué condiciones este régimen es válido. En la sección que sigue, escribimos un sistema de ecuaciones que describen la interacción de fenómenos hidrodinámicos y electromagnéticos, es decir, la interacción del fluido conductor con los campos \vec{E} , \vec{B} . En la sección 2.3 hemos introducido la ecuación de inducción y a través de esta ecuación introducimos dos regímenes: Magnetohidrodinámica ideal y Magnetohidrodinámica resistiva. En la sección 2.3 se presenta las ondas que pueden propagarse en un fluido ideal conductor en presencia de un campo magnético bajo el régimen de magnetohidrodinámica ideal. Considerando una solución particular del fondo del fluido e introduciendo perturbaciones de flujo de pequeña amplitud a la solución de fondo, las cuales satisfacen un sistema de ecuaciones lineales. Combinado estas ecuaciones deducimos una ecuación que involucra solo la perturbación $\delta\vec{v}$. Mostrando la existencia de mo-

dos magnetosónicos, modos de Alfvén y modos acústicos. Las propiedades de estos modos se discuten en las últimas secciones.

Capítulo 2

Dinámica de fluidos

2.1 Introducción a la dinámica de fluidos

Empecemos esta tesis discutiendo primero algunos aspectos fundamentales de la dinámica de fluidos. La primera sección tiene doble finalidad: por un lado da una introducción a las ecuaciones dinámicas de fluidos e introduce aspectos fundamentales de dinámica de fluidos y por otro lado nos sirve como una introducción para el siguiente capítulo en el que se discute la dinámica de fluidos conductores.

Recordemos primero que la dinámica de fluidos tiene como finalidad el estudio del movimiento de fluidos es decir líquidos o gases, con o sin la presencia de fuerzas externas. Los fluidos se consideran como medios continuos. Una colección de partículas interactuando via colisión se aproxima como un medio continuo si la trayectoria libre media l , es decir, el promedio de la distancia entre las colisiones es mucho menor que la escala macroscópica de longitud L asociada con observadores que estudian el sistema. El suponer que $l \ll L$ nos permite introducir el elemento del fluido V tal que $l^3 \ll V \ll L^3$. El elemento de fluido V nos permite una asignación del promedio de la velocidad \vec{v} asociado al elemento del fluido V .

El estado del fluido está descrito por un número de variables como: $\vec{v}(x, y, z, t)$ la velocidad del elemento de fluido, $\rho(x, y, z, t)$ la función que determina la densidad

de masa, $p(x, y, z, t)$ la presión isotrópica, $T(x, y, z, t)$ la temperatura etc.

En esta tesis apelamos a la descripción Euleriana, es decir, las coordenadas (x, y, z) se refieren a las coordenadas asociadas con un sistema de referencia inercial fijo, mientras t se refiere al tiempo absoluto de Newton (fluido no relativista y coordenadas Eulerianas).

Una clase particular de fluidos son llamados fluidos ideales, para estos fluidos las variables $\vec{v}(\vec{x}, t)$, $\rho(\vec{x}, t)$, $p(\vec{x}, t)$ satisfacen las ecuaciones de hidrodinámica Euleriana, es decir ¹:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \vec{F}_{ext}, \quad (2.2)$$

$$p = p(\rho), \quad \frac{dp(\rho)}{d\rho} > 0, \quad (2.3)$$

en donde $\nabla \cdot$, ∇ se refieren a los operadores de divergencia y gradiente respectivamente y el operador $\frac{D\vec{v}}{dt}$ se define como:

$$\frac{D\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (2.4)$$

y representa la derivada direccional de \vec{v} a lo largo de la trayectoria del elemento de fluido.

La ecuación (2.1) es la ecuación de la continuidad que nos expresa la conservación de la masa. La ecuación (2.2) es la ecuación de Euler y es la generalización de la segunda ley de Newton: masa x aceleración = fuerza. El término \vec{F}_{ext} representa las fuerzas externas que actúan sobre el fluido como la fuerza de gravedad, la fuerza

¹Denotamos $\vec{v}(t, x, y, z)$ como $\vec{v}(\vec{x}, t)$, etc., mientras a las ecuaciones dinámicas omitimos la dependencia explícita de variables de las coordenadas (\vec{x}, t) .

debida al campo electromagnético actuado sobre fluidos conductores, etc. En la ecuación (2.3) se supone que $p(\rho)$ es una función conocida llamada ecuación de estado. Una vez que está especificado el sistema (2.1-2.3) se tiene entonces un sistema de 4-ecuaciones para 4-incógnitas, es decir, $\rho(\vec{x}, t)$ y las tres componentes del campo de velocidad $\vec{v}(\vec{x}, t)$. La ausencia de fuerzas internas como la fuerza de fricción o intercambio de calor caracteriza el régimen Euleriano hidrodinámico (fluidos ideales). Como consecuencia, el flujo de fluidos ideales se llama flujo adiabático, es decir, si $S(\vec{x}, t)$ representa la entropía por unidad de masa por elemento de volumen del fluido, entonces la ausencia de fricción interna e intercambio de calor implica que $S(\vec{x}, t)$ satisface:

$$\frac{DS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla S = 0, \quad (2.5)$$

la cual implica que S queda constante a lo largo de la trayectoria del elemento de fluido. Introduciendo

$$\rho S = \frac{\text{entropía}}{L^3}, \quad \rho S \vec{v} := \text{flujo de la entropía}, \quad (2.6)$$

se ve que a través de la ecuación de la continuidad y (2.5) la densidad de entropía ρS satisface:

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} S) = 0, \quad (2.7)$$

que es la ecuación de la continuidad correspondiente a la densidad de entropía ρS . Tomemos la oportunidad de mencionar en este punto, que para en un fluido adiabático es posible que diferentes elementos del fluido puedan llevar diferentes valores de entropía S . Flujos adiabáticos en donde $\nabla S = 0$ son referidos como flujos isoentrópicos. .

Otra importante clase de fluidos se llaman fluidos de Navier-Stokes o fluidos viscosos o fluidos no ideales. Las ecuaciones dinámicas para tales fluidos son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.8)$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \vec{P} + \vec{F}_{ext}, \quad (2.9)$$

$$p = p(\rho), \quad \frac{dp(\rho)}{d\rho} > 0. \quad (2.10)$$

en donde el término \vec{P} en (2.9) representa una densidad de fuerza adicional debida al movimiento del fluido y esta definida por:

$$\vec{P} = (\mu + \eta)\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) + \mu\nabla^2\vec{v}, \quad \mu > 0, \quad \eta > 0 \quad (2.11)$$

con ∇^2 es el operador laplaciano y μ , η son constantes denominadas coeficientes de viscosidad, donde μ es referida como la viscosidad de bulk, mientras $(\mu + \eta)$ es referido como la viscosidad shear y ambos coeficientes dependen de la naturaleza del fluido. La estructura de (2.11) muestra que la densidad de fuerza actuando sobre el fluido depende de la velocidad $\vec{v}(\vec{x}, t)$ del fluido (es decir \vec{P} se interpreta como “fuerzas de fricción”). Cabe mencionar que la presencia del término \vec{P} en (2.9) hace el estudio de fluidos de Navier-Stokes un problema difícil al estudiarlo matemáticamente.

Una familia grande de flujos de la hidrodinámica Euleriana o fluidos de Navier-Stokes son flujos referidos como flujos incompresibles. Tales flujos se caracterizan por la propiedad de que $\rho = \rho_0 = \text{constante}$. Para flujos incompresibles la ecuación de continuidad implica que la velocidad $\vec{v}(\vec{x}, t)$ satisface:

$$\nabla \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.12)$$

para tales flujos se remueve la ecuación de estado. Las ecuaciones de Hidrodinámica Euleriana, para flujos incompresibles se reducen a:

$$\nabla \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.13)$$

$$\rho_0 \frac{D\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \vec{F}_{ext}, \quad (2.14)$$

mientras que las ecuaciones de Navier-Stokes toman la forma

$$\nabla \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{D\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \eta\nabla^2\vec{v}, \quad \eta = \frac{\mu}{\rho_0}. \quad (2.16)$$

Por soluciones de las ecuaciones dinámicas del fluido, el concepto de densidad total de energía juega un papel muy importante. Para definir esta densidad introducimos primero la noción de energía interna $\epsilon(\vec{x}, t)$ definida tal que $\rho\epsilon$ representa la densidad de energía interna (notese $[\rho\epsilon] = \frac{\text{energía}}{L^3}$). Por analogía a la energía total de una partícula definimos: $\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + \rho\epsilon$ la densidad de energía total, en donde $\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2$ representa la densidad de energía cinética asociada con un elemento de fluido. Para el caso de fluidos ideales como consecuencia de (2.8-2.10) la densidad de energía total satisface la identidad:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + \rho\epsilon \right) = -\nabla \cdot \left[\rho\vec{v} \left(\frac{1}{2}\vec{v}^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] \quad (2.17)$$

Si V representa un determinado volumen, el teorema de la divergencia implica que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + \rho\epsilon \right) dV &= - \oint_{\partial V} \rho\vec{v} \left(\frac{1}{2}\vec{v}^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho} \right) \cdot d\vec{S} \\ &= - \oint_{\partial V} \rho\vec{v} \left(\frac{1}{2}\vec{v}^2 + \epsilon \right) d\vec{S} - \oint_{\partial V} p\vec{v} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

Esta identidad nos dice que la energía total al interior de un volumen V fijo se cambia por el flujo de energía $\vec{v} \left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + \rho\epsilon \right)$ a través de ∂V sumando un término adicional $- \oint_{\partial V} p\vec{v} \cdot d\vec{S}$ que representa el trabajo que hace la fuerza de presión sobre el fluido interior de ∂V . Mencionamos aquí que para un fluido de Navier Stokes el lado derecho de (2.17) se modifica debido al transporte de flujo de energía debido a la fricción interna [ver por ejemplo [1]].

Terminemos esta sección introductoria definiendo la noción de vorticidad $\vec{\omega}(\vec{x}, t)$ de un flujo. La vorticidad $\vec{\omega}(\vec{x}, t)$ de una solución de hidrodinámica Euleriana o de las ecuaciones de Navier Stokes se define a través de

$$\vec{\omega}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{v}(\vec{x}, t),$$

en donde $\vec{v}(\vec{x}, t)$ representa la velocidad de flujo. Para ver el significado de $\vec{\omega}$ asociado con el flujo, Si consideramos primero $\vec{\omega} = 0$ el flujo satisface las ecuaciones de Euler (es decir un fluido ideal). Siguiendo el tratamiento de Landau y Lifshitz [1] primero

notemos que:

$$\frac{1}{2}\nabla\vec{v}^2 = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}.$$

Entonces reescribimos la ecuación de Euler (2.9) en ausencia de fuerzas externas en una forma equivalente:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{1}{2}\nabla\vec{v}^2 \quad (2.18)$$

Un flujo de fluido ideal en el estado de equilibrio local tenemos la relación:

$$d\epsilon = T dS - p dV, \quad V = \frac{1}{\rho},$$

la cual implica:

$$\begin{aligned} d\epsilon = T dS - d(pV) - V dp &\implies d(\epsilon + pV) = T dS - \frac{1}{\rho} dp \\ \implies d\left(\epsilon + \frac{p}{\rho}\right) &= T dS - \frac{1}{\rho} dp, \end{aligned} \quad (2.19)$$

y para un flujo isoentrópico $\nabla S = 0$ obtenemos:

$$\nabla\left(\epsilon + \frac{p}{\rho}\right) = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad (2.20)$$

combinando (2.18) y (2.20) obtenemos:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -\nabla\left(\epsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\vec{v}^2\right), \quad (2.21)$$

y tomando el rotacional, $\nabla \times$, de ambos lados se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{v}) = \nabla \times [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})], \quad (2.22)$$

e introduciendo la vorticidad $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\omega} = \nabla \times [\vec{v} \times \vec{\omega}]. \quad (2.23)$$

La ecuación (2.22) implica que hay sentido en buscar flujos tal que $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = 0$ globalmente al interior del fluido. Debido a que $\nabla \times \vec{v} = 0$ entonces existe algún

escalar Φ tal que $\vec{v} = \nabla\Phi$. Flujos con tal propiedad son referidos como flujos potenciales y para tales flujos, Φ es referido como el potencial de velocidad.

En suma este análisis muestra una propiedad importante de la vorticidad $\vec{\omega}$. Si $\vec{\omega} = 0$ entonces el flujo es flujo potencial. Es importante señalar que la reducción de la ecuación (2.22) se presume fluido ideal en ausencia de fuerzas externas, y un flujo isoentrópico. Por el caso de flujos adiabáticos o fluidos de Navier Stokes la estructura de (2.23) se modifica considerablemente [véase [1]]

2.2 Ondas de Sonido.

En esta sección analizaremos flujos particulares de hidrodinámica Euleriana. Mas precisamente consideramos la propagación de perturbaciones de pequeña amplitud que toman lugar en un fluido ideal. Como mostraremos tales perturbaciones pequeñas dan lugar a las ondas de sonido. Consideremos un fluido ideal, y para evitar problemas asociados con condiciones de frontera, asumimos que el flujo ocupa todo \mathbb{R}^3 en ausencia de fuerzas externas (no campos gravitacionales, ni electromagnéticos, etc.). Para tal sistema tomemos la siguiente solución particular para la hidrodinámica Euleriana: ²

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_0 \text{ con } \rho_0 > 0 \text{ constante,} \quad (2.24)$$

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.25)$$

$$p(\vec{x}, t) = p(\rho_0), \quad (2.26)$$

Aunque la solución descrita por (2.24)-(2.26) es en realidad trivial sin embargo es interesante para estudiar propiedades de perturbaciones locales de esta solución.

Sean $\delta(\vec{x}, t)$, $\delta\vec{v}(\vec{x}, t)$ y $\delta p(\vec{x}, t)$ que representan las pequeñas perturbaciones de flujo descrito por (2.24 – 2.26) es decir:

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_0(1 + \delta(\vec{x}, t)) = \rho_0 + \delta\rho(\vec{x}, t), \quad (2.27)$$

²Nótese que la vorticidad $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ es idénticamente cero.

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{0} + \delta\vec{v}(\vec{x}, t), \quad (2.28)$$

$$p(\vec{x}, t) = p(\rho_0) + \delta p(\vec{x}, t). \quad (2.29)$$

Linealizamos las ecuaciones de la hidrodinámica Euleriana alrededor de la solución de (2.24)-(2.26).

Primero de la ecuación de la continuidad tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0 (1 + \delta(\vec{x}, t))}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho_0 (1 + \delta(\vec{x}, t)) (\vec{0} + \delta\vec{v}(\vec{x}, t)) \right] &= 0, \\ \Rightarrow \frac{\partial \delta(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \delta\vec{v}(\vec{x}, t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

De la ecuación de Euler obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho_0 (1 + \delta(\vec{x}, t)) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{0} + \delta\vec{v}(\vec{x}, t)) &= -\nabla p [\rho_0 (1 + \delta(\vec{x}, t))] \\ \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \delta\vec{v}(\vec{x}, t) &= -\nabla p [\rho_0 (1 + \delta(\vec{x}, t))], \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde hemos despreciado $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ que es de la forma: $(\delta\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla) \delta\vec{v}(\vec{x}, t)$.

Por otra parte, de la ecuación de estado $p = p(\rho)$ se obtiene:

$$p(\vec{x}, t) = p(\rho(\vec{x}, t)) = p(\rho_0(1 + \delta(\vec{x}, t))) = p(\rho_0 + \rho_0\delta(\vec{x}, t)).$$

Expandiendo el lado derecho alrededor de ρ_0 y tomando en cuenta solo términos de primer orden, obtenemos:

$$p(\vec{x}, t) = p(\rho_0) + \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho_0} \rho_0 \delta(\vec{x}, t) = p(\rho_0) + c_s^2 \rho_0 \delta(\vec{x}, t) \equiv p(\rho_0) + \delta p(\vec{x}, t) \quad (2.32)$$

de la cual concluimos que la perturbación $\delta p(\vec{x}, t)$ en la presión está relacionada con la perturbación de densidad $\rho_0 \delta(\vec{x}, t)$ a través de:

$$\delta p(\vec{x}, t) = c_s^2 \rho_0 \delta(\vec{x}, t) \quad (2.33)$$

en donde la expresión:

$$\left. \frac{dp(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho_0} = c_s^2,$$

es referida como la velocidad del sonido del flujo del fondo (2.24)-(2.26) y como veremos tiene un papel muy importante.

Regresando a la ecuación (2.31) y tomando en cuenta (2.33) obtenemos:

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{v}(\vec{x}, t) = -\nabla p(\rho_0) - \nabla \delta p(\vec{x}, t),$$

y debido a que $\nabla p(\rho_0) = 0$, llegamos a

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{v}(\vec{x}, t) = -c_s^2 \nabla \delta(\vec{x}, t). \quad (2.34)$$

Entonces las ecuaciones linealizadas para las perturbaciones son:

$$\frac{\partial \delta(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \delta \vec{v}(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.35)$$

$$\delta p(\vec{x}, t) = c_s^2 \rho_0 \delta(\vec{x}, t), \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{v}(\vec{x}, t) = -c_s^2 \nabla \delta(\vec{x}, t), \quad (2.37)$$

y como vemos son acopladas. Entonces para desacoplarlas tomamos la derivada $\frac{\partial}{\partial t}$ en la ecuación (2.35) y combinando con la ecuación (2.37) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta(\vec{x}, t)}{\partial t^2} + \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{v}(\vec{x}, t) &= \frac{\partial^2 \delta(\vec{x}, t)}{\partial t^2} + \nabla \cdot [-c_s^2 \nabla \delta(\vec{x}, t)] = 0, \\ \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \delta(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 \delta(\vec{x}, t) &= \left(\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \delta(\vec{x}, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Escribimos esta ecuación en la forma:

$$\mathcal{L} \delta(\vec{x}, t) = 0, \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2, \quad (2.39)$$

en donde \mathcal{L} es el operador D' Alembert u operador de onda. Es importante señalar que en el presente caso en el operador D' Alembert \mathcal{L} aparece ahora la velocidad del sonido c_s del flujo del fondo ³.

³Como es bien conocido, de las ecuaciones de Maxwell en el vacío y en ausencia de fuentes llegamos a que (\vec{E}, \vec{B}) satisfacen: $\mathcal{L}\vec{E} = \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) \vec{E} = 0$, pero ahora c representa la velocidad de la luz en el vacío.

De manera similar tomando otra derivada al respecto del tiempo, $\frac{\partial}{\partial t}$, sobre (2.37) y usando (2.35) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta \vec{v}(\vec{x}, t) &= -c_s^2 \nabla \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{x}, t) = c_s^2 \nabla [\nabla \cdot \delta \vec{v}(\vec{x}, t)] = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta \vec{v}(\vec{x}, t) - c_s^2 \nabla [\nabla \cdot \delta \vec{v}(\vec{x}, t)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

En resumen hemos concluido que las perturbaciones $\delta(\vec{x}, t)$ satisface la ecuación de la onda, $\delta p(\vec{x}, t)$ es dada por (2.36) y $\delta \vec{v}(\vec{x}, t)$ satisface (2.37).

Para estudiar la estructura de las perturbaciones, consideramos primero la ecuación (2.38). Una familia de soluciones particulares de esta ecuación son soluciones descritas por:

$$\delta(\vec{x}, t) = \delta_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (2.41)$$

en donde δ_0 es la amplitud fija independiente de (\vec{x}, t) , $\vec{k} = (k^x, k^y, k^z)$ y ω es un parámetro. El lado derecho de (2.41) satisface la ecuación (2.38) sujeto a que (\vec{k}, ω) satisfacen la relación de dispersión:

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c_s}. \quad (2.42)$$

Interpretamos (2.41) como una onda monocromática plana que describe la evolución de la perturbación de densidad $\rho_0 \delta \rho(\vec{x}, t)$. Cada modo de (2.41) representa una onda monocromática plana de densidad que se propaga en la dirección \vec{k} con amplitud $\delta_0 \rho_0$ y frecuencia $\omega = |\vec{k}| c_s$. La longitud de onda de esta onda está dada por $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$. La perturbación $\delta(\vec{x}, t)$ no se queda en el sitio donde se produjo sino que se propaga. Considerando una superposición de estas ondas y construyendo un paquete de ondas la relación lineal de dispersión implica que el paquete se mueve con velocidad de grupo c_s .

Mostraremos en seguida que las perturbaciones en $\delta(\vec{x}, t)$ descritas por (2.41) inducen perturbaciones particulares $\delta \vec{v}(\vec{x}, t)$. Sustituyendo (2.41) en (2.37) se obtiene la

ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{v}(\vec{x}, t) = -c_s^2 \nabla \left(\delta_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right) = -c_s^2 \left(i\vec{k} \right) \delta_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (2.43)$$

La estructura de esta ecuación sugiere proponer como solución:

$$\delta \vec{v}(\vec{x}, t) = \delta \vec{v}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + \vec{A}(\vec{x}), \quad (2.44)$$

en donde $\vec{A}(\vec{x})$ es un campo vectorial arbitrario ⁴. Sustituyendo (2.44) en (2.43) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\delta \vec{v}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right] = -c_s^2 \left(i\vec{k} \right) \delta_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (2.45)$$

$$-i\omega \delta \vec{v}_0 = -c_s^2 \left(i\vec{k} \right) \delta_0 \implies \delta \vec{v}_0 = \frac{c_s^2}{\omega} \vec{k} \delta_0. \quad (2.46)$$

Por la relación de dispersión (2.42), vemos que la amplitud $\delta \vec{v}_0$ toma la forma:

$$\delta \vec{v}_0 = \frac{\omega}{|\vec{k}|^2} \vec{k} \delta_0 = \frac{\omega}{|\vec{k}|} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \delta_0, \quad (2.47)$$

y denotamos por $\hat{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ como el vector unitario en la dirección de propagación \vec{k} , vemos que:

$$\delta \vec{v}_0 = \frac{\omega}{|\vec{k}|} \delta_0 \hat{n} = c_s \delta_0 \hat{n}, \quad \nabla \times \hat{n} = 0. \quad (2.48)$$

Esta expresión es muy importante, nos da información de la dirección para la amplitud $\delta \vec{v}_0$, entonces nos muestra que $\delta \vec{v}_0$ es paralela a \vec{k} por lo cual los modos $\delta \vec{v}(\vec{x}, t)$ son longitudinales.

Entonces regresando a (2.44) obtenemos:

$$\delta \vec{v}(\vec{x}, t) = c_s \delta_0 \hat{n} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (2.49)$$

⁴La libertad que hay en $\vec{A}(\vec{x})$ representa la existencia de una perturbación que describe una velocidad del fluido independiente del tiempo. Tales perturbaciones no nos interesan y tomamos $\vec{A}(\vec{x}) = 0$

Por otro lado tomamos el rotacional en ambos lados de (2.37)

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times [\delta \vec{v}(\vec{x}, t)] = -c_s^2 \nabla \times [\nabla \delta(\vec{x}, t)], \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \delta \vec{v}(\vec{x}, t) = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{\omega}(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.51)$$

y esta relación nos dice que la vorticidad de la perturbación se preserva en el tiempo debido a que el flujo del fluido tiene $\vec{\omega} = 0$ se sigue que $\delta \vec{\omega} = 0$.

En suma hemos mostrado que existe una familia de perturbaciones $\delta \rho(\vec{x}, t)$, $\delta p(\vec{x}, t)$ y $\delta \vec{v}(\vec{x}, t)$ descrita por:

$$\delta \rho(\vec{x}, t) = \rho_0 \delta_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (2.52)$$

$$\delta p(\vec{x}, t) = c_s^2 \delta \rho(\vec{x}, t) = c_s^2 \rho_0 \delta_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (2.53)$$

$$\delta \vec{v}(\vec{x}, t) = c_s \delta_0 \hat{n} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = c_s \delta_0 \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = c_s \frac{\delta \rho(\vec{x}, t)}{\rho_0} \hat{n} \quad (2.54)$$

$$\delta \vec{\omega}(\vec{x}, t) = 0 \quad (2.55)$$

en donde \vec{k} y ω satisfacen $\omega = |\vec{k}|c_s$.

Referimos a tal familia como una familia de ondas de sonido monocromáticas planas propagándose en la dirección \vec{k} con frecuencia $\omega = |\vec{k}|c_s$. Tal familia de soluciones exhibe propiedades que son comunes con ondas monocromáticas planas, es decir, el fenómeno de reflexión y refracción en superficies que separan dos fluidos. Un estudio detallado de esta familia de soluciones aunque es interesante no lo hacemos en esta tesis. A lugar preferimos estudiar la forma que tienen estas perturbaciones en magnetofluidos, es decir, fluidos conductores en presencia de campos electromagnéticos. Esto lo hacemos en el próximo capítulo en donde primero definimos el régimen de magnetohidrodinámica.

2.3 Guia de ondas

En esta sección se analiza la propagación de ondas sonido en guías de ondas de sonido. Consideremos como guía de onda un cilindro de radio R lleno con un fluido

descrito con las mismas características del fluido de la sección 2.2.

Consideremos la propagación de un modo monocromático $\delta(\vec{x}, t)$ a lo largo del cilindro.

Empecemos considerando la ecuación de la onda:

$$-\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \Phi = 0. \quad (2.56)$$

Tomando un sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, z, φ) , con el eje z a lo largo el eje del cilindro (ρ, z, φ, t) , entonces: $\Phi = \Phi(\rho, z, \varphi, t)$.

Tomando la métrica en el espacio de Euclideo en coordenadas cilíndricas dada por :

$$g = d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\varphi^2 = d\rho \otimes d\rho + dz \otimes dz + \rho^2 d\varphi \otimes d\varphi. \quad (2.57)$$

El operador de Laplace que aparece en la ecuación de la onda en (ρ, z, φ) toma la forma:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \rho + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (2.58)$$

La ecuación (2.56) se escribe como:

$$-\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Phi(\rho, z, \varphi, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi(\rho, z, \varphi, t)}{\partial \rho} \right) \rho + \frac{\partial^2 \Phi(\rho, z, \varphi, t)}{\partial z^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \Phi(\rho, z, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2.59)$$

Resolvemos esta ecuación por el método de separación de variables. Sea:

$$\Phi(\rho, z, \varphi, t) = T(t) \Upsilon(\rho, z, \varphi) \quad (2.60)$$

entonces:

$$\frac{1}{\Upsilon(\rho, z, \varphi)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Upsilon(\rho, z, \varphi)}{\partial \rho} \right) \rho + \frac{\partial^2 \Upsilon(\rho, z, \varphi)}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Upsilon(\rho, z, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] = 0 - \frac{1}{T(t)} \frac{1}{c_s^2} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} +$$

Introduciendo la constante de separación k se tiene:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{1}{c_s^2} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -k \implies \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -k c_s^2 T(t) \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Upsilon(\rho, z, \varphi)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Upsilon(\rho, z, \varphi)}{\partial \rho} \right) \rho + \frac{\partial^2 \Upsilon(\rho, z, \varphi)}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Upsilon(\rho, z, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] &= -k \\ \implies \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Upsilon(\rho, z, \varphi)}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \Upsilon(\rho, z, \varphi)}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Upsilon(\rho, z, \varphi)}{\partial \varphi^2} &= -k \Upsilon(\rho, z, \varphi) \end{aligned} \quad (2.62)$$

De la ecuación (2.61) se tiene que

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + k c_s^2 T(t) = 0 \quad (2.63)$$

Proponemos soluciones de la forma

$$T(t) = C e^{\lambda t} \quad (2.64)$$

entonces:

$$\lambda^2 + k c_s^2 = 0 \implies \lambda^2 = -k c_s^2 \quad (2.65)$$

Tomamos $k = \hat{k}^2$ de manera que

$$\lambda = \sqrt{\hat{k}^2 c_s^2} \implies \lambda = \pm i \hat{k} c_s \quad (2.66)$$

La solución para (2.61) es:

$$T(t) = C_1 e^{i \hat{k} c_s t} + C_2 e^{-i \hat{k} c_s t}. \quad (2.67)$$

Para $k = \hat{k}^2 \in \mathbb{R}e^+ \cup \{0\}$ la función $\Upsilon(\rho, z, \varphi)$ satisface:

$$\nabla^2 \Upsilon(\rho, z, \varphi) = -\hat{k}^2 \Upsilon(\rho, z, \varphi)$$

Ahora de la ecuación (2.62) se tiene:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Upsilon(\rho, z, \varphi)}{\partial \rho} \right) \rho + \rho^2 \frac{\partial^2 \Upsilon(\rho, z, \varphi)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Upsilon(\rho, z, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k \rho^2 \Upsilon(\rho, z, \varphi) = 0$$

Nuevamente resolvemos esta ecuación por el método de separación de variables. Sea

$$\Upsilon(\rho, z, \varphi) = F(\rho, z) \Psi(\varphi) \quad (2.68)$$

y sea ν la nueva constante de separación, entonces:

$$\frac{\rho}{F(\rho, z)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial F(\rho, z)}{\partial \rho} \right) + \frac{\rho^2}{F(\rho, z)} \frac{\partial^2 F(\rho, z)}{\partial z^2} + \hat{k} \rho^2 = -\nu$$

$$\frac{1}{\Psi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = \nu$$

Para 2.82 se tiene:

$$\frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} - \nu \Psi(\varphi) = 0 \quad \varphi \in [1, 2\pi]$$

Proponemos una solución de la forma:

$$\Psi(\varphi) = C e^{\lambda \varphi} \tag{2.69}$$

$$\lambda^2 - \nu = 0 \quad \nu = -n^2, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, .. \tag{2.70}$$

$$\lambda = -\pm in \implies \Psi(\varphi) = C_3 e^{in\varphi} + C_4 e^{-in\varphi} \tag{2.71}$$

Para $\nu = -n^2$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, ..$ de 2.72 se obtiene:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial F(\rho, z)}{\partial \rho} \right) + \rho^2 \frac{\partial^2 F(\rho, z)}{\partial z^2} + [\hat{k} \rho^2 - n^2] F(\rho, z) = 0$$

Resolviendo esta última ecuación por el método de separación de variable, y sea m la constante de separación:

$F(\rho, z) = \Pi(\rho)Z(z)$ se tiene:

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = m$$

$$\frac{1}{\rho \Pi(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Pi(\rho)}{\partial \rho} \right) + \left[\frac{\hat{k} \rho^2 - n^2}{\rho^2} \right] = -m \tag{2.72}$$

Proponemos una solución de la forma:

$$Z(z) = C e^{\lambda z}$$

entonces

$$\lambda^2 - m = 0, \implies \quad (2.73)$$

$$m = -m^2\lambda = -\pm im \quad (2.74)$$

La solución para $Z(z)$ es:

$$Z(z) = C_5 e^{imz} + C_6 e^{-imz}. \quad (2.75)$$

De (2.72) se tiene:

$$\rho^2 \frac{d^2 \Pi(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{d\Pi(\rho)}{d\rho} + \left[(\hat{k} - m^2) \rho^2 - n^2 \right] \Pi(\rho) = 0$$

Para encontrar la solución de $\Pi(\rho)$ hacemos un cambio de variables, sea:

$x = \sqrt{(\hat{k} - m^2)} \rho$ $\rho \in (0, \infty)$ entonces la ecuación radial (2.76) toma la forma:

$$x^2 \frac{d^2 \Pi(x)}{dx^2} + x \frac{d\Pi(x)}{dx} + [x - n^2] \Pi(x) = 0$$

Esta última ecuación tiene la forma de la conocida ecuación de Bessel, entonces resolvemos mediante funciones de Bessel:

$$\Pi(x) = a_1 J_n(x) + a_2 N_n(x) \quad (2.76)$$

Donde:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{(-1)^j}{j\Gamma(j+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \quad (2.77)$$

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \frac{(-1)^j}{j\Gamma(j-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \quad (2.78)$$

$$N_{-n}(x) = \frac{J_n(x)\cos(\nu n) - J_{-n}(x)}{\text{sen}(n\pi)} \quad (2.79)$$

La solución $\Phi(\rho, z, \varphi, t)$ regular en $\rho = 0$ representa una onda propagándose en la dirección positiva de z y tiene la forma:

$$\Phi(\rho, z, \varphi, t) = C_2 e^{-i\hat{k}cst} e^{imz} J_n(\sqrt{(\hat{k} - m^2)}\rho) (C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \text{sen}(n\varphi))$$

Tomando $\omega = \hat{k}c$ reescribimos la solución como:

$$\Phi(\rho, z, \varphi, t) = C_2 e^{-i\omega t} e^{imz} J_n(\sqrt{(\hat{k} - m^2)\rho})(C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi))$$

con C, C_1, C_2 constantes. Los modos aximétricos tienen $n = 0$, entonces

$$\Phi(\rho, z, t) = C_2 e^{-i\omega t} e^{imz} J_n(\sqrt{(\hat{k} - m^2)\rho})$$

Estos son modos físicos

$$\left. \frac{d\Phi(\rho, z, t)}{d\rho} \right|_{\rho=R} = 0 \quad (2.80)$$

Entonces

$$\left. \frac{dJ_0}{d\rho} \right|_{\rho=R} = 0 \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (2.81)$$

cuyas raíces $\rho_0\nu$ son: si $\rho_0\nu = \sqrt{(\hat{k} - m^2)R}$

$$m = \pm \sqrt{\hat{k} - \left(\frac{\rho_0\nu}{R}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\rho_0\nu}{R}\right)^2}$$

m tiene que ser real, para eso :

$$\frac{\omega^2}{c^2} \geq \left(\frac{\rho_0\nu}{R}\right)^2$$

lo que implica que hemos mostrado que los modos de propagación en el cilindro deben tener una frecuencia:

$$\omega > c \left(\frac{\rho_0\nu}{R}\right)$$

Capítulo 3

Magnetohidrodinámica

3.1 Introducción a la Magnetohidrodinámica.

En contraste a la dinámica de fluidos que hemos desarrollado en la sección previa, el régimen de la magnetohidrodinámica es una rama de la física en la que se une la dinámica de fluidos y los efectos electromagnéticos de corrientes eléctricas, es decir estudia el comportamiento de un sistema formado por un fluido conductor (líquido o gas) inmerso en un campo electromagnético. El objetivo de esta sección es definir precisamente que queremos decir con el término magnetohidrodinámico.

Como es bien conocido de cursos de teoría electromagnética [véase [2]], el fenómeno de conducción toma lugar cuando existen electrones libres o casi libres que pueden desplazarse por la fuerza debido al campo electromagnético presente. Los efectos de conducción en los sólidos conductores son diferentes a los efectos de conducción en líquidos y gases conductores. Los efectos dinámicos de conducción en sólidos se manifiestan como la presencia de corriente de conducción \vec{J} etc. Pero en general no hay desplazamiento de masa. Los efectos del campo electromagnético sobre los átomos mismos se toman en consideración como tensiones en la estructura de la red. Para fluidos conductores (líquidos y gases) el campo electromagnético aplicado actúa en ambos electrones e iones que provoca en general desplazamientos de

masa. En su turno el movimiento de masa genera corrientes que modifican el campo electromagnético original aplicado. Entonces debemos enfrentar una situación que involucra el acoplamiento del fluido y del campo electromagnético. La descripción de este sistema puede estudiarse a través del régimen de magnetohidrodinámica o el régimen de física de plasma. La distinción entre una y otra no es nítida, pero existen situaciones físicas en donde claramente la primera o la segunda son aplicables. Para ver bajo qué condiciones el régimen de cada una es aplicable la derivación de la ley de Ohm es decisiva. Recordemos que esta ley tiene la forma [vease [3]]:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad \sigma = \frac{Ne^2}{m\nu} = \frac{Ne^2}{m} \tau$$

en donde \vec{J} representa la densidad de corriente de conducción inducida por el campo eléctrico \vec{E} , σ la conductividad eléctrica del medio, ν es la frecuencia de colisión entre los electrones de conducción con otros electrones e iones, $\tau = \frac{1}{\nu}$ es el tiempo promedio entre estas colisiones, mientras N representa la densidad de electrones de conducción y (e, m) la carga y masa del electrón. Para llegar a esta forma de la ley de Ohm se asume un campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x})$ independiente del tiempo, un campo magnético $\vec{B}(\vec{x})$ débil¹ y se modela las colisiones que sufren los electrones de conducción por una fuerza fenomenológica de fricción: $\vec{f}_{fr} = m\nu\vec{v}$, con \vec{v} la velocidad de conducción del electrón, (que es el modelo de Drude por la conductividad eléctrica σ [vease [3]]). Para un campo eléctrico de la forma $\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$, un electrón de conducción se mueve acorde a:

$$m \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = -|e| \vec{E}(\vec{x}, t) - m\nu\vec{v}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \quad (3.1)$$

y la inclusión de los efectos inerciales conduce a [vease [3]]:

$$\vec{J}(\omega) = \frac{e^2 N}{m(\nu - i\omega)} \vec{E}(\omega) = \sigma(\omega) \vec{E}(\omega), \quad \sigma(\omega) = \frac{e^2 N}{m(\nu - i\omega)} \quad (3.2)$$

en donde ahora la conductividad eléctrica tiene dependencia de ω y en general puede ser compleja. Esto ocurre en particular cuando $\omega \approx \nu$ para campos $\vec{E}(\vec{x}, t)$, con tales

¹Se asume aquí que la girofrecuencia $\omega = \frac{eB}{mc}$ satisface $\omega\tau \ll 1$.

ω , los electrones de conducción tienen suficiente tiempo para acelerarse y desacelerarse entre colisiones. Los efectos inerciales en este régimen son muy importantes y llevan a una conductividad compleja. Desafortunadamente la descripción de las colisiones en términos de una fuerza fricción $\vec{f}_{fr} = m\nu\vec{v}$, es decir, el modelo de Drude por conductividad eléctrica, tiende a perder validez.

Cuando las frecuencias ω del campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x}, \omega)$ son mucho mayores que la frecuencia de colisión es decir:

$$\omega \gg \nu \implies \frac{2\pi}{\omega} \ll \frac{2\pi}{\nu} \implies \tau_E \ll \tau_{col}.$$

la ecuación (3.1) es incompleta. Para tales frecuencias ω el campo eléctrico tiene el tiempo suficiente para actuar sobre los iones y los electrones de conducción antes de que tome lugar la colisión. Como una consecuencia los electrones y los iones son acelerados por $\vec{E}(\vec{x}, \omega)$ en direcciones opuestas y tienden a separarse. Como una consecuencia, de esta separación, fuertes fuerzas electrostáticas adicionales aparecen. Estas se oponen a la separación de carga y eventualmente hay oscilaciones en la densidad de carga, llamadas oscilaciones de plasma. En tal régimen, es decir $\omega \gg \nu$, frecuentemente el medio es descrito por dos fluidos. Un fluido modela los electrones de conducción y el otro modela los iones y este sistema se trata en el régimen de física de plasmas.

Para líquidos conductores y gases ionizados densos la frecuencia de colisión ν puede ser suficientemente alta, así que también existe un régimen suficientemente grande en donde $\omega \ll \nu$. En tal régimen los tiempos de variación τ_E del campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x}, t)$ son mayores que el tiempo promedio τ_{col} de las colisiones de los electrones de conducción:

$$\omega \ll \nu \implies \frac{2\pi}{\omega} \gg \frac{2\pi}{\nu} \implies \tau_E \gg \tau_{col}.$$

Para tal medio y de (3.1), (3.2) obtenemos:

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2 N}{m(\nu - i\omega)} = \frac{e^2 N}{m\nu(1 - i\frac{\omega}{\nu})} \approx \frac{e^2 N}{m\nu} \left(1 - 0\left(\frac{\omega}{\nu}\right)\right)$$

en este régimen se toma σ como real e independiente de ω .

En el régimen de frecuencias ω con $\omega \ll \nu$ las colisiones ocurren muy rápidamente y entonces el campo eléctrico \vec{E} aplicado no tiene tiempo de separar los electrones de conducción de los iones de tal manera que no hay separación de cargas. El medio se mueve como una sola componente de fluido y este particular régimen define el régimen de Magnetohidrodinámica. Para tal régimen se obtiene de la ley de Ampere:

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{x}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}(\vec{x}, \omega) - \frac{i\omega}{c} \vec{E}(\vec{x}, \omega) = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[1 - \frac{i\omega}{4\pi\sigma}\right] \vec{E}(\vec{x}) \quad (3.3)$$

pero

$$\frac{\omega}{\sigma} = \frac{\omega}{\frac{|e|^2 N}{m(\nu - i\omega)}} = \frac{\omega m(\nu - i\omega)}{|e|^2 N} = \frac{m\omega\nu}{|e|^2 N} \left(1 - \frac{i\omega}{\nu}\right) \approx \frac{m\omega\nu}{|e|^2 N}, \quad (3.4)$$

$$\frac{m\omega\nu}{|e|^2 N} \leq \frac{m\nu^2}{|e|^2 N} = \frac{\nu}{\sigma} \ll 1, \quad (3.5)$$

y entonces se desprecia el desplazamiento de corriente eléctrica de la ley de Ampere, tal que la conductividad es suficiente alta como $\frac{\nu}{\sigma} \ll 1$. En este trabajo restringimos nuestra atención a sistemas descritos por el régimen de Magnetohidrodinámica (abreviado como MHD). De aquí en adelante y sin ningún otro aviso asumimos que nuestro sistema satisface las restricciones que justifican el tratamiento a través del régimen de Magnetohidrodinámica.

3.2 Ecuaciones de Magnetohidrodinámica.

En esta sección empezamos considerando con un fluido conductor eléctricamente neutro² en la presencia de un campo electromagnético. La descripción del estado

²La definición de fluido eléctricamente neutro está dada en el apéndice de este capítulo.

del fluido involucra la densidad másica $\rho(\vec{x}, t)$, el campo de la velocidad $\vec{v}(\vec{x}, t)$, la presión isotrópica $p(\vec{x}, t)$ y la conductividad eléctrica real σ independiente de la frecuencia. También consideramos que el fluido es un sistema lénel y adicionalmente tomamos $\varepsilon = \mu = 1$ ³.

La deducción de las ecuaciones de magnetohidrodinámica es una extensión natural de las ecuaciones de la hidrodinámica Euleriana que hemos desarrollado en el capítulo 2. Tenemos la ecuación de la continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.6)$$

que nos describe la conservación de la masa.

La ecuación de Euler se extiende de la siguiente forma:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c}(\vec{J} \times \vec{B}) + \rho \vec{g} + \vec{P}, \quad (3.7)$$

donde se ha incluido la fuerza debida al campo electromagnético (fuerza de Lorentz) $\frac{1}{c}(\vec{J} \times \vec{B})$ la cual se puede escribir de forma equivalente como:

$$\frac{1}{c}(\vec{J} \times \vec{B}) = \frac{1}{4\pi}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad (3.8)$$

el término $\rho \vec{g}$ representa la fuerza debida a la gravedad newtonina, el último término \vec{P} del lado derecho de (3.7) representa la fuerza viscosa. En el caso que se trate a un fluido incompresible se escribe como: $\vec{P} = \eta \nabla^2 \vec{v}$, siendo η el coeficiente de viscosidad. El simbolo $\frac{D}{dt}$ en (3.7) tiene el mismo significado que hemos discutido en el capítulo anterior.

Para completar las ecuaciones dinámicas agregamos las ecuaciones que describen el campo electromagnético. Como hemos discutido en el régimen de magnetohidrodinámica se puede despreciar las corrientes de desplazamiento eléctrico $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ de la Ley de Ampere. Entonces las ecuaciones de Maxwell toman la forma⁴:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.9)$$

³El tratamiento de fluidos con constante dieléctrica $\varepsilon \neq 1$ y permeabilidad magnética $\mu \neq 1$, al menos para fluidos no dispersivos puede desarrollarse de una manera totalmente análoga.

⁴Hemos omitido la ecuación que satisface el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x}, t)$. Como veremos $\vec{E}(\vec{x}, t)$ se determina a través de otras ecuaciones.

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (3.10)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.11)$$

El acoplamiento del fluido con el campo electromagnético toma lugar a través de la densidad de corriente eléctrica \vec{J} . Debido que el flujo en un fluido conductor la corriente eléctrica \vec{J} depende en general de los campos \vec{E} , \vec{B} pero también del campo de velocidad \vec{v} y la naturaleza del fluido. En general la dependencia de \vec{J} de \vec{E} , \vec{B} y \vec{v} puede ser algo complicada. Pero bajo condiciones apropiadas \vec{J} puede ser dada por una extensión natural de la ley de Ohm válida para conductores sólidos en reposo. La derivación de ley de Ohm que nosotros empleamos en esta tesis tiene la forma:

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{(\vec{v} \times \vec{B})}{c} \right) \quad (3.12)$$

La justificación y la derivación de esta forma de la ley de Ohm es bastante larga y laboriosa, damos todos los detalles en el apéndice (5.1).

En suma el sistema de ecuaciones de MHD no relativista combinada con una ecuación de estado tiene la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.13)$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} (\vec{J} \times \vec{B}) + \rho \vec{g} + \vec{P}, \quad (3.14)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.15)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.16)$$

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{(\vec{v} \times \vec{B})}{c} \right), \quad p = p(\rho). \quad (3.17)$$

Este sistema de ecuaciones constituye un sistema completo que describe la interacción del fluido conductor con un campo (\vec{E}, \vec{B}) .

Mencionamos aquí que un caso particular ocurre para sistemas en donde σ es muy

grande, en donde se toma como $\sigma \rightarrow \infty$. Para tal sistema el fluido bajo la acción de los campos \vec{E} y \vec{B} , fluye de tal manera que se satisface:

$$\vec{E} + \left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) = 0 \quad (3.18)$$

tal régimen define el régimen de MHD ideal, la cual discutiremos mas adelante.

3.3 La ecuación de inducción.

Esta sección tiene como enfoque estudiar, cómo el movimiento de un fluido conductor afecta los campos \vec{E} y \vec{B} .

Consideremos un fluido conductor que ocupa una región $V \subseteq \mathbb{R}^3$ y sea el campo de velocidad $\vec{v}(\vec{x}, t)$ por el momento conocida y la conductividad σ es finita. Asumimos también que en V existe un $\vec{E}(\vec{x}, t)$ y $\vec{B}(\vec{x}, t)$ los cuales generan una corriente $\vec{J}(\vec{x}, t)$ dada por la ley de Ohm:

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \sigma \left(\vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{\vec{v}(\vec{x}, t) \times \vec{B}(\vec{x}, t)}{c} \right). \quad (3.19)$$

De esta relación a través de la ley de Ampere se obtiene:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{\vec{v}(\vec{x}, t) \times \vec{B}(\vec{x}, t)}{c} + \frac{c}{4\pi\sigma} \left[\nabla \times \vec{B}(\vec{x}, t) \right], \quad (3.20)$$

la cual implica que el campo $\vec{E}(\vec{x}, t)$ es completamente determinada por $\vec{v}(\vec{x}, t)$, σ y $\vec{B}(\vec{x}, t)$.

Por otro lado de la Ley de Faraday combinada con (3.20) implica:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) - \frac{c}{4\pi\sigma} \left(\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) \right),$$

y aplicando la identidad: $\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$ en el segundo término del lado derecho de la igualdad se obtiene:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} (\nabla^2 \vec{B}). \quad (3.21)$$

Esta ecuación describe la dependencia temporal del campo magnético en la presencia de un campo de velocidad $\vec{v}(\vec{x}, t)$ y bajo la asunción que se ha considerando que σ es una constante uniforme en espacio y tiempo.

La ecuación que hemos derivado juega un papel importante en el régimen de MHD y es referida como la ecuación de inducción. Examinemos en seguida dos límites particulares de esta ecuación:

t). Cabe mencionar que la presencia del término \vec{P} en (2.9) hace el estudio de fluidos de Navier-Stokes un problema difícil al estudiarlo matemáticamente.

Una familia grande de flujos de la hidrodinámica Euleriana o α) Si $\vec{v} = \vec{0}$, entonces la ecuación de inducción (3.21) toma la forma:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \vec{B}, \quad (3.22)$$

mientras (3.20) implica que:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{c}{4\pi\sigma} \left[\nabla \times \vec{B}(\vec{x}, t) \right], \quad (3.23)$$

es decir $\vec{E}(\vec{x}, t)$ es determinada por $\vec{B}(\vec{x}, t)$. Por otro lado la ecuación (3.22) implica que $\vec{B}(\vec{x}, t)$ satisface la ecuación vectorial de difusión con el coeficiente $\frac{c^2}{4\pi\sigma}$ referida como la difusividad magnética. Tal ecuación (3.22) nos dice que una configuración inicial de un campo magnético decrecerá con un tiempo de difusión: $\tau = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2}$.

β) Ahora examinamos el límite de un fluido conductor en donde $\sigma \rightarrow \infty$. Para tal fluido la difusividad magnética satisface:

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma} \rightarrow \infty, \quad (3.24)$$

y para tal sistema podemos despreciar el segundo término de la ecuación de inducción (3.21). Entonces la dependencia temporal del campo magnético se expresa como:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (3.25)$$

donde $\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$ se denomina término advectivo. En tal régimen el efecto de \vec{v} es en general una implicación. El campo $\vec{B}(\vec{x}, t)$ y la ecuación (3.25) es la ecuación

central para la teoría del dínamo.

γ) Las situaciones α) y β) definen dos regímenes de MHD extremas. En el régimen α) el término de la difusión $\frac{c^2}{4\pi\sigma}(\nabla^2\vec{B})$ es dominante mientras que en β) el término dominante es el término de advección $\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$. Para distinguir entre las dos situaciones comparamos el término de advección $\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$ con el término de difusión $\frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2\vec{B}$ en la ecuación de inducción. Sea que consideramos un flujo de velocidad característica \vec{v} , que toma lugar a una longitud de escala L . Para tal flujo tenemos la estimación:

$$\frac{|\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})|}{|\frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2\vec{B}|} \approx \frac{\frac{v}{L}}{\frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{1}{L^2}} = \frac{v\tau}{L}, \quad \tau = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2}. \quad (3.26)$$

El número adimensional \mathcal{R}_m definido por:

$$\mathcal{R}_m = \frac{v\tau}{L}, \quad (3.27)$$

es referido como el número magnético de Reynolds por el flujo bajo consideración. De su definición vemos que

- Si $\mathcal{R}_m \gg 1$

El término de advección domina. El transporte de las líneas de fuerza predomina sobre las de difusión y en limite $\mathcal{R}_m \rightarrow \infty$ estamos en el régimen de Magnetohidrodinámica ideal.

- Si $\mathcal{R}_m \ll 1$

Estamos en el régimen de Magnetohidrodinámica resistiva. Típicamente flujos de laboratorios terrestres caen en este régimen.

Por ejemplo: para los líquidos como el mercurio o el sodio fundido con condiciones usuales en el laboratorio $\mathcal{R}_m < 1$. En cambio, en problemas geofísicos y astrofísicos \mathcal{R}_m puede ser muy grande frente a la unidad, debido a una conductividad alta y también de gran escala L que flujos geofísicos y astrofísicos toman lugar.

3.4 Magnetohidrodinámica ideal.

En esta sección discutimos con más detalle el régimen de Magnetohidrodinámica ideal que hemos mencionado en la secciones anteriores. Como hemos visto en tal régimen ignoramos la disipación Ohmica del campo magnético, es decir consideramos un medio que es un conductor perfecto, $\mathcal{R}_m \rightarrow \infty$. En esta situación el campo magnético \vec{B} es determinado completamente por el movimiento del fluido y uno dice que \vec{B} es “congelado en el medio”.

Básicamente la condición de congelamiento significa que el medio en movimiento desarrolla corrientes cuyo campo generado por el movimiento sumado al campo inicial tiene la propiedad que *las líneas de campo* se mueven junto con las partículas de fluido. Esto significa que un par de partículas que se encuentran sobre la misma línea de campo siempre siguen sobre esta misma línea y un par de partículas que no están sobre la misma línea, nunca las mismas se encontraran sobre la misma línea. La propiedad de congelamiento del campo magnético esta bien representado en la siguiente propiedad del flujo: Sea Φ el flujo de \vec{B} definido por:

$$\Phi(t) = \int_{S_t} \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (3.28)$$

donde S_t es una superficie arbitraria cerrada pero sujeta a la restricción que el contorno ∂S_t es comovido con el fluido. De (3.28) combinada con las ecuaciones dinámicas obtenemos

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{S_t} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -c \int_{\partial S_t} \frac{1}{\sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (3.29)$$

Para mostrar la propiedad (3.29) apelamos al siguiente lema:

Lema 3.1 : Sea \vec{u} un campo vectorial suave y sea \vec{v} un flujo de fluido arbitrario. Supongase a una familia de superficies S_t acotadas por un contorno ∂S_t cual se mueve con el flujo v entonces ⁵:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_t} \vec{u} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S_t} [\partial_t \vec{u} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{u}) + \vec{v} \nabla \cdot \vec{u}] \cdot d\vec{S} \quad (3.30)$$

⁵Esta identidad esta discutida en [2] y esta derivada también en [3]

Considerando \vec{u} como \vec{B} y \vec{v} el campo de velocidades, entonces (3.30) implica que:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{S_t} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S_t} \left[\partial_t \vec{B} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \vec{v} \nabla \cdot \vec{B} \right] \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{\partial S_t} \left[\partial_t \vec{B} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \cdot d\vec{S} = \int_{S_t} \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= -\frac{c^2}{4\pi\sigma} \int_{S_t} \left[\nabla \times \nabla \times \vec{B} \right] \cdot d\vec{S} = -\frac{c^2}{4\pi\sigma} \int_{S_t} \nabla \times \left(\frac{4\pi}{c} \vec{J} \right) \cdot d\vec{S} = -c \int_{\partial S_t} \frac{1}{\sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S}, \end{aligned}$$

donde pasamos al último paso de la ecuación aplicando el teorema de Stokes.

Del lado derecho de (3.29), en el límite $\sigma \rightarrow \infty$ tenemos conservación del flujo magnético $\Phi(t)$ a través de las familia de dos superficies S_t sujeto a ∂S_t moviéndose con el fluido. Cuando en un fluido conductor la conductividad σ es asumida grande, a fin de que $\sigma \rightarrow \infty$, se está dentro el régimen de MHD ideal. El régimen de magnetodinámica ideal es muy especial. No hay disipación Óhmica del campo \vec{B} y además la propiedad de que $\sigma \rightarrow \infty$ demanda que los campos (\vec{E}, \vec{B}) satisfacen la condición:

$$\vec{E} + \frac{\vec{u} \times \vec{B}}{c} = 0, \quad (3.31)$$

la cual es una condición necesaria para una \vec{J} finita. El desvanecimiento de la disipación Óhmica en MHD ideal hace que el análisis de las ecuaciones dinámicas sea más fácil en comparación con el caso de la MHD resistible. El régimen de MHD ideal que hemos definido será utilizado en secciones próximas.

3.5 Ondas Magnetohidrodinámicas.

En esta sección y con analogía de las ondas de sonido que se propagan en un fluido ideal, analizaremos las características de las ondas que pueden propagarse en un fluido conductor en presencia de un campo magnético en el régimen de MHD ideal. Para tal análisis consideramos el sistema de ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.25), en ausencia de campos gravitacionales, asumimos un fluido ideal, compresible en el

régimen de MHD ideal. Para tal sistema tenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.32)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p - \frac{1}{4\pi} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}), \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (3.34)$$

$$p = p(\rho), \quad (3.35)$$

en donde (3.35) representa la ecuación de estado. Hemos omitido la ecuación $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, debido a que (3.34) implica $\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B} = 0$. Entonces si inicialmente $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ resulta esta ecuación se preserva con la evaluación.

Con analogía a la sección (2.2) notamos que una solución de (3.32)-(3.35) es dada por:

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_0 \text{ con } \rho_0 > 0 \text{ constante}, \quad (3.36)$$

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{0}, \quad (3.37)$$

$$p(\vec{x}, t) = p(\rho_0), \quad (3.38)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0 \text{ espacialmente y temporalmente uniforme.} \quad (3.39)$$

Como en nuestro tratamiento de ondas de sonido introducimos pequeñas perturbaciones de flujo, representadas por $\delta\rho(\vec{x}, t)$, $\delta\vec{v}(\vec{x}, t)$, $\delta\vec{B}(\vec{x}, t)$ y $\delta p(\vec{x}, t)$, entonces el flujo perturbado es:

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_0 + \delta\rho(\vec{x}, t), \quad (3.40)$$

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \delta\vec{v}(\vec{x}, t), \quad (3.41)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0 + \delta\vec{B}(\vec{x}, t), \quad (3.42)$$

$$p(\vec{x}, t) = p(\rho_0) + \delta p(\vec{x}, t). \quad (3.43)$$

Sustituyendo estas relaciones en las ecuaciones (3.32 – 3.35) y despreciando los términos cuadráticos, obtenemos de la ecuación de la continuidad:

$$\frac{\partial \delta\rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \rho_0 (\nabla \cdot \delta\vec{v}(\vec{x}, t)) = 0, \quad (3.44)$$

mientras que de la ecuación de Euler se obtiene

$$\begin{aligned} & (\rho_0 + \delta\rho(\vec{x}, t)) \left[\frac{\partial\delta\vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t} + (\delta\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla)\delta\vec{v}(\vec{x}, t) \right] \\ &= -\nabla [p(\rho_0) + \delta p(\vec{x}, t)] - \frac{1}{4\pi} \left(\vec{B}_0 + \delta\vec{B}(\vec{x}, t) \right) \times \left[\nabla \times \left(\vec{B}_0 + \delta\vec{B}(\vec{x}, t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Comparando esta última ecuación con la ecuación (2.31), se observa que son idénticas salvo que en el lado derecho tenemos un término adicional debido al \vec{B}_0 y $\delta\vec{B}(\vec{x}, t)$.

Analizamos la estructura de este término.

Aplicando la siguiente identidad vectorial al segundo término del lado derecho de (3.45):

$$\nabla \times (\vec{F} + \vec{G}) = (\nabla \times \vec{F}) + (\nabla \times \vec{G}) \quad (3.46)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \left(\vec{B}_0 + \delta\vec{B}(\vec{x}, t) \right) \times \left[\nabla \times \left(\vec{B}_0 + \delta\vec{B}(\vec{x}, t) \right) \right] = \\ & \frac{1}{4\pi} \left(\vec{B}_0 + \delta\vec{B}(\vec{x}, t) \right) \times \left[\left(\nabla \times \vec{B}_0 \right) + \left(\nabla \times \delta\vec{B}(\vec{x}, t) \right) \right] = \\ & \frac{1}{4\pi} \left(\vec{B}_0 + \delta\vec{B}(\vec{x}, t) \right) \times \left(\nabla \times \delta\vec{B}(\vec{x}, t) \right) = \\ & \frac{1}{4\pi} \left[\vec{B}_0 \times \left(\nabla \times \delta\vec{B}(\vec{x}, t) \right) \right] + \frac{1}{4\pi} \left[\delta\vec{B}(\vec{x}, t) \times \left(\nabla \times \delta\vec{B}(\vec{x}, t) \right) \right] \end{aligned}$$

y hasta términos lineales llegamos a:

$$\frac{1}{4\pi} \left(\vec{B}_0 + \delta\vec{B}(\vec{x}, t) \right) \times \left[\nabla \times \left(\vec{B}_0 + \delta\vec{B}(\vec{x}, t) \right) \right] = \frac{\vec{B}_0}{4\pi} \times \left(\nabla \times \delta\vec{B}(\vec{x}, t) \right). \quad (3.47)$$

Regresando ahora a la ecuación (3.45) obtenemos:

$$\rho_0 \frac{\partial\delta\vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t} + = -c_s^2 \nabla \delta\rho(\vec{x}, t) - \frac{\vec{B}_0}{4\pi} \times \left(\nabla \times \delta\vec{B}(\vec{x}, t) \right), \quad (3.48)$$

donde c_s^2 es la velocidad del sonido del flujo de fondo, definida por⁶:

$$c_s^2 = \left. \frac{dp(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho_0}.$$

⁶Aquí hemos usado el hecho que $\delta p(\vec{x}, t) = c_s^2 \delta\rho(\vec{x}, t)$. Debido que $\delta p(\vec{x}, t)$ está determinada por $\delta\rho(\vec{x}, t)$ de aquí y en adelante ignoraremos $\delta p(\vec{x}, t)$.

Finalmente la linealización de la ecuación (3.34) toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\vec{B}_0 + \delta\vec{B}(\vec{x}, t))}{\partial t} &= \nabla \times \left[\delta\vec{v} \times \left(\vec{B}_0 + \delta\vec{B}(\vec{x}, t) \right) \right] \\ &= \nabla \times \left[\left(\delta\vec{v} \times \vec{B}_0 \right) + \left(\delta\vec{v} \times \delta\vec{B}(\vec{x}, t) \right) \right] \\ &= \nabla \times \left(\delta\vec{v} \times \vec{B}_0 \right) + 0 \left(\delta\vec{v}, \delta\vec{B} \right) \end{aligned}$$

y hasta términos lineales tenemos:

$$\frac{\partial\delta\vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \nabla \times \left[\delta\vec{v} \times \vec{B}_0 \right], \quad (3.49)$$

En suma las perturbaciones $\delta\rho(\vec{x}, t)$, $\delta\vec{v}(\vec{x}, t)$, $\delta\vec{B}(\vec{x}, t)$, satisfacen el siguiente sistema:

$$\frac{\partial\delta\rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \rho_0 (\nabla \cdot \delta\vec{v}(\vec{x}, t)) = 0, \quad (3.50)$$

$$\rho_0 \frac{\partial\delta\vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t} + c_s^2 \nabla \delta\rho(\vec{x}, t) + \frac{\vec{B}_0}{4\pi} \times \left[\nabla \times \delta\vec{B}(\vec{x}, t) \right] = 0, \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial\delta\vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} - \nabla \times \left(\delta\vec{v} \times \vec{B}_0 \right) = 0. \quad (3.52)$$

Observemos que este sistema de ecuaciones es mucho más complicado que el de las ecuaciones de la sección 2.2. Sin embargo tratemos de desacoplarlas. Las ecuaciones (3.50 – 3.52) las podemos combinar con la ecuación (3.51). Asumiendo suavidad de las perturbaciones y tomando $\frac{\partial}{\partial t}$ en la ecuación (3.51) se tiene:

$$\rho_0 \frac{\partial^2\delta\vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t^2} + c_s^2 \nabla \frac{\partial\delta\rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\vec{B}_0}{4\pi} \times \left[\nabla \times \frac{\partial\delta\vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} \right] = 0, \quad (3.53)$$

Combinando esta ecuación con (3.50) y (3.52) obtenemos:

$$\frac{\partial^2\delta\vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla [\nabla \cdot \delta\vec{v}(\vec{x}, t)] + \frac{\vec{B}_0}{4\pi\rho_0} \times \left\{ \nabla \times \left[\nabla \times \left(\delta\vec{v} \times \vec{B}_0 \right) \right] \right\} = 0,$$

y escribiendo $4\pi\rho_0 = (\sqrt{4\pi\rho_0})(\sqrt{4\pi\rho_0})$ tenemos:

$$\frac{\partial^2\delta\vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla [\nabla \cdot \delta\vec{v}(\vec{x}, t)] + \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \times \left\{ \nabla \times \left[\nabla \times \left(\delta\vec{v} \times \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) \right] \right\} = 0,$$

la cual escribimos de la forma:

$$\frac{\partial^2 \delta \vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla (\nabla \cdot \delta \vec{v}(\vec{x}, t)) + \vec{v}_A \times \{ \nabla \times [\nabla \times (\delta \vec{v} \times \vec{v}_A)] \} = 0, \quad (3.54)$$

donde se ha introducido la velocidad vectorial de Alfvén del flujo del fondo como:

$$\vec{v}_A = \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}.$$

De su definición la velocidad \vec{v}_A depende de la densidad ρ_0 de fondo y de la intensidad del campo magnético \vec{B}_0 .

La ecuación (3.54) es desacoplada y describe el comportamiento de la perturbación $\delta \vec{v}(\vec{x}, t)$. Esta ecuación ofrece el punto de inicio del estudio de las perturbaciones $\delta \vec{v}(\vec{x}, t)$, $\delta \rho(\vec{x}, t)$ y $\delta \vec{B}(\vec{x}, t)$. Si $\delta \vec{v}(\vec{x}, t)$ es una solución conocida de (3.54), es relativamente fácil a través de (3.50) y (3.52) construir las perturbaciones $\delta \rho(\vec{x}, t)$ y $\delta \vec{B}(\vec{x}, t)$.

Sin pérdida de generalidad proponemos una familia de soluciones particulares de la forma:

$$\delta \vec{v}(\vec{x}, t) = \delta \vec{v}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (3.55)$$

con $\vec{k} = (k^x, k^y, k^z)$ que tentativamente se interpreta como la dirección de propagación, ω como la frecuencia mientras $\delta \vec{v}_1$ es un vector fijo que representa la amplitud de la perturbación. En este punto nos referimos a (3.55) como ondas vectoriales monocromáticas planas, pero es importante señalar que no sabemos la relación de dispersión y tampoco si ω es real o compleja. Sustituimos (3.55) en (3.54) y obtenemos:

$$-\omega^2 \delta \vec{v}_1 + c_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_1) - \vec{v}_A \times \{ \vec{k} \times [\vec{k} \times (\delta \vec{v}_1 \times \vec{v}_A)] \} = 0, \quad (3.56)$$

simplicamos tal expresión aplicando la identidad vectorial:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}), \quad (3.57)$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
 & -\omega^2 \delta \vec{v}_1 + c_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_1) - \vec{v}_A \times \left\{ \vec{k} \times \left[\delta \vec{v}_1 (\vec{k} \cdot \vec{v}_A) - \vec{v}_A (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_1) \right] \right\} = 0 \\
 & -\omega^2 \delta \vec{v}_1 + c_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_1) - \vec{v}_A \times \left\{ \vec{k} \times \delta \vec{v}_1 (\vec{k} \cdot \vec{v}_A) - \vec{k} \times \vec{v}_A (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_1) \right\} = 0 \\
 & -\omega^2 \delta \vec{v}_1 + c_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_1) - \vec{v}_A \times \left\{ \vec{k} \times \delta \vec{v}_1 (\vec{k} \cdot \vec{v}_A) + \vec{v}_A \times \vec{k} (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_1) \right\} = 0 \\
 & -\omega^2 \delta \vec{v}_1 + c_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_1) - \vec{v}_A \times (\vec{k} \times \delta \vec{v}_1) (\vec{k} \cdot \vec{v}_A) - \vec{v}_A \times (\vec{v}_A \times \vec{k}) (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_1) = 0
 \end{aligned}$$

aplicando nuevamente la identidad vectorial (3.57) al término

$$\vec{v}_A \times (\vec{k} \times \delta \vec{v}_1) (\vec{k} \cdot \vec{v}_A) - \vec{v}_A \times (\vec{v}_A \times \vec{k}) (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_1) = 0,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & -\omega^2 \delta \vec{v}_1 + c_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_1) - \left[\vec{k} (\vec{v}_A \cdot \delta \vec{v}_1) - \delta \vec{v}_1 (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) \right] (\vec{k} \cdot \vec{v}_A) \\
 & \quad - \left[\vec{v}_A (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) - \vec{k} (\vec{v}_A^2) \right] (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_1) = 0,
 \end{aligned}$$

finalmente reacomodando términos resulta:

$$\begin{aligned}
 & -\omega^2 \delta \vec{v}_1 + (c_s^2 + v_A^2) (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_1) \vec{k} + \\
 & + (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) \left[(\vec{v}_A \cdot \vec{k}) \delta \vec{v}_1 - (\vec{v}_A \cdot \delta \vec{v}_1) \vec{k} - (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_1) \vec{v}_A \right] = 0, \tag{3.58}
 \end{aligned}$$

Esta relación es de gran importancia y sirve como la relación de dispersión. Desafortunadamente no es tan fácil ver la implicaciones de esta restricción.

Nuestra estrategia para entender la estructura de esta restricción, es considerar primero perturbaciones:

$$\delta \vec{v}(\vec{x}, t) = \delta \vec{v}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \tag{3.59}$$

en donde el vector de propagación \vec{k} es especial. Específicamente consideremos los siguientes modos $\delta \vec{v}(\vec{x}, t)$:

α) Modos $\delta \vec{v}(\vec{x}, t)$ en donde \vec{k} es ortogonal a $\vec{v}_A = \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$ (ver la figura que sigue).

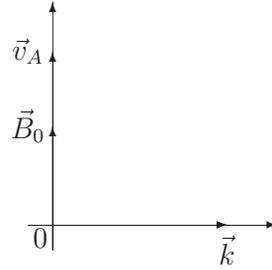


Figura 3.1 $\vec{k} \perp \vec{v}_A$

β) Modos $\delta\vec{v}(\vec{x}, t)$ en donde \vec{k} es paralelo a $\vec{v}_A = \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$ (ver la figura que sigue).

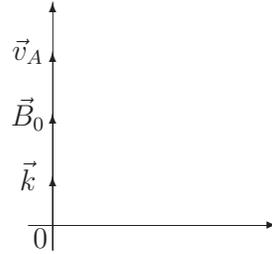


Figura 3.2 $\vec{k} \parallel \vec{v}_A$

Por tales elecciones es relativamente fácil entender la estructura de (3.54). Una vez que entendemos el contenido de la restricción (3.58) para estos modos particulares atacamos el problema general.

3.5.1 Modos longitudinales magnetosónicos.

En esta sección restringimos nuestra atención a modos $\delta\vec{v}(\vec{x}, t)$ donde \vec{k} es perpendicular a \vec{v}_A es decir $\vec{k} \cdot \vec{v}_A = 0$, (véase figura 3.1). Para tales modos se tiene:

$$\left(\vec{v}_A \cdot \vec{k}\right) \left[\left(\vec{v}_A \cdot \vec{k}\right) \delta\vec{v}_1 - \left(\vec{v}_A \cdot \delta\vec{v}_1\right) \vec{k} - \left(\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1\right) \vec{v}_A \right] = 0,$$

entonces (3.58) se reduce a:

$$-\omega^2 \delta\vec{v}_1 + (c_s^2 + v_A^2) \left(\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1\right) \vec{k} = 0. \quad (3.60)$$

Esta relación implica que no existen modos $\delta\vec{v}(\vec{x}, t)$ transversos, es decir modos en donde la amplitud $\delta\vec{v}_1$ satisfice: $\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1 = 0$. Si tales modos existen de (3.60) vemos que tienen $\omega = 0$, un modo trivial. Buscamos entonces modos $\delta\vec{v}(\vec{x}, t)$ longitudinales, es decir modos con $\vec{k} \parallel \delta\vec{v}$.

Tomando el producto interno de la ecuación (3.60) con \vec{k} se obtiene

$$-\omega^2 (\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1) + (c_s^2 + v_A^2) (\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1) (\vec{k} \cdot \vec{k}) = 0,$$

$$\left[-\omega^2 + (c_s^2 + v_A^2) |\vec{k}|^2 \right] (\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1) = 0,$$

y debido a que $\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1 \neq 0$ se obtiene la siguiente forma sencilla de la relación de dispersión:

$$|\vec{k}|^2 = \frac{\omega^2}{(c_s^2 + v_A^2)}. \quad (3.61)$$

Entonces existen modos longitudinales $\delta\vec{v}(\vec{x}, t)$ en donde la relación de dispersión tiene la forma (3.61). De esta relación vemos que ω es real, entonces (3.59) representa ondas monocromáticas planas longitudinales con $\vec{k} \parallel \delta\vec{v}$ y $\vec{k} \perp \vec{v}_A$.

Para completar el análisis consideramos la estructura de la perturbación $\delta\vec{B}(\vec{x}, t)$ y $\delta\rho(\vec{x}, t)$ que acompañan los modos $\delta\vec{v}(\vec{x}, t)$ que hemos construido. Para eso regresamos a la ecuación (3.52) y sustituimos:

$$\delta\vec{v}(\vec{x}, t) = \delta\vec{v}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{k} \cdot \vec{v}_A = 0, \quad (3.62)$$

obteniendo:

$$\frac{\partial \delta\vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \nabla \times \left[\left(\delta\vec{v}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right) \times \vec{B}_0 \right] = \nabla \times \left[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \left(\delta\vec{v}_1 \times \vec{B}_0 \right) \right],$$

aplicando la identidad vectorial:

$$\nabla \times (\psi \vec{a}) = \nabla \psi \times \vec{a} + \psi \nabla \times \vec{a}, \quad (3.63)$$

reacomodando términos obtenemos:

$$\frac{\partial \delta\vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left[i\vec{k} \times \vec{M} \right] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \delta\vec{v}_1 \times \vec{B}_0 = \vec{M},$$

y finalmente:

$$\frac{\partial \delta \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left[i\vec{k} \times \left(\delta \vec{v}_1 \times \vec{B}_0 \right) \right] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}. \quad (3.64)$$

Por la forma que tiene (3.64) es obvio que la perturbación en el campo magnético $\delta \vec{B}(\vec{x}, t)$ tiene solución de la forma ⁷:

$$\delta \vec{B}(\vec{x}, t) = \delta \vec{B}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (3.65)$$

sustituyendo la forma de $\delta \vec{B}(\vec{x}, t)$ en (3.64) se obtiene:

$$-i\omega \delta \vec{B}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = \left[i\vec{k} \times \left(\delta \vec{v}_1 \times \vec{B}_0 \right) \right] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (3.66)$$

$$-i\omega \delta \vec{B}_1 = i\vec{k} \times \left(\delta \vec{v}_1 \times \vec{B}_0 \right), \quad (3.67)$$

Aplicando la identidad vectorial (3.57)

$$-i\omega \delta \vec{B}_1 = \left[\left(i\vec{k} \cdot \vec{B}_0 \right) \delta \vec{v}_1 - \left(i\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_1 \right) \vec{B}_0 \right]. \quad (3.68)$$

Para los modos longitudinales $\delta \vec{v}(\vec{x}, t)$ que estamos analizando con $\vec{k} \perp \vec{v}_A = \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$ lo cual implica $\vec{k} \perp \vec{B}_0$, entonces se tiene que $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$, así (3.68) se reduce a:

$$-i\omega \delta \vec{B}_1 = - \left(i\vec{k} \cdot \delta \vec{v}_1 \right) \vec{B}_0 = - \left(i|\vec{k}| |\delta \vec{v}_1| \right) \vec{B}_0.$$

$$\implies \delta \vec{B}_1 = \frac{|\vec{k}|}{\omega} |\delta \vec{v}_1| \vec{B}_0 = \pm \frac{|\delta \vec{v}_1|}{\sqrt{c_s^2 + v_A^2}} \vec{B}_0 \quad (3.69)$$

Sustituyendo la forma que tiene la amplitud $\delta \vec{B}_1$ en (3.65) obtenemos que los modos para el campo magnético perturbado están dados por:

$$\delta \vec{B}(\vec{x}, t) = \pm \frac{|\delta \vec{v}_1|}{\sqrt{c_s^2 + v_A^2}} \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}. \quad (3.70)$$

⁷Existe la posibilidad de tomar: $\delta \vec{B}(\vec{x}, t) = \delta \vec{B}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + \vec{B}(\vec{x})$, en donde $\vec{B}(\vec{x})$ representa una perturbación estática de la solución de fondo. En esta tesis no estamos interesados en estos modos tomamos $\vec{B}(\vec{x}) = 0$.

Hemos obtenido que la amplitud de la perturbación $\delta\vec{B}$ es paralela al campo magnético \vec{B}_0 del flujo de fondo.

Finalmente para la determinación de la perturbación $\delta\rho(\vec{x}, t)$ regresamos a (3.50).

En términos de $\delta\vec{v}$ dada por (3.62), la ecuación (3.50) se reduce a:

$$\frac{\partial\delta\rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\rho_0 \left(\nabla \cdot \delta\vec{v}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \right), \quad (3.71)$$

Aplicando la identidad vectorial (3.63), se obtiene:

$$\frac{\partial\delta\rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\rho_0 \left(i\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1 \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad (3.72)$$

Tomamos soluciones para $\delta\rho$ de la forma:

$$\delta\rho(\vec{x}, t) = \delta\rho_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad (3.73)$$

que sustituyendo en (3.72) se obtiene:

$$-i\omega\delta\rho_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = -\rho_0 \left(i\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1 \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \quad (3.74)$$

$$\omega\delta\rho_1 = \rho_0 \left(\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1 \right) \quad (3.75)$$

Debido a que los modos $\delta\vec{v}(\vec{x}, t)$ son longitudinales $\vec{k} \parallel \delta\vec{v}$, $\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1 = |\vec{k}| |\delta\vec{v}_1|$. Usando esta relación vemos que:

$$\delta\rho_1 = \rho_0 \frac{|\vec{k}|}{\omega} |\delta\vec{v}_1| = \pm \frac{|\delta\vec{v}_1|}{\sqrt{c_s^2 + v_A^2}} \rho_0,$$

obteniendo así la amplitud $\delta\rho_1$. Sustituyendo en (3.73), la perturbación de densidad es dada por:

$$\delta\rho(\vec{x}, t) = \pm \frac{|\delta\vec{v}_1|}{\sqrt{c_s^2 + v_A^2}} \rho_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad (3.76)$$

que es una densidad de compresión y expansión

En suma hemos mostrado que existen perturbaciones escritas por los modos:

$$\delta\vec{v}(\vec{x}, t) = \delta\vec{v}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad \vec{k} \perp \vec{v}_A, \quad \vec{k} \parallel \delta\vec{v}_1, \quad (3.77)$$

$$\delta\vec{B}(\vec{x}, t) = \pm \frac{|\delta\vec{v}_1|}{\sqrt{c_s^2 + v_A^2}} \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad (3.78)$$

$$\delta\rho(\vec{x}, t) = \pm \frac{|\delta\vec{v}_1|}{\sqrt{c_s^2 + v_A^2}} \rho_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad (3.79)$$

Para estos modos la dirección de propagación \vec{k} , la velocidad de Alfvén \vec{v}_A y la amplitud $\delta\vec{v}_1$ de la perturbación están como en el dibujo.

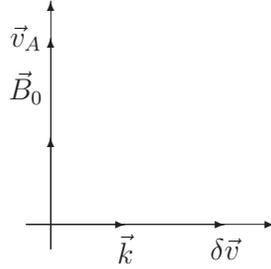


Figura 3.3: La perturbación en la velocidad $\delta\vec{v}$ es un modo longitudinal y su dirección de propagación es ortogonal al campo magnético de fondo \vec{B}_0 .

La familia de perturbaciones descritas por (3.77)-(3.79) son referidos como modos magnetosónicos, longitudinales. Como se ve en la figura (3.3) estos modos se caracterizan por la propiedad que $\delta\vec{v}(\vec{x}, t)$ es un modo longitudinal, es decir, $\vec{k} \parallel \delta\vec{v}_1$, y la perturbación del campo magnético $\delta\vec{B}(\vec{x}, t) = \pm \frac{|\delta\vec{v}_1|}{\sqrt{c_s^2 + v_A^2}} \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$ que como podemos ver es una perturbación transversal. La perturbación de densidad $\delta\rho(\vec{x}, t) = \pm \frac{|\delta\vec{v}_1|}{\sqrt{c_s^2 + v_A^2}} \rho_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$ produce compresiones y enrarecimientos en las líneas de campo magnético sin cambiar su dirección de propagación, como se muestra en la siguiente figura.

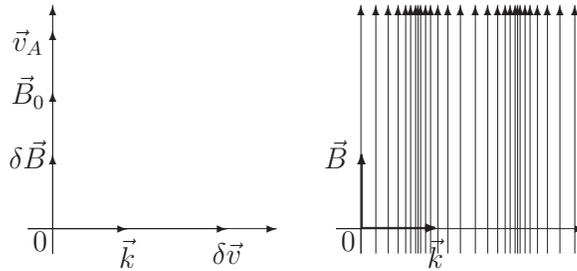


Figura 3.4: Modo magnetosónico longitudinal se propaga perpendicularmente al campo magnético, comprimiendo y relajando las líneas del campo magnético.

3.5.2 Ondas de Alfven y acústicas

En esta sección consideremos modos $\delta\vec{v}(\vec{x}, t)$ en donde \vec{k} es paralelo a \vec{v}_A , como se ve en la figura 3.2. Por tales modos de la ecuación (3.58) se tiene que:

$$-\omega^2 \delta\vec{v}_1 + (c_s^2 + v_A^2) (\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1) \vec{k} + (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) \left[-(\vec{v}_A \cdot \delta\vec{v}_1) \vec{k} - (\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1) \vec{v}_A \right] + (\vec{v}_A \cdot \vec{k})^2 \delta\vec{v}_1 = 0$$

Reordenando términos obtenemos:

$$\left[-\omega^2 + (\vec{v}_A \cdot \vec{k})^2 \right] \delta\vec{v}_1 + (c_s^2 + v_A^2) (\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1) \vec{k} + (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) \left[-(\vec{v}_A \cdot \delta\vec{v}_1) \vec{k} - (\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1) \vec{v}_A \right] = 0 \quad (3.80)$$

La suposición que \vec{k} es paralelo de \vec{v}_A nos permite escribir:

$$\vec{k} = \lambda \vec{v}_A, \quad \lambda \neq 0 \quad (3.81)$$

y para tales \vec{k} la ecuación (3.80) toma la forma:

$$\begin{aligned} & \left[-\omega^2 + (\vec{v}_A \cdot \vec{k})^2 \right] \delta\vec{v}_1 + (c_s^2 + v_A^2) (\lambda \vec{v}_A \cdot \delta\vec{v}_1) \lambda \vec{v}_A + \\ & \quad + (\vec{v}_A \cdot \lambda \vec{v}_A) \left[-(\vec{v}_A \cdot \delta\vec{v}_1) \lambda \vec{v}_A - (\lambda \vec{v}_A \cdot \delta\vec{v}_1) \vec{v}_A \right] = 0 \\ & \left[-\omega^2 + (\vec{v}_A \cdot \vec{k})^2 \right] \delta\vec{v}_1 + \lambda^2 (c_s^2 + v_A^2) (\vec{v}_A \cdot \delta\vec{v}_1) \vec{v}_A + \\ & \quad + \lambda^2 (\vec{v}_A \cdot \vec{v}_A) \left[-(\vec{v}_A \cdot \delta\vec{v}_1) \vec{v}_A - (\vec{v}_A \cdot \delta\vec{v}_1) \vec{v}_A \right] = 0 \\ & \left[-\omega^2 + (\vec{v}_A \cdot \vec{k})^2 \right] \delta\vec{v}_1 + \lambda^2 (c_s^2 + v_A^2) (\vec{v}_A \cdot \delta\vec{v}_1) \vec{v}_A + \\ & \quad + \lambda^2 |\vec{v}_A|^2 \left[-2 (\vec{v}_A \cdot \delta\vec{v}_1) \vec{v}_A \right] = 0 \\ & \left[-\omega^2 + (\vec{v}_A \cdot \vec{k})^2 \right] \delta\vec{v}_1 + \lambda^2 \left[-2 |\vec{v}_A|^2 + (c_s^2 + v_A^2) \right] (\vec{v}_A \cdot \delta\vec{v}_1) \vec{v}_A = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[-\omega^2 + (\vec{v}_A \cdot \vec{k})^2 \right] \delta \vec{v}_1 + \lambda^2 [(c_s^2 - v_A^2)] (\vec{v}_A \cdot \delta \vec{v}_1) \vec{v}_A &= 0 \\ \left[-\omega^2 + (\vec{v}_A \cdot \vec{k})^2 \right] \delta \vec{v}_1 + \lambda^2 v_A^2 \left[\frac{c_s^2}{v_A^2} - 1 \right] (\vec{v}_A \cdot \delta \vec{v}_1) \vec{v}_A &= 0 \\ \left[-\omega^2 + (|\vec{v}_A| |\vec{k}|)^2 \right] \delta \vec{v}_1 + \lambda^2 v_A^2 \left[\frac{c_s^2}{v_A^2} - 1 \right] (\vec{v}_A \cdot \delta \vec{v}_1) \vec{v}_A &= 0 \end{aligned}$$

y sustituyendo: $\vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = \lambda^2 v_A^2$, obtenemos

$$\left(|\vec{k}|^2 v_A^2 - \omega^2 \right) \delta \vec{v}_1 + \left(\frac{c_s^2}{v_A^2} - 1 \right) |\vec{k}|^2 (\vec{v}_A \cdot \delta \vec{v}_1) \vec{v}_A = 0 \quad (3.82)$$

La estructura de esta relación implica que hay dos posibles tipos de modos: Modos con $\vec{v}_A \cdot \delta \vec{v}_1 = 0$ y modos con $\delta \vec{v}_1 \parallel \vec{k} \parallel \vec{v}_A$.

α) Consideremos primero el caso importante en donde los modos $\delta \vec{v}(\vec{x}, t)$ tienen la propiedad $\delta \vec{v} \perp \vec{v}_A$, como se muestra en la figura 3.5.

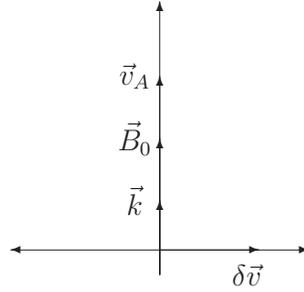


Figura 3.5: La perturbación en la velocidad $\delta \vec{v}(\vec{x}, t)$ es un modo transversal y su dirección de propagación es paralela al campo magnético de fondo \vec{B}_0 .

Para estos modos transversos debido a que $\vec{v}_A \cdot \delta \vec{v}_1 = 0$, tenemos de (3.82):

$$\left(|\vec{k}|^2 v_A^2 - \omega^2 \right) \delta \vec{v}_1 = 0. \quad (3.83)$$

Si $\delta\vec{v} \neq 0$ se tiene:

$$|\vec{k}|^2 v_A^2 - \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{k}|^2 = \frac{\omega^2}{v_A^2}. \quad (3.84)$$

Entonces existen modos $\delta\vec{v}(\vec{x}, t)$ transversales donde la relación de dispersión es dada por (3.84). Estos modos existen debido solo al campo magnético de fondo \vec{B}_0 y son llamadas ondas de Alfvén.

Al igual que las ondas magnetosónicas las ondas de Alfvén también están acompañadas de una $\delta\vec{B}(\vec{x}, t)$ y $\delta\rho(\vec{x}, t)$. A continuación damos la contribución de estos modos.

De la ecuación (3.52) sustituimos:

$$\delta\vec{v}(\vec{x}, t) = \delta\vec{v}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad \vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1 = 0, \quad (3.85)$$

obtenemos:

$$\frac{\partial \delta\vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \nabla \times \left[\left(\delta\vec{v}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \right) \times \vec{B}_0 \right] = \nabla \times \left[e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \left(\delta\vec{v}_1 \times \vec{B}_0 \right) \right],$$

y finalmente:

$$\frac{\partial \delta\vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left[i\vec{k} \times \left(\delta\vec{v}_1 \times \vec{B}_0 \right) \right] e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}. \quad (3.86)$$

De la forma de esta ecuación, $\delta\vec{B}(\vec{x}, t)$ tiene la forma:

$$\delta\vec{B}(\vec{x}, t) = \delta\vec{B}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad (3.87)$$

sustituyendo en (3.86) y aplicando la identidad (3.57) se obtiene:

$$-i\omega\delta\vec{B}_1 = \left[(i\vec{k} \cdot \vec{B}_0)\delta\vec{v}_1 - (i\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1)\vec{B}_0 \right]. \quad (3.88)$$

Debido a $\vec{v}_A = \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$, $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ y la elección (ver figura 3.5) $\vec{k} \perp \delta\vec{v}$, la amplitud $\delta\vec{v}_1$ satisface $\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1 = 0$. Entonces de (3.88) obtenemos:

$$-i\omega\delta\vec{B}_1 = (i\vec{k} \cdot \vec{B}_0)\delta\vec{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \delta\vec{B}_1 = -\frac{|\vec{k}|}{\omega} |\vec{B}_0| \delta\vec{v}_1 = -\frac{|\vec{B}_0|}{v_A^2} \delta\vec{v}_1, \quad (3.89)$$

es decir la amplitud $\delta\vec{B}_1$ es determinada por $\delta\vec{v}_1$. Entonces:

$$\delta\vec{B}(\vec{x}, t) = -\frac{|\vec{B}_0|}{v_A^2} \delta\vec{v}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad (3.90)$$

es decir $\delta\vec{B}(\vec{x}, t)$ asociado con modos transversales es perpendicular al campo magnético original del flujo de fondo.

Para evaluar $\delta\rho(\vec{x}, t)$, regresamos a (3.50), la cual en términos de $\delta\vec{v}$ dada por (3.85) se reduce a:

$$\frac{\partial\delta\rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\rho_0 \left(\nabla \cdot \delta\vec{v}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \right) = -\rho_0 \left(i\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1 \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad (3.91)$$

y tomamos $\delta\rho$ de la forma:

$$\delta\rho(\vec{x}, t) = \delta\rho_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}. \quad (3.92)$$

Sustituyendo en (3.91) se obtiene:

$$-i\omega\delta\rho_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = -\rho_0 \left(i\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1 \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \quad (3.93)$$

$$\omega\delta\rho_1 = \rho_0 \left(\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1 \right), \quad (3.94)$$

por tener modos $\delta\vec{v}$ que se mueven perpendicularmente a la dirección de propagación: $\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1 = 0$, entonces: $\delta\rho(\vec{x}, t) = 0$ y no hay perturbación de la densidad.

En suma hemos construido modos:

$$\delta\vec{v}(\vec{x}, t) = \delta\vec{v}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad \vec{k} \parallel \vec{v}_A, \quad \delta\vec{v}_1 \perp \vec{v}_A, \quad (3.95)$$

$$\delta\vec{B}(\vec{x}, t) = -\frac{|\vec{B}_0|}{v_A^2} \delta\vec{v}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad (3.96)$$

$$\delta\rho(\vec{x}, t) = 0, \quad (3.97)$$

Tales modos son llamadas ondas de Alfvén que se propagan en el fluido con la velocidad de Alfvén v_A a lo largo de B_0 y nos dan un fenómeno puramente magnetohidrodinámico que depende solamente del campo magnético y de la densidad de fondo.

Para estos modos $\delta\rho(\vec{x}, t) = 0$ las líneas de $\delta\vec{B}(\vec{x}, t)$ oscilan de adelante y hacia atrás de forma lateral, como se ve en la siguiente figura.

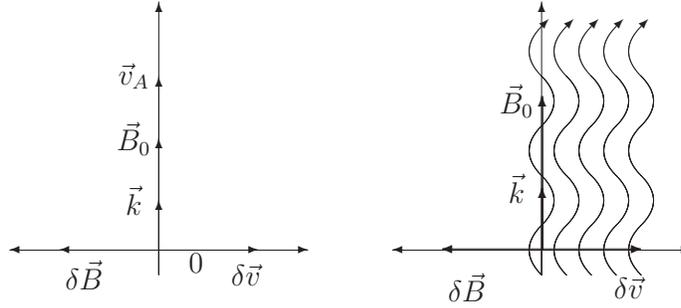


Figura 3.6: Las ondas de Alfvén se propagan a lo largo de las líneas del campo magnético.

β) Consideramos finalmente modos en donde $\delta\vec{v}(\vec{x}, t)$ tienen la propiedad de ser paralelo a \vec{k} y también a \vec{v}_A como se muestra en la siguiente figura:

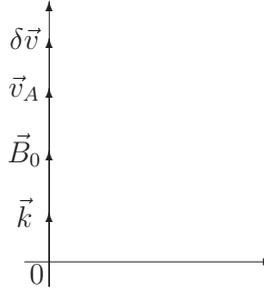


Figura 3.7: La perturbación en la velocidad $\delta\vec{v}(\vec{x}, t)$ es un modo longitudinal y su dirección de propagación es paralela al campo magnético de fondo \vec{B}_0 .

Para tales modos la amplitud $\delta\vec{v}_1$ satisface $\vec{v}_A \cdot \delta\vec{v}_1 = v_A \delta v_1$, es decir tales modos $\delta\vec{v}(\vec{x}, t)$ son longitudinales.

Para este tipo de modos podemos suponer que $\delta\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_A$, entonces la ecuación (3.82) toma la forma:

$$(|\vec{k}|^2 v_A^2 - \omega^2) \delta\vec{v}_1 + \left(\frac{c_s^2}{v_A^2} - 1 \right) |\vec{k}|^2 (\vec{v}_A \cdot \delta\vec{v}_1) \vec{v}_A = 0 \quad (3.98)$$

$$(|\vec{k}|^2 v_A^2 - \omega^2) \lambda \vec{v}_A + \left(\frac{c_s^2}{v_A^2} - 1 \right) |\vec{k}|^2 (\vec{v}_A \cdot \lambda \vec{v}_A) \vec{v}_A = 0 \quad (3.99)$$

$$\lambda(|\vec{k}|^2 v_A^2 - \omega^2) \vec{v}_A + \lambda \left(\frac{c_s^2}{v_A^2} - 1 \right) |\vec{k}|^2 v_A^2 \vec{v}_A = 0 \quad (3.100)$$

$$\left[|\vec{k}|^2 v_A^2 - \omega^2 + \frac{c_s^2}{v_A^2} |\vec{k}|^2 v_A^2 - |\vec{k}|^2 v_A^2 \right] \lambda \vec{v}_A = 0 \quad (3.101)$$

$$\left[-\omega^2 + c_s^2 |\vec{k}|^2 \right] \lambda \vec{v}_A = 0, \quad (3.102)$$

de la cual concluimos:

$$-\omega^2 + c_s^2 |\vec{k}|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{k}|^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2}, \quad (3.103)$$

es decir, estos modos se propagan con la velocidad de sonido c_s de la solución de fondo y nos referimos a ellos como modos acústicos.

Para estos modos:

$$\delta \vec{v}(\vec{x}, t) = \delta v_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{k} \parallel \delta \vec{v}_A, \quad \delta \vec{v} \parallel \vec{v}_A \quad (3.104)$$

y debido que la perturbación $\delta \vec{B}(\vec{x}, t)$ satisface:

$$\frac{\partial \delta \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} - \nabla \times (\delta \vec{v} \times \vec{B}_0) = 0 \quad (3.105)$$

$\delta \vec{v} \parallel \vec{v}_A$ y por $\vec{v}_A = \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$ tenemos que $\delta \vec{v} \parallel \vec{B}_0$ y por $\delta v_1 = \lambda \vec{B}_0$. De la ecuación (3.105) bajo la consideración

$$\delta \vec{B}(\vec{x}, t) = \delta \vec{B}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (3.106)$$

obtenemos

$$-\omega \delta \vec{B}_1 = \frac{1}{\omega} \left[(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \lambda \vec{B}_0 - (\vec{k} \cdot \lambda \vec{B}_0) \vec{B}_0 \right], \quad (3.107)$$

$$\delta \vec{B}_1 = -\frac{\lambda}{\omega} \left[(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_0 - (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_0 \right], \quad (3.108)$$

$$\delta \vec{B} = 0. \quad (3.109)$$

Vemos que la $\delta \vec{B}(\vec{x}, t)$ que asociada a los modos acústicos es cero lo cual implica el nombre de ondas acústicas.

Para estos modos $\delta \rho(\vec{x}, t)$ combinados con $\delta \vec{B} = 0$, obtenemos de (3.50) :

$$\frac{\partial \delta \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot (\delta v_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}), \quad (3.110)$$

Tomamos la perturbación $\delta\rho(\vec{x}, t)$ de la forma:

$$\delta\rho(\vec{x}, t) = \delta\rho_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad (3.111)$$

y sustituyéndola en (3.110), obtenemos:

$$-i\omega\delta\rho_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = -\rho_0 \left(i\vec{k} \cdot \delta\vec{v}_1 \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad (3.112)$$

Por tener modos $\delta\vec{v}$ longitudinales:

$$\omega\delta\rho_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = \rho_0 \left(|\vec{k}| |\delta\vec{v}_1| \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad (3.113)$$

entonces la amplitud $\delta\rho_1$ de densidad perturbada esta dada por:

$$\delta\rho_1 = \rho_0 \frac{|\vec{k}|}{\omega} |\delta\vec{v}_1| = \frac{|\delta\vec{v}_1| \rho_0}{c_s^2}. \quad (3.114)$$

Regresando a (3.111) la densidad perturbada $\delta\rho(\vec{x}, t)$ es dada por:

$$\delta\rho(\vec{x}, t) = \frac{|\delta\vec{v}_1| \rho_0}{c_s^2} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}. \quad (3.115)$$

En suma hemos mostrado que existen modos escritos por:

$$\delta\vec{v}(\vec{x}, t) = \delta\vec{v}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad \vec{k} \parallel \delta\vec{v}_1, \quad \delta\vec{v} \parallel \vec{v}_A, \quad (3.116)$$

$$\delta\vec{B} = 0, \quad (3.117)$$

$$\delta\rho(\vec{x}, t) = \frac{|\delta\vec{v}_1| \rho_0}{c_s^2} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad (3.118)$$

son modos longitudinales y son llamados modos acústicos propagándose con una velocidad de sonido c_s lo largo del campo magnético. Por (3.109) no hay perturbación en \vec{B} .

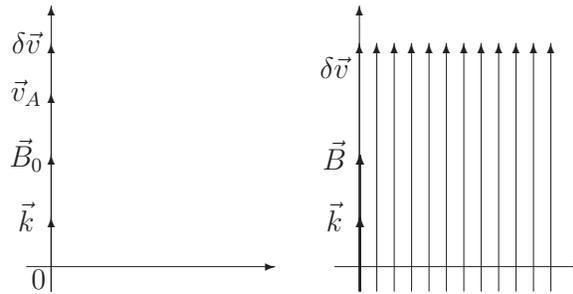


Figura 3.8: Onda longitudinal de sonido propagándose a lo largo de las líneas del campo magnético en un fluido conductor.

Capítulo 4

Conclusiones

En esta teoría hemos analizado pequeñas perturbaciones alrededor de una solución particular de un fluido ideal. Se muestra que en fluido no conductor pueden propagarse ondas longitudinales de sonido, estas ondas son una familia de modos formada por modos en la perturbación, velocidad, densidad y presión. La velocidad con que estas ondas se propagan depende de las propiedades del medio.

También se muestra que las ecuaciones de MHD se obtienen combinando las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de Hidrodinámica Eulerina en la aproximación $\omega \ll \nu$. La propagación de perturbaciones magnetohidrodinámicas, se obtiene a partir de un sistema de ecuaciones que describe el comportamiento de un fluido conductor en presencia de un campo magnético dentro del régimen de MHD IDEAL, tal sistema se obtiene combinando las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de Hidrodinámica Eulerina en la aproximación $\omega \ll \nu$. En contraste con fluidos ideales las perturbaciones están dadas alrededor de una solución particular de las ecuaciones de MHD, pero en este caso llegamos a una ecuación más compleja de la cual obtenemos una ecuación de dispersión que nos permite analizar la propagación de distintos modos. Por otra parte, por considerar fluidos con conductividad eléctrica muy alta, el fluido lleva consigo a las líneas de campo magnético, por lo que en una onda de compresión no solo comprime al fluido, sino también a las líneas del campo magnético, es decir, Para estas ondas las líneas de campo magnético se hallan con-

gelas. Considerando modos $\delta\vec{v}(\vec{x}, t)$ que se propagan perpendicular y paralelamente a la dirección de propagación. y del análisis de modos con estas características se muestra que existen tres familias de modos: La primera, llamada **Ondas magnetosónicas**, estas son ondas longitudinales, que se propagan con una velocidad que depende de la solución de fondo (\vec{B}_0, ρ_0) . La dirección de propagación es perpendicular a \vec{B}_0 y la perturbación en la densidad produce que las líneas de campo magnético se expanden y comprimen.

Otra familia modos que se ha mostrado que existe son: **Ondas Alfvén** estos modos son transversales, su propagación es paralela a \vec{B}_0 y las líneas de fuerza oscilan de adelante y hacia atrás de forma lateral, sin que se compriman ya que no ninguna perturbación de densidad

Y por último se ha mostrado que las **Ondas acústicas** son longitudinales, se propagan a lo largo de campo \vec{B}_0 , líneas de fuerza se mueven con el fluido.

Estos tipos de modos a los que hemos llegado en flujos terrestres no se pueden crear pero si nos sirven demasiado en Astrofísica.

Capítulo 5

Apéndices

5.1 Apéndice A1: Derivación de la Ley de Ohm para fluidos conductores

En este apéndice justificamos y derivamos la ley de Ohm:

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{(\vec{v} \times \vec{B})}{c} \right), \quad (5.1)$$

que hemos usado en el capítulo (3).

Para deducir la ley de Ohm, para nuestro sistema pensamos de la siguiente manera. Trataremos el fluido como un sistema relativístico moviéndose en el espacio tiempo continuo de Minkowski. Empleando un sistema de coordenadas inercial global tal que:

$$\begin{aligned} g_L &= -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 \\ -\infty &< x^0 = ct < \infty \quad y \quad -\infty < x^i < \infty, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Respecto de este sistema de referencia, sea $\vec{v}(\vec{x}, t)$ representa el flujo que miden observadores inerciales en reposo respecto a (5.2). Sea A un evento con coordenadas (\vec{x}, t) que consideramos por el momento fijo. A través de una rotación espacial del sistema de coordenadas (5.2), logramos que en A : $\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}^x(\vec{x}, t)e_x$. La idea es

mover un sistema inercial respecto del cual el elemento de fluido alrededor de A esté en reposo. Para eso consideramos una matriz de Lorentz con parámetros $\beta = \left(\frac{v^x}{c}\right)$, es decir tomamos $\Lambda(v^x)$ de la forma:

$$\Lambda^\alpha{}_\mu(v^x) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{x2}}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v^x}{c} \quad (5.3)$$

La transformación de Lorentz $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ generada por Λ nos lleva a un nuevo sistema S' en el que momentáneamente el elemento de fluido alrededor del evento (\vec{x}, t) al menos por un instante el fluido esta en reposo. Sea (\vec{E}', \vec{B}') los campos respecto al sistema S' . Debido a que el fluido está en reposo respecto a S' y asumiendo también que \vec{B}' no tiene efectos despreciables a la corriente de conducción \vec{J}' , tenemos la validez de la ley de Ohm en la forma:

$$\vec{J}' = \sigma \vec{E}'. \quad (5.4)$$

La idea ahora es transformar esta ley de Ohm respecto al sistema de referencia inercial “del laboratorio” S , es decir respecto al sistema en el que el fluido tiene velocidad $\vec{v}(\vec{x}, t)$

Para hacer estas manipulaciones es conveniente definir el cuadvivector \mathbf{J} denominado cuatro-corriente a través de:

$$\mathbf{J} = J'^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \rho' c \frac{\partial}{\partial x'^0} + J'^i \frac{\partial}{\partial x'^i}, \quad (5.5)$$

donde ρ' es la densidad de carga eléctrica que un observador mide con relación a a S' , J'^i $i = 1, 2, 3$ son las componentes de la densidad de corriente y $\frac{\partial}{\partial x'^\mu}$ son las coordenadas bases del sistema S' .

Al pasar de S a otro S' las bases $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\}_A$ y $\left\{ \frac{\partial}{\partial x'^0}, \frac{\partial}{\partial x'^1}, \frac{\partial}{\partial x'^2}, \frac{\partial}{\partial x'^3} \right\}_A$ se relacionan a través de:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad (5.6)$$

donde las componentes $\Lambda^\alpha{}_\mu$ forman la matriz de transformación de Lorentz considerada en (5.3) y $(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu$ es dada por:

$$(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu(v^x) = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

De (5.6) con $\alpha, \mu = 0, 1, 2, 3$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^0} &= (\Lambda^{-1})^\alpha{}_0 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = (\Lambda^{-1})^0{}_0 \frac{\partial}{\partial x^0} + (\Lambda^{-1})^1{}_0 \frac{\partial}{\partial x^1} + (\Lambda^{-1})^2{}_0 \frac{\partial}{\partial x^2} + (\Lambda^{-1})^3{}_0 \frac{\partial}{\partial x^3} \\ &= \gamma \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma\beta \frac{\partial}{\partial x^1}, \\ \frac{\partial}{\partial x'^1} &= (\Lambda^{-1})^\alpha{}_1 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = (\Lambda^{-1})^0{}_1 \frac{\partial}{\partial x^0} + (\Lambda^{-1})^1{}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + (\Lambda^{-1})^2{}_1 \frac{\partial}{\partial x^2} + (\Lambda^{-1})^3{}_1 \frac{\partial}{\partial x^3} \\ &= \gamma\beta \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma \frac{\partial}{\partial x^1}, \\ \frac{\partial}{\partial x'^2} &= (\Lambda^{-1})^\alpha{}_2 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = (\Lambda^{-1})^2{}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x'^3} &= (\Lambda^{-1})^\alpha{}_3 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = (\Lambda^{-1})^3{}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x^3}, \end{aligned}$$

Usando estas relaciones de los vectores bases, transformamos la 4-corriente \mathbf{J} dada por (5.5) a:

$$\mathbf{J} = \rho' c \frac{\partial}{\partial x'^0} + J^i \frac{\partial}{\partial x'^i} = \rho' c \frac{\partial}{\partial x^0} + J^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + J^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + J^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad (5.8)$$

a la base del laboratorio.

Por eso eliminamos: $\{\frac{\partial}{\partial x'^0}, \frac{\partial}{\partial x'^1}, \frac{\partial}{\partial x'^2}, \frac{\partial}{\partial x'^3}\}$ por las bases $\{\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\}$. Obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \rho' c \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma\beta \frac{\partial}{\partial x^1} \right) + J^1 \left(\gamma\beta \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma \frac{\partial}{\partial x^1} \right) + J^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + J^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \\ &= \gamma[\rho' c + \beta J^1] \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma[\rho' c\beta + J^1] \frac{\partial}{\partial x^1} + J^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + J^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \end{aligned}$$

y para el caso particular que J^i satisface la ley de Ohm (5.4) tenemos:

$$\mathbf{J} = \gamma[\rho' c + \beta \sigma E'^1] \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma[\rho' c\beta + \sigma E'^1] \frac{\partial}{\partial x^1} + \sigma E'^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \sigma E'^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad (5.9)$$

Aunque el lado derecho de está relación expresa \mathbf{J} respecto al sistema S , desafortunadamente involucra las componentes de los campos medidos E' y B' relativamente al sistema S' . Recordemos que las componentes (E'^1, E'^2, E'^3) y (B'^1, B'^2, B'^3) definen las componentes $F'^{\alpha\beta}$ del tensor de Maxwell via:

$$F'^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -E'^x & -E'^y & -E'^z \\ E'^x & 0 & -B'^z & B'^y \\ E'^y & B'^z & 0 & -B'^x \\ E'^z & -B'^y & B'^x & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

mientras las componentes $F^{\alpha\beta}$ del tensor de Maxwell respecto al sistema de laboratorio, tiene la misma estructura que (5.10) pero:

$$E'^1, E'^2, E'^3 \rightarrow E^1, E^2, E^3, \quad B'^1, B'^2, B'^3 \rightarrow B^1, B^2, B^3. \quad (5.11)$$

Al pasar de un sistema de referencia inercial a otro el tensor Maxwell $F^{\alpha\beta}$ se transforma como:

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu F^{\mu\nu}, \quad (5.12)$$

donde $\Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu$ están dadas por la matriz transformación de Lorentz (5.3)

Desarrollando en suma, tomando en cuenta (5.10) tenemos:

$$\begin{aligned} E'^1 &= F'^{01} = \Lambda^0{}_\mu \Lambda^1{}_\nu F^{\mu\nu} \\ &= \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_0 F^{00} + \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_1 F^{01} + \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_2 F^{02} + \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_3 F^{03} \\ &+ \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_0 F^{10} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_1 F^{11} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_2 F^{12} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_3 F^{13} \\ &+ \Lambda^0{}_2 \Lambda^1{}_0 F^{20} + \Lambda^0{}_2 \Lambda^1{}_1 F^{21} + \Lambda^0{}_2 \Lambda^1{}_2 F^{22} + \Lambda^0{}_2 \Lambda^1{}_3 F^{23} \\ &+ \Lambda^0{}_3 \Lambda^1{}_0 F^{30} + \Lambda^0{}_3 \Lambda^1{}_1 F^{31} + \Lambda^0{}_3 \Lambda^1{}_2 F^{32} + \Lambda^0{}_3 \Lambda^1{}_3 F^{33} \\ &= \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_1 F^{01} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_0 F^{10} \\ &= (\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2) E^1 = \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\left(\frac{v^x}{c}\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) E^1 = E^1, \end{aligned}$$

$$E'^2 = F'^{02} = \Lambda^0{}_\mu \Lambda^2{}_\nu F^{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned}
&= \Lambda^0_0 \Lambda^2_0 F^{00} + \Lambda^0_0 \Lambda^2_1 F^{01} + \Lambda^0_0 \Lambda^2_2 F^{02} + \Lambda^0_0 \Lambda^2_3 F^{03} \\
&+ \Lambda^0_1 \Lambda^2_0 F^{10} + \Lambda^0_1 \Lambda^2_1 F^{11} + \Lambda^0_1 \Lambda^2_2 F^{12} + \Lambda^0_1 \Lambda^2_3 F^{13} \\
&+ \Lambda^0_2 \Lambda^2_0 F^{20} + \Lambda^0_2 \Lambda^2_1 F^{21} + \Lambda^0_2 \Lambda^2_2 F^{22} + \Lambda^0_2 \Lambda^2_3 F^{23} \\
&+ \Lambda^0_3 \Lambda^2_0 F^{30} + \Lambda^0_3 \Lambda^2_1 F^{31} + \Lambda^0_3 \Lambda^2_2 F^{32} + \Lambda^0_3 \Lambda^2_3 F^{33} \\
&= \Lambda^0_0 \Lambda^2_2 F^{02} + \Lambda^0_1 \Lambda^2_2 F^{12} \\
&= \gamma(E^2 - \beta B^3),
\end{aligned}$$

Con un procedimiento análogo para las demás componentes obtenemos:

$$\begin{aligned}
E'^3 &= F'^{03} = \Lambda^0_0 \Lambda^3_3 F^{03} + \Lambda^0_1 \Lambda^3_3 F^{13} = \gamma(E^3 + \beta B^2), \\
B'^1 &= F'^{32} = \Lambda^3_3 \Lambda^2_2 F^{32} = B^1, \\
B'^2 &= F'^{31} = \Lambda^3_3 \Lambda^1_0 F^{30} + \Lambda^3_3 \Lambda^1_1 F^{31} = \gamma(B^2 + \beta E^3), \\
B'^3 &= F'^{21} = \Lambda^2_2 \Lambda^1_0 F^{20} + \Lambda^2_2 \Lambda^1_1 F^{21} = \gamma(B^3 - \beta E^2),
\end{aligned}$$

Regresando a (5.9) eliminamos las componentes primadas por las no primadas, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \gamma[\rho' c + \beta \sigma E^1] \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma[\rho' c \beta \\
&+ \sigma E^1] \frac{\partial}{\partial x^1} + \sigma(\gamma(E^2 - \beta B^3)) \frac{\partial}{\partial x^2} + \sigma\gamma(E^3 + \beta B^2) \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad (5.13)
\end{aligned}$$

comparando con:

$$\mathbf{J} = \rho c \frac{\partial}{\partial x^0} + J^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

vemos que la densidad de carga ρ y la densidad de corriente \vec{J} relativamente con S son dados por:

$$\begin{aligned}
\rho c &= \gamma[\rho' c + \beta \sigma E^1], \\
\vec{J} &= \gamma[\rho' c \beta + \sigma E^1] \frac{\partial}{\partial x^1} + \sigma(\gamma(E^2 - \beta B^3)) \frac{\partial}{\partial x^2} + \sigma\gamma(E^3 + \beta B^2) \frac{\partial}{\partial x^3}.
\end{aligned}$$

Reacomodando la componentess de \vec{J} de la siguiente manera:

$$\vec{J} = \gamma\sigma E^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \sigma\gamma E^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \sigma\gamma E^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + \sigma\gamma\beta B^2 \frac{\partial}{\partial x^3} - \sigma\beta B^3 \frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma\rho' c \beta \frac{\partial}{\partial x^1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \gamma\sigma E^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \sigma\gamma E^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \sigma\gamma E^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \\
 &+ \sigma\left(-\frac{v^x}{c}\right)B^3 \frac{\partial}{\partial x^2} + \sigma\gamma\frac{v^x}{c}B^2 \frac{\partial}{\partial x^3} + \gamma\left(\rho' c \frac{v^x}{c}\right)\frac{\partial}{\partial x^1}
 \end{aligned}$$

Notando que:

$$\frac{v^x}{c} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} e_x & e_y & e_z \\ v^x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = -e_y(v^x B_z) + e_z(v^x B_y) = (v^x B_3) \frac{\partial}{\partial x^2} + (v^x B_3) \frac{\partial}{\partial x^3},$$

escribimos (5.13) en la forma:

$$\mathbf{J} = \rho c \frac{\partial}{\partial x^0} + \sigma\gamma E^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sigma\gamma \frac{(v \times B)^i}{c} \frac{\partial}{\partial x^i} + \gamma\left(\rho' c \frac{v^x}{c}\right)\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad (5.14)$$

Eliminamos la densidad de carga ρ' usando:

$$\rho c = \gamma\left[\rho' c + \frac{v^x}{c}\sigma E^1\right] \Rightarrow \rho' c = \frac{\rho c}{\gamma} - \frac{v^x}{c}\sigma E^1$$

entonces (5.14) toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J} &= \rho c \frac{\partial}{\partial x^0} + \sigma\gamma E^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sigma\gamma \frac{(v \times B)^i}{c} \frac{\partial}{\partial x^i} + \gamma \left[\left(\frac{\rho c}{\gamma} - \frac{v^x}{c}\sigma E^1 \right) \frac{v^x}{c} \right] \frac{\partial}{\partial x^1} \\
 &= \rho c \frac{\partial}{\partial x^0} + \sigma\gamma E^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sigma\gamma \frac{(v \times B)^i}{c} \frac{\partial}{\partial x^i} + \rho c \frac{v^x}{c} \frac{\partial}{\partial x^1} - \gamma \left(\frac{v^x}{c}\sigma E^1 \right) \frac{v^x}{c} \frac{\partial}{\partial x^1} \\
 &= \rho c \frac{\partial}{\partial x^0} + \sigma\gamma E^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sigma\gamma \frac{(v \times B)^i}{c} \frac{\partial}{\partial x^i} + \rho v^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \gamma\sigma \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{E}}{c} \right) \frac{v^i}{c} \frac{\partial}{\partial x^i},
 \end{aligned}$$

esta expresión implica que la densidad de corriente espacial \vec{J} tiene la forma:

$$\vec{J} = \sigma\gamma \left[\vec{E} + \frac{(\vec{v} \times \vec{B})}{c} \right] + \rho\vec{v} - \gamma\sigma \frac{\vec{v} \cdot \vec{E}}{c} \frac{\vec{v}}{c}$$

y la densidad de carga ρ del fluido

$$\rho = \gamma \left[\rho' + \frac{\vec{v} \cdot \vec{E}}{c^2} \right].$$

Este análisis es general y es asumiendo flujos relativistas. Para el régimen de MHD no relativista que empleamos en esta tesis asumimos que $\frac{v^x}{c^2} \ll 1$, entonces tenemos:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^x^2}{c^2}}} \approx 1, \quad (5.15)$$

por lo cual

$$\sigma\gamma \left[\vec{E} + \frac{(v \times B)}{c} \right] \approx \sigma \left[\vec{E} + \frac{(v \times B)}{c} \right].$$

Si además el fluido es neutral es decir $\rho' = 0$ al respecto de S' entonces:

$$\rho = \gamma \left[\frac{\vec{v} \cdot \vec{E}}{c^2} \right] = 0 \left(\frac{v}{c} \right)^2,$$

tomando en cuenta lo anterior, la ley de Ohm en el régimen de MHD no relativista toma la forma:

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{(\vec{v} \times \vec{B})}{c} \right), \quad (5.16)$$

que es la forma extendida de la ley de Ohm en los conductores en movimiento, por flujos no relativísticos (vease también discusión en [2]).

Bibliografía

- [1] L.D. Landau and Lifshitz, Fluid Mechanics, Academia de Ciencias U.R.S.S.
- [2] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, Second edition John Wiley and Sons.
- [3] R. Mendoza y T. Zannias, Notas de servicio social: Electrodinámica en medios arbitrarios