



# Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Cs. Físico Matemáticas



## *Caos y Desorden en el Circuito de Chua*

Tesis para obtener el grado de Licenciatura en Ciencias Físico  
Matemáticas por:

Irma Rangel Recio

Bajo la asesoría de:

Dr. Eduardo S. Tututi Hernández

M en. Cs. Gabriel Arroyo Correa

Morelia Mich., Diciembre de 2012

# Caos y Desorden en el Circuito de Chua

Irma Rangel Recio

5 de diciembre de 2012

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. ¿Por qué nos interesa el caos? . . . . .	2
1.2. Sistemas dinámicos . . . . .	2
1.2.1. Linealización . . . . .	3
1.2.2. Detectando caos: Exponentes de Liapunov . . . . .	7
1.3. Una ruta fácil al caos: el circuito de Chua . . . . .	8
1.3.1. Resumen sobre el circuito . . . . .	8
1.3.2. Exponentes de Liapunov . . . . .	12
1.4. ¿Qué hay de nuevo en esto? . . . . .	17
<b>2. Un equivalente mecánico</b>	<b>20</b>
2.1. Análisis de un Equivalente Electromecánico . . . . .	20
2.2. Circuito Eléctrico Vs. Sistema Mecánico . . . . .	25
<b>3. Descripción Hamiltoniana del circuito de Chua</b>	<b>28</b>
3.1. Teoría de Hamilton . . . . .	28
3.1.1. Ecuaciones de Hamilton . . . . .	29
3.2. La función de Hamilton para el circuito de Chua . . . . .	31
3.2.1. Sistema de 4 y 6 Ecuaciones . . . . .	31
3.3. Hamiltoniano generalizado . . . . .	33
<b>4. Entropía y mapas de Poincaré</b>	<b>36</b>
4.1. Espacio fase . . . . .	36
4.2. Mapa de Poincaré . . . . .	39
4.3. Entropía . . . . .	43
4.3.1. Entropía de Shannon . . . . .	43
<b>5. Conclusiones</b>	<b>49</b>

Apendice A	50
Bibliografia	55



## Resumen

El circuito de Chua es el circuito no-lineal autónomo más simple que presenta comportamiento caótico; es decir, presenta una extrema sensibilidad al cambio de las condiciones iniciales. Bajo ciertas condiciones el circuito de Chua genera ciclos límite y atractores, tales como los llamados atractores de Chua y el de Rössler. En este trabajo se estudia el grado de desorden y caoticidad de las diferentes trayectorias en el circuito de Chua. Para ello, calculamos la entropía de Shannon y los exponentes de Liapunov de las diferentes trayectorias. La entropía la calculamos a partir de los mapas de Poincaré generados por las trayectorias en un espacio fase definidos ad hoc para el sistema en estudio. A manera de prueba, determinamos la entropía como función del número de particiones en los mapas de Poincaré. Como era de esperarse, concluimos, en base a la entropía y los exponentes de Liapunov, que el régimen del doble atractor es más desordenado que el atractor de Rössler.

Otro de los temas que abordamos es el de un equivalente mecánico para el circuito de Chua propuesto en [3], pues cualquier circuito eléctrico tiene un equivalente mecánico. Además encontramos la función Hamiltoniana para el sistema mecánico, esto aplicando la teoría de Hamiltoniano generalizado, ya que nuestros sistemas en cuestión constan de tres ecuaciones acopladas de primer orden. Esta generalización del Hamiltoniano no pone restricción alguna sobre el número de ecuaciones que forman al sistema.

# Capítulo 1

## Introducción

El circuito de Chua ha sido ampliamente estudiado desde su instrumentación inicial hecha por Leon O. Chua en 1983 [1], siendo un sistema que presenta una variedad rica en rutas al caos y en bifurcaciones. Este circuito es uno de los pocos sistemas cuyo comportamiento caótico tiene comprobación teórica y experimental.

Existe una vasta literatura en torno a este circuito como [1], [2], [3], [4]. Pues además de ser un sistema simple que da origen al caos determinista, también ofrece una variedad de aplicaciones: encriptación de señales [5] (que difiere de los métodos convencionales que usan algoritmos numéricos como clave de codificación), enmascaramiento [6], conmutación, acoplamiento [7], modulación de parámetros caóticos etc. Parte del objetivo en este trabajo consiste en describir un equivalente mecánico para este circuito, identificando la relación entre componentes del circuito eléctrico y componentes del sistema mecánico, comparando las ecuaciones que describen a cada sistema por separado. En particular usamos la generalización de sistemas Hamiltonianos, a modo de poder trabajar con las tres ecuaciones del circuito de Chua y del sistema mecánico. Como es conocido en la teoría de Hamilton se requiere un número par de ecuaciones para describir la evolución del sistema, pero en la formulación Hamiltoniana generalizada [2] esto ya no es una restricción. Un estudio del circuito de Chua mediante Hamiltonianos generalizados, puede ser de gran utilidad para estudiar otras posibles propiedades del circuito de Chua. Por ejemplo, la evolución en el correspondiente espacio fase y sus correspondientes mapas de Poincaré. Para este propósito se usó el paquete libre *DynPac* en la referencia [8] que corre bajo el software *Mathematica*.

En la otra parte del objetivo del trabajo se incorporó el concepto de entropía

sobre los mapas de Poincaré obtenidos para cuantificar la medida de desorden sobre éstos. Específicamente se usó el concepto de entropía de Shannon para los casos: doble atractor, atractor tipo Rössel, ciclo límite y una región estable no caótica.

## 1.1. ¿Por qué nos interesa el caos?

En los últimos años el interés por los fenómenos caóticos ha ido en aumento, extendiéndose a campos del conocimiento muy dispares: reacciones químicas, circuitos eléctricos, mecánica celeste, ecología, economía, vibraciones mecánicas, láseres, y un largo etcétera, dando lugar a una teoría del caos. Incluso el caos ha empezado a formar parte de nuestra vida cotidiana, existiendo numerosas referencias recientes en el cine<sup>1</sup> y en la literatura.

En primer lugar hay que destacar que, a diferencia de lo que ocurre en el lenguaje cotidiano en el que el término caos es sinónimo de desorden o falta de estructura, cuando se habla en ciencia de caos nos referimos a caos determinista. Es decir, una conducta compleja e impredecible pero que se deriva de ecuaciones o algoritmos no lineales bien definidos matemáticamente; que incluso no necesitan ser muy complicados, y no incluyen factores aleatorios.

El comportamiento caótico se presenta en sistemas no lineales, que son irregulares y altamente impredecibles. Estos sistemas se manifiestan en muchos ámbitos de la sociedad y la naturaleza, pero no se puede decir que tengan comportamiento *sin ley*, dado que existen reglas simples que determinan su comportamiento, aunque estas no siempre son conocidas a priori.

## 1.2. Sistemas dinámicos

Por definición, un sistema dinámico es un conjunto de ecuaciones diferenciales de  $N$  variables dinámicas independientes  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  de primer orden, el cual determina la evolución de un punto en el espacio fase euclideo, i.e con métrica  $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$  [9], dada por:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t). \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>Parque Jurásico de S. Spielberg 1993; El Efecto Mariposa de Eric Bress, 2004.

Se dice que el sistema es autónomo si  $f$  no depende explícitamente del tiempo  $t$ . Consideremos un sistema de dos dimensiones no-autónomo, esto es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, t), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Podemos tratar al sistema (1.2) como un sistema autónomo, introduciendo una nueva variable,  $t = x_3$  cuya derivada temporal es  $\dot{x}_3 = 1$ ; ocultando así la dependencia temporal. Finalizamos con tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 &= 1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Lo anterior se puede generalizar para un sistema de  $N$  ecuaciones no-autónomas de la forma (1.1). De igual manera la nueva variable será  $x_{N+1} = t$  con derivada temporal  $\dot{x}_{N+1} = 1$ , obteniendo así un sistema de  $N + 1$  ecuaciones autónomas.

### 1.2.1. Linealización

**Definición:** Los puntos de equilibrio o puntos estables  $x_e$  para un sistema como el de (1.1) son tales que

$$f(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} = 0. \quad (1.4)$$

Consideremos un sistema dinámico descrito por (1.1). Supongamos que el sistema es autónomo y que tiene al menos un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_e$ . Haciendo una expansión en series de Taylor alrededor del punto de equilibrio  $\mathbf{x}_e$ , obtenemos

$$f(\mathbf{x}, t) = 0 + \frac{\partial f(\mathbf{x}_e, t)}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) + \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^N (x_l - x_{le})(x_m - x_{me}) \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t)}{\partial x_l \partial x_m} + \dots, \quad (1.5)$$

donde el primer término es nulo por la definición de punto de equilibrio [ $f(\mathbf{x}_e, t) = 0$ ]. Notemos también que del tercer término en adelante son contribuciones no-lineales, por lo que solo consideraremos los términos lineales

(lo cual da una buena aproximación siempre y cuando estemos lo suficientemente cerca del punto de equilibrio).

En este caso, la ecuación que representa al sistema dinámico ya linealizada es:

$$\dot{x} = \mathbf{M}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e). \quad (1.6)$$

La Matriz  $\mathbf{M}$  es la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_e$ ,

$$\mathbf{M} = \left( \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{array} \right)_{X=\mathbf{x}_e}. \quad (1.7)$$

Trasladamos el origen al punto de equilibrio, lo cual se escribe como:

$$\xi = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e. \quad (1.8)$$

Como el sistema es autónomo, el punto de equilibrio no depende del tiempo y se obtiene

$$\dot{\xi} = \mathbf{M}\xi, \quad (1.9)$$

siendo  $\mathbf{M}$  una matriz de coeficientes constantes. Calculamos los valores propios  $\mu$ 's para la matriz  $\mathbf{M}$  de la forma usual, i.e  $\det |M - \mu I| = 0$ . A fin de fijar ideas y como ejemplo, consideremos el caso de un sistema dinámico linealizado de tres ecuaciones. La matriz Jacobiana es entonces una matriz de  $3 \times 3$  y tendremos tres valores propios. Consecuentemente tenemos tres casos a considerar:

- Los tres valores propios son reales y diferentes.
- Los tres valores propios son reales y por lo menos dos son iguales.
- Existe un valor propio real y dos valores complejos conjugados.

Topológicamente hay varios tipos de puntos de equilibrio ( $P_e$ ) de acuerdo con la distribución de los valores propios de  $M$  en el plano complejo. Para estados espaciales con tres o más dimensiones, es común especificar el llamado índice de un punto fijo. El **índice** de un punto de equilibrio está definido por el número de valores característicos de ese punto el cual tiene parte real positiva. Para un atractor el índice es igual a 0. Para un Repulsor, el índice

es igual a 3 para un estado dinámico de tres-dimensiones. Un punto silla también puede tener un índice de 1 o un índice 2 como se muestra en la Fig. 1.1.

Definimos a continuación los cuatro tipos básicos de puntos de equilibrio para un espacio tridimensional [10].

1. **Atractor.** Todos los valores propios son reales y negativos. Todas las trayectorias en el vecindario del atractor convergen hacia el punto estable.

**Atractor espiral.** Todos los valores propios tienen parte real negativa pero dos de ellos tienen parte imaginaria distinta de cero (y de hecho forman un par conjugado). Estas trayectorias en espiral alrededor del atractor sobre una “superficie” se acercan al punto estable.

2. **Repulsor.** Todos los valores propios son reales y positivos. Todas las trayectorias en la vecindad del repulsor divergen de él.

**Repulsor en espiral.** Todos los valores propios tienen parte real positiva, pero dos de ellos tienen parte imaginaria distinta de cero (y de hecho forman un par conjugado). Estas trayectorias en espiral alrededor del repulsor (sobre la “superficie”) son repelidas del punto estable.

3. **Punto silla con índice 1.** Todos los valores propios son reales. Uno es positivo y dos son negativos. Las trayectorias se acercan al punto silla sobre la superficie y divergen a lo largo de la curva.

**Punto silla espiral con índice 1.** Los dos valores propios con parte real negativa forman un par complejo conjugado. Estas trayectorias en espiral alrededor del punto silla se aproximan sobre la superficie.

4. **Punto silla con índice 2.** Todos los valores propios son reales, dos son positivos y uno negativo. Las trayectorias se aproximan al punto silla sobre la curva y divergen del punto silla sobre la superficie.

**Punto silla en espiral índice 2.** Los dos valores propios con parte real positiva forman un par complejo conjugado. Estas trayectorias en espiral alrededor del punto silla sobre la superficie divergen del punto silla.

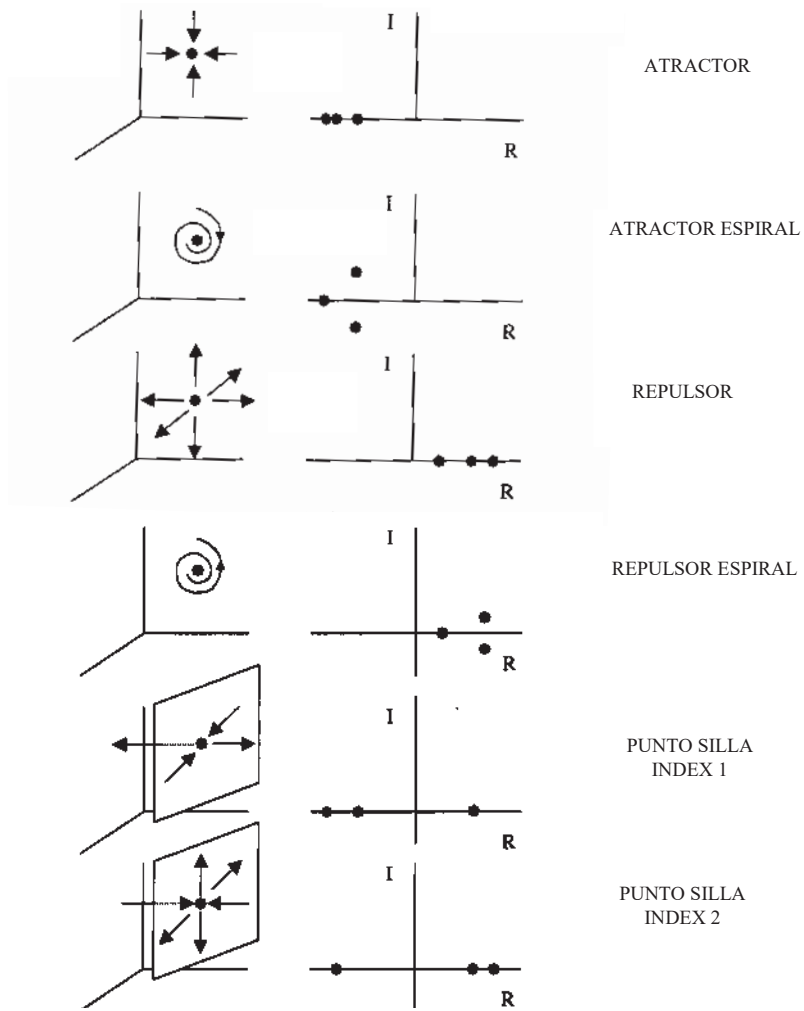


Figura 1.1: Clasificación topológica para los puntos de equilibrio en tres dimensiones acorde a la naturaleza de sus vectores propios. En la derecha, los valores característicos para los puntos de equilibrio están indicados en el plano complejo.

### 1.2.2. Detectando caos: Exponentes de Liapunov

Una de las formas, en lo personal más sencilla y fácil de entender, el caos es a través de la extrema sensibilidad de un sistema a las condiciones iniciales<sup>2</sup>. Es decir, existe caos cuando en un sistema dos sucesos que empiezan en condiciones iniciales muy próximas evolucionan de manera diferente, de forma que sus órbitas se separan exponencialmente en el espacio fase<sup>3</sup>. Así, se puede decir que el sistema pierde memoria de las condiciones iniciales a las que está sujeto. Esto tiene una consecuencia muy importante y es que, en el sentido caótico, es imposible realizar predicciones a largo plazo, ya que en la práctica no se pueden conocer las condiciones iniciales del sistema con precisión infinita.

Para entender y cuantificar la separación exponencial en el régimen caótico, introduciremos los **exponentes de Liapunov**<sup>4</sup> que son un conjunto de números útiles para detectar la presencia de caos en sistemas dinámicos. Podría decirse que son una medida cuantitativa de la sensibilidad de un sistema a los cambios en las condiciones iniciales. Estos exponentes miden la separación exponencial de órbitas cercanas de un sistema y hay tantos exponentes de Liapunov como variables dependientes tenga el sistema, pero para saber si un sistema es caótico, basta con determinar uno solo.

**Definición:** Consideremos dos trayectorias inicialmente separadas en el espacio fase una distancia  $d_0$ , al cabo de un tiempo  $t$  la distancia que las separa habrá cambiado y vendrá dada por  $d_t$  de la forma:

$$d_t = d_0 e^{\lambda t}. \quad (1.10)$$

La Ec. (1.10) es equivalente a  $\ln \frac{|d_t|}{|d_0|} = \lambda t$  donde  $\lambda$  es el llamado exponente de Liapunov expresado como

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|d_t|}{|d_0|}. \quad (1.11)$$

---

<sup>2</sup>Edward N. Lorenz enfatizó la dependencia de las condiciones iniciales ¿Puede el aleteo de una mariposa en Brasil desencadenar un tornado en Texas? conocido también como el efecto mariposa

<sup>3</sup>Espacio formado por todos los parámetros necesarios para caracterizar el estado del sistema.

<sup>4</sup>Este concepto fue introducido por el célebre matemático ruso Alexander Mijailovic Liapunov a principios del siglo XX.



De esta forma podemos establecer lo siguiente:

- Si todos los  $\lambda$  son negativos ( $\lambda < 0$ ) se dice que no hay caos o comportamiento caótico.
- Si todos los  $\lambda$  son positivos ( $\lambda > 0$ ) tendremos comportamiento caótico en toda la región del sistema
- Basta que un solo  $\lambda$  sea positivo para que por lo menos en esa región tengamos comportamiento caótico.

### 1.3. Una ruta fácil al caos: el circuito de Chua

El circuito de Chua es el circuito electrónico no lineal más sencillo que hay. Este circuito presenta una rica secuencia de bifurcaciones y varias rutas al caos. Se caracteriza por ser un sistema autónomo, es decir, no necesita alimentación por fuentes de corriente alterna para producir su comportamiento caótico, sólo necesita una fuente de corriente directa para alimentar al elemento no lineal. Normalmente los circuitos no lineales están formados por dos partes: la referente a los elementos de respuesta lineal (condensadores, resistencia, inductores y transformadores lineales) y la referente a los elementos no lineales. En este caso el elemento no lineal del circuito es el diodo de Chua, que tiene como función retroalimentar todo el circuito y mantenerlo oscilando.

#### 1.3.1. Resumen sobre el circuito

El circuito de Chua esencialmente es un oscilador eléctrico autónomo *RCL* con un elemento no lineal, denominado diodo de Chua  $N_d$  [ver Fig. 1.2(a)]. Para fines prácticos  $N_d$  es una resistencia de pendiente negativa, dada por una función de tres tramos lineales mostrada en la Fig. 1.2(b) en el plano voltaje-corriente.

Para encontrar el sistema de ecuaciones que describen este circuito usamos las leyes de Kirchhoff y obtuvimos las ecuaciones sig.

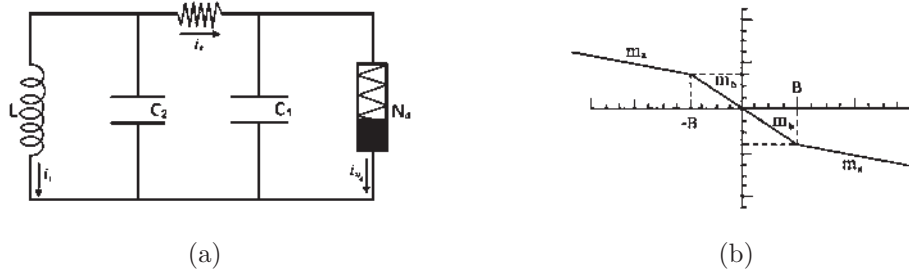


Figura 1.2: a) Circuito formado por una inductancia  $L$ , dos capacitores  $C_1$  y  $C_2$ , una resistencia  $R$  y un diodo de respuesta no lineal  $N_d$ . Las flechas indican el sentido de las corrientes. b) La función de respuesta del diodo  $N_d$  es lineal a trozos, las rectas de las extremidades tienen igual pendiente.

$$C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} = \frac{V_{C_2} - V_{C_1}}{R} - g(V_{C_1}), \quad (1.12)$$

$$C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = i_L + \frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{R}, \quad (1.13)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -V_{C_2}. \quad (1.14)$$

Notemos que no hay una uniformidad en unidades en el sistema de ecuaciones puesto que en las Ecs. (1.12) y (1.13) tenemos voltajes mientras que en (1.14) se tienen unidades de corriente. Del sistema anterior  $g(V_{C_1})$  es la función de respuesta no lineal del diodo de Chua mostrada en la Fig. 1.2(b) y se define como

$$g(V_{C_1}) = m_b V_1 + \frac{1}{2}(m_a - m_b)(|V_{C_1} + B| - |V_{C_1} - B|) = i_{N_d}.$$

Donde  $m_a$  y  $m_b$  son las pendientes de la función no lineal y  $B$  es el parámetro que denota a los puntos de quiebre en las pendientes como se muestra en la Fig. 1.2(b). Para tener las mismas unidades en el sistema de ecuaciones definiremos un parámetro con unidades de voltaje  $V_L = Ri_L$  para la inductancia. De esta forma las Ecs. (1.13) y (1.14) tendrán la forma respectivamente.

$$R \frac{dV_{C_2}}{dt} = \frac{V_{C_1}}{C_2} + \frac{V_L}{C_2} - \frac{V_{C_2}}{C_2}, \quad (1.15)$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{dV_L}{dt} = -\frac{V_{C_2}}{LR}. \quad (1.16)$$

Para expresar en variables adimensionales las Ecs. (1.12), (1.15), (1.16) se hacen los siguientes cambios de variable:

$$x = \frac{V_{C_1}}{B}, \quad y = \frac{V_{C_2}}{B}, \quad z = \frac{V_L}{B}, \quad a = m_a R, \quad b = m_b R, \quad \tau = \frac{t}{RC_2}, \quad \alpha_c = \frac{C_2}{C_1}$$

y  $\beta_c = \frac{R^2}{L} C_2$ .

Haciendo el álgebra correspondiente se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha_c(y - x - f(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta_c y. \end{aligned} \tag{1.17}$$

La función de respuesta no lineal expresada adimensionalmente tendrá la forma:

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(a - b)(|x + 1| - |x - 1|),$$

Expresamos el sistema (1.17) en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_c(y - x - f(x)) \\ x - y + z \\ -\beta_c y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

Ahora calcularemos los **puntos estables o puntos de equilibrio** para el circuito, es decir, encontrar los puntos  $X_e$  tales que:

$$\begin{pmatrix} f_1(X_e) \\ f_2(X_e) \\ f_3(X_e) \end{pmatrix} = 0. \tag{1.19}$$

Para este fin debemos resolver entonces el sistema anterior, esto es:

$$\begin{aligned} \alpha_c(y - x - f(x)) &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ -\beta_c y &= 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Al resolver (1.20) se obtiene una desigualdad para  $x$  acotada en  $[-1, 1]$ , expresión derivada de la forma de  $f(x)$ . Para encontrar su solución en  $x$ , resolvemos la igualdad (1.21):

$$x(1+b) + \frac{1}{2}(a-b)(x+1-x-1) = 0. \quad (1.21)$$

Para la solución en (1.21) consideramos los tres casos siguientes:

Para  $x \geq 1$

$$x = \frac{b-a}{b+1}; \quad y = 0; \quad z = -\frac{b-a}{b+1}.$$

Para  $x \leq -1$

$$x = \frac{a-b}{b+1}; \quad y = 0; \quad z = -\frac{a-b}{b+1}.$$

Para  $-1 < x < 1$

$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0.$$

Con lo anterior claramente vemos que este circuito tiene tres puntos de equilibrio. A manera de simplificación, definimos  $h = \frac{b-a}{b+1}$ , por lo que los puntos de equilibrio se pueden expresar como:

$$P_1 = (h, 0, -h),$$

$$P_2 = (-h, 0, h),$$

$$P_3 = (0, 0, 0).$$

Para investigar el comportamiento de los puntos de equilibrio tenemos que calcular los valores característicos y catalogarlos como se mencionó en la sec. 1.2.1. Sabemos que la evolución dinámica linealizada para este sistema es:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x - x_e \\ y - y_e \\ z - z_e \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

donde  $M$  es la matriz Jacobiana para las funciones  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ , evaluadas en los puntos de equilibrio  $P_e$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}_{P_e} = \begin{pmatrix} -\alpha c & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}_{P_e} = \mathbf{M}. \quad (1.23)$$

La matriz  $\mathbf{M}$  será la misma para los tres  $P_e$  obtenidos por ser la matriz Jacobiana constante. El parámetro  $c$  puede tomar dos valores diferentes dependiendo del punto alrededor del cual se linealice la función. Los valores posibles para  $c$  son:  $c = b + 1$  para el punto estable  $P_3 = (0, 0, 0)$  y  $c = a + 1$  para los puntos estables  $P_1 = (h, 0, -h)$  y  $P_2 = (-h, 0, h)$ . Hacemos el siguiente cambio en la Ec. (1.22)

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} x - x_e \\ y - y_e \\ z - z_e \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Como este es un sistema autónomo, la Ec. (1.22) se expresa como

$$\dot{\vec{\xi}} = M \cdot \vec{\xi}. \quad (1.25)$$

Sabemos también que la solución para un sistema como el de la Ec. (1.25) es de la forma

$$\dot{\vec{\xi}} = e^{\vec{A}t}, \quad (1.26)$$

donde  $\vec{A}$  es la matriz de valores propios:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}.$$

En este caso la solución al sistema coincide con la forma de los exponentes de Liapunov en la Ec.(1.10). Por tanto, la parte real de los valores propios  $\mu$  coinciden con los *exponentes de Liapunov*  $\lambda$ .

### 1.3.2. Exponentes de Liapunov

Como ejemplo para el cálculo de la matriz  $A$  y los exponentes de Liapunov consideramos cuatro regiones estables definidas en  $\alpha = 1.5, 4.4, 4.9$  y  $5.9$ , los parámetros que establecimos fueron:  $a = -\frac{8}{7}$ ,  $b = -\frac{5}{7}$   $\beta = 7$ . Debemos tener en cuenta que el sistema de Chua presenta cambios según se varíen estos parámetros. Estos valores el circuito presenta regiones caóticas estables como atractores y ciclos limite. Enseguida presentamos los valores propios correspondientes a cada región y para cada punto de equilibrio  $(P_1, P_1, P_3)$ .

En  $\alpha = 1.5$   
para los puntos  $P_1$  y  $P_2$

$$\begin{aligned}\mu_1 &= -0.5275 + 2.3003i, \\ \mu_2 &= -0.5275 - 2.3003i, \\ \mu_3 &= 0.269308,\end{aligned}\tag{1.27}$$

para el punto  $P_3$

$$\begin{aligned}\mu'_1 &= -0.438806 - 2.29183i, \\ \mu'_2 &= -0.438806 + 1.96183i, \\ \mu'_3 &= -0.55096.\end{aligned}\tag{1.28}$$

En esta región tenemos que  $\mu_1$  y  $\mu_2$  tienen parte real negativa, además de ser un par conjugado y  $\mu_3$  es positivo, por tanto describen a  $P_1$  y  $P_2$  como puntos de equilibrio tipo Atractor Espiral. Para el punto  $P_3$  tenemos que  $\mu_1$  y  $\mu_2$  tienen parte real negativa y  $\mu_3$  es real negativo, por lo tanto describen a un punto atractor espiral.

En  $\alpha = 4.4$   
para los puntos  $P_1$  y  $P_2$

$$\begin{aligned}\mu_1 &= -0.76958 - 1.7822i, \\ \mu_2 &= -0.76958 + 1.7822i, \\ \mu_3 &= 1.1676,\end{aligned}\tag{1.29}$$

para el punto  $P_3$

$$\begin{aligned}\mu'_1 &= 0.0052 - 1.9699i, \\ \mu'_2 &= 0.0052 + 1.9699i, \\ \mu'_3 &= -2.26757.\end{aligned}\tag{1.30}$$

En  $\alpha = 4.9$   
para los puntos  $P_1$  y  $P_2$

$$\begin{aligned}\mu_1 &= -0.8251 - 1.7168i, \\ \mu_2 &= -0.8251 + 1.7168i, \\ \mu_3 &= 1.3503,\end{aligned}\tag{1.31}$$

para el punto  $P_3$

$$\begin{aligned}\mu'_1 &= 0.0703 - 1.9627i, \\ \mu'_2 &= 0.0703 + 1.9627i, \\ \mu'_3 &= -2.5406.\end{aligned}\tag{1.32}$$

En  $\alpha = 5.9$

para los puntos  $P_1$  y  $P_2$

$$\begin{aligned}\mu_1 &= -0.8362 - 1.7046i, \\ \mu_2 &= -0.8362 + 1.7046i, \\ \mu_3 &= 1.3868,\end{aligned}\tag{1.33}$$

para el punto  $P_3$

$$\begin{aligned}\mu'_1 &= 0.0824 - 1.9619i, \\ \mu'_2 &= 0.0824 + 1.9619i, \\ \mu'_3 &= -2.59338.\end{aligned}\tag{1.34}$$

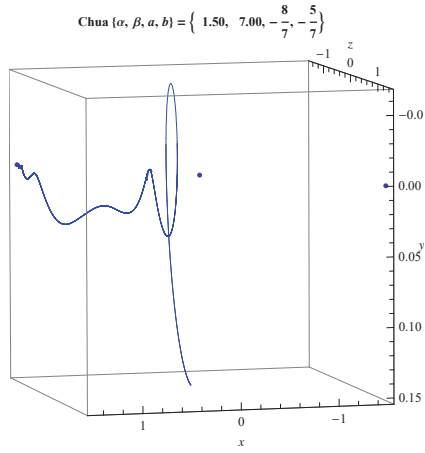
De estas tres ultimas ( $\alpha = 4.4, 4.9, 5.9$ ) *regiones* enemos por igual que  $\mu_1$  y  $\mu_2$  tienen parte real negativa y  $\mu_3$  es un número real positivo. Por lo tanto describen a  $P_1, P_2$  como dos puntos de equilibrio estable de tipo Atractor Espiral, es decir, *alrededor de cada punto de equilibrio las trayectorias se mueven de forma espiral*, como se muestra en las Figs. 1.3(b), 1.3(c) y 1.3(d). Para el punto de equilibrio  $P_3$  tenemos que  $\mu'_1$  y  $\mu'_2$  tienen parte real positiva y  $\mu'_3$  es un número real negativo, por lo tanto describen a  $P_3$  como un punto de equilibrio tipo silla en espiral índice 2.

En la Fig. 1.3 se pueden apreciar los puntos de equilibrio ( $P_1, P_2, P_3$ ) y las trayectorias descritas por el sistema de Chua para  $\alpha = 1.5, 4.4, 4.9$  y  $5.9$ . Es claro que el comportamiento tipo Atractor solo se presenta en los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , información que los valores propios nos proporcionan.

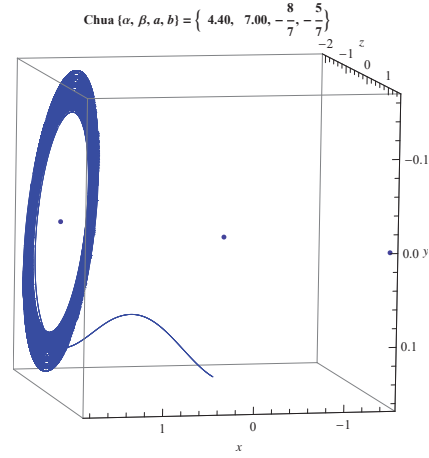
Ahora aplicaremos el concepto *exponente de Liapunov* de forma cuantitativa, esto es, obtener numéricamente  $\lambda$  de la expresión 1.11. Calculamos la separación  $d_t$  entre dos trayectorias del espacio fase partiendo de condiciones iniciales muy próximas definidas por  $\alpha$  <sup>5</sup>. La Fig. 1.4 muestra la evolución

---

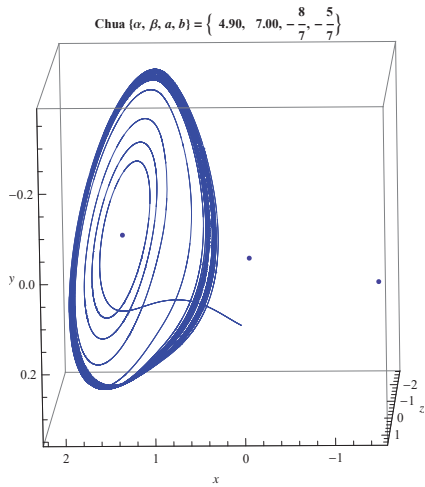
<sup>5</sup>Todo el cálculo se realizó en el programa Mathematica usando el paquete DynPac



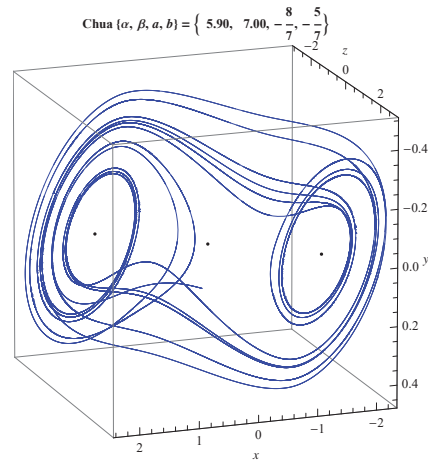
(a)  $\alpha = 1.5$ , tendencia a punto estable tipo atractor.



(b)  $\alpha = 4.3$ , órbita periódica.



(c)  $\alpha = 4.99$ , atractor tipo Rössler.



(d)  $\alpha = 5.9$ , doble atractor de Chua.

Figura 1.3: Las condiciones iniciales fueron:  $(0.1, 0.15, 0.01)$ , con los parámetros:  $a = -8/7$ ,  $b = -5/7$ ,  $\beta = 7$ . Los puntos de equilibrio  $(p_1, P_2, P_3)$ , están representados por los puntos individuales.

temporal de  $\lambda$  dada por la Ec. (1.11). Para obtener el comportamiento de  $\lambda$  consideramos cuatro regiones en las que el circuito es estable; el signo de  $\lambda$  definirá si es una región caótica o no.

En términos del exponente de Liapunov la trayectoria que sigue el sistema



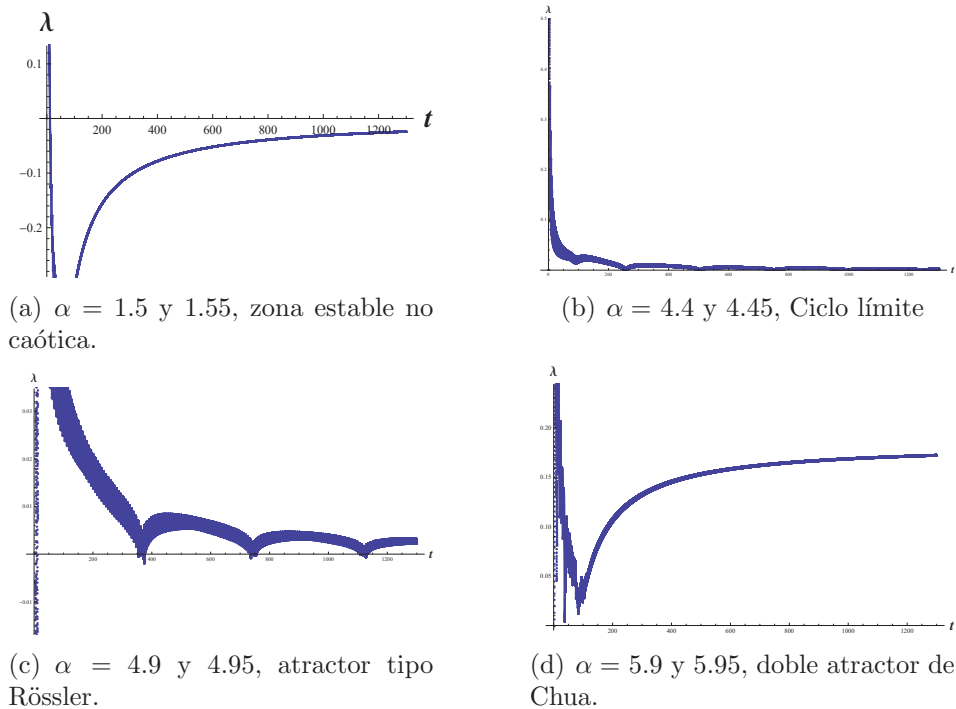


Figura 1.4: El comportamiento de  $\lambda$  nos expresa la evolución del sistema de un estado no caótico donde  $\lambda < 0$  a un estado cada vez más caótico donde  $\lambda > 0$ .

en el espacio de configuración (coordenadas  $X - Y - Z$ ) en la Fig. 1.3(a), y de acuerdo a la Fig. 1.4(a) entre  $(0 < t \leq 10)$ ,  $\lambda$  es positivo, mientras que para  $t > 10$ ,  $\lambda$  se vuelve negativo. Lo que observamos en esta figura, es la tendencia de  $\lambda$  a estabilizarse en un valor aproximado de  $\lambda \approx -0.4$ . Esto es, lo que estamos observando es un comportamiento regular de la trayectoria, es decir, un comportamiento no caótico. Sin embargo en lo que respecta a las trayectorias mostradas en las Figs. 1.3(b), 1.3(c) y 1.3(d) y sus respectivos valores de los exponentes de Liapunov mostrados en las Figs. 1.4(b), 1.4(c) y 1.4(d), la tendencia de  $\lambda$  conforme  $t$  crece es siempre a ser un número positivo. Por lo tanto, las regiones en  $\alpha = 4.4$ ,  $4.9$  y  $5.9$  son caóticas y justamente en estas regiones se tiene ciclo límite, atractor tipo Rössler y doble atractor, respectivamente.

También hemos calculado la métrica euclidiana, que para dos trayectorias

del espacio fase seis dimensional como lo es el del circuito de chua se define de la siguiente forma:

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 + \dot{r}_x^2 + \dot{r}_y^2 + \dot{r}_z^2} \quad (1.35)$$

Donde cada  $r_x, r_y, r_z$  así como sus derivadas temporales, representan la resta (coordenada a coordenada) entre las dos trayectorias del espacio fase. Recordemos que estamos trabajando con trayectorias que inician en condiciones muy proximas definidas por  $\alpha$ . En el capítulo 4 veremos detalladamente el espacio fase. Por el momento bastará saber que el circuito de Chua tiene tres grados de libertad  $(x, y, z)$  y por cada grado de libertad hay que agregar un momento canónico conjugado, que será la derivada temporal en este caso. Por tanto, el espacio fase será de 6 dimensiones  $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ .

En la Fig. (1.5) se aprecia la evolución temporal de la métrica euclidiana definida antes. No hablamos de una distancia como tal, por que  $x, y, z$  no son posiciones, son variables adimensionales del sistema. Podemos decir que la métrica que se calcula y muestra en la Fig. (1.5) es la separación entre las dos trayectorias bajo la expresión (1.35) valida para n-dimensiones.

En la Fig. 1.5(a) al poco tiempo las dos trayectorias se unen haciendo su separacion igual a cero por tanto esta región no es caótica. Por otro lado, en las Figs. 1.5(b), 1.5(c) y 1.5(d) el comportamiento de la metrica es irregular a pesar de iniciar en condiciones casi iguales, esto indica que son regiones caóticas, pues las trayectorias nunca mantienen una separación constante o nula.

## 1.4. ¿Qué hay de nuevo en esto?

Hasta ahora solo hemos hablado de que el circuito de Chua es un sistema que presenta caos por ser un sistema sensible al cambio en sus condiciones iniciales. Hemos dado también una idea de lo mucho que se ha explorado y explotado dicho circuito. En este trabajo se pretende complementar aún más el estudio de dicho circuito, concretamente al analizar tres temas relacionados entre sí que son:

1. *Aplicación de la teoría de Hamiltonianos generalizados*: Partimos de un equivalente mecánico ya propuesto para el circuito de Chua [3].

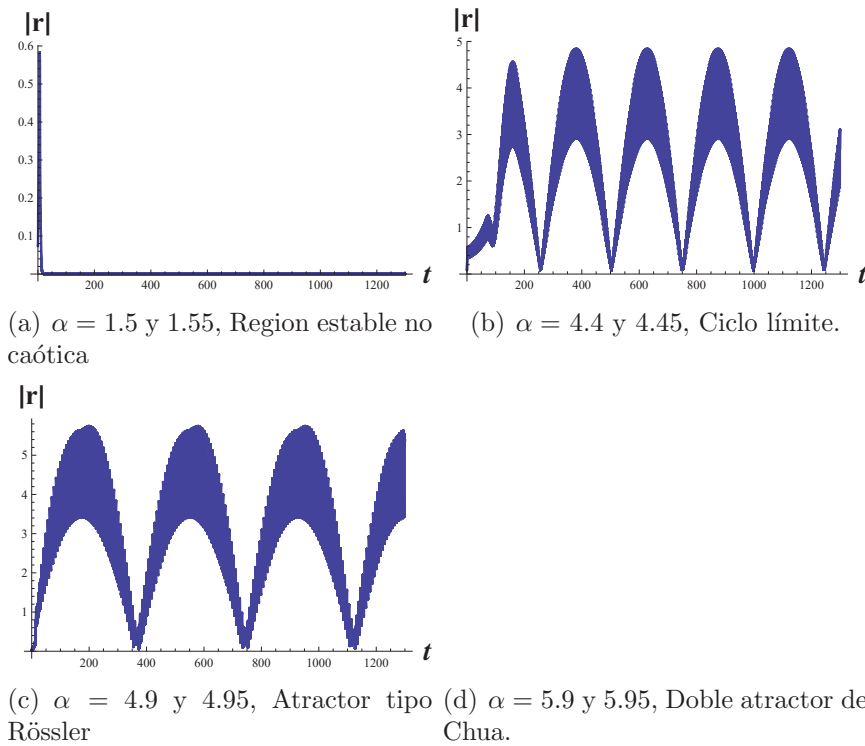


Figura 1.5: La evolución temporal de la métrica euclidiana  $|\vec{r}|$  nos indica la forma en que se acercan y alejan las dos trayectorias del espacio fase que analizamos. a) No indica ser una región caótica. b), c) y d) Indican ser zonas caóticas por sus oscilaciones e irregularidades.

Este equivalente mecánico se introduce en el capítulo 2. El objetivo es encontrar un Hamiltoniano para este sistema mecánico<sup>6</sup> que particularmente es un sistema de tres ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden y como veremos más adelante, la teoría de Hamilton usual no podrá ser aplicada (al menos no directamente), será necesario recurrir a la teoría de Hamiltonianos generalizados y poder obtener un Hamiltoniano. Esto se analiza en el capítulo 3 En principio este Hamiltoniano deberá ser de la misma forma para el sistema del circuito (por ser correspondientes ambos sistemas). Para cada circuito eléctrico hay un equivalente mecánico.

<sup>6</sup>Cualquier sistema mecánico tiene un Hamiltoniano asociado a la energía total del sistema.

2. *Mapas de Poincaré*: Utilizando el software *Mathematica* y el paquete *DynPac* reproducimos la solución para el sistema de ecuaciones de Chua y encontramos su evolución en el espacio fase de 6 dimensiones por lo que estudiamos sólo sus proyecciones. Para generar los mapas de Poincaré interceptamos las trayectorias del espacio fase con varios planos, teniendo en cuenta que entre mayor número de puntos de muestreo tengamos habra más trayectorias en el espacio fase y esto se reflejará en un mayor número de datos para cada mapa. Los mapas obtenidos tampoco pueden graficarse así que también analizaremos solo sus proyecciones.
  
3. *Entropía*: Calculamos la entropía de Shannon para los mapas de Poincaré obtenidos usando densidades de distribución de puntos de cada mapa, a fin de encontrar un patrón de desorden. Cabe destacar que obtuvimos mapas de todas las proyecciones 2D posibles para cuatro casos de condiciones iniciales: régimen estable no caótico, ciclo límite, atractor tipo Rössler y doble atractor.

Cabe mencionar que los últimos dos puntos (Mapas de Poincaré y Entropía) contribuyen de forma innovadora en el complemento del estudio del circuito de Chua y se tratan en el capítulo 4.

# Capítulo 2

## Un equivalente mecánico

En este capítulo planteamos un equivalente mecánico proveído por un mecanismo para el circuito de Chua. Dicho mecanismo está constituido por dispositivos electromecánicos. La idea es encontrar una correspondencia física y matemática en ambos sistemas, dando razón del papel que juega cada componente, como ocurre con la equivalencia de un circuito lineal RCL y el caso de un oscilador armónico amortiguado [11].

### 2.1. Análisis de un Equivalente Electromecánico

El modelo electromecánico que tratamos fue propuesto en la Ref. [3] y consiste de tres aparatos puramente mecánicos acoplados con mecanismos electromecánicos, como se describe enseguida<sup>1</sup>. El mecanismo completo se muestra en la Fig. 2.5, pero analizaremos por partes este aparato.

**Mecanismo A.-** El primer mecanismo está compuesto por un disco de radio  $r$  que gira con respecto a su centro que está fijo en el espacio y su momento de inercia es despreciable  $I \approx 0$ . La rotación del disco está definida por el ángulo  $\varphi(t)$  y es definido positivo en el sentido anti-horario. Las rotaciones son muy pequeñas tal que  $\sin(r\varphi) \cong r\varphi$ .

---

<sup>1</sup>Todas las figuras que se muestran en el resto de esta sección fueron tomadas de la ref. [3].

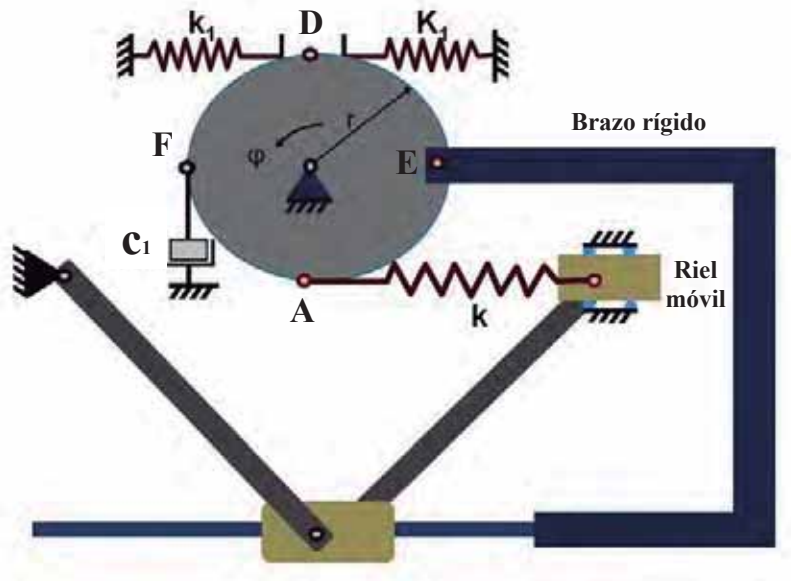


Figura 2.1: Arreglo mecánico formado por un disco de masa despreciable, sujeto a una estructura rígida fijada a una polea fija en un extremo y sujeta de forma movable al extremo del resorte  $K$ , lo cual evita atascamientos por fricción. Sujeto al disco también hay un amortiguador de constante  $c_1$  y dos resortes de constante  $k_1$ , así como una barra de metal justo en el punto  $D$ .

Pegado al disco, en el punto  $F$  (ver fig. 2.1), hay un amortiguador de aire con coeficiente de viscosidad  $c_1$  y fuerza de amortiguamiento  $-c_1 r \dot{\varphi}$  (término equivalente a velocidad lineal). También tenemos un resorte de constante  $k$  fijado de un extremo en el punto  $A$  sobre el disco, que da origen a una fuerza  $F_A$  para pequeñas oscilaciones y del otro extremo del resorte se fija a un riel móvil. En el punto  $E$  se coloca una estructura rígida en forma de brazo como se muestra en la Fig. 2.1 que genera una fuerza de reacción  $F_E$  al giro del disco. Este brazo rígido también está conectado a una polea fija en un extremo y sujeta de forma movable al extremo del resorte  $K$  en el riel, lo cual evita atascamientos por fricción.

En el punto  $D$  fijamos dos resortes iguales de constante  $k_1$  y una barra de metal. Al girar el disco en sentido horario  $-x_1$  o anti-horario  $x_1$  la barra metálica deformara alguno de los resortes. La deformación de los resortes matemáticamente nos representará una función lineal a trozos, semejante a

la función de respuesta del diodo de Chua (véase Fig. 1.2(b)).

Ahora hacemos un análisis de fuerzas correspondiente al mecanismo de la Fig. 2.1. Podemos ver el diagrama de fuerza (Fig. 2.2) para este mecanismo, donde identificamos una fuerza  $P_1 \equiv \lambda_1 y$  asociada al acoplamiento electromecánico con el **mecanismo B** (descrito mas adelante), donde  $y$  es la dirección de la fuerza y  $\lambda_1$  es un factor de acoplamiento. Sumamos todas las fuerzas externas del disco<sup>2</sup> y de acuerdo a la segunda ley de Newton para rotaciones, obtenemos la ecuación:

$$mr\ddot{\varphi} = -c_1 r \dot{\varphi} + (F_A + F_E) + P_1 + F_D$$

Para ponerla en términos del momento de inercia multiplicamos por  $r$ , teniendo así

$$I\ddot{\varphi} = -c_1 r^2 \dot{\varphi} + (F_A + F_E)r + P_1 r + F_D r. \quad (2.1)$$

Recordemos que trabajamos con pequeñas rotaciones. Bajo esta suposición construimos un arreglo geométrico<sup>3</sup> para las fuerzas  $F_A$  y  $F_E$  de tal forma que obtenemos la ecuación de fuerzas siguiente:

$$I\ddot{\varphi} = -c_1 r^2 \dot{\varphi} + k\delta r^2 \varphi + P_1 r + F_D r, \quad (2.2)$$

donde  $\delta$  es un factor geométrico y  $r\varphi$  resulta justamente de considerar rotaciones pequeñas. De la Ec. (2.2) sabemos que  $F_D$  es la interacción de la varilla metálica en el punto D con los dos resortes de constante  $k_1$ . Dicha fuerza es  $F_D = k_1(\varphi - \varphi^*)r$  tal que  $|\varphi r| \geq |x_1|$ . Hay que considerar entonces tres casos para la rotación del disco:  $|\varphi r| \geq x_1$ ,  $|\varphi r| < x_1$  y  $|\varphi r| \leq x_1$ , donde  $x_1 = r\varphi^*$  es la distancia de separación entre la varilla y cualquiera de los resortes. Físicamente  $\varphi^*$  representa el ángulo crítico de contacto con los resortes  $k_1$ . Hacemos  $I = 0$  y agregamos el término faltante  $F_D$ , lo cual nos lleva a que

$$-c_1 r^2 \dot{\varphi} + k\delta r^2 + P_1 r + k_1(\varphi - \varphi^*)r^2 = 0. \quad (2.3)$$

Para expresar en variables adimensionales hacemos los cambios de variable  $\varphi = \varphi^* \bar{\varphi}$ ,  $y = y^* \bar{y}$  y  $t = \frac{\tau}{\omega}$ . Donde  $\bar{\varphi}$  y  $\bar{y}$  son cantidades adimensionales y

<sup>2</sup>Los torques se miden respecto al centro del disco

<sup>3</sup>Para más detalle del arreglo geométrico que se empleo ver [3]. Todo surge partiendo de rotaciones pequeñas.

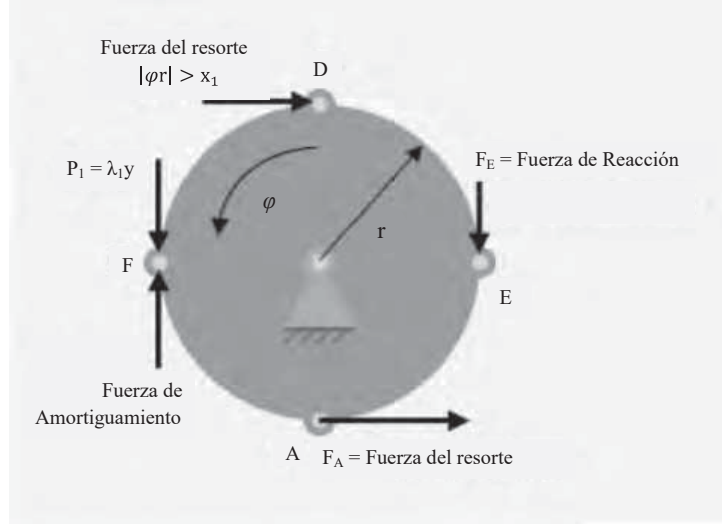


Figura 2.2: Diagrama de fuerzas del mecanismo A. Todas las fuerzas aplicadas al disco son externas y su suma deben satisfacer la segunda ley de Newton para rotaciones.

$\varphi^*$ ,  $y^*$  y  $w$  son constantes de proporcionalidad y  $\tau$  es necesario para cambiar las derivadas temporales tal que

$$\dot{\varphi} = \frac{d\bar{\varphi}\varphi^*}{dt} = \frac{d\bar{\varphi}}{d\frac{\tau}{w}}\varphi^* = w\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau}\varphi^* = w\bar{\varphi}'\varphi^*$$

Finalmente al considerar los tres casos correspondientes para  $\varphi r$  y realizar los cambios de variables ya mencionados obtenemos la expresión:

$$\bar{\varphi}' = \begin{cases} \alpha_m(\bar{y} - (m_0 + 1)\bar{\varphi} - (m_0 - m_1)), & |\varphi r| \geq x_1 \\ \alpha_m(\bar{y} - (m_0 + 1)\bar{\varphi}), & |\varphi r| < x_1 \\ \alpha_m(\bar{y} - (m_0 + 1)\bar{\varphi} + (m_0 - m_1)), & |\varphi r| \leq x_1, \end{cases} \quad (2.4)$$

donde  $\alpha_m = (\frac{\lambda_1 y^*}{c_1 r w \varphi^*})$ ,  $m_0 + 1 \equiv \frac{k_1 \delta r \varphi^*}{\lambda_1 y^*}$  y  $m_0 - m_1 \equiv -\frac{k r \varphi^*}{\lambda_1 y}$ .

La Ec. (2.4) describe justamente una función lineal a trozos como la empleada en el circuito de Chua para la resistencia negativa.

**Mecanismo B.-** El segundo mecanismo consta de un amortiguador de constante  $c_2$  y un resorte de constante  $k_2$  (ver Fig. 2.3) con masa despreciable.



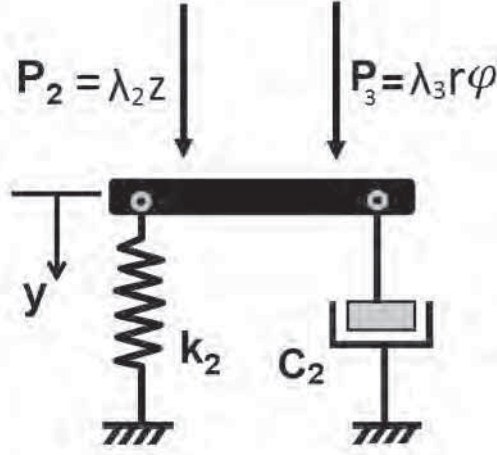


Figura 2.3: Aparato mecánico acoplado mediante  $P_3$  al disco y con  $P_2$  al amortiguador del tercer aparato mecánico.

Hacemos el análisis de fuerzas en la dirección “ $y$ ” obteniendo:

$$\sum F_y = c_2 \dot{y} + k_2 y = P_2 + P_3, \quad (2.5)$$

donde  $P_3 = \lambda_3 r \varphi$  es la fuerza del acoplamiento electromecánico que conecta al punto D (mediante una varilla) del disco y  $P_2 = \lambda_2 z$  es la fuerza debido al acoplamiento con el tercer mecanismo (descrito más adelante), siendo  $\lambda_2, \lambda_3$  constantes de acoplamiento.

Por otro lado las fuerzas  $P_2$  y  $P_3$  se determinan mediante la variable “ $z$ ” (dependiente del tercer mecanismo) y la posición angular  $\varphi$ , respectivamente. De igual forma que en el mecanismo A, hacemos la sustitución de variables  $\varphi = \varphi^* \bar{\varphi}$ ,  $y = y^* \bar{y}$ ,  $z = z^* \bar{z}$  y  $\tau = w t$  en (2.5) para obtener la expresión adimensional:

$$\bar{y}' = \bar{\varphi} - \bar{y} + \bar{z}. \quad (2.6)$$

**Mecanismo C.**- El tercer mecanismo consiste únicamente en un amortiguador de constante  $c_3$  que está acoplado a los mecanismos descritos anteriormente, mecanismo A y mecanismo B. Haremos el análisis de fuerzas en “ $z$ ” como se muestra en la Fig. 2.4.

La única fuerza de acoplamiento que contribuye es  $P_4 = -\lambda_4 y$ , la fuerza  $P_2$  no actúa más que en el mecanismo B. Por lo tanto la suma total de fuerzas

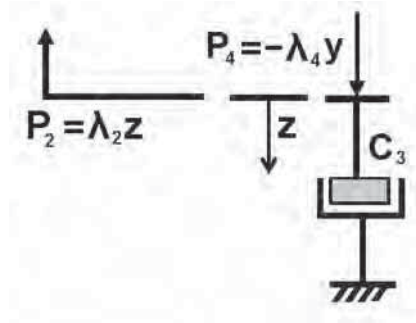


Figura 2.4: La única fuerza sobre el amortiguador es la generada por el acoplamiento.

sobre este mecanismo está dado por:

$$\sum F_z = c_3 \dot{z} = P_4. \quad (2.7)$$

Otra vez, pasando a variables adimensionales en la Ec. (2.7), obtenemos la que viene a completar el sistema de ecuaciones que describen en su totalidad al sistema mecánico:

$$\bar{z}' = -\beta_m \bar{y}, \quad (2.8)$$

con  $\beta_m = \left(\frac{\lambda_4 y^* c_2}{c_3 k_2 z^*}\right)$ .

## 2.2. Circuito Eléctrico Vs. Sistema Mecánico

Ya tenemos las ecuaciones de movimiento para el circuito y el modelo mecánico. Ahora haremos la correspondencia entre los conjuntos de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\dot{x} = \alpha_c(y - x - f(x)) \rightarrow \bar{\varphi}' = \begin{cases} \alpha_m(y - (m_0 + 1)\bar{\varphi} - (m_0 - m_1)), & |\varphi r| \geq x_1 \\ \alpha_m(y - (m_0 + 1)\bar{\varphi}), & |\varphi r| < x_1 \\ \alpha_m(y - (m_0 + 1)\bar{\varphi} + (m_0 - m_1)), & |\varphi r| \leq x_1, \end{cases}$$

$$\dot{y} = x - y + z \rightarrow \bar{y}' = \bar{\varphi} - \bar{y} + \bar{z},$$

$$\dot{z} = -\beta_c \bar{y} \rightarrow \bar{z}' = -\beta_m \bar{y}.$$

A fin de encontrar las correspondientes equivalencias entre los elementos pasivos y mecánicos, analizamos la proporcionalidad en las ecuaciones de movimiento determinando así lo siguiente:

$$\alpha_m = \frac{\lambda_1 y^*}{c_1 r w \varphi^*}, \quad \beta_m = - \left( \frac{\lambda_4 y^* c_2}{c_3 k_2 z^*} \right) \quad \text{sistemamecánico}$$

$$\alpha_c = \frac{C_2}{C_1}, \quad \beta_c = \frac{R^2}{L} C_2 \quad \text{circuitoeléctrico}$$

Concluimos que las siguientes relaciones se deben cumplir:

- El capacitor  $C_2$  es equivalente al amortiguador  $c_2$  y al resorte  $k_2$ .
- El capacitor  $C_1$  es proporcional al amortiguador de constante  $c_1$ .
- La inductancia  $L$  es proporcional al amortiguador de constante  $c_3$ .

Algo importante a resaltar para este análisis es que los términos constantes no se toman en cuenta ya que resultan irrelevantes.

En la Fig. 2.5 presentamos el sistema mecánico completo, equivalente al circuito de Chua. Los dispositivos de acoplamiento  $P_1, P_2, P_3$  tienen como finalidad dar cierta automaticidad a todo el sistema. Una vez que se gire el disco, este activará a los demás componentes de forma retroactiva como un ciclo que idealmente no tendría fin.

Algo similar pasa con el circuito de Chua, uno de sus componentes, precisamente el diodo de Chua, tiene como finalidad retroalimentar todo el circuito y mantenerlo oscilando además de no necesitar alimentación por fuentes de corriente alterna para producir su comportamiento caótico, sólo necesita una fuente de corriente directa.

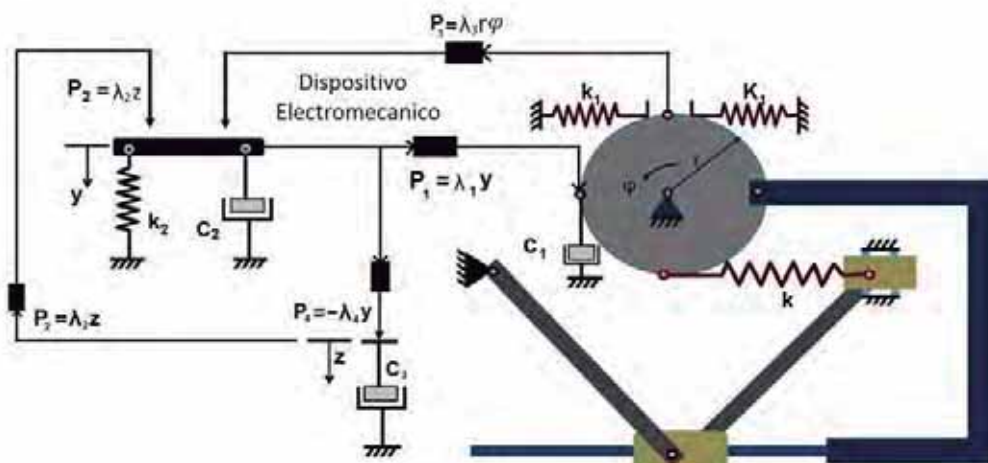


Figura 2.5: Se ilustran los tres componentes mecánicos acoplados con los dispositivos electromecánicos. En su totalidad este sistema mecánico es equivalente al circuito de Chua.

# Capítulo 3

## Descripción Hamiltoniana del circuito de Chua

En este capítulo estudiaremos brevemente la teoría de Hamilton. Trataremos las ecuaciones de Hamilton y la formulación de un Hamiltoniano generalizado a fin de encontrar un Hamiltoniano para el circuito de Chua. No obstante, que solo tenemos un sistema con un número impar de ecuaciones.

### 3.1. Teoría de Hamilton

La formulación de Hamilton para la mecánica clásica está basada en una función Hamiltoniana que depende de los momentos canónicos conjugados  $p_i$  y las coordenadas canónicas conjugadas  $q_i$ . Estas variables canónicas conjugadas  $(p_i, q_i)$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  definen el espacio fase de dimensión  $2n$  y la evolución del sistema corresponde a encontrar la trayectoria que un punto sigue en dicho espacio. Esta formulación describe el movimiento mediante ecuaciones de primer orden. El número de condiciones iniciales que determinan el movimiento es  $2n$ , por tanto deberá haber  $2n$  ecuaciones independientes de primer orden, expresadas en función de  $2n$  variables independientes. Otra formulación de la Mecánica (no menos importante) es la de Lagrange aplicada a sistemas con  $n$  grados de libertad. La evolución del sistema queda descrito por la función Lagrangiana  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  y las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Como las ecuaciones son de segundo orden, el movimiento del sistema estará dado cuando se especifiquen  $2n$  valores iniciales, por ejemplo,  $q_{i0} = q_i(0)$  y  $\dot{q}_{i0} = \dot{q}_i(0)$  en un instante particular  $t_1 = 0$ . Para esta formulación el estado del sistema lo representamos por un punto en el espacio de configuración de  $n$  dimensiones cuyas coordenadas son las  $n$  coordenadas generalizadas  $q_i$ . Desde el punto de vista de Lagrange, un sistema con  $n$  grados de libertad es un problema de  $n$  variables independientes  $q_i(t)$  ya que  $\dot{q}_i$  sólo es una derivada de  $q_i$  respecto del tiempo.

Podemos pasar de la formulación Lagrangiana a la Hamiltoniana si planteamos este problema desde un punto de vista matemático. La transición de Lagrange a Hamilton corresponde a cambiar las variables de nuestras funciones mecánicas de  $L(q, \dot{q}, t)$  a  $H(q, p, t)$ , donde  $p$  está relacionado con  $q$  y  $\dot{q}$  mediante la Ec. 3.1

$$p_i = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i}. \quad (3.1)$$

El método para comunicar las variables de esta manera lo proporciona la *transformada de Legendre* para este tipo de cambio de variable ver Ref.[13].

### 3.1.1. Ecuaciones de Hamilton

Para obtener las ecuaciones de Hamilton, consideremos la función de Lagrange del sistema con  $n$  grados de libertad en tres variables  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  cuya diferencial tendrá la forma:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (3.2)$$

Queremos cambiar la descripción del sistema cuya función Lagrangiana es función de  $q, \dot{q}, t$ , a una nueva función de variables  $H(q, p, t)$ . Para llevar a cabo esta tarea, es necesario realizar una transformación de Legendre:

$$H(q_i, p_i, t) = -L(q_i, \dot{q}_i, t) + \dot{q}_i p_i, \quad (3.3)$$

donde se entiende una suma implícita sobre índices repetidos y  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ .  $H$  recibe el nombre de la función Hamiltoniana y su diferencial viene dado por:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (3.4)$$

De acuerdo a la Ec. (3.3) podemos también escribir:

$$dH = \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} q_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (3.5)$$

Usamos la definición de momento canónico conjugado Ec (3.1) y como consecuencia los términos que contengan  $\dot{q}_i$  se eliminarán en favor de  $p_i$ . Por tanto, la Ec. (3.5) se reduce a:

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (3.6)$$

De la ecuación de Lagrange tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(p_i) = \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (3.7)$$

sustituyendo la Ec. (3.7) en (3.6), obtenemos:

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (3.8)$$

lo cual nos indica que  $H$  solo debe ser una función de  $q_i, p_i, t$  y no depende de  $\dot{q}_i$ . Comparando los términos de la expresión (3.4) con (3.8) vemos que para que sea la misma diferencial se debe satisfacer:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (3.9)$$

$$(3.10)$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (3.11)$$

y además,

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (3.13)$$

Las Ecs. (3.9) son las llamadas *ecuaciones de Hamilton* y constituyen un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas de primer orden que describen la evolución del sistema. Trataremos de expresar ahora al circuito de Chua en una función tipo Hamiltoniana.

## 3.2. La función de Hamilton para el circuito de Chua

Como ya hemos visto, las ecuaciones que describen al circuito de Chua son tres ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas no lineales. Ahora intentaremos, a partir directamente de estas ecuaciones, obtener la función de Hamilton. Primeramente notemos que para aplicar la formulación Hamiltoniana directamente necesitamos tener un sistema con un número par de ecuaciones de primer orden. El circuito de Chua es descrito por 3 ecuaciones. Podemos plantearnos la posibilidad de definir al sistema con 4 ó 6 ecuaciones esperando poder encontrar su función Hamiltoniana.

### 3.2.1. Sistema de 4 y 6 Ecuaciones

Una forma de tener un sistema de cuatro ecuaciones para el circuito de Chua, es introducir una cuarta ecuación que sea igual a cero. Proponemos entonces el siguiente sistema de tal forma que  $z \rightarrow X$ ,  $y \rightarrow Y$ ,  $x \rightarrow P_x$ . Y así tendremos un sistema de cuatro ecuaciones que describen al circuito de Chua:

$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = f_1(X, P_x, Y, P_y) = \beta Y && \rightarrow \dot{z}, \\
 \dot{Y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = f_2(X, P_x, Y, P_y) = P_x - Y + X && \rightarrow \dot{y}, \\
 \dot{P}_x &= -\frac{\partial H}{\partial X} = f_3(X, P_x, Y, P_y) = \alpha(Y - P_x - g(P_x)) && \rightarrow \dot{x}, \\
 \dot{P}_y &= -\frac{\partial H}{\partial Y} = f_4(X, P_x, Y, P_y) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Las Ecs (3.14) son las derivadas parciales de la función de Hamilton  $H$  por lo que su derivada total será la suma de las parciales. Lo que nos interesa es la Hamiltoniana como tal y no su derivada; así que tendremos que integrar las funciones  $f_1, f_2, f_3$  y  $f_4$  obteniendo las funciones  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$  y  $\bar{f}_4$ :



$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p_x} = f_1 &\Rightarrow \bar{f}_1 = \int_{p_x} f_1 dp_x + \bar{\bar{f}}_1(X, Y, p_y), \\
\frac{\partial H}{\partial p_y} = f_2 &\Rightarrow \bar{f}_2 = \int_{p_y} f_2 dp_y + \bar{\bar{f}}_2(X, p_x, Y), \\
-\frac{\partial H}{\partial X} = f_3 &\Rightarrow \bar{f}_3 = - \int_X f_3 dX + \bar{\bar{f}}_3(p_x, Y, p_y), \\
-\frac{\partial H}{\partial Y} = f_4 &\Rightarrow \bar{f}_4 = - \int_Y f_4 dY + \bar{\bar{f}}_4(X, p_x, p_y),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Integrando las Ecs. (3.15), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\bar{f}_1 &= \beta Y p_x + \bar{\bar{f}}_1(X, Y, p_x), \\
\bar{f}_2 &= p_x p_y - Y p_y + X p_y + \bar{\bar{f}}_2(X, p_x, Y), \\
\bar{f}_3 &= \alpha Y X - \alpha p_x X - \alpha g(p_x) X + \bar{\bar{f}}_3(p_x, Y, p_y), \\
\bar{f}_4 &= \bar{\bar{f}}_4(X, p_x, p_y).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

La función Hamiltoniana total  $H$  estará dado entonces por la suma:

$$H = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \bar{f}_3 + \bar{f}_4. \tag{3.17}$$

La cuestión aquí es definir las funciones de integración  $\bar{\bar{f}}_1, \bar{\bar{f}}_2, \bar{\bar{f}}_3$  y  $\bar{\bar{f}}_4$ . Para esto es necesario calcular la derivada total de la Hamiltoniana e igualar con el valor de las derivadas parciales vistas en (3.14). Lo que obtendremos es el siguiente sistema para las funciones  $\bar{\bar{f}}_1, \bar{\bar{f}}_2, \bar{\bar{f}}_3$  y  $\bar{\bar{f}}_4$ ,

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{f}}_2 + \bar{\bar{f}}_3 + \bar{\bar{f}}_4 &= \alpha \mathbf{x} p_x - p_x p_y + \alpha \mathbf{x} g(p_x) p_x, \\
\bar{\bar{f}}_1 + \bar{\bar{f}}_3 + \bar{\bar{f}}_4 &= 0, \\
\bar{\bar{f}}_1 + \bar{\bar{f}}_2 + \bar{\bar{f}}_4 &= -p_y \mathbf{x}, \\
\bar{\bar{f}}_1 + \bar{\bar{f}}_2 + \bar{\bar{f}}_3 &= -\beta p_x \mathbf{y} - p_y \mathbf{y} - \alpha \mathbf{x} \mathbf{y}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Para definir sin problemas la Hamiltoniana  $H$ , bastaría con resolver el sistema (3.18), lamentablemente esto no es posible, pues la solución a este sistema para cada función, siempre quedará en términos de otra función. Es decir

una de las funciones  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$  o  $\bar{f}_4$  siempre va a quedar indeterminada sin importar la forma en que seleccionemos las variables del sistema; por ejemplo, considerar  $x = \mathbf{x}, y = \mathbf{y}, z = p_x$  o cualquier otra selección.

Por otro lado, planteamos un sistema de seis ecuaciones las cuales también describen el sistema de Chua. Hicimos algo similar que en el caso de cuatro ecuaciones, sólo que agregamos tres ecuaciones diferenciales de primer orden iguales a cero en lugar de una sola que corresponda a las que involucren a las derivadas temporales de los momentos canónicos conjugados. Los resultados fueron los mismos, no fue posible definir un Hamiltoniano para el sistema. Esto no implica que el sistema de Chua no tenga una Hamiltoniana, hay otras formas de encontrarla. Particularmente nos interesa usar la formulación de Hamilton generalizada, que como veremos más adelante, se generaliza para cualquier sistema sin importar el número de grados de libertad. De no existir esta formulación tendríamos que recurrir al cálculo directo de la energía total de cada sistema, tanto del eléctrico como del mecánico, ya que el Hamiltoniano también se define como la suma de energías cinética y potencial  $H = K + V$ .

### 3.3. Hamiltoniano generalizado

Partiendo de la forma canónica de Hamilton se pueden derivar otras formulaciones para los sistemas Hamiltonianos conservativos y disipativos. A estos sistemas se les conoce en la literatura como sistemas Hamiltonianos generalizados [2]. Para estos sistemas está definido un espacio de estados descrito por el conjunto de matrices  $J(\mathbf{x}), S(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}), H(\mathbf{x})$ .  $J(\mathbf{x})$  es anti-simétrica y modela las estructuras conservativas del sistema,  $S(\mathbf{x})$  es simétrica y modela la estructuras disipativas del sistema,  $f(\mathbf{x})$  es la parte no-lineal del sistema representada por una función suave y  $H(\mathbf{x})$  es una función escalar continua y diferenciable, que es independiente de la estructura del sistema y representa toda la energía almacenada en el sistema [2]. Entonces, en este esquema generalizado, la expresión (3.19) genera las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{\mathbf{x}} = [J(\mathbf{x}) + S(\mathbf{x})] \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + f(\mathbf{x}). \quad (3.19)$$

Vamos a aplicar esta teoría al caso del circuito de Chua, tratando a este

sistema como un sistema disipativo<sup>1</sup> y encontraremos las matrices  $J, S, H$  y  $f$ . En el caso de más de un circuito de Chua en el que se tiene acoplamiento, la interconexión de estos circuitos da como resultado otro sistema en el que el Hamiltoniano resultante es  $H(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n H_i(\mathbf{x})$ , con  $n$  el número de sistemas interconectados [14].

En el caso de un solo circuito (el circuito de Chua) las matrices  $J(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})$  y  $H(\mathbf{x})$ , de acuerdo a las Ecs. (1.17) son

$$\begin{aligned}
 J(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}, \\
 S(x) &= \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 H(x) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha} x^2 + y^2 + \frac{1}{\beta} z^2 \right)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

La parte no lineal está dada por

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \alpha g(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

referente al diodo de Chua. Hacemos verificado que si se obtiene el sistema de ecuaciones originales (3.20), apartir de las Ecs. (3.19)-(3.20) de la siguiente manera:

---

<sup>1</sup>Estrictamente hablando, los circuitos de Chua no son autónomos, ya que disipan energía en el elemento resistivo del circuito y la resistencia interna de la inductancia. Sin embargo, se dice que es un sistema autónomo en el sentido de que el sistema de ecuaciones diferenciales que describen al circuito de Chua no aparece explícitamente una función del tiempo.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x H(x) \\ \partial_y H(x) \\ \partial_z H(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha^2 & \alpha & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x H(x) \\ \partial_y H(x) \\ \partial_z H(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha f(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.22) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\alpha} \\ y \\ \frac{z}{\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha^2 & \alpha & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\alpha} \\ y \\ \frac{z}{\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha f(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\alpha x + \alpha y - \alpha f(x) \\ z + x - y \\ -\beta y \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es importante mencionar que esta forma para el Hamiltoniano es la misma para el circuito eléctrico y el sistema mecánico, ya que el sistema de ecuaciones que los describen tienen la misma forma y solo difieren por las constantes  $\alpha_c, \beta_c$  y  $\alpha_m, \beta_m$ , respectivamente.

Para el sistema mecánico los componentes conservativos son los resortes y el conjunto disco-resorte de constante  $k$ . Sabiendo esto podemos decir que  $J(\mathbf{x})$  contiene información referente a estos elementos, mientras que en el circuito de Chua contiene información sobre la inductancia (si es que no se toma en cuenta su resistencia interna) y capacitores que definen la parte conservativa del circuito eléctrico. Los componentes disipativos propiamente del sistema mecánico son los amortiguadores, por esto asumimos que la matriz  $S(\mathbf{x})$  contiene la información referente a ellos. En el circuito, la matriz  $S(\mathbf{x})$  contiene información de las resistencias que corresponde al elemento disipativo.

Ya se mencionó también que la parte no lineal  $f(\mathbf{x})$  hace referencia al diodo de Chua en el circuito. En el sistema mecánico  $f(\mathbf{x})$  describirá al disco interactuando a través de una varilla con los dos resortes de constantes  $k_1$  que genera una función de respuesta no lineal, análoga al diodo de Chua.

# Capítulo 4

## Entropía y mapas de Poincaré

Esta sección está enfocada a la obtención y análisis de espacios fase y mapas de Poincaré, generados por el circuito de Chua. Introduciremos la entropía de Shannon en el análisis de la distribución de puntos que conforman los mapas de Poincaré para determinar el grado de desorden entre estados del sistema de Chua. Marcaremos también las diferencias entre caos, desorden y entropía.

### 4.1. Espacio fase

En mecánica clásica, el espacio fase es una construcción matemática que permite representar el conjunto de coordenadas canónicas conjugadas  $q = (q_1, \dots, q_n)$  y momentos  $p = (p_1, \dots, p_n)$  de un sistema de  $N$  partículas con  $n$  grados de libertad [13]. Las coordenadas de cada punto en el espacio fase, representan a  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ , correspondientes a la familia de soluciones del sistema y éstas a su vez representan un estado del sistema en cuestión. La familia de soluciones del sistema generará trayectorias en el espacio fase, las cuales se interpretan como la evolución del estado del sistema. Por ejemplo, una partícula que se mueve en el espacio tridimensional, es decir, en  $R^3$ , su espacio fase será  $R^6$ . Esto porque 3 coordenadas representan a la posición  $(q_1, q_2, q_3)$  y 3 a los momentos conjugados  $(p_1, p_2, p_3)$ . En muchas ocasiones ocurre que el momento canónico conjugado  $p_i$  coincide con el momento lineal  $P = m\dot{x}$ . Cuando esto ocurre, es común referirse al espacio fase como al espacio constituido por la posición  $x$ , y las velocidades  $\dot{x}$ .

Recordemos que en el sistema de Chua no podemos hablar de posición o velocidad por ser un circuito, aunado a esto las variables del sistema son adimensionales. Además no tenemos una representación para las coordenadas generalizadas. Particularmente, el espacio fase para el sistema de Chua lo construimos con las variables independientes y sus derivadas temporales  $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , respectivamente. No empleamos coordenadas generalizadas ya que la forma en la que construimos el Hamiltoniano en el capítulo 3, fue recurriendo a Hamiltonianos generalizados y no expresamos el sistema en estas coordenadas generalizadas.

Como resultado tenemos un espacio fase 6-D (seis dimensiones) para el cual es imposible graficar las trayectorias en dicho espacio. Para su análisis recurrimos a las proyecciones y así tener una idea de su comportamiento. En las Figs. 4.1-4.4 solo mostramos un caso de las 16 posibles proyecciones en 2D, correspondiente a la coordenada  $x$  y a la evolución temporal de  $\dot{x}$ .

Recordemos que el estudio de este sistema es en  $\alpha \in [1.5, 6]$  y en condiciones iniciales  $(0.1, 0.15, 0.01)$ . Consideramos las mismas regiones que analizamos en el capítulo 1 que corresponden a las soluciones: Región estable no caótica, ciclo límite, atractor tipo Rössler y doble atractor.

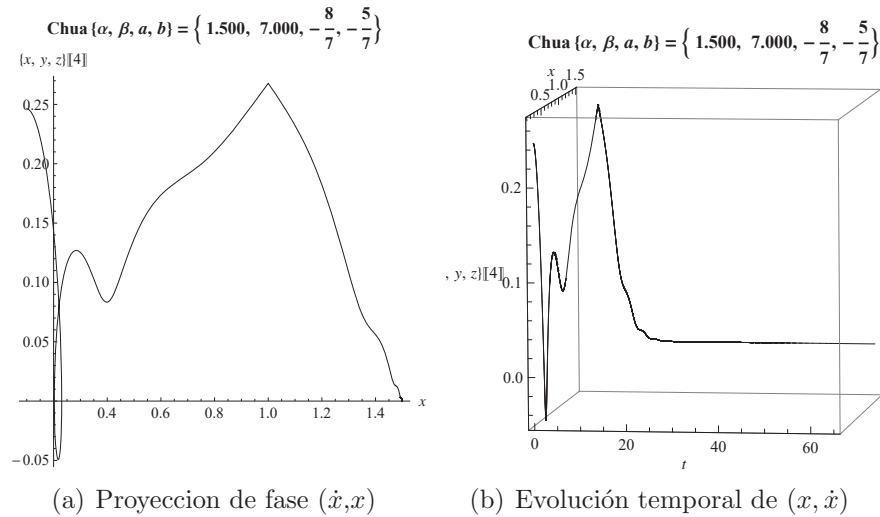


Figura 4.1: Proyección 2D del espacio fase en la coordenada  $x$  en el régimen estable no caótico en  $\alpha = 1.5$ ; en b) representamos la evolución de este espacio fase en la coordenada  $x$ .

Las proyecciones analizadas en 2-D son referentes a velocidad vs. posi-

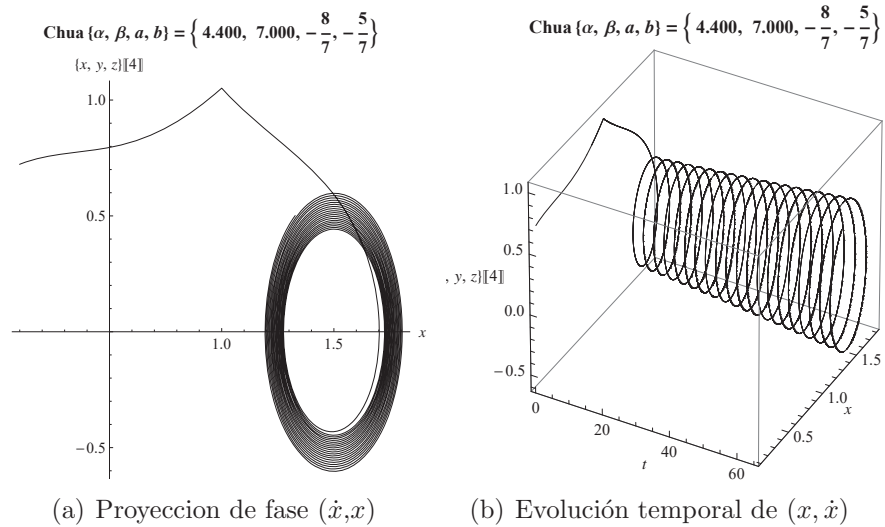


Figura 4.2: Proyección 2D del espacio fase para la coordenada  $x$  para el régimen Ciclo Limite en  $\alpha = 4.4$  ; en b) representamos la evolución del espacio fase en la coordenada  $x$ .

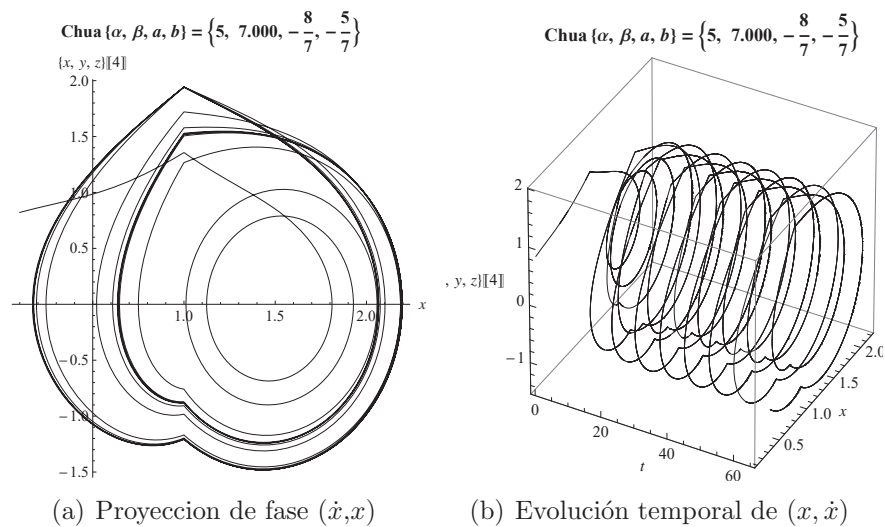


Figura 4.3: Proyección 2D del espacio fase para la coordenada  $x$  en el régimen Atractor tipo Rössler para  $\alpha = 4.9$  ; en b) representamos la evolución del espacio fase en la coordenada  $x$ .

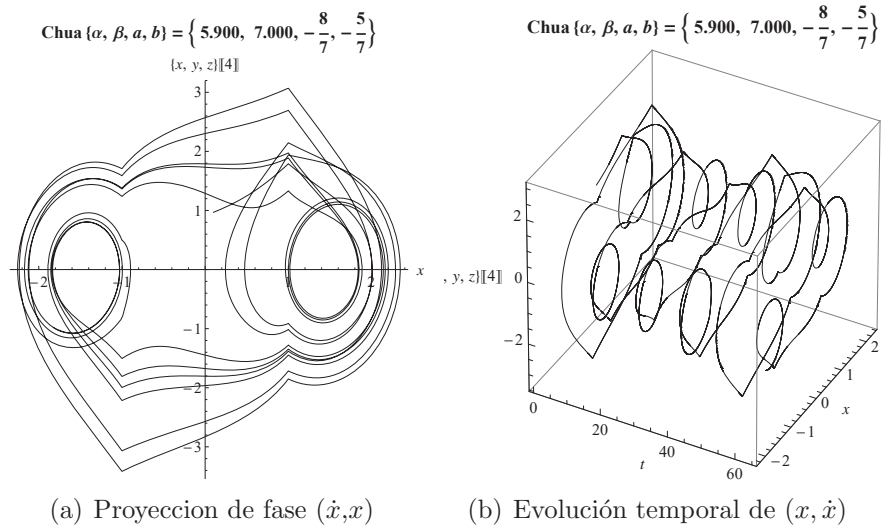


Figura 4.4: Proyecciones en 2D del espacio fase para la coordenada  $x$  en el régimen del doble atractor para  $\alpha = 5.9$ ; en b) representamos la evolución del espacio fase en la coordenada  $x$ .

ción con un paso de tiempo  $h = 0,0013$  y un muestreo de 50,000 puntos (todos los cálculos se realizaron en el programa *Mathematica* con el paquete *DynPac*). Para las Figs. 4.1(b), 4.2(b), 4.3(b) y 4.4(b) conjuntamos en cada caso la evolución temporal de la proyección de fase  $(\dot{x}, x)$  que nos muestra un panorama de como evolucionan las trayectorias en el espacio fase, esto por la imposibilidad de imaginar y graficar un hiper-espacio de seis dimensiones.

## 4.2. Mapa de Poincaré

En la sección anterior calculamos las trayectorias del espacio fase para cuatro regiones. Ahora generaremos los mapas de Poincaré correspondientes a dichas trayectorias. Recordemos que trabajamos en un espacio de seis dimensiones y solo podemos analizar proyecciones.

Un **Mapa de Poincaré** o **Sección de Poincaré** se obtiene al intersectar las trayectorias de un espacio fase con un plano, de tal forma que los trayectos corten al plano de forma transversal. Los puntos de intersección entre ambos es lo que se conoce como mapa de Poincaré [10] (ver Fig. 4.5).

Con ayuda del programa *Mathematica* calculamos los mapas de Poincaré pa-



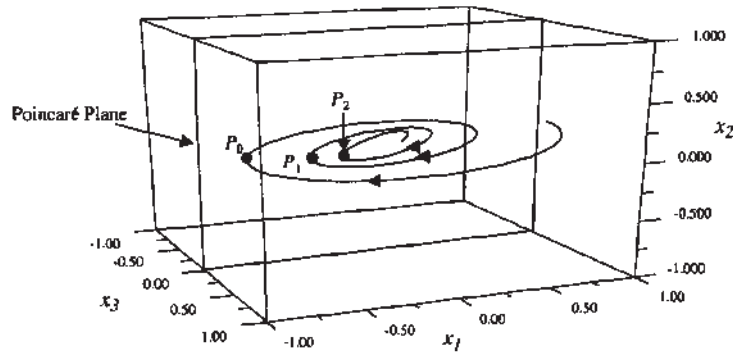


Figura 4.5: Las curvas representan trayectorias del espacio fase, estas cruzan al plano de forma transversal en los puntos negros. El conjunto de puntos es el mapa de Poincaré.

ra el sistema de Chua. Estos mapas los obtuvimos intersectando las trayectorias del espacio fase encontradas en la sección anterior y los planos  $x + y + z = 1$ ,  $x + y + z = 0$ ,  $x = y$ ,  $x = z$  y  $y = z$ . Presentamos resultados solo para el plano  $x + y + z = 1$  que genera más puntos para el mapa de Poincaré. Veamos que la Fig. 4.6 corresponde a la region no caotica. La proyección del Mapa de Poincaré es en la coordenada  $x$  y solo nos muestra 4 puntos de 34 que lo forman. Esto ocurre ya que varios puntos pueden proyectarse sobre uno solo y otros tantos no formar parte de esta proyección. La Fig. 4.7 corresponde a la región del ciclo límite. Su Mapa de Poincaré consta de 40 puntos que claramente se superponen con las proyecciones de las trayectorias del espacio fase. De forma análoga las figs. 4.8 y 4.9 muestran la proyección del espacio fase en la coordenada  $x$  y la proyección del mapa de Poincaré en la misma coordenada.

En algunas proyecciones de los mapas de Poincaré como en la Fig. 4.6, no son visibles todos los puntos que conforman en su totalidad al mapa, esto es normal, pues solo estamos analizando una proyección. Muchos de los puntos que no se manifiestan es por que se proyectan sobre un mismo punto y otros no pertenecen a la proyección que trabajamos. Lo importante es que la matemática que define tales mapas se puede abstraer a N-dimensiones dando libertad total para analizar los mapas de Poincaré, sin preocuparnos por la dimensión del espacio fase o cantidad de puntos que contengan.

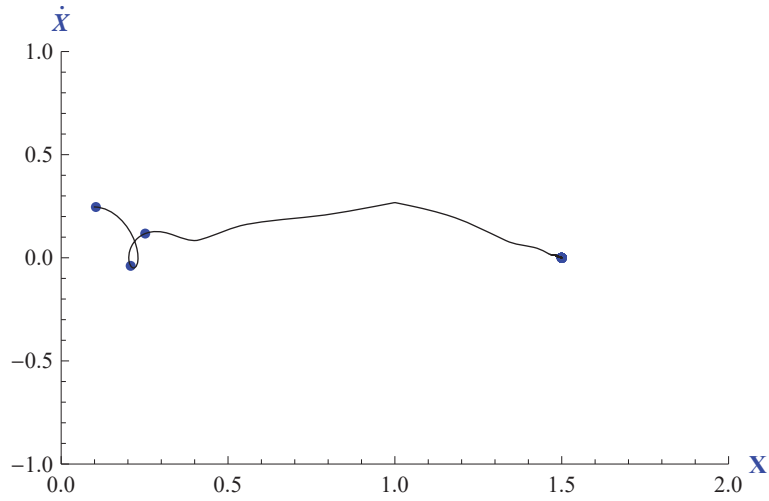


Figura 4.6: Proyección para  $\alpha = 1.5$ , regimen no caótico. El mapa contiene 34 puntos de los cuales solo apreciamos 4 en esta proyección.

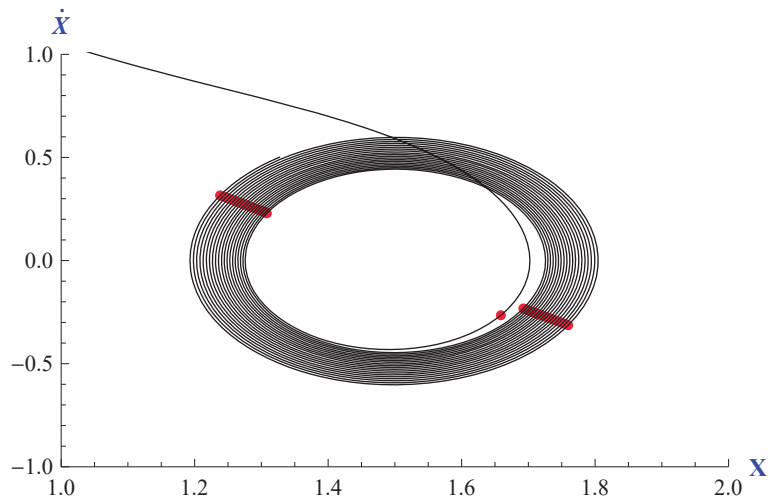


Figura 4.7: Proyección para  $\alpha = 4.4$ , regimen del ciclo Limite. Su correspondiente mapa de Poincaré lo forman 40 puntos, su proyección se sobrepone a la trayectoria del espacio fase sobre la coordenada  $x$ .

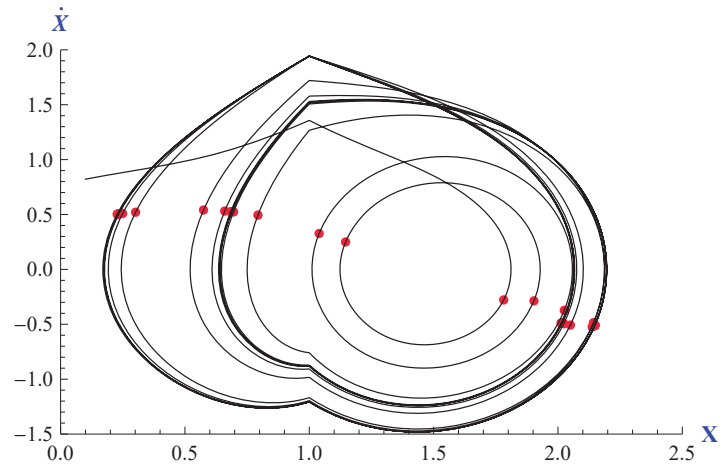


Figura 4.8: Proyección para  $\alpha = 4.9$ , régimen del atractor tipo Rössler. Su mapa de Poincaré lo forman 35 puntos, de los cuales todos se visualizan en la proyección sobre la trayectoria del espacio fase.

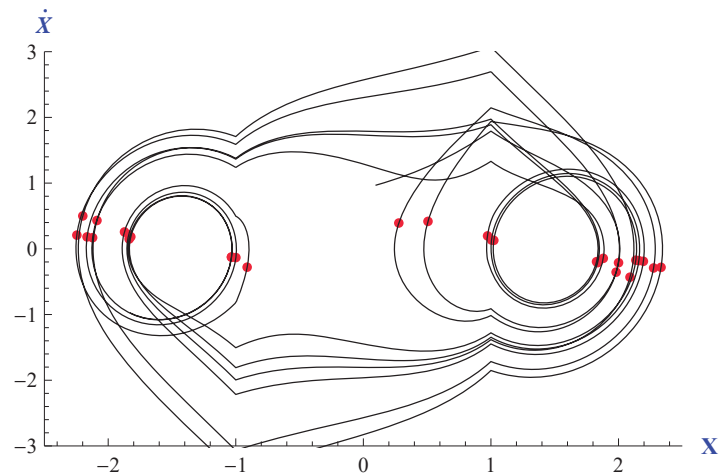


Figura 4.9: Proyección para  $\alpha = 5.9$ , régimen del Doble Atractor. Su Mapa de Poincaré lo forman 29 puntos, esta es una de sus proyecciones en dos dimensiones con la proyección correspondiente de las trayectorias del espacio fase.

## 4.3. Entropía

Originalmente la palabra Entropía viene del griego: **entropé** con **en** que significa *sobre, en y cerca*; y **trope** o **tropos** que significa *giro, alternativa, cambio y evolución*. Este término lo usó por primera vez el físico alemán Rudolf Julius Emmanuel Clausius, que introduce la entropía como la formulación matemática de la segunda ley de la termodinámica, siendo una función de estado.

No podemos dar una respuesta adecuada a la pregunta ¿Qué es la Entropía?. Sin embargo la imposibilidad de describir la Entropía en su totalidad no tiene nada que ver con su utilidad. No es posible definir *energía* pero eso no interfiere con nuestra comprensión de las transformaciones de energía y su principio de conservación.

Admitiremos que Entropía no es una palabra común pero con el uso se alcanza una comprensión más profunda de su significado físico. Podemos ver entonces a la **Entropía como una medida de desorden que existe en un sistema (a mayor desorden, mayor entropía)**. Si en tal sistema no hay desorden la entropía será cero; es decir, no habrá entropía. Por ejemplo, considerando la naturaleza microscópica de la materia, un sistema se vuelve más desordenado cuando las posiciones de las moléculas son menos predecibles. De aquí resulta que la entropía de una sustancia sea más baja en estado sólido y más alta en estado gaseoso. Un sistema puede ser cualquier cosa; un átomo, una flor, la sociedad, una ciudad, el sistema solar, un conjunto de números, en fin cualquier cosa queelijamos puede ser un sistema. Aclaremos que un sistema desordenado no siempre es un sistema caótico, pero un sistema caótico siempre es desordenado. Y con una elección adecuada de parámetros podemos medir su grado de desorden, esto es su entropía.

### 4.3.1. Entropía de Shannon

Anteriormente obtuvimos los llamados mapas de Poincaré, mapas formados por un conjunto de puntos. El objetivo es ver que tan desordenado es cada mapa y para esto requerimos el concepto de entropía. Hay varios tipos de entropía según el campo de interés, pues no todos los sistemas que estudiemos dependerán de las mismas variables y conceptos. A nosotros nos interesa la entropía de Shannon, concepto propiamente de la teoría de la información, área en la que se trabaja con variables aleatorias[15].

Para encontrar la entropía de Shannon primero contamos el número de puntos contenidos en cada mapa de Poincaré. Estos mapas los discretizamos creando mallas equidistantes a fin de hacer secciones en todo el mapa con pequeños cuadros que delimitarán una cierta área. Esto para contar el número de puntos por unidad de área, lo que se llama densidad de distribución. Hay que considerar que entre más grande sea el área más puntos contendrá y menos información obtendremos sobre la distribución de todos los puntos. Para esto es necesario considerar áreas muy pequeñas, con tal de tener información más fina y detallada. Por ejemplo, si consideramos dos conjuntos de 20 puntos en el plano cartesiano ubicados aleatoriamente, con la entropía de Shannon podemos decir cual de los dos conjuntos es más desordenado siempre y cuando la entropía se calcule en ambos casos para discretizaciones iguales como en la Fig. 4.10 Como mencionamos antes, entre más grande sea nuestra discretización tendremos mejor información de la distribución de los puntos en el plano.

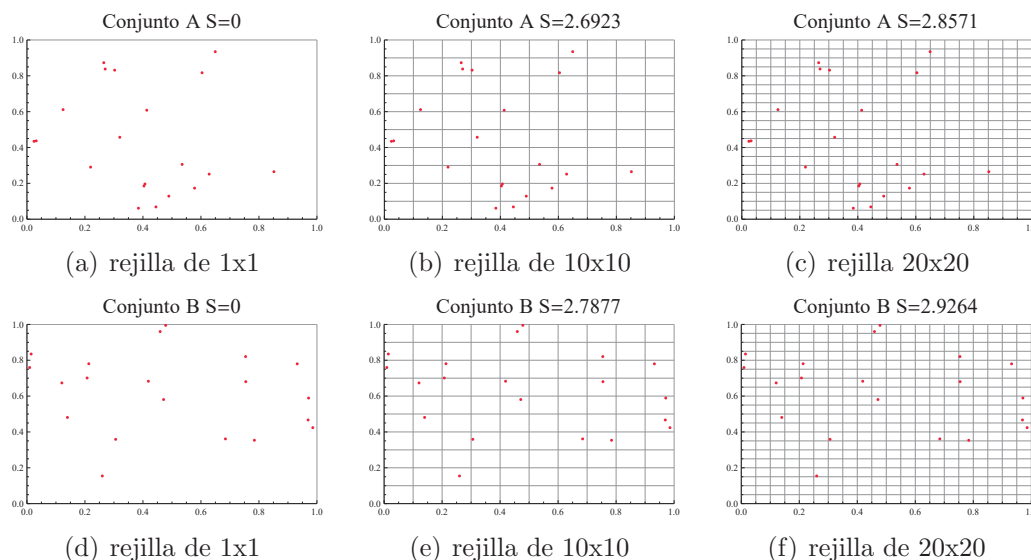


Figura 4.10: Dos conjuntos con mismo numero de puntos, es muy claro como la entropía cambia a medida que incrementamos el número de rejillas, también notemos que el conjunto B es el que tiene mayor entropía por lo tanto es el más desordenado.

Matemáticamente la entropía de Shannon está descrita por la ecuación

$$S = - \sum_k p_k \ln(p_k), \quad (4.1)$$

donde  $p_k = \frac{n_k}{N}$  es la probabilidad de que un número de puntos esté en el cuadro  $k$  de la rejilla,  $n_k$  es el número de puntos en  $k$  y  $N$  es el numero total de puntos en el mapa. Los cuadros que no contengan puntos, su contribución entrópica será nula. A continuación presentamos el análisis de entropía para los mapas de Poincaré obtenidos en la sección anterior para el circuito de Chua. La Fig. 4.11 muestra el comportamiento de la entropía a medida que el número de rejillas aumenta, i.e. considerando áreas mucho más pequeñas. Veamos que el valor de la entropía tiende a estabilizarse en un cierto valor

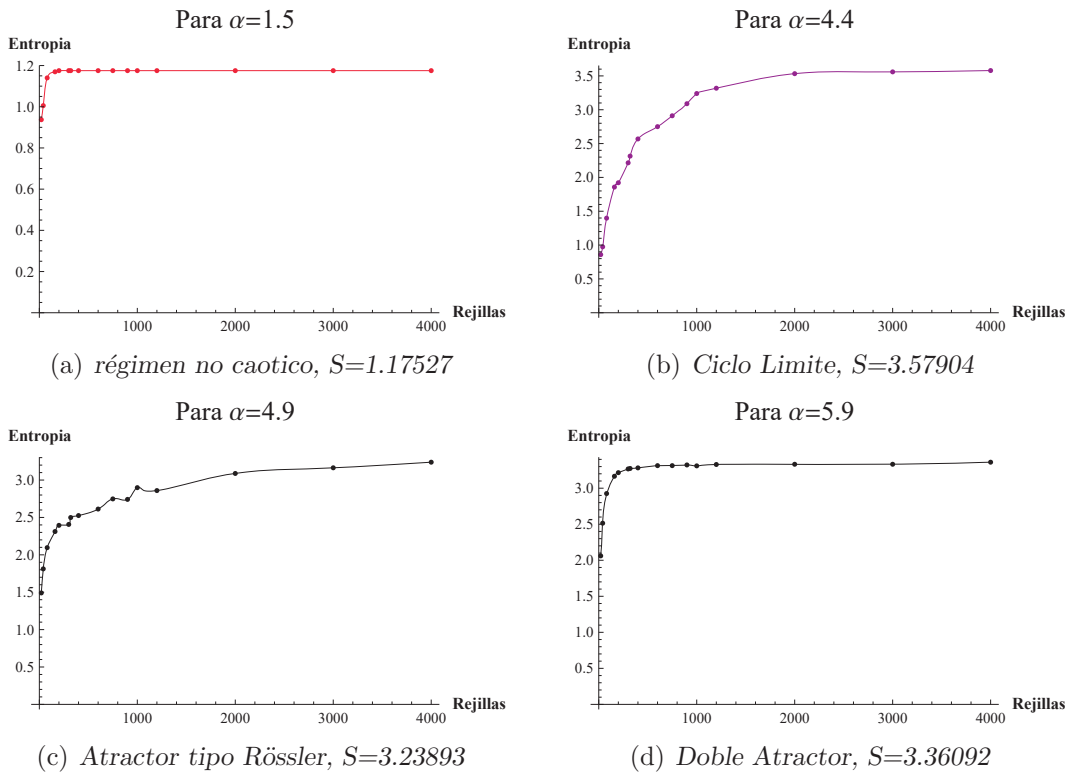


Figura 4.11: Los valores de entropía se estabilizan a medida que el número de rejillas aumenta.

a medida que la rejilla se hace mas grande. En las Figs. 4.11(b) y 4.11(c) la

estabilidad se alcanza para áreas muy pequeñas; es decir, para un número más grande de rejillas. Por otro lado, las Figs. 4.11(a) y 4.11(d) tienden a un valor constante de entropía de forma mas rápida.

Si superponemos las graficas de la Fig. 4.11 resulta la Fig. 4.12 que nos muestra algo interesante: la entropía para las cuatro regiones es diferente. Claramente el régimen no caótica es la que tiene un valor de entropía menor, por tanto es la menos desordenada. Los tres casos restantes, al menos hasta 4000 rejillas, indican que la región del doble atractor se estabiliza en una entropía de  $S = 3.36092$ , mientras que el atractor tipo Rössler tiene una entropía de  $S = 3.23893$ , ubicando al doble atractor en una región más desordenada que el atractor tipo Rössler.

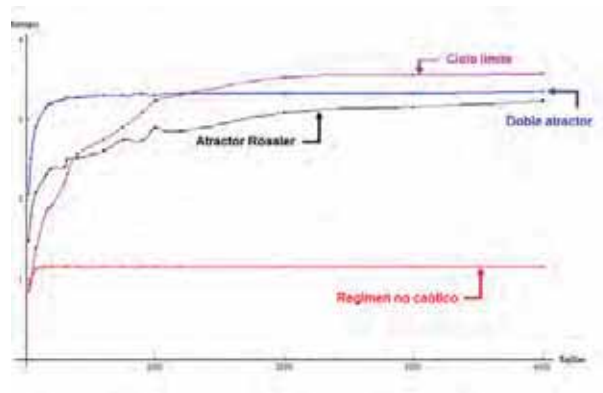


Figura 4.12: los colores de la gráfica corresponden a: Rojo-Región no Caótica, Negro-Atractor de Rossler, Azul-Doble atractor, Púrpura-Ciclo límite.

Para tener un mejor panorama de como se comporta la entropía para algunos valores de  $\alpha$  en el intervalo  $[1.5, 6]$ , consideramos la entropía para una discretización de 4000 rejillas, Como se muestra en la Fig. 4.13. En este intervalo el sistema de Chua, presenta tres regiones: Ciclo límite, atractor de Rössler y doble atractor. En la transición de un estado a otro se desestabiliza el sistema, por lo que calcular la entropía en esta región resulta impredecible. La Fig. 4.13 precisamente muestra algunos valores de entropía que aparentemente no definen una jerarquía de desorden o caoticidad. El grafo azul corresponde únicamente a las cuatro regiones que analizamos antes. Como se puede ver alrededor de  $\alpha = 1.5$  predominan los valores de entropía bajos y al acercarse

a la región caótica, tenemos un comportamiento impredecible de la entropía, lo cual indica que estamos en una región caótica.

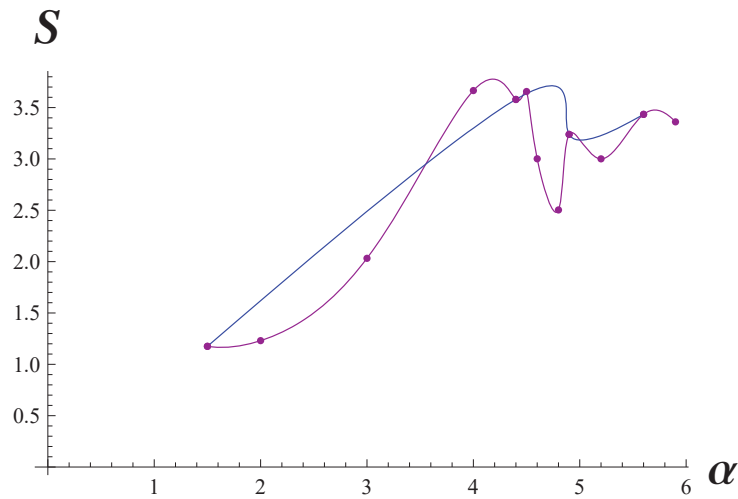


Figura 4.13: Entropías promedio para algunos valores de  $\alpha$ , considerando en cada caso la entropía promedio para 4000 rejillas.

Lo importante es que en las regiones donde se estabilizan estas trayectorias características del caos, la entropía da la pauta para decir cual de estas regiones es más desordenada. Notemos que las regiones mas estables son aquellas que tienden mas rápido a estabilizar su entropía, y respecto a estas regiones definiremos la jerarquía en desorden.

Ahora mostraremos en la Fig. 4.14, las entropías en función del numero de rejillas para algunos valores de  $\alpha$  en el intervalo  $[1.5, 6]$  que aparecen en la Fig. 4.13. Mostramos solo aquellas curvas que se estabilizan mas rápidamente. Esto facilita distinguir que almenos para un orden de 4000 rejillas, se establece una jerarquía, que de menor a mayor desorden es: región no caótica, atractor tipo Rossler, Doble atractor y Ciclo limite.



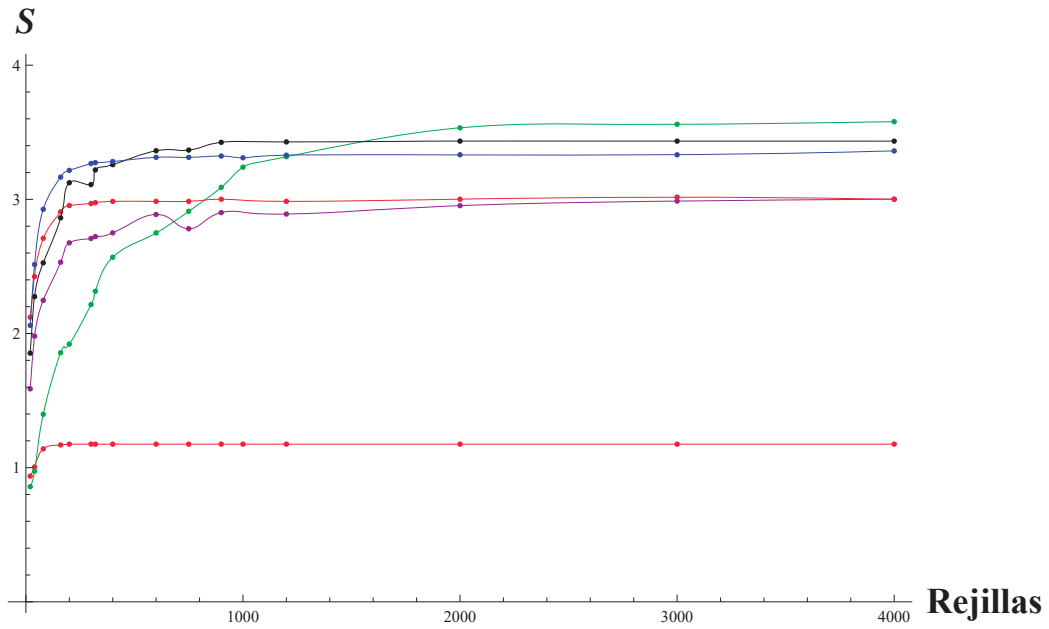


Figura 4.14: Entropía para diferentes  $\alpha$  para los cuales la entropía se estabiliza mas rápido

$\alpha$	Region	Color	Entropía
1.5	no-caotico	Rojo	1.1752
4.4	Ciclo Limite	Verde	3.579
4.6	Atractor Rossler	Purpura	3.0014
5.2	Doble Atractor	Rojo	3.008
5.6	Doble Atractor	Negro	3.4339
5.9	Doble Atractor	Azul	3.3609

Figura 4.15: Con esta tabla identificamos cada gráfica en 4.14, así distinguimos a que región nos referimos

# Capítulo 5

## Conclusiones

Este trabajo está basado en el estudio de sistemas dinámicos no lineales que pueden presentar inestabilidades, que en ocasiones conducen a un comportamiento no periódico conocido con el nombre de caos determinista. No limitado por ser un sistema no-lineal hay varios modelos mecánicos y electromecánicos propuestos para este circuito, en este trabajo analizamos el modelo propuesto en [3] además encontramos su función Hamiltoniana aplicando un análisis de Hamiltoniano generalizado, el cual resulta ser el mismo para el circuito de chua, esto por la equivalencia entre los sistemas eléctrico y mecánico. Queda como motivación futura simular el sistema mecánico que vendrá a ampliar aun mas el estudio del circuito de chua.

Al trabajar con sistemas no lineales, damos por hecho que son sistemas caóticos. Es complicado hablar de Caos y desorden, por mi parte el caos es una situación de extrema sensibilidad en el cambio de condiciones iniciales y el desorden como una cualidad de este. considero que el caos no es cuantificable, no es posible decir que región es mas caótica, pues un sistema solo tiene dos posibilidades ser caótico o no serlo. Lo que si es factible es hablar de la rapidez con que una región tiende a ser caótica esto por los exponentes de Liapunov. Tratando al desorden como consecuencia del caos, es posible cuantificar el grado de desorden en un sistema, empleando la entropía de Shannon, en particular, la forma en que lo hicimos, marca definitivamente para el circuito de Chua una medida del desorden en el sistema, de entre ello que el régimen del Doble Atractor sea mas desordenado que el atractor tipo Rössler, no obstante, es necesario consolidar este resultado, aplicando este procedimiento a otros sistemas caóticos y explorando otros métodos y formas para caracterizar caos y desorden.

# Apendice A

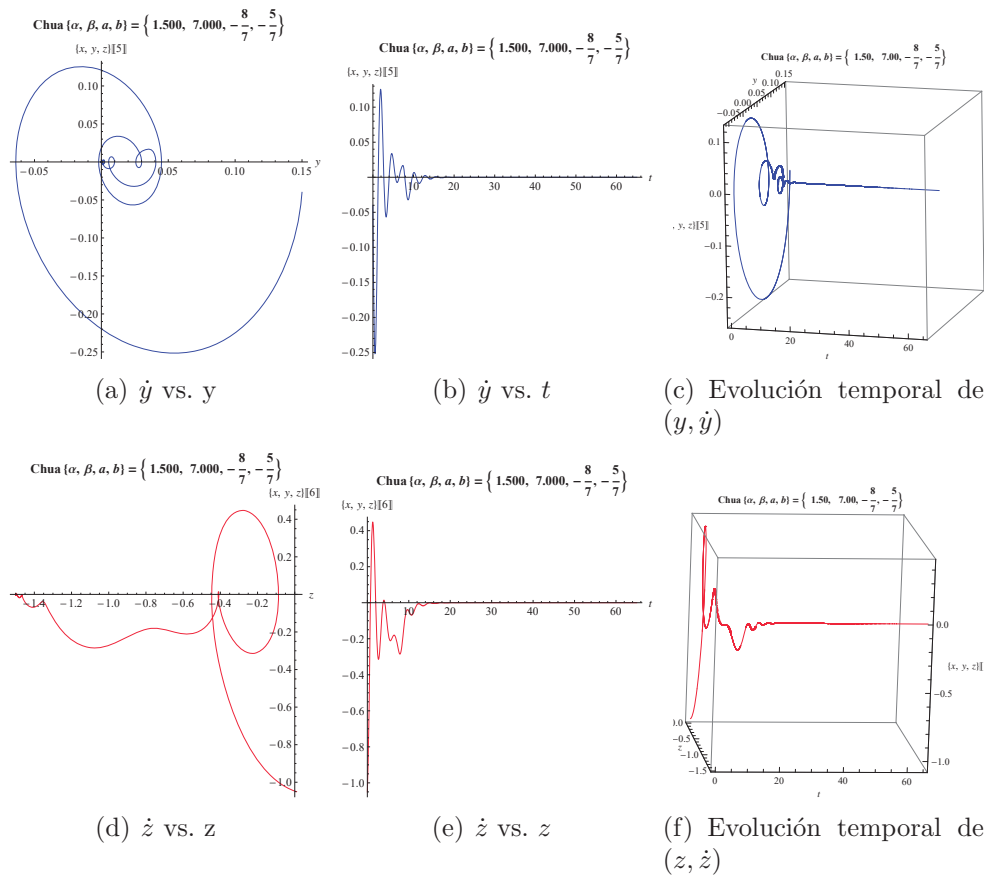


Figura 1: Proyeccion 2D del espacio fase en la coordenada  $x$  para el régimen estable no caótico en  $\alpha = 1.5$ ; en c) representamos la evolución de las figuras a) y b) juntas.

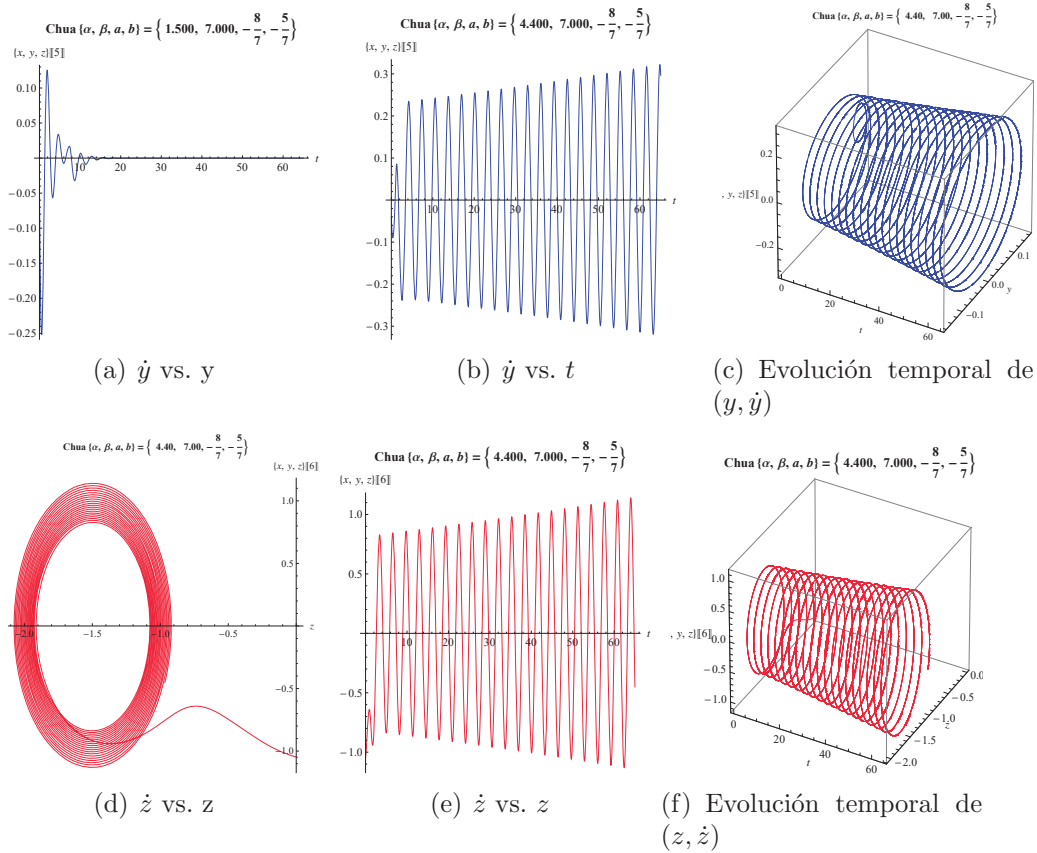


Figura 2: Proyección 2D del espacio fase para la coordenada  $x$  para el régimen Ciclo Limite en  $\alpha = 4.4$  ; en c) representamos la evolución de las figuras a) y b) juntas.

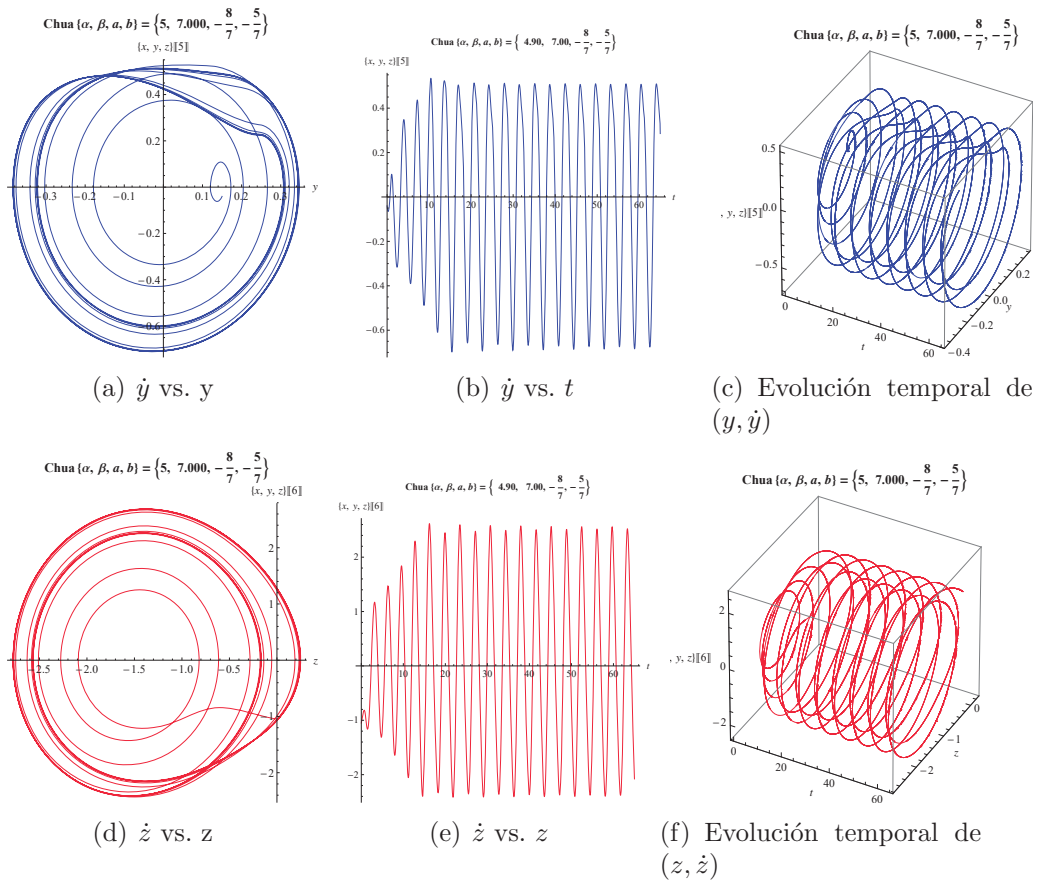
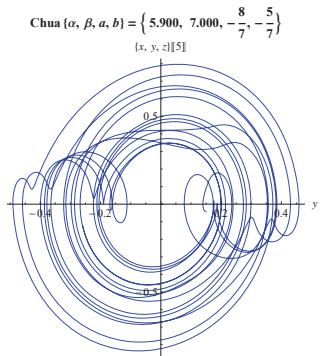
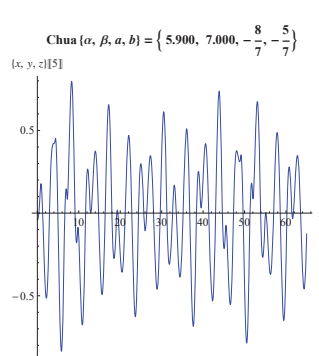


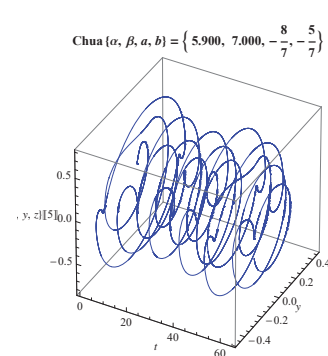
Figura 3: Proyección 2D del espacio fase para la coordenada  $x$  en el régimen Atractor tipo Rsslör para  $\alpha = 4.9$  ; en c) representamos la evolución de las figuras a) y b) juntas.



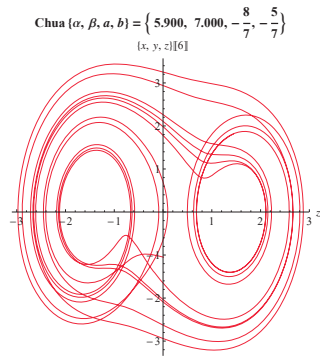
(a)  $\dot{y}$  vs.  $y$



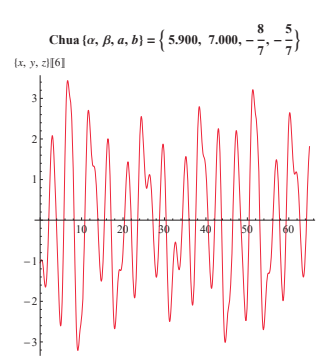
(b)  $\dot{y}$  vs.  $t$



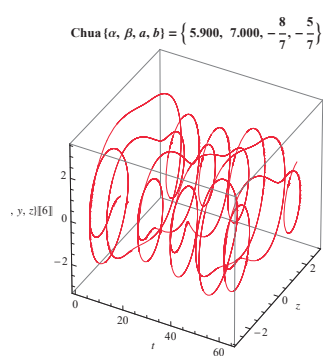
(c) Evolución temporal de  $(y, \dot{y})$



(d)  $\dot{z}$  vs.  $z$



(e)  $\dot{z}$  vs.  $z$



(f) Evolución temporal de  $(z, \dot{z})$

# Bibliografía

- [1] L.O. Chua, Archiv. Fur Electronik und Ubertragungstechnik 46, 250-257 (1992).
- [2] H. Sira-Ramírez and Cruz-Hernandez Cesar, *Sinchronization of Chaotic Systems: A Generalized Hamiltonian System Approach*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 11, N° 5, pp 1381-1395, 2001.
- [3] J. Awrejcewicz, M. L. Calvisi, *Mecanical models of Chua's circuit*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 12, No. 4, 671-686, 2002.
- [4] U. Parlitz, *Lyapunov exponents from Chua's circuit*, Journal of circuits, Sistems and Computers, Vol. 3, No. 2, pp 507-523, 1993.
- [5] C. H. Oliveira<sup>1</sup> and J. C. Pizolato Jr, *Cryptography with chaos using Chua's system*, Journal of Physics: Conference Series, volumen 285, number 1, 2011.
- [6] C. Tamayo Ricardo, E. Bojorges Nidia, P. Pacheco David, Tesis de Licenciatura, *Sistemas caoticos aplicados en telecomunicaciones*, Escuela superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional, Mexico, D.F. Septiembre 2010.
- [7] G. Arroyo Correa, H. Guzmán Cruz, E. S. Tututi Hernández, *Estudio de caos y sincronización con el circuito de Chua*, Ciencia Nicolaita No. 51, UMNSH, julio de 2009.
- [8] Alfred Clark, Jr., DynPac: A DYNAMICAL SYSTEMS PACKAGE FOR MATHEMATICA 7, Versión 11.03, April 30, 2009
- [9] S. N. Rasband, *Choatic Dynamics and Nonlinear Systems* , John Wyley & sons, 1990, USA.

- [10] R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An introduction for scientists and engineers*, Oxford, Second Edition, Cap 4, pp. 148-154, Cap. 5, pp. 157-172.
- [11] D. Halliday, R. Resnick, K. S. Krane, *Física Vol. 2*, editorial continental, tercera edición, Cap. 38, pp. 266-270, 2001.
- [12] H. Guzmán C., tesis de licenciatura, *Estudios de caos en circuitos eléctricos*, Facultad de Cs. Físico Matemáticas, UMSNH, 2007
- [13] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Mecánica Clásica*, Editorial Reverté, 2da Edición, Cap. 8, pp. 417-461, 2002.
- [14] F. Rivera Paleo, Tesis de Licenciatura, *Acoplamiento del circuito de Chua*, Facultad de Cs. Físico Matemáticas, UMSNH, Morelia, Mich., Abril 2011.
- [15] C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, The Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp. 623-656, October, 1948.
- [16] J. M. T. Tomsom and H. B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Wiley, second edición, 2000.
- [17] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge, second edición, 2002. John Wiley & sons, 1990, USA.