Univsersidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Universidad Nacional Autónoma de México

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

Ideales Basados en Gráficas y sus Invariantes Cardinales

TESINA
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
José de Jesús Pelayo Gómez

DIRECTOR:
Doctor en Ciencias Matemáticas Fernando Hernández Hernández

Morelia, Michoacán. Enero, 2014.

Índice

Palabras clave. Ideal, Gráfica, Random, Invariante, Cardinal.

Resumen. La idea de este trabajo es estudiar algunos ideales basados en gráficas, en particular lo ideales $\mathcal{G}_{fc}$, $\mathcal{G}_c$ y el ideal de la gráfica aleatoria, además decir algo acerca de sus invariantes cardinales. Se espera que el lector tenga conocimientos básicos de teoría descriptiva de conjuntos, una referecia sobre el tema la puede encontrar en [7]; tenga algunos conocimientos acerca de teoría de gráficas (aunque esto no es tan necesario, como referencia puede consultar [8]) y conozca algunos invariantes cardinales del continuo, tales como $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{r}$ y $\mathfrak{s}$.

Abstract. The aim of this work is studing some ideals based on graphs, specially the ideals $\mathcal{G}_{fc}$, $\mathcal{G}_c$ and the random graph ideal. Also we want to say something about its cardinal invariants. It's spected that the reader has knowlege of descriptive set theory, graph theory (although this is not necessary) and cardinal invariants like $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{r}$ y $\mathfrak{s}$. You can find about it in [7] and [8].

1. Introducción

El presente trabajo está basado en el artículo *Combinatorics of filters and ideals* de *Michael Hrušák* y en la tesis doctoral *Ideals and filters on countable sets* de *David Meza* (consultar [1] y [2]), aunque algunas pruebas fueron tomadas de otros lugares ([3] y [4]). La notación usada es la usual en teoría de conjuntos, si la idea es entender algo de esta área puede leer [5] como un texto básico y [3] como algo más avanzado, además de las referencias clásicas como [6] y [7]. Para consultar acerca de la gráfica aleatoria puede leer [9].

Definición 1. Sea X es un conjunto. Un ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una familia de subconjuntos de X tal que

- $\emptyset \in \mathcal{I}$ y $X \notin \mathcal{I}$,
- si $A, B \in \mathcal{I}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$ y
- si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$ entonces $B \in \mathcal{I}$.

$Fin(X)$ denotará los subconjuntos finitos de X. A menos que se especifique lo contrario, para $\mathcal{I}$ un ideal sobre X, $Fin(X) \subseteq \mathcal{I}$. La noción dual de ideal es la de filtro.

Definición 2. $\mathcal{F}$ es filtro sobre X si

- $X \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- $A, B \in \mathcal{F}$ implica $A \cap B \in \mathcal{F}$ y
- $A \in \mathcal{F}$ y $B \supset A$ implica $B \in \mathcal{F}$.

También, a menos que se diga lo contrario, estamos pensando que todos los filtros contienen a los cofinitos. Dado un ideal $\mathcal{I}$ sobre X, $\mathcal{I}^*$ denotará el filtro dual, es decir, $\mathcal{I}^* = \{X \setminus A : A \in \mathcal{I}\}$.

Estamos interesados en estudiar ideales sobre ω, entonces podemos pensar que un ideal es un subconjunto del espacio de *Cantor*, haciendo la identificación de $\mathcal{P}(\omega)$ con 2^ω. De este modo, dado un ideal $\mathcal{I}$, podemos preguntarnos si $\mathcal{I}$ es abierto, F_σ, Borel, tiene la propiedad de Baire, etc.

Proposición 3 (Folklore)**.** *La mínima complejidad para un ideal (filtro) sobre ω es F_σ.*

Demostración. $Fin(\omega)$ es numerable y así $Fin(\omega)$ es F_σ. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω. Sea $A \in \mathcal{I}$. Notemos que si $a \in [\omega]^{<\omega}$ entonces $A \setminus a \in \mathcal{I}$ y $A \cup a \in \mathcal{I}$, por lo cual $\mathcal{I}$ es denso en 2^ω. $\mathcal{I}$ no puede ser cerrado porque en tal caso $\mathcal{I} = 2^\omega$. Si $\mathcal{I}$ fuera G_δ, entonces también $\mathcal{I}^*$, pero $\mathcal{I}$ y $\mathcal{I}^*$ son ajenos, lo cual es imposible por teorema de Baire. $\square$

Proposición 4 (Ley 0-1, Sierpiński)**.** *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω. Entonces*

1. *Si $\mathcal{I}$ tiene la propiedad de Baire, entonces $\mathcal{I}$ es magro.*

2. *Si $\mathcal{I}$ es medible, entonces $\mathcal{I}$ tiene medida 0.*

Demostración. (1) Supongamos que $\mathcal{I}$ tiene la propiedad de Baire y que no es magro. Como $\mathcal{I}$ no es magro, entonces existe $t \in 2^{<\omega}$ de modo que $\mathcal{I}$ es comagro en $\langle t \rangle = U$. Sea $s : U \to U$ dada por $s(t^\frown x) = t^\frown x^*$, donde $x^*(n) = 1 - x(n)$. Entonces $\mathcal{I} \cap U$ y $s[\mathcal{I} \cap U]$ son dos comagros ajenos en U, lo cual es contradicción por el teorema de Baire.

(2) Supongamos que $\mathcal{I}$ es medible y que $\mu(\mathcal{I}) > 0$. Sean $t, s \in 2^{<\omega}$, entonces $\mu(\mathcal{I} \cap \langle t \rangle) = \mu(\mathcal{I})\mu(\langle t \rangle)$, si además $|t| = |s|$, entonces $\mu(\mathcal{I} \cap \langle t \rangle) = \mu(\mathcal{I} \cap \langle s \rangle)$ y de este modo $\mu(U \cap \mathcal{I}) = \mu(U)\mu(\mathcal{I})$ para cualquier abierto U. Probaremos por contradicción que $\mu(\mathcal{I}) = 1$. Supongamos que existe C cerrado de medida positiva y ajeno con $\mathcal{I}$. Sea U un abierto tal que $C \subseteq U$ y $\mu(C) < \mu(U) < \frac{\mu(C)}{1-\mu(\mathcal{I})}$. Entonces $1 - \mu(\mathcal{I}) < \frac{\mu(C)}{\mu(U)}$ por lo cual $\mu(\mathcal{I})\mu(U) > \mu(U) - \mu(C)$. Entonces $\mu(\mathcal{I} \cap U) > \mu(U \setminus C)$, por lo tanto $C \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$, una contradicción. Ahora, $\mathcal{I}^*$ tiene la misma medida que $\mathcal{I}$, ambos son de medida 1, además son ajenos pero esto es absurdo. $\square$

Recordemos que todos los conjuntos Borel tienen la propiedad de Baire (puede consultar [7]) y son medibles, entonces por la proposición anterior todos los ideales Borel son magros y tienen medida 0. El siguiente teorema nos da una mejor clasificación de los ideales con la propiedad de Baire.

Sea $\mathcal{F}$ un filtro en ω. Para $X \in \mathcal{F}$ sea e_X la enumeración creciente de X y sea $\tilde{\mathcal{F}} = \{e_X : X \in \mathcal{F}\}$. Decimos que el filtro $\mathcal{F}$ es no acotado si la familia $\tilde{\mathcal{F}}$ es no acotada en ω^ω. Vamos a enunciar y probar el teorema de Talagrand pero antes necesitamos el siguiente lema.

Lema 5. *Para cada conjunto magro $F \subseteq 2^\omega$ existe $x_F \in 2^\omega$ y una función estrictamente creciente $f_F \in \omega^\omega$ tal que*

$$F \subseteq \{x \in 2^\omega : \forall^\infty \exists j \in [f_F(n), f_F(n+1)) x(j) \neq x_f(j)\}.$$

Demostración. Sea F un conjunto magro y $\{F_n : n \in \omega\}$ una sucesión creciente de conjuntos cerrados nunca densos tal que $F \subseteq \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Definimos por recursión una sucesión $\langle k_n : n \in \omega\rangle$ de naturales y una sucesión $\langle s_n : n \in \omega\rangle$ con $s_n \in 2^{<\omega}$ de modo que:

- $k_0 = 0$,
- $s_n \in X = \{s \in 2^{<\omega} : \forall t \in 2^{\leq k_n} \forall i \leq n \langle t^\frown s\rangle \cap F_i = \emptyset\}$, y
- $k_{n+1} = k_n + |s_{n+1}|$.

Para poder hacer la recursión basta probar que X es no vacío. Primero, el conjunto de parejas (t, i) con $t \in 2^{\leq k_n}$ y con $i \leq n$ es finito, en particular podemos pensar que está bien ordenado. Para la primera pareja (t, i), como F_i es nunca denso, para t existe una extensión s_0^l de modo que $\langle t^\frown s_0\rangle \cap F_i = \emptyset$. Luego para la segunda pareja (r, j), como F_j es nunca denso, para $r^\frown s_0^l$ existe s_1^l de modo que $\langle r^\frown s_0^{l\frown} s_1^l\rangle$ y podemos continuar así hasta agotar a los (t, i) y entonces $s_0^{l\frown} \ldots {}^\frown s_k^l \in X$.

Hacemos $f_F(n) = k_n$ y $x_F = s_0^\frown s_1^\frown \cdots$. Por la definición anterior se sigue que si $x \in 2^\omega$ es tal que existen infinitas n's tal que $x \upharpoonright [f_F(n), f_F(n+1)) = x_F \upharpoonright [f_F(n), f_F(n+1)) = s_{n+1}$ entonces $x \notin \bigcup_{n\in\omega} F_n$ y por lo tanto $x \notin F$. $\square$

Con la notación anterior,

$$\{x \in 2^\omega : \forall^\infty n \exists j \in [f_F(n), f_F(n+1)) x_j \neq x_F(j)\} =$$

$$= \bigcup_{m\in\omega} \{x \in 2^\omega : \forall m \geq n \exists j \in [f_F(n), f_F(n+1)) x_j \neq x_F(j)\}$$

es un conjunto magro.

Teorema 6 (Talagrand)**.** *Las siguientes condiciones son equivalentes para un filtro $\mathcal{F}$:*

1. *$\mathcal{F}$ no tiene la propiedad de Baire,*
2. *$\tilde{\mathcal{F}}$ es no acotada,*

3. *para cada función creciente* $f \in \omega^\omega$ *existe un* $X \in \mathcal{F}$ *tal que* $X \cap [f(n), f(n+1)) = \emptyset$ *para infinitas* $n \in \omega$*,*

4. *para cada partición de* ω *en conjuntos finitos,* $\{I_n : n \in \omega\}$*, existe un* $X \in \mathcal{F}$ *tal que* $X \cap I_n = \emptyset$ *para infinitas* $n \in \omega$*, y*

5. *para cada función* $f \in \omega^\omega$ *que es finita a uno,* $f[\mathcal{F}] = \{X \subseteq \omega : f^{-1}[X] \in \mathcal{F}\}$ *no es el filtro de Frechet.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Supongamos que $\tilde{\mathcal{F}}$ es acotada por $f \in \omega^\omega$. Para $n \in \omega$ sea

$$A_n = \{X \subseteq \omega : \forall k \geq n e_X(k) \leq f(k)\}.$$

Notemos que A_n es un conjunto magro y $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} A_n$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Para $g \in \omega^\omega$ definida por $g(n) = f(2n)$, existe $e_X \in \tilde{\mathcal{F}}$ tal que $g(n) \leq e_X(n)$, con N algún natural y para toda $n \geq N$. Entonces al menos alguno de los intervalos $[f(n), f(n+1))$ y $[f(n+1), f(n+2))$ se queda sin elementos de X.

(3) $\Rightarrow$ (4): Supongamos que $\{I_n : n \in \omega\}$ es una partición de ω en conjuntos finitos. Definimos $f(n) = min\{m : (\exists k)(I_k \subseteq [n, m]\}$, para $n \in \omega$. Para esta f existe un $X \in \mathcal{F}$ como en (3) y no es difícil ver que dicha X funciona.

(4) $\Rightarrow$ (5): Supóngase que f es una función finito a uno. Sea $I_n = f^{-1}[\{n\}]$, para esta partición existe un $X \in \mathcal{F}$ tal que $A = \{n : X \cap I_n = \emptyset\}$ es infinito. Entonces $\omega \setminus A \in f(\mathcal{F})$ porque $X \subseteq \omega \setminus A$, por lo tanto $f(\mathcal{F})$ no es el filtro de Frechet.

(5) $\Rightarrow$ (4): Si $\{I_n : n \in \omega\}$ es una partición en conjuntos finitos, definimos $f : \omega \to \omega$ por $f(k) = n$ si $k \in I_n$. Entonces f es una función finito a uno y por lo tanto $f(\mathcal{F})$ no es el filtro de Frechet. Sea $A \in f(\mathcal{F})$ un conjunto coinfinito, entonces $f^{-1}[A] \in \mathcal{F}$. $f^{-1}[A] \cap I_n = \emptyset$ si y sólo si $A \cap f[I_n] = \emptyset$ si y sólo si $n \notin A$ y basta recordar que A es coinfinito.

(4) $\Rightarrow$ (1): Sea $F = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ un conjunto magro F_σ. Por el lema anterior, existe $x_F \in 2^\omega$ y una función estrictamente creciente $f_F \in \omega^\omega$ tal que

$$F \subseteq \{x \in 2^\omega : \forall^\infty n \exists j \in [f_F(n), f_F(n+1)) x(j) \neq x_F(j)\}.$$

Sea $I_n = [f_F(n), f_F(n+1))$. Sea $X \in \mathcal{F}$ tal que $X \cap I_n = \emptyset$ para infinitas $n \in \omega$. Definimos $Y \in 2^\omega$ como:

$$Y \upharpoonright I_n = \begin{cases} X \upharpoonright I_n & \text{si } X \cap I_n \neq \emptyset \\ x_F \upharpoonright & \text{si } X \cap I_n = \emptyset \end{cases}$$

Entonces $Y \notin \mathcal{F}$ y además $Y \supseteq X$.

□

2. La gráfica aleatoria

Definición 7. Una gráfica G es un par ordenado (V, A), donde V es un conjunto no vacío y $A \subseteq [V]^2$. A los elementos de V se les llama vértices y a los de A aristas. Si G es una gráfica vamos a denotar por $V(G)$ y $A(G)$ a los vértices y las aristas de G, respectivamente.

También podemos pensar a una gráfica como un conjunto con una relación (llamada relación de adyacencia) que es irreflexiva y simétrica. En ocasiones usaremos G como gráfica si G es una relación en ω tal que (ω, G) es una gráfica. La idea en esta sección es definir una gráfica con muchas propiedades interesantes, después en el siguiente capítulo estudiaremos sus invariantes cardinales asociados.

Consideremos un modelo M numerable para $ZF - P - I$, donde I es el axioma del conjunto inductivo y P el axioma del conjunto potencia. Por ejemplo $M = V_\omega$ nos sirve. Definimos $\mathcal{R} = (M, A)$ de modo que u y v son adyacentes si y sólo si $u \in v$ o $v \in u$. A $\mathcal{R}$ se le llama la gráfica aleatoria y tiene la siguiente propiedad.

Lema 8. *Sea $\mathcal{R}$ definida como antes. Si $U = \{u_1, ..., u_n\}, V = \{v_1, ..., v_m\} \subseteq V(\mathcal{R})$ con U y V ajenos, entonces existe v, otro vértice de $\mathcal{R}$, que es adyacente a todos los u_i y no es adyacente a ningún v_j.*

Demostración. Definimos $v = \{u_1, ..., u_n, V\}$, $v \in M$ por axioma del par y axioma de unión. Notemos que $u_i \in v$ y por lo tanto v es adyacente a todos los u_i. $v_j \notin v$ porque los únicos elementos de v son los u_i y V y ningún u_i es igual a algún v_j porque U y V son ajenos y también $v_j \neq V$ por axioma de fundación. Entonces, si v_j fuera adyacente a v sería porque $v \in v_j$, pero $v_j \in V$ y $V \in v$ y en tal caso se contradice axioma de fundación. $\square$

Para una gráfica G diremos que G tiene la propiedad $(*)$ si dados $U, V \subseteq V(G)$ ajenos y finitos, existe z que es adyacente a todos los vértices en U y no es adyacente a ningún vértice en V, en tal caso decimos que z está correctamente unido a U y V. Una gráfica finita no puede tener la propiedad $(*)$ y ya probamos que $\mathcal{R}$ sí la tiene, pero probaremos más, en la siguiente proposición probaremos que la propiedad $(*)$ es $\omega-$categórica.

Proposición 9. *Considremos una gráfica G con vértces en ω y cada arista arista aparece en G con probabilidad $\frac{1}{2}$. Entonces con probablidad 1 la gráfica resultante es $\mathcal{R}$. Es por esto que a $\mathcal{R}$ se le llama la gráfica aleatoria.*

Demostración. Probaremos que con probabiliadad 1, G satisface la propiedad $(*)$. Basta probar que dados $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ y $V = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ la probabilidad de que ningún z esté correctamente unido a U y a V es 0, porque sólo hay una cantidad numerable de elecciones para los U's y los V's y unión numerable de conjuntos nulos es nulo. La probabilidad de que un vértice z esté correctamente unido a U y a V es $\frac{1}{2^{n+m}}$, entonces la probabilidad de que de N vértices ninguno esté correctamente unido es $(1 - \frac{1}{2^{n+m}})^N$ y esto se va a 0 cuando N va a infinito. Como hay una infinidad de vértices además de los de U y los de V entonces la probabilidad de que ningún vértice esté correctamente unido es 0.

Ahora probaremos que cualesquiera dos gráficas numerables que satisfacen $(*)$ son isomorfas. Supongamos que G y H satisfacen $(*)$ y además que $V(G) = \{g_0, g_1, ...\}$ y $V(H) = \{h_0, h_1, ...\}$. Construimos por recursión $\langle f_n : n \in \omega \rangle$ de modo que:

- $f_0 = \emptyset$,
- $f_{2n+1}^{-1}; V(H) \to V(G)$, de modo que es un isomorfismo de las gráficas inducidas y tal que $\{h_0, ..., h_n\} \subseteq Dom(f_{2n+1}^{-1})$, y
- $f_{2n+2}; V(G) \to V(H)$ es un isomorfismo de las subgráficas inducidas y $\{g_0, ..., g_n\} \subseteq Dom(f_{2n+2})$.

Veamos que la recursión es posible. Algunos g_i's ya están en el dominio del f_k correspondiente, digamos que el siguiente vértice de índice mínimo que aún no está en el dominio de f_k es g_l. Entonces g_l es adyacente a algunos de los g_i's y a algunos otros no; digamos que sí es adyacente a $U = \{g_{i_1}, ..., g_{i_r}\}$ y no lo es a $V = \{g_{j_1}, ..., g_{j_s}\}$. Una posible imagen para g_l sería un vértice que fuera adyacente a todos los véritces en $f_k[U]$ y no adayacente a ningún vértice en $f_k[V]$, pero sabemos que H tiene la propiedad $(*)$, entonces sí podemos asegurar que existe un vértice con esa propiedad. De manera análoga para el caso $f_k^{-1}; V(H) \to V(G)$. Haciendo $f = \bigcup_n f_n$ obtenemos el isomorfismo deseado. $\square$

El método usado en la segunda parte de la prueba de la proposición anterior se le conoce como *back-and-forth.* Se puede modificar la prueba anterior pero en vez de back-and-forth usando un "forth sin back" para probar lo siguiente.

Proposición 10. *La gráfica aleatoria contiene a cualquier gráfica numerable (o finita) como subgráfica inducida.* $\square$

Proposición 11. *Si X, Y es una partición de los vértices de $\mathcal{R}$, entonces alguna de las subgráficas inducidas es isomorfa a $\mathcal{R}$.*

Demostración. Si no, entonces existen $U_1, V_1 \subseteq X$ y $U_2, V_2 \subseteq Y$ de modo que nadie en X está correctamente unido a U_1 y V_1 y nadie en Y está correctamente unido a U_2 y V_2. Sea z un vértice en $\mathcal{R}$ que esté correctamente unido a $U_1 \cup U_2$ y $V_1 \cup V_2$, entonces si $z \in X$ se da que z está correctamente unido a U_1 y V_2 en la subgráfica inducida por X y si no entonces z está bien unido en la subgráfica inducida por Y; en cualquier caso es contradicción. $\square$

Obviamente la gráfica completa y la vacía cumplen el principio de casillas, es decir, que si hacemos una partición de los vértices en una cantidad finita de pedazos entonces alguno de los pedazos es isomorfo a la gráfica original; por la proposición anterior también la gráfica aleatoria cumple casillas. Se puede probar mucho más que eso, las únicas gráficas que cumplen casillas son estas tres. Puede consultar [9].

3. Invariantes cardinales asociados a un ideal

Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω. $\mathcal{I}$ es alto si para todo $X \in [\omega]^\omega$ existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $|I \cap X| = \aleph_0$. Diremos que $\mathcal{I}$ es P-ideal si para toda sucesión $\{I_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}$ existe un $I \in \mathcal{I}$ tal que $I_n \subseteq^* I$.

Definición 12. Sea $\mathcal{I}$ un ideal alto sobre ω. Definimos los siguientes invariantes cardinales asociados con $\mathcal{I}$:

- $add^*(\mathcal{I}) = min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge (\forall X \in \mathcal{I})(\exists A \in \mathcal{A})(A \not\subseteq^* X)\}$,
- $cov^*(\mathcal{I}) = min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge (\forall X \in [\omega]^\omega)(\exists A \in \mathcal{A})(|A \cap X| = \aleph_0)\}$,
- $cof^*(\mathcal{I}) = min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge (\forall I \in \mathcal{I})(\exists A \in \mathcal{A})(I \subseteq^* A)\}$,
- $non^*(\mathcal{I}) = min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega \wedge (\forall I \in \mathcal{I})(\exists A \in \mathcal{A})(|A \cap I| < \aleph_0)\}$

De la definición se sigue que $add^*(\mathcal{I}) \geq \aleph_1$ si y sólo si $\mathcal{I}$ es un P-ideal. Siempre se tienen las siguientes desigualdades:

- $\aleph_0 \leq add^*(\mathcal{I}) \leq non^*(\mathcal{I}) \leq cof^*(\mathcal{I}) \leq \mathfrak{c}$ y
- $add^*(\mathcal{I}) \leq cov^*(\mathcal{I}) \leq cof^*(\mathcal{I})$.

La prueba es usual y el lector puede intentar probarlo.

4. Ordenes en ideales

Antes de comenzar con el estudio de los ideales en los que estamos interesados, definiremos algunos preordenes en la clase de los ideales sobre ω.

- (Orden de *Katětov*) $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$ si y sólo si existe una función $f : \omega \to \omega$ tal que $f^{-1}[I] \in \mathcal{J}$ para todo $I \in \mathcal{I}$.
- (Orden de *Katětov-Blass*) $\mathcal{I} \leq_{KB} \mathcal{J}$ si y sólo si existe una función $f : \omega \to \omega$ finito a uno tal que $f^{-1}[I] \in \mathcal{J}$ para todo $I \in \mathcal{I}$.

Teorema 13. *Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ ideales en ω. Si $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$, entonces $non^*(\mathcal{I}) \leq non^*(\mathcal{J})$ y si además $\mathcal{I} \leq_{KB} \mathcal{J}$ entonces $cov^*(\mathcal{J}) \leq cov^*(\mathcal{I})$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ testigo de la definición de $non^*(\mathcal{J})$ y $f \in \omega^\omega$ que testifique que $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$. Definimos $\mathcal{B} = \{f[X] : X \in \mathcal{A}\}$. Dado $I \in \mathcal{I}$, $f^{-1}[I] \in \mathcal{J}$ y así, existe un $X \in \mathcal{A}$ tal que $X \cap f^{-1}[I]$ es finito. Así, $f[X] \cap I$ es finito y por lo tanto $non^*(\mathcal{I}) \leq \mathcal{B} \leq non^*(\mathcal{J})$.

Ahora, sea $\mathcal{A}$ testigo de $cov^*(\mathcal{I})$. Definimos $\mathcal{B} = \{f^{-1}[A] : A \in \mathcal{A}\} \cup \{f^{-1}[F] : F \in Fin\}$. Probemos que $\mathcal{B}$ es testigo de $cov^*(\mathcal{J})$. Sea $X \in [\omega]^\omega$. Si $f[X]$ es infinito, entonces existe un $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap f[X]$ es infinito y por lo tanto $X \cap f^{-1}[A]$ es infinito. Si $f[X]$ es finito entonces $X \subseteq f^{-1}[f[X]] \in \mathcal{B}$. En ambos casos, X se intersecta infinitamente con un miembro de $\mathcal{B}$. $\square$

Con el teorema anterior, ya tenemos una manera de comparar los invariantes cardinales de ciertos ideales siempre y cuando ya tengamos información del orden de *Katětov* o de *Katětov-Blass*.

5. Submedidas

Definición 14. Una submedida $\phi : \mathcal{P} \to [0, \infty]$ en un conjunto X, es una función que satisface:

- $\phi(\emptyset) = 0$,
- Si $A \subseteq B$ entonces $\phi(A) \leq \phi(B)$ y
- $\phi(A \cup B) \leq \phi(A) + \phi(B)$.

Para evitar casos triviales además pedimos que

- $\phi(F) < \infty$ para todo $F \in Fin(X)$.

Si ϕ es una submedida en ω que satisface:

- $\phi(A) = \lim_{n\to\infty} \phi(A \cap n)$

entonces ϕ es llamada una submedida inferiormente semicontinua, lo cual lo abreviamos por *lscsm* (por sus siglas en inglés). A cada lscsm ϕ sobre ω le corresponden los siguientes dos ideales:

- $Fin(\phi) = \{A \subseteq \omega : \phi(A) < \infty\}$ y
- $Exh(\phi) = \{A \subseteq \omega : \lim_{n\to\infty} \phi(A \setminus n) = 0\}$

Notemos que $Exh(\phi) \subseteq Fin(\phi)$, $Fin(\phi)$ es un ideal F_σ y $Exh(\phi)$ es un P-ideal $F_{\sigma\delta}$. Usaremos los siguientes teoremas, para una prueba puede consultar [10] y [11].

Teorema 15 (Mazur). *Sea $\mathcal{I}$ un ideal en ω. Entonces $\mathcal{I}$ es un ideal F_σ si y sólo si existe una lscsm ϕ tal que $\mathcal{I} = Fin(\phi)$.*

Teorema 16 (Solecki). *Sea $\mathcal{I}$ un ideal en ω. Entonces:*

- *$\mathcal{I}$ es un P-ideal analítico si y sólo si existe una lscsm ϕ tal que $\mathcal{I} = Exh(\phi)$. En particular, todos los P-ideales analíticos son $F_{\sigma\delta}$.*
- *$\mathcal{I}$ es un P-ideal F_σ si y sólo si existe una lscsm ϕ tal que $\mathcal{I} = Exh(\phi) = Fin(\phi)$.*

6. Ideales basados en gráficas

Definición 17. Una coloración en una gráfica G es una función $f : V(G) \to X$, donde X es cualquier conjunto. El número cromático de G, $\chi(G)$, es el mínimo κ tal que existe una coloración $f : V(G) \to \kappa$.

Teorema 18 (Bruijn-Erdös)**.** *Sea $G = (V, A)$ una gráfica tal que $\chi(H) \leq n$ para toda $H \leq G$ subgráfica finita de G. Entonces $\chi(G) \leq n$.*

Demostración. Consideremos n con la topología discreta y n^V con la topología producto. Por teorema de Tychonoff n^V es compacto. Para $H \leq G$ una subgráfica finita, sea $F_H = \{f \in n^V : f \upharpoonright H$ es una coloración para $H\}$. F_H es un conjunto cerrado y la familia $\mathcal{F} = \{F_H : H \leq G$ es subgráfica finita$\}$ tiene la propiedad de la intersección finita y por lo tanto $\bigcap \mathcal{F}$ es no vacío. Sea $c \in \bigcap \mathcal{F}$, entonces c es una coloración para G con n colores. □

7. $\mathcal{G}_{fc}$

$\mathcal{G}_{fc}$ es el ideal de las gráficas en ω con número cromático finito, es decir $\mathcal{G}_{fc} = \{G \subseteq [\omega]^2 : \chi(G) < \omega\}$.

Lema 19. *$\mathcal{G}_{fc}$ es un ideal alto.*

Demostración. Basta probar que toda gráfica infinita (con una infinidad de aristas) tiene una subgráfica infinita con número cromático 2. Supongamos que $G = \{a_n : n \in \omega\}$. Construimos recursivamente G_i como: $G_0 = \emptyset$ y $G_{i+1} = G_i \cup \{a_k\}$, donde a_k es la primera arista en G tal que no forma ningún ciclo con G_i. Hacemos $G' = \bigcup G_i$, entonces G' no tiene ciclos. Un resultado conocido de gráficas finitas es que $\chi(H) \leq 2$ si sólo si H no tiene ciclos de longitud impar, en particular $\chi(H) \leq 2$ para cualquier subgráfica finita de G por el teorema anterior G tiene número cromático 2. □

$\mathcal{G}_{fc}$ es un ideal F_σ porque la función ϕ definida por

$$\phi(A) = min\{|\mathcal{B}| : A \subseteq \bigcup \mathcal{B} \wedge (\forall G \in \mathcal{B})(\chi(G) = 2)\}$$

es una lscsm tal que $\mathcal{G}_{fc} = Fin(\phi)$.

Una familia *pair-splitting* $\mathcal{P}$ es una familia de subconjuntos infinitos de ω tal que para cualquier subcojunto infinito $A \subseteq [\omega]^2$ existe $P \in \mathcal{P}$ de modo que $|P \cap a| = 1$ para infinitas $a \in A$. $\mathfrak{s}_2$ es la mínima cardinalidad de una familia *pair-splitting*. Una familia *pair-reaping* es una familia $\mathcal{R} \subseteq [[\omega]^2]^\omega$ tal que para cualquier $A \in [\omega]^\omega$ existe $R \in \mathcal{R}$ de modo que $\{a \in A : |R \cap a| = 1\}$ es finito. $\mathfrak{r}_2$ es la mínima cardinalidad de una familia *pair-reaping*.

Teorema 20. *Las siguientes relaciones se dan:*

1. $add^*(\mathcal{G}_{fc}) = \aleph_0$,

2. $cov^*(\mathcal{G}_{fc}) = \mathfrak{s}_2$,

3. $non^*(\mathcal{G}_{fc})$ *es la mínima cardinalidad de una familia* $\mathcal{A} \subseteq [[\omega]^2]^\omega$ *tal que para cualquier partición* $\mathcal{P}$ *de* ω *existe un* $A \in \mathcal{A}$ *de modo que para cualquier* $a \in A$ *hay un* $P \in \mathcal{P}$ *con* $a \subseteq P$, *y*

4. $\mathfrak{r}_2 \leq non^*(\mathcal{G}_{fc}) \leq \mathfrak{r}$

Demostración. (1) Para cada n definimos $A_n = \{\{k, m\} : k \leq n \wedge m \neq k\}$. Veamos que $\chi(A_n) = n + 2$ y por lo tanto $A_n \in \mathcal{G}_{fc}$. $A_n \restriction (n + 2)$ es una gráfica completa y por lo tanto $\chi(A_n) \geq n + 2$, además $c : \omega \to \omega$ dada por $c(k) = k$ si $k \in n + 2$ y $c(k) = n + 1$ en otro caso, es una coloración para A_n. Si A es tal que $A_n \subseteq^* A$, para toda $n \in \omega$, entonces A contiene una gráfica completa infinita y por lo tanto $A \notin \mathcal{G}_{fc}$.

(2) Fijemos $\mathcal{T} \subseteq [\omega]^\omega$ con $\mathcal{T} < cov^*(\mathcal{G}_{fc})$. Sin pérdida de generalidad $\omega \setminus n \in \mathcal{T}$. Para cada $A \subseteq \omega$ sea $I_A = \{\{n, m\} : n \in A \wedge m \in \omega \setminus A\}$. Como $\mathcal{T} < cov^*(\mathcal{G}_{fc})$, existe un $X \in [[\omega]^2]^\omega$ tal que $X \cap I_T$ es finito para

toda $T \in \mathcal{T}$. Entonces $\{m : \{m, n\} \in X\}$ es finito para toda $n \in \omega$. Por lo tanto existe $Y \subseteq X$ tal que los elementos de Y son ajenos por pares. Que Y no está partida por elementos de $\mathcal{T}$ se sigue de que I_T es finito para toda $T \in \mathcal{T}$. Concluimos que $cov^*(\mathcal{G}_{fc}) \leq \mathfrak{s}_2$.

Notemos que $\{I_A : A \subseteq \omega\}$ es una subbase para $\mathcal{G}_{fc}$ (I_A definido como en el párrafo anterior). Será suficiente probar que si $\mathcal{T} \subseteq [\omega]^\omega$ no es una familia pair-splitting entonces $\bigcup\{I_T : T \in \mathcal{T}\} \neq [[\omega]^2]^\omega$. Sea $\mathcal{P}$ un conjunto infinito de pares de naturales ajenos tal que $T \in \mathcal{T}$ no parte a $\mathcal{P}$. Entonces no existe $T \in \mathcal{T}$ que parta a $\bigcup \mathcal{P}$.

(3) Para P una partición finita de ω, $G_P = \{\{m, n\} : (\exists a \neq b \in P)(n \in a \wedge m \in b)\} \in \mathcal{G}_{fc}$ y más aún $\{G_P : P \in \text{ es una partición fintia de } \omega\}$ es una base para $\mathcal{G}_{fc}$. Entonces, si $\mathcal{A}$ es una familia como en la hipótesis, entonces $\mathcal{A}$ misma es testigo de $non^*(\mathcal{G}_{fc})$. Si $\mathcal{B}$ es testigo de $non^*(\mathcal{G}_{fc})$, sea $X_B = \{A \subseteq [\omega]^2 : A \triangle B \text{ es finito }\}$, hacemos $\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} X_B$; claro que $\mathcal{A}$ tiene el mismo tamaño que $\mathcal{B}$ y es una familia como la que queremos.

(4) Se sigue de (3), donde dada una familia herediariamente reaping $\mathcal{R}$ construimos una familia $\mathcal{A}$ como en (3) de la siguiente manera: para $R \in \mathcal{R}$ sea $\{n_k^R : n \in \omega\}$ una enumeración de R y definimos $I_R = \{\{n_k^R, n_{k+1}^R\} : k \in \omega\}$. Sea $\mathcal{A} = \{I_R : R \in \mathcal{R}\}$. Entonces, si $\mathcal{P} = \{P_0, ..., P_n\}$ es una partición finita de ω, entonces existe un $R \in \mathcal{R}$ tal que $R \subseteq P_0$ o $R \subseteq \bigcup_{i>0} P_i$. En el primer caso, cuando $R \subseteq P_0$, ya terminamos. En el segundo caso podemos encontrar $R_1 \in \mathcal{R}$ tal que $R_1 \subseteq R \cap P_1$ o $R_1 \subseteq R \cap \bigcup_{i>1} P_i$. Podemos repetir este proceso mientras el segundo caso suceda y en el paso $n-1$ tendremos que $R_{n-1} \subseteq P_n$ para algún $R_{n-1} \in \mathcal{R}$ y entonces habremos terminado. $\square$

8. El ideal de la gráfica aleatoria

Si tenemos una gráfica G en ω, podemos definir un ideal (posiblemente impropio) $\mathcal{I}_G$ como el ideal generado por todos los subcojuntos de ω que son homogeneos en G. Es decir, dada una gráfica G definimos un ideal $\mathcal{I}_G$ con subbase $\mathcal{B}_G$ dada por:

$$\mathcal{B}_G = \{A \subseteq \omega : [A]^2 \subseteq G \vee [A]^2 \subseteq [\omega]^2 \setminus G\}.$$

$$\phi(A) = min\{|\mathcal{X}| : (\forall X \in \mathcal{X})(([X]^2 \subseteq E \vee [X]^2 \cap E = \emptyset) \wedge A \subseteq \bigcup \mathcal{X}\}.$$

Notemos que ϕ es una lscsm tal que $\mathcal{R} = Fin(\phi)$.

Teorema 21. *Las siguientes igualdades se dan.*

1. $add^*(\mathcal{R}) = non^*(\mathcal{R}) = \aleph_0$ *y*

2. $cov^*(\mathcal{R}) = cof(\mathcal{R}) = \mathfrak{c}$.

Demostración. Recordemos que $cov^*(\mathcal{I}) \leq cof(\mathcal{I})$ y $add^*(\mathcal{I}) \leq non^*(\mathcal{I})$, entonces será suficiente probar que $cov^*(\mathcal{R}) = \mathfrak{c}$ y $non^*(\mathcal{R}) = \aleph_0$.

Sea $\kappa < \mathfrak{c}$, probaremos que $cov^*(\mathcal{R}) > \kappa$. Sea $f : \omega \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$ una biyección y definimos $G = (\mathbb{Q} \cap [0,1], E)$ donde x, y son adyacentes si y sólo si f preserva el orden entre x y y. Sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{R}$, con $A_\alpha \subseteq B_{1,\alpha}, \cup ... \cup B_{n(\alpha),\alpha}$. Entonces, si $|A_\alpha \cap X| = \aleph_0$, entonces alguno de los B's en los cuales está contenido A_α cumple que $|B \cap X| = \aleph_0$ así que sin pérdida de generalidad cada A_α es homogeneo para $G_\mathcal{R}$ (la gráfica aleatoria).

$G_\mathcal{R}$ tiene una copia de G, porque la gráfica aleatoria contiene a todas las gráficas numerables como subgráficas, digamos que V son los vértices de G en $G_\mathcal{R}$ y F es el encaje de G en $G_\mathcal{R}$. Cada que algún $B \in [V]^\omega$ es tal que $A_\alpha \cap B$ es infinito, entonces $F^{-1}[A_\alpha]$ es una sucesión estrictamente creciente o estrictamente decreciente (porque A_α es homogeneo). Cada una de estas sucesiones (ya sea creciente o decreciente) es convergente en $\mathbb{R} \cap [0,1]$ y así, existe un $r \in (0,1)$ tal que ninguna de estas suceciones converge a r (porque a lo mucho tenemos κ sucesiones distintas). Sea $\{a_n : n \in \omega\} \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,1]$ una sucesión creciente que converge a r. Entonces $X = F[\{a_n : n \in \omega\}] \in [\omega]^\omega$ es tal que $A_\alpha \cap X$ es finito para cada α y así $cov^*(\mathcal{R}) > \kappa$.

Para probar que $non^*(\mathcal{R}) = \aleph_0$, debemos encontrar una familia numerable $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ tal que para cada $X \in \mathcal{B}$ existe un n de modo que $|X \cap A_n| < \omega$ porque $\mathcal{B}$ es subbase para $\mathcal{R}$. La familia A_n la definimos recursivamente con $A_0 = \omega$, para definir A_{n+1} consideramos una partición de A_n en dos subconjuntos infinitos; sabemos que la gráfica $G_\mathcal{R}$ restringida a alguna de las dos partes es isomorfa a $G_\mathcal{R}$ nuevamente, así que hacemos A_{n+1} la parte a la que haya sido isomorfa.

Sea A una pseudointersección de $\{A_n : n \in \omega\}$. Sea X homogeneo para $G_\mathcal{R}$ y supongamos que $|X \cap A_n| = \omega$ para toda n, entonces $X \cap A$ es infinito además que $X \cap A \subseteq^* A_n$ para toda $n \in \omega$. Entonces para alguna n, $A_n \setminus A \cap X$ es finito, lo cual es contradicción porque $A_n \notin \mathcal{R}$. □

9. $\mathcal{G}_c$

El ideal $\mathcal{G}_c$ de las gráficas sin subgráficas completas infinitas está definido como la familia de subconjuntos I de $[\omega]^2$ tal que para cada $X \in [\omega]^\omega$ existen $n \neq m \in X$ tal que $\{n, m\} \notin I$. Que dicha familia es un ideal es una consecuencia directa del teorema de Ramsey.

Lema 22. *$\mathcal{G}_c$ es un ideal co-analítico, alto y no es un P-ideal.*

Demostración. Definimos $F = \{(B, A) \in [\omega]^\omega \times \mathcal{P}([\omega]^2) : [B]^2 \subseteq A\}$. Claro que $\mathcal{G}_c$ es el complemento de la proyección de F, entonces basta probar que F es cerrado. Sea ψ una biyección entre $[\omega]^2$ y $\omega \setminus 1$ tal que $\psi(\{i, j\} \geq max\{i, j\}$ y sea $\{(X_n, Y_n) : n \in \omega\} \subseteq F$ una sucesión que converge a (B, A). Entonces, para toda $N < \omega$, existe $k_N > N$ tal que $(\forall n \geq k_N)(X_N \cap k_N = B \cap k_N)$. Si $i \neq j \in B$, entonces $\{i, j\} \subseteq B \cap k_{\psi(\{i,j\})}$. Así, $\{i, j\} \in Y_m$ para toda $m \geq k_{\psi(\{i,j\})}$ y por lo tanto $\{i, j\} \in A$; por lo que $(B, A) \in F$.

Cada subcojunto infinito de $[\omega]^2$ tiene una subgráfica inifita sin subgráficas infinitas (por ejemplo, podemos hacer la misma construcción que en $\mathcal{G}_{fc}$) y así, $\mathcal{G}_c$ es alto. Sea $A_n = \{\{k, m\} : k \leq n \vee m \leq n\}$, entonces para cualquier A tal que $A_n \subseteq^* A$ se tiene que $A \notin \mathcal{G}_c$. □

En el lema anterior se probó en particular que $add^*(\mathcal{G}_c) = \aleph_0$. Queremos calcular $cov^*(\mathcal{G}_c)$, para lo cual usaremos algunos resultados que en seguida se enlistan, además usaremos que si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ entonces $\mathcal{I} \leq_{KB} \mathcal{J}$ y las desigualdades en los invariantes que nos da el orden de *Katětov-Blass*.

Un conjunto $H \subseteq \omega$ es homogeneo para una función $f : [\omega]^n \to k$ si f es constante en $[H]^n$ (así como en la definición del ideal de una gráfica o como en el teorema de Ramsey). H es casi homogeneo para f si existe un conjunto finito F tal que $H \setminus F$ es homogeneo para f. $\mathfrak{par}_n$ es la mínima cardinalidad de cualquier familia de particiones de $[\omega]^n$ en dos piezas tal que ningún conjunto infinito es casi homogeneo para todas ellas. Notemos que en la definición es importante el *casi* homogeneo porque no es muy difícil producir familias numerables de modo que algún conjunto infinito es casi homogeneo para esa familia.

Teorema 23. $\mathfrak{par}_2 = min\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$.

Demostración. Primero notemos que $\mathfrak{par}_n \leq \mathfrak{par}_m$ si $n \geq m$ y también notemos que $\mathfrak{par}_1 = \mathfrak{s}$, entonces si probamos que $\mathfrak{par}_2 \leq \mathfrak{b}$ ya tendremos una de las desigualdades.

Sea $\mathcal{B} \subseteq \omega^\omega$ una familia no acotada de funciones tal que $|\mathcal{B}| = \mathfrak{b}$ y sin pérdida de generalidad g es monótona creciente para toda $g \in \mathcal{B}$. Para cada $g \in \mathcal{B}$ le asociamos una partición poniendo el par $\{x, y\}$ con $x \leq y$ en la clase 0 si $g(x) \leq y$ y en la clase 1 en otro caso. Probemos que ningún $H \in [\omega]^\omega$ es casi homogeneo para todas estas particiones simultaneamente. Notemos primero que un conjunto homogeneo de la clase 1 debe ser finito porque si x es el primer elemento entonces los otros elementos serán superados por $g(x)$

así que supongamos que H es casi homogeneo de la clase 1 para todas las particiones asociadas a las funciones $g \in \mathcal{B}$. Sea h la función que manda a cada natural x lo manda en el segundo miembro de H que está por arriba de x. Para cada x tenemos que $x < y < h(x)$ con $y, h(x) \in H$. Como H es casi homogeneo y para toda x suficientemente grande $g(y) < h(x)$, pero g es estrictamente creciente, entonces $g(x) < h(x)$, por lo tanto $g \leq^* h$ lo cual es contradicción de que $\mathcal{B}$ es no acotada.

Ahora probemos que $\mathfrak{par}_2 \geq min\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$. Supongamos que $f_\alpha : [\omega]^2 \to 2$ es una partición para cada $\alpha < \kappa < min\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$. Consideremos las funciones:

$$f_{\alpha,n} : \omega \to 2 : x \mapsto f_\alpha(\{n, x\}).$$

Esto no tiene sentido para $x = n$, ahí lo definimos como sea. Como el número de estas funciones es $\kappa \cdot \aleph_0 < \mathfrak{s}$, hay un conjunto infinito $A \subseteq \omega$ en el cual todas estas funciones son casi constantes; digamos que $f_{\alpha,n}(x) = j_\alpha(n)$ para toda $n \geq g_\alpha(n)$ en A. Más aún, como $\kappa < \mathfrak{s}$ podemos encontrar $B \subseteq A$ infinito en el cual j_α es casi constante, digamos $j_\alpha(n) = i_\alpha$ para toda $n \geq b_\alpha$ en B. Ahora, como $\kappa < \mathfrak{b}$ tenemos una función h que domina a g_α a partir de un natural c_α. Sea $H = \{x_0, x_1, ...\}$ un subconjunto infinito de B elegido tal que $h(x_n) < x_{n+1}$ para toda $n \in \omega$. Si $x < y$ son elementos de H más grandes que b_α y c_α entonces $y > h(x) \geq g_\alpha(x)$ y entonces $f_\alpha(\{x, y\}) = f_{\alpha,x}(y) = j_\alpha(x) = i_\alpha$ y por lo tanto H es casi homogeneo para cada f_α. $\square$

Definición 24. Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ ideales sobre ω. El producto de Fubini $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ está definido por $\mathcal{I} \times \mathcal{J} = \{A \subseteq \omega \times \omega : \{n : (A)_n \notin \mathcal{J}\} \in \mathcal{I}\}$.

$Fin \times Fin$ es el ideal sobre $\omega \times \omega$ generado por columnas y areas entre gráficas de funciones en ω^ω, es decir: $Fin \times Fin = \{A \subseteq \omega \times \omega : (\exists f \in \omega^\omega)(\forall^\infty n)(\forall m \in (A)_n)(m \leq f(n))\}$

Más aún, $Fin \times Fin$ puede ser visto como un ideal sobre ω generado por una partición en pedazos infinitos $\{P_n : n \in \omega\}$ y conjuntos $A \subseteq \omega$ tal que $|A \cap P_n| < \aleph_0$ para toda $n \in \omega$. Se tiene la siguiente proposición que no es muy difícil de verificar.

Proposición 25. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal en ω. $Fin \times Fin \leq_K \mathcal{I}$ si y sólo si existe un partición $\{Q_n : n \in \omega\}$ en subconjuntos infinitos de ω tal que cada $Q_n \in \mathcal{I}$ y cada $A \subseteq \omega$ que satisface $|A \cap Q_n| < \aleph_0$ está en $\mathcal{I}$.* □

Queremos probar que $cof^*(Fin \times Fin) = \mathfrak{b}$ para lo cual ocupamos el siguiente lema. Puede consultar una prueba en [12].

Lema 26. *$\mathfrak{b}$ es la mínima cardinalidad de una familia $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ de funciones crecientes tal que para cada $g \in \omega^\omega$ y para cada $X \in [\omega]^\omega$ existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $g(n) \leq f(n)$ para infinitas $n \in X$.* □

Proposición 27. *$cov^*(Fin \times Fin) = \mathfrak{b}$*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un testigo de $cov^*(Fin \times Fin)$. Para cada $A \in \mathcal{A}$ sea $f_A \in \omega^\omega$ tal que $(\forall^\infty n \in \omega)(\forall m \in (A)_n)(m \leq f_A(n))$. La familia $\{f_A : A \in \mathcal{A}\}$ es no acotada y por lo tanto $\mathfrak{b} \leq cov * (Fin \times Fin)$.

Sea $\mathcal{F}$ una familia que satisface el lema anterior. Para cada $f \in \mathcal{F}$ sea Δ_f el área debajo de f. Sea $\mathcal{A} = \{\Delta_f : f \in \mathcal{F}\} \cup \{\{n\} \times \omega : n \in \omega\} \subset Fin \times Fin$. $|\mathcal{A}| = \mathfrak{b}$ y si Y es un subconjunto infinito de $\omega \times \omega$ entonces tenemos dos casos:

- Existe n tal que $|(Y)_n| = \aleph_0$ o
- Existen infinitas n's para las cuales $(Y)_n \neq \emptyset$.

En el primer caso ya terminamos, así que supongamos el segundo. Sean $X = \{n : (\exists m)((n,m) \in Y)\}$ y $g \in \omega^\omega$ tal que $g(n) = min(Y)_n$ si $n \in X$, entonces existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $g(n) < f(n)$ para infinitas $n \in X$ y así Δ_f tiene infinitos elementos de Y. □

Lema 28. *$Fin \times Fin \leq_{KB} \mathcal{G}_c$.*

Demostración. Sea $f : [\omega]^2 \to \omega \times \omega$ dada por

$$f(\{n,m\}) = (min\{n,m\}, max\{n,m\}).$$

Si $X \in Fin \times Fin$ entonces existe $N \in \omega$ tal que para cada $n \geq N$, $(X)_n$ es finito. Entonces para casi toda $n \in \omega$, $\{m \in \omega : \{n, m\} \in f^{-1}[X]\}$ es finito y por lo tanto $f^{-1}[X]$ no contiene una gráfica completa infinita. $\square$

Teorema 29. $min\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\} = \mathfrak{par}_2 \leq cov^*(\mathcal{G}_c) \leq min\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}_2\}$.

Demostración. Ya sabemos que $cov^*(\mathcal{G}_{fc}) = \mathfrak{s}_2$, $cov^*(Fin \times Fin) = \mathfrak{b}$ y por las relaciones que tenemos en el orden de *Katětov-Blass*, entonces $cov^*(\mathcal{G}_c) \leq min\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}_2\}$; además la primera igualdad ya la probamos.

Sea $\mathcal{A}$ un subconjunto de $\mathcal{G}_c$ con $|\mathcal{A}| < \mathfrak{par}_2$. Notemos que cada $A \in \mathcal{A}$ define una partición de $[\omega]^2$. Existe $X \in [\omega]^\omega$ tal que $[X \setminus F]^2 \subseteq A$ o $[X \setminus F]^2 \subseteq [\omega]^2 \setminus A$, para toda $A \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $[X \setminus F]^2 \subseteq [\omega]^2 \setminus A$. Sea Y una pseudintersección de $\{[X \setminus F]^2 : F \in [\omega]^{<\omega}\}$. Entonces $A \cap Y$ es finito para toda $A \in \mathcal{A}$. $\square$

Hay algunos otros resultados que se saben entorno a este tema: se puede modificar la prueba de que $\mathfrak{par}_2 = min\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$ para probar que $\mathfrak{par}_2 = \mathfrak{par}_n$ para toda $n \in \omega$, se sabe que $\mathcal{S}, \mathcal{ED}_{fin} \leq_{KB} \mathcal{G}_{fc}$ donde $\mathcal{S}$ y $\mathcal{ED}_{fin}$ son ideales conocidos, además de algunas otras desigualdades en ZFC de los invariantes cardinales, pero esto ya se sale un poco del espíritu de este trabajo.

Hay preguntas abiertas en el área, puede consultar [1] y [2]. Además de esto a mi me quedan algunas dudas: ¿Cómo es el ideal generado por los homogeneos para otras gráficas? En particular quisiera saber cuales son sus invariantes cardinales. En fin, espero que sea del agrado del lector esta tesina, así como para mi fue estudiar este tema y redactarlo en este trabajo.

Referencias

[1] Michael Hrušák. *Combinatorics of filters and ideals*. Contemporary mathematics, volume 533, 2011.

[2] D. Meza-Alcántara. *Ideals and filters on coutable sets*. PhD thesis.

[3] Andreas Blass. *Combinatorial Characteristics of the Continuum*. En Handbook of Set Theory.

[4] Tomek Bartoszyński and Haim Judah. *Set theory. On the strcture of the real line*. A K Peters, Wellesley, MA, 1995.

[5] Fernando Hernández Hernández. *Teoría de Conjuntos (Una Introducción)*. Aportaciones Matemáticas No. 13. Tercera Edición, 2011.

[6] Kenneth Kunen. *Set Theory*. Studies in Logic 34.

[7] Kechris S. Alexander. *Classical Descriptive Set Theory*. Springer-Verlag, 1994.

[8] J. A. Bondy y U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. The Macmillian Press Ltd. 1976.

[9] Peter J. Cameron. *The random graph*. En The mathematics of Paul Erdös, II, volume 14, pages 333-351, 1997.

[10] Slawomir Solecki. *Analitic ideals and their applications*. Annals of Pure and Applied Logic, 99:51-72, 1999.

[11] Krzysztof Mazur. *F_σ-ideals and $\omega_1\omega_1^*$-gaps in the Boolean algebras* $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$. Fundamenta Mathematicae, 138(2):103-111, 1991.

[12] Judith Roitman. *More paracompact box products*. Proc. Amer. Math. Soc., (34):171–176, 1979.