

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”



Poliedros Regulares en el 3-Toro

T E S I S

para obtener el título de
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

Autor:

José Antonio Montero Aguilar

Asesor:

Dr. Daniel Pellicer Covarrubias

Febrero, 2013
MORELIA, MICHOACÁN

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de
Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM **IN112512**,
Poliedros altamente simétricos en espacios de dimensión pequeña.
Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

Agradecimientos	VII
Introducción	IX
1. Poliedros Regulares en \mathbb{E}^3	1
1.1. Poliedros Regulares Abstractos	1
1.2. Operaciones en Poliedros	11
1.3. Realizaciones de Poliedros Regulares	15
2. El 3-toro	33
2.1. El 3-toro y sus isometrías	33
2.2. Retículas de puntos	38
3. Poliedros Regulares en el 3-Toro	47
3.1. Poliedros Finitos	47
3.2. Poliedros de Petrie-Coxeter	60
Conclusiones	67

Apéndice: Acciones de Grupos	69
Notación	73
Índice alfabético	74
Bibliografía	75

Agradecimientos

Sin duda alguna, de entre todo lo que aparece escrito en este trabajo, las palabras en estas páginas fueron las más difíciles. Con ellas pretendo no sólo agradecer a aquellas personas que intervinieron para que este trabajo llegara a su fin, sino a todas aquellas que, de una u otra forma, fueron parte importante para que este momento llegara.

En primer lugar debe aparecer mi familia. Mis papás don Jorge y doña Socco, mis hermanos y mi cuñada, por su incondicional apoyo; mención especial merece Sandra, por todas las que yo, y mi incapacidad de estudiar sin música le hicimos pasar. Me gustaría dedicar este logro a mi sobrino (favorito, por unicidad) Sebastián, de quien espero logre todo lo que se proponga.

Gracias también a Daniel, mi asesor, jefe, patrón, papá académico, dictador, Führer, . . . , pero sobre todo, amigo; cuya infinita paciencia fue fundamental para el desarrollo de este trabajo. Gracias por todo lo enseñado en estos meses y por todo el tiempo dedicado, dentro y fuera de lo académico.

Gracias también a Malú, por mostrarme lo bonitas que son las matemáticas y porque en más de una ocasión la hizo mas que de profesora, de segunda mamá. A Fernando, Jorge y David, por sus oportunos comentarios a este trabajo, por ser parte importante de mi formación académica, pero sobre todo, por mostrarme que uno puede encontrar en sus profesores a grandes amigos.

A mis amigos y colegas Bere, Pelayo, Yesenia, Lalo, Augusto, Ana y Toño; a mis mejores profesores de física, Gaby, David y Joaquín; saben que no tengo palabras para agradecer todo el tiempo compartido. Gracias también al resto de mis cuates que gustan de ser llamados 'del cubo'.

A todos mis amigos de la facultad. Héctor, Luis, Ahtziri, Lucas, Mike,

Poke, Abdón, Poncho, Soffer, Manuel, Jonathan, Julián, . . . , y todos aquellos que siempre sirvieron de ejemplo, unas veces bueno y otras (muchas) malo, pero siempre gran ejemplo. Rob, Larissa, Erick, Dulce, Prima, Richy, Uziel, Chava, Memo, Estefanía, Jona, Fanny, Iván, en fin . . . , todos los que comienzan en este asunto de las matemáticas ¡Mucha suerte!

A mis cuates de la prepa y mis amigos beisboleros, pues siempre ofrecieron una grandiosa alternativa de calidad lejos del mundo académico.

Finalmente y no por eso menos importante, algunas personas que, si bien no estuvieron cerca durante la licenciatura, recientemente se han convertido en grandes amigos y sus consejos y camaradería fueron, sin duda, fundamentales para que este trabajo llegara a su fin. Me refiero a Miguel, Tere, Bosco, Naila, Marco y Haydeé.

Para concluir quiero hacer notar que mis agradecimientos son un conjunto infinito, y las palabras que puedo poner en estas hojas son una cantidad finita; así que con el fin de evitar algún resentimiento (el cual sería culpa de la aritmética cardinal y no del autor de estas palabras) terminaré diciendo **¡Infinitas gracias a todos mis amigos!**

Introducción

Las ideas de simetría y belleza han estado relacionadas a través de la historia. Probablemente ésta sea la razón por la que los *poliedros regulares* han sido estudiados desde la antigüedad, pues poseen un grado de simetría llamativo a simple vista.

Incluso antes de que las ideas de geometría fueran formuladas por los griegos el cubo era bien conocido, pues era usado como dado. Los egipcios también conocían el octaedro y tetraedro, de hecho, una pregunta constante a través de los años ha sido ¿por qué las pirámides de Guiza tienen determinada forma? No sería de sorprenderse que éstas fueran planeadas para ser medios octaedros, de hecho, el ángulo entre sus paredes oscila entre $50^{\circ}47'$ y $54^{\circ}14'$, mientras que el del octaedro es $\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 54^{\circ}44'$.

Los *Sólidos Platónicos* fueron nombrados en honor a Platón, quien estudió estos cuerpos no sólo por interés matemático, sino por cierto interés místico, ya que estaban relacionados con los elementos: el tetraedro con el fuego, el octaedro con el agua, el cubo con la tierra y el icosaedro con el aire. Curiosamente, el dodecaedro no aparecía como miembro de esta familia, sin embargo, se le asociaba con la forma del universo.

Euclides, en *Los Elementos* estudia de manera formal los sólidos platónicos. El libro XIII trata esencialmente de estos objetos, y de hecho, prueba que existen únicamente 5 sólidos convexos regulares, es decir, de caras congruentes acomodadas de la misma manera alrededor de cada vértice. La prueba de Euclides se sigue usando hasta estos días y se basa en el hecho de que el ángulo interno de un p -ágono es $(1 - \frac{2}{p})\pi$, y si se pretenden poner q de ellos alrededor de cada vértice de manera que el sólido sea convexo se debe satisfacer $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{1}{2}$.

El asunto de los poliedros regulares parecía estar terminado con los sólidos platónicos, sin embargo, en grabados y pinturas de la Edad Media aparecieron algunos objetos con un fuerte grado de simetría. Dos de estos objetos fueron estudiados por Johannes Kepler (1571–1630). Estos objetos comparten propiedades combinatorias con los sólidos platónicos, pero tienen la característica de tener caras estrelladas.

A principios del siglo XIX Louis Poinsot (1777-1859) redescubrió los sólidos de Kepler y dos sólidos más, cuyas caras son convexas pero están acomodadas de manera estrellada alrededor de cada vértice. En 1811 Augustin Louis Cauchy (1789–1857) probó que los cuatro poliedros regulares estrellados descubiertos por Kepler y Poinsot eran todos los posibles construidos de esta manera.

A mediados del mismo siglo Ludwig Schläfli (1814-1895) realizó aportaciones a la geometría en dimensiones superiores, entre otras, introdujo el concepto de politopo como generalización de polígono y poliedro en dimensiones superiores y encontró todos los politopos y teselaciones regulares en dimensión 4 o más.

Sin duda alguna las aportaciones de Coxeter (1907-2003) forman un pilar importante en la teoría de poliedros. Muchas de estas aportaciones culminaron en su famoso libro *Regular Polytopes* ([Cox73]) cuya primera edición fue publicada en 1948. Sin embargo, una de sus aportaciones más relevantes vino cuando apenas era un estudiante, cuando junto con J. F. Petrie (1907–1972) descubrieron 3 objetos con propiedades de simetría similares a las de los poliedros conocidos hasta ese entonces, pero con la característica de tener una infinidad de caras. Coxeter probó también que la lista de estos tres era completa.

La teoría tomó un nuevo aire cuando en 1975 Branko Grünbaum dio una lista de 47 objetos que tenían propiedades geométricas similares a los poliedros regulares (ver [Grü77]). Esta lista incluía los sólidos platónicos, los sólidos de Kepler-Poinsot y los de Petrie-Coxeter; además incluía las teselaciones del plano con cuadrados, triángulos y hexágonos. Grünbaum permitió también que las caras no fueran planas e incluso podían ser infinitas.

En 1981 A. Dress encontró otro poliedro ([Dre81]) para completar la lista de Grünbaum a 48, y en 1985, usando herramientas algebraicas y combina-

torias probó que la lista era completa (ver [Dre85]).

Justo entre los dos artículos de Dress, en 1982 Danzer y Schulte introdujeron el concepto de *politopo abstracto* (ver [DS82]), concepto que generaliza a los polígonos y poliedros geométricos, rescatando su estructura combinatoria. Finalmente en [MS97], Egon Schulte y Peter McMullen abordan el problema geométrico partiendo del concepto de poliedro abstracto y prueban, de una forma distinta, que la lista de 48 poliedros regulares es completa.

Una vez resuelto el problema en el espacio euclidiano es natural preguntarse qué pasa en otros espacios, en este sentido se tienen algunas respuestas:

- En [CM80, c. 8] Coxeter y Moser describen las teselaciones regulares en el 2-toro.
- En [MS02, §6D,6E] Schulte y McMullen encuentran todas las teselaciones regulares del n -toro.
- En [ABM00] y [Bra00] Javier Bracho junto con otros autores encuentra algunos poliedros en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ y finalmente, en [McM07] McMullen clasifica los poliedros en \mathbb{S}^3 , completando de paso la lista de poliedros en $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.
- En [Cox54] Coxeter estudia las teselaciones regulares del espacio hiperbólico.

El 3-toro es una 3-variedad que surge de manera natural, pues es cociente del espacio euclideano. Además tiene propiedades interesantes, por ejemplo, en [MS02, §6G] Schulte y McMullen prueban que es la única 3-variedad euclideana que admite teselaciones regulares.

En este trabajo abordamos el problema de encontrar los poliedros regulares en el 3-toro. Trabajamos con los sólidos platónicos y con los poliedros de Petrie-Coxeter por dos razones, ser los primeros en aparecer históricamente y ser los únicos de la lista de 48 en tener caras finitas y planas con casco afín tridimensional.

En el primer capítulo damos algunos resultados generales de la teoría de poliedros. En el segundo introducimos el 3-toro y su métrica y estudiamos

algunas de sus isometrías. En este capítulo también introducimos las retículas de puntos y estudiamos aquellas que son invariantes bajo reflexiones. Finalmente, en el capítulo 3 atacamos el problema principal del trabajo y determinamos cuándo los sólidos platónicos y los poliedros de Petrie-Coxeter pueden ser vistos como poliedros regulares en el 3-toro. Esto da 8 familias de poliedros regulares en el 3-toro, cada una de ellas asociada a uno de los poliedros de \mathbb{E}^3 mencionados. Como resultado de nuestro análisis se obtienen 16 poliedros regulares más en el 3-toro, todos provenientes de la lista de 48 poliedros regulares en \mathbb{E}^3 .

Capítulo 1

Poliedros Regulares en el Espacio Euclideo \mathbb{E}^3

En este capítulo hablaremos acerca de los poliedros regulares. En la primera sección trabajaremos los poliedros como objetos estrictamente combinatorios, daremos las definiciones básicas y hablaremos sobre su grupo de automorfismos. En la Sección 1.2 definimos algunas operaciones que nos permiten construir nuevos poliedros a partir de los ya construidos. Finalmente en la Sección 1.3 introduciremos el concepto de *realización*, el cual servirá para pasar de los objetos combinatorios al problema geométrico; hablaremos con detalle de algunas realizaciones de los poliedros regulares que estudiaremos en este trabajo.

1.1. Poliedros Regulares Abstractos

En esta sección trataremos a los poliedros regulares como objetos estrictamente combinatorios. Seguiremos la notación dada por P. McMullen y E. Schulte en [MS97].

La definición de poliedro abstracto toma en cuenta propiedades combinatorias de los poliedros convexos. Fundamentalmente se pretende rescatar

la incidencia entre vértices, aristas y caras preservando algunas de la propiedades combinatorias que los poliedros convexos tienen. Posteriormente se verá que, efectivamente, esta es una generalización del concepto de poliedro convexo.

1.1.1 Definición. Un *poliedro abstracto* \mathcal{P} es un conjunto parcialmente ordenado con una función de rango, es decir, una función de \mathcal{P} en $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ suprayectiva y estrictamente creciente. Llamaremos *vértices*, *aristas* y *caras* a los elementos de rango 0, 1 y 2 respectivamente. Una *bandera* es un subconjunto totalmente ordenado maximal. Además \mathcal{P} satisface las siguientes propiedades:

- (P1) Existe un único elemento minimal F_{-1} y un único elemento maximal F_3 , de rango -1 y 3 respectivamente.
- (P2) Las banderas tienen exactamente 5 elementos, es decir, cada una tiene un vértice, una arista y una cara, además de los elementos F_{-1} y F_3 .
- (P3) \mathcal{P} es *fuertemente conexo por banderas*, esto es, dadas dos banderas Φ y Ψ existe una sucesión de banderas $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k = \Psi$ tales que para cualquier $i \in \{1, \dots, k\}$ Φ_{i-1} y Φ_i son *adyacentes* (difieren únicamente por un elemento) y además $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i$ para $i \in \{0, 1, \dots, k\}$.
- (P4) \mathcal{P} satisface la *propiedad del diamante*, es decir, para cada $j \in \{0, 1, 2\}$, dados F de rango $j - 1$, y G de rango $j + 1$ se tiene que

$$|\{H \in \mathcal{P} : F < H < G\}| = 2$$

Cuando no haya confusión, en este trabajo denotaremos a los poliedros abstractos simplemente como poliedros.

Observemos que de manera análoga se puede definir *polígono abstracto* considerando que la función de rango tiene imagen $\{-1, 0, 1, 2\}$. En esta situación las banderas tendrán exactamente 4 elementos y la propiedad del diamante deberá satisfacerse para $j \in \{0, 1\}$.

No es difícil probar que para cada $n \geq 3$ (incluso infinita) existe un único polígono (abstracto) con n vértices.

Las propiedades (P2), (P3) y (P4) nos dicen que los poliedros abstractos satisfacen propiedades combinatorias que los poliedros convexos satisfacen, en particular, gracias a la propiedad (P4) cada arista tiene exactamente dos vértices y está en exactamente dos caras. Observemos que (P3) y (P4) implican que toda cara induce un ciclo o una trayectoria infinita hacia ambos lados, es decir, una gráfica conexa 2-regular, en los vértices y aristas incidentes a ella.

Si F y G son dos elementos *incidentes* de \mathcal{P} , es decir, $F \leq G$, definimos la *sección* G/F del poliedro como

$$G/F := \{H \in \mathcal{P} : F \leq H \leq G\}.$$

Cuando no haya confusión, identificaremos un elemento F de \mathcal{P} con la sección $F/F_{-1} = \{H \in \mathcal{P} : H \leq F\}$. En este sentido, pensaremos a F_3 como el poliedro \mathcal{P} y, aunque estrictamente hablando no es así, a F_{-1} como el conjunto vacío \emptyset .

Si F es un vértice del poliedro \mathcal{P} , llamaremos *figura vertical en F* a la sección

$$F_3/F = \{H \in \mathcal{P} : F \leq H\}.$$

Observemos que toda cara (vista como sección) y toda figura vertical son polígonos abstractos.

Ejemplos: En la Figura 1.1 damos algunos ejemplos de los objetos que acabamos de definir. En los diagramas, se unen con líneas rectas dos elementos si son incidentes y su rango difiere en 1.

- Lo poliedros convexos son, naturalmente, poliedros abstractos si tomando como vértices, aristas y caras los puntos, segmentos de recta y regiones de planos, respectivamente, ordenados por la contención (Fig. 1.1a). En los ejemplos geométricos que demos en lo que resta de la sección se pensará siempre en el orden parcial definido de esta forma.
- El conjunto potencia de $\{a, b, c, d\}$ ordenado con la contención es un poliedro abstracto, de hecho, isomorfo (definido más adelante) al tetraedro (Fig. 1.1b).

- Los polígonos convexos son también polígonos abstractos (Fig. 1.1c).
- Dos cubos pegados por una arista (Fig. 1.1d) no constituyen un poliedro, pues no se satisface (P4) ya que la arista a está en cuatro caras.
- Dos pirámides pegadas por el vértice en la punta (Fig. 1.1e) no forman un poliedro pues no se satisface (P3) ya que no existe sucesión de banderas adyacentes entre la bandera $\{v, a, c\}$ y la bandera $\{v, a', c'\}$.

Denotaremos por $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ al conjunto de todas las banderas de \mathcal{P} . Por conveniencia omitiremos a F_{-1} y a F_3 en la notación para banderas. Si $\Phi = \{F_0, F_1, F_2\}$ es una bandera y $0 \leq i \leq 2$ denotaremos por Φ^i la única bandera i -adyacente a Φ , es decir,

$$\Phi^i = (\Phi \setminus \{F_i\}) \cup \{F'_i\}$$

donde F'_i es la única cara de rango i distinta a F_i con $F_{i-1} \leq F'_i \leq F_{i+1}$. Definimos también de manera recursiva $\Phi^{i_1 i_2 \dots i_k} := (\Phi^{i_1 i_2 \dots i_{k-1}})^{i_k}$ para $k \geq 2$.

La siguiente definición nos dará una herramienta para determinar cuándo dos poliedros son esencialmente el mismo.

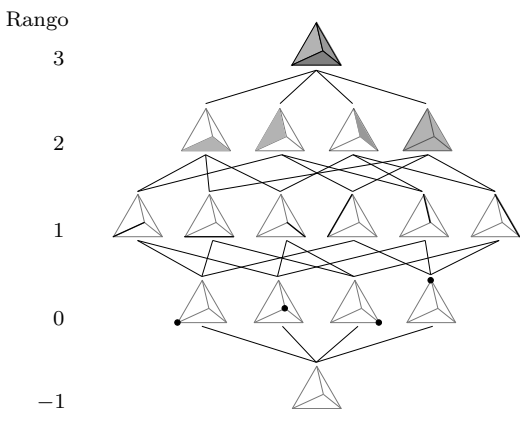
1.1.2 Definición. Si \mathcal{P} y \mathcal{Q} son poliedros, $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ es un *isomorfismo de poliedros* si ϕ es una biyección y tanto ϕ como ϕ^{-1} preservan orden, es decir, $F \leq G$ en \mathcal{P} si y sólo si $\phi(F) \leq \phi(G)$ en \mathcal{Q} . Si existe un isomorfismo de poliedros entre \mathcal{P} y \mathcal{Q} diremos que \mathcal{P} y \mathcal{Q} son *isomorfos* y escribiremos

$$\mathcal{P} \cong \mathcal{Q}.$$

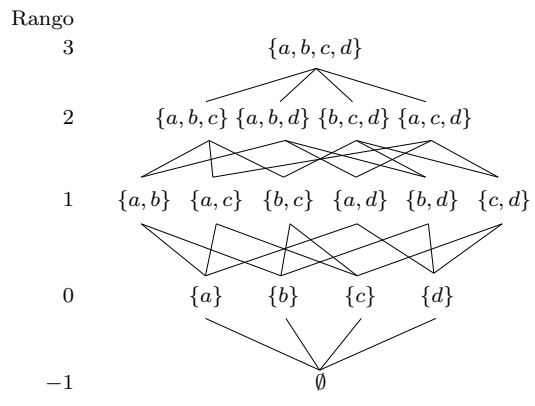
1.1.3 Definición. Un *automorfismo de \mathcal{P}* es un isomorfismo de \mathcal{P} en sí mismo.

Las definiciones de isomorfismo y automorfismo para polígonos son análogas.

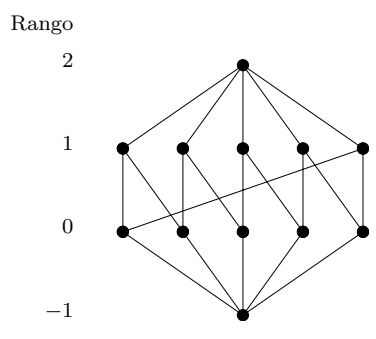
Denotaremos por $\Gamma(\mathcal{P})$ el conjunto de todos los automorfismos de \mathcal{P} . Es claro que $\Gamma(\mathcal{P})$ es un grupo bajo la composición, además existe una acción natural de $\Gamma(\mathcal{P})$ en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.



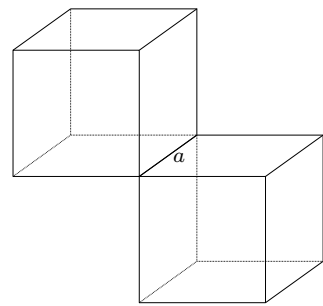
(a) El tetraedro como orden parcial



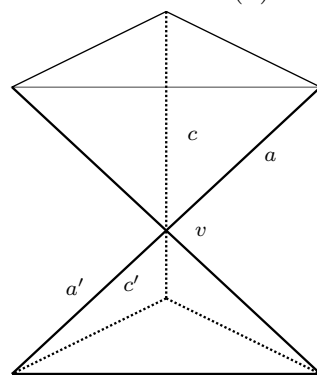
(b) Potencia de $\{a, b, c, d\}$



(c) Orden parcial de un pentágono



(d) No cumple (P4)



(e) No cumple (P3)

Figura 1.1

Ejemplos: A continuación pretendemos ilustrar los conceptos de isomorfismo y automorfismo. En los ejemplos geométricos debemos pensar las simetrías de los objetos como automorfismos combinatorios, pues dichas simetrías preservan la incidencia entre vértices aristas y caras.

- En el ejemplo de la figura 1.1b, cualquier permutación de $\{a, b, c, d\}$ induce un automorfismo en el poliedro.
- Si $n \geq 3$ (incluso infinita) cualesquiera dos n -ágonos abstractos son isomorfos.
- Si \mathcal{P} es un n -ágono abstracto, su grupo de automorfismos $\Gamma(\mathcal{P})$ es isomorfo al grupo diédrico D_n generado por los automorfismos inducidos por las reflexiones R_0 y R_1 (Fig.1.2a).
- Si \mathcal{P} es una pirámide sobre un n -ágono regular con $n > 3$ entonces $\Gamma(\mathcal{P}) \cong D_n$. Esto se debe a que las reflexiones R_0 y R_1 se extienden a automorfismos de la pirámide inducidos por reflexiones respecto a planos. Además la cara base no puede tener como imagen ninguno de los triángulos así que queda fija bajo todo automorfismo (Fig. 1.2b).

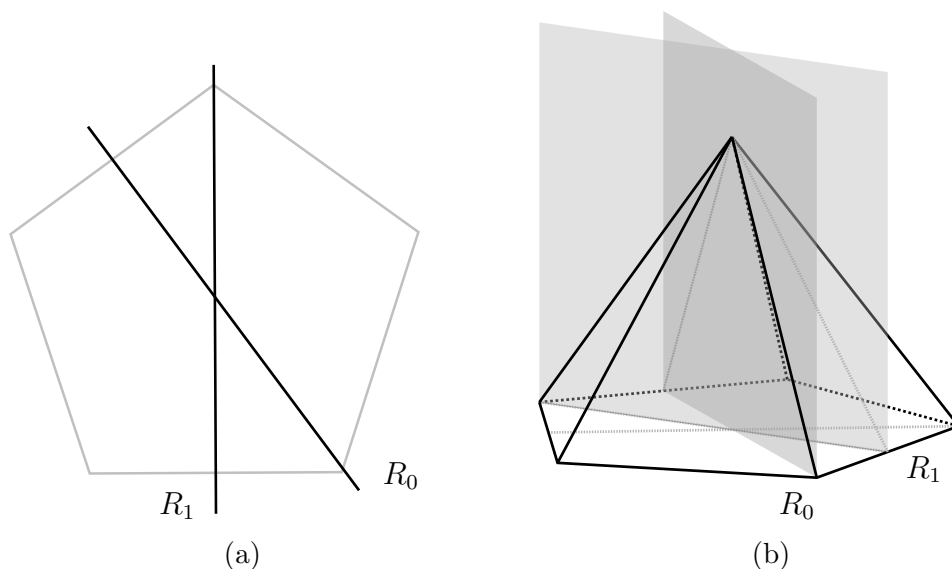


Figura 1.2

1.1.4 Definición. Diremos que un poliedro \mathcal{P} es *regular* si $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, el conjunto de banderas de \mathcal{P} .

Observemos que la definición de regularidad mantiene la idea de regularidad clásica pues, dadas dos caras (aristas o vértices) F y G de un poliedro \mathcal{P} existe un automorfismo γ tal que $\gamma(F) = G$. En particular cualesquiera dos caras son isomorfas y dos vértices tienen figuras verticales isomorfas, sin embargo, esto en general no es suficiente.

Ejemplos: A continuación presentamos una serie de ejemplos de poliedros regulares. La regularidad de algunos de los ejemplos será mostrada posteriormente, algunos otros únicamente los mencionamos para mostrar que hay una gran variedad de poliedros regulares.

- Los sólidos platónicos son poliedros regulares en el sentido de la definición 1.1.4, aunque esto será evidente más adelante.
- Los poliedros de Petrie-Coxeter (Fig. 1.3), descritos a detalle en la sección 1.3 son poliedros regulares.
- Las teselaciones del plano con triángulos equiláteros, con cuadrados y con hexágonos regulares son poliedros regulares (Fig. 1.4).
- El poliedro de 4 vértices, 8 aristas y 4 caras dibujado en el 2-toro (Fig. 1.5a) es un poliedro regular.
- El medio cubo (Fig 1.5b) obtenido al identificar vértices, aristas y caras opuestas del cubo, es un poliedro regular.

Si \mathcal{P} es un polígono de n vértices diremos que tiene *tipo de Schläfli* $\{n\}$. Notemos que si \mathcal{P} es un poliedro regular, todas las caras son isomorfas entre sí, y gracias a la transitividad en vértices, todas las figuras verticales son isomorfas. Si \mathcal{P} tiene como caras p -ágonos y como figuras verticales q -ágonos, su *tipo de Schläfli* será $\{p, q\}$.

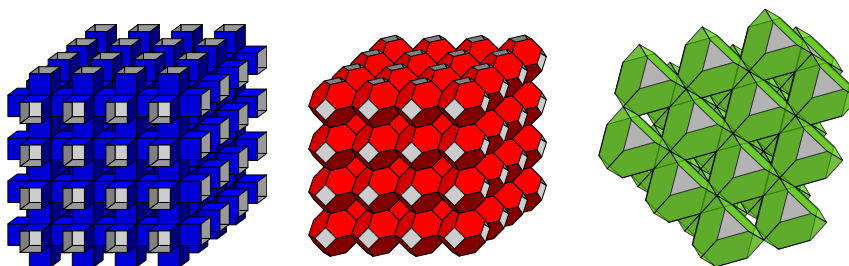


Figura 1.3: Poliedros de Petrie-Coxeter

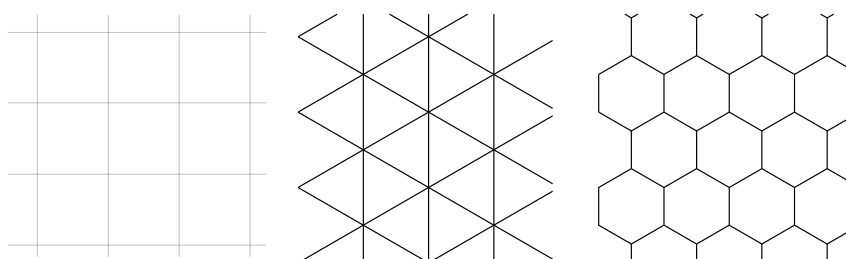


Figura 1.4: Teselaciones regulares del plano

Ejemplos:

- El tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro y dodecaedro tienen tipo de Schläfli $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 3\}$, $\{3, 5\}$ y $\{5, 3\}$ respectivamente.
- Las teselaciones regulares del plano (Fig. 1.4) tienen tipo de Schläfli $\{4, 4\}$, $\{3, 6\}$ y $\{6, 3\}$.

En el caso de los poliedros convexos el tipo de Schläfli determina a \mathcal{P} salvo homotecia e isometría (ver [MS02, §1B]), sin embargo, esto no es cierto en el caso general.

En general, determinar si el grupo de automorfismos de un poliedro \mathcal{P} es transitivo en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ no es algo sencillo. Finalizaremos esta sección con algunos resultados relativos a la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$ en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, en particular, probaremos una equivalencia de regularidad que será útil para nuestro trabajo.

1.1.5 Lema. *Si γ es un automorfismo de un poliedro \mathcal{P} y Φ es una bandera de \mathcal{P} entonces*

$$\gamma(\Phi^i) = (\gamma(\Phi))^i$$

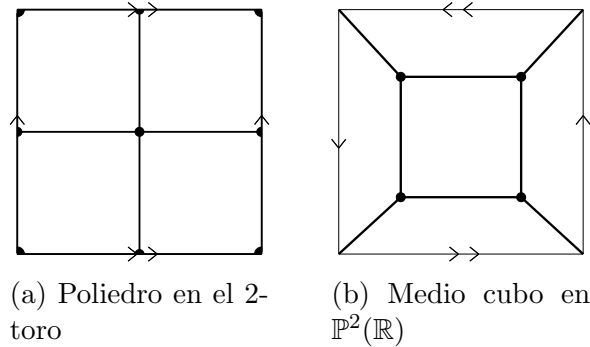


Figura 1.5

para toda $i \in \{0, 1, 2\}$.

Demostración. Sea $i \in \{0, 1, 2\}$. Observamos que $\gamma(\Phi)$, $(\gamma(\Phi))^i$ y $\gamma(\Phi^i)$ coinciden en todas las caras salvo tal vez la i -ésima, sin embargo $(\gamma(\Phi))^i \neq \gamma(\Phi) \neq \gamma(\Phi^i)$, así que por (P4) $(\gamma(\Phi))^i = \gamma(\Phi^i)$. ■

1.1.6 Proposición. Si \mathcal{P} es un poliedro abstracto, entonces $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa libremente en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.

Demostración. Supongamos que γ es un automorfismo de \mathcal{P} que fija una bandera Φ . Sea Ψ una bandera arbitraria, probemos que γ fija a Ψ . Por (P4) existe una sucesión de banderas adyacentes $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k = \Psi$, probemos el resultado por inducción sobre k . Si $k = 1$ entonces Φ y Ψ son adyacentes y el resultado se sigue del lema 1.1.5. Supongamos el resultado para toda $j < k$. El hecho de que Ψ queda fija se sigue de que Φ_{k-1} queda fija (por hipótesis de inducción) y de que γ es biyección, pues Φ_{k-1} y Ψ difieren únicamente en una cara. ■

1.1.7 Corolario. Si \mathcal{P} es un poliedro abstracto, Φ una bandera de \mathcal{P} y $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$, entonces γ está determinado por la imagen de Φ .

Notemos que gracias al resultado anterior tenemos que $|\Gamma(\mathcal{P})| \leq |\mathcal{F}(\mathcal{P})|$ y coinciden si y sólo si \mathcal{P} es regular.

Ejemplo: Los polígonos abstractos son regulares pues $|\mathcal{F}(n)| = 2n = |D_n|$, sin embargo, la pirámide con base $\{n\}$, para $n \geq 4$, no es regular pues tiene $2n$ banderas en la base y 6 por cada triángulo, para un total de $8n$ banderas.

El siguiente teorema nos da una equivalencia de regularidad bastante sencilla.

1.1.8 Teorema. *Un poliedro \mathcal{P} es regular si y sólo si para alguna bandera Φ y para todo $i \in \{0, 1, 2\}$ existe un automorfismo ρ_i de \mathcal{P} tal que*

$$\rho_i(\Phi) = \Phi^i.$$

Además, cada automorfismo ρ_i es una involución, es decir, $\rho_i^2 = Id$.

Demostración. Supongamos que \mathcal{P} es regular, entonces, para cada $i \in \{0, 1, 2\}$ existe un automorfismo ρ_i de tal forma que $\rho_i(\Phi) = \Phi^i$, pues $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$. El hecho de que $\rho_i^2 = Id$ se sigue de que $(\Phi^i)^i = \Phi$ y de que ρ_i fija todas las caras de Φ^i salvo la i -ésima.

Supongamos ahora que para alguna bandera Φ y para todo $i \in \{0, 1, 2\}$ existe un automorfismo ρ_i de \mathcal{P} tal que $\rho_i(\Phi) = \Phi^i$. Sea Ψ una bandera de \mathcal{P} , basta probar que existe un automorfismo γ de tal forma que $\gamma(\Phi) = \Psi$. Ya que \mathcal{P} es un poliedro, por (P3) existe una sucesión de banderas adyacentes $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k = \Psi$. Procedamos por inducción sobre k . Si $k = 1$ entonces Φ y Ψ son i -adyacentes para alguna $i \in \{0, 1, 2\}$ y entonces $\rho_i(\Phi) = \Psi$. Supongamos cierto el resultado para toda $j < k$, entonces, por hipótesis de inducción existe un automorfismo χ de tal forma que $\chi(\Phi) = \Phi_{k-1}$. Sea $i \in \{0, 1, 2\}$ de tal forma que Φ_{k-1} y Ψ son i -adyacentes. Tomemos $\gamma = \chi\rho_i$ y tenemos

$$\gamma(\Phi) = \chi\rho_i(\Phi) = \chi(\Phi^i) = (\chi(\Phi))^i = \Phi_{k-1}^i = \Psi. \quad \blacksquare$$

Observemos que si los automorfismos ρ_i del Teorema 1.1.8 existen para una bandera en particular, entonces existen para cualquier bandera. Dada una bandera Φ , llamaremos a ρ_0, ρ_1 y ρ_2 los *generadores distinguidos* respecto a la *bandera base* Φ .

Ejemplo: Gracias al resultado anterior es muy sencillo verificar ahora que las teselaciones regulares del plano son poliedros regulares, pues basta considerar reflexiones adecuadas (Fig. 1.6). En la sección 1.3 se mostrará que los sólidos platónicos y los poliedros de Petrie-Coxeter también lo son.

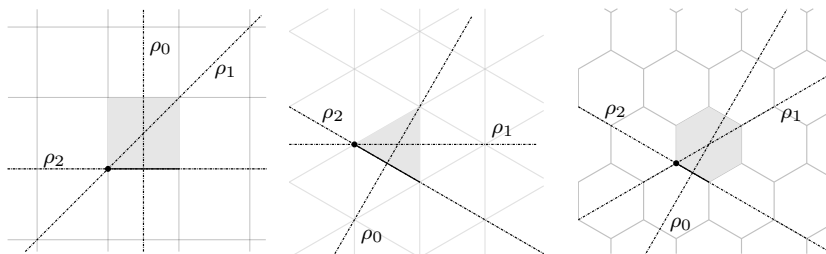


Figura 1.6: Teselaciones regulares del plano

1.2. Operaciones en Poliedros

La idea general de esta sección es, dado un poliedro regular \mathcal{Q} , construir un poliedro regular \mathcal{P} a partir de \mathcal{Q} de tal forma que $\Gamma(\mathcal{P}) \leq \Gamma(\mathcal{Q})$.

En [MS02, §2E] Schulte y McMullen prueban que un poliedro regular está totalmente determinado, salvo isomorfismo, por su grupo de automorfismos y sus generadores distinguidos. En otras palabras, dado un grupo $\Gamma = \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2 \rangle$ con ρ_0, ρ_1, ρ_2 involuciones que satisfacen algunas propiedades, es posible construir un poliedro regular \mathcal{P} de tal forma que $\Gamma(\mathcal{P}) = \Gamma$.

En virtud de este resultado, la técnica general será tomar un poliedro regular \mathcal{Q} y a partir de $\Delta = \Gamma(\mathcal{Q})$ derivar un grupo Γ generado por 3 involuciones. Hay casos en las que estas involuciones no satisfacen las propiedades para construir un poliedro. Dado que el objetivo de esta sección es describir las operaciones, no entraremos en detalles técnicos para verificar que las instancias de nuestro interés efectivamente satisfacen estas propiedades; sin embargo, las operaciones que mencionaremos tienen interpretación geométrica de manera directa, la cual nos dará una idea de la construcción. Si el lector está interesado en conocer más a profundidad estas operaciones y revisar los detalles puede revisar [MS02, §7B].

Seguiremos la notación usada por Schulte y McMullen en [MS02]. En lo sucesivo \mathcal{Q} es un poliedro regular de tipo de Schläfli $\{p, q\}$ y grupo de automorfismos $\Delta = \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \rangle$. Cada operación μ nos llevará a un nuevo grupo $\Gamma = \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2 \rangle$ y a un nuevo poliedro $\mathcal{P} := \mathcal{Q}^\mu$ con $\Gamma(\mathcal{P}) = \Gamma$.

Dualidad

La primera de las operaciones la denotaremos por δ y corresponde a

$$\delta : (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\sigma_2, \sigma_1, \sigma_0) =: (\rho_0, \rho_1, \rho_2).$$

El poliedro $\mathcal{P} := \mathcal{Q}^\delta$ obtenido de esta operación le llamaremos *poliedro dual de \mathcal{Q}* y corresponde, en términos de orden parcial, a invertir el orden, es decir, $F \leq G$ en \mathcal{Q} si y sólo si $G \leq F$ en \mathcal{P} .

En términos geométricos corresponde a intercambiar caras por vértices, o equivalentemente, a tomar un punto dentro de cada cara de tal forma que dos puntos forman arista si las caras correspondientes coincidían en una arista y un conjunto de vértices forma cara, si las caras correspondientes eran incidentes un mismo vértice.

El poliedro $\mathcal{P} = \mathcal{Q}^\delta$ tiene tipo de Schläfli $\{q, p\}$ y es claro que $(\mathcal{Q}^\delta)^\delta = \mathcal{Q}$ y $\Gamma(\mathcal{Q}) = \Gamma(\mathcal{P})$.

Ejemplos:

- El tetraedro $\{3, 3\}$ es autodual (Fig. 1.7a).
- El cubo $\{4, 3\}$ y el octaedro $\{3, 4\}$ son poliedros duales (Fig. 1.7b).
- El icosaedro $\{3, 5\}$ es dual del dodecaedro $\{5, 3\}$ (Fig. 1.7c).

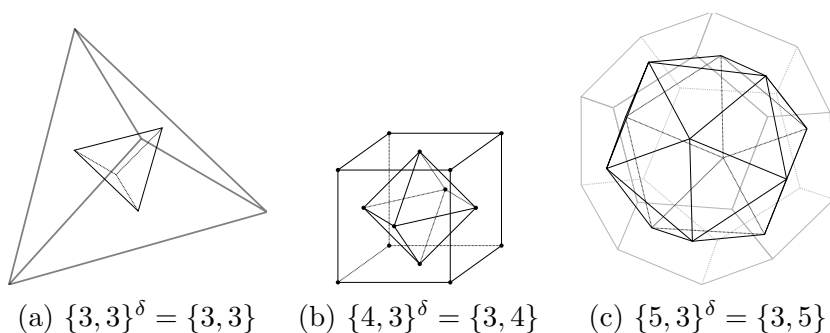


Figura 1.7

Operación de Petrie

Esta operación la denotaremos por π y está definida por

$$\pi : (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\sigma_2\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) =: (\rho_0, \rho_1, \rho_2).$$

Al poliedro $\mathcal{P} := \mathcal{Q}^\pi$ le llamaremos *dual de Petrie* o simplemente *petrial* de \mathcal{Q} .

El conjunto de vértices y de aristas de \mathcal{P} es el mismo que el de \mathcal{Q} , pero las caras de \mathcal{P} están dadas por los *polígonos de Petrie* de \mathcal{Q} , los cuales están definidos por la propiedad de que dos aristas consecutivas, pero no tres, son aristas de una cara de \mathcal{Q} .

En la figura 1.8a se puede ver que los polígonos de Petrie del cubo son hexágonos y en la figura 1.8b se muestran las 4 caras hexagonales del petrial del cubo.

De la definición algebraica de la operación es claro que $(\mathcal{Q}^\pi)^\pi = \mathcal{Q}$ y por lo tanto $\Gamma(\mathcal{Q}) = \Gamma(\mathcal{Q}^\pi)$.

Operación de hoyos

Esta operación la denotaremos por φ_2 y está dada por

$$\varphi_2 : (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\sigma_0, \sigma_1\sigma_2\sigma_1, \sigma_2) =: (\rho_0, \rho_1, \rho_2).$$

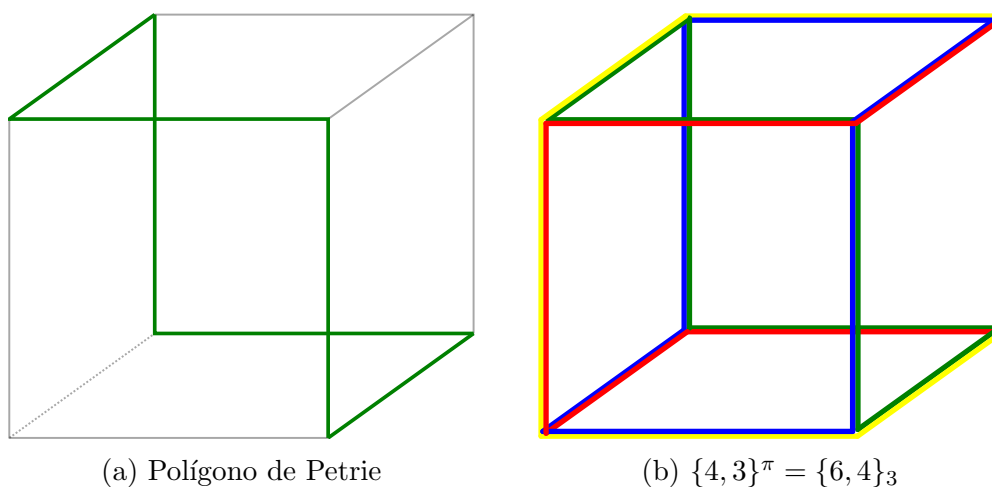


Figura 1.8

Definamos los j -hoyos de un poliedro \mathcal{Q} como los ciclos de la gráfica inducida por las aristas y vértices de \mathcal{Q} determinados por la propiedad de que un ciclo sale de un vértice por la j -ésima arista a partir de aquella por la que entró, manteniendo siempre el mismo sentido (digamos, por la derecha, en alguna orientación local; ver Fig. 1.9a). En particular, las caras son los 1-hoyos del poliedro.

Si q es impar el poliedro $\mathcal{P} := \mathcal{Q}^{\varphi^2}$ tiene el mismo conjunto de vértices y aristas que el poliedro \mathcal{Q} pero las caras de \mathcal{P} están determinadas por los 2-hoyos de \mathcal{Q} (Fig. 1.9b).

En general se puede definir la operación φ_k dada por

$$\varphi_k : (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\sigma_0, \sigma_1(\sigma_2\sigma_1)^{k-1}, \sigma_2) =: (\rho_0, \rho_1, \rho_2),$$

y si k y q son primos relativos, corresponde a dejar invariante los vértices y las aristas y tomar como caras los k -hoyos. En este trabajo usaremos únicamente a φ_2 .

Se verifica algebraicamente que si $\text{mcd}(k, q) = 1$, la operación φ_k tiene inverso a la operación $\varphi_{k'}$ donde $kk' \equiv 1 \pmod{q}$, por lo tanto, si q es impar φ_2 deja invariante al grupo.

Se tiene además que φ_k conmuta con la operación π para todo natural k .

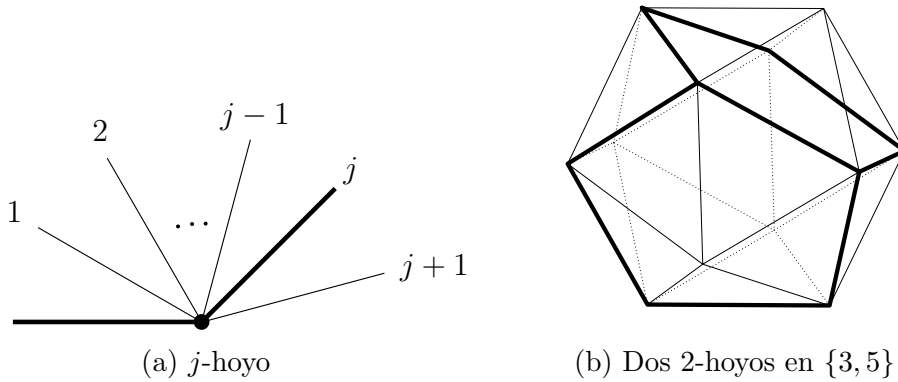


Figura 1.9

1.3. Realizaciones de Poliedros Regulares

En esta sección abordaremos algunos aspectos geométricos. Introduciremos el concepto de *realización* siguiendo a P. McMullen en [McM89], el cual nos permite pasar de la parte combinatoria a la parte geométrica. Posteriormente daremos algunas realizaciones de los poliedros regulares que trabajaremos más adelante.

1.3.1 Definición. Una *realización* de un poliedro abstracto \mathcal{P} es una función $\beta : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathbb{E}^3$ donde \mathcal{P}_0 es el conjunto de vértices de \mathcal{P} de tal forma que cada automorfismo de $\Gamma(\mathcal{P})$ induce una permutación en $V := \beta(\mathcal{P}_0)$ que se extiende a una isometría del casco afín de V , es decir, del subespacio afín más pequeño que contiene a V . A dichas permutaciones las llamaremos *simetrías de V* .

En algunos textos, por ejemplo [MS02], una realización es simplemente una función $\beta : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathbb{E}^3$. La Definición 1.3.1 corresponde a una *realización simétrica*. Nosotros usaremos la notación de McMullen y les llamaremos simplemente realizaciones.

En principio no es claro que una realización comprenda la estructura completa del poliedro, pues pareciera que únicamente depende de los vértices. El siguiente resultado nos dice cómo se recupera la estructura del poliedro.

1.3.2 Proposición. Sea β una realización de un poliedro abstracto \mathcal{P} y definimos $\beta_0 = \beta$, $V_0 = V$, entonces para $i \in \{1, 2, 3\}$ β induce una función

suprayectiva $\beta_i : \mathcal{P}_i \rightarrow V_i$ donde \mathcal{P}_i es el conjunto de elementos de \mathcal{P} de rango i y $V_i \subseteq \mathcal{P}(V_{i-1})$ es la familia de conjuntos

$$\beta_i(F) := \{\beta_{i-1}(G) : G \in \mathcal{P}_{i-1} \text{ y } G \leq F\}$$

para cada $F \in \mathcal{P}_i$. Además, β_{-1} está dado por $\beta_{-1}(F_{-1}) = \emptyset$.

Diremos que una realización β es *fiel* si cada β_i es biyección. Si $\beta(\mathcal{P}_0)$ es un conjunto discreto diremos entonces que β es discreta.

En virtud del resultado anterior, las simetrías de V inducidas por los elementos de $\Gamma(\mathcal{P})$ son llamadas *simetrías de \mathcal{P}* . Claramente hay un homomorfismo de grupos (inducido por β) entre el grupo de automorfismos de un poliedro \mathcal{P} y su grupo de simetrías. Si la realización es fiel, este homomorfismo es un isomorfismo y, en esta situación, abusaremos de la notación identificando los elementos de $\beta(\Gamma(\mathcal{P}))$ con los de $\Gamma(\mathcal{P})$.

Ejemplos:

- La realización trivial es aquella que manda todos los vértices a un mismo punto, ésta no es una realización fiel.
- El poliedro de la Figura 1.10 no admite realización fiel, pues entre los vértices v y v' hay más de una arista.
- En la Figura 1.11 se muestran dos realizaciones distintas del pentágono.

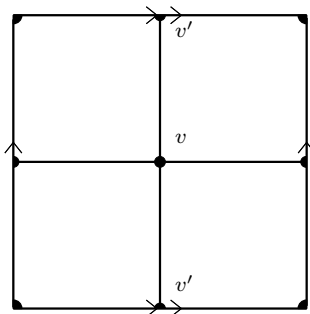


Figura 1.10

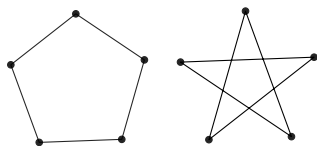


Figura 1.11

Realizaciones de los Sólidos Platónicos

A continuación describiremos una realización de cada uno de los sólidos platónicos. Para cada sólido daremos coordenadas de sus vértices y describiremos brevemente sus aristas y caras. Daremos también de manera explícita los generadores ρ_0 , ρ_1 y ρ_2 para determinadas banderas base.

Cuando sea posible, a una bandera le asociaremos el triángulo determinado por el vértice, el punto medio de la arista y el centro de la cara.

Realización del Tetraedro

Tomemos como conjunto de vértices a

$$\{(1, 1, 1), (-1, -1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1)\}.$$

Las aristas estarán formadas por cualquier pareja de vértices y las caras serán triángulos determinados por 3 vértices. El tetraedro realizado de esta manera lo denotaremos \mathcal{T} (Fig. 1.12).

Para calcular los generadores tomemos como bandera base Φ la determinada por el vértice $(1, 1, 1)$, la arista determinada por ese vértice y el $(-1, -1, 1)$ y la cara determinada por los vértices $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$ y $(1, -1, -1)$ (Fig. 1.13).

Tenemos entonces que ρ_0 es la reflexión respecto al plano $x + y = 0$ (Fig. 1.14a), ρ_1 es la reflexión respecto al plano $x - z = 0$ (Fig. 1.14b) y ρ_2 es la reflexión respecto al plano $x - y = 0$ (Fig. 1.14c).

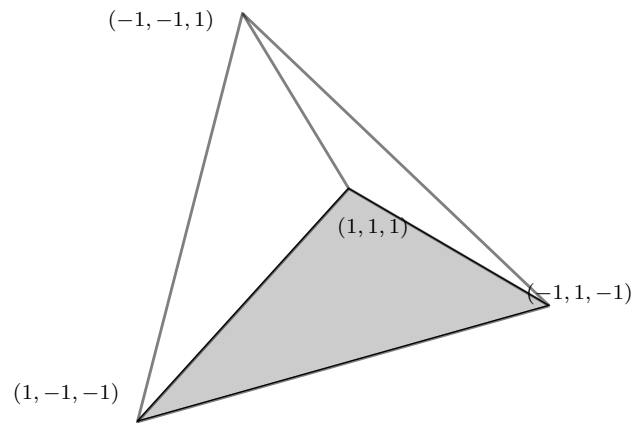


Figura 1.12: Los vértices, aristas y una de las caras del tetraedro \mathcal{T}

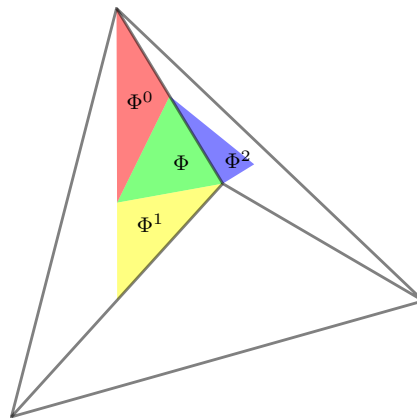


Figura 1.13: Bandera base Φ y sus banderas adyacentes

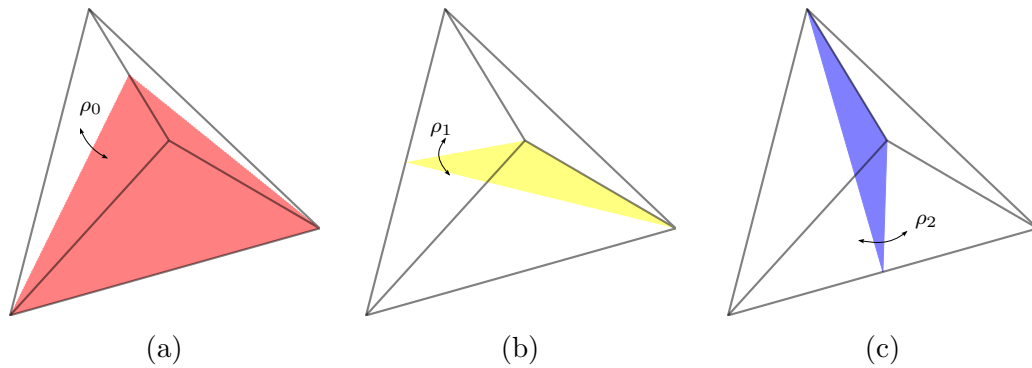


Figura 1.14: Generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{T})$ respecto a Φ

Realización del Cubo

Consideremos como vértices los puntos de la forma $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$; como aristas tomemos los segmentos entre cualesquiera dos de los puntos que comparten 2 coordenadas y como caras los cuadrados determinados por las aristas cuyos puntos tienen una coordenada en común. Denotaremos a este cubo (como objeto geométrico) por \mathcal{C} . (Fig. 1.15).

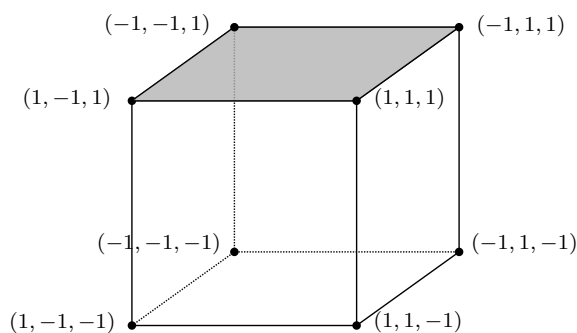


Figura 1.15: Los vértices, aristas y una de las caras del Cubo

Tomaremos como bandera base Φ al vértice $(1, 1, 1)$, la arista en la intersección de los planos $z = 1$ y $x = 1$ y la cara en el plano $z = 1$ (Fig. 1.16).

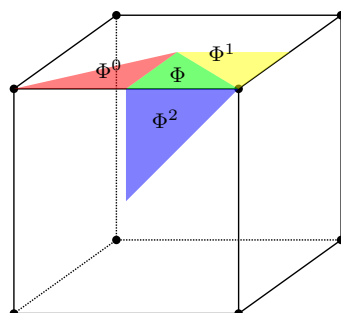


Figura 1.16: Bandera base Φ y sus banderas adyacentes

Tenemos entonces que ρ_0 es la reflexión respecto al plano $y = 0$ (Fig. 1.17a), ρ_1 es la reflexión respecto al plano $x - y = 0$ (Fig. 1.17b) y ρ_2 es la reflexión respecto al plano $x - z = 0$ (Fig. 1.17c).

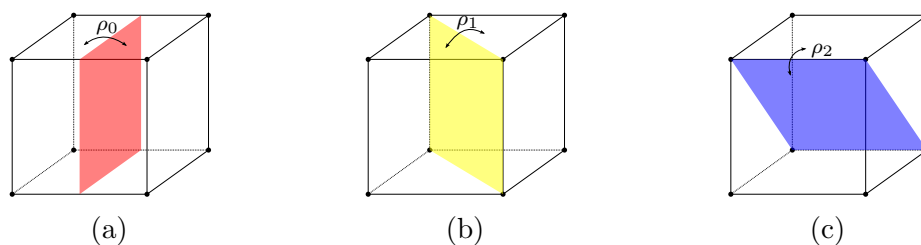


Figura 1.17: Generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{O})$ respecto a Φ

Realización del Octaedro

La realización del octaedro corresponde a la realización dual de la del cubo (Fig. 1.18a), es decir, es suficiente tomar como vértices los centros de las caras y una arista será incidente a dos vértices si las caras del cubo correspondientes a éstos eran incidentes en una arista común.

Con esto basta tomar como conjunto de vértices los puntos

$$\{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)\}.$$

Cualesquiera dos vértices que no son antípodas forman una arista y cualquier conjunto de 3 vértices que no contenga dos antípodas determina una cara.

A este octaedro lo denotaremos por \mathcal{O} .

Al ser la realización dual a la del cubo, si tomamos como bandera base Φ la correspondiente a la elegida para el cubo, es decir, aquella cuyo vértice está en la cara base del cubo, la arista correspondiente a la arista base del cubo y la cara correspondiente al vértice base del cubo (Fig. 1.18b), tenemos que ρ_0 es la reflexión con respecto al plano $x - z = 0$, ρ_1 es la reflexión respecto al plano $x - y = 0$ y ρ_2 es la reflexión respecto al plano $y = 0$ (Fig. 1.19).

Notemos que esta dualidad efectivamente corresponde con la operación dual descrita en la Sección 1.2, pues precisamente, si $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$ son los generadores distinguidos del cubo, entonces $(\rho_0, \rho_1, \rho_2) := (\sigma_2, \sigma_1, \sigma_0)$ son los generadores distinguidos del octaedro.

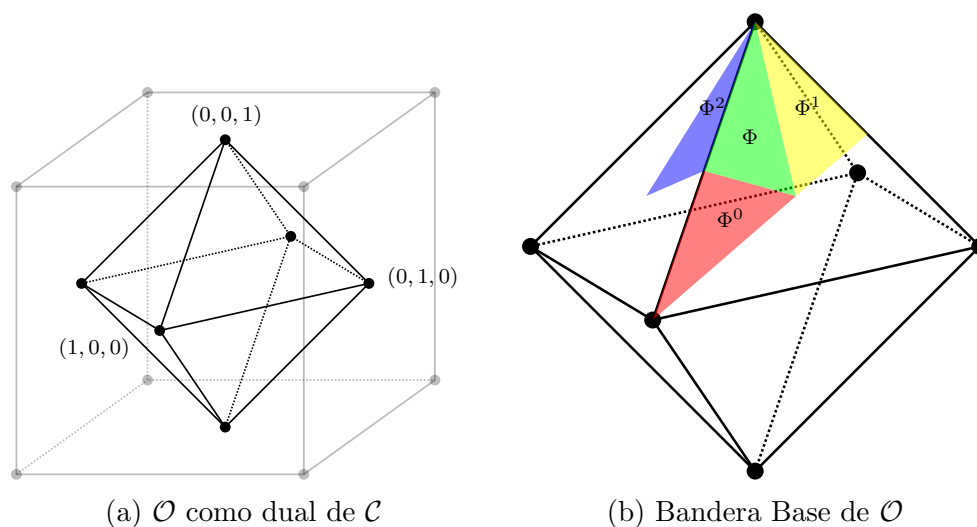


Figura 1.18

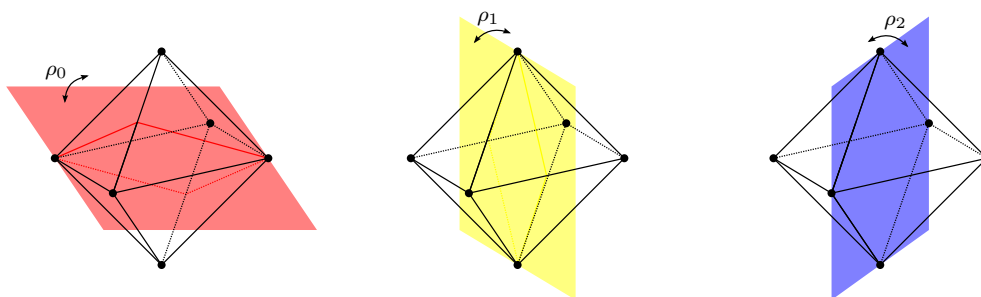


Figura 1.19: Generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{O})$ respecto a Φ

Realización del Icosaedro

Consideremos los 3 rectángulos determinados por los vértices de la forma $(\pm 1, \pm \tau, 0)$, $(\pm \tau, 0, \pm 1)$ y $(0, \pm 1, \pm \tau)$, donde $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Fig. 1.20a). El icosaedro regular \mathcal{I} será el poliedro determinado por el casco convexo de este arreglo (Fig. 1.20b)

Tomaremos como bandera base Φ la determinada por el vértice $(\tau, 0, 1)$, la arista determinada por los vértices $(\tau, 0, 1)$ y $(\tau, 0, -1)$ y la cara determinada por los vértices $(\tau, 0, 1)$, $(\tau, 0, -1)$ y $(1, \tau, 0)$ (Fig. 1.21).

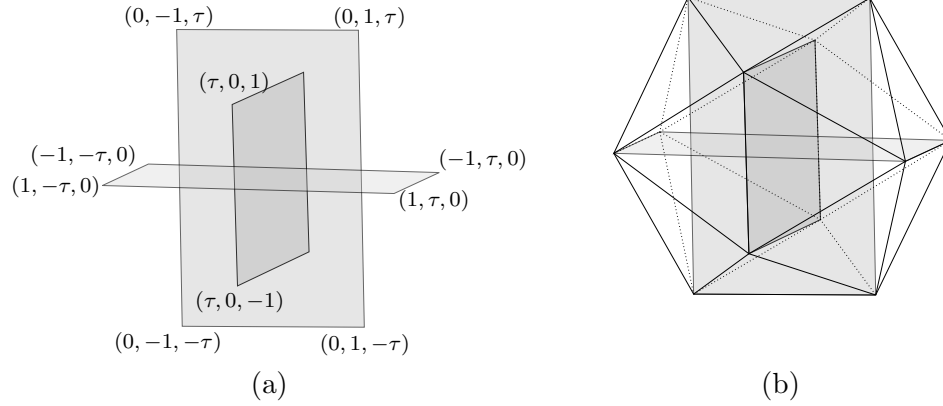
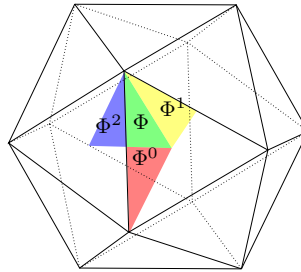


Figura 1.20

Figura 1.21: Bandera base Φ y sus banderas adyacentes

Entonces ρ_0 es la reflexión respecto al plano $z = 0$ (Fig. 1.22a), ρ_1 es la reflexión respecto al plano $\frac{1}{\tau}x - \tau y - z = 0$ (Fig. 1.22b) y ρ_2 es la reflexión respecto al plano $y = 0$ (Fig. 1.22c).

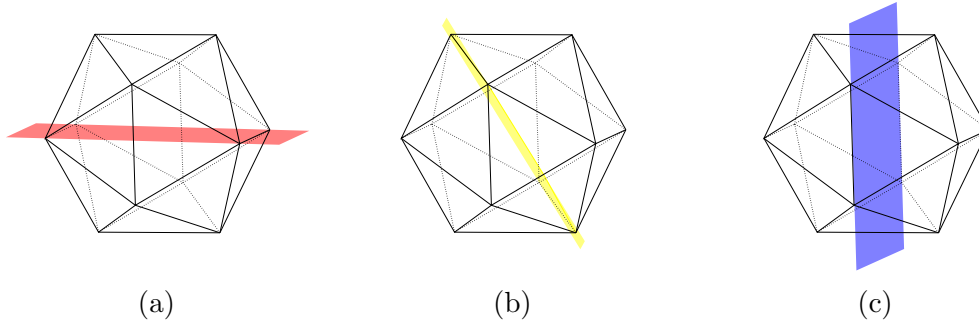


Figura 1.22: Generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{I})$ respecto a Φ

Realización del Dodecaedro

La realización del dodecaedro corresponde a la realización dual del Icosaedro \mathcal{I} , tomaremos como conjunto de vértices los centros de las caras de \mathcal{I} , es decir, los puntos

$$\left\{ \frac{3}{\tau^2} (\pm 1, \pm 1, \pm 1), \frac{3}{\tau^2} (0, \pm \tau^{-1}, \pm \tau), \frac{3}{\tau^2} (\pm \tau^{-1}, \pm \tau, 0), \frac{3}{\tau^2} (\pm \tau, 0, \pm \tau^{-1}) \right\},$$

como aristas y caras las determinadas por las aristas y vértices de \mathcal{I} (Fig. 1.23a).

Tomamos como bandera base Φ la correspondiente a la elegida para el icosaedro, así tenemos que ρ_0 es la reflexión respecto al plano $y = 0$, ρ_1 es la reflexión respecto al plano $\frac{1}{\tau}x - \tau y - z = 0$ y ρ_2 la reflexión respecto al plano $z = 0$ (Fig. 1.24).

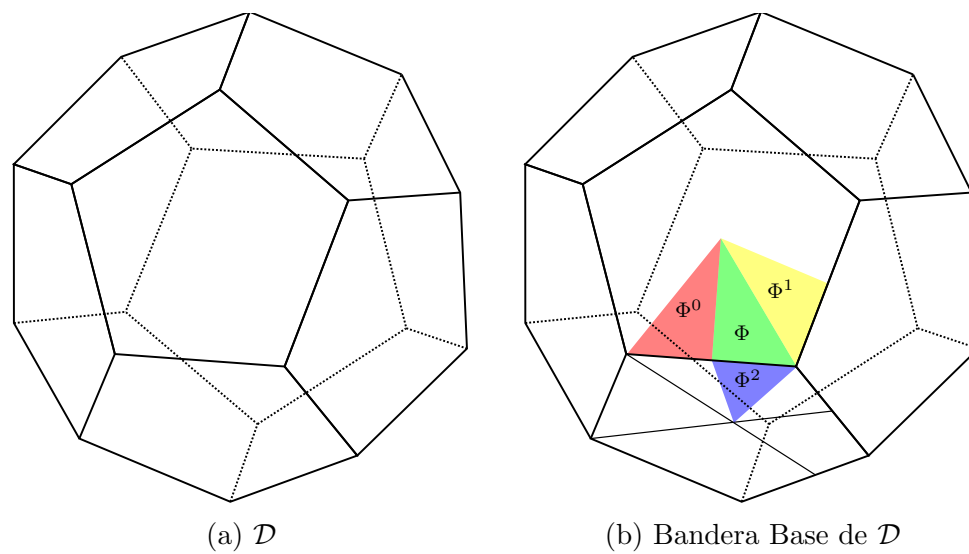
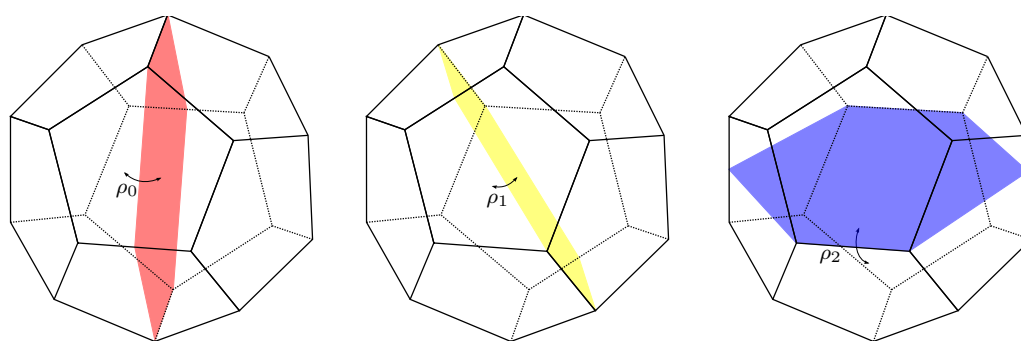


Figura 1.23

Figura 1.24: Generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{D})$ respecto a Φ

Realizaciones de los Poliedros de Petrie-Coxeter

A continuación daremos una realización para cada uno de los poliedros de Petrie-Coxeter. Dado que éstos son menos conocidos que los sólidos platónicos, las explicaciones serán un poco más detalladas, daremos coordenadas para sus vértices, describiendo sus aristas y caras. La notación usada para estos poliedros será la usada en [MS97].

Realización de $\{4, 6|4\}$

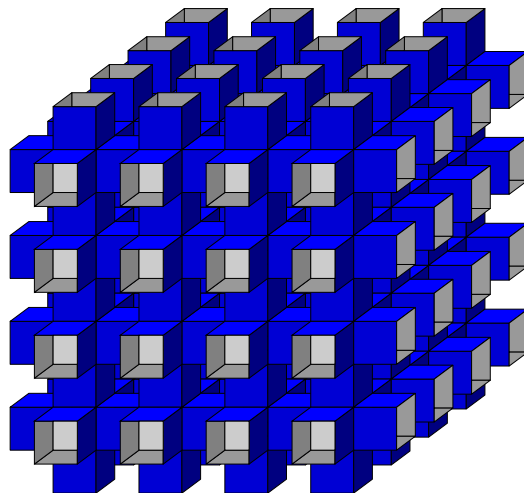
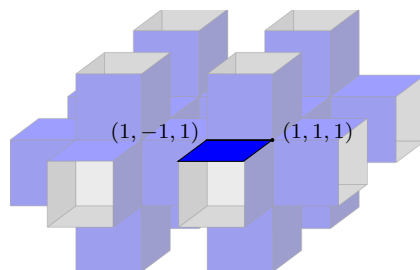
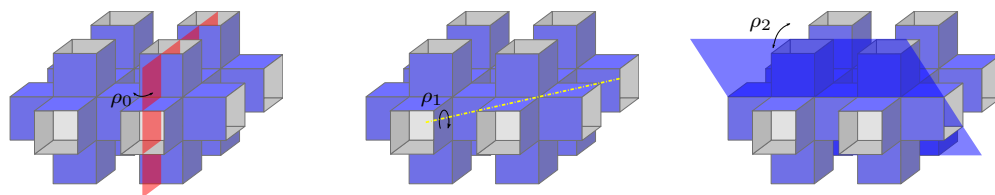
Para este poliedro consideraremos como conjunto de vértices los puntos de \mathbb{E}^3 cuyas coordenadas son todas enteros impares. Estos vértices inducen una teselación del espacio en cubos de lado 2 y aristas paralelas a los ejes coordenados, las aristas de nuestro poliedro serán las aristas de esta teselación.

Notemos que las caras de los cubos de la teselación están en aquellos planos donde una de las coordenadas es impar. Consideremos los centros de estos cuadrados, estos puntos tienen una coordenada impar y las otras dos pares. Consideremos ahora el conjunto de cuadrados donde la suma de las coordenadas pares de sus centros es congruente con 2 módulo 4; estos cuadrados serán las caras de nuestro poliedro.

A esta realización de $\{4, 6|4\}$ la denotaremos por \mathcal{PC}_1 (Fig. 1.25).

Tomemos como bandera base Φ la bandera con el vértice $(1, 1, 1)$, la arista determinada por los vértices $(1, 1, 1)$ y $(1, -1, 1)$ y la cara cuyo centro es el punto $(2, 0, 1)$ (Fig. 1.26).

Entonces ρ_0 es la reflexión respecto al plano $y = 0$, ρ_1 es el medio giro respecto a la recta determinada por los puntos $(1, 1, 1)$ y $(3, -1, 1)$, y ρ_2 la reflexión respecto al plano $x - z = 0$ (Fig. 1.27).

Figura 1.25: $\mathcal{P}C_1$ Figura 1.26: Φ en $\mathcal{P}C_1$ Figura 1.27: Generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{P}C_1)$ respecto a Φ

Realización de $\{6, 4|4\}$

Este poliedro es el dual de \mathcal{PC}_1 , y puede ser realizado como tal. Tomemos los centros de las caras incidentes a $(1, 1, 1)$, uniendo dos de ellos si las caras correspondientes eran incidentes obtenemos un hexágono (Fig. 1.28a). Si hacemos lo mismo para cada uno de los vértices obtenemos el poliedro \mathcal{PC}_2 como dual de \mathcal{PC}_1 (Fig. 1.28b).

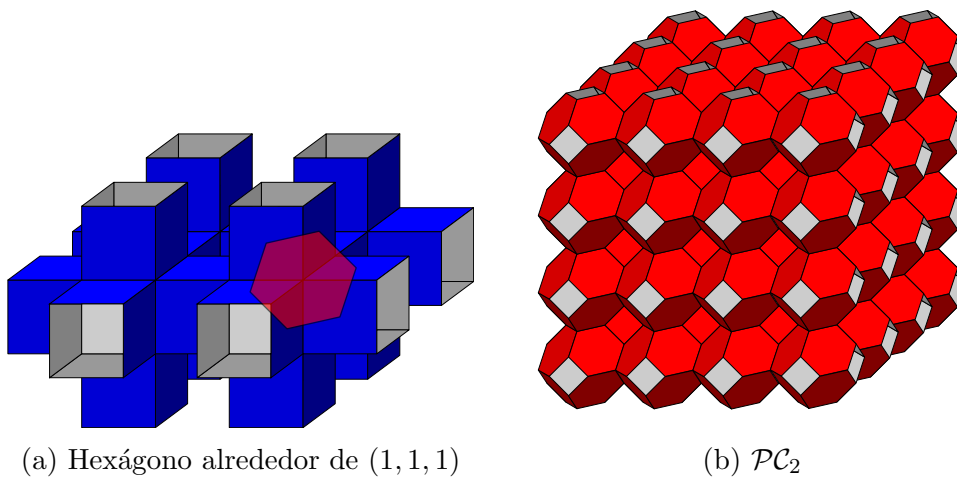


Figura 1.28

Podemos también construir a \mathcal{PC}_2 como sigue: consideremos el octaedro de vértices $(\pm 3, 0, 0)$, $(0, \pm 3, 0)$, y $(0, 0, \pm 3)$ y dividamos sus aristas en tres partes iguales. Eliminemos las pirámides sobre cuadrados formadas sobre cada vértice. La figura resultante es un *octaedro truncado* (Fig. 1.29a). Esta figura tiene ocho hexágonos, uno por cada cara del octaedro, estos hexágonos corresponden precisamente a los determinados por los vértices de la forma $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ en el \mathcal{PC}_1 (Fig. 1.29b).

Ahora traslademos cada octaedro truncado por el grupo generado por los vectores $(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 4)$. La configuración resultante es precisamente \mathcal{PC}_2 .

Al ser el dual de \mathcal{PC}_1 , tomando como bandera base la correspondiente a la bandera base tomada en \mathcal{PC}_1 , los generadores distinguidos son: ρ_0 la reflexión respecto al plano $x - z = 0$, ρ_1 el medio giro por la recta determinada por

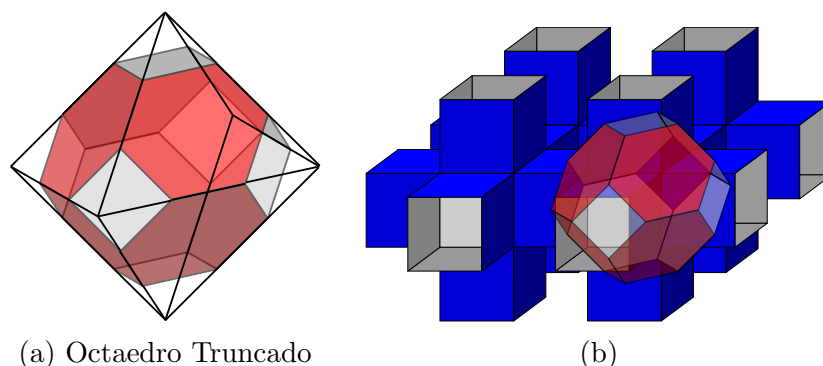
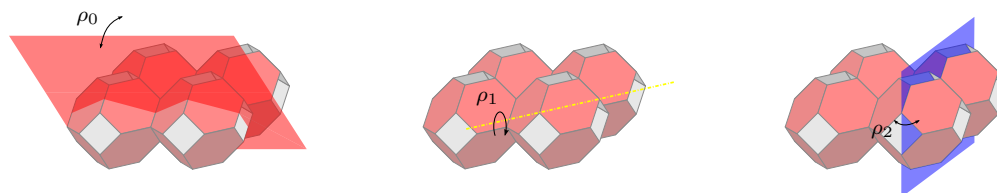


Figura 1.29

los puntos $(1, 1, 1)$ y $(3, -1, 1)$, y ρ_2 la reflexión respecto al plano $y = 0$ (Fig. 1.30).

Figura 1.30: Generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{PC}_2)$ respecto a Φ

Realización de $\{6, 6|3\}$

Construiremos este poliedro de manera similar a como construimos \mathcal{PC}_2 . Consideremos el tetraedro regular de vértices $(-1, -1, 1)$, $(5, 5, 1)$, $(-1, 5, -5)$ y $(5, -1, -5)$. Dividamos sus aristas en tres partes iguales y eliminemos las dos terceras partes más cercanas a los vértices en cada una. La figura resultante la llamaremos *tetraedro truncado* (Fig. 1.31).

Traslademos esta figura por el grupo generado por $(4, 4, 0)$, $(4, 0, 4)$, y $(0, 4, 4)$. La configuración resultante es el poliedro \mathcal{PC}_3 (Fig 1.32).

Tomemos como bandera base Φ el vértice $(1, 1, 1)$, la arista determinada por los puntos $(1, 1, 1)$ y $(-1, -1, 1)$ y la cara determinada por los puntos $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, -3, 3)$, $(1, -3, 5)$, $(3, -1, 5)$ y $(3, 1, 3)$ (Fig. 1.33).

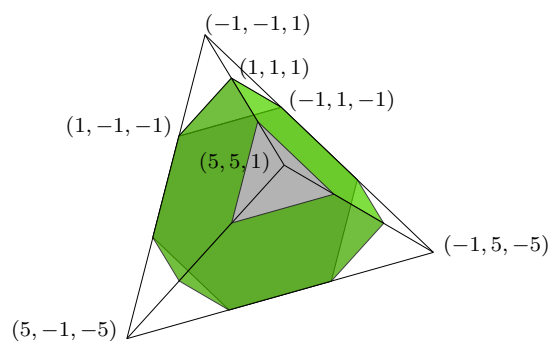
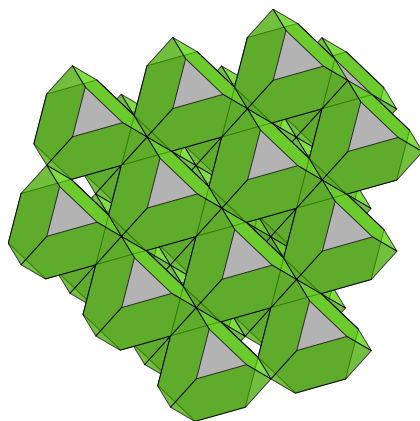
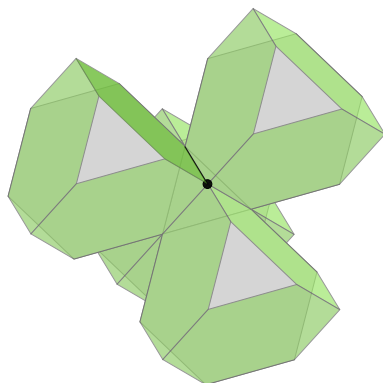
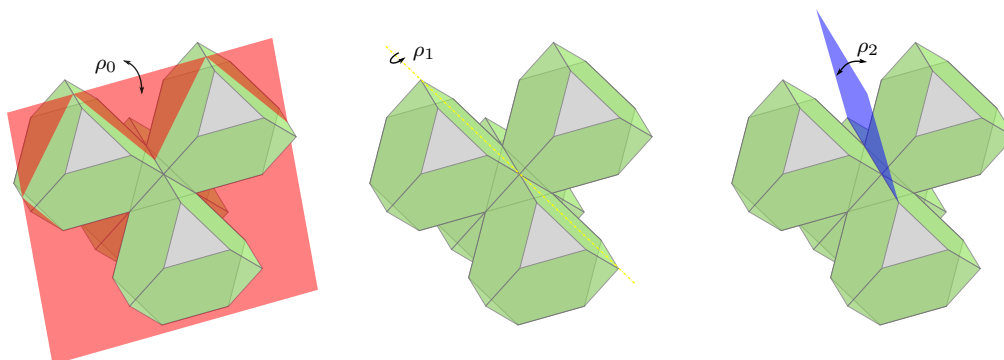


Figura 1.31: Tetraedro Truncado

Figura 1.32: \mathcal{PC}_3

Entonces los generadores distinguidos respecto a Φ son: ρ_0 la reflexión respecto al plano $x + y = 0$, ρ_1 el medio giro respecto a la recta determinada por los puntos $(1, 1, 1)$ y $(1, -3, 5)$, y ρ_2 la reflexión respecto al plano $x - y = 0$ (Fig 1.34).

Se puede verificar fácilmente que este poliedro es autodual.

Figura 1.33: Φ en \mathcal{PC}_3 Figura 1.34: Generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{PC}_3)$ respecto a Φ

Familias de Poliedros

En esta sección usaremos las operaciones definidas en la sección 1.2 para obtener realizaciones de nuevos poliedros a partir de las dadas anteriormente.

La manera de obtener las realizaciones nuevas consiste en usar la construcción geométrica de cada una de las operaciones. Notemos que las realizaciones dadas son tanto fieles como discretas, consideraremos únicamente aquellas que satisfagan estas dos condiciones, pues un poliedro puede ser realizable de manera fiel y su dual no serlo.

Comenzaremos agrupando los poliedros en familias según su grupo de simetrías, pues éste es un invariante en las operaciones que usamos. Finalmente mencionaremos algunos teoremas de clasificación de realizaciones de poliedros regulares.

Los resultados mostrados en esta sección, así como la notación, fueron desarrollados por P. McMullen y E. Schulte, la teoría detrás de ellos puede encontrarse en [MS97].

Familia del Tetraedro

$$\{3, 3\} \xleftrightarrow{\pi} \{4, 3\}_3 \tag{1.1}$$

Familia del Octaedro

$$\{6, 4\}_3 \xleftrightarrow{\pi} \{3, 4\} \xleftrightarrow{\delta} \{4, 3\} \xleftrightarrow{\pi} \{6, 3\}_4 \tag{1.2}$$

Familia del Icosaedro

$$\begin{array}{ccccccc} \{10, 5\} & \xleftrightarrow{\pi} & \{3, 5\} & \xleftrightarrow{\delta} & \{5, 3\} & \xleftrightarrow{\pi} & \{10, 3\} \\ \updownarrow \varphi_2 & & \updownarrow \varphi_2 & & & & \\ \{6, \frac{5}{2}\} & \xleftrightarrow{\pi} & \{5, \frac{5}{2}\} & \xleftrightarrow{\delta} & \{\frac{5}{2}, 5\} & \xleftrightarrow{\pi} & \{6, 5\} \\ & & & & \updownarrow \varphi_2 & & \updownarrow \varphi_2 \\ \{\frac{10}{3}, 3\} & \xleftrightarrow{\pi} & \{\frac{5}{2}, 3\} & \xleftrightarrow{\delta} & \{3, \frac{5}{2}\} & \xleftrightarrow{\pi} & \{\frac{10}{3}, \frac{5}{2}\} \end{array} \tag{1.3}$$

Debemos enfatizar que estamos clasificando de acuerdo a realizaciones, pues por ejemplo, el *gran icosaedro* $\{3, 5/2\}$ es combinatoriamente isomorfo al icosaedro $\{3, 5\}$ (Fig 1.35).

1.3.3 Teorema. *La lista de 18 realizaciones fieles y discretas de poliedros regulares finitos de (1.1), (1.2) y (1.3) es completa.*

Familia de $\{4, 6|4\}$

$$\{\infty, 4\}_{6,4} \xleftrightarrow{\pi} \{6, 4|4\} \xleftrightarrow{\delta} \{4, 6|4\} \xleftrightarrow{\pi} \{\infty, 6\}_{4,4} \tag{1.4}$$

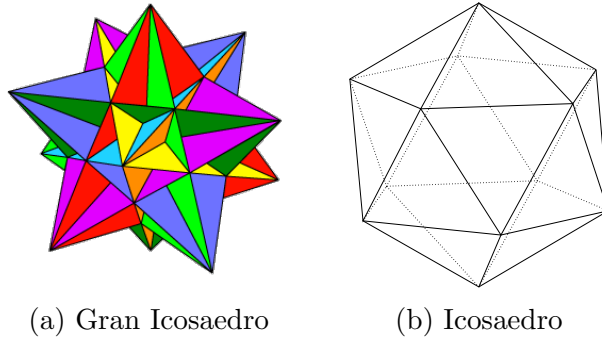


Figura 1.35

Familia de $\{6, 6|3\}$

$$\{\infty, 6\}_{6,3} \xleftrightarrow{\pi} \{6, 6|3\} \quad (1.5)$$

Los poliedros de Petrie-Coxeter y sus petriales pertenecen a una familia de 12 poliedros llamada *poliedros regulares infinitos puros*, estos poliedros se caracterizan por tener un grupo de simetrías afínmente irreducible (ver [MS02, p. 223]). Nosotros trabajamos únicamente con los de Petrie-Coxeter por ser históricamente los primeros de esta familia en aparecer y además, por ser los únicos de esta familia en tener caras planas finitas.

Como se dijo antes, las teselaciones regulares del plano son poliedros abstractos. Éstas pueden ser consideradas también realizaciones de poliedros, y junto con sus petriales forman una familia de 6 *poliedros planos* (ver [MS02, p. 221]).

Finalmente, existe una familia de 12 *poliedros mezclados*, caracterizados por tener grupos de simetría afínmente reducibles (ver [MS02, p. 221]).

Los 18 poliedros finitos, 12 puros, 6 planos y 12 mezclados dan un total de 48 poliedros regulares, en [MS97] McMullen y Schulte prueban la completitud de esta lista. A. Dress en [Dre81] y [Dre85] probó por primera vez este resultado.

Capítulo 2

El 3-toro

2.1. El 3-toro y sus isometrías

En esta sección definiremos el 3-toro, le daremos una métrica y estudiaremos algunas de sus isometrías. Para ello daremos primero algunos resultados acerca de isometrías de \mathbb{E}^3 pues las isometrías del 3-toro se pueden estudiar a través de éstas.

Los siguientes resultados dan una descripción completa de las isometrías de \mathbb{E}^3 . El Lema 2.1.1 es un caso particular de un teorema, el cual se puede encontrar en [KM97, p. 84]. La prueba que aquí presentamos es una adaptación de la prueba de dicho teorema.

2.1.1 Lema. *Toda isometría de \mathbb{E}^3 que fija el origen es lineal.*

Demostración. Sea f una isometría que fija al origen y $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de \mathbb{E}^3 . Dado que f es isometría tenemos

$$\|f(v) - f(e_i)\| = \|v - e_i\|$$

para todo $v \in \mathbb{E}^3$ y toda $i \in \{1, 2, 3\}$. Elevando al cuadrado la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \|f(v) - f(e_i)\|^2 &= \|v - e_i\|^2, \\ \|f(v)\|^2 - 2(f(v) \cdot f(e_i)) + \|f(e_i)\|^2 &= \|v\|^2 - 2(v \cdot e_i) + \|e_i\|^2, \end{aligned}$$

de donde

$$f(v) \cdot f(e_i) = v \cdot e_i$$

para todo $v \in \mathbb{E}^3$ y toda $i \in \{1, 2, 3\}$, pues $\|f(v)\| = \|v\|$ y $\|f(e_i)\| = \|e_i\|$ ya que f es una isometría que fija el origen.

Dado que f es isometría, $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ es una base ortonormal de \mathbb{E}^3 y entonces

$$f(v) = \sum_{i=1}^3 (f(v) \cdot f(e_i)) f(e_i) = \sum_{i=1}^3 (v \cdot e_i) f(e_i)$$

para todo $v \in \mathbb{E}^3$.

Sea $T : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ la transformación lineal definida por $T(e_i) = f(e_i)$. Ya que \mathcal{C} es base ortonormal tenemos

$$\begin{aligned} T(v) &= T\left(\sum_{i=1}^3 (v \cdot e_i) e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^3 (v \cdot e_i) T(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^3 (v \cdot e_i) f(e_i) \\ &= f(v) \end{aligned}$$

para todo $v \in \mathbb{E}^3$ y por lo tanto, f es lineal. ■

2.1.2 Proposición. *Toda isometría g de \mathbb{E}^3 se escribe de forma única como $g = ft$ donde t es una traslación y f una isometría lineal.*

Demostración. Sea $g \in \text{Isom}(\mathbb{E}^3)$ y $\vec{v} = g^{-1}(0)$, sea t la traslación por $-\vec{v}$. Tenemos que $gt^{-1}(0) = 0$ y por Lema 2.1.1 $gt^{-1} = f$ con f isometría lineal, y por lo tanto $g = ft$.

Supongamos ahora que $f_1 t_1 = g = f_2 t_2$, entonces $f_2^{-1} f_1 = t_2 t_1^{-1}$. El lado izquierdo es lineal y entonces fija el origen así que $t_1 = t_2$ y por lo tanto $f_1 = f_2$. ■

El siguiente lema, además de darnos una manera sencilla de probar la Proposición 2.1.4, por sí mismo tiene importancia pues nos dice que el conjugado de una traslación es otra traslación.

2.1.3 Lema. *Sea $G \leq \text{Isom}(\mathbb{E}^3)$ un grupo de isometrías y $T \leq G$ el grupo de traslaciones de G , entonces $T \triangleleft G$.*

Demostración. Sea $g \in G$ y t una traslación en T , digamos por \vec{v} . Por la Proposición 2.1.2 $g = f_g t_g$ para alguna f_g lineal y t_g traslación. Sea $x \in \mathbb{E}^3$, entonces

$$\begin{aligned} (gtg^{-1})(x) &= (f_g t_g t t_g^{-1} f_g^{-1})(x) \\ &= (f_g t)(f_g^{-1}(x)) \\ &= f_g(f_g^{-1}(x) + \vec{v}) \\ &= x + f_g(\vec{v}) \end{aligned}$$

y esto para x arbitrario, por lo tanto $gtg^{-1} \in T$ y $T \triangleleft G$. ■

2.1.4 Proposición. *Toda isometría g de \mathbb{E}^3 se escribe de forma única como composición de una isometría lineal f por una traslación t , es decir, $g = tf$. Además, si $f_1 t_1 = g = t_2 f_2$ con f_1, f_2 lineales y t_1, t_2 traslaciones, entonces $f_1 = f_2$.*

Demostración. Por la Proposición 2.1.2 y el Lema 2.1.3 $g = f_1 t_1$ y

$$g f_1^{-1} = f_1 t_1 f_1^{-1} = t_1,$$

por lo tanto $g = t_2 f_1$. La unicidad se sigue de la unicidad de f_1 y t_1 en la Proposición 2.1.2. ■

2.1.5 Proposición. *Existe un homomorfismo de grupos \mathbf{Lin} de $\text{Isom}(\mathbb{E}^3)$ en $O(3)$, el grupo de isometrías lineales de \mathbb{E}^3 , cuyo núcleo es $\text{Tras}(\mathbb{E}^3)$ el subgrupo de traslaciones.*

Demostración. Definamos $\mathbf{Lin}(g) = f$, donde f es la única isometría lineal tal que $g = tf$. \mathbf{Lin} es homomorfismo pues si $g_1, g_2 \in \text{Isom}(\mathbb{E}^3)$ con $g_1 = t_1 f_1$ y $g_2 = t_2 f_2$ entonces

$$\begin{aligned} g_1 g_2 &= t_1 f_1 t_2 f_2 \\ &= t_1 f_1 t_2 f_1^{-1} f_1 f_2 \\ &= t_1 \bar{t}_2 f_1 f_2 \quad \text{donde } \bar{t}_2 = f_1 t_2 f_1^{-1} \text{ y por el Lema 2.1.3 es una traslación} \end{aligned}$$

y entonces $\mathbf{Lin}(g_1g_2) = f_1f_2 = \mathbf{Lin}(g_1)\mathbf{Lin}(g_2)$ ■

En lo sucesivo, si $g \in Isom(\mathbb{E}^3)$, denotaremos por g' a $\mathbf{Lin}(g)$. Observemos que la notación g' está justificada, pues g es una función diferenciable de \mathbb{E}^3 en sí mismo, y g' coincide con la transformación lineal asociada a la derivada de g .

La Proposición 2.1.5 y el Primer Teorema de Isomorfismo de grupos nos dicen que existe un isomorfismo $\overline{\mathbf{Lin}} : Isom(\mathbb{E}^3)/Tras(\mathbb{E}^3) \rightarrow O(3)$, es decir, que cada isometría lineal es un representante de una familia de isometrías que comparten algunas propiedades. Esto se verá reflejado en los siguientes resultados.

2.1.6 Corolario. *Si g es una isometría de \mathbb{E}^3 y t es la traslación por \vec{v} entonces gtg^{-1} es la traslación por $g'(\vec{v})$.*

Demostración. Se sigue de la demostración del Lema 2.1.3. ■

2.1.7 Corolario. *Sean τ un grupo de traslaciones de \mathbb{E}^3 y $\mathcal{N}(\tau)$ el normalizador de τ en $Isom(\mathbb{E}^3)$. Si g_1 y g_2 son isometrías de \mathbb{E}^3 con $g'_1 = g'_2$ entonces $g_1 \in \mathcal{N}(\tau)$ si y sólo si $g_2 \in \mathcal{N}(\tau)$, en particular, g normaliza a τ si y sólo si g' lo hace.*

Demostración. Del Corolario 2.1.6, si $t \in \tau$, $g_1tg_1^{-1} = g_2tg_2^{-1}$. La segunda parte se sigue de que $(g')' = g'$. ■

A continuación entraremos en el estudio del 3-Toro, daremos una métrica y veremos que muchas de sus isometrías están dadas por isometrías de \mathbb{E}^3 .

2.1.8 Definición. Sea $\tau = \langle t_{\vec{v}_1}, t_{\vec{v}_2}, t_{\vec{v}_3} \rangle \leq Isom(\mathbb{E}^3)$ un grupo de traslaciones con $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ vectores linealmente independientes. Definimos el 3-toro \mathbb{T}_τ^3 por:

$$\mathbb{T}_\tau^3 := \mathbb{E}^3/\tau = \{[x]_\tau : x \in \mathbb{E}^3\}.$$

Escribiremos únicamente \mathbb{T}^3 cuando no haya confusión respecto al grupo de traslaciones τ .

Si e es la métrica euclideana en \mathbb{E}^3 definimos la función $e_\tau : \mathbb{T}_\tau^3 \times \mathbb{T}_\tau^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$e_\tau([x]_\tau, [y]_\tau) = \inf \{e(t_1(x), t_2(y)) : t_1, t_2 \in \tau\}.$$

El siguiente resultado lo daremos sin demostración, una prueba puede encontrarse en [Yal88, Teo 5.35].

2.1.9 Teorema. *Sea $\tau = \langle t_{\vec{v}_1}, t_{\vec{v}_2}, t_{\vec{v}_3} \rangle \leq \text{Isom}(\mathbb{E}^3)$ un grupo de traslaciones con $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ vectores linealmente independientes. Entonces τ es un grupo discreto, es decir, las órbitas no tienen puntos de acumulación.*

2.1.10 Lema. *Si $x, y \in \mathbb{E}^3$ y $t_0 \in \tau$, entonces*

$$e_\tau([x]_\tau, [y]_\tau) = \min \{e(t_0(x), t_0(y)) : t_0 \in \tau\}.$$

Demostración. Observemos que si $t_1, t_2 \in \tau$ y $x, y \in \mathbb{E}^3$, entonces $e(t_1(x), t_2(y)) = e(x, t_1^{-1}t_2(y))$ por ser t_1 isometría. Así que tenemos

$$e_\tau([x]_\tau, [y]_\tau) = \inf \{e(x, t(y)) : t \in \tau\}.$$

Ahora probemos que es mínimo. Sea $d = \inf \{e(x, t(y)) : t \in \tau\}$. Probemos que existe $s \in \tau$ tal que $d = e(x, s(y))$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $s_n \in \tau$ tal que $s_n(y) \in B_{d+\frac{1}{n}}(x)$, la bola de radio $d + \frac{1}{n}$ con centro en x , así que, o bien existe $s \in \tau$ con $d = e(x, s(y))$, o bien hay una infinidad de elementos de la órbita de y en el conjunto $K = \{z \in \mathbb{E}^3 : d \leq e(x, z) \leq d + 1\}$, pero esto último es imposible pues K es compacto y entonces la órbita de y tendría un punto de acumulación. ■

2.1.11 Proposición. *La función e_τ es una métrica en \mathbb{T}_τ^3 .*

Demostración. Claramente $e_\tau \geq 0$. La simetría de e_τ se sigue de la simetría de e . Gracias al Lema 2.1.10 $e_\tau([x]_\tau, [y]_\tau) = 0$ si y sólo si $[x]_\tau = [y]_\tau$.

Sean $[x]_\tau, [y]_\tau, [z]_\tau \in \mathbb{T}_\tau^3$. Por el Lema 2.1.10 tenemos que

$$e_\tau([x]_\tau, [z]_\tau) + e_\tau([z]_\tau, [y]_\tau) = e(x, t_1(z)) + e(t_1(z), t_2(y))$$

para algunos $t_1, t_2 \in \tau$, luego

$$e(x, t_1(z)) + e(t_1(z), t_2(y)) \geq e(x, t_2(y)) \geq e_\tau([x]_\tau, [y]_\tau) \quad \blacksquare$$

Una vez que \mathbb{T}^3 tiene métrica tiene sentido preguntarnos por sus isometrías, es decir, funciones que preserven la métrica. El siguiente resultado nos dice cuáles isometrías de \mathbb{E}^3 inducen isometrías en \mathbb{T}^3 . Se puede probar que toda isometría de \mathbb{T}^3 se levanta a una isometría de \mathbb{E}^3 , pero este resultado no es relevante para este trabajo.

2.1.12 Proposición. *Si g es isometría de \mathbb{E}^3 , g induce una isometría \hat{g} de \mathbb{T}^3 si y sólo si $g \in \mathcal{N}(\tau)$, el normalizador de τ en $Isom(\mathbb{E}^3)$.*

Demostración. Supongamos que g induce una isometría en \mathbb{T}^3 . Sea $t \in \tau$ la traslación por \vec{v} . Por el Corolario 2.1.6 $gtg^{-1} = \bar{t}$, la traslación por $g'(\vec{v})$. Además, ya que g induce una isometría en \mathbb{T}^3 , g manda órbitas en órbitas. De aquí se sigue que si $tg^{-1}(x) \in [g^{-1}(x)]_\tau$, entonces $\bar{t}(x) = gtg^{-1}(x) \in [x]_\tau$, para x arbitrario en \mathbb{E}^3 , por lo tanto $\bar{t} \in \tau$ y $g\tau g^{-1} = \tau$.

Supongamos ahora que $g \in \mathcal{N}(\tau)$, entonces, si $t \in \tau$ existe un único $\bar{t} \in \tau$ tal que $gt = \bar{t}g$. Definamos $\hat{g} : \mathbb{T}_\tau^3 \rightarrow \mathbb{T}_\tau^3$ por $\hat{g}([x]_\tau) = [g(x)]_\tau$. Probemos que \hat{g} está bien definida: Si $[x]_\tau = [y]_\tau$, entonces $x = t(y)$ para alguna $t \in \tau$, y así $g(x) = gt(y) = \bar{t}g(y)$ y por lo tanto $[g(x)]_\tau = [g(y)]_\tau$. Claramente \hat{g} es suprayectiva.

Para probar que \hat{g} es isometría basta observar que $e(x, t(y)) = e(g(x), gt(y)) = e(g(x), \bar{t}g(y))$ y entonces

$$\inf \{e(x, t(y)) : t \in \tau\} = \inf \{e(g(x), \bar{t}g(y)) : \bar{t} \in \tau\}$$

y por lo tanto $e_\tau([x]_\tau, [y]_\tau) = e_\tau(\hat{g}([x]_\tau), \hat{g}([y]_\tau))$. ■

En virtud de la Proposición 2.1.12 y de los Corolarios 2.1.6 y 2.1.7 estudiaremos, dada una isometría g , a qué grupos de traslaciones normaliza g' , pues esto nos dirá cuáles son los 3-toros en los que g induce una isometría.

2.2. Retículas de puntos

El objetivo de esta sección es estudiar las *retículas de puntos*, las cuales son objetos geométricos que nos permitirán entender mejor al 3-Toro.

2.2.1 Definición. Una *retícula de puntos* Λ_τ en \mathbb{E}^3 es la órbita del 0 bajo un grupo discreto de traslaciones τ . Escribiremos únicamente Λ si no hay confusión respecto al grupo τ . La retícula se dirá k -dimensional si hay k vectores linealmente independientes en ella (Fig 2.1a y 2.1b).

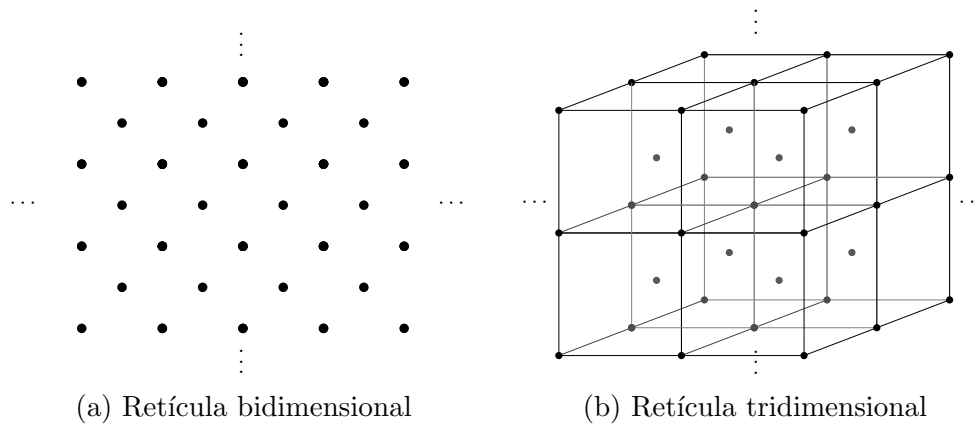


Figura 2.1

Observemos que hay un isomorfismo de grupos entre τ y Λ_τ si pensamos a Λ_τ como subgrupo de $(\mathbb{R}^3, +)$, así que estudiar Λ_τ es una forma de estudiar τ y por lo tanto \mathbb{T}^3 . Observemos también que Λ_τ depende únicamente de τ y no de los generadores, así que gran parte de nuestro estudio se concentrará en encontrar generadores adecuados para τ a través de las propiedades geométricas de Λ_τ . Trataremos de manera indistinta a los elementos de Λ_τ como puntos o vectores, sin embargo, los denotaremos p, q, w, v, \dots cuando éstos sean pensados como puntos y $\vec{p}, \vec{q}, \vec{v}, \vec{w} \dots$ cuando lo sean como vectores.

2.2.2 Proposición. Sean τ un grupo de traslaciones generado por 3 traslaciones linealmente independientes, $g \in \text{Isom}(\mathbb{E}^3)$. Entonces $g \in \mathcal{N}(\tau)$ si y sólo si g' preserva a Λ_τ .

Demostración. Supongamos que $g \in \mathcal{N}(\tau)$. Por la linealidad de g' basta probar que $g'(\vec{v}_i) \in \Lambda$ para $i \in \{1, 2, 3\}$, pero esto último se sigue del Corolario 2.1.6 pues $g \in \mathcal{N}(\tau)$.

Supongamos ahora que g' preserva a Λ_τ . Sea $t \in \tau$ la traslación por \vec{v} . Por el Corolario 2.1.6 gtg^{-1} es la traslación por $g'(\vec{v})$, pero $g'(\vec{v}) \in \Lambda_\tau$ por lo que $gtg^{-1} \in \tau$ así que $g \in \mathcal{N}(\tau)$. ■

Retículas invariantes bajo reflexiones

La Proposición 2.2.2 nos dice que es equivalente estudiar isometrías que normalizan a τ e isometrías que dejan invariante a Λ_τ . Ya que los grupos de simetrías de los poliedros que estudiaremos son generados por reflexiones, estudiaremos cómo deben ser las retículas que quedan invariantes bajo una reflexión.

En lo sucesivo Π será un plano en \mathbb{E}^3 , R la reflexión respecto a Π , Λ la retícula de un grupo $\tau = \langle t_{\vec{v}_1}, t_{\vec{v}_2}, t_{\vec{v}_3} \rangle$ con $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linealmente independientes tal que $R(\Lambda) = \Lambda$. Si p es un punto en \mathbb{E}^3 , $\pi(p)$ es su proyección a Π , y $\pi(\Lambda)$ es la proyección de Λ en Π .

Para nuestros fines asumiremos siempre que $\Lambda \cap \Pi \neq \emptyset$.

2.2.3 Proposición. *Sea Λ una retícula como la descrita antes, entonces existen dos vectores linealmente independientes \vec{v}_1, \vec{v}_2 de tal forma que si $q \in \Lambda \cap \Pi$, entonces $\Lambda \cap \Pi = q + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $q = 0$. Observemos que si u, v son puntos en Λ de tal forma que $\pi(u)$ y $\pi(v)$ son linealmente independientes, entonces $u + R(u)$ y $v + R(v)$ están en Π y son linealmente independientes, así que Λ es bidimensional.

Si \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son dos vectores linealmente independientes en $\Lambda \cap \Pi$, observemos que $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ nos induce una teselación de Π en paralelogramos congruentes con el paralelogramo P formado por $0, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (Fig. 2.2).

Entonces $\Pi = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ y así, cada punto de $\Lambda \cap \Pi$ lo podemos escribir como $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, además, para los puntos del interior de P podemos pedir que $\alpha_i \in (0, 1), i \in \{1, 2\}$.

Tomemos \vec{v}_1 y \vec{v}_2 de tal forma que P (y por lo tanto, todos los demás) tenga un número mínimo n de puntos de $\Lambda \cap \Pi$ en su interior. Si P contiene puntos de Λ en sus lados podemos tomar \vec{v}'_1 y \vec{v}'_2 como aquellos puntos de coordenada α_1 y α_2 mínima, respectivamente (Fig. 2.3a). Así que podemos suponer que P no contiene puntos en sus lados.

Probemos entonces que $n = 0$, es decir, que todos los puntos de $\Lambda \cap \Pi$ son vértices de los paralelogramos. Supongamos que $n \geq 1$ y sea \vec{w} un punto de

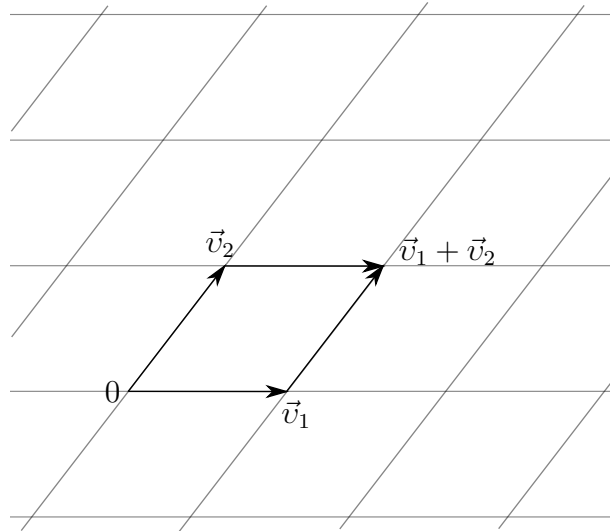


Figura 2.2: Π teselado por paralelogramos.

en el interior de P , entonces el paralelogramo P' formado por $0, \vec{v}_1, \vec{w}$ y $\vec{v}_1 + \vec{w}$ (Fig. 2.3b) tiene menos puntos en su interior (pues por la elección de w tiene a lo más tantos puntos como P pero ahora w ya no está en el interior). De aquí se sigue que $n = 0$. Por lo tanto todos los puntos son vértices de los paralelogramos y $\Lambda \cap \Pi = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$. ■

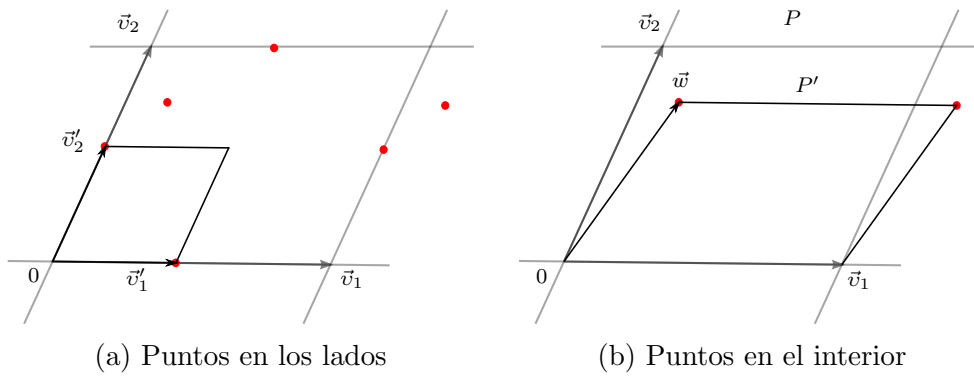


Figura 2.3

2.2.4 Lema. Sean Λ una retícula asociada a un grupo τ y Π un plano tal que Λ es invariante bajo la reflexión con respecto a Π . Entonces existe un punto $p \in \Lambda \setminus \Pi$ cuya distancia a Π es mínima.

Demostración. Supongamos que tal p no existe, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $p_n \in \Lambda$ tal que $e(p_n, \Pi) < \frac{1}{2^{n+1}}$, es decir, existen vectores \vec{v}_n (el vector de la traslación que manda p_n en $R(p_n)$) en Λ con $|v_n| < \frac{1}{2^n}$ y así el punto $x = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(0)$ es un punto de acumulación de Λ lo cual es una contradicción. ■

2.2.5 Lema. Sean Λ la retícula asociada a un grupo τ y Π un plano que contiene al origen tal que Λ es invariante bajo la reflexión con respecto a Π . Si p es un punto de Λ a distancia mínima positiva de Π entonces

$$\Lambda = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_k$$

donde $\Lambda_k = (\Lambda \cap \Pi) + k\vec{p}$. A Λ_k le llamaremos la capa k de Λ .

Demostración. Sean \vec{v}_1 y \vec{v}_2 vectores con $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \Lambda \cap \Pi$. Sea q un punto en Λ , sin pérdida de generalidad, q y p están del mismo lado del espacio con respecto a Π . Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que $q = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{p}$. Observemos que $\alpha_3 \in \mathbb{Z}$, pues de lo contrario $q - [\alpha_3]\vec{p}$ sería un punto de Λ entre los planos Π y $\Pi + \vec{p}$ (Fig. 2.4), lo cual contradice que p tenía distancia mínima positiva. Que $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ se sigue de que $q - \alpha_3\vec{p} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 \in \Lambda \cap \Pi$. ■

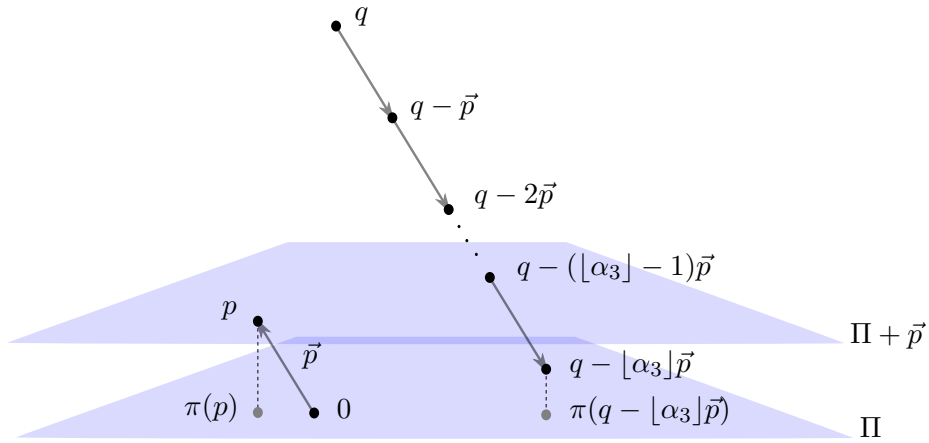


Figura 2.4: Si $[\alpha_3] \neq \alpha_3$

En la Proposición 2.2.3 construimos dos vectores \vec{v}_1, \vec{v}_2 de tal forma que $\Lambda \cap \Pi = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$. Otra forma de entender el Lema 2.2.5 es como la construcción

de un tercer vector \vec{v}_3 de tal forma que $\Lambda = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$. En la Proposición 2.2.6 veremos que, en el caso que $\pi(\Lambda) = \Lambda \cap \Pi$, podemos tomar nuestro tercer generador ortogonal al plano Π ; por otro lado, en la Proposición 2.2.7 veremos que si $\pi(\Lambda) \neq \Lambda \cap \Pi$ tenemos también un vector $\vec{\omega}$ ortogonal a Π de tal forma que $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{\omega} \rangle$, si bien no es todo Λ , es un subgrupo de índice 2.

2.2.6 Proposición. *Sean Λ una retícula de un grupo τ y Π un plano que contiene al origen tal que Λ es invariante bajo la reflexión con respecto a Π . Si $\pi(\Lambda) = \Lambda \cap \Pi$, entonces existe un vector $\vec{\omega} \in \Lambda$ ortogonal a Π tal que $\Lambda = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{\omega} \rangle$ donde $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \Lambda \cap \Pi$.*

Demostración. Sean $p \in \Lambda$ un punto de distancia mínima positiva a Π y $\vec{\omega} = \vec{p} - \pi(\vec{p})$. Por el Lema 2.2.5 $\Lambda = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_k$ con $\Lambda_k = (\Lambda \cap \Pi) + k\vec{p}$ pero

$$(\Lambda \cap \Pi) + k\vec{p} = (\Lambda \cap \Pi) + k(\pi(\vec{p}) + \vec{\omega}) = (\Lambda \cap \Pi) + k\vec{\omega}.$$

Por lo tanto $\Lambda = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{\omega} \rangle$. ■

2.2.7 Proposición. *Sean Λ una retícula de un grupo τ y Π un plano por el origen tal que Λ es invariante bajo la reflexión con respecto a Π . Si $\pi(\Lambda) \neq \Lambda \cap \Pi$ entonces existen un vector $\vec{\omega} \in \Lambda$ ortogonal a Π tal que el índice de $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{\omega} \rangle$ en Λ es 2.*

Demostración. Sea p un punto de distancia mínima positiva a Π y sea $\vec{\omega} = \vec{p} - R(\vec{p})$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ sea Λ_k como en el Lema 2.2.5. Basta probar que $\omega \in L_2$, pues una clase lateral (aquella que contiene a $\vec{\omega}$) será la de los puntos en capas con índice par y la otra (la que contiene a \vec{p}) será la de los puntos en capas de índice impar. Observemos que tanto $-p$ como $R(p)$ son puntos en Λ_{-1} , y por lo tanto $R(p) = -p + v$ con $v \in \Lambda_0$ así que

$$\vec{\omega} = \vec{p} - R(\vec{p}) = \vec{p} - (-\vec{p} + \vec{v}) = \vec{v} + 2\vec{p}$$

y por lo tanto $\vec{\omega} \in L_2$. ■

2.2.8 Corolario. *Sean Λ una retícula asociada a un grupo τ y Π un plano tal que Λ es invariante bajo la reflexión con respecto a Π . Si $\Lambda \cap \Pi \neq \emptyset$, entonces todo punto de Λ se proyecta o bien en un punto de $\Lambda \cap \Pi$ o bien en el punto medio entre dos puntos de $\Lambda \cap \Pi$.*

Demostración. Si $\pi(\Lambda) = \Lambda \cap \Pi$ no hay nada que hacer. Si $\pi(\Lambda) \neq \Lambda \cap \Pi$ sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ y $\vec{\omega}$ son como en la Proposición 2.2.7. Basta observar que si $p = n\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + k\vec{\omega}$ entonces $\pi(p) = n\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$ y si $p = \vec{v}_3 + n\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + k\vec{\omega}$ entonces $\pi(p)$ es punto medio entre $n\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$ y $2\vec{v}_3 + n\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 - \vec{\omega}$. ■

El Corolario anterior motiva la siguiente definición:

2.2.9 Definición. Sea τ un grupo generado por 3 traslaciones linealmente independientes de tal forma que Λ_τ es invariante bajo una reflexión respecto a un plano Π . Diremos que Λ_τ es *de traslación paralela* con respecto a Π si todos los puntos de Λ_τ se proyectan en puntos de $\Lambda_\tau \cap \Pi$.

En los resultados de esta sección hemos dado generadores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ para Λ de tal forma que \vec{v}_1 y $\vec{v}_2 \in \Pi$ y $\vec{v}_3 \notin \Pi$. Además exhibimos un vector $\vec{\omega}$ ortogonal a Π donde $|\vec{\omega}|$ es mínimo entre los vectores de Λ ortogonales a Π e incluso probamos en la Proposición 2.2.6 que si $\Lambda \cap \Pi = \pi(\Lambda)$ podemos tomar $\vec{v}_3 = \vec{\omega}$. Probamos también que los puntos Λ son esencialmente de dos tipos: los que se proyectan en puntos de $\Lambda \cap \Pi$ y los que se proyectan en puntos medios entre éstos. En el siguiente capítulo usaremos estos resultados para clasificar las retículas que se quedan invariantes bajo los grupos de los poliedros regulares.

Los resultados 2.2.3, 2.2.6, 2.2.7 y 2.2.8 tienen sus análogos bidimensionales (es decir, considerando que Λ es una retícula bidimensional que es invariante bajo la reflexión de una recta Π) y la pruebas son esencialmente las mismas. Así, si Λ es una retícula bidimensional invariante bajo la reflexión con respecto a una recta Π , diremos que Λ es de *traslación paralela* respecto a Π si $\pi(\Lambda) = \Pi \cap \Lambda$.

Tres Retículas Importantes

A continuación describiremos tres retículas que resultarán importantes y conviene estudiarlas con un poco de detalle

Retícula de Cubos. Corresponde a la retícula dada por los vértices de una teselación de cubos. Un ejemplo es la retícula generada por los vectores

$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, la cual denotaremos $\Lambda_{(1,0,0)}$. Sus puntos son los de la forma (m, n, k) con $m, n, k \in \mathbb{Z}$.

Retícula centrada en las caras. Corresponde a la retícula que consta de los vértices de una teselación de cubos y de los puntos medios de las caras de dicha teselación. Un ejemplo es la generada por los vectores $(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$ la cual denotaremos $\Lambda_{(1,1,0)}$. Ésta corresponde con todos los puntos de coordenadas enteras cuya suma es par.

Retícula centrada en los cubos. Corresponde a la retícula dada por los vértices de una teselación de cubos y los centros de cada uno de los cubos. Un ejemplo es la generada por los vectores $(2, 0, 0), (0, 2, 0), (1, 1, 1)$ la cual denotaremos $\Lambda_{(1,1,1)}$. Consta de todos los puntos de coordenadas enteras donde todas sus coordenadas tienen la misma paridad.

La notación de $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,0)}$ y $\Lambda_{(1,1,1)}$ fue tomada de [MS02, §6D].

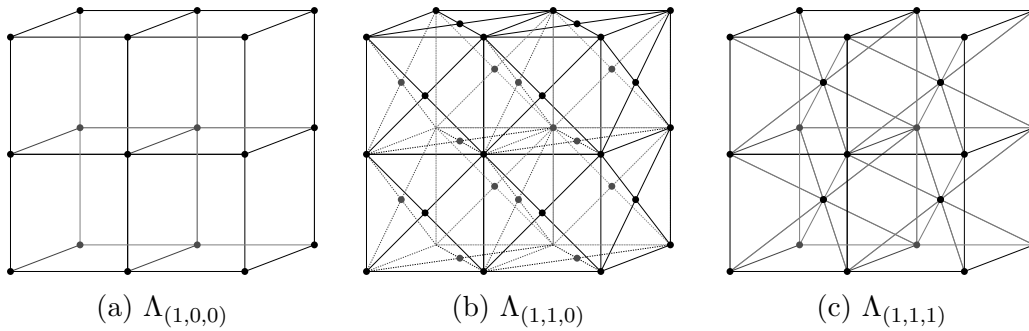


Figura 2.5

Capítulo 3

Poliedros Regulares en el 3-Toro

En este capítulo abordaremos el problema principal del trabajo: decidir para qué grupos τ generados por 3 traslaciones linealmente independientes un poliedro regular \mathcal{P} realizado en \mathbb{E}^3 tiene realización discreta en $\mathbb{T}_\tau^3 = \mathbb{E}^3/\tau$.

3.1. Poliedros Finitos

En esta sección estudiaremos las posibles realizaciones de los poliedros finitos en \mathbb{E}^3 . Como sabemos (ver §1.3), estos se dividen en 3 familias según su grupo de simetrías: la familia del tetraedro, la familia del octaedro y la familia del icosaedro.

Por lo estudiado en la Sección 1.3 el grupo de simetrías de un representante de cada familia está generado por tres reflexiones ρ_0, ρ_1, ρ_2 respecto a planos Π_0, Π_1, Π_2 respectivamente. Para determinar los grupos de traslaciones τ tales que los poliedros regulares finitos admiten realización en \mathbb{T}_τ^3 , el análisis consistirá en ver cómo deben ser las proyecciones de la retícula Λ_τ en los planos Π_0 y Π_2 para que ésta sea invariante bajo las reflexiones.

3.1.1 Observación. Gracias a que las isometrías con las que haremos el análisis son lineales podemos hacer ciertas suposiciones acerca de los ge-

neradores de la retícula. Usaremos principalmente que si una retícula $\Lambda = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ es preservada bajo un grupo G de isometrías lineales, entonces la retícula $a\Lambda := \langle a\vec{v}_1, a\vec{v}_2, a\vec{v}_3 \rangle$ también es preservada por G para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

3.1.2 Nota. A pesar de que la Observación anterior nos dice que si una retícula Λ_τ es preservada por un grupo, entonces todos sus múltiplos escalares también lo son, para los poliedros finitos impondremos la siguiente condición. Para cada poliedro \mathcal{P} daremos restricciones acerca de cuáles múltiplos escalares de las retículas nos interesan, de modo que evitemos que en el cociente \mathbb{E}^3/τ se identifiquen vértices, aristas o caras del poliedro, pues esto nos daría realizaciones de objetos combinatoriamente distintos a \mathcal{P} . Intuitivamente, buscamos que cada uno de los toros sea suficientemente grande para que quepa el poliedro.

Gracias a los resultados obtenidos en la Sección 2.2, si una retícula Λ es invariante bajo una reflexión respecto al plano Π sus puntos son de dos tipos: los que proyectan en puntos de $\Lambda \cap \Pi$ y los que se proyectan en puntos medios de éstos. Por tal motivo, es posible estudiar la retícula únicamente analizando sus proyecciones, así que introduciremos simbología para este análisis. Cuando proyectemos Λ en Π dibujaremos un punto (\bullet) para representar a los puntos que se proyectan en puntos de $\Lambda \cap \Pi$; usaremos estrella (\star) para los puntos de $\pi(\Lambda)$ que representan a puntos de Λ que no se proyectan en puntos de $\Lambda \cap \Pi$. Con esta convención los puntos (\bullet) siempre representan a un punto de $\Lambda \cap \Pi$ y los puntos (\star) nunca representan a un punto de $\Lambda \cap \Pi$ y siempre están en puntos medios de segmentos entre puntos (\bullet). Los ejemplos en las figuras 3.1a, 3.1b, 3.1c y 3.1d ejemplifican esta simbología.

Usaremos la notación de la Sección 2.2 para los generadores del grupo τ , es decir $\Lambda = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ con $\Lambda \cap \Pi = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ y $\vec{\omega} \in \Lambda$ es ortogonal a Π y de norma mínima en $\Pi^\perp \cap \Lambda$. Denotaremos por $\pi_0, \pi_1, \text{ y } \pi_2$ a las proyecciones a los planos $\Pi_0, \Pi_1, \text{ y } \Pi_2$ respectivamente.

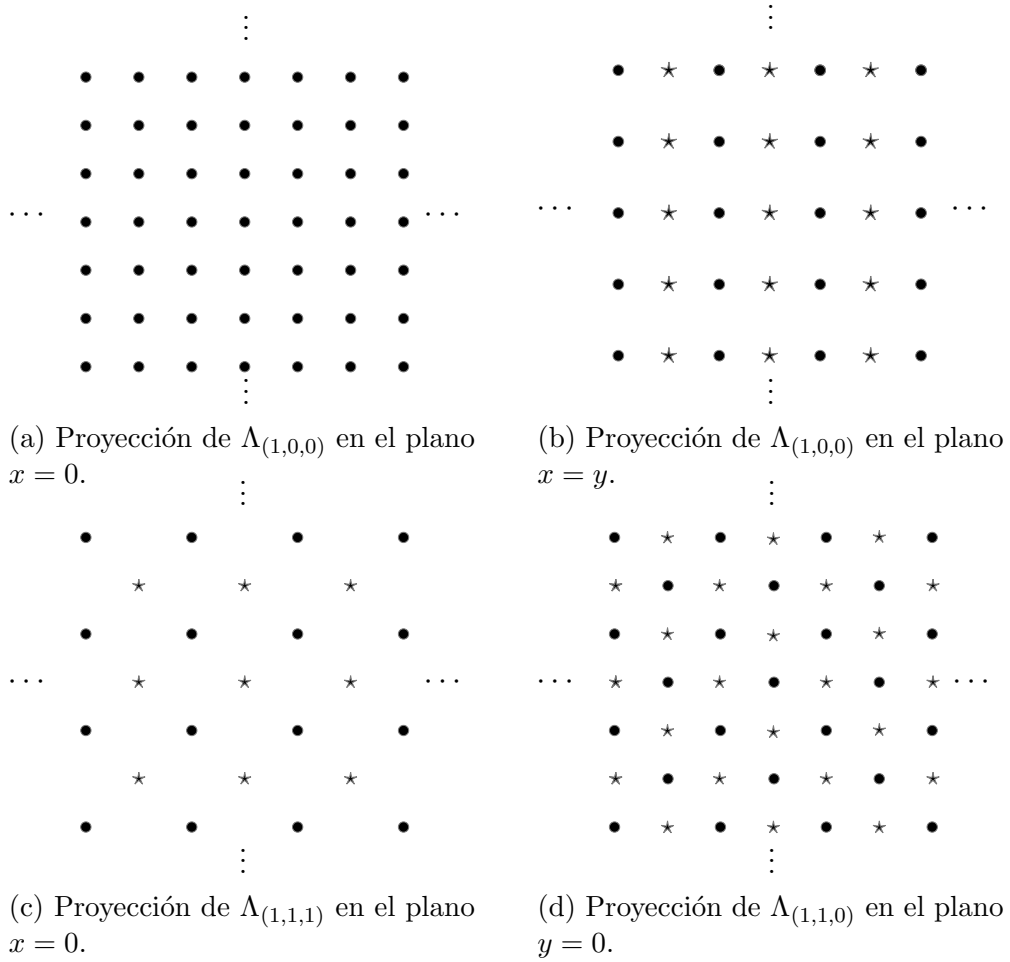


Figura 3.1

Familia del tetraedro

Para esta sección consideraremos al tetraedro \mathcal{T} cuyos vértices son

$$\{(1, 1, 1), (-1, -1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1)\}$$

y su grupo de simetrías es $\Gamma(\mathcal{T})$ descrito en la Sección 1.3. Así ρ_0 es la reflexión con respecto al plano $\Pi_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x + y = 0\}$, ρ_1 es la reflexión con respecto al plano $\Pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x - z = 0\}$ y ρ_2 es la reflexión con respecto al plano $\Pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x - y = 0\}$ (Fig. 1.14).

En términos de matrices con respecto a la base canónica $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$:

$$[\rho_0]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$[\rho_1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$[\rho_2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Una vez que hemos descrito el tetraedro con el que trabajaremos procedamos a hacer el análisis de las retículas que quedan invariantes bajo $\Gamma(\mathcal{T})$.

3.1.3 Lema. Sean ρ_0 , ρ_1 y ρ_2 las reflexiones generadoras de $\Gamma(\mathcal{T})$ descritas arriba, y $S = \rho_2\rho_1$ una rotación del tetraedro \mathcal{T} . Si v_2 es un vector ortogonal al plano Π_2 , el plano de reflexión de ρ_2 , entonces los puntos $0, v_2, S(v_2)$ y $S^2(v_2)$ forman los vértices de un tetraedro regular \mathcal{T}' .

Demostración. Es claro que $e(0, v_2) = e(0, S(v_2)) = e(0, S^2(v_2))$ así que basta probar que $e(0, v_2) = e(v, S(v_2))$, el resto se sigue de que S es isometría.

Observemos que \vec{v}_2 es paralelo a la arista a entre los puntos $(1, -1, -1)$ y $(-1, 1, -1)$, pues ambos son ortogonales a Π_2 . Esto implica que $S(\vec{v}_2)$ es

paralelo a la arista $S(a) = \{(-1, -1, 1), (-1, 1, -1)\}$. Tenemos entonces que el ángulo entre \vec{v}_2 y $S(\vec{v}_2)$ es $\frac{\pi}{3}$, de modo que los puntos $0, v_2$ y $S(v_2)$ forman un triángulo isóceles con un ángulo de $\frac{\pi}{3}$, y por lo tanto dicho triángulo es equilátero. De aquí se sigue que $e(0, v_2) = e(v_2, S(v_2))$ (Fig 3.2). ■

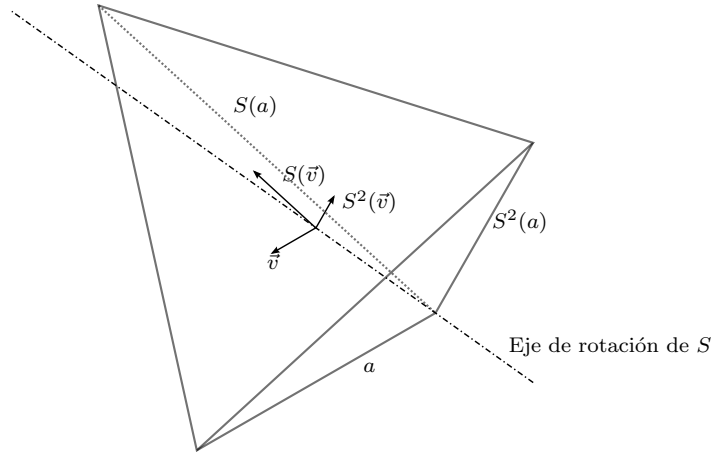


Figura 3.2

3.1.4 Observación. El lema anterior es válido también si consideramos $S = \rho_2\rho_1$ y el plano Π_0 , o bien $S = \rho_2\rho_1\rho_0\rho_2$ y el plano Π_1 , así como respectivos vectores ortogonales.

3.1.5 Lema. Sean ρ_0, ρ_1 y ρ_2 las reflexiones generadoras de $\Gamma(\mathcal{T})$ descritas arriba, Π_i el plano de reflexión de ρ_i y π_i la proyección al plano Π_i para $i \in \{0, 1, 2\}$. Si Λ es una retícula que queda invariante bajo $\Gamma(\mathcal{T})$ entonces $\pi_i(\Lambda) \neq \Pi_i \cap \Lambda$ para $i \in \{0, 1, 2\}$.

Demostración. Probemos el resultado para $i = 2$, los otros casos son análogos. Supongamos que $\pi_2(\Lambda) = \Pi_2 \cap \Lambda$. Por la Proposición 2.2.6 podemos tomar vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \Pi_2$ y $\vec{v}_3 \in \Pi_2^\perp$ de tal forma que $\Lambda = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ y la distancia de v_3 a Π_2 es mínima.

Ya que Λ se preserva bajo $\Gamma(\mathcal{T})$ tenemos en particular que $p = \rho_1\rho_0(\vec{v}_3) \in \Lambda$ sin embargo p es un punto entre los planos Π_2 y $\Pi_2 + \vec{v}_3$ (por el Lema 3.1.3) lo cual contradice la minimalidad de la distancia de v_3 a Π_2 .

Para los casos $i = 0$ e $i = 1$ basta considerar las rotaciones $\rho_2\rho_1$ y $\rho_2\rho_1\rho_0\rho_2$ respectivamente. ■

El Lema 3.1.5 nos dice que en las proyecciones de Λ en los planos Π_0 y Π_2 deben de aparecer puntos (\star) y sabemos que éstos deben ser puntos medios de segmentos entre puntos (\bullet). Además, como Λ es invariante bajo $\Gamma(\mathcal{T})$ las proyecciones en ambos planos deben ser esencialmente iguales pues la reflexión rotatoria $\rho_1\rho_2\rho_1\rho_0\rho_1$ intercambia los planos Π_0 y Π_2 . Bajo estas condiciones hay que analizar las distintas situaciones, considerando primero la distribución de los puntos (\bullet), y fijos éstos, determinando las posibilidades para los puntos (\star):

- *Situación 1:* La retícula $\Lambda \cap \Pi_0$ es de traslación paralela con respecto a la recta $\Pi_0 \cap \Pi_2$. Las posibilidades para los puntos (\star) son las de las figuras 3.3a, 3.3b y 3.3c. Sin embargo, la figura 3.3c queda descartada por el lema 3.1.5, pues $\pi_2(\Lambda)$ consistiría sólo de puntos (\bullet).
- *Situación 2:* La retícula $\Lambda \cap \Pi_0$ no es de traslación paralela respecto a la recta $\Pi_0 \cap \Pi_2$. Notemos que ya que Λ se queda invariante bajo ρ_2 entonces la reflexión por la recta $\Pi_0 \cap \Pi_2$ debe ser una simetría de $\pi_0(\Lambda)$ que respeta además el tipo de punto (\bullet ó \star). Es fácil ver que bajo estas condiciones la única posibilidad es la de la Figura 3.3d.

Así que los tres casos posibles son:

Caso 1: La retícula se ve como en la figura 3.3a.

Caso 2: La retícula se ve como en la figura 3.3b.

Caso 3: La retícula se ve como en la figura 3.3d.

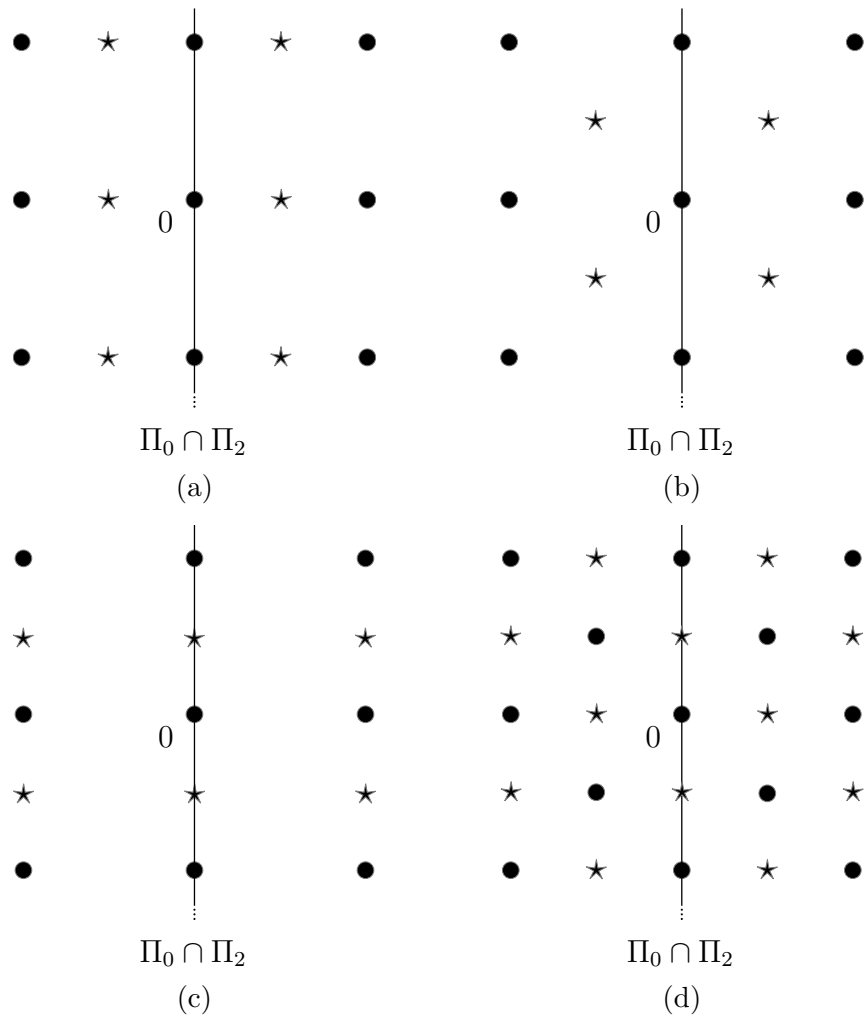


Figura 3.3

Dado que las retículas deben ser invariantes bajo la reflexión respecto a Π_0 , por el Lema 2.2.5, Λ puede ser partido en niveles $\Lambda = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_k$ de tal forma que Λ_k es un trasladado de $\Pi_0 \cap \Lambda$. Nuestro análisis consistirá en encontrar dos vectores linealmente independientes $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \Pi_0$ y un vector $\vec{v}_3 \in \Lambda_1$, pues por los resultados de la sección anterior $\Lambda = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$.

Caso 1. Comenzaremos el análisis para cuando la retícula se ve como en la Figura 3.3a. En esta situación podemos tomar \vec{v}_1 ortogonal a Π_2 y \vec{v}_2 en $\Pi_0 \cap \Pi_2$ (Fig. 3.4). Gracias a la Observación 3.1.1 podemos suponer que $\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$, además $\vec{v}_2 = (0, 0, a)$ para alguna $a > 0$.

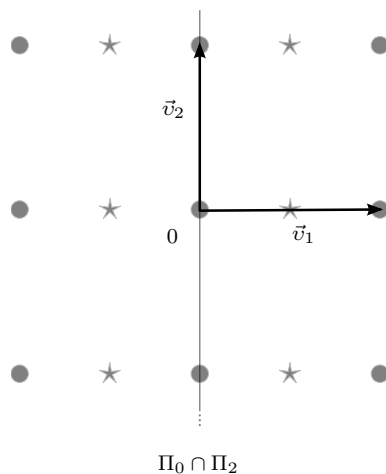


Figura 3.4

Sea \vec{v}_3 el punto de Λ_1 que se proyecta en el punto de Π_0 con coordenadas $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ marcado con (\star) . Ya que la reflexión rotatoria $\rho_1 \rho_2 \rho_1 \rho_0 \rho_1$ con eje $\Pi_0 \cap \Pi_1$ centrada en $(0, 0, 0)$ intercambia los planos dejando la retícula invariante, $\pi_2(\vec{v}_3)$ debe estar marcado con (\star) en Π_2 , y ya que se eligió en Λ_1 , $\pi_2(\vec{v}_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, pues es el punto medio entre 0 y $(1, 1, 0) = \rho_1 \rho_2 \rho_1 \rho_0 \rho_1((1, -1, 0))$. Tenemos entonces que $\vec{v}_3 = \pi_0(\vec{v}_3) + \pi_2(\vec{v}_3) = (1, 0, 0)$, y además, v_3 es un punto de la retícula en el eje x de distancia mínima positiva al origen.

Observemos que la rotación $\rho_2 \rho_1$ manda el rayo $x > 0$ en el rayo $z > 0$, así que debe de mandar \vec{v}_3 en \vec{v}_2 pues \vec{v}_2 es el punto de la retícula en el rayo

$z > 0$ más cercano al origen. Tenemos entonces que $\vec{v}_2 = (0, 0, 1)$.

Concluimos que la retícula Λ debe ser la generada por $(1, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$ y $(1, 0, 0)$. Observemos que $\vec{v}_1 = (1, -1, 0) = (1, 0, 0) - (0, 1, 0)$ así que $(0, 1, 0) = \vec{v}_3 - \vec{v}_1$ por lo tanto

$$\Lambda = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle,$$

es decir, $\Lambda = \Lambda_{(1,0,0)}$.

Caso 2. Asumamos ahora que la retícula $\Pi_0 \cap \Lambda$ se ve como en la Figura 3.3b. Tomemos de nuevo los vectores \vec{v}_1 ortogonal a Π_2 y \vec{v}_2 en $\Pi_0 \cap \Pi_2$. Gracias a la Observación 3.1.1 podemos suponer que $\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$ y como $\Pi_0 \cap \Pi_2$ es el eje z tenemos que $\vec{v}_2 = (0, 0, a)$ con $a > 0$ (Fig. 3.5).

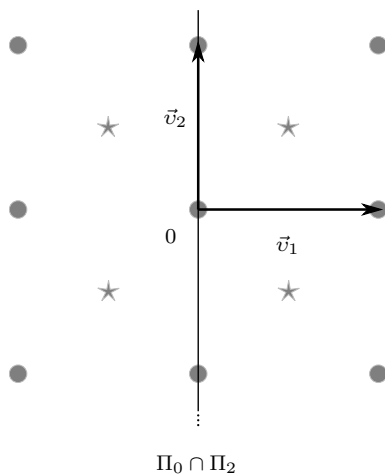


Figura 3.5

Consideremos de nuevo la reflexión rotatoria $\rho_1\rho_2\rho_1\rho_0\rho_1$ de eje $\Pi_0 \cap \Pi_2$. Ésta intercambia los planos Π_0 y Π_2 , y entonces $\rho_1\rho_2\rho_1\rho_0\rho_1(\vec{v}_1) = (1, 1, 0) \in \Lambda$, y por lo tanto $\vec{v}_1 + \rho_1\rho_2\rho_1\rho_0\rho_1(\vec{v}_1) = (2, 0, 0) \in \Lambda$. Observemos que este es el punto de Λ en el rayo $x > 0$ más cercano al origen, pues de lo contrario, habría un punto (\bullet) o (\star) de $\pi_0(\Lambda)$ entre 0 y v_1 . De manera análoga al caso anterior, la rotación $\rho_2\rho_1$ debe mandar a $(2, 0, 0)$ en \vec{v}_2 por lo tanto $\vec{v}_2 = (0, 0, 2)$.

Gracias al Lema 3.1.3, $\rho_1\rho_0(\vec{v}_1) \in \Lambda_1$, de modo que podemos elegir $\vec{v}_3 = \rho_1\rho_0(\vec{v}_1) = (0, -1, 1)$ y tenemos que

$$\Lambda = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = \langle (1, -1, 0), (0, 0, 2), (0, -1, 1) \rangle.$$

Es fácil ver que los vectores

$$\vec{v}'_1 = (1, 1, 0) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - 2\vec{v}_3,$$

$$\vec{v}'_2 = (1, 0, 1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \text{ y}$$

$$\vec{v}'_3 = (0, 1, 1) = \vec{v}_2 - \vec{v}_3$$

son generadores de Λ y por lo tanto $\Lambda = \Lambda_{(1,1,0)}$.

Caso 3. Supongamos ahora que la retícula $\Lambda \cap \Pi_0$ no es de traslación paralela respecto a la recta $\Pi_0 \cap \Pi_2$. Podemos tomar $\vec{v}_1 \in \Pi_0$ ortogonal a $\Pi_0 \cap \Pi_2$ y $\vec{u} \in \Pi_0 \cap \Pi_2$ de modo que $\Lambda \cap \Pi_0 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ con $\vec{v}_2 = \frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}$ (Fig. 3.6). Gracias a la Observación 3.1.1 podemos suponer que $\vec{v}_1 = (2, -2, 0)$, además $\vec{u} = (0, 0, a)$ con $a > 0$.

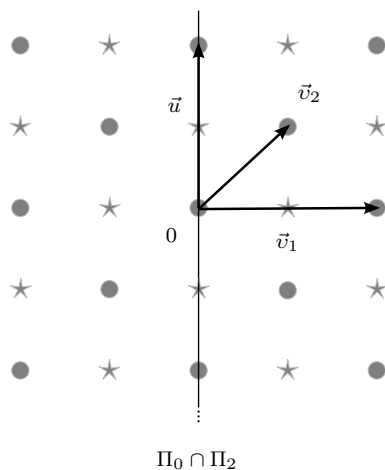


Figura 3.6

De manera análoga al Caso 1, si sumamos el punto $(1, -1, 0) \in \pi_0(\Lambda)$ con su imagen $(1, 1, 0)$ bajo la reflexión rotatoria $\rho_1\rho_2\rho_1\rho_0\rho_1$, tenemos que el

punto $(2, 0, 0)$ es el punto de Λ en el rayo $x > 0$ más cercano al origen, y usando la rotación $\rho_2\rho_1$ concluimos que $a = 2$ y $\vec{u} = (0, 0, 2)$. Esto implica que $\vec{v}_2 = (1, -1, 1)$.

Observemos además que el punto $\vec{v}_3 = (2, 0, 0)$ pertenece a Λ_1 y puede ser elegido como tercer generador, de modo que

$$\Lambda = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = \langle (2, -2, 0), (1, -1, 1), (2, 0, 0) \rangle.$$

Podemos tomar como generadores a $\vec{v}'_1 = (0, 2, 0) = \vec{v}_3 - \vec{v}_1$, $\vec{v}'_2 = (1, 1, 1) = \vec{v}_3 + \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ y $\vec{v}_3 = (2, 0, 0)$ y entonces es claro que $\Lambda = \Lambda_{(1,1,1)}$.

Gracias al análisis hecho hemos reducido las retículas que se preservan bajo $\Gamma(\mathcal{T})$ a unos pocos casos. El siguiente teorema clasifica de manera completa las retículas que se preservan bajo $\Gamma(\mathcal{T})$.

3.1.6 Teorema. *Sea τ un grupo generado por tres traslaciones linealmente independientes. El tetraedro regular \mathcal{T} admite realización en \mathbb{T}_τ^3 si y sólo si*

$$\Lambda_\tau \in \left\{ a\Lambda_{(1,0,0)}, b\Lambda_{(1,1,0)}, c\Lambda_{(1,1,1)} : a > 2, b > 2, c > \frac{2}{\sqrt{3}} \right\}.$$

Demostración. Por la Observación 3.1.1, basta probar que $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,0)}$ y $\Lambda_{(1,1,1)}$ sí son invariantes bajo $\Gamma(\mathcal{T})$.

Es claro que $\Lambda_{(1,0,0)}$ es invariante bajo ρ_0 , ρ_1 y ρ_2 pues las matrices $[\rho_0]_{\mathcal{E}}$, $[\rho_1]_{\mathcal{E}}$ y $[\rho_2]_{\mathcal{E}}$ tienen entradas enteras.

Las matrices $[\rho_1]_{\mathcal{E}}$ y $[\rho_2]_{\mathcal{E}}$ son matrices de permutación, de modo que la suma de coordenadas de todo vector $v \in \mathbb{E}^3$ es igual a la suma de coordenadas de $\rho_i(v)$ para $i \in \{1, 2\}$. La matriz $[\rho_0]_{\mathcal{E}}$ cambia de signo y permuta la primera y la segunda coordenada de un vector, lo que preserva la paridad de la suma de sus coordenadas. Tenemos entonces que $\Lambda_{(1,1,0)}$ es invariante bajo $\Gamma(\mathcal{T})$.

Con la descripción anterior es claro que $[\rho_0]_{\mathcal{E}}$, $[\rho_1]_{\mathcal{E}}$ y $[\rho_2]_{\mathcal{E}}$ preservan al conjunto de vectores de \mathbb{Z}^3 cuyas coordenadas tienen la misma paridad, así que $\Lambda_{(1,1,1)}$ queda invariante bajo $\Gamma(\mathcal{T})$.

El hecho de que $a > 2$, $b > 2$ y $c > \frac{2}{\sqrt{3}}$ viene de las restricciones combinatorias descritas en la Nota 3.1.2. Pues si $a = 2$ o $b = 2$ entonces todos

los vértices serían uno sólo en \mathbb{T}_τ^3 , para el grupo τ correspondiente; si $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$ cada vértice sería identificado con el centro de la cara opuesta. ■

El teorema 3.1.6 se extiende de manera natura a la familia del tetraedro, pues el grupo de simetrías coincide para todos los poliedros de dicha familia.

3.1.7 Corolario. *Sea τ un grupo de generado por tres traslaciones linealmente independientes. El poliedro $\{4, 3\}_3$ admite realización en \mathbb{T}_τ^3 si y sólo si*

$$\Lambda_\tau \in \{a\Lambda_{(1,0,0)}, b\Lambda_{(1,1,0)}, c\Lambda_{(1,1,1)} : a > 2, b > 2, c > \frac{2}{\sqrt{3}}\}.$$

Familia del octaedro

Como representante de esta familia consideraremos el octaedro \mathcal{O} de vértices $\{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)\}$ y su grupo de simetrías $\Gamma(\mathcal{O})$ descrito en la sección 1.3. Tenemos entonces que ρ_0 es la reflexión con respecto al plano $\Pi_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x - z = 0\}$, ρ_1 es la reflexión respecto al plano $\Pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x - y = 0\}$ y ρ_2 es la reflexión respecto al plano $\Pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : y = 0\}$ (Fig 1.19).

Cuyas matrices con respecto a la base canónica \mathcal{C} son:

$$[\rho_0]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$[\rho_1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$[\rho_2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

La siguiente proposición nos da una relación entre los grupos $\Gamma(\mathcal{T})$ y $\Gamma(\mathcal{O})$ que simplificará el trabajo.

3.1.8 Proposición. Sean \mathcal{T} el tetraedro y \mathcal{O} el octaedro descritos anteriormente, entonces $\Gamma(\mathcal{T}) \leq \Gamma(\mathcal{O})$.

Demostración. Sean σ_0 , σ_1 y σ_2 los generadores de $\Gamma(\mathcal{T})$ de (3.1), (3.2) y (3.3) respectivamente; sean ρ_0 , ρ_1 y ρ_2 los generadores de $\Gamma(\mathcal{O})$ de (3.4), (3.5) y (3.6). Tenemos que $\sigma_1 = \rho_0$ y $\sigma_2 = \rho_1$, así que basta observar que $\sigma_0 = \rho_1\rho_2\rho_1\rho_2\rho_1$. ■

Notemos que, gracias a la Proposición 3.1.8, toda retícula que sea preservada por $\Gamma(\mathcal{O})$ va a ser preservada por $\Gamma(\mathcal{T})$ así que resta verificar si las retículas $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,0)}$ y $\Lambda_{(1,1,1)}$ son preservadas por $\Gamma(\mathcal{O})$.

3.1.9 Teorema. Sea τ un grupo de generado por tres traslaciones linealmente independientes. El octaedro regular admite realización en \mathbb{T}_τ^3 si y sólo si

$$\Lambda_\tau \in \{a\Lambda_{(1,0,0)}, b\Lambda_{(1,1,0)}, c\Lambda_{(1,1,1)} : a > 2, b > 1c > 1\}.$$

Demostración. Por la Observación 3.1.1, basta probar que las retículas $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,0)}$ y $\Lambda_{(1,1,1)}$ quedan invariantes bajo $\Gamma(\mathcal{O})$.

Es claro que $\Lambda_{(1,0,0)}$ es invariante bajo ρ_0 , ρ_1 y ρ_2 pues $[\rho_0]_{\mathcal{E}}$, $[\rho_1]_{\mathcal{E}}$ y $[\rho_2]_{\mathcal{E}}$ tienen entradas enteras.

Notemos que ρ_1 y ρ_2 son simetrías del tetraedro \mathcal{T} , así que preservan a $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,0)}$ y $\Lambda_{(1,1,1)}$. La matriz $[\rho_0]_{\mathcal{E}}$ es una matriz de permutación, de modo que la suma de coordenadas de todo vector $v \in \mathbb{E}^3$ es igual a la suma de coordenadas de $\rho_0(v)$, de modo que ρ_0 preserva a $\Lambda_{(1,1,0)}$. Es claro que ρ_0 preserva a $\Lambda_{(1,0,0)}$ y $\Lambda_{(1,1,1)}$. Por lo tanto, las tres retículas se preservan bajo $\Gamma(\mathcal{O})$.

De manera similar al teorema 3.1.6, el hecho de que $a > 2$, $b > 1$ y $c > 1$ viene de las restricciones combinatorias descritas en la Nota 3.1.2. ■

3.1.10 Corolario. Sea τ un grupo de generado por tres traslaciones linealmente independientes. El cubo \mathcal{C} admite realización en \mathbb{T}_τ^3 si y sólo si

$$\Lambda_\tau \in \{a\Lambda_{(1,0,0)}, b\Lambda_{(1,1,0)}, c\Lambda_{(1,1,1)} : a > 2, b > 2, c > 2\}.$$

Demostración. Se sigue del hecho de que $\Gamma(\mathcal{C}) = \Gamma(\mathcal{O})$. El ajuste de los parámetros a , b y c se debe a las coordenadas de los vértices de \mathcal{C} . ■

Se pueden obtener resultados similares al corolario 3.1.10 para cada uno de los poliedros de la Familia del Octaedro, sin embargo, de la misma manera a cómo se hizo para el cubo, los parámetros a , b , c deben ser ajustados para cada uno de los poliedros de acuerdo a las coordenadas de sus vértices.

Familia del icosaedro

El siguiente resultado sirve para determinar por completo las retículas que se quedan invariantes bajo el grupo de simetrías del icosaedro $\Gamma(\mathcal{I})$. Una prueba de éste se puede encontrar en [Yal88, Teo. 4.22].

3.1.11 Teorema. *Sea τ un grupo generado por 3 traslaciones linealmente independientes. Si G es un grupo de isometrías de \mathbb{E}^3 que deja invariante a Λ_τ , entonces G no tiene rotaciones de orden distinto a 2, 3, 4 o 6.*

Ahora estamos listos para determinar las realizaciones de la familia del icosaedro en \mathbb{T}^3 .

3.1.12 Teorema. *Si \mathcal{P} es un poliedro de la familia del icosaedro, entonces no existe τ , un grupo generado por 3 traslaciones linealmente independientes, de tal forma que \mathcal{P} tenga realización en \mathbb{T}_τ^3 .*

Demostración. Sea τ un grupo generado por 3 traslaciones linealmente independientes. Sin pérdida de generalidad \mathcal{P} es el icosaedro descrito en la Sección 1.3, $\Gamma(\mathcal{P}) = \Gamma(\mathcal{I}) = \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2 \rangle$. Entonces $\rho_1 \rho_2$ es una rotación de orden 5 y por el Teorema 3.1.11 $\Gamma(\mathcal{I})$ no deja invariante a Λ_τ , así que \mathcal{P} no tiene realización en \mathbb{T}_τ^3 . ■

3.2. Poliedros de Petrie-Coxeter

En esta sección trabajaremos con los poliedros de Petrie-Coxeter descritos en la Sección 1.3. Usaremos los resultados obtenidos en la sección anterior para determinar las retículas invariantes bajo sus grupos de simetrías.

Los resultados de esta sección se basan en dos ideas principales:

- Relaciones entre los grupos de simetrías de los poliedros de Petrie-Coxeter y los grupos de simetría de los poliedros finitos.
- En general, las simetrías de los poliedros de esta familia no son lineales, pero gracias al Corolario 2.1.7, bastará probar que la parte lineal de ellas preserva a las retículas.

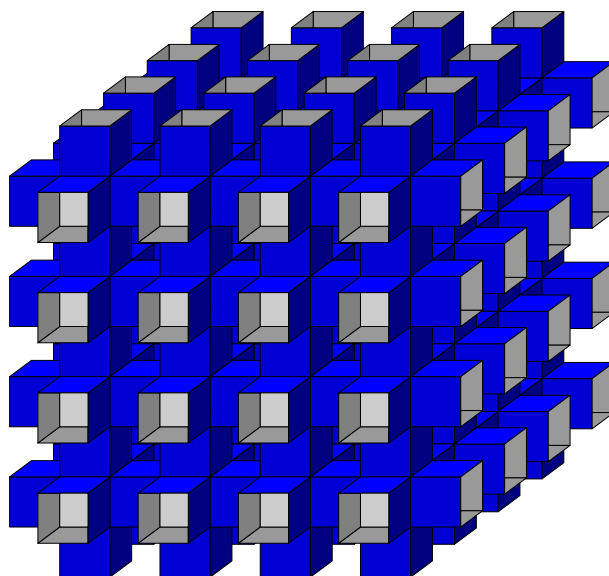
3.2.1 Nota. Dado que estos poliedros son infinitos y que \mathbb{T}_τ^3 es compacto para todo grupo τ , es imposible evitar que en el cociente se identifiquen vértices, aristas o caras, sin crear puntos de acumulación en los vértices. Por esta razón, consideraremos únicamente aquellos grupos τ que satisfagan que $\tau \leq T$ donde T es el subgrupo de traslaciones del grupo de simetrías del poliedro. De esta forma, los vértices, aristas y caras serán identificados preservando, al menos de manera local, la combinatoria.

Los Poliedros $\{4, 6|4\}$ y $\{6, 4|4\}$

Como representante de esta familia consideraremos el poliedro \mathcal{PC}_1 descrito en la Sección 1.3 (Fig. 3.7).

El grupo $\Gamma(\mathcal{PC}_1)$ es generado por ρ_0 la reflexión con respecto al plano $\Pi_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : y = 0\}$, ρ_1 el medio giro respecto a la recta Π_1 , determinada por los puntos $(1, 1, 1)$ y $(-3, -1, 1)$, y ρ_2 la reflexión con respecto al plano $\Pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x - z = 0\}$.

Calculando las matrices de ρ'_0 , ρ'_1 y ρ'_2 con respecto a la base canónica \mathcal{C} tenemos:

Figura 3.7: \mathcal{PC}_1

$$\begin{aligned}
 [\rho'_0]_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 [\rho'_1]_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 [\rho'_2]_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3.2.2 Proposición. Sean \mathcal{O} octaedro regular y \mathcal{PC}_1 el poliedro de Petrie-Coxeter descritos en la sección 1.3, entonces $\Gamma(\mathcal{O}) \leq \Gamma(\mathcal{PC}_1)$.

Demostración. Sean $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ los generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{O})$ y ρ_0, ρ_1, ρ_2 los generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{PC}_1)$. Tenemos que $\sigma_0 = \rho_2$ y $\sigma_2 = \rho_0$, así que basta observar que $\sigma_1 = \rho_2 \rho_1 \rho_2 \rho_1 \rho_2$ y por lo tanto $\Gamma(\mathcal{O}) \leq \Gamma(\mathcal{PC}_1)$. ■

La Proposición anterior nos da una restricción para las retículas preservadas por $\Gamma(\mathcal{PC}_1)$, pues todas ellas deben ser preservadas por $\Gamma(\mathcal{O})$, el siguiente Teorema nos da la clasificación completa de éstas.

3.2.3 Teorema. *Sea τ un grupo de generado por tres traslaciones linealmente independientes. El poliedro \mathcal{PC}_1 y admite realización en \mathbb{T}_τ^3 si y sólo si*

$$\Lambda_\tau \in \{4a\Lambda_{(1,0,0)}, 4b\Lambda_{(1,1,0)}, 2c\Lambda_{(1,1,1)} : a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

Demostración. Gracias a la Proposición 3.2.2 y a la Observación 3.1.1 basta ver que las retículas $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,0)}$ y $\Lambda_{(1,1,1)}$ se preservan bajo ρ'_0 , ρ'_1 y ρ'_2 .

Por el análisis hecho en la prueba del Teorema 3.1.9 tenemos que ρ'_0 y ρ'_2 preservan a las retículas $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,0)}$ y $\Lambda_{(1,1,1)}$. Observemos que $-\rho'_1|_{\mathcal{E}}$ es una matriz de permutación, por lo tanto preserva coordenadas enteras, paridad de las coordenadas de un vector y paridad de la suma de coordenadas, así que preserva a las tres retículas. La matriz $-Id$ preserva cualquier retícula, por lo tanto $[\rho'_1]_{\mathcal{E}}$ preserva a $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,0)}$ y $\Lambda_{(1,1,1)}$.

El hecho de considerar únicamente múltiplos de 4 para $\Lambda_{(1,0,0)}$ y $\Lambda_{(1,1,0)}$ y múltiplos de 2 para $\Lambda_{(1,1,1)}$ viene del requerimiento de que τ sea subgrupo del grupo de traslaciones de $\Gamma(\mathcal{PC}_1)$. ■

3.2.4 Corolario. *Si \mathcal{P} es un poliedro de la familia de $\{4, 6|4\}$ entonces \mathcal{P} admite realización en \mathbb{T}_τ^3 si y sólo si*

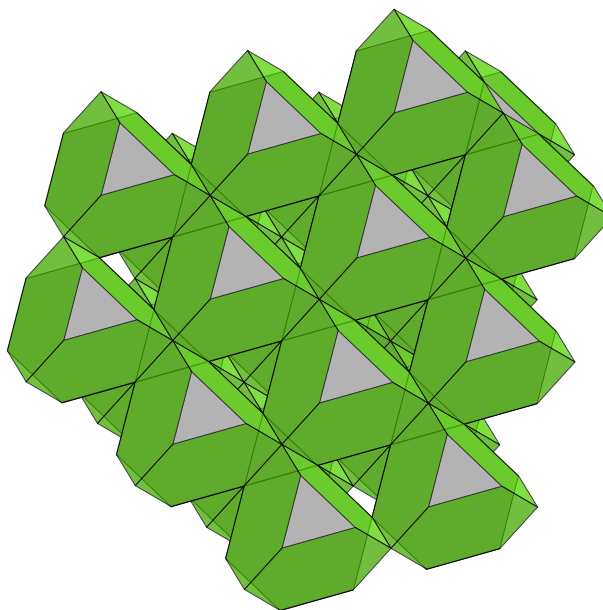
$$\Lambda_\tau \in \{4a\Lambda_{(1,0,0)}, 4b\Lambda_{(1,1,0)}, 2c\Lambda_{(1,1,1)} : a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

El poliedro $\{6, 6|3\}$

Consideraremos el poliedro \mathcal{PC}_3 descrito en la sección 1.3 (Fig. 3.8).

Así, $\Gamma(\mathcal{PC}_3)$ es el grupo generado por ρ_0 , la reflexión con respecto al plano $\Pi_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x + y = 0\}$, ρ_1 el medio giro respecto a la recta $\Pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x = 1, z + y = 2\}$ y ρ_2 la reflexión con respecto al plano $\Pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x - y = 0\}$.

Calculando las matrices de ρ'_0 , ρ'_1 y ρ'_2 con respecto a la base canónica \mathcal{C} tenemos:

Figura 3.8: \mathcal{PC}_3

$$\begin{aligned}
 [\rho'_0]_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 [\rho'_1]_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 [\rho'_2]_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3.2.5 Proposición. Sean $\Gamma(\mathcal{T})$ el grupo de simetrías del tetraedro y $\Gamma(\mathcal{PC}_3)$ y el grupo de simetrías de \mathcal{PC}_3 , entonces $\Gamma(\mathcal{T}) \leq \Gamma(\mathcal{PC}_1)$.

Demostración. Sean $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ los generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{T})$ y ρ_0, ρ_1, ρ_2 los generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{PC}_3)$. Tenemos que $\sigma_0 = \rho_0$ y $\sigma_2 = \rho_2$,

así que basta observar que $\sigma_1 = \rho_2\rho_1\rho_2\rho_1\rho_2$ y por lo tanto $\Gamma(\mathcal{T}) \leq \Gamma(\mathcal{PC}_3)$. ■

De manera análoga al Poliedro \mathcal{PC}_1 , el hecho de que $\Gamma(\mathcal{T}) \leq \Gamma(\mathcal{PC}_3)$ limita las posibilidades para los grupos τ . Con el siguiente teorema terminamos la clasificación de tales grupos para \mathcal{PC}_3 .

3.2.6 Teorema. *Sea τ un grupo de generado por tres traslaciones linealmente independientes. El poliedro \mathcal{PC}_3 admite realización en \mathbb{T}_τ^3 si y sólo si*

$$\Lambda_\tau \in \{8a\Lambda_{(1,0,0)}, 4b\Lambda_{(1,1,0)}, 8c\Lambda_{(1,1,1)} : a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

Demostración. Gracias a la Proposición 3.2.2 y a la Observación 3.1.1 basta ver que las retículas $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,0)}$ y $\Lambda_{(1,1,1)}$ se preservan bajo ρ'_0 , ρ'_1 y ρ'_2 .

El hecho de considerar únicamente múltiplos de 8 para $\Lambda_{(1,0,0)}$, de 4 para $\Lambda_{(1,1,0)}$ y de 8 para $\Lambda_{(1,1,1)}$ viene del requerimiento de que τ sea subgrupo del grupo de traslaciones de $\Gamma(\mathcal{PC}_3)$. ■

3.2.7 Corolario. *El poliedro $\{6, 6|3\}^\pi$, petrial de $\{6, 6|3\}$, admite realización en \mathbb{T}_τ^3 si y sólo si*

$$\Lambda_\tau \in \{8a\Lambda_{(1,0,0)}, 4b\Lambda_{(1,1,0)}, 8c\Lambda_{(1,1,1)} : a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

Conclusiones

En este trabajo abordamos el problema de determinar aquellos grupos τ generados por tres traslaciones linealmente independientes para los cuales, un poliedro realizado en \mathbb{E}^3 , admite realización en \mathbb{T}_τ^3 . Estudiamos las retículas Λ_τ asociadas a los grupos τ , las cuales nos permitieron, por medio de análisis geométrico, determinar condiciones para que los poliedros fueran realizados.

Finalmente, clasificamos los grupos τ para todos los poliedros finitos, así como para los poliedros de Petrie-Coxeter obteniendo los Teoremas 3.1.6, 3.1.9, 3.1.12, 3.2.3 y 3.2.6 que se resumen en lo siguiente:

- Un poliedro de la familia del tetraedro, de la familia del octaedro o de la familia de alguno de los poliedros de Petrie-Coxeter admite realización en \mathbb{T}_τ^3 si y sólo si Λ_τ es $a\Lambda_{(1,0,0)}$, $b\Lambda_{(1,1,0)}$ o $c\Lambda_{(1,1,1)}$ para algunos parámetros a , b y c que dependen de las coordenadas de los vértices del poliedro.
- No existe grupo τ de tal forma que un poliedro de la familia del icosaedro tenga realización en \mathbb{T}_τ^3 .

Con el trabajo que realizamos quedan clasificados los grupos τ para 24 de los 48 poliedros regulares. El problema de determinar dichos grupos para los otros 24 queda abierto. Por otro lado, el problema de clasificar todos los poliedros regulares en \mathbb{T}_τ^3 tiene aún mucho para ofrecer, pues a pesar de que nuestro trabajo resuelve parcialmente este problema, existen poliedros que pueden ser realizados en \mathbb{T}_τ^3 pero al levantar la realización a \mathbb{E}^3 la configuración resultante no es un poliedro (pues podría, por ejemplo, no ser conexa).

En cuanto a los resultados obtenidos, es de notar que puede existir una relación entre el trabajo que realizamos y el hecho por McMullen y Schulte en [MS02, §6], pues justo los grupos τ para los cuales los poliedros regulares pueden ser realizados coinciden con aquellos grupos en los que el 3-Toro asociado tiene teselaciones regulares. Cabe mencionar que aún cuando es probable que nuestro trabajo tenga conexión fuerte con el de McMullen y Schulte, las técnicas utilizadas en este trabajo incluyen aspectos combinatorios, algebraicos y geométricos, haciéndolas más ilustrativas que las de [MS02].

Apéndice: Acciones de Grupos

En este apéndice el lector encontrará los conceptos básicos de acciones de grupos, no daremos las pruebas de los resultados, pero éstas pueden ser encontradas en [Rot02, §2.7].

A.1.1 Definición. Si X es un conjunto y G un grupo con neutro 1_G una *acción* (izquierda) de G en X es una función de $G \times X$ en X , denotada por $(g, x) \mapsto gx$, que satisface

- $1_G x = x$ para todo $x \in X$,
- $h(gx) = (hg)x$ para toda $x \in X$ y $g, h \in G$.

Ejemplos

1. G actúa en sí mismo con la operación de grupo.
2. El grupo S_X de permutaciones de X actúa en X por $(\sigma, x) \mapsto \sigma(x)$.
3. El grupo simétrico S_n actúa sobre el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ permutando sus elementos.
4. El grupo de isometrías de \mathbb{E}^3 actúa en \mathbb{E}^3 por $(f, x) \mapsto f(x)$.
5. El grupo cíclico de orden 2 $\{1, -1\}$ actúa sobre \mathbb{S}^2 multiplicando, lo cual induce un intercambio entre antípodas.
6. En general, si $H \leq G$ y G actúa en X , entonces H actúa en X restringiendo la acción de G a los elementos de H .

A.1.2 Definición. Si G actúa en X y $x \in X$, definimos:

- La *órbita* de x , denotada por $[x]_G$, como el conjunto

$$[x]_G := \{gx : g \in G\}.$$

- El *estabilizador* de x , denotado por G_x como el conjunto

$$G_x := \{g \in G : gx = x\}.$$

A.1.3 Proposición. Si un grupo G actúa en un conjunto X entonces X es la unión disjunta de las órbitas.

A.1.4 Teorema. Si un grupo G actúa en un conjunto X , entonces $G_x \leq G$ y además

$$|[x]_G| = [G : G_x]$$

para cada $x \in X$

A.1.5 Proposición. Sea G un grupo actuando en un conjunto X . Para cada $g \in G$ la función $\hat{g} : X \rightarrow X$ definida por $\hat{g}(x) = gx$ es una permutación de X . Además, la asignación $g \mapsto \hat{g}$ es un homomorfismo de G en S_X .

A.1.6 Definición. Si un grupo G actúa en un conjunto X

- diremos que la acción es *transitiva*, o bien, que G actúa *transitivamente* en X , si G tiene una sola órbita.
- diremos que la acción es *fiel* si cuales quiera dos elementos de G inducen dos permutaciones distintas en S_X .
- diremos que la acción es *libre*, o bien, que G actúa *libremente* en X si $G_x = \{1_G\}$ para cada $x \in X$.

Ejemplos En cada ejemplo, el inciso hace referencia a la acción de los ejemplos anteriores.

1. En este caso, la acción es transitiva y entonces la órbita de cualquier elemento es G . La acción es también fiel y libre.

2. La acción es transitiva, es fiel, pero no es libre.
3. La acción es transitiva, es fiel, pero no es libre.
4. La acción es transitiva, es fiel y no es libre.
5. La acción no es transitiva, pues la órbita de x es $\{x, -x\}$. Es fiel y también es libre.
6. Si la acción de G es fiel o libre, la acción de H es fiel o libre, según corresponda; pero si la acción de G es transitiva puede ser que la acción de H no lo sea.

Notación

\mathbb{N}	El conjunto de los números naturales: $\{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Z}	El conjunto de los números enteros.
\mathbb{R}	El conjunto de los números reales.
\mathbb{E}^3	El espacio euclideo de dimensión 3.
\mathbb{S}^n	La esfera de dimensión n : $\{x \in \mathbb{E}^n : \ x\ = 1\}$.
$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$	El espacio proyectivo de dimensión n sobre \mathbb{R} .
$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, \dots, v_n)$	El espacio vectorial sobre \mathbb{R} generado por los vectores v_1, v_2, \dots, v_n .
$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$	El grupo generado por x_1, x_2, \dots, x_n .
$\lfloor x \rfloor$	Función piso. El mayor entero menor igual a x .
$\mathcal{P}(X)$	El conjunto potencia de X .

Índice alfabético

- $\Lambda_{(1,1,1)}$, 45
- $\Lambda_{(1,0,0)}$, 44
- $\Lambda_{(1,1,0)}$, 45
- 3-Toro, 36
 - métrica, 37
- arista, 2
- automorfismo, 4
 - grupo de, 4
- bandera, 2
 - conexidad fuerte por, 2
- cara, 2
- diamante
 - propiedad del, 2
- dual de petrie, *véase* petrial
- dualidad, 12
- figura vertical, 3
- hoyos, 14
 - operación, 13
- isomorfismo, 4
- octaedro truncado, 27
- petrial, 13
- Petrie
 - operación de, 13
 - polígono de, 13
- polígono
 - abstracto, 2
- Poliedro
 - abstracto, 2
- poliedro
 - dual, 12
 - regular, 7
- Realización, 15
 - discreta, 16
 - fiel, 16
 - simétrica, 15
- Retícula de puntos, 38
 - de traslación paralela, 44
- Schläfli, tipo de, 7
- sección, 3
- vértice, 2

Bibliografía

- [ABM00] Arocha, Jorge Luis, Javier Bracho y Luis Montejano: *Regular projective polyhedra with planar faces, I*. Aequationes Mathematicae, 59:55–73, 2000.
- [Bra00] Bracho, Javier: *Regular projective polyhedra with planar faces, II*. Aequationes Mathematicae, 59:160–176, 2000.
- [CM80] Coxeter, Harold Scott MacDonald y W.O.J. Moser: *Generators and Relations for Discrete Groups*. Springer-Verlag, 1980.
- [Cox54] Coxeter, Harold Scott MacDonald: *Regular honeycombs in hyperbolic space*. Proc. Internat. Congress Math. Amsterdam, 3:155–169, 1954.
- [Cox73] Coxeter, Harold Scott MacDonald: *Regular Polytopes*. Dover, 1973.
- [Dre81] Dress, Andreas W. M.: *A combinatorial theory of Grünbaum's new regular polyhedra, Part I: Grünbaum's new regular polyhedra and their automorphism group*. Aequationes Mathematicae, 23:252–265, 1981.
- [Dre85] Dress, Andreas W. M.: *A combinatorial theory of Grünbaum's new regular polyhedra, Part II: Complete enumeration*. Aequationes Mathematicae, 29:222–243, 1985.
- [DS82] Danzer, Ludwig y Egon Schulte: *Reguläre Inzidenzkomplexe*. Geometriae Dedicata, 13:195–308, 1982.
- [Grü77] Grünbaum, Branko: *Regular polyhedra - old and new*. Aequationes Mathematicae, 16:1–20, 1977.

-
- [KM97] Koši, Tomaž y Bojan Magajna: *Transformacije v geometriji*. Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1997.
- [McM89] McMullen, Peter: *Realizations of Regular Polytopes*. *Aequationes Mathematicae*, 37:38–56, 1989.
- [McM07] McMullen, Peter: *Four-Dimensional Regular Polyhedra*. *Discrete & Computational Geometry*, 38:355–387, 2007.
- [MS97] McMullen, Peter y Egon Schulte: *Regular Polytopes in Ordinary Space*. *Discrete & Computational Geometry*, 17:449–478, 1997.
- [MS02] McMullen, Peter y Egon Schulte: *Abstract Regular Polytopes*. Cambridge, 2002.
- [Rot02] Rotman, Joseph J.: *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall, 2002.
- [Yal88] Yale, Paul B.: *Geometry and Symmetry*. Dover, 1988.