



**UNIVERSIDAD MICHOCANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

Instituto de Física y Matemáticas

**Quarks, Piones y Ecuaciones de
Schwinger-Dyson**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA
KHÉPANI RAYA MONTAÑO

ASESOR
DR. ADNAN BASHIR

MORELIA, MICH., AGOSTO 2013.



“La tesis del año”

- Vox Populi

Resumen

Quarks, Piones y Ecuaciones de Schwinger-Dyson

por Khépani RAYA MONTAÑO

La Cromodinámica Cuántica (QCD) se encarga del estudio de las interacciones gobernadas por la fuerza fuerte, una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza. Los ingredientes más fundamentales de dicha fuerza son los quarks, que interactúan entre sí intercambiando sus respectivos mediadores de fuerza, o gluones. Los quarks, sin embargo, no se encuentran aislados en la naturaleza. Sólo podemos encontrarlos formando partículas hechas de ellos, llamadas hadrones. Así, la QCD se encarga del estudio de los hadrones y sus constituyentes, los quarks.

Para la década de los sesentas, previo al nacimiento de la QCD, las interacciones electromagnéticas habían sido descritas exitosamente mediante una teoría de norma llamada Electrodinámica Cuántica (QED). Sin embargo, la descripción matemática de las interacciones fuertes permanecía poco clara. En ésta época se propusieron diferentes modelos que reprodujeran las propiedades estáticas y el espectro conocidos de los hadrones. Un modelo muy exitoso fue el Modelo de Quarks [1–3]. En este modelo los hadrones estaban hechos por quarks, entes puramente matemáticas, y se clasificaban de acuerdo al isospín. Se derivaron relaciones entre las masas de los hadrones y sus constituyentes [4, 5]. Su éxito radica en que se clasificaron todos los hadrones conocidos, e incluso se predijo la existencia del barión Ω^- (así como su masa), lo cual le valió el premio nobel a GellMann en 1969.

La estadística de Fermi-Dirac no se respetaba. Nambu-Han lo arreglaron al trabajar con nueve quarks [6] (en lugar de tres). A finales de la década, experimentos de colisión entre electrones y protones y neutrones (núcleos atómicos) demostraron que éstos no son fundamentales, y se concluyó que los quarks entonces eran entidades físicas, no sólomente matemáticas. Gracias a ésto, se empezó a interpretar el grupo de color, propuesto por GellMann-Fritzsch, como un grupo de norma. En esta teoría, la interacción de quarks se genera por un octeto de bosones de norma no masivos, gluones [7], y se le llamó Cromodinámica Cuántica o QCD. Los gluones además interactúan entre sí, hecho que lleva a la reducción del acoplamiento cuando se incrementa la energía, es decir, la teoría es asintóticamente libre. Ésto se descubrió por Gross-Wilczek [8, 9] y Politzer [10] en 1973. Así, a altas energías los quarks y gluones se comportan casi como partículas libres.

Los trabajos de los sesentas permitieron describir las propiedades estáticas de los hadrones, que hoy se asocia con QCD no perturbativo (o a bajas energías); mientras que los trabajos de los setenta nos dieron una descripción de los constituyentes fundamentales, que corresponde a QCD perturbativo (o altas energías). Hoy en día, los experimentos modernos en Jefferson Lab., Babar y Belle II estudian la transición entre QCD no perturbativo y QCD perturbativo a través de factores de forma. Por ello, en esta tesis estudiaremos a los quarks y a las partículas más ligeras formadas por ellos, los piones, y dejaremos todos los ingredientes listos para el cálculo de factores de forma.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a quienes, de alguna forma u otra, me brindaron la posibilidad de iniciar y completar este trabajo. Un agradecimiento especial a mi asesor, Adnan, cuya paciencia y contribución con sugerencias y palabras de aliento, me ayudó a llevar a cabo de manera entusiasmante y grata este proyecto.

Agradezco a mis padres por sus cuidados y apoyo constantes, así como su paciencia y su guía. De igual manera a mis hermanos, que han jugado también el papel de padres. Agradezco a mi hermano Alfredo, quién muchas veces la hizo, además, de asesor. A todos mis amigos y hermanos no biológicos, que por fortuna son muchos, les brindo un agradecimiento especial.

Quiero agradecer también al personal administrativo, compañeros, y en particular al Dr. Armando Sepúlveda, por haberme orientado durante el trámite de titulación. Por último, quiero expresar mis más hipócritas agradecimientos a quienes se encargaron de mantenerme trabajando sin beca durante el último año.

Índice general

Resumen	II
Agradecimientos	IV
1. QCD y ESD	1
1.1. Introducción	1
1.2. Lagrangiano de QCD	2
1.3. Ecuación de Schwinger-Dyson	6
1.3.1. Representaciones	7
1.3.2. Renormalización	8
2. Truncando la ESD	10
2.1. Modelo de Maris y Tandy	10
2.1.1. Acoplamiento efectivo	14
2.2. Resultados Numéricos	17
2.2.1. Límite Quiral	17
2.2.2. Confinamiento	21
2.2.3. Fuera del Límite Quiral	22
2.3. Refinamientos	28
2.3.1. Comportamiento asintótico de la Función de Masa	29
2.3.2. Altura y Condensado	36
2.3.3. Conclusiones	39
2.4. Interacción de Contacto	39
2.4.1. Resultados	41
3. Ecuación de Bethe-Salpeter	45
3.1. De Quarks a Hadrones	45
3.2. Ecuación de Bethe-Salpeter	46
3.2.1. Derivación	48
3.3. EBS para Mesones Pseudoescalares	49
3.3.1. EBS para el Pión	53
3.4. Solución a la EBS para el Pión	54
3.4.1. Parametrización 3ccp	55
3.5. Resultados Numéricos	57
3.5.1. Límite Quiral	57

3.5.1.1. Normalización Canónica y f_π	57
3.5.1.2. Identidad Axial de Ward-Takahashi	59
3.5.2. Fuera del límite quirral	60
4. Resultados y Conclusiones	61
4.1. Resultados	61
4.1.1. Ecuación de Schwinger-Dyson para el propagador del Quark	61
4.1.2. Ecuación de Bethe-Salpeter para el Pión	62
4.2. Conclusiones	63
4.3. A futuro	65
A. Renormalización de la EBS	66
B. Matrices gamma y trazas	68
B.1. Matrices Gamma	68
B.2. Trazas	69
C. Método de potencias	71
Bibliografía	73

A mis seres queridos...

Capítulo 1

QCD y ESD

1.1. Introducción

Las interacciones fuertes pueden ser descritas mediante la Cromodinámica Cuántica (QCD). Ésta es una Teoría de Norma, no Abelian, que ha sido muy exitosa en las últimas décadas. Su éxito radica principalmente en el límite de libertad asintótica, donde se puede hacer un tratamiento perturbativo con relativa facilidad, pues es en este límite donde las predicciones de la teoría concuerdan ampliamente con los resultados experimentales. Sin embargo, resulta importante también tener en cuenta el régimen no perturbativo de QCD, pues es en este régimen donde podemos entender las interacciones de los hadrones y sus constituyentes. Desafortunadamente, no existe una manera directa (y relativamente fácil) de abordar este problema, aunque sí existen prometedores intentos como las simulaciones de Lattice y las Ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD).

Nuestra manera de abordar el estudio no perturbativo de QCD, a nivel de quarks, es mediante las Ecuaciones de Schwinger-Dyson. Éstas corresponden a la ecuación de movimiento de una Teoría Cuántica de Campos. Son además, un conjunto infinito de integrales acopladas de las funciones de Green de la teoría; la función de dos puntos está relacionada con la de tres puntos, la de tres puntos con la de cuatro puntos y así sucesivamente. Para extraer la física de esta torre de ecuaciones, se debe encontrar una manera de manejar esta infinitud; es decir, debemos encontrar una forma de truncar la torre infinita, sin perder información esencial sobre la física que se desea describir. Nuestro interés en particular es la Generación de Masas, fenómeno que surge cuando se rompe la Simetría Quiral, y que se estudia de una manera muy natural mediante las Ecuaciones de Schwinger-Dyson.

Debido a que en la naturaleza no es posible encontrar los quarks libres, pues estos siempre se encuentran formando partículas compuestas de ellos (hadrones), es de nuestro interés también poder describir la física a este nivel; para ésto, hemos elegido a los piones como nuestro objeto de estudio. Para describir piones, y en general cualquier mesón, recurrimos a la Ecuación de Bethe-Salpeter, que es la ecuación que describe estados ligados de dos partículas, o bien, la ESD para la función de cuatro puntos. Los piones son de gran interés en la física hadrónica debido a su naturaleza como Bosón de Goldstone. Cuando se rompe la simetría quiral, es necesaria la existencia de los piones; y cuando esta simetría se rompe además de manera explícita mediante la masa de los quarks, automáticamente tenemos piones masivos, pero ligeros en comparación con los demás hadrones. De ésta forma, podemos relacionar la existencia de los piones y la Generación de Masas mediante un único fenómeno, que es la Ruptura de la Simetría Quiral.

Comenzaremos hablando sobre el Lagrangiano de QCD, sus términos y el significado físico de ellos; se describirá además la Ecuación de Schwinger-Dyson para el propagador del quark. En el siguiente capítulo, se estudiará dicha ecuación con el modelo propuesto por Maris y Roberts [11] y el trabajo de Maris y Tandy [12] (MT), se presentan algunos resultados y refinamientos para dicho modelo. Finalmente, estudiaremos la naturaleza del pión mediante su Ecuación de Bethe-Salpeter correspondiente.

1.2. Lagrangiano de QCD

La información sobre la dinámica de un sistema se encuentra codificada en la densidad lagrangiana, en el caso de QCD, ésta se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 - (\partial^\mu \bar{\eta}_a)(\partial_\mu \eta_a) - gf_{abc}(\partial_\mu \bar{\eta}_a)A_b^\mu \eta_c \\ & + \sum_{j=1}^{N_f} \bar{\psi}_l^j (i\gamma^\mu D_\mu - m_j)\psi_l^j . \end{aligned}$$

Estudiemos cada uno de sus términos:

1. El primer término contiene la dinámica de los campos de norma (gluones, representados por A_μ^a), es decir, su energía cinética y sus auto interacciones. Notamos que $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c$. Aquí, g es el acoplamiento, y $a = 1, \dots, 8$ el índice de color.
2. El segundo término, es el término que fija la norma, siendo ξ el parámetro covariante de norma: $\xi = 0$ corresponde a la Norma de Landau, $\xi = 1$ a la Norma de Feynman.

3. Los campos η_a , corresponden al campo fantasma de Faddeev-Popov. Sus términos cinéticos son de la forma de un Lagrangiano para campos escalares cargados, sin masa, por lo que parecería ser un campo bosónico, sin embargo es fermiónico debido a su naturaleza como número de Grassman.
4. Los campos ψ_l^j son los campos fermiónicos (quarks). De esta manera, el último término corresponde al Lagrangiano de Dirac, donde el término de interacción $D_\mu \psi_l^j$ está dado como $D_\mu \psi_l^j = \partial_\mu \psi_l^j - ig R_{lk}^a \psi_k^j A_\mu^a$. N_f corresponde al número de sabores y l es número de colores, $l=1,2,3$.
5. Aquí f_{abc} son las estructuras constantes completamente antisimétricas del grupo de norma de QCD. Tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 [R^a, R^b] &= if_{abc} R^c, \\
 R^a R^a &= C_F I \\
 \text{Tr}[R^a R^b] &= \frac{1}{2} \delta_{ab}, \\
 f_{acd} f_{bcd} &= C_A \delta_{ab}.
 \end{aligned}$$

En la representación fundamental de $SU_c(N)$:

$$C_A = N, \quad C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}.$$

Para QCD $N = 3$, por lo tanto $C_A = 3$ y $C_F = 4/3$.

Sabemos que los cálculos de observables físicas en QCD más allá del nivel árbol encuentran divergencias ultravioletas. Sin embargo, QCD es una teoría renormalizable, por lo que podemos añadir contra términos con la misma forma que el Lagrangiano original, que nos remuevan estas divergencias, de tal manera que sigamos teniendo un Lagrangiano que sea consistente con los resultados experimentales. Al Lagrangiano original, más el Lagrangiano de contra términos, le llamaremos el Lagrangiano Desnudo.

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \mathcal{L}_{CT} = \mathcal{L}_B.$$

A este nuevo Lagrangiano lo podemos factorizar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_B &= -\frac{1}{4}\mathcal{Z}_3(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) \\
 &- \frac{1}{2}\mathcal{Z}_1 g f_{abc}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)A_b^\mu A_c^\nu \\
 &- \frac{1}{4}\mathcal{Z}_5 g^2 f_{abc}f_{ade}A_\mu^b A_\nu^c A_d^\mu A_e^\nu \\
 &- \frac{1}{2\xi}\mathcal{Z}_6(\partial^\mu A_\mu^a)^2 - \tilde{\mathcal{Z}}_3(\partial^\mu \bar{\eta}_a)(\partial_\mu \eta_a) - \tilde{\mathcal{Z}}_1 g f_{abc}(\partial_\mu \bar{\eta}_a)A_b^\mu \eta_c \\
 &+ \sum_{j=1}^{N_f} (i\mathcal{Z}_{2Fj}\bar{\psi}_l^j \gamma^\mu \partial_\mu \psi_l^j + \mathcal{Z}_{1Fj} g \bar{\psi}_l^j R_{lk}^a \gamma^\mu \psi_k^j A_\mu^a - \mathcal{Z}_{4j} m_j \bar{\psi}_l^j \psi_l^j)
 \end{aligned}$$

Los coeficientes \mathcal{Z}_i corresponden a las constantes de renormalización, que es donde se codifican los infinitos que teníamos anteriormente. Cada una de estas constantes de renormalización es una función del regulador ultravioleta y del punto de renormalización μ , es decir $\mathcal{Z}_i = \mathcal{Z}_i(\mu, \Lambda)$. Si queremos que el nuevo Lagrangiano luzca igual al Lagrangiano original, tenemos que absorber las constantes de renormalización en la redefinición de los campos y parámetros involucrados. Ésto lo logramos, redefiniendo los campos y parámetros del Lagrangiano de la siguiente manera:

- Para los **campos**: $A_{B\mu}^a = \mathcal{Z}_3^{1/2} A_\mu^a$, $\eta_B^a = \tilde{\mathcal{Z}}_3^{1/2} \eta^a$, $\psi_{Bj} = \mathcal{Z}_{2Fj}^{1/2} \psi_j$.
- Para los **parámetros**: $g_B = \mathcal{Z}_g g$, $m_{Bj} = \mathcal{Z}_{m_j} m_j$, $\xi_B = \mathcal{Z}_\xi^{-1} \xi$

El subíndice B se refiere a las cantidades desnudas. Por razones obvias, las constantes de renormalización, reciben los siguientes nombres:

- \mathcal{Z}_3 : Constante de renormalización del campo del gluón.
- $\tilde{\mathcal{Z}}_3$: Constante de renormalización del campo del fantasma.
- \mathcal{Z}_{2Fj} : Constante de renormalización del campo del quark.
- \mathcal{Z}_g : Constante de renormalización de la constante de acoplamiento.
- \mathcal{Z}_{m_j} : Constante de renormalización de la masa del quark.
- \mathcal{Z}_ξ : Constante de renormalización del parámetro de norma.

Los campos se redefinen de tal manera que se asegura que los coeficientes de los términos cinéticos correspondientes en el Lagrangiano Desnudo sean iguales a la unidad. Aparecen también otras constantes de renormalización, y son:

- \mathcal{Z}_1 : Constante de renormalización del vértice de tres gluones.

- \mathcal{Z}_5 : Constante de renormalización del vértice de cuatro gluones.
- \mathcal{Z}_6 : Constante de renormalización del término que fija la norma.
- $\tilde{\mathcal{Z}}_1$: Constante de renormalización del término de interacción gluón-fantasma.
- \mathcal{Z}_{1Fj} : Constante de renormalización del vértice quark-gluón.
- \mathcal{Z}_{4j} : Constante de renormalización del término de masa del quark.

Estas últimas constantes no son independientes, son determinadas por el requerimiento de covarianza de norma local del Lagrangiano de QCD. Tenemos, por ejemplo, para el término del vértice de tres gluones:

$$-\frac{1}{2} \frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_g \mathcal{Z}_3^{3/2}} g_B f_{abc} (\partial_\mu A_{B\nu}^a - \partial_\nu A_{B\mu}^a) A_B^{\mu b} A_B^{\nu c} = -\frac{1}{2} g_B f_{abc} (\partial_\mu A_{B\nu}^a - \partial_\nu A_{B\mu}^a) A_B^{\mu b} A_B^{\nu c}, \quad (1.1)$$

que implica que $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_g \mathcal{Z}_3^{3/2}$. Para el vértice de cuatro gluones:

$$\frac{1}{4} \frac{\mathcal{Z}_5}{\mathcal{Z}_g^2 \mathcal{Z}_3^2} g_B^2 f_{abc} f_{ade} A_{B\mu}^b A_{B\nu}^c A_B^{\mu d} A_B^{\nu e} = \frac{1}{4} g_B^2 f_{abc} f_{ade} A_{B\mu}^b A_{B\nu}^c A_B^{\mu d} A_B^{\nu e}, \quad (1.2)$$

así tenemos $\mathcal{Z}_5 = \mathcal{Z}_g^2 \mathcal{Z}_3^2$. Para el término de interacción del quark-gluón, tenemos:

$$\frac{\mathcal{Z}_{1Fj}}{\mathcal{Z}_g \mathcal{Z}_{2Fj} \mathcal{Z}_3^{1/2}} g_B \bar{\psi}_{Bl}^j R_{lk}^a \gamma^\mu \psi_{Bk}^j A_{B\mu}^a = g_B \bar{\psi}_{Bl}^j R_{lk}^a \gamma^\mu \psi_{Bk}^j A_{B\mu}^a, \quad (1.3)$$

que implica $\mathcal{Z}_{1Fj} = \mathcal{Z}_g \mathcal{Z}_{2Fj} \mathcal{Z}_3^{1/2}$. En el caso del término gluón-fantasma, se tiene:

$$\frac{\tilde{\mathcal{Z}}_1}{\mathcal{Z}_g \tilde{\mathcal{Z}}_3^{1/2} \mathcal{Z}_3} g_B^2 f_{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}_B^a) A_B^{\mu b} \eta^{Bc} = g_B^2 f_{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}_B^a) A_B^{\mu b} \eta^{Bc}, \quad (1.4)$$

y así tenemos $\tilde{\mathcal{Z}}_1 = \mathcal{Z}_g \tilde{\mathcal{Z}}_3 \mathcal{Z}_3^{1/2}$. El término de masa para quarks nos da:

$$\frac{\mathcal{Z}_{4j}}{\mathcal{Z}_{mj} \mathcal{Z}_{2Fj}} m_{Bj} \bar{\psi}_{Bl}^j \psi_{Bl}^j = m_{Bj} \bar{\psi}_{Bl}^j \psi_{Bl}^j, \quad (1.5)$$

que implica $\mathcal{Z}_{4j} = \mathcal{Z}_{mj} \mathcal{Z}_{2Fj}$. Para el término que fija la norma:

$$-\frac{1}{2\xi} \frac{\mathcal{Z}_6}{\mathcal{Z}_\xi \mathcal{Z}_3} (\partial^\mu A_{\mu B}^a)^2 = -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_{\mu B}^a)^2, \quad (1.6)$$

por lo que $\mathcal{Z}_6 = \mathcal{Z}_\xi \mathcal{Z}_3$. Resumimos las relaciones entre las constantes de renormalización:

$$\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_g \mathcal{Z}_3^{3/2}, \quad (1.7)$$

$$\mathcal{Z}_5 = \mathcal{Z}_g^2 \mathcal{Z}_3^2, \quad (1.8)$$

$$\tilde{\mathcal{Z}}_1 = \mathcal{Z}_g \tilde{\mathcal{Z}}_3 \mathcal{Z}_3^{1/2}, \quad (1.9)$$

$$\mathcal{Z}_6 = \mathcal{Z}_\xi \mathcal{Z}_3, \quad (1.10)$$

$$\mathcal{Z}_{1Fj} = \mathcal{Z}_g \mathcal{Z}_{2Fj} \mathcal{Z}_3^{1/2}, \quad (1.11)$$

$$\mathcal{Z}_{4j} = \mathcal{Z}_{m_j} \mathcal{Z}_{2Fj}. \quad (1.12)$$

Manipulando algebraicamente estas relaciones, al dividir pares de ecuaciones entre sí, obtenemos:

$$\frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_3} = \frac{\tilde{\mathcal{Z}}_1}{\tilde{\mathcal{Z}}_3} = \frac{\mathcal{Z}_5}{\mathcal{Z}_1} = \frac{\mathcal{Z}_{1Fj}}{\mathcal{Z}_{2Fj}}. \quad (1.13)$$

A este conjunto de identidades se les conoce como Identidades de Slavov-Taylor. Garantizan la universalidad de la constante de acoplamiento g .

Habiendo escrito el Lagrangiano de QCD de esta manera, estudiaremos la ESD para el propagador del quark en la siguiente sección en términos de las cantidades renormalizadas y, por lo tanto, finitas.

1.3. Ecuación de Schwinger-Dyson

La ESD para el propagador del quark, en su forma desnuda (en el espacio Euclidiano), se escribe:

$$S_B^{-1}(p, \Lambda) = S_{0B}^{-1}(p) + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g_B^2(p - q, \Lambda) D_{\mu\nu}^B(p - q, \Lambda) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S_B(q; \Lambda) \Gamma_{B\nu}^a(q, p; \Lambda), \quad (1.14)$$

donde Λ es el regulador de corte y los demás símbolos tienen su significado usual. Escribamos las cantidades desnudas, en términos de las renormalizadas:

$$\begin{aligned} \frac{S^{-1}(p, \mu)}{\mathcal{Z}_{2F}} = S_{0B}^{-1}(p) + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} [\mathcal{Z}_g g(p - q, \mu)]^2 [\mathcal{Z}_3 D_{\mu\nu}(p - q, \mu)] \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \\ \times [\mathcal{Z}_{2F} S(q, \mu)] \left[\frac{\Gamma_\nu(p, q, \mu)}{\mathcal{Z}_{1F}} \right]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Las constantes de renormalización \mathcal{Z} dependen del corte Λ y del punto de renormalización μ ; por simplicidad en la notación, obviaremos esa dependencia. El propagador $S_{0B}^{-1}(p)$, está dado por:

$$S_{0B}^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + m_B = i\gamma \cdot p + \mathcal{Z}_m m(\mu), \quad (1.16)$$

donde $\mathcal{Z}_m(\mu, \Lambda)$ $m(\mu) = m_B(\Lambda)$. Multiplicamos por \mathcal{Z}_{2F} , y reagrupamos las constantes de renormalización:

$$S^{-1}(p, \mu) = \mathcal{Z}_{2F}[i\gamma \cdot p + \mathcal{Z}_m m(\mu)] + \mathcal{Z}_g^2 \mathcal{Z}_{2F}^2 \mathcal{Z}_3 \mathcal{Z}_{1F}^{-1} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g^2(p-q, \mu) \quad (1.17)$$

$$\times D_{\mu\nu}(p-q, \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q, \mu) \Gamma_\nu(p, q, \mu) .$$

Ahora, utilizando el hecho de que $\mathcal{Z}_{1F} = \mathcal{Z}_g \mathcal{Z}_{2F} \mathcal{Z}_3^{1/2}$ y $\mathcal{Z}_{2F} \mathcal{Z}_m = \mathcal{Z}_4$, tenemos

$$S^{-1}(p, \mu) = \mathcal{Z}_{2F}(i\gamma \cdot p) + \mathcal{Z}_4 m(\mu) + \mathcal{Z}_{1F} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-q, \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q, \mu) \Gamma(p, q, \mu) . \quad (1.18)$$

La ecuación (1.18) corresponde a la ESD, renormalizada, para el propagador del quark [11] y [12]. En el límite quiral:

$$S^{-1}(p, \mu) = \mathcal{Z}_{2F} S_0^{-1}(p) + \mathcal{Z}_{1F} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g^2(p-q) D_{\mu\nu}(p-q, \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q, \mu) \Gamma(p, q, \mu) . \quad (1.19)$$

La constante \mathcal{Z}_4 ha desaparecido explícitamente de la ecuación y en principio sólo tenemos que calcular \mathcal{Z}_{2F} , sin embargo, \mathcal{Z}_4 cobra importancia para el cálculo del condensado. En secciones posteriores se explicará como calcular \mathcal{Z}_4 , así como \mathcal{Z}_{2F} .

Si utilizamos las relaciones de Slavlov-Taylor, podemos escribir la ecuación de Gap como:

$$S^{-1}(p, \mu) = \mathcal{Z}_{2F} S_0^{-1}(p) + \frac{\tilde{\mathcal{Z}}_{1F} \mathcal{Z}_{2F}}{\tilde{\mathcal{Z}}_3} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-q, \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q, \mu) \Gamma(p, q, \mu) , \quad (1.20)$$

que es la ecuación que aparece en el trabajo de Fischer et al. [13].

1.3.1. Representaciones

La ecuación (1.19) corresponde, diagramáticamente a la figura 1.1, y engloba todos las posibles autointeracciones del quark. De esta manera, se relaciona la función de un punto con la de dos puntos, la de dos puntos con la de tres puntos, y así sucesivamente; por lo que, tenemos una torre infinita de relaciones entre las Funciones de Green correspondientes.

Para poder resolver la ESD y extraer la información física, se debe encontrar entonces, una manera sistemática y consistente de truncar la torre infinita de ecuaciones. Ésto se discutirá a detalle en el capítulo siguiente.

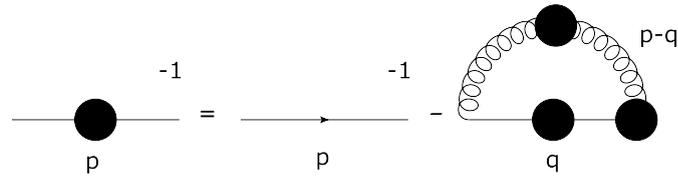


FIGURA 1.1: Ecuación de Schwinger-Dyson para el propagador del quark.

En muchas ocasiones, resulta conveniente escribir el propagador del quark como:

$$S^{-1}(p, \mu) = i \gamma \cdot p A(p^2, \mu^2) + B(p^2, \mu^2) = \frac{i \gamma \cdot p + M(p^2, \mu^2)}{Z(p^2, \mu^2)}. \quad (1.21)$$

Donde la función de masa $M(p^2, \mu^2)$ y la Renormalización de la Función de Onda $Z(p^2, \mu^2)$ se relacionan con $A(p^2, \mu^2)$ y $B(p^2, \mu^2)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Z(p^2, \mu^2) &= \frac{1}{A(p^2, \mu^2)}, \\ M(p^2, \mu^2) &= \frac{B(p^2, \mu^2)}{A(p^2, \mu^2)}. \end{aligned}$$

Otra manera que se observa frecuentemente en la literatura es:

$$S(p, \mu) = -i \gamma \cdot p \sigma_v(p^2, \mu^2) + \sigma_s(p^2, \mu^2), \quad (1.22)$$

donde $\sigma_v(p^2, \mu^2)$ y $\sigma_s(p^2, \mu^2)$ son la parte vectorial y escalar del propagador, respectivamente, y se escriben como:

$$\begin{aligned} \sigma_v(p^2, \mu^2) &= \frac{Z(p^2, \mu^2)}{p^2 + M^2(p^2, \mu^2)} = \frac{A(p^2, \mu^2)}{p^2 A^2(p^2, \mu^2) + B^2(p^2, \mu^2)}, \\ \sigma_s(p^2, \mu^2) &= \frac{Z(p^2, \mu^2) M(p^2, \mu^2)}{p^2 + M^2(p^2, \mu^2)} = \frac{B(p^2, \mu^2)}{p^2 A^2(p^2, \mu^2) + B^2(p^2, \mu^2)}. \end{aligned}$$

Por lo pronto trabajaremos con A y B y sus relaciones con M y Z . En las siguientes partes, veremos a más detalle la parte de renormalización.

1.3.2. Renormalización

Para remover las divergencias de las observables físicas de manera consistente, añadimos un Lagrangiano de contratérminos y de esta manera terminamos con un Lagrangiano desnudo. Puesto que QCD es una teoría renormalizable es posible realizar esto, y para garantizar concordancia con los resultados experimentales, la física no debe depender de este proceso.

Intuitivamente, uno espera que para un valor suficientemente largo de μ , el propagador del quark completo tenga una forma de propagador libre, porque esperamos poder reproducir lo que sabemos de la teoría de perturbaciones. Lo que nos lleva a la siguiente condición de renormalización:

$$S^{-1}(p^2)|_{p^2=\mu^2} = i \gamma \cdot p + m(\mu), \quad (1.23)$$

donde $m(\mu) = M(\mu^2)$. La condición anterior implica que:

$$\begin{aligned} A(\mu^2, \mu^2) &= 1 \\ B(\mu^2, \mu^2) &= m(\mu). \end{aligned}$$

La idea general, es entonces, poder cumplir:

$$S^{-1}(p^2) = \frac{i \gamma \cdot p + M(p^2, \mu^2)}{Z(p^2, \mu^2)} = \frac{i \gamma \cdot p + M(p^2)}{Z(p^2, \mu^2)}, \quad (1.24)$$

pues la renormalizabilidad multiplicativa del propagador del quark requiere que la función de masa sea independiente del punto de renormalización. Ésta invarianza, así como otros resultados se discutirán en el capítulo siguiente.

Hasta ahora, tenemos una torre infinita de ecuaciones a resolver con una condición de renormalización (1.23). Existen diversas maneras de abordar el truncamiento de la torre infinita de ecuaciones, se pueden proponer formas específicas para el propagador del gluón o el vértice quark-gluón, por ejemplo. En el siguiente capítulo, truncaremos esta torre infinita usando el Modelo de Maris y Tandy [12], y veremos además a qué nos lleva la condición de renormalización.

Capítulo 2

Truncando la ESD

2.1. Modelo de Maris y Tandy

Como hemos mencionado anteriormente, para extraer información sobre la torre infinita de ESD, tenemos que buscar una manera de truncarlas. Ésto es, proponer una forma conveniente para alguna de las partes, en nuestro caso: vértice quark-gluón o propagador del gluón. La forma que elijamos, tiene que ser tal que lo que deseamos resolver se vea afectado lo menos posible por el truncamiento y así no perdamos información física que pudiera ser relevante.

Un punto de partida que nos facilita ampliamente el trabajo, es proponer que en el vértice quark-gluón no existan interacciones. Ésto es, tomar en lugar del vértice completo, el vértice desnudo:

$$\Gamma_\nu(q, p) \rightarrow \gamma_\nu .$$

Por otra parte, podríamos considerar el propagador del gluón como el propagador libre:

$$D_{\mu\nu}(q) \rightarrow D_{\mu\nu}^0(q) = -\frac{1}{q^2} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) .$$

A estas dos aproximaciones juntas, se le conoce como la Aproximación Arcoiris. Este truncamiento funciona bien en la Norma de Landau ($\xi = 0$), por lo que será la norma que utilizaremos, aunque seguimos comprometiendo hasta cierto punto los resultados que obtenemos, por lo que se debe buscar una manera de arreglar esta situación.

Basándonos en el trabajo de Maris y Roberts [11], y de Maris y Tandy [12] (MT), se propone lo siguiente:

1. Se toma el vértice quark-gluón como el vértice desnudo.

$$\Gamma_\nu^a(q, p) \rightarrow \mathcal{Z}_{1F} \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu .$$

La constante \mathcal{Z}_{1F} aparece para garantizar renormalización.

2. Tomamos el propagador del gluón como el propagador libre, y realizamos el siguiente reemplazo:

$$\mathcal{Z}_{1F} g^2(p-q) D_{\mu\nu}(p-q) \rightarrow G(p-q) D_{\mu\nu}^0(p-q) .$$

Aquí, $G(p-q)$ juega el papel de acoplamiento efectivo, más adelante se le dará forma explícita. Por lo pronto, retomemos la ecuación de Gap (1.19):

$$S^{-1}(p, \mu) = \mathcal{Z}_{2F} S_{0B}^{-1}(p) + \mathcal{Z}_{1F} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g^2(p-q) D_{\mu\nu}(p-q, \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q, \mu) \Gamma_\nu(p, q, \mu) . \quad (2.1)$$

Realizamos los reemplazos propuestos, y tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{1F} \int_q^\Lambda g^2(p-q) D_{\mu\nu}(p-q, \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q, \mu) \Gamma_\nu(p, q, \mu) \rightarrow \\ \mathcal{Z}_{1F} \int_q^\Lambda G(p-q) D_{\mu\nu}^0(p-q, \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q, \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu , \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde hemos usado la notación:

$$\int_q^\Lambda = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} .$$

Tomamos (2.2) y sustituimos en la ecuación (2.1), y tenemos:

$$S^{-1}(p, \mu) = \mathcal{Z}_{2F} S_{0B}^{-1}(p) + \frac{4}{3} \mathcal{Z}_{1F} \int_q^\Lambda G(p-q) D_{\mu\nu}^0(p-q, \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q, \mu) \gamma_\nu . \quad (2.3)$$

La ecuación anterior corresponde diagramáticamente a la figura 2.1.

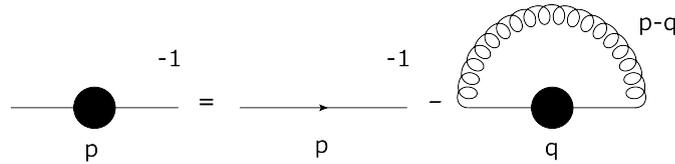


FIGURA 2.1: Ecuación de Schwinger-Dyson para el propagador del quark, en la aproximación arcoiris.

La ecuación (2.3) es una ecuación matricial en cuyo sistema de ecuaciones escalares asociado no existe independencia lineal. Para extraer las ecuaciones independientes, multiplicamos por la matriz identidad y por $\not{p} = i \gamma \cdot p$ y tomamos las respectivas trazas.

Ésto nos da las dos ecuaciones acopladas, que son:

$$\begin{aligned} \frac{M(p^2, \mu^2)}{Z(p^2, \mu^2)} &= \mathcal{Z}_4 m(\mu) + \frac{\mathcal{Z}_{1F}}{2\pi^3} \int dk^2 \int_0^\pi d\psi \sin^2 \psi \frac{G(q^2)}{q^2} k^2 \frac{Z(k^2, \mu^2) M(k^2, \mu^2)}{k^2 + M^2(k^2, \mu^2)}, \\ \frac{1}{Z(p^2, \mu^2)} &= 1 + \frac{\mathcal{Z}_{1F}}{6p^2 \pi^3} \int dk^2 \int_0^\pi d\psi \sin^2 \psi \frac{G(q^2)}{q^2} k^2 \frac{Z(k^2, \mu^2)}{k^2 + M^2(k^2, \mu^2)} \\ &\quad \times \left[k \cdot p + 2 \frac{(k \cdot q)(p \cdot q)}{q^2} \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde hemos cambiado la variable de integración $q \rightarrow k$ y así, redefinido $q \rightarrow k - p$.

Recordemos que $M(p^2, \mu^2)$ y $Z(p^2, \mu^2)$ son la Función de Masa y Renormalización de la Función de Onda, respectivamente; y que las constantes de renormalización $\mathcal{Z}_{1F,2F}$ dependen de Λ y μ , aunque no hemos escrito esta dependencia por simplicidad en la notación.

Cuando reemplazamos el vértice quark-gluón completo por su contraparte desnuda, automáticamente nos colocamos en la aproximación Abelian de QCD. En esta aproximación $\mathcal{Z}_{1F} = \mathcal{Z}_{2F}$. Por lo que, en términos de $A(p^2, \mu^2)$ y $B(p^2, \mu^2)$, tenemos las ecuaciones:

$$A(p^2, \mu^2) = \frac{1}{Z(p^2, \mu^2)} = \mathcal{Z}_{2F}(1 + I_A(p^2, \mu^2)), \quad (2.5)$$

$$B(p^2, \mu^2) = \frac{M(p^2, \mu^2)}{Z(p^2, \mu^2)} = \mathcal{Z}_{2F}(m_B + I_B(p^2, \mu^2)), \quad (2.6)$$

donde $I_A(p^2, \mu^2)$ y $I_B(p^2, \mu^2)$ tienen la forma:

$$I_A(p^2, \mu^2) = \frac{1}{6\pi^3 p^2} \int dk^2 f_A(p^2, k^2) k^2 \frac{A(k^2, \mu^2)}{k^2 A^2(k^2, \mu^2) + B^2(k^2, \mu^2)}, \quad (2.7)$$

$$I_B(p^2, \mu^2) = \frac{1}{2\pi^3} \int dk^2 f_B(p^2, k^2) k^2 \frac{B(k^2, \mu^2)}{k^2 A^2(k^2, \mu^2) + B^2(k^2, \mu^2)}, \quad (2.8)$$

y además, $f_{A,B}(p^2, k^2)$ corresponden a integrales angulares, que son:

$$f_A(p^2, k^2) = \int_0^\pi d\psi \sin^2 \psi \frac{G(q^2)}{q^2} \left(k \cdot p + 2 \frac{(k \cdot q)(p \cdot q)}{q^2} \right), \quad (2.9)$$

$$f_B(p^2, k^2) = \int_0^\pi d\psi \sin^2 \psi \frac{G(q^2)}{q^2}, \quad q = k - p. \quad (2.10)$$

Para determinar completamente al sistema de ecuaciones integrales (2.5), es necesario tener una ecuación adicional que nos permita relacionarlas con \mathcal{Z}_{2F} . Esta ecuación, se

obtiene de la condición de renormalización (1.23):

$$1 = A(\mu^2, \mu^2) = \mathcal{Z}_{2F}(1 + I_A(\mu^2, \mu^2)). \quad (2.11)$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}_{2F} = \frac{1}{1 + I_A(\mu^2, \mu^2)} \quad (2.12)$$

Con la expresión anterior, hemos determinado por completo el sistema de ecuaciones a resolver, ahora tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas. En el límite quiral \mathcal{Z}_4 no aparece explícitamente en la ecuación, pero fuera de este límite si lo hace y puede ser determinada con la otra parte de la condición de renormalización (1.23):

$$m(\mu) = \mathcal{Z}_{2F} (m_B(\Lambda) + I_B(\mu^2, \mu^2)) , \quad (2.13)$$

multiplicando en ambos lados por \mathcal{Z}_4 :

$$\mathcal{Z}_4 m(\mu) = \mathcal{Z}_4 [\mathcal{Z}_{2F} (m_B(\Lambda) + I_B(\mu^2, \mu^2))] , \quad (2.14)$$

$$\mathcal{Z}_{2F} m_B(\Lambda) = \mathcal{Z}_4 [\mathcal{Z}_{2F} (m_B(\Lambda) + I_B(\mu^2, \mu^2))] \Rightarrow \quad (2.15)$$

$$\mathcal{Z}_4 = \frac{m_B(\Lambda)}{m_B(\Lambda) + I_B(\mu^2, \mu^2)} . \quad (2.16)$$

Habiendo escrito esta expresión, juntamos el sistema (2.5) con las ecuaciones (2.11) y (2.16), y tenemos el sistema:

$$A(p^2, \mu^2) = \mathcal{Z}_{2F}[1 + I_A(p^2, k^2)] , \quad (2.17)$$

$$B(p^2, \mu^2) = \mathcal{Z}_{2F}[m_B(\Lambda) + I_B(p^2, k^2)] ,$$

$$\mathcal{Z}_{2F} = \frac{1}{1 + I_A(\mu^2, \mu^2)} ,$$

$$\mathcal{Z}_4 = \frac{m_B(\Lambda)}{m_B(\Lambda) + I_B(\mu^2, \mu^2)} .$$

Éste es el sistema a resolver, sólo resta darle una forma a $G(q^2)$. De forma más explícita, para $A(p^2, \mu^2)$ y $B(p^2, \mu^2)$, tenemos:

$$A(p^2, \mu^2) = \mathcal{Z}_{2F} \left(1 + \frac{1}{6\pi^3 p^2} \int dk^2 f_A(p^2, k^2) k^2 \sigma_v(k^2, \mu^2) \right) , \quad (2.18)$$

$$B(p^2, \mu^2) = \mathcal{Z}_{2F} \left(m_B(\Lambda) + \frac{1}{2\pi^3} \int dk^2 f_B(p^2, k^2) k^2 \sigma_s(k^2, \mu^2) \right) ,$$

$$\mathcal{Z}_{2F}^{-1} = 1 + \frac{1}{6\pi^3 p^2} \int dk^2 f_A(\mu^2, k^2) k^2 \sigma_v(k^2, \mu^2) .$$

$$\mathcal{Z}_4^{-1} = \frac{1}{m_B(\Lambda)} \left(m_B(\Lambda) + \frac{1}{2\pi^3} \int dk^2 f_B(\mu^2, k^2) k^2 \sigma_s(k^2, \mu^2) \right)$$

La manera en la que hemos escrito el sistema es muy simétrica y cómoda de manejar, aunque en principio uno debería poder escribir \mathcal{Z}_4 en términos de $m(\mu)$ y no de $m_B(\Lambda)$.

Para ello, de la ecuación 2.13, tenemos:

$$\begin{aligned}
 m(\mu) &= \mathcal{Z}_{2F} (m_B(\Lambda) + I_B(\mu^2, \mu^2)) , \\
 m(\mu) &= \mathcal{Z}_4 m(\mu) + \mathcal{Z}_{2F} I_B(\mu^2, \mu^2) , \\
 \mathcal{Z}_4 &= \frac{1}{m(\mu)} (m(\mu) - \mathcal{Z}_{2F} I_B(\mu^2, \mu^2)) .
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Claramente, la expresión 2.19 no es válida en el límite quiral. Además, en este límite, su cálculo en principio no es necesario, pues no aparece de manera explícita. Sin embargo, \mathcal{Z}_4 juega un papel cuando calculamos el condensado, por lo que tenemos que encontrar una manera alternativa de calcular esta constante. Para ello, utilizaremos la expresión a un lazo [11]:

$$\mathcal{Z}_4 = \frac{\log[\mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2]}{\log[\Lambda^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2]} . \tag{2.20}$$

Conociendo \mathcal{Z}_4 podemos determinar también $m_B(\Lambda)$ y \mathcal{Z}_m :

$$\mathcal{Z}_4 m(\mu) = \mathcal{Z}_{2F} m_B(\Lambda) \tag{2.21}$$

$$\Rightarrow m_B(\Lambda) = \frac{\mathcal{Z}_4}{\mathcal{Z}_{2F}} m(\mu) , \tag{2.22}$$

$$\mathcal{Z}_m m(\mu) = m_B(\Lambda) \tag{2.23}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}_m = \frac{\mathcal{Z}_4}{\mathcal{Z}_{2F}} . \tag{2.24}$$

Finalmente, de la relación:

$$\mathcal{Z}_{1F} = \mathcal{Z}_{2F} \mathcal{Z}_g \mathcal{Z}_3^{1/2} ,$$

determinamos que $\mathcal{Z}_g \mathcal{Z}_3^{1/2} = 1$ (En nuestro caso $\mathcal{Z}_{1F} = \mathcal{Z}_{2F}$). Las constantes \mathcal{Z}_g y \mathcal{Z}_3 permanecen indeterminadas pero relacionadas entre sí, pues se hizo la sustitución para el acoplamiento y propagador del gluón juntos. Ahora sólo nos resta darle una forma conveniente al acoplamiento con el propagador del gluón; ésto se discutirá en la siguiente sección.

2.1.1. Acoplamiento efectivo

Siguiendo la discusión de [11] y [12], tenemos que asegurarnos que al escoger una forma para $G(k^2)$, el comportamiento de $\alpha(k^2)$ para QCD en el ultravioleta ($G(k^2) \rightarrow 4\pi\alpha(k^2)$, para $k^2 > 2 - 4 \text{ GeV}^2$) se reproduzca; para ello hay que valerse de que se conoce el comportamiento de $\alpha(k^2)$ en la teoría de perturbaciones. Por otra parte, las restricciones para el infrarrojo, las podemos obtener de estudios del propagador del gluón y del vértice quark-gluón; también de estudios fenomenológicos que nos permitan reproducir cantidades conocidas como el condensado quiral $\langle \bar{q}q \rangle^0$ y constantes de decaimiento

leptónico del pión (véanse [11] y [14]). De esta manera, escribimos $G(k^2)$ como:

$$\frac{G(k^2)}{k^2} = \frac{4\pi^2}{\omega^6} D k^2 e^{-k^2/\omega^2} + (2\pi)^2 \frac{\gamma_m}{1/2 \ln[\tau + (1 + k^2/\Lambda_{QCD}^2)^2]} F(k^2), \quad (2.25)$$

$$F(k^2) = [1 - \exp(-k^2/(4m_t^2))]/k^2. \quad (2.26)$$

Por comodidad, definamos $G_T(k^2) = G_{NP}(k^2) + G_P(k^2)$, donde:

$$\begin{aligned} G_T(k^2) &= \frac{G(k^2)}{k^2} \\ G_{NP}(k^2) &= \frac{4\pi^2}{\omega^6} D k^2 e^{-k^2/\omega^2} \\ G_P(k^2) &= (2\pi)^2 \frac{\gamma_m}{1/2 \ln[\tau + (1 + k^2/\Lambda_{QCD}^2)^2]} F(k^2). \end{aligned}$$

$G_{NP}(k^2)$ corresponde a una aproximación tipo $\delta^4(k)$, y es donde se concentra la mayor contribución en el infrarrojo. Las constantes ω y D son parámetros del modelo, en este caso $\omega = 0.4$ GeV y $D = 0.93$ GeV².

Previamente [11], se utilizaba además un término tipo delta ($8\pi^4 D \delta^4(k)$), que corresponde a una singularidad integrable en el infrarrojo. El término G_{NP} es una aproximación finita de esta delta, de esta manera, se dividía la contribución en el infrarrojo en una parte de anchura cero, y en una parte de anchura finita. Más tarde, en [12] se dejó toda la contribución en la parte finita.

$G_P(k^2)$ corresponde a la parte perturbativa, está escrito de manera tal que reproduzca el comportamiento de $\alpha(k^2)$ en el ultravioleta. Los parámetros involucrados son: $\Lambda_{QCD} = 0.234$ GeV, $\gamma_m = 12/(33 - 2N_f)$ (con $N_f = 4$), $\tau = e^2 - 1$, $m_t = 0.5$ GeV; valores fijados en [11] para reproducir la teoría de perturbaciones a un lazo.

En la figura 2.2 observamos $G_T(k^2)$ y cada uno de sus sumandos. Vemos claramente que $G_{NP}(k^2)$ lleva consigo prácticamente toda la contribución en el infrarrojo, que es la región no perturbativa. Por otra parte, el acoplamiento en el ultravioleta disminuye. Las figuras 2.3 y 2.4 muestran a los sumandos por separado.

Se observa también que $G_T(k^2)$ tiene un máximo, y dado que la contribución de $G_P(k^2)$ cerca del máximo es muy poca, podemos aproximar su posición calculándolo para el término no perturbativo únicamente. ésto es:

$$\frac{dG_{NP}(k^2)}{dk^2} = \frac{4\pi^2}{\omega^6} D \left[1 - \frac{k^2}{\omega^2} \right] e^{-k^2/\omega^2}, \quad (2.27)$$

por lo tanto $k_{\max}^2 = \omega^2$, que corresponde a un radio hadrónico de $\simeq 0.49$ fm (radio de carga del pión 0.46 – 0.56 fm, radio de carga del protón 0.84 fm).

Hemos propuesto una forma para $G(k^2)$ y discutido algunas de sus características. En la siguiente parte retomaremos el sistema (2.18) con la forma propuesta para el acoplamiento, y presentaremos los resultados numéricos.

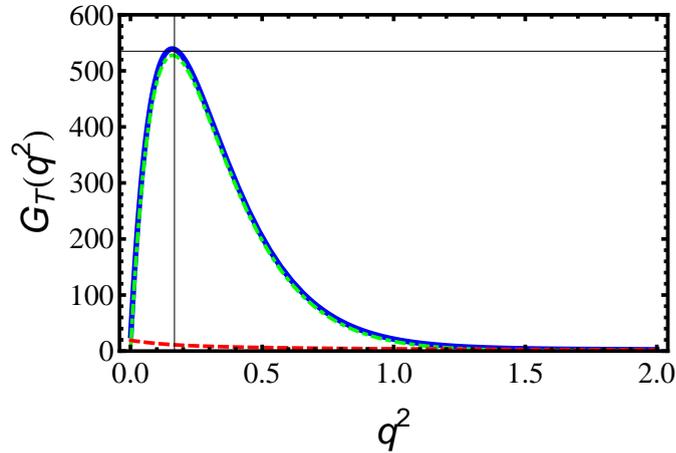


FIGURA 2.2: **Gluón y sus términos:** Término no perturbativo $G_{\text{NP}}(k^2)$ (verde, líneas y puntos), término perturbativo $G_{\text{P}}(k^2)$ (rojo, líneas) y término total $G_{\text{T}}(k^2)$ (azul, sólido). Como es de esperarse, en el infrarrojo, la mayor contribución viene del término no perturbativo.

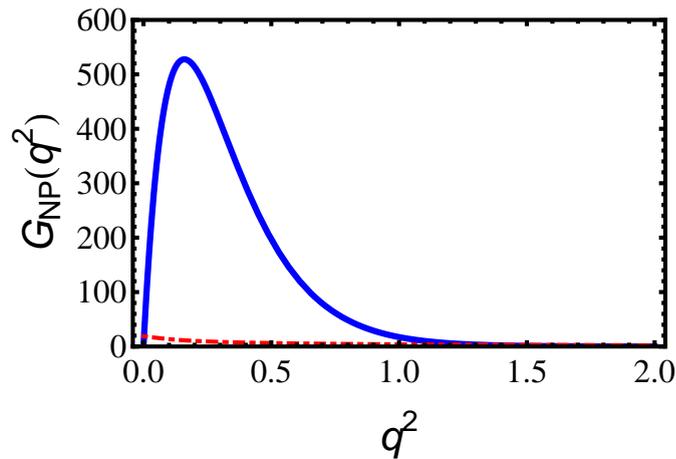


FIGURA 2.3: Término no perturbativo $G_{\text{NP}}(k^2)$ (azul, sólido) comparado con el término perturbativo (rojo, líneas y puntos). La mayor contribución en el infrarrojo viene del término no perturbativo.

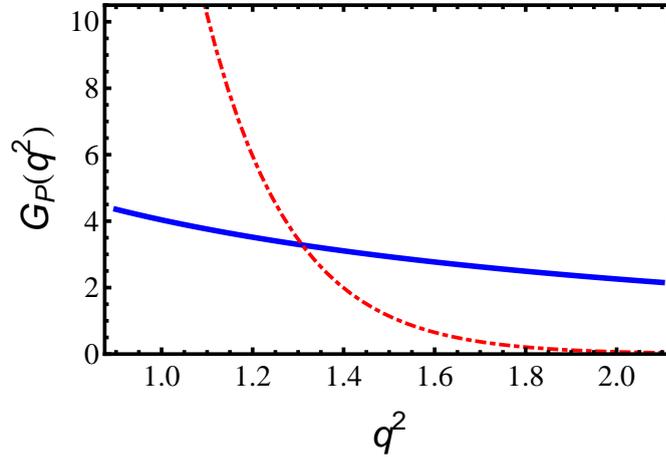


FIGURA 2.4: Término perturbativo $G_P(k^2)$ (azul, sólido) comparado con el término no perturbativo (rojo, líneas y puntos). La mayor contribución en el ultravioleta viene del término perturbativo.

2.2. Resultados Numéricos

Resolvimos el sistema (2.18) con el acoplamiento propuesto (2.25). Se trabajó en el límite quiral, y también fuera de este límite usando las masas $m_{u/d} = 3.74$ MeV y $m_s = 95$ MeV. Elegimos como punto de renormalización $\mu = 19$ GeV, para seguir la discusión de [11] y [12] y $\mu = 4$ GeV para observar si en efecto hay invarianza con respecto al punto de renormalización, y para seguir la discusión del modelo inspirado en Lattice propuesto en [15]. Además, se espera que $\mu = 4$ GeV sea la escala más natural para el comienzo de la región perturbativa. Presentamos los resultados para $M(p^2, \mu^2)$ y $Z(p^2, \mu^2)$.

2.2.1. Límite Quiral

En el límite quiral, calculamos la Función de Masa y Renormalización de la Función de Onda; calculamos también el condensado y se realizó la prueba de confinamiento. También se obtuvo la altura de la Función de Masa y el condensado en función del punto de renormalización μ , y del ω del modelo propuesto (MT).

En la figura 2.5 mostramos la Función de Masa para $\mu = 4$ y $\mu = 19$ GeV. Las alturas fueron $M(0, \mu^2) = 0.511, 0.485$ GeV, para $\mu = 4$ GeV y $\mu = 19$ GeV respectivamente. Podemos justificar invarianza con respecto a μ , pues la diferencia de alturas entre las funciones de Masa (que es el punto más distante entre ambas), es del 5%. La Renormalización de la Función de Onda se muestra en la figura 2.8.

Calculamos el condensado quiral:

$$- \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\mu}^0 = Z_4 N_c \int_k^{\Lambda} \text{tr}[S_{m=0}(k, \mu)] \quad (2.28)$$

$$= \left(\frac{3Z_4}{4\pi^2} \int dk^2 k^2 \sigma_s(k^2, \mu^2) \right) . \quad (2.29)$$

Los resultados obtenidos: $(0.255 \text{ GeV})^3$ y $(0.276 \text{ GeV})^3$ para $\mu = 4 \text{ GeV}$ y $\mu = 19 \text{ GeV}$ respectivamente. Estos valores difieren en 8%. Finalmente, observamos la dependencia de la altura de la Función de Masa y el condensado con el parámetro ω , en las figuras 2.11 y 2.12.

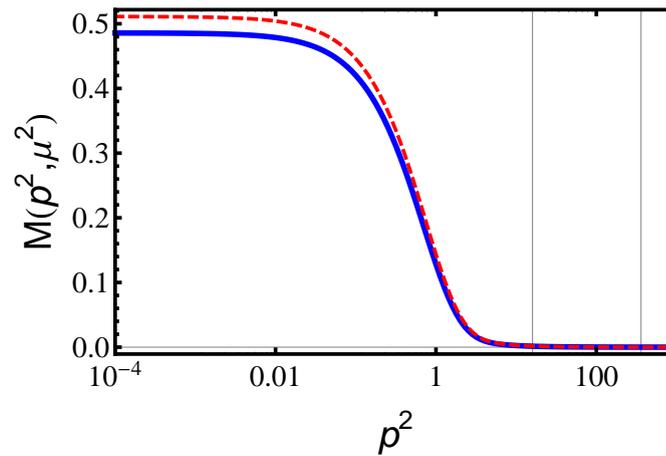


FIGURA 2.5: **Límite quiral.** Función de Masa para $\mu = 19 \text{ GeV}$ (azul, sólido), y para $\mu = 4 \text{ GeV}$ (rojo, líneas). Las alturas son de 485 y 511 MeV, respectivamente, presentan una diferencia del 5%.

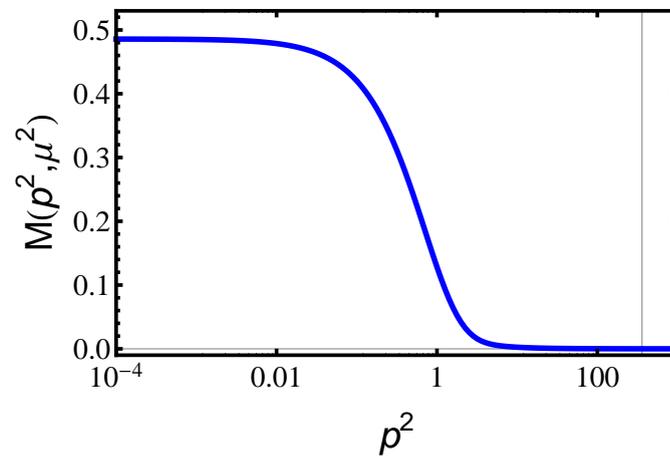


FIGURA 2.6: **Límite quiral.** Función de Masa para $\mu = 19$ GeV.

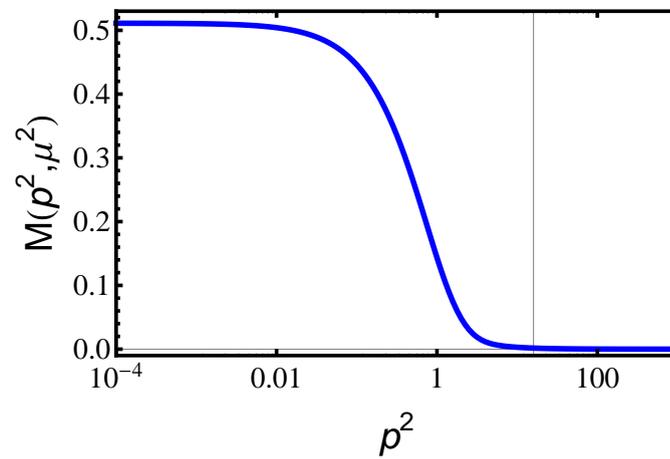


FIGURA 2.7: **Límite quiral.** Función de Masa para $\mu = 4$ GeV.

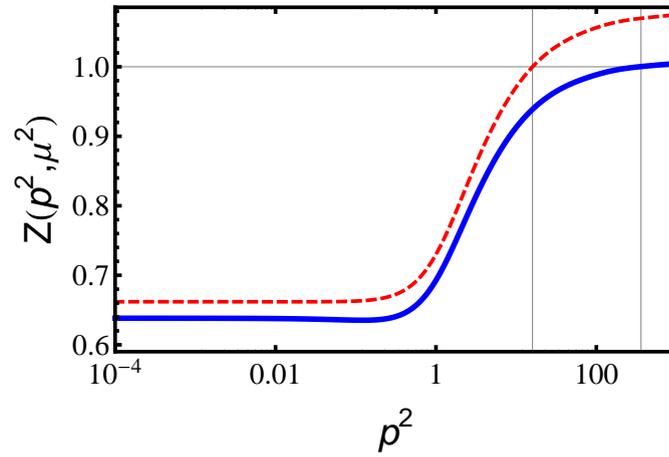


FIGURA 2.8: **Límite quiral.** Renormalización de la Función de Onda para $\mu = 19$ GeV (azul, sólido), y para $\mu = 4$ GeV (rojo, líneas).

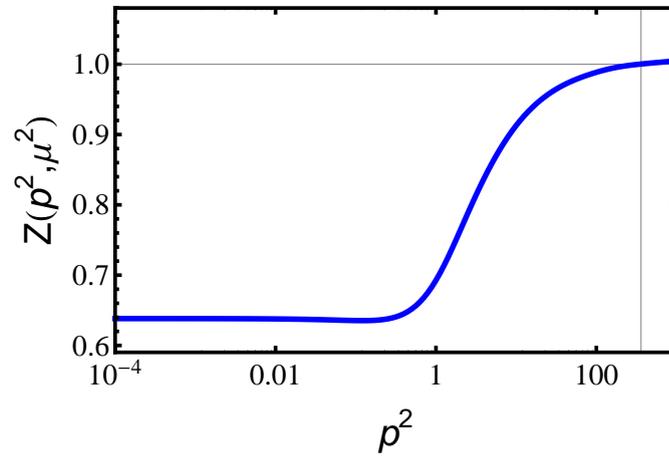


FIGURA 2.9: **Límite quiral.** Renormalización de la Función de Onda para $\mu = 19$ GeV.

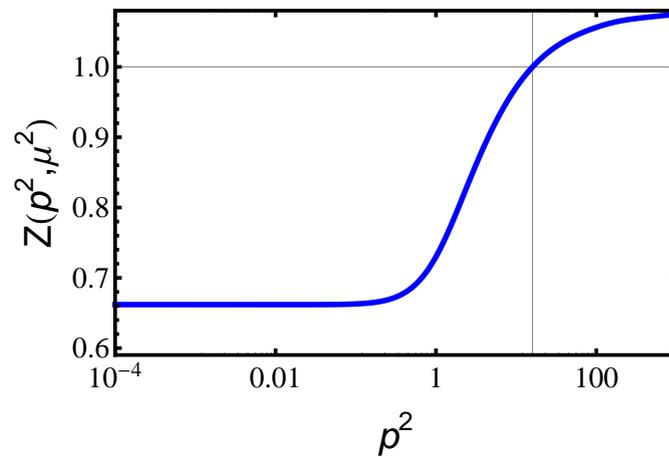


FIGURA 2.10: **Límite quiral.** Renormalización de la Función de Onda para $\mu = 4$ GeV.

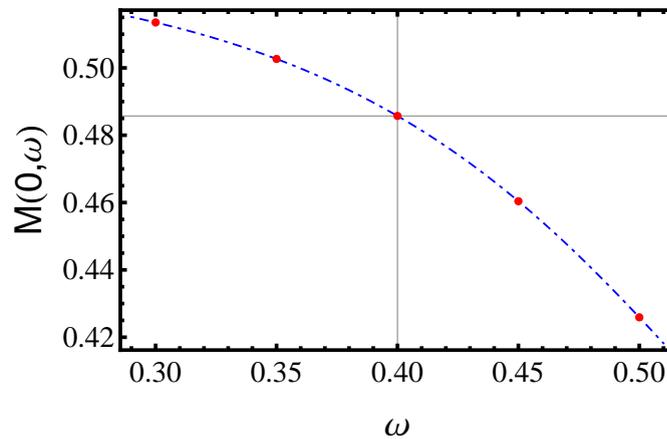


FIGURA 2.11: Altura como función de ω . El cruce de los ejes representa la altura obtenida para el valor de ω seleccionado, es decir, $M(0, \omega = 0.4) = 0.485$ GeV.

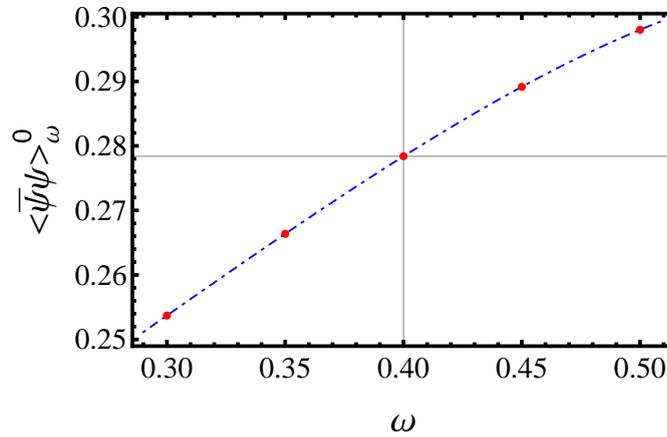


FIGURA 2.12: Condensado como función de ω . El cruce de los ejes representa el condensado obtenido para el valor de ω seleccionado, es decir, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\omega=0.4}^0 = (0.276 \text{ GeV})^3$

2.2.2. Confinamiento

En la naturaleza, los quarks no se encuentran libres, sino confinados formando partículas hechas de ellos llamados hadrones. Para ser consistente con este hecho, debemos entonces comprobar que en efecto estamos describiendo mediante la ESD a una partícula confinada. Los axiomas de Osterwalder-Schrader [16, 17] nos dicen que, en el espacio euclidiano, cualquier correlador en espacio de coordenadas debe ser positivo definido para que el correlador esté asociado con una excitación estable. Un caso particular de correladores son los propagadores, así que uno puede ver las propiedades de este propagador para ver si es o no positivo definido.

En el caso del propagador, tomamos el promedio espacial de la función de Schwinger:

$$\Delta(t) = \frac{1}{\pi} \int dk^2 \sigma_s(p^2, k^2) \cos(k t) . \quad (2.30)$$

Un cambio de signo en $\Delta(t)$ implica que no tenemos un propagador positivo definido, por lo que se trata de una partícula inestable, o bien, una partícula confinada. Para el caso de los quarks, la interpretación correcta es que tenemos una partícula confinada, pues se trata de partículas fundamentales. El cambio de signo nos dice, además, que la masa de la partícula desarrolla una parte imaginaria. Si se trata de una partícula compuesta, la parte imaginaria de la masa corresponde al ancho de decaimiento; si es fundamental, te mide que tan energéticamente está confinada.

La violación de positividad resulta más clara cuando al tomar $\log |\Delta(t)|$ tenemos un pico, como se aprecia en la figura 2.13.

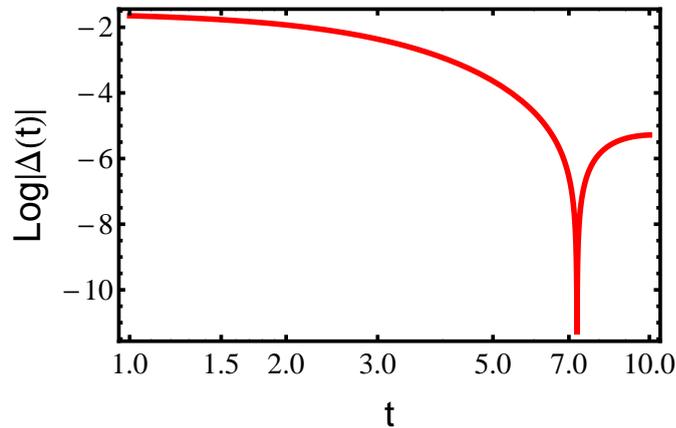


FIGURA 2.13: Promedio espacial de la función de Schwinger. La presencia de un pico demuestra que se trata de una partícula confinada.

2.2.3. Fuera del Límite Quiral

Fuera del límite quiral, se calculó la Función de Masa y Renormalización de la Función de Onda para las masas de semilla de los quarks u/d ($m_{u/d} = 3.74$ MeV) y s ($m_s = 95$ MeV), para $\mu = 4$ y $\mu = 19$ GeV.

Al igual que en el caso quiral, las Funciones de Masa difieren alrededor del 5%, como se observa en las figuras 2.14 y 2.20, por lo que se puede justificar invarianza del punto de renormalización.

Para los quarks u/d, tenemos $M(0, \mu^2) = 0.520, 0.499$ para $\mu = 4$ y $\mu = 19$ GeV respectivamente; y $M(0, \mu^2) = 0.681, 0.704$ GeV para el caso del quark s.

En la siguiente tabla se resumen los resultados.

$m(\mu)$ (MeV)	$M(0, \mu = 4)$ (MeV)	$M(0, \mu = 19)$ (MeV)	Error
$m(\mu) = 0$	511	485	5%
$m_{u/d}(\mu) = 3.74$	520	499	4%
$m_s(\mu) = 95$	681	704	3%

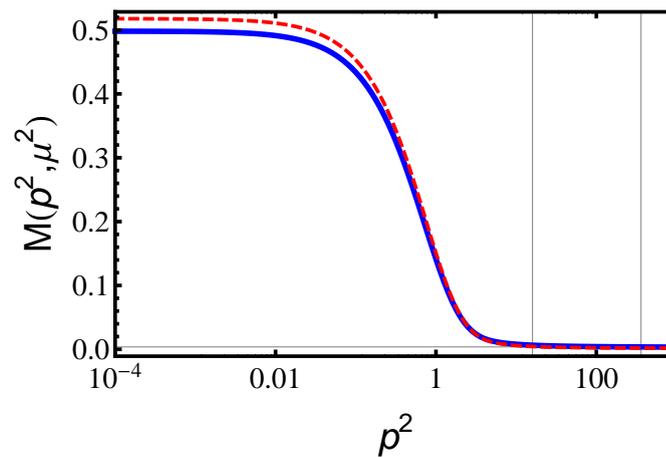


FIGURA 2.14: Función de Masa ($m_{u/d} = 3.74$ MeV) para $\mu = 19$ GeV (azul, sólido), y para $\mu = 4$ GeV (rojo, líneas). $M(0, \mu^2) = 0.520, 0.499$ GeV para $\mu = 4$ y $\mu = 19$ GeV respectivamente.

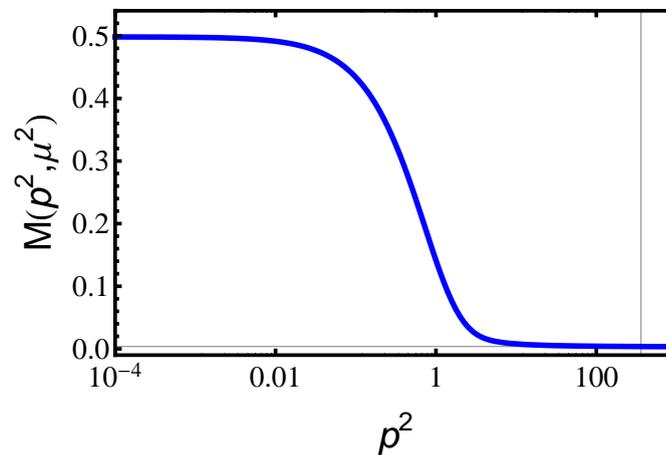


FIGURA 2.15: Función de Masa ($m_{u/d} = 3.74$ MeV) para $\mu = 19$ GeV.

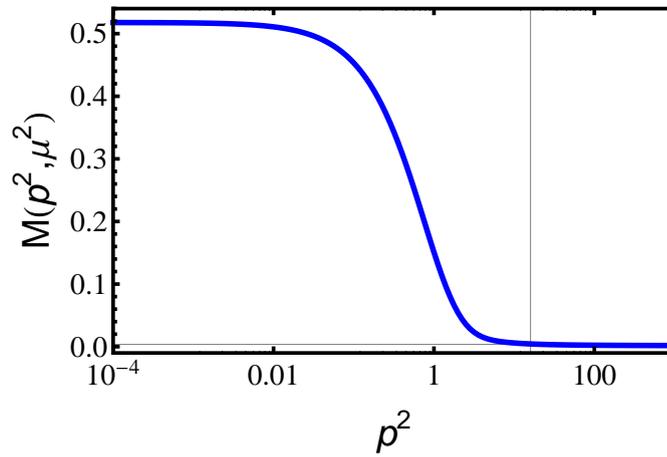


FIGURA 2.16: Función de Masa ($m_{u/d} = 3.74$ MeV) para $\mu = 4$ GeV.

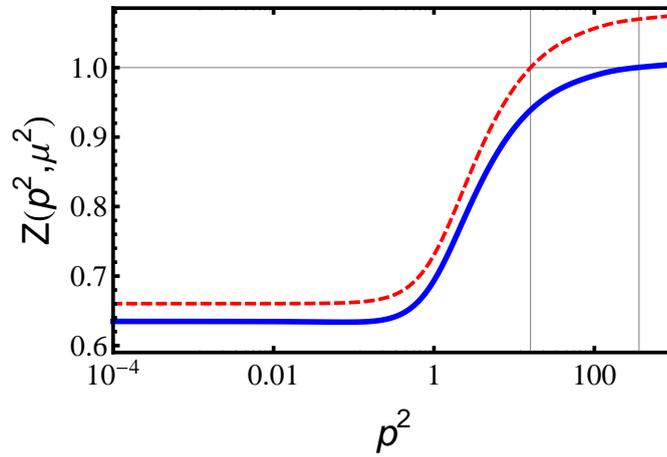


FIGURA 2.17: Renormalización de la Función de Onda ($m_{u/d} = 3.74$ MeV) para $\mu = 19$ GeV (azul, sólido), y para $\mu = 4$ GeV (rojo, líneas).

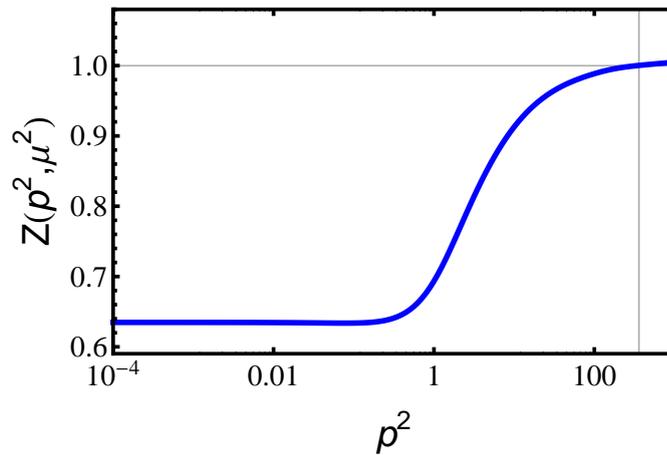


FIGURA 2.18: Renormalización de la Función de Onda ($m_{u/d} = 3.74$ MeV) para $\mu = 19$ GeV.

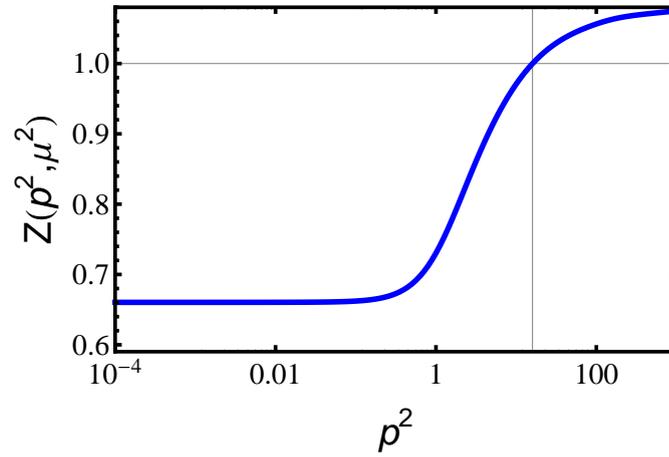


FIGURA 2.19: Renormalización de la Función de Onda ($m_{u/d} = 3.74$ MeV) para $\mu = 4$ GeV.

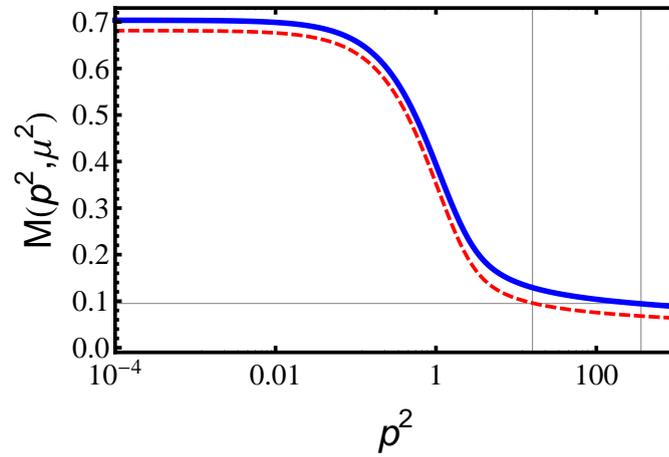


FIGURA 2.20: Función de Masa ($m_s = 95$ MeV) para $\mu = 19$ GeV (azul, sólido), y para $\mu = 4$ GeV (rojo, líneas). $M(0, \mu^2) = 0.681, 0.704$ GeV para $\mu = 4$ y $\mu = 19$ GeV respectivamente.

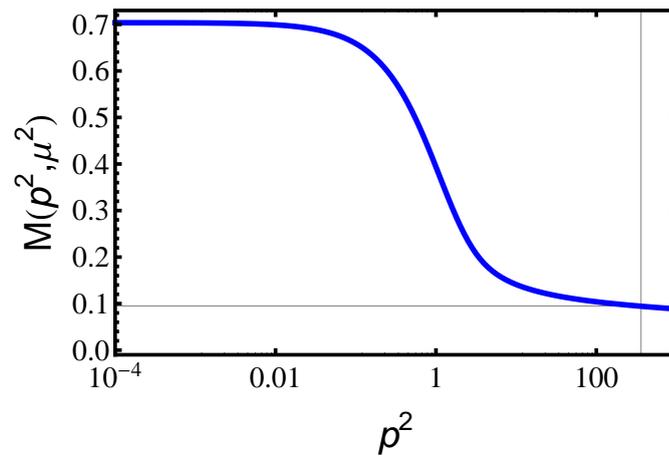


FIGURA 2.21: Función de Masa ($m_s = 95$ MeV) para $\mu = 19$ GeV.

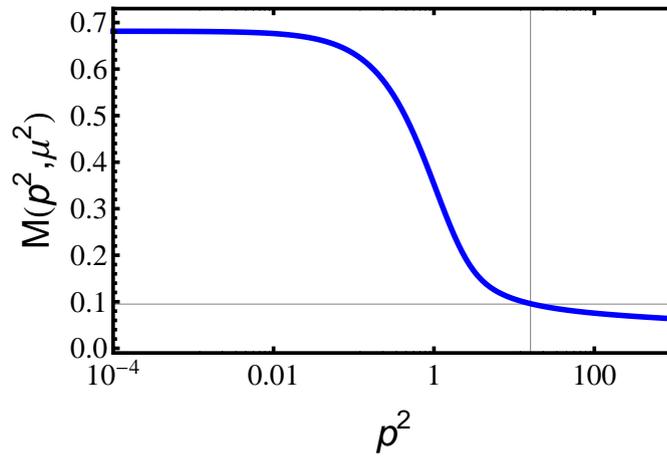


FIGURA 2.22: Función de Masa ($m_s = 95$ MeV) para $\mu = 4$ GeV.

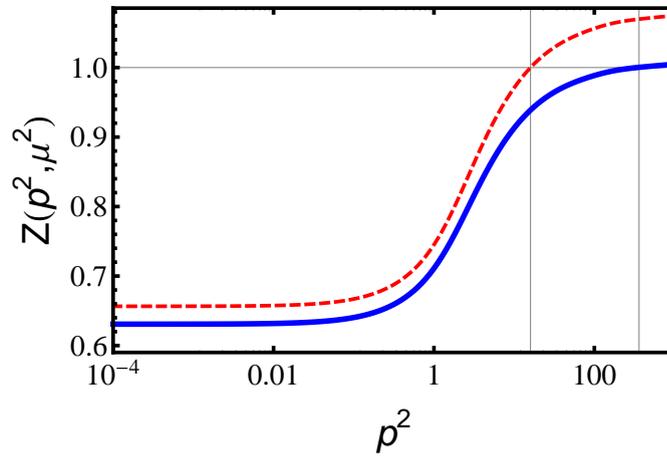


FIGURA 2.23: Renormalización de la Función de Onda ($m_s = 95$ MeV) para $\mu = 19$ GeV (azul, sólido), y para $\mu = 4$ GeV (rojo, líneas).

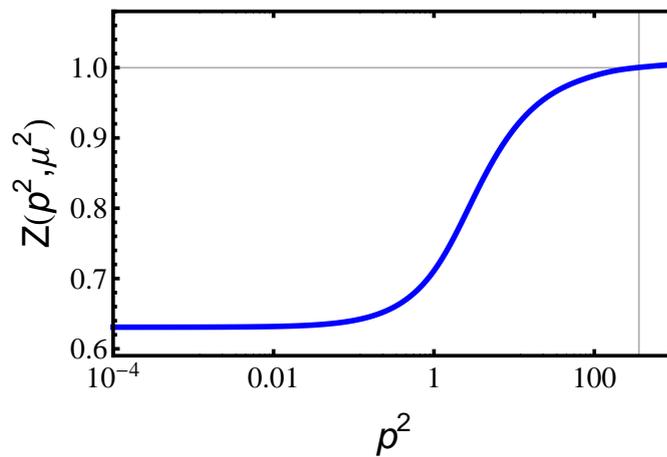


FIGURA 2.24: Renormalización de la Función de Onda ($m_s = 95$ MeV) para $\mu = 19$ GeV.

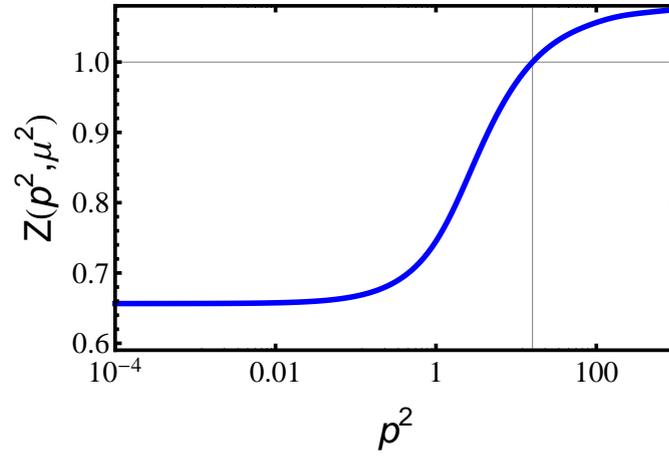


FIGURA 2.25: Renormalización de la Función de Onda ($m_s = 95$ MeV) para $\mu = 4$ GeV.

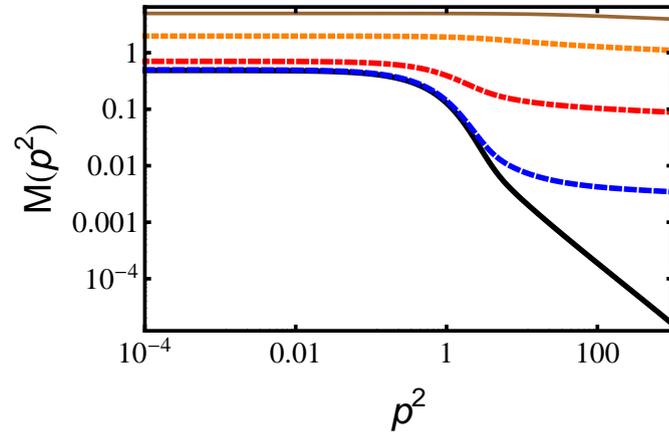


FIGURA 2.26: Funciones de Masa para diferentes quarks: $m_{u/d} = 3.74$ MeV (azul, líneas), $m_s = 95$ MeV (rojo, líneas y puntos), $m_c = 1.18$ GeV (naranja, puntos), $m_b = 4.18$ GeV (café, delgado). El límite quiral corresponde a la curva negra sólida.

2.3. Refinamientos

Hasta ahora, hemos estudiado la ESD para el propagador del quark. Como truncamiento elegimos la Aproximación Arcoiris, con el modelo MT. Este modelo se propone específicamente para $G(q^2)/q^2$, y funciona bien para la Función de Masa y demás cantidades que estamos calculando. En la física hadrónica, en particular en el cálculo de los factores de forma, el decaimiento de las cantidades medidas experimentalmente en función del momento no siempre concuerda con las predicciones teóricas, por lo que se debe refinar la teoría de manera que esté más acorde con el experimento. Nos interesa en particular conocer el comportamiento de $M(p^2)$ como potencia de q^2 , para ello proponemos lo siguiente:

$$\frac{1}{q^2} \rightarrow \frac{1}{(q^2)^\alpha},$$

con $\alpha \in (0, 1]$. Cuando $\alpha = 1$, recuperamos el modelo original. Cuando α decrece, tenemos una caída más lenta; $\alpha \rightarrow 0$ corresponde a la Interacción de Contacto (IC) [18].

En la propuesta original, tenemos:

$$\frac{G(k^2)}{k^2} = \frac{4\pi^2}{\omega^6} D k^2 e^{-k^2/\omega^2} + (2\pi)^2 \frac{\gamma_m}{1/2 \ln[\tau + (1 + k^2/\Lambda_{QCD}^2)^2]} F(k^2), \quad (2.31)$$

$$F(k^2) = [1 - \exp(-k^2/(4m_t^2))]/k^2. \quad (2.32)$$

Previamente definimos $G_T(k^2) = G(k^2)/k^2$, por lo que:

$$G(k^2) = k^2 G_T(k^2) \Rightarrow \quad (2.33)$$

$$\frac{G(k^2)}{(k^2)^\alpha} = \frac{G_T(k^2)}{(k^2)^{\alpha-1}}. \quad (2.34)$$

En el límite quiral, las ecuaciones que tenemos que resolver, son:

$$A(p^2, \mu^2) = \mathcal{Z}_{2F} \left(1 + \frac{A_\alpha(\alpha)}{6\pi^3 p^2} \int dk^2 f_A^\alpha(p^2, k^2) k^2 \sigma_v(p^2, k^2) \right), \quad (2.35)$$

$$B(p^2, \mu^2) = \mathcal{Z}_{2F} \left(\frac{A_\alpha(\alpha)}{2\pi^3} \int dk^2 f_B^\alpha(p^2, k^2) k^2 \sigma_s(p^2, k^2) \right)$$

$$\mathcal{Z}_{2F}^{-1} = \left(1 + \frac{A_\alpha(\alpha)}{6\pi^3 \mu^2} \int dk^2 f_A^\alpha(\mu^2, k^2) k^2 \sigma_v(\mu^2, k^2) \right). \quad (2.36)$$

$A_\alpha(\alpha)$ es una constante tal que nos garantiza que las unidades sean las adecuadas y además, $A_\alpha(\alpha = 1) = 1$. Hemos definido:

$$f_A^\alpha(p^2, k^2) = \int_0^\pi \sin^2 \psi \frac{G_T(q^2)}{(q^2)^{\alpha-1}} \left(k \cdot p + \frac{2(k \cdot p)(p \cdot q)}{q^2} \right),$$

$$f_B^\alpha(p^2, k^2) = \int_0^\pi \sin^2 \psi \frac{G_T(q^2)}{(q^2)^{\alpha-1}}.$$

Calculamos la Función de Masa, y normalizamos de manera que $M(p^2 = 0, \alpha) = M(0, 1)$. A medida que α disminuye, el decaimiento es más lento, que es el comportamiento que queríamos lograr. Ésto se puede ver en la figura 2.27. En la siguiente parte, estudiaremos en detalle la forma de la caída de la Función de Masa para momentos grandes.

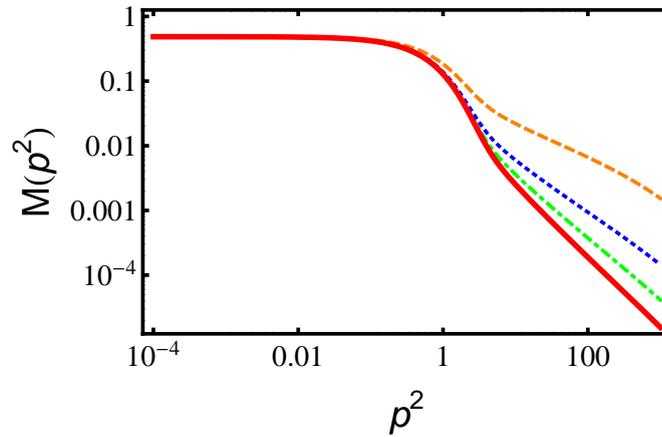


FIGURA 2.27: **Función de Masa:** $\alpha = 1$ (rojo, sólido), $\alpha = 0.9$ (verde, líneas y rayas), $\alpha = 0.8$ (azul, puntos) y $\alpha = 0.7$ (naranja, líneas). Nótese la caída, a medida que α disminuye.

2.3.1. Comportamiento asintótico de la Función de Masa

Queremos estudiar la forma de $M(p^2)$ para valores grandes de momento, en términos de α . De la ecuación 2.31, vemos que cuando $k^2 \rightarrow \infty$:

$$G_T(k^2) = \frac{G(k^2)}{k^2} \rightarrow \frac{1}{k^2} \ln(k^2), \quad (2.37)$$

por lo que de entrada, no podemos afirmar que $M(p^2)$ decaerá como una ley de potencias. Sin embargo, supongamos que éste es el caso y estudiemos hasta donde podemos llegar. Así, para valores grandes de p^2 :

$$M(p^2) \rightarrow \frac{A}{(p^2)^{\beta(\alpha)}}, \quad (2.38)$$

donde A es una constante con unidades de $[M(p^2)]^{2\beta(\alpha)+1}$.

En la figura 2.28 observamos este hecho en términos de logaritmos: Para valores grandes de p^2 , $\log M(p^2)$ se comporta *casi* como una recta, que implica que $M(p^2)$ decae (aproximadamente) como una ley de potencias. Por lo tanto, la idea es tomar el logaritmo natural, y llegar a una ecuación tipo recta.

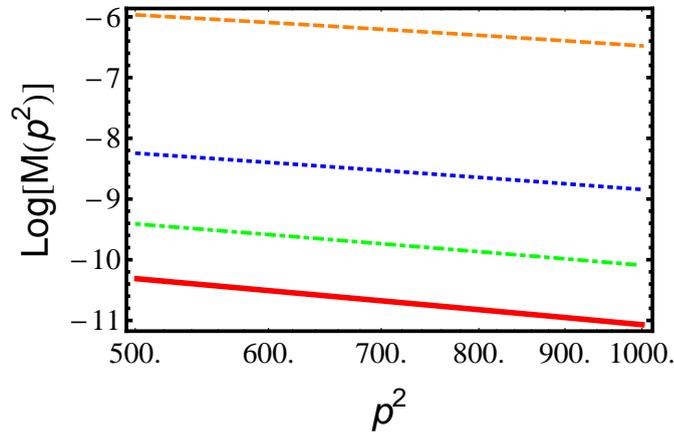


FIGURA 2.28: Logaritmo de la **Función de Masa**: $\alpha = 1$ (rojo, sólido), $\alpha = 0.9$ (verde, líneas y rayas), $\alpha = 0.8$ (azul, puntos) y $\alpha = 0.7$ (naranja, líneas). Para p^2 grande tenemos prácticamente una recta. Si fueran paralelas, tendríamos además $\beta(\alpha)$ como una recta.

Para poder hacer ésto, necesitamos volver estas cantidades adimensionales, lo cual se consigue al dividir entre Λ (corte ultravioleta) y factorizar de la siguiente manera:

$$\frac{M(p^2)}{\Lambda} = \left[\frac{A}{(p^2)^\beta} \right] \left[\frac{\Lambda^{2\beta+1}}{\Lambda^{2\beta+1}} \right] \frac{1}{\Lambda}, \quad (2.39)$$

$$\frac{M(p^2)}{\Lambda} = \left[\frac{A}{\Lambda^{2\beta+1}} \right] \left[\frac{p}{\Lambda} \right]^{-2\beta}, \quad (2.40)$$

$$\tilde{M}(\tilde{p}^2) = \frac{\tilde{A}}{(\tilde{p}^2)^{\beta(\alpha)}}, \quad (2.41)$$

donde hemos definido:

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\tilde{p}^2) &\equiv \frac{M(p^2)}{\Lambda}, \\ \tilde{A} &\equiv \frac{A}{\Lambda^{2\beta(\alpha)+1}}, \\ \tilde{p} &\equiv \frac{p}{\Lambda}. \end{aligned}$$

Notemos que las cantidades con tilde son adimensionales, por lo que podemos tomar el logaritmo sin ningún problema. De esta manera:

$$\log \tilde{M}(\tilde{p}^2) = \log \tilde{A} - \beta \log \tilde{p}^2 . \quad (2.42)$$

Definiendo $y = \log \tilde{M}(\tilde{p}^2)$, $a = \log \tilde{A}$, $b = -\beta(\alpha)$ y $x = \log \tilde{p}^2$, obtenemos la ecuación de la recta:

$$y = a + b x , \quad (2.43)$$

y así, deteminando la pendiente habremos calculado $\beta(\alpha)$.

Tomamos $M(p^2)$ (para $p^2 > 500 \text{ GeV}^2$) con $\alpha = 0.7 - 1$, en saltos de 0.05, y realizamos un primer ajuste. Después realizamos un ajuste adicional para obtener $\beta(\alpha) \forall \alpha$.

Para éste último ajuste, se propone lo siguiente:

- **Aproximación Lineal:** Los puntos obtenidos para $\beta(\alpha)$ parecen estar en una recta, por lo que se propone una aproximación lineal (figura 2.29).
- **Aproximación de Padé:** Para tener un mejor ajuste, realizamos una aproximación $P_{(n,m)}(x)$ de Padé:

$$y(x) = P_{(n,m)}(x) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{1 + \sum_{j=1}^m b_j x^j} . \quad (2.44)$$

En éste caso, tomamos $n = m = 4$, el ajuste se muestra en la figura 2.33.

- Para probar nuestros ajustes, graficamos $(p^2)^{\beta(\alpha)} M(p^2)$: si observamos que para valores grandes de p^2 , tenemos una línea recta, quiere decir que en efecto $M(p^2)$ decae como:

$$M(p^2 \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{1}{(p^2)^{\beta(\alpha)}} .$$

Éstas gráficas se muestran en las figuras 2.30 y 2.34. Con respecto a los ajustes, para el caso de la aproximación lineal, obtuvimos:

$$\beta(\alpha) = -0.092 + 1.194\alpha . \quad (2.45)$$

Aunque parece ajustarse bien a los puntos calculados (figura 2.29), tenemos algunos problemas:

1. La presencia de la ordenada negativa, -0.092 , indica que para $\alpha < 0.771$ no hay decaimiento.

2. A su vez, indica que $\beta(\alpha = 0) \neq 0$, y en este caso no estamos reproduciendo la Interacción de Contacto.
3. En la figura 2.30, vimos que el decaimiento para $\beta(\alpha = 0.7)$ es ligeramente diferente al esperado. ésto puede deberse a problemas numéricos.

Para solucionar los problemas 1 y 2, fijamos la condición $\beta(\alpha = 0) = 0$. En este caso los puntos no se ajustan tan bien como en el caso anterior (figura 2.31), pero hemos obtenido una expresión amigable (y casi exacta) para $\beta(\alpha)$:

$$\beta(\alpha) = 1.083 \alpha . \tag{2.46}$$

El punto 3 no se solucionó (figura 2.32). En el caso de la aproximación de Padé, $P(4, 4)$, observamos los siguientes hechos:

1. No existen valores de α para los cuales no haya decaimiento, pero $\beta(\alpha = 0) \neq 0$ (figura 2.33).
2. El ajuste para los puntos dados es muy exacto, y además, $M(p^2)$ si decae como esperamos, prácticamente igual al ajuste anterior (figura 2.34).

Similarmente al caso anterior, solucionamos el primer punto imponiendo $\beta(\alpha = 0) = 0$ (figura 2.35). Con ésto hemos arreglado todos los problemas (sin crear nuevos), con la desventaja de no tener una expresión amigable como en 2.46.

Al introducir el parámetro α , hemos logrado tener un decaimiento más lento, con respecto al momento del gluón. Propusimos algunos ajustes para la forma del decaimiento y logramos hacer que la altura de la Función de Masa fuera invariante de α . Sin embargo, también queremos que el condensado se preserve. Ésto se discute a continuación.

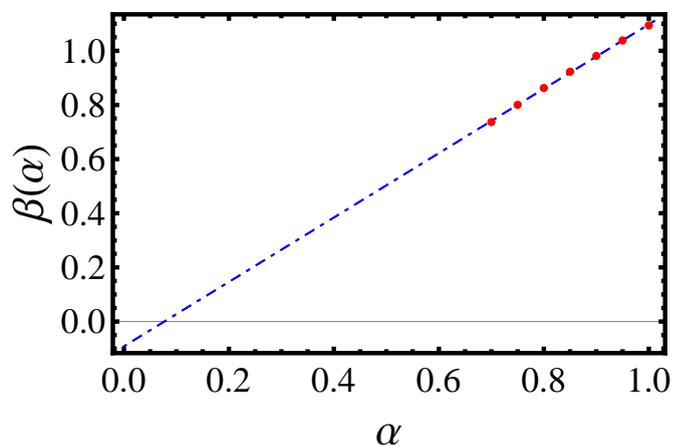


FIGURA 2.29: **Aproximación Lineal:** Esta aproximación fija bien los puntos dados, pero presenta varios problemas. Para $\alpha < 0.771$ no hay decaimiento, además $\beta(\alpha = 0) \neq 0$, por lo que no reproduce Interacción de Contacto.

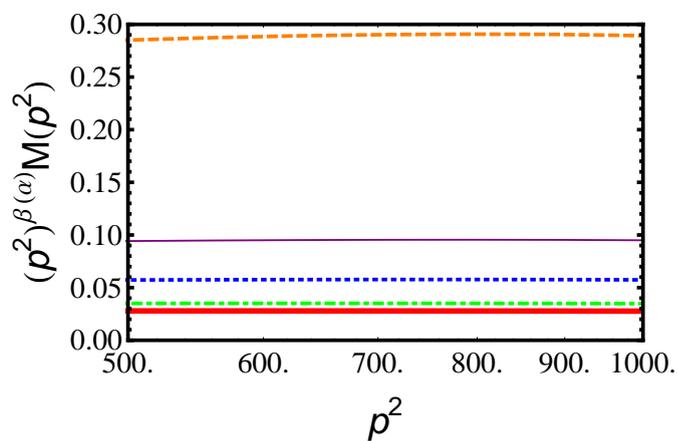


FIGURA 2.30: Caída de la **Función de Masa** en la aproximación lineal: $\alpha = 1$ (rojo, sólido), $\alpha = 0.9$ (verde, líneas y rayas), $\alpha = 0.8$ (azul, puntos), $\alpha = 0.75$ (morado, sólido delgado) y $\alpha = 0.7$ (naranja, líneas). Para $\alpha = 0.7$ el decaimiento es ligeramente diferente al esperado.

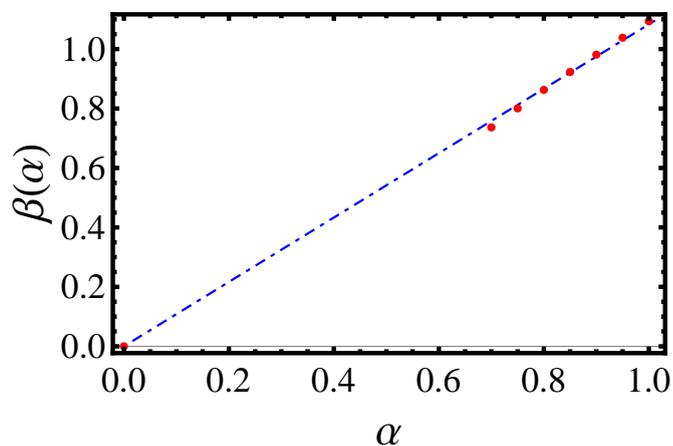


FIGURA 2.31: **Aproximación Lineal**, con la condición $\beta(\alpha = 0) = 0$: No existen valores de α para los cuales no haya caída, reproduce Interacción de Contacto y nos provee de una expresión amigable para β , $\beta(\alpha) = 1.083 \alpha$. Sin embargo, los puntos se ajustan en menor medida que en los otros casos.

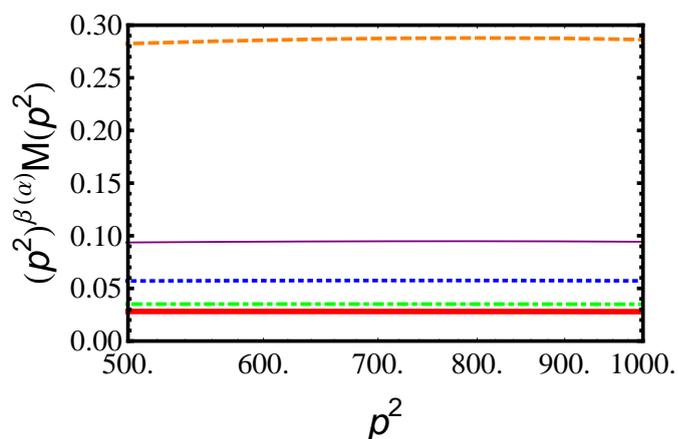


FIGURA 2.32: Caída de la **Función de Masa** en la aproximación lineal, con la condición $\beta(\alpha = 0) = 0$: $\alpha = 1$ (rojo, sólido), $\alpha = 0.9$ (verde, líneas y rayas), $\alpha = 0.8$ (azul, puntos), $\alpha = 0.75$ (morado, sólido delgado) y $\alpha = 0.7$ (naranja, líneas). Para $\alpha = 0.7$ la caída es ligeramente diferente a la esperada.

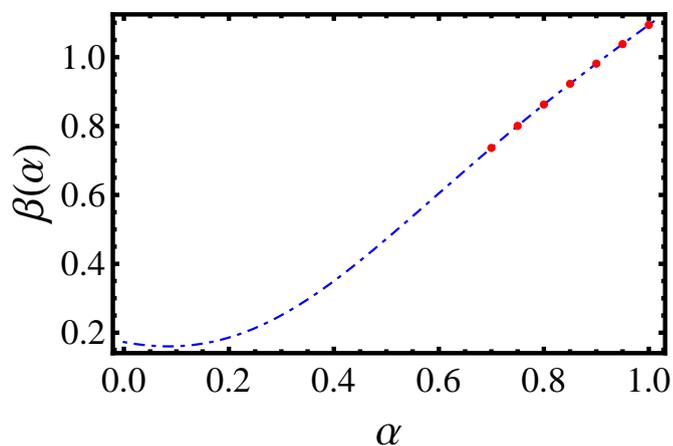


FIGURA 2.33: **Aproximación de Padé, P(4,4)**: Los puntos se ajustan muy bien, pero $\beta(\alpha = 0) \neq 0$, por lo que no estamos reproduciendo Interacción de Contacto.

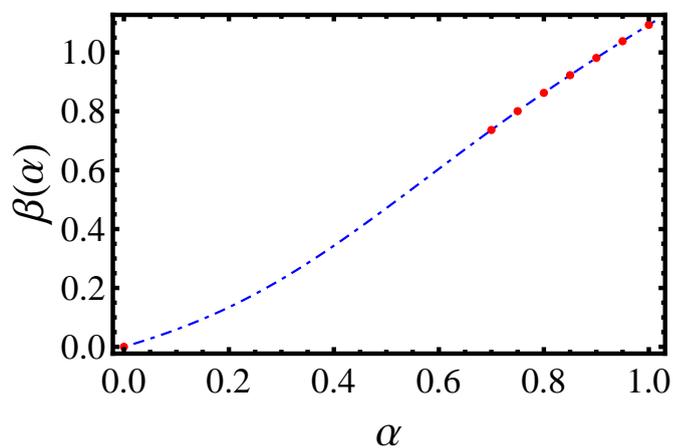


FIGURA 2.34: Caída de la **Función de Masa** en la aproximación de Padé, P(4,4): $\alpha = 1$ (rojo, sólido), $\alpha = 0.9$ (verde, líneas y rayas), $\alpha = 0.8$ (azul, puntos), $\alpha = 0.75$ (morado, sólido delgado) y $\alpha = 0.7$ (naranja, líneas).

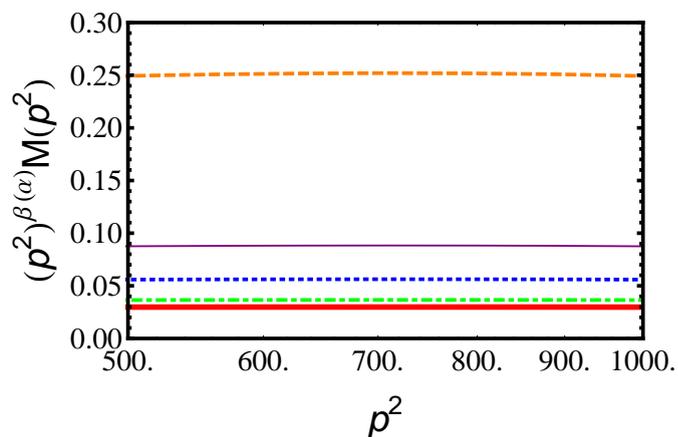


FIGURA 2.35: **Aproximación de Padé**, con la restricción $\beta(\alpha = 0) = 0$: Los puntos se ajustan muy bien; y la extrapolación satisface las condiciones de IC.

2.3.2. Altura y Condensado

Previo a la normalización correspondiente, la altura de la Función de Masa variaba drásticamente con α . Para ciertos números críticos la altura cambia dramáticamente y a medida que α decrece, las dificultades numéricas aumentan. En la figuras 2.36 y 2.37 se observa el cambio la altura (no normalizada) de las Funciones de Masa, en términos α para diferentes rangos.

Resulta claro, de la figura 2.27, que a medida que α disminuye, la caída de la Función de Masa es cada vez menos pronunciada (y es más claro aún con el ajuste); por lo que se espera que para $\alpha \rightarrow 0$ eventualmente tengamos una función constante, específicamente $M(p^2, 0) = M(0, 1)$.

No sólo deseamos tener una altura invariante, queremos conservar también el valor del condensado. Para ello lo que propusimos es variar el corte ultravioleta, para cada α , a un punto tal que se obtenga el condensado deseado. Ésto se realizó para $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9$ y 1; valores para los que determinamos completamente $A(p^2, \alpha)$ y $B(p^2, \alpha)$.

El caso $\alpha = 0$ es imposible de calcular directamente hasta este punto, debido a complicaciones numéricas, por lo que fue calculado mediante OPE:

$$- \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\alpha}^0 = \lim_{p^2 \rightarrow \Lambda^2} (p^2)^2 \sigma_s(p^2) .$$

Para ello, por una parte, tomamos en cuenta que para $\alpha \rightarrow 0$ se espera tener una Función de Masa constante (c), y que debido a la normalización que estamos imponiendo $c = M(p^2, 0) = M(0, 1)$. Por otra parte, suponemos que $Z(p^2, \alpha = 0)$ también se mantiene constante, y que además $Z(p^2, 0) = 1$. Con estas suposiciones reproducimos IC [18], y son válidas hasta un término logarítmico propio del modelo MT.

En la figura 2.38 se muestran las Funciones de Masa, con sus respectivos cortes, para diferentes valores de α . En la figura 2.38 se muestran las Funciones de Masa, con sus respectivos cortes, para diferentes valores de α .

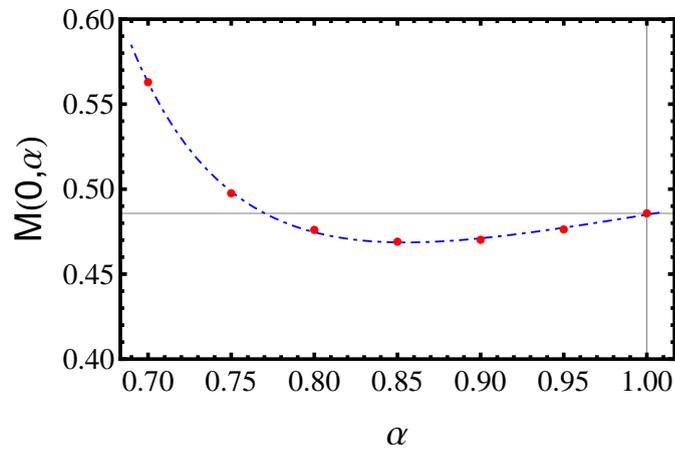


FIGURA 2.36: **Altura no normalizada:** Para $\alpha = 0.7 - 1$, es posible calcular sin mayor problema $M(p^2, \alpha)$. Para algunos valores de α y a medida que decrece, surgen complicaciones numéricas.

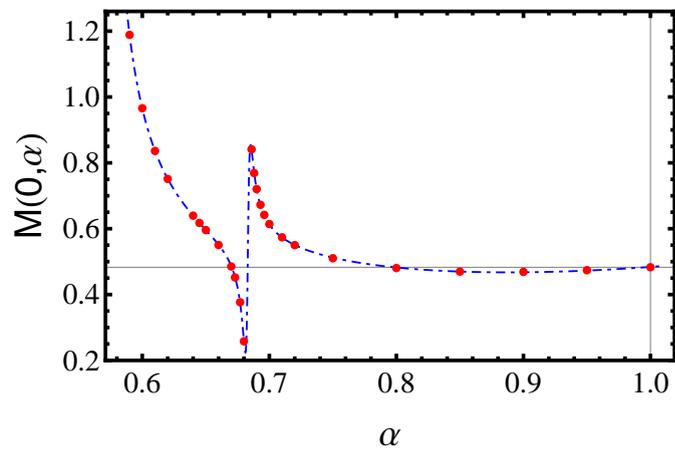


FIGURA 2.37: **Altura no normalizada:** En este modelo, existen algunos valores críticos de α en los cuales la altura de la Función de Masa cambia drásticamente.

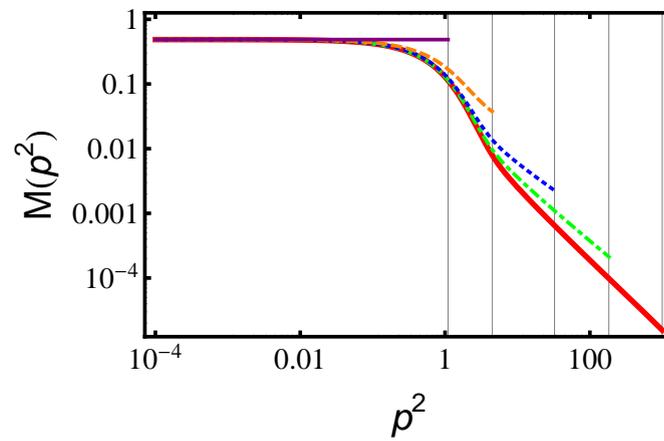


FIGURA 2.38: **Función de Masa:** $\alpha = 1$ (rojo, sólido), $\alpha = 0.9$ (verde, líneas y rayas), $\alpha = 0.8$ (azul, puntos), $\alpha = 0.7$ (naranja, líneas) y $\alpha = 0$ (morado, sólido delgado). Nótese la caída más lenta a medida que α disminuye. Para $\alpha = 0$, el comportamiento y el corte ultravioleta (1.1 GeV^2) son predichos como se explica en esta sección, no calculados directamente.

2.3.3. Conclusiones

Con el refinamiento propuesto, $1/q^2 \rightarrow 1/(q^2)^\alpha$, logramos que la Función de Masa cayera más lento como potencia del momento del gluón, y pudimos modelar cómo es que depende para valores grandes de éste. Mediante una aproximación de Padé, se encontró una expresión que satisface nuestras necesidades.

Para valores de momento grandes, en el modelo MT, domina el término perturbativo:

$$\begin{aligned} G_P(k^2) &= (2\pi)^2 \frac{\gamma_m}{1/2 \ln[\tau + (1 + k^2/\Lambda_{QCD}^2)^2]} F(k^2), \\ F(k^2) &= [1 - \exp(-k^2/(4m_t^2))]/k^2, \end{aligned}$$

y así, cuando $k^2 \rightarrow \infty$, se tiene:

$$G_T(k^2) \rightarrow G_P(k^2) \rightarrow \frac{1}{k^2 \ln[k^2/\Lambda_{QCD}^2]}, \quad (2.47)$$

por lo que caída no es una ley simple de potencias. Esto implica, que al ajustarse como tal, existan pequeñas desviaciones. La aproximación de Padé, aunque no es lineal con α , nos permitió tener una expresión que minimiza estas desviaciones.

A medida de que α decrece, la altura de la Función de Masa cambia drásticamente, como se muestra en las figuras 2.36. Además, hay que tener cuidado con la posible presencia de números críticos, como se muestra en la figura 2.37, y soluciones múltiples [19]. Para preservar la física asociada con el rompimiento de la simetría quiral intacta, introdujimos una constante de normalización $A_\alpha(\alpha)$ en la ecuación 2.35.

Ahora, para estudiar el comportamiento cuando $\alpha \rightarrow 0$, dejaremos de momento el Modelo de Maris y Tandy, y propondremos otro modelo basado en Nambu - Jona - Lasinio (NJL) [20].

2.4. Interacción de Contacto

Ahora estudiaremos la caída de la Función de Masa, cuando la potencia del cuadrado del momento del gluón es pequeña. Para ello, nos valemos de un modelo donde el momento del gluón no juega en la ecuación (que nos proporciona automáticamente el caso $\alpha = 0$) y lo adaptaremos para hacer que cada vez juegue más.

A modelos de este estilo, se les llama interacción de contacto, pues en el diagrama

de Feynman correspondiente a una dispersión qq, no aparece el gluón que intercambian y simplemente se tiene un diagrama con 4 puntas que corresponden a los quarks entrantes y salientes. En particular, nos centraremos en el modelo de Nambu-Jona-Lasino, o modelo NJL.

Comenzamos con el propagador renormalizado del quark:

$$S^{-1}(p, \mu) = \mathcal{Z}_{2F}(i\gamma \cdot p) + \mathcal{Z}_4 m(\mu) + \mathcal{Z}_{1F} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p - q, \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q, \mu) \Gamma(p, q, \mu). \quad (2.48)$$

Como la interacción de contacto no es renormalizable, tomamos todas las constantes de renormalización como 1. Y ahora Λ juega un papel dinámico. Tomamos el vértice desnudo, y para la parte del gluón damos la siguiente forma:

$$g^2 D_{\mu\nu}(p - q) \rightarrow \frac{1}{m_G^2} = \frac{4\pi\alpha_{IR}}{m_G^2}, \quad (2.49)$$

nótese que ahora la parte correspondiente al gluón no depende más de su momento, a la constante m_G le llamaremos *masa efectiva* del gluón, y es alrededor de 400 MeV. Así, el propagador del quark se escribe:

$$S^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + m + \frac{4}{3m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu S(q) \gamma_\nu. \quad (2.50)$$

En la Norma de Landau, después de tomar trazas tenemos que $Z(p^2) = 1$ y

$$M(p^2) = m + \frac{16}{3m_G^2} \int^q \frac{M(q^2)}{M^2(q^2) + q^2} \quad (2.51)$$

Al no haber contribución del momento del gluón, la integral angular es trivial, por lo que se tiene:

$$M(p^2) = m + \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^\infty ds \frac{s}{s + M^2(s)}. \quad (2.52)$$

Se realiza la regularización del tiempo propio, ésto es:

$$\frac{1}{s + M^2(s)} = \int_0^\infty e^{-\tau(s+M^2(s))} \rightarrow \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} e^{-\tau(s+M^2(s))} = \frac{\bar{Z}(s)}{s + M^2(s)}, \quad (2.53)$$

donde τ_{UV} y τ_{IR} son reguladores ultravioleta e infrarrojo respectivamente, y además:

$$\bar{Z}(s) = e^{-(s+M^2(s))\tau_{UV}^2} - e^{-(s+M^2(s))\tau_{IR}^2}. \quad (2.54)$$

De ésta manera, la ecuación para $M(p^2)$ es:

$$M(p^2) = m + \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^\infty ds \frac{s}{s + M^2(s)} [e^{-(s+M^2(s))\tau_{UV}^2} - e^{-(s+M^2(s))\tau_{IR}^2}]. \quad (2.55)$$

Éste es el modelo original, que nos da como solución una Función de Masa constante, que después de algunas simplificaciones, se escribe como:

$$M = m + \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} F(M^2; \tau_{UV}, \tau_{IR}), \quad (2.56)$$

donde:

$$F(M^2; \tau_{UV}, \tau_{IR}) = M^2 \Gamma(-1, M^2 \tau_{UV}^2) - M^2 \Gamma(0, M^2 \tau_{IR}^2) - \frac{\tau_{IR}^2}{e}^{-M^2 \tau_{IR}^2}. \quad (2.57)$$

Ahora, para adaptarlo al caso donde el momento del gluón si juegue, en lugar de proponer 2.58 para la parte correspondiente al gluón, proponemos:

$$g^2 D_{\mu\nu}(p - q) \rightarrow \frac{A_\alpha(\alpha)}{(m_G^2)^{1-\alpha}} \frac{1}{(q^2)^\alpha}, \quad (2.58)$$

donde $A_\alpha(\alpha)$ es una constante de renormalización adimensional, tal que la altura de la Función de Masa se preserve con α . Nótese que $\alpha = 0$ reproduce el caso anterior, además, no existe divergencia cuando $q^2 \rightarrow 0$ debido a la presencia del corte infrarrojo.

Ahora la ecuación no admite todas las simplificaciones que hubo cuando la integral angular correspondiente a q^2 no jugaba, sin embargo se puede resolver numéricamente sin mayor dificultad. Así, previo a las integrales angulares, tenemos:

$$M(p^2) = m + \frac{16A_\alpha(\alpha)}{3(m_G^2)^{1-\alpha}} \int^k \frac{M(k^2)}{M^2(k^2) + k^2} \frac{1}{(q^2)^\alpha}, \quad (2.59)$$

Nótese que el factor de regularización del tiempo propio no depende de las variables angulares, por lo que se puede añadir tal cual, y así, la expresión correspondiente para $M(p^2)$ es:

$$M(p^2) = m + \frac{16A_\alpha(\alpha)}{3(m_G^2)^{1-\alpha}} \int^k \frac{M(k^2) \bar{Z}(k^2)}{M^2(k^2) + k^2} \frac{1}{(q^2)^\alpha}, \quad (2.60)$$

con $\bar{Z}(k^2)$ como se definió anteriormente en 2.54.

2.4.1. Resultados

Resolvimos la ecuación 2.60, de manera que la altura de la Función de Masa fuera igual que a la obtenida con el Modelo de Maris y Tandy. Para ello se fijaron los parámetros:

- $m_G = 59 \text{ MeV}$.
- $\Lambda_{UV} = 823 \text{ MeV}$. ($\tau_{UV} = \Lambda_{UV}^{-1}$).
- $\Lambda_{IR} = 240 \text{ MeV}$. ($\tau_{IR} = \Lambda_{IR}^{-1}$).

Las Funciones de Masa para diferentes valores de α se muestran en la figura 2.39. Nótese que en $\alpha = 0$, $M(p^2)$ es constante, como se había predicho en la sección anterior. Definimos $\bar{m}_G = A^{-\alpha/2} m_G$ y observamos como cambia este valor en función de α , se muestra en la figura 2.40.

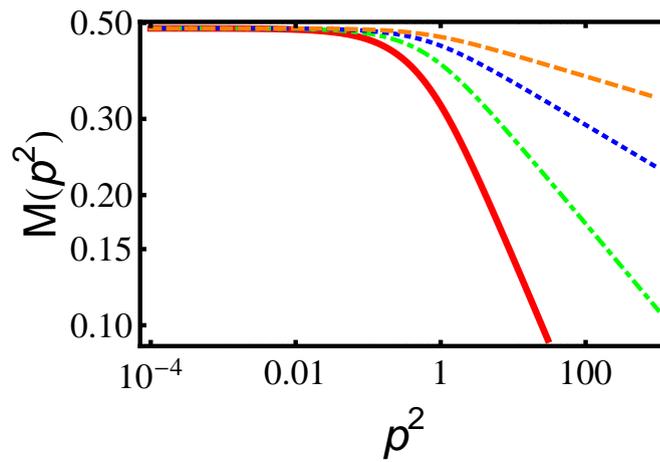


FIGURA 2.39: **Funciones de Masa:** (Naranja, rayas) $\alpha = 0.05$, (Azul, puntos) $\alpha = 0.10$, (Verde, puntos y rayas) $\alpha = 0.20$, (Rojo, sólido) $\alpha = 0.40$.

Se realizó también el ejercicio de encontrar el corte tal que el condensado se preservara, en la figura 2.42 se muestran algunas Funciones de Masa con su respectivo corte. En la figura 2.41 se muestra como cambia el corte en función de α , en ambos modelos.

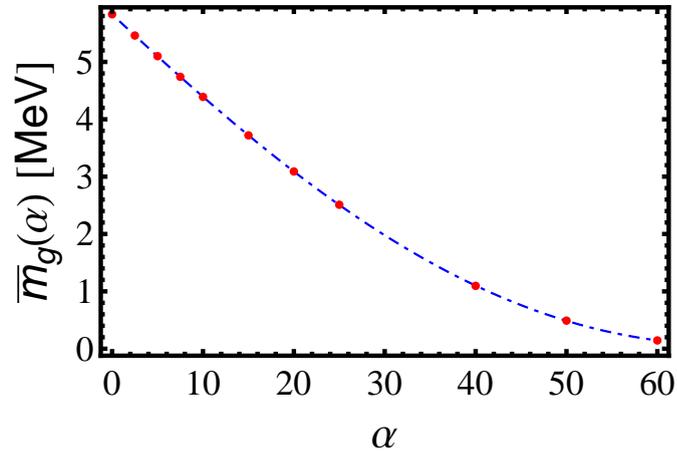


FIGURA 2.40: **Masa del gluón:** Definimos la masa del gluón como la masa efectiva sobre la constante de renormalización para la altura. Aquí se observa el cambio en función de α .

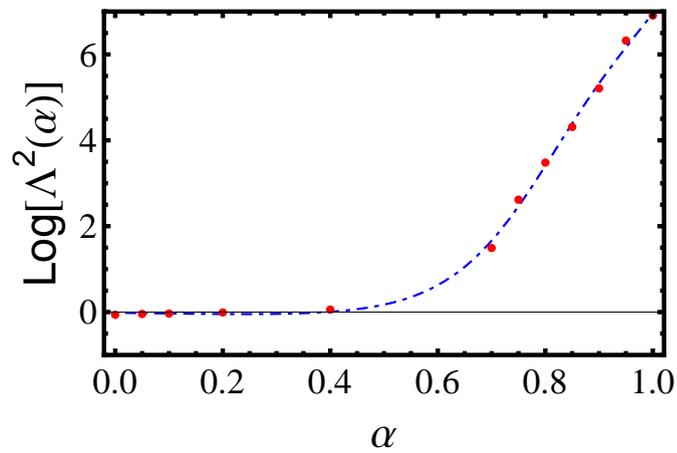


FIGURA 2.41: **Cortes ultravioleta:** Cortes ultravioleta que reproducen el condensado deseado $(0.276 \text{ GeV})^3$ para diferentes valores de α . $\alpha < 0.5$ y $\alpha > 0.5$ corresponde al modelo NJL-Like y Maris y Tandy respectivamente.

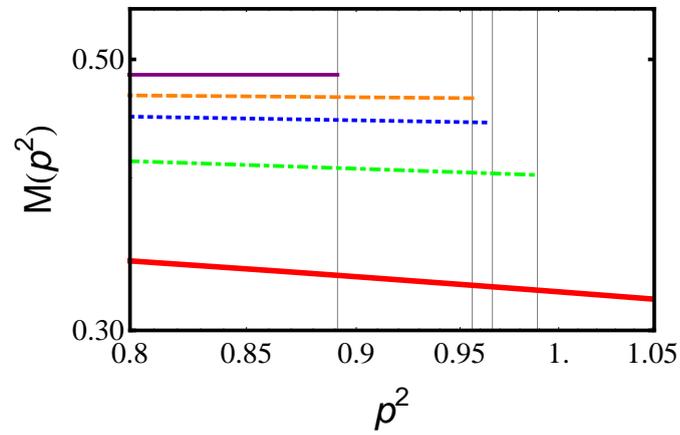


FIGURA 2.42: **Funciones de Masa:** Funciones de masa con sus respectivos cortes para obtener el condensado deseado (0.276 GeV^3). (Morado, sólido delgado) $\alpha = 0$, (Naranja, rayas) $\alpha = 0.05$, (Azul, puntos) $\alpha = 0.10$, (Verde, puntos y rayas) $\alpha = 0.20$, (Rojo, sólido) $\alpha = 0.40$. El corte ultravioleta calculado para $\alpha = 0$ es alrededor de 0.89 GeV^2 , que difiere en 24%, comparado con el predicho en la sección anterior, que es 1.1 GeV^2 .

Capítulo 3

Ecuación de Bethe-Salpeter

3.1. De Quarks a Hadrones

Hasta ahora hemos estudiado a la Cromodinámica Cuántica a nivel de quarks. Mediante la ESD para el propagador del quark, pudimos estudiar la Generación Dinámica de Masas(GDM) y el confinamiento, entre otras cosas. Vimos que los quarks se tratan de partículas confiadas, y ésto es porque en la naturaleza es no es posible observar un quark libre o aislado, sino en partículas compuestas de ellos llamadas **hadrones**.

De manera similar a la que los átomos se mantienen juntos en una molécula debido a la fuerza electromagnética, los quarks se mantienen juntos dentro de un hadrón debido a la fuerza fuerte. Al ser la fuerza fuerte la que interviene en este proceso, la teoría que describe a los hadrones es la Cromodinámica Cuántica.

Dependiendo de la estructura de quarks de los hadrones, los podemos clasificar en dos tipos:

- **Bariones:** Compuestos de tres quarks (como los protones y neutrones).
- **Mesones:** Compuestos por un quark y un antiquark (como los piones).

En este trabajo estudiaremos únicamente los mesones, particularmente los piones, que son los hadrones más ligeros. Existen diversas razones para esta selección en particular:

- La razón más banal e inmediata es que los mesones, al estar compuestos por únicamente dos partículas, son en principio más fáciles de estudiar que los bariones (que están compuestos de tres).

- Tiempo antes del surgimiento formal de la Cromodinámica Cuántica, los mesones ligeros (como los piones) se asociaban con los campos cuánticos que transmitían la fuerza nuclear, de la misma manera en que se asociaban los fotones a la fuerza electromagnética. Un ejemplo de esto es el modelo de Yukawa, que describe la interacción entre un campo escalar y un campo fermiónico, y que puede usarse para modelar la interacción entre nucleones utilizando como mediador de fuerza a los piones.
- Resulta interesante que los quarks que constituyen los hadrones, mediante la GDM, pueden adquirir una masa física de 300 - 400 MeV. Sin embargo, en el caso de los piones, éstos adquieren una masa física de alrededor de 70 MeV, mucho más ligeros que cualquier otro hadrón. Este fenómeno es interesante, y tiene que ver con la naturaleza de Bosón de Goldstone de los piones.

Los Bosones de Goldstone son partículas que aparecen de manera necesaria cuando aparece una ruptura espontánea de una simetría continua. Ésto se debe a que las corrientes se conservan, pero el estado base (vacío) no es invariante bajo la acción de las cargas correspondientes. Así, necesariamente aparecen en el espectro partículas escalares no masivas, llamadas Bosones de Goldstone.

Los piones resultan de la ruptura espontánea de la simetría quiral de QCD. Ésta simetría también se rompe también explícitamente debido a la masa de los quarks, o dinámicamente debido a la GDM. Así, aunque los piones, en principio, son no masivos, éstos adquieren una masa, aunque significativamente más pequeña que la del resto de los hadrones.

Ésta último punto es el motivo principal por el cuál elegimos a los piones para nuestro estudio, pues relaciona la existencia de los éstos y la Generación de Masa, mediante una única causa: **Ruptura de la simetría quiral**. Por éstas razones, entender a los piones y sus constituyentes, es entender la física hadrónica y la QCD.

3.2. Ecuación de Bethe-Salpeter

La ESD para el propagador del quark, nos proveyó de una descripción completamente relativista de la forma en que se propaga el quark entre dos puntos del espacio tiempo. Para describir a los mesones, necesitamos una ecuación que también nos brinde una descripción similar para el caso de estados ligados de dos partículas, particularmente estados ligados de quark y antiquark ($q\bar{q}$). La ecuación de Bethe-Salpeter (EBS, nos

permite dar esta descripción para cualquier estado ligado de dos partículas, en alguna teoría cuántica de campos, y por ello la utilizaremos para describir mesones. En esta ecuación, los estados ligados se identifican como polos en la matriz de dispersión $q\bar{q}$. La EBS se escribe como:

$$\Gamma_M^{ab}(p; P) = \int_q^\Lambda K(p, q; P) S^a(q + \eta P) \Gamma_M^{ab}(q; P) S^b(q - (1 - \eta)P), \quad (3.1)$$

donde el término $\Gamma_M^{ab}(p; P)$ corresponde a la amplitud de Bethe-Salpeter (ABS), que es el vértice quark-mesón. Además:

- Los superíndices a y b denotan que se trata de un mesón con un quark de sabor a y un antiquark de sabor b .
- $P^2 = -m^2$ es el momento total del mesón, donde m es la masa del mesón. A su vez, p corresponde al momento relativo entre el quark y el antiquark.
- El parámetro η especifica la cantidad del momento total que se comparte entre el quark y el antiquark. Para este trabajo, elegimos $\eta = 1/2$.
- El subíndice M especifica el tipo de mesón. En el caso de partículas vectoriales y axiales, también carga con un índice de Lorentz μ . Así podemos escribir Γ_μ para partículas vectoriales y $\Gamma_{5\mu}$ para partículas axiales.
- $K(p, q; P)$ es el Kernel de la EBS, y contiene todas las posibles interacciones entre el quark y el antiquark.

Diagramáticamente, la ecuación 3.1 corresponde a la figura 3.1.

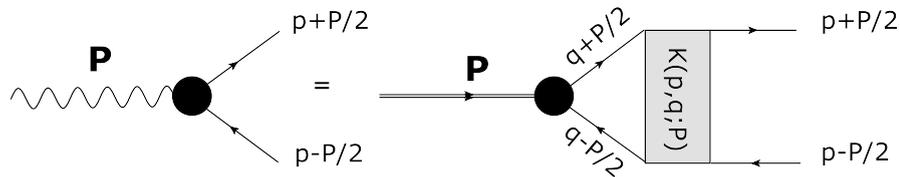


FIGURA 3.1: Ecuación de Bethe-Salpeter.

La ecuación (3.1) se puede escribir como:

$$[\Gamma_M^{ab}(p; P)]_{tu} = \int_q^\Lambda K(p, q; P) [\chi_M^{ab}(q; P)]_{sr}, \quad (3.2)$$

donde r, s, t, u son índices de color; χ_M^{ab} es la función de onda de Bethe-Salpeter y está dada por:

$$\chi_M^{ab}(q; P) = S^a(q + \eta P) \Gamma_M^{ab}(q; P) S^b(q - (1 - \eta)P). \quad (3.3)$$

La ABS tiene una solución correspondiente para el respectivo antimesón, $\bar{\Gamma}^{ba}(q; P)$, y se relacionan mediante el operador de conjugación de carga, $C = \gamma_2\gamma_4$, de la siguiente manera:

$$\bar{\Gamma}^{ba}(q; P) = [C^{-1}\Gamma_M^{ab}(-q; P)C]^T. \quad (3.4)$$

Así, es posible normalizar la ABS para que se describa un mesón (y antimesón) con probabilidad unitaria, siendo la condición de normalización:

$$2P_\mu = \frac{\partial}{\partial P_\mu} \left(\int_q^\Lambda \text{tr}[\bar{\Gamma}_M^{ab}(q; -K)S^a(q + \eta P)\Gamma_M^{ab}(q; K)S^b(q - (1 - \eta)P)] \right) \quad (3.5)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial P_\mu} \left(\int_q^\Lambda \int_k^\Lambda [\bar{\chi}_M^{ba}(k; -K)]_{ut} K_{tu}^{rs} [\chi_M^{ab}(q; K)]_{sr} \right), \quad (3.6)$$

donde $P^2 = K^2 = -m^2$. En general, una normalización adecuada de la ABS resulta en una corriente electromagnética conservada. Más adelante retomaremos la ecuación 3.2, y explicaremos como resolverla. Por lo pronto, bosquejaremos la derivación que nos permite llegar a ésta.

3.2.1. Derivación

Podemos entender la EBS como la ESD para una función de 4 puntos (o dos partículas), que se escribe, en el espacio de Minkowsky, de la siguiente manera:

$$G_{12}^{(4)} = [iS_1][iS_2] + [iS_1][iS_2]K_{12}G_{12}^{(4)}, \quad (3.7)$$

donde $G_{12}^{(4)}$ es la función de Green de dos partículas, $S_{1,2}$ los propagadores de cada partícula y K_{12} el kernel que contiene las posibles interacciones entre ellas. Sabiendo que los estados ligados aparecen como polos en la función de Green, pensamos este estado ligado como una partícula de masa m , y entonces, cerca de éste polo, podemos escribir:

$$G_{12}^{(4)} = \frac{\chi(p_0, p_i; P)\bar{\chi}(k_i, k_0; P)}{P^2 - m^2}, \quad (3.8)$$

donde P es el momento del sistema, p_0 y p_i son los momentos del quark saliente y entrante respectivamente (similarmente con k_i y k_0) y χ , $\bar{\chi}$ son las amplitudes de transición de los dos constituyentes al estado ligado, que también se les conoce como función de onda de Bethe-Salpeter (ecuación (3.3)). La conservación de momento implica $p_0 - p_i = P = k_0 - k_i$. De esta manera, la ecuación anterior se escribe:

$$\frac{\chi(p_0, p_i; P)\bar{\chi}(k_i, k_0; P)}{P^2 - m^2} = [iS_1][iS_2] + [iS_1][iS_2]K_{12} \frac{\chi(p_0, p_i; P)\bar{\chi}(k_i, k_0; P)}{P^2 - m^2}. \quad (3.9)$$

Cuando comparamos los residuos, obtenemos:

$$\chi(p_0, p_i; P) = \int_k [iS(k_0)][iS(k_i)]K_{12}(p_0, p_i; k_0, k_i) , \quad (3.10)$$

o bien, en términos de la ABS:

$$i\Gamma(p_0, p_i; P) = \int_k K(p_0, p_i; k_0, k_i)\chi(k_0, k_i; P) , \quad (3.11)$$

con $i\chi(p_0, p_i; P) = S(p_0)\Gamma(p_0, p_i; P)S(p_i)$. Escrito de otra manera:

$$i\Gamma(k, P) = \int_q [iS(q_1)][i\Gamma(k, P)][iS(q_2)]\mathcal{K} , \quad (3.12)$$

que en espacio Euclidiano nos da la forma de la ecuación 3.1:

$$\Gamma_M^{ab}(p; P) = \int_q^\Lambda K(p, q; P)\chi_M^{ab}(q; P) . \quad (3.13)$$

Hemos mostrado, a grandes rasgos, una manera de llegar a la EBS. En el Apéndice A, mostramos cómo es posible introducir el esquema de renormalización que utilizamos en el caso de la ESD, al caso de la EBS. En la siguiente sección plantearemos cómo resolver la EBS para el caso de mesones pseudoescalares, y más adelante, se resolverá específicamente para el pión.

3.3. EBS para Mesones Pseudoescalares

Para resolver la ABS de la ecuación 3.2,

$$[\Gamma_M^{ab}(p; P)]_{tu} = \int_q^\Lambda K(p, q; P)[S^a(q + \eta P)\Gamma_M^{ab}(q; P)S^b(q - (1 - \eta)P)]_{sr} , \quad (3.14)$$

usaremos la Aproximación Arcoiris, con el modelo MT. Ésto es:

$$K_{tu}^{rs}(p, q; P_i) \rightarrow -\frac{G(k^2)}{k^2}D_{\mu\nu}^0(k) \left[\frac{\lambda^c}{2}\gamma_\mu \right] \otimes \left[\frac{\lambda^c}{2}\gamma_\nu \right] . \quad (3.15)$$

Así, la EBS se escribe como:

$$\begin{aligned} \Gamma_M^{ab}(p; P_i) &= -\int_q^\Lambda \frac{G(k^2)}{k^2}D_{\mu\nu}^0(k) \frac{\lambda^c}{2}\gamma_\mu S^a(q + \eta P_i) \\ &\times \Gamma_M^{ab}(q; P_i) S^b(q - (1 - \eta)P_i) \frac{\lambda^c}{2}\gamma_\nu , \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde los diferentes números cuánticos de los mesones implican diferentes formas de $\Gamma_M^{ab}(q; P_i)$. Diagramáticamente, la ecuación 3.16 corresponde a la figura 3.2.

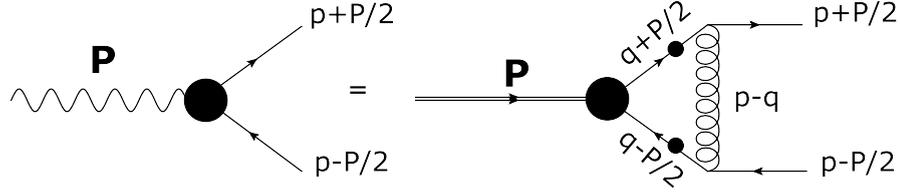


FIGURA 3.2: Ecuación de Bethe-Salpeter en la Aproximación Arcoiris.

La ecuación 3.16 sólo es válida para momentos discretos, tales que $P_i^2 = -m_i^2$, donde m_i es la masa del mesón en el estado i . Esta ecuación puede generalizarse a valores continuos del momento, al introducir artificialmente el parámetro $\lambda(P^2)$, de forma que:

$$\begin{aligned} \lambda(P^2)\Gamma_M^{ab} &= - \int_q^\Lambda \frac{G(k^2)}{k^2} D_{\mu\nu}^0(k) \frac{\lambda^c}{2} \gamma_\mu S^a(q + \eta P) \\ &\times \Gamma_M^{ab}(q; P) S^b(q - (1 - \eta)P) \frac{\lambda^c}{2} \gamma_\nu, \end{aligned} \quad (3.17)$$

así, cuando se cumple la condición $\lambda(P^2 = -m_i^2) = 1$ significa que tenemos soluciones de Bethe-Salpeter con masa m_i , siendo el valor más pequeño de m_i la masa del estado base.

La forma de $\Gamma_M^{ab}(q; P)$ es diferente para cada tipo de mesón, sin embargo es posible escribir una forma general:

$$\Gamma_M^{ab}(q; P) = \sum_{i=1}^N C_M^i(q; P) A^i(q; P), \quad (3.18)$$

es decir, la ABS se ha escrito como la suma de diferentes covariantes, $C_M^i(q; P)$, veces una amplitud invariante de Lorentz, $A^i(q; P)$.

Las transformaciones C , P , T que aplican a $\Gamma_M^{ab}(q; P)$ se dejan únicamente a la parte de los covariantes. Los covariantes que cumplen debidamente estas transformaciones, no generan una base única, pues una base de covariantes puede convertirse en otra mediante una transformación lineal. El número de covariantes, denotado por N , depende del tipo de mesón: para el caso de mesones escalares o pseudoescalares, $N = 4$; para mesones vectoriales o axiales, $N = 12$. Finalmente, para que las amplitudes $A^i(q; P)$ sea invariante de Lorentz, éstas deben depender únicamente de q^2 , P^2 y $q \cdot P$.

Resulta conveniente elegir una base ortonormal de covariantes, tal que cuando tomamos la traza sobre el espacio de Dirac, se cumpla:

$$\text{Tr}[C_M^i(q; P) C_M^j(q; P)] = \delta_{ij}, \quad (3.19)$$

de esta manera, la amplitud invariante A^i se escribe:

$$\lambda(P^2)A^i(p; P) = - \sum_{j=1}^N \int_q^\Lambda \frac{G(k^2)}{k^2} D_{\mu\nu}^0(k) R_{\mu\nu}^{ij} A^j(q; P), \quad (3.20)$$

donde hemos definido:

$$R_{\mu\nu}^{i,j}(p, q; P) = \text{tr} \left[C_M^i(p; P) \frac{\lambda^c}{2} \gamma_\mu S^a(q + \eta P) C_M^j(q; P) S^b(q - (1 - \eta)P) \frac{\lambda^c}{2} \gamma_\nu \right]. \quad (3.21)$$

La ecuación integral 3.17, ha sido transformada en un conjunto de ecuaciones integrales lineales acopladas (ecuación 3.20). Siguiendo el trabajo de doctorado de Dennis [21], a continuación se explica cómo resolver este sistema de manera general.

El diferencial de volumen está dado por:

$$\int^\Lambda d^4 q = \frac{1}{2} \int_0^{\Lambda^2} q^2 dq^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\pi \sin^2 \beta d\beta. \quad (3.22)$$

Elegimos P_μ de tal que que sólo se propague en la cuarta dirección, y p_μ en el plano 3-4.

De esta manera:

$$q = |q|(\cos \phi \sin \theta \sin \beta, \sin \phi \sin \theta \sin \beta, \cos \theta \sin \beta, \cos \beta), \quad (3.23)$$

$$p = |p|(0, 0, \sin \psi, \cos \psi), \quad (3.24)$$

$$P = P(0, 0, 0, 1), \quad (3.25)$$

por lo que se tiene:

$$q \cdot P = |q|P \cos \beta \quad (3.26)$$

$$p \cdot P = |p|P \cos \psi \quad (3.27)$$

$$q \cdot p = |q||p|(\cos \theta \sin \beta \sin \psi + \cos \beta \cos \psi). \quad (3.28)$$

De este conjunto de ecuaciones, vemos que la integración sobre ϕ en la ecuación 3.22, se puede realizar analíticamente. Realizando los cambios de variable $u = \cos \beta$, $v = \cos \theta$ y $w = \cos \psi$, reescribimos la ecuación 3.20 como:

$$\lambda(P^2)A^i(p; P) = - \frac{2\pi}{(2\pi)^4} \sum_{j=1}^N \int q^2 dq^2 \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} du \quad (3.29)$$

$$\times \frac{G(k^2)}{k^2} D_{\mu\nu}^0 R_{\mu\nu}^{ij}(p, q; P) A^j(q; P). \quad (3.30)$$

Con los cambios de variable realizados, se tiene además: $q \cdot P = |p|Pu$, $p \cdot P = |p|Pw$ y $p \cdot q = |p||q|(v\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-w^2} + uw)$.

Manejaremos la dependencia angular con w en términos de polinomios de Chebyshev del segundo tipo, ésto es:

$$A^i(p; P) = A^i(p^2, P^2, w) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(w) \tilde{A}_m^i(p^2, P^2). \quad (3.31)$$

Se procede similarmente para u . La ortonormalidad de los polinomios de Chebyshev, nos permite despejar los términos \tilde{A}_m^i , y ésto nos lleva a la ecuación:

$$\lambda(P^2) \tilde{A}_m^i(p^2, P^2) = \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\Lambda^2} B_{mn}^{ij}(p^2, q^2; P^2) \tilde{A}_n^j(q^2, P^2), \quad (3.32)$$

donde hemos definido:

$$\begin{aligned} B_{mn}^{ij}(p^2, q^2; P^2) &= -q^2 \frac{1}{8\pi^4} \int_{-1}^1 \sqrt{1-w^2} dw \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} du \quad (3.33) \\ &\times \frac{G(k^2)}{k^2} D_{\mu\nu}^0(k) U_m(w) R_{\mu\nu}^{ij}(p, q; P) U_n(u). \end{aligned}$$

Para realizar la integración sobre q , discretizamos los momentos sobre el rango de interés y elegimos una cuadratura. De la misma manera, discretizamos los momentos p_i , tal que $p_i = q_i \forall i$. Por otra parte, tenemos que tomar un número finito de polinomios de Chebyshev para realizar el cómputo. Así, la ecuación 3.32 se escribe como:

$$\lambda(P^2) \tilde{A}_m^i(p_k^2, P^2) = \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^{N'} \sum_{l=1}^{N_q} \Delta(q_l^2) B_{mn}^{ij}(p_k^2, q_l^2, P^2) \tilde{A}_n^j(q_l^2, P^2). \quad (3.34)$$

Hemos convertido una ecuación integral 3.32 en una ecuación de eigenvalores 3.34. Queremos conocer el valor de $-P_i^2 = m_i^2$ más pequeño que satisfaga 3.1, pues corresponde a un mesón de masa m_i en el estado base. En otras palabras, queremos conocer el valor de P^2 en el cuál el eigenvalor más grande cruza $\lambda(P^2) = 1$.

A continuación escribiremos la EBS para el pión, junto con algunas de sus propiedades, así como la manera de aplicar el método de resolución explicado en esta sección para resolverla.

3.3.1. EBS para el Pión

En el caso de los piones, y en general para mesones pseudoescalares con $J^{PC} = 0^{-+}$, la ABS tiene la forma general:

$$\Gamma_M^{ab}(q; P) = \sum_{i=1}^4 C_M^i(q; P) A^i(q; P) \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{qq}(p; P) &= i\gamma_5 E_\pi(p; P) + \gamma_5 \gamma \cdot P F_\pi(p; P) \\ &+ \gamma_5 \gamma \cdot p p \cdot P G_\pi(p; P) + \gamma_5 p_\alpha \sigma_{\alpha\beta} P_\beta H_\pi(q; P) . \end{aligned} \quad (3.36)$$

El pión neutro, π^0 , es un eigenestado de C , la conjugación de carga, que obedece $C|\pi^0 \rangle = +1|\pi^0 \rangle$. Por este hecho y de la ecuación 3.4, vemos que se cumple:

$$\bar{\Gamma}^{qq}(p; P) = +\Gamma^{qq}(p; P) . \quad (3.37)$$

Cuando trabajamos con el caso $m_u = m_d$, los piones cargados π^\pm además de tener la misma masa que el pión neutro π^0 , tienen las mismas amplitudes invariantes.

En la ecuación 3.36, escribimos la ABS en términos de covariantes y amplitudes, por lo que queremos llevar la ecuación integral 3.17 a una forma de ecuaciones integrales lineales acopladas, como se mencionó en la sección anterior. Para ello, sustituímos 3.36 en la ecuación 3.20. Las trazas correspondientes en este caso son:

$$T_1 = \text{tr}[i\gamma_5 \Gamma(p; P)] = -4E_\pi(p; P) \quad (3.38)$$

$$T_2 = \text{tr}[\gamma_5 \gamma \cdot P \Gamma(p; P)] = -4(P^2 F_\pi(p; P) + (p \cdot P)^2 G_\pi(p; P)) , \quad (3.39)$$

$$T_3 = \text{tr}[\gamma_5 \gamma \cdot p p \cdot P \Gamma(p; P)] = -4(p \cdot P)^2 (F_\pi(p; P) + p^2 G_\pi(p; P)) , \quad (3.40)$$

$$T_4 = \text{tr}[\gamma_5 p_\alpha \sigma_{\alpha\beta} P_\beta \Gamma(p; P)] = 4N^2(p, P) H_\pi(p; P) , \quad (3.41)$$

donde $N^2(p, P) = p^2 P^2 - (p \cdot P)^2$.

Notemos que solamente el primero y cuarto covariante son ortogonales al resto, por lo que podemos despejar $E_\pi(p; P)$ y $H_\pi(p; P)$ sin mayor dificultad, para luego sustituirlos en 3.20. Por otro lado, el segundo y tercero están acoplados entre sí. Para despejar $F_\pi(p; P)$ y $G_\pi(p; P)$, reescribimos 3.39 y 3.40 como una ecuación matricial y tomamos la inversa:

$$\begin{pmatrix} F_\pi(p; P) \\ G_\pi(p; P) \end{pmatrix} = N^2(p, P) \begin{pmatrix} -p^2/4 & 1/4 \\ 1/4 & -(p \cdot P)^2 P^2/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Para este trabajo consideraremos únicamente la amplitud $E_\pi(q; P)$, que corresponde al covariante γ_5 , por lo que únicamente nos concentraremos en resolver:

$$E_\pi(p; P) = \frac{1}{4} \frac{4}{3} \int_q^\Lambda \frac{G(k^2)}{k^2} D_{\mu\nu}^0(k) \quad (3.43)$$

$$\times \text{tr}[i\gamma_5 \gamma_\mu S(q + \eta P) \Gamma_\pi(q; P) S(q - (1 - \eta)P) \gamma_\nu] .$$

Al tomar la traza se obtiene:

$$E_\pi(p; P) = 4 \int_q^\Lambda \frac{G(k^2)}{k^2} (q^+ \cdot q^- \sigma_v^+ \sigma_v^- + \sigma_s^+ \sigma_s^-) E_\pi(q; P) , \quad (3.44)$$

donde $q^+ = q + \eta P$, $q^- = q - (1 - \eta)P$ y:

$$\sigma_{vs}^\pm \equiv \sigma_{vs}(q^\pm) . \quad (3.45)$$

Como mencionamos con anterioridad, se tomará $\eta = 1/2$. La traza de la ecuación 3.43, así como algunas propiedades de las matrices γ , se muestran en el Apéndice B.

Al tomar únicamente la amplitud $E_\pi(p; P)$ los resultados cualitativos no cambian. Por otra parte, los resultados cuantitativos no difieren en más del 20 % [21, 22]. Por lo pronto, explicaremos la resolución de la ecuación 3.44 en la siguiente sección.

3.4. Solución a la EBS para el Pión

Retomemos la ecuación 3.44:

$$E_\pi(p; P) = 4 \int_q^\Lambda \frac{G(k^2)}{k^2} (q^+ \cdot q^- \sigma_v^+ \sigma_v^- + \sigma_s^+ \sigma_s^-) E_\pi(q; P) , \quad (3.46)$$

Al trabajar únicamente con $E_\pi(p; P)$, en la ecuación 3.20 se tiene $N = 1$, y entonces la ecuación 3.34 se simplifica de la siguiente manera:

$$\lambda(P^2) \tilde{E}_m(p_k^2, P^2) = \sum_{n=0}^{N'} \sum_{l=1}^{N_q} \Delta(q_l^2) B_{mn}(p_k^2, q_l^2, P^2) \tilde{E}_n(q_l^2, P^2), \quad (3.47)$$

donde, los términos $B_{mn}(p_k^2, q_l^2, P^2)$ se escriben como:

$$B_{mn}(p^2, q^2, P^2) = \frac{q^2}{2\pi^4} \int_{-1}^1 \sqrt{1-w^2} dw \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} du \frac{G(k^2)}{k^2} \quad (3.48)$$

$$\times U_m(w) \left(\left(q^2 - \frac{P^2}{4} \right) \sigma_v^+ \sigma_v^- + \sigma_s^+ \sigma_s^- \right) U_n(u) , \quad (3.49)$$

con σ_{vs}^\pm definidas como en la ecuación 3.45.

Calculando cada término $\tilde{E}_m(p_k^2, P^2)$, podemos obtener $E(p; P)$ de la siguiente forma:

$$E(p; P) = E(p^2, P^2, w) = \sum_{m=0}^{N'} U_m(w) \tilde{E}_m(p^2, P^2). \quad (3.50)$$

La ecuación 3.47 es una ecuación matricial, con $(N' + 1) * N_q$ eigenvalores. Nos interesa conocer el valor de P^2 más pequeño tal que $\lambda(P^2) = 1$, pues es allí cuando $P^2 = -m_i^2$, la masa del estado base. Ésta condición ocurre para el valor dominante de $\lambda(P^2)$, el más grande en valor absoluto, por lo que se puede obtener mediante el método de potencias explicado en el Apéndice C.

Para resolver 3.47, necesitamos además conocer a los propagadores de quarks para cada valor posible de $q_\pm^2 = (q \pm P)^2$, incluyendo valores negativos de P^2 . Conociendo las partes escalar y vectorial del propagador del quark, que se calcularon en el capítulo anterior para valores discretos del momento, en la siguiente sección veremos cómo podemos conocer el propagador para cada valor del momento.

3.4.1. Parametrización 3ccp

Para poder resolver 3.34 necesitamos de entrada conocer $\sigma_v(p)$ y $\sigma_s(p)$. En el capítulo anterior, se calcularon $A(p), B(p), M(p)$ y $Z(p)$, por lo que que obtener $\sigma_v(p)$ y $\sigma_s(p)$ resulta inmediato. Sin embargo, sólo conoceríamos $\sigma_v(p)$ y $\sigma_s(p)$ para valores discretos de p y se requiere entonces realizar un tipo de interpolación. El riesgo al usar este tipo de acercamiento, es la presencia de errores de cálculo debido a la interpolación debido a que hemos usado únicamente valores positivos de p^2 para la resolución de la ESD.

Se puede tener un enfoque distinto a este problema al parametrizar las soluciones en lugar de interpolarlas. Una manera conveniente de hacerlo es utilizar la parametrización 3ccp [22], que emplea una combinación lineal de propagadores libres con masas complejas conjugadas. Ésto es:

$$S(q) = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{z_k}{i\gamma \cdot q + m_k} + \frac{z_k^*}{i\gamma \cdot q + m_k^*} \right), \quad (3.51)$$

donde m_k , z_k son parámetros complejos. Así, podemos parametrizar las partes vectorial y escalar de la siguiente manera:

$$\sigma_v(q) = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{z_k}{q^2 + m_k^2} + \frac{z_k^*}{q^2 + m_k^2} \right), \quad (3.52)$$

$$\sigma_s(q) = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{z_k m_k}{q^2 + m_k^2} + \frac{z_k^* m_k^*}{q^2 + m_k^2} \right). \quad (3.53)$$

Tenemos 12 parámetros independientes que se ajustan de manera que reproduzcan el comportamiento de las funciones involucradas cuando $q^2 \rightarrow \infty$, ésto es:

$$M(q^2 \rightarrow \infty) = m \Rightarrow 2 \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re}(z_k m_k) = m, \quad (3.54)$$

$$Z(q^2 \rightarrow \infty) = 1 \Rightarrow 2 \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re}(z_k) = 1, \quad (3.55)$$

$$q^4 \sigma_s(q^2 \rightarrow \infty) \rightarrow C \Rightarrow -2 \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re}(z_k m_k^3) = C, \quad (3.56)$$

donde C corresponde al condensado. En las figura 3.3 y 3.4 se muestran la parte escalar y vectorial del propagador, respectivamente. Habiendo parametrizado los propagadores, ya es posible resolver la ecuación 3.34. En la siguiente sección se mostrarán los resultados numéricos obtenidos de la EBS para el caso en el que sólo se tiene $E_\pi(p; P)$.

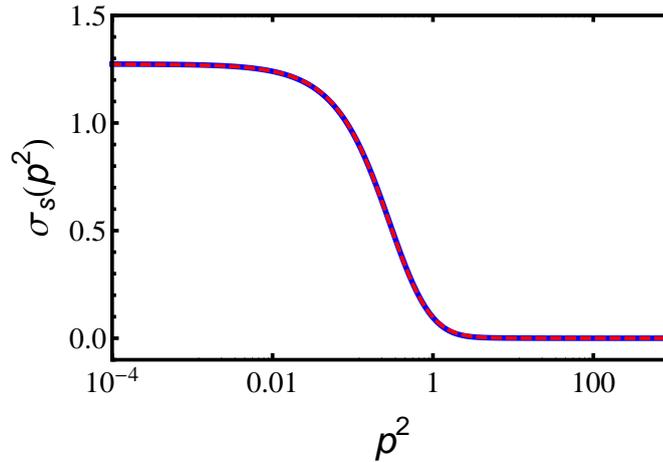


FIGURA 3.3: **Parte escalar del propagador:** (rojo, sólido) Cálculo directo, (verde, líneas) Parametrización 3ccp.

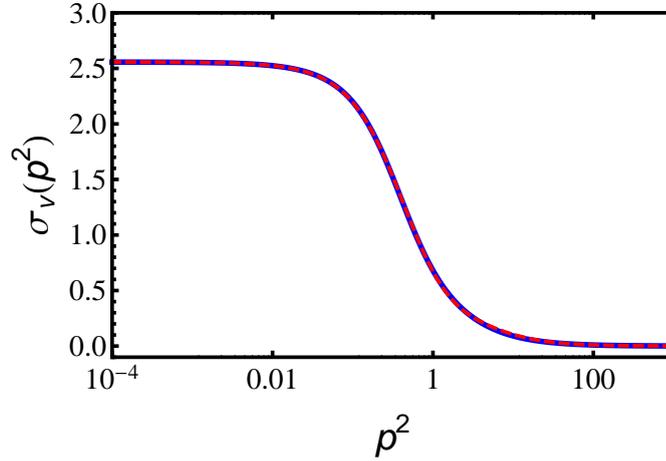


FIGURA 3.4: **Parte vectorial del propagador:** (rojo, sólido) Cálculo directo, (verde, líneas) Parametrización 3cep.

3.5. Resultados Numéricos

3.5.1. Límite Quiral

Calculamos también $E_\pi(q; P)$. En éste límite, $P^2 \rightarrow 0$, la ecuación 3.44:

$$E_\pi(p; P) = 4 \int_q^\Lambda \frac{G(k^2)}{k^2} \left(\left(q^2 - \frac{P^2}{4} \right) \sigma_v^+ \sigma_v^- + \sigma_s^+ \sigma_s^- \right) E_\pi(q; P), \quad (3.57)$$

se simplifica considerablemente:

$$\begin{aligned} E_\pi(p; P=0) &= 4 \int_q^\Lambda \frac{G(k^2)}{k^2} (q^2 \sigma_v^2(q^2) + \sigma_s^2(q^2)) E_\pi(q; P=0) \\ &= 4 \int_q^\Lambda \frac{G(k^2)}{k^2} \sigma_v^2(q^2) \left(q^2 + \frac{\sigma_s^2(q^2)}{\sigma_v^2(q^2)} \right) E_\pi(q; P=0). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Al tomar $P^2 = 0$, hemos removido la dependencia angular con ésta variable, por lo que el tratamiento numérico se simplifica considerablemente. El resultado para este caso se muestra en la figura 3.5.

3.5.1.1. Normalización Canónica y f_π

Calculamos también la normalización canónica de la ecuación 3.5:

$$2P_\mu = \frac{\partial}{\partial P_\mu} \left(\int_q^\Lambda \text{tr} [\bar{\Gamma}_M^{ab}(q; -K) S^a(q + \eta P) \Gamma_M^{ab}(q; K) S^b(q - (1 - \eta)P)] \right)_{P^2=0} \quad (3.59)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial P_\mu} \left(\int_q^\Lambda \int_k^\Lambda [\bar{\chi}_M^{ba}(k; -K)]_{ut} K_{tu}^{rs} [\chi_M^{ab}(q; K)]_{sr} \right)_{P^2=0}. \quad (3.60)$$

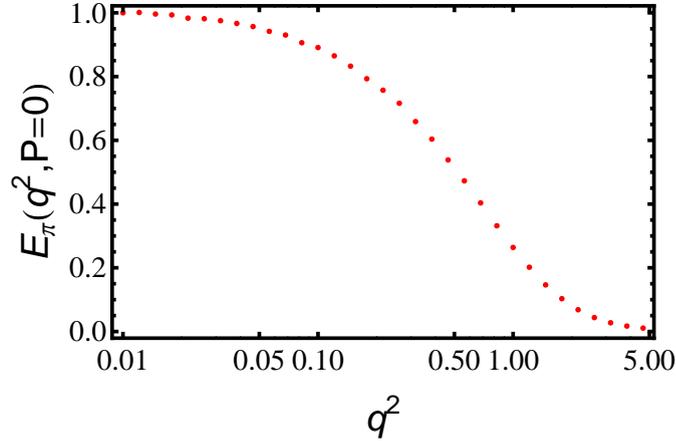


FIGURA 3.5: Amplitud $E_\pi(q^2, P = 0)$, normalizada, en el límite quiral. La similitud con la Función de Masa proviene de la Identidad Axial de Ward en el límite quiral 3.71.

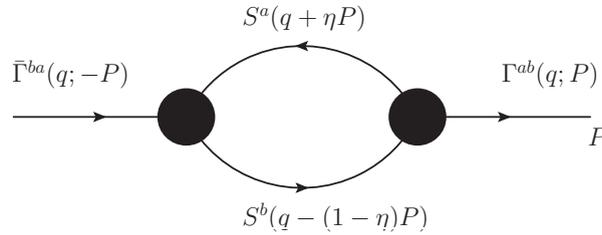


FIGURA 3.6: **Polarización del vacío.** La normalización canónica en la aproximación arcoiris, corresponde al diagrama de polarización del vacío.

En el caso de la Aproximación Arcoiris, el segundo término es cero, pues el Kernel de la ecuación no depende del momento total, así:

$$2P_\mu = \frac{\partial}{\partial P_\mu} \left(\int_q^\Lambda \text{tr}[\bar{\Gamma}_M^{ab}(q; -K) S^a(q + P/2) \Gamma_M^{ab}(q; K) S^b(q - P/2)] \right)_{P^2=0} \quad (3.61)$$

Diagramáticamente corresponde a un loop de quarks como se muestra en la figura 3.6.

Tomando:

$$\frac{\partial}{\partial P_\mu} = 2P_\mu \frac{\partial}{\partial P^2}, \quad (3.62)$$

reescribimos 3.61 como:

$$1 = \frac{\partial}{\partial P^2} \left(\int_q^\Lambda \text{tr}[\bar{\Gamma}_M^{ab}(q; -K) S^a(q + P/2) \Gamma_M^{ab}(q; K) S^b(q - P/2)] \right)_{P^2=0}. \quad (3.63)$$

En general, para estados pseudoescalares se encuentra:

$$N^2 = \frac{\partial}{\partial P^2} \left(\int_q^\Lambda \text{tr}[\bar{\Gamma}_M^{ab}(q; -K) S^a(q + P/2) \Gamma_M^{ab}(q; K) S^b(q - P/2)] \right)_{P^2=0}. \quad (3.64)$$

Ésto lo podemos relacionar, además, con la energía propia del pión o la polarización del vacío:

$$N^2 = 2 \left[\frac{\partial}{\partial P^2} \Pi(K, P) \right]_{K^2=P^2=0}, \quad (3.65)$$

donde la polarización del vacío, $\Pi(K, P)$, está dada como:

$$\Pi(K, P) = \left(\int_q^\Lambda \text{tr}[\bar{\Gamma}_M^{ab}(q; -K) S^a(q + \eta P) \Gamma_M^{ab}(q; K) S^b(q - (1 - \eta)P)] \right). \quad (3.66)$$

Con el cálculo de la normalización canónica, podemos calcular f_{pi} :

$$f_\pi = -\frac{Z_2 N_c}{m_\pi^2} \int_q^\Lambda P_\mu \text{tr}[\Gamma^{du}(q; P) S^u(q^-) \gamma_\mu \gamma_5 S^d(q^+)], \quad (3.67)$$

donde Γ^{du} ha sido debidamente normalizado de acuerdo a la ecuación 3.64.

Se obtuvo como resultado $f_\pi = 0.126$ GeV, que difiere en 4% del valor experimental.

3.5.1.2. Identidad Axial de Ward-Takahashi

Hemos mencionado con anterioridad, de que la existencia de los piones así como la Generación de Masas, están relacionadas mediante una única causa, que es la Ruptura de la Simetría Quiral. Este hecho se observa mediante la Identidad Axial de Ward-Takahashi, en el límite quiral:

$$P_\mu \Gamma_{5\mu} = S^{-1}(q^+) (i\gamma_5) + (i\gamma_5) S^{-1}(q^-), \quad (3.68)$$

donde $\Gamma_{5\mu}$ corresponde a la amplitud para una partícula axial, y está dada en su descomposición general como:

$$\Gamma_{5\mu}^j(k; P) = \frac{\tau^j}{2} \gamma_5 [\gamma_\mu F(k; P) + \gamma \cdot k k_\mu G(k; P) - \sigma_{\mu\nu} k_\nu H(k; P)] \quad (3.69)$$

$$+ \tilde{\Gamma}_{5\mu} + f_\pi \frac{P_\mu}{P^2} \Gamma_\pi^j(k; P), \quad (3.70)$$

donde $\Gamma_\pi^j(k; P)$ corresponde a la amplitud general para el pión de la ecuación 3.36.

Esta identidad asegura que las EBS han sido truncadas consistentemente, al cuidar que se preserve la simetría quiral, y asegura que los piones son los bosones de Goldstone. Además, nos dice que la función de masa y la amplitud $E_\pi(k, P = 0)$ son proporcionales en el límite quiral:

$$f_\pi E_\pi(k, P = 0) = B(k). \quad (3.71)$$

Como consecuencia, si hay ruptura dinámica de la simetría quiral, hay un estado ligado de una partícula pseudoescalar no masiva (bosón de Goldstone) y viceversa: la presencia de un estado no masivo pseudoescalar indica que la simetría quiral fue rota de manera dinámica.

3.5.2. Fuera del límite quiral

Se resolvió la ABS para el pión, en el caso donde sólo tenemos la amplitud $E_\pi(q; P)$. Para ello se resolvió el sistema 3.47, utilizando únicamente uno y dos términos de Chebyshev en la expansión. Después se sustituyeron las amplitudes obtenidas en la ecuación 3.50.

Se observó que al utilizar uno y dos términos de Chebyshev, el resultado cambia en menos del 2 %, en la figura 3.7 se muestra el resultado para el primer término de Chebyshev.

Se obtuvo $m_\pi = 41$ MeV, valor que discrepa 70 % con el valor experimental. Ésta diferencia es de esperarse pues la masa de los quarks u/d son muy pequeñas, y aunque la parametrización 3ccp es muy precisa, el ruido numérico afecta considerablemente. Para mesones compuestos de quarks más pesados, éste no es el caso, como se muestra en la tesis doctoral de Souchlas [22]. Por otra parte, la diferencia entre usar una amplitud o las cuatro, afecta a la masa del pión entre el 10 y 20 % [21].

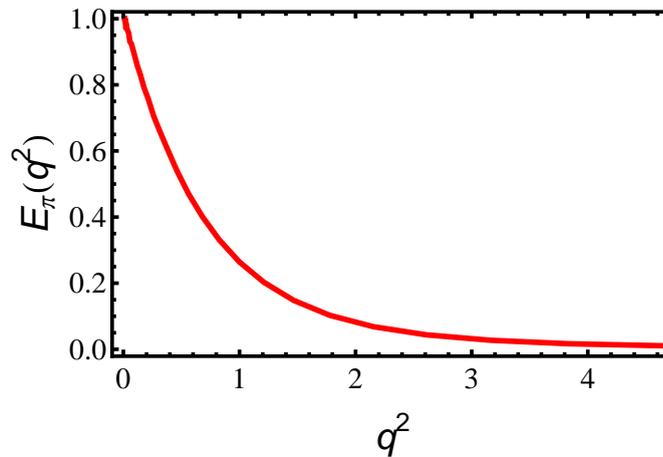


FIGURA 3.7: **Amplitud** $E_\pi(q^2, P)$. Ésta amplitud corresponde a una solución a la BSE para un pión de masa $m_\pi = 41$ MeV.

Capítulo 4

Resultados y Conclusiones

En el presente trabajo se estudió la Cromodinámica Cuántica, la interacción fundamental que existe entre los quarks y gluones, partículas elementales, mediante la Ecuación de Schwinger-Dyson para el propagador del quark; así mismo, al estado ligado más ligero de un quark y un anti-quark, es decir el pión (un hadrón) mediante la ecuación de Bethe-Salpeter. Es decir, mediante el enfoque particular para el pión, estudiamos la QCD a nivel de hadrones, así como a nivel de sus constituyentes, o quarks.

4.1. Resultados

En el primer capítulo, se escribió el Lagrangiano de QCD en una forma tal que las observables físicas no diverjan al calcular correcciones radiativas a nivel de un lazo y más allá. A partir de esto, se escribió la Ecuación de Schwinger-Dyson para el propagador del quark en términos de sus funciones y cantidades renormalizadas. En el segundo capítulo, se propuso un truncamiento para la ESD y se refinó de dos maneras diferentes; se estudió, principalmente, la Función de Masa y su invarianza con el punto de renormalización. En el tercer capítulo, se estudió la Ecuación de Bethe-Salpeter para el pión, se calculó su masa y la constante de decaimiento leptónico de éste.

4.1.1. Ecuación de Schwinger-Dyson para el propagador del Quark

Teniendo escrita la ESD renormalizada, en el segundo capítulo truncamos la ESD usando la Aproximación Arcoiris, que consiste en reemplazar el propagador del gluón y el vértice quark-gluón completos, por sus contrapartes desnudas. Además, se introdujo un acoplamiento efectivo, siguiendo el modelo de Maris y Tandy [12]. La diferencia con otros trabajos [11–13, 21], consiste en una constante adicional $\mathcal{Z}_{2F}(\mu, \Lambda)$ en la ESD (véanse

ecuaciones 2.3 y 2.18). La presencia de esta constante fue fundamental en los cálculos, principalmente para la Función de Masa, donde al no incluirla se observaba una diferencia muy notoria en la masa generada dinámicamente al elegir distintos puntos de renormalización.

Se estudió la Función de Masa para distintos valores de la masa de corriente del quark, y distintos puntos de renormalización $\mu = 4, 19$ GeV. Se observó que las masas generadas dinámicamente no cambian en más del 5%, por lo que las podemos justificar como invariantes. Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

$m(\mu)$ (MeV)	$M(0, \mu = 4)$ (MeV)	$M(0, \mu = 19)$ (MeV)	Error
$m(\mu) = 0$	511	485	5 %
$m_{u/d}(\mu) = 3.74$	520	499	4 %
$m_s(\mu) = 95$	681	704	3 %

En el límite quiral, se estudió además el condensado y el confinamiento. Se observó un condensado de $(0.255 \text{ GeV})^3$ y $(0.276 \text{ GeV})^3$ para $\mu = 4$ GeV y $\mu = 19$ GeV, respectivamente, valores que difieren en 8%. Mediante el criterio de la violación del axioma de reflexión positividad de la función de Schwinger, vimos además que en efecto estamos tratando con una partícula confinada.

Más adelante, se estudió el cambio de la Función de Masa (en el límite quiral) como potencia del momento del gluón, $(q^2)^\alpha$, donde $\alpha \in [0, 1]$. Para ello, propusimos un refinamiento al modelo MT. Se observó que la relación con la potencia del momento del gluón no debe ser lineal, sino polinómica. Vimos que a medida que el valor α decrece, surgen complicaciones numéricas que tal vez están relacionadas con le existencias de soluciones múltiples [19], por lo que para valores de α pequeños, propusimos un modelo similar al de Nambu-Jona-Lasinio [20]. Juntando éstos dos ingredientes, estudiamos el cambio de la Función de Masa para cualquier valor de $\alpha \in [0, 1]$. Durante el proceso, se adaptaron los parámetros que involucra cada refinamiento de manera que la masa generada dinámicamente, así como el condensado, permanecieran invariantes.

4.1.2. Ecuación de Bethe-Salpeter para el Pión

En el tercer capítulo se estudio la EBS para el pión, empleando la Aproximación Arcoiris con el modelo MT. Tomamos únicamente la amplitud $E_\pi(p; P)$, que corresponde al covariante γ_5 de la amplitud de BS. Ésto es porque se simplifican considerablemente los cálculos, además de que se ha observado que concentra entre el 80 y 90 % de la contribución total a la ABS en el infrarrojo [21, 22].

Para la resolución de la EBS, se tomó el propagador del quark obtenido en el capítulo anterior para $\alpha = 1$ y $\mu = 19$ GeV. Mediante la parametrización 3ccp, descrita en el trabajo de Souchlas [22], extendimos el propagador para momentos en el plano complejo.

A partir de esto, se calculó la masa del pión para $m_{u/d} = 3.74$ MeV, obteniendo como resultado 41 MeV, valor que discrepa en 70 % con el valor experimental. Como se explicó anteriormente, esto tiene que ver con el hecho de que las masas de los quarks u/d son muy pequeñas, y por lo tanto cualquier desviación (por mínima que sea) en la parametrización 3ccp, afecta de manera significativa. Esta parametrización funciona mejor para quarks más pesados [22].

Por otra parte, en el límite quiral se calculó la constante de decaimiento leptónico del pión f_π , obteniendo $f_\pi = 0.126$ GeV, valor que difiere en 4 % del experimental ($f_\pi = 0.131$ GeV). Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

Observable	V. Calculado (MeV)	V. Experimental (MeV)	Error
f_π	126	131	4 %
m_π	41	138.5	70 %

4.2. Conclusiones

De los resultados obtenidos en este trabajo, podemos concluir lo siguiente:

1. **Función de Masa y El Punto de Renormalización:** El esquema de renormalización empleado para la resolución de la ESD se probó exitoso. La inclusión de la constante \mathcal{Z}_{2F} adicional, por razones físicas fundamentales, fue crucial en asegurar que la Función de Masa es independiente del punto de renormalización. Los trabajos anteriores de Maris y Tandy usan el punto de renormalización como $\mu = 19$ GeV. Uno espera que el punto de renormalización $\mu = 4$ GeV sea suficiente para garantizar el comienzo del comportamiento perturbativo de QCD. Nuestro ansatz modificado, con un factor adicional de \mathcal{Z}_{2F} logra que las funciones de masa para los dos valores del punto de renormalización, es decir $\mu = 19$ GeV y $\mu = 4$ GeV, produzca funciones de masa que son prácticamente iguales, con una diferencia de 5 % o menos, dependiendo de los momentos involucrados. La independencia de la Función de Masa sobre el punto de renormalización también se espera invocando la renormalización multiplicativa del propagador del quark.

2. **Parametrización de la Función de Masa:** El objetivo final de nuestra tesis es generar las herramientas para poder calcular factores de forma (elásticos y de transición) de los hadrones, tanto de mesones como de bariones en un futuro cercano. Éstos cálculos requieren el conocimiento del propagador de quark en el plano complejo. Dicho cálculo tiene enormes dificultades. Por lo tanto, la estrategia razonable es representar el propagador del quark con una parametrización adecuada que se pueda continuar de manera analítica en el plano complejo. Nosotros seguimos la pista de Souchlas [22] para escribir el propagador de quark con una representación 3ccp. Posteriormente, también verificamos que es una buena representación, salvo a la computación de la masa de pión que da resultados con un error de hasta 70%.
3. **Amplitud de Bethe-Salpeter:** En esta tesis también resolvimos la ecuación relativista de Bethe-Salpeter para el estado ligado de un quark y un anti-quark. El número de las amplitudes de Bethe-Salpeter involucradas depende del espín del estado ligado. Nosotros estudiamos el pión. Como pión tiene espín cero (es un pseudo-escalar), se requieren cuatro amplitudes de Bethe-Salpeter para su descripción completa. Sin embargo, se sabe por experiencia que en el infrarrojo, sólo una de estas amplitudes es dominante, la llamada $E_\pi(p; P)$. En el ultravioleta las otras amplitudes también juegan un papel importante. Como nosotros calculamos únicamente las cantidades estáticas del pión, utilizamos sólo $E_\pi(p; P)$. Cabe mencionar que el cálculo eventual de factores de forma debe involucrar todas las amplitudes para hacer una conexión confiable con QCD asintótica. Usando nuestro resultado, evaluamos la masa del pión y constante de decaimiento leptónico de éste.
4. **Función de Masa y sus consecuencias experimentales:** Como hemos mencionado anteriormente, el objetivo principal de esta tesis es generar las herramientas para realizar el cálculo de factores de forma a un amplio rango del momento cuadrado del fotón que analiza al hadrón. En 2009 aparecieron los resultados experimentales de Babar [23]. Estos resultados parecían sugerir que el factor de forma de $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma^*$ decae como $1/q^{3/2}$ en vez de la predicción $1/q^2$ de QCD asintótica. Resultados posteriores de Belle [24] se acercan más a las predicciones de QCD pero hay que esperar resultados más precisos y a momentos más grandes para confirmar o rechazar el acuerdo con QCD. Se planea realizar estas mediciones en el experimento de Belle II. Es bien conocido que el decaimiento asintótico del propagador gluónico, o el acoplamiento efectivo, se transmite en el comportamiento correspondiente de la función de masa que entra directamente en los cálculos de las ABS y posteriormente de los factores de forma. Para ver qué tipo de comportamiento asintótico de los factores de forma se favorece en el experimento, creemos indispensable estudiar todo el problema variando la potencia α en $(q^2)^\alpha$ en el acoplamiento efectivo. Nosotros ya tenemos los resultados correspondientes para la Función de

Masa del quark. Cómo se transmite esta dependencia en las ABS y factores de forma queda ver se.

4.3. A futuro

Algunas cosas que quedan para desarrollo a futuro:

1. Estudiar cómo cambia la masa del pión en función de las masas de los quarks u/d. A partir de aquí se puede estudiar, por ejemplo, la relación de GellMann-Oakes-Renner [5] y las formulas de masas de Gell-Mann-Okubo, incluyendo la masa del quark strange.
2. Realizar un estudio similar al de la ESD y observar como cambia la EBS en función de la potencia del momento del gluón.
3. Buscar una manera alternativa a la 3ccp para extender el propagador del quark al plano complejo para obtener mejor resultado para la masa del pión.
4. Similarmente, parametrizar la amplitud $E_\pi(p; P)$ de manera que podamos extenderla al plano complejo.
5. Calcular el factor de forma electromagnético de forma electromagnético de los piones cargados y el factor de forma de transición $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*$ en la aproximación de impulso, utilizando $E_\pi(p; P)$ y su parametrización.
6. Repetir los cálculos incluyendo el resto de las amplitudes y realizar comparaciones con resultados de Babar y Belle. Además queremos tener predicciones listas para futuras mediciones que se van a realizar en JLab y Belle II.

Apéndice A

Renormalización de la EBS

El esquema de renormalización que usamos en la ESD del capítulo anterior, no fue utilizado en ningún momento en la resolución de la EBS para el pión, por lo que todas las cantidades dependen del corte Λ . Para remover esta dependencia, como se hizo en el capítulo 2, veremos cada una de las partes de la ABS:

$$\Gamma_M^{ab}(p; P; \Lambda) = \int_q^\Lambda K(p, q; P; \Lambda) S_B^a(q + \eta P, \Lambda) \Gamma_M^{ab}(q; P; \Lambda) S_B^b(q - (1 - \eta)P; \Lambda) . \quad (\text{A.1})$$

Un primer paso, es escribir los propagadores como $S(q, \mu) = \mathcal{Z}_{2F} S_B(q, \Lambda)$, así:

$$\Gamma_M^{ab}(p; P) = \mathcal{Z}_{2F}^2 \int_q^\Lambda K(p, q; P) S^a(q + \eta P) \Gamma_M^{ab}(q; P) S^b(q - (1 - \eta)P) . \quad (\text{A.2})$$

La parte del Kernel se divide en dos vértices quark-gluón (uno de ellos desnudo para evitar conteo doble, uno de ellos completo), constante de acoplamiento y propagador del gluón. Nosotros de entrada simplificamos cada parte para tener la Aproximación Arcoiris con el modelo MT, ésto es:

$$K(p, q; P; \Lambda) = -G(k^2) D_{\mu\nu}^0(k; \Lambda) \left(\frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \right) \otimes \left(\frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \right) . \quad (\text{A.3})$$

Ninguna cantidad involucrada en el Kernel está renormalizada, en primer lugar porque al introducir directamente este kernel simplificado, nos hemos saltado la parte en la que se involucran las constantes de renormalización. Una manera más adecuada entonces, es comenzar con las cantidades completas:

$$K(p, q; P; \Lambda) = -g^2(k^2; \Lambda) D_{\mu\nu}(k; \Lambda) \left(\frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \right) \otimes \Gamma_\nu(p, q; \Lambda) , \quad (\text{A.4})$$

que son cantidades que dependen del corte Λ . Para quitar esta dependencia, las escribimos en términos de sus versiones renormalizadas, añadiendo las respectivas constantes de renormalización:

$$\begin{aligned} K(p, q; P) &= -[\mathcal{Z}_g^2 g^2(k^2)][\mathcal{Z}_3 D_{\mu\nu}(k)] \left(\frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \right) \otimes [\mathcal{Z}_{1F}^{-1} \Gamma_\nu(p, q)] \\ &= -[\mathcal{Z}_g^2 \mathcal{Z}_3 \mathcal{Z}_{1F}^{-1}] \left[g^2(k^2) D_{\mu\nu}(k) \left(\frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \right) \otimes \Gamma_\nu(p, q) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

para así, quitar la dependencia con el corte Λ . Siguiendo los pasos de la sección 2.1, tomamos:

$$\begin{aligned} \Gamma_\nu(p, q) &\rightarrow \mathcal{Z}_{1F} \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu, \\ \mathcal{Z}_{1F} g^2 D_{\mu\nu}(k) &\rightarrow G^2(k^2) D_{\mu\nu}^0(k), \end{aligned}$$

por lo que ahora el kernel se escribe como:

$$K(p, q; P) = -[\mathcal{Z}_g^2 \mathcal{Z}_3 \mathcal{Z}_{1F}^{-1}] \left[G^2(k^2) D_{\mu\nu}^0(k) \left(\frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \right) \otimes \left(\frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \right) \right]. \quad (\text{A.6})$$

Sustituímos A.6 en A.2, y obtenemos:

$$\Gamma_M^{ab}(p; P) = [\mathcal{Z}_g^2 \mathcal{Z}_{2F}^2 \mathcal{Z}_3 \mathcal{Z}_{1F}^{-1}] \int_q^\Lambda K'(p, q; P) S^a(q + \eta P) \Gamma_M^{ab}(q; P) S^b(q - (1 - \eta)P), \quad (\text{A.7})$$

donde:

$$K'(p, q, P) = - \left[G^2(k^2) D_{\mu\nu}^0(k) \left(\frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \right) \otimes \left(\frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \right) \right], \quad (\text{A.8})$$

es el Kernel en términos de cantidades renormalizadas.

Por una parte, tenemos que $\mathcal{Z}_g^2 \mathcal{Z}_{2F}^2 \mathcal{Z}_3 = \mathcal{Z}_{1F}^2$; además, con el vértice desnudo (aproximación Abeliiana) $\mathcal{Z}_{1F} = \mathcal{Z}_{2F}$, por lo que la ecuación A.7 se escribe como:

$$\Gamma_M^{ab}(p; P) = \mathcal{Z}_{2F} \int_q^\Lambda K'(p, q; P) S^a(q + \eta P) \Gamma_M^{ab}(q; P) S^b(q - (1 - \eta)P). \quad (\text{A.9})$$

Así, hemos llegado a una versión renormalizada de la ecuación 3.1, que es la ecuación A.9. La forma de A.9 con respecto a 3.1 difiere únicamente en el factor \mathcal{Z}_{2F} que aparece multiplicando a la integral, por lo que cualquier tratamiento numérico para su resolución aplica igual para las dos.

Apéndice B

Matrices gamma y trazas

Ya sea en la ESD o en la EBS, para su resolución necesitamos tomar trazas que involucran matrices de Dirac o matrices Gamma. A continuación se presentan algunas propiedades de éstas matrices, así como un ejemplo de la aplicación de éstas.

B.1. Matrices Gamma

Las **matrices gamma**, $\{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$, o matrices de Dirac, se definen mediante su relación de anticonmutación:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I, \quad (\text{B.1})$$

donde I es la matriz identidad de $d \times d$ y $g^{\mu\nu}$ el tensor métrico.

En 4 dimensiones ($d = 4$), además de estas matrices, podemos definir $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Que verifica las siguientes propiedades:

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\text{B.2})$$

$$(\gamma^5)^2 = I, \quad (\text{B.3})$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = \gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5 = 0. \quad (\text{B.4})$$

Para $d \neq 4$, en el esquema de regularización dimensional, se pueden usar las propiedades de ésta matriz sin introducir ambigüedades [25].

Algunas otras propiedades de las matrices γ son:

1. $\gamma^\mu \gamma_\mu = dI$

2. $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = (2 - d)\gamma^\nu$
3. $\text{tr}[\# \text{ impar de } \gamma] = 0$
4. $\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = d g^{\mu\nu}$
5. $\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = d (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$

B.2. Trazas

Con las propiedades anunciadas anteriormente, mostramos como ejemplo el cálculo explícito de la traza involucrada en la ecuación 3.43 y su contracción con $D_{\mu\nu}^0(k)$.

$$\begin{aligned}
 E_\pi(p; P) &= \frac{1}{4} \frac{4}{3} \int_q^\Lambda \frac{G(k^2)}{k^2} D_{\mu\nu}^0(k) \\
 &\times \text{tr}[i\gamma_5 \gamma_\mu S(q + \eta P) E_\pi(q; P) S(q - (1 - \eta)P) \gamma_\nu].
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

En este trabajo se tiene $\eta = 1/2$, y además:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_\pi^{ud}(q; P) &= i\gamma_5 E_\pi(q; P), \\
 S(q^\pm) &= -i\gamma \cdot q^\pm \sigma_v^\pm + \sigma_s^\pm,
 \end{aligned}$$

donde $q^\pm = q \pm P/2$ y $\sigma_{vs}^\pm = \sigma_{vs}(q^\pm)$.

Queremos calcular entonces:

$$\text{tr}[i\gamma_5 \gamma_\mu (-i\gamma \cdot q^+ \sigma_v^+ + \sigma_s^+) i\gamma_5 E_\pi(q; P) (-i\gamma \cdot q^- \sigma_v^- + \sigma_s^-) \gamma_\nu], \tag{B.6}$$

que se debe contraer con:

$$\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right). \tag{B.7}$$

En primera instancia podemos sacar $-E_\pi(q; P)$ de la traza. Además, podemos escribir $\gamma \cdot q^\pm$ como: $\gamma \cdot q^+ = \gamma_\lambda q_\lambda^+$ y $\gamma \cdot q^- = \gamma_\rho q_\rho^-$. De esta manera tenemos que calcular:

$$-E_\pi(q; P) \text{tr}[\gamma_5 \gamma_\mu (-i\gamma_\lambda q_\lambda^+ \sigma_v^+ + \sigma_s^+) \gamma_5 (-i\gamma_\rho q_\rho^- \sigma_v^- + \sigma_s^-) \gamma_\nu]. \tag{B.8}$$

Vemos que, con los productos cruzados $\sigma_v^+ \sigma_s^-$ y $\sigma_v^- \sigma_s^+$, tenemos un número impar de matrices gamma y por lo tanto las trazas se anulan. Así, únicamente debemos calcular:

$$\begin{aligned}
 \text{tr}[\gamma_5 \gamma_\mu (-i\gamma_\lambda q_\lambda^+ \sigma_v^+ + \sigma_s^+) \gamma_5 (-i\gamma_\rho q_\rho^- \sigma_v^- + \sigma_s^-) \gamma_\nu] &= \\
 \text{tr}[\gamma_5 \gamma_\mu (-i\gamma_\lambda q_\lambda^+ \sigma_v^+) \gamma_5 (-i\gamma_\rho q_\rho^- \sigma_v^-) \gamma_\nu] &+ \text{tr}[\gamma_5 \gamma_\mu (\sigma_s^+) \gamma_5 (\sigma_s^-) \gamma_\nu].
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

El primer término de la suma, corresponde a la parte vectorial del propagador, mientras que el segundo corresponde a la parte escalar.

El cálculo de la parte escalar es inmediato: sacamos σ_s^\pm de la traza y después intercambiamos el orden entre γ_5 y γ_μ , que nos da un factor -1 , y así:

$$\begin{aligned} \text{tr}[\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_5 \gamma_\nu](\sigma_s^+ \sigma_s^-) &= \text{tr}[\gamma_\mu \gamma_n u](\sigma_s^+ \sigma_s^-) \\ &= 4g_{\mu\nu}(\sigma_s^+ \sigma_s^-). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Contrayendo esta expresión con B.7, y multiplicando por $E_\pi(q; P)$ tenemos entonces:

$$\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) 4g_{\mu\nu} E_\pi(q; P)(\sigma_s^+ \sigma_s^-) = 12E_\pi(q; P)(\sigma_s^+ \sigma_s^-). \quad (\text{B.11})$$

Para la parte vectorial, $\text{tr}[\gamma_5 \gamma_\mu (-i\gamma_\lambda q^+ \lambda \sigma_v^+) \gamma_5 (-i\gamma_\rho q^- \rho \sigma_v^-) \gamma_\nu]$, sacamos de la traza los factores: $-i$, σ_v^+ , σ_v^- , γ_λ , γ_ρ y $E_\pi(q; P)$. De esta manera:

$$\begin{aligned} \text{tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\nu] q_\lambda^+ q_\rho^- \sigma_v^+ \sigma_v^- &= \text{tr}[\gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\nu] q_\lambda^+ q_\rho^- \sigma_v^+ \sigma_v^- \\ &= \text{tr}[\gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\rho \gamma_\nu] q_\lambda^+ q_\rho^- \sigma_v^+ \sigma_v^- = 4(g_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - g_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} + g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}) q_\lambda^+ q_\rho^- \sigma_v^+ \sigma_v^-. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Al contraerse con B.7, se tiene:

$$4\sigma_v^+ \sigma_v^- (4q^+ \cdot q^-) = 16q^+ \cdot q^- \sigma_v^+ \sigma_v^-, \quad (\text{B.13})$$

para la parte correspondiente a $g_{\mu\nu}$, y para la parte correspondiente a $k_\mu k_\nu / k^2$:

$$4\sigma_v^+ \sigma_v^- \left(-\frac{k \cdot q^+ k \cdot q^-}{k^2} + \frac{k \cdot q^- k \cdot q^+}{k^2} - \frac{q^+ \cdot q^- k^2}{k^2} \right) = -4q^+ \cdot q^- \sigma_v^+ \sigma_v^-, \quad (\text{B.14})$$

así, al juntar B.13 y B.14 y añadir $E_\pi(q; P)$ obtenemos:

$$(16 - 4)E_\pi(q; P)q^+ \cdot q^- \sigma_v^+ \sigma_v^- = 12E_\pi(q; P)q^+ \cdot q^- \sigma_v^+ \sigma_v^-. \quad (\text{B.15})$$

De esta forma, juntando B.11 y B.15 obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \text{tr}[i\gamma_5 \gamma_\mu (-i\gamma \cdot q^+ \sigma_v^+ + \sigma_s^+) i\gamma_5 E_\pi(q; P) (-i\gamma \cdot q^- \sigma_v^- + \sigma_s^-) \gamma_\nu] \\ = 12E_\pi(q; P)(q^+ \cdot q^- \sigma_v^+ \sigma_v^- + \sigma_s^+ \sigma_s^-), \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

que al sustituirse en B.5, nos da la expresión 3.44 del capítulo 3:

$$E_\pi(p; P) = 4 \int_q^\Lambda \frac{G(k^2)}{k^2} (q^+ \cdot q^- \sigma_v^+ \sigma_v^- + \sigma_s^+ \sigma_s^-) E_\pi(q; P). \quad (\text{B.17})$$

Apéndice C

Método de potencias

En el Capítulo 3, para resolver la EBS necesitamos resolver una ecuación de eigenvalores 3.34. Nos interesa conocer únicamente el eigenvalor dominante, pues es en éste caso que se tiene el momento $P^2 = -m^2$ más pequeño y por lo tanto corresponde al estado base. Puesto que no estamos interesados en el resto de los eigenvalores, podemos emplear el método de potencias.

Definición:

Sean $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ los eigenvalores de una matriz $n \times n$. El eigenvalor λ_1 se llama **eigenvalor dominante** si $|\lambda_1| > |\lambda_i| \forall i \neq 1$. Al eigenvector que corresponde a este eigenvalor, le llamamos **eigenvector dominante**.

Naturalmente, no todas las matrices tienen eigenvalor dominante, como es el caso de la matriz $\text{diag}(c, -c)$, con $c \neq 0$. En este caso, claramente los eigenvalores son $\lambda_{1,2} = c, -c$ y no se cumple la definición anterior.

Dicho ésto, el método de potencias para una matriz A de dimensiones $n \times n$, consiste en lo siguiente:

1. Comenzamos con un vector arbitrario no nulo $x_0 \in \mathcal{R}^n$.
2. Llamamos x_1 al vector que resulta de aplicar la matriz A a x_0 , $x_1 = Ax_0$.
3. Normalizamos x_1 de forma que $|x_1| = 1$.

4. Se procede de manera similar iterativamente, ésto es:

$$\begin{aligned}x_1 &= Ax_0 \\x_2 &= Ax_1 = A(Ax_0) = A^2x_0 \\&\vdots \\x_j &= A(Ax_{j-1}) = A^jx_0\end{aligned}$$

En cada iteración se normaliza a uno el vector correspondiente, para evitar el riesgo de que la magnitud del vector crezca indefinidamente. Para un j lo suficientemente grande, nos habremos acercado mucho al eigenvector dominante, ésto es: $x_j \rightarrow x$, donde x es el eigenvector dominante.

Finalmente, para calcular el eigenvalor dominante, utilizamos el cociente de Rayleigh:

$$\frac{(Ax) \cdot x}{x \cdot x} = \frac{\lambda_1 x \cdot x}{x \cdot x} = \lambda_1. \quad (\text{C.1})$$

La convergencia de éste algoritmo depende del cociente $|\lambda_1/\lambda_i|$, $i \neq 1$. En particular, cuando $|\lambda_i|$ es cercano a $|\lambda_1|$ se tiene una convergencia lenta. Afortunadamente, este no es el caso de la matriz en la ecuación 3.47.

Bibliografía

- [1] M. Gell-Mann. The Eightfold Way: A Theory of strong interaction symmetry. 1961.
- [2] Murray Gell-Mann. A Schematic Model of Baryons and Mesons. *Phys.Lett.*, 8: 214–215, 1964. doi: 10.1016/S0031-9163(64)92001-3.
- [3] G. Zweig. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Pt. 1. 1964.
- [4] S. Okubo and C. Ryan. Quadratic mass formula in SU3. *Nuovo Cim.*, 34:776–779, 1964. doi: 10.1007/BF02750019.
- [5] M. Gell-Mann, R.J. Oakes, and B. Renner. Behavior of current divergences under SU(3) x SU(3). *Phys.Rev.*, 175:2195–2199, 1968. doi: 10.1103/PhysRev.175.2195.
- [6] M.Y. Han and Yoichiro Nambu. Three Triplet Model with Double SU(3) Symmetry. *Phys.Rev.*, 139:B1006–B1010, 1965. doi: 10.1103/PhysRev.139.B1006.
- [7] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, and H. Leutwyler. Advantages of the Color Octet Gluon Picture. *Phys.Lett.*, B47:365–368, 1973. doi: 10.1016/0370-2693(73)90625-4.
- [8] D.J. Gross and F. Wilczek. Asymptotically Free Gauge Theories. 1. *Phys.Rev.*, D8: 3633–3652, 1973. doi: 10.1103/PhysRevD.8.3633.
- [9] D.J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories. *Phys.Rev.Lett.*, 30:1343–1346, 1973. doi: 10.1103/PhysRevLett.30.1343.
- [10] H. David Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Phys.Rev.Lett.*, 30:1346–1349, 1973. doi: 10.1103/PhysRevLett.30.1346.
- [11] P. Maris and C.D. Roberts. Pi- and K meson Bethe-Salpeter amplitudes. *Phys.Rev.*, C56:3369–3383, 1997. doi: 10.1103/PhysRevC.56.3369.
- [12] P. Maris and P.C. Tandy. Bethe-Salpeter study of vector meson masses and decay constants. *Phys.Rev.*, C60:055214, 1999. doi: 10.1103/PhysRevC.60.055214.
- [13] R. Williams, C.S. Fischer, and M.R. Pennington. Extracting the anti-q q condensate for light quarks beyond the chiral limit in models of QCD. 2007.

- [14] P. Maris, C.D. Roberts, and P.C. Tandy. Pion mass and decay constant. *Phys.Lett.*, B420:267–273, 1998. doi: 10.1016/S0370-2693(97)01535-9.
- [15] A. Ayala, A. Bashir, D. Binosi, M. Cristoforetti, and J. Rodriguez-Quintero. Quark flavour effects on gluon and ghost propagators. *Phys.Rev.*, D86:074512, 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.86.074512.
- [16] K. Osterwalder and R. Schrader. Axioms for Euclidean Green’s Functions. 1. *Commun.Math.Phys.*, 31:83–112, 1973. doi: 10.1007/BF01645738.
- [17] K. Osterwalder and R. Schrader. Axioms for Euclidean Green’s Functions. 2. *Commun.Math.Phys.*, 42:281, 1975. doi: 10.1007/BF01608978.
- [18] L.X. Gutierrez-Guerrero, A. Bashir, I.C. Cloet, and C.D. Roberts. Pion form factor from a contact interaction. *Phys.Rev.*, C81:065202, 2010. doi: 10.1103/PhysRevC.81.065202.
- [19] K. Raya, A. Bashir, S. Hernandez-Ortiz, A. Raya, and C.D. Roberts. Multiple solutions for the fermion mass function in QED3. 2013.
- [20] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. *Phys. Rev.*, 122:345–358, Apr 1961. doi: 10.1103/PhysRev.122.345. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.122.345>.
- [21] J. Dennis. *Properties of Mesons From Bethe-Salpeter Amplitudes*. PhD thesis, Kent State University, 2005.
- [22] N. Souchlas. *Quark Dynamics and constituent masses in heavy quark systems*. PhD thesis, Kent State University, 2009.
- [23] B. et al. Aubert. Measurement of the $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ transition form factor. *Phys. Rev. D*, 80:052002, Sep 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.80.052002. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.052002>.
- [24] S. et al. Uehara. Measurement of $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ transition form factor at belle. *Phys. Rev. D*, 86:092007, Nov 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.86.092007. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.092007>.
- [25] Christian Schubert. The Yukawa Model as an example for dimensional normalization with gamma (5). *Nucl.Phys.*, B323:478, 1989. doi: 10.1016/0550-3213(89)90153-3.