



Universidad Michoacana
de
San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico
Matemáticas

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

Generalización de la métrica de Ruban

T E S I S

que para obtener el título de:

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

P r e s e n t a :

David Rivera Rangel

Asesor:

Dr. Joaquín Estevez Delgado

Morelia Michoacán, Febrero de 2013

Agradecimientos

Papá te pongo al tanto, hoy al fin después de tanto al fin termine la tesis y podré titularme se que de algún modo escuchas o sabes lo que aquí se escribe, podrías agradecer a Dios por todo y en especial por esta oportunidad. Siempre tuviste la razón al enamorarte de la mujer que es mi madre, este momento y etapa de mi vida es en gran medida gracias a su apoyo, esfuerzo y dedicación para que yo hoy pueda escribir estas palabras, y aunque puedo, no tengo palabras para expresar lo agradecido que estoy con ella por ser mi madre.

Te cuento también que en esta última etapa de mi vida Gaby ha estado ahí conmigo tal como lo recuerdas, también estoy muy agradecido con ella por haber caminado junto a mi esta última etapa de mi vida en la facultad y seguir caminando conmigo aún después de aguantar los malos ratos ocasionados por el estrés de redactar la tesis, pero más que eso por compartir muchas cosas increíbles caminando codo a codo. Sabes también tuviste razón en lo que me dijiste, por cierto ella también ya termino, te encargo que le ayudes a que salgan bien las cosas.

Mis amigos siempre estuvieron ahí para ayudarme y apoyarme recuerdas que te había platicado de ellos? Tero, Pelayo, Lalo, Yesenia, la gorda, el estrella, el bombón, Joaquín, Gaby, Saúl y Dulce, estos cuatro últimos que entraron en varias categorías; otros que conoces un poco más Alex y el Chuky siguen siendo y espero así sea siempre de mis mejores amigos.

Pues tus hijos que son de lo mejor papá pero ps ya lo sabás, les agradezco mucho a ti y a mi mamá por esos dos hermanos que siempre están para lo que sea, son increíbles.

Tuve algunos muy buenos profesores en la facultad como que se preocupaban por que aprendiera de todo aunque yo a veces fuera algo...creo distraído es la palabra indicada. Pero no te preocupes creo al final aprendí lo necesario.

Recuerdas muy bien a Joaquín supongo, pues también lo que ya sabes es que es mi asesor de tesis y que además de mi profesor es mi amigo y me ha enseñado además de asuntos escolares, cosas sobre la vida, a él también te encargo que le ayudes en lo que se pueda.

Así que espero en las siguientes etapas de mi vida me sigas echando un ojo y pues creo que hasta el momento no voy haciendo las cosas tan mal. Eso es algo de lo mucho que te quiero contar, me seguiré esforzando y seguiré dándolo todo en el camino.

Índice general

1. Introducción	1
2. Ecuaciones de campo	3
2.1. Ecuaciones de Einstein en n-dimensiones	3
2.2. Tensor electromagnético	4
2.3. Espacio Tiempo esfericamente simétrico	6
2.4. Invariantes de la curvatura en estos sistemás	11
3. Espacio Tiempo de Reissner-Nördstrom	13
3.1. La solución de Reissner- Nördstrom	13
3.2. Horizonte de eventos y singularidades de la curvatura	16
4. La solución de Ruban	23
4.1. Solución de las ecuaciones	23
4.2. Interpretación (Región acotada)	27
4.3. Curvatura en el origen	28
5. El acoplamiento entre las soluciones	29
5.1. Condiciones de acoplamiento	29
5.2. Acoplamiento entre las geometrías	31
5.3. polvo cargado en coordenadas curvatura y masa-curvatura . .	34
5.4. La evolución de polvo cargado en coordenadas masa-curvatura	36
5.5. Generalización	39
6. Conclusiones	45

Capítulo 1

Introducción

Hoy en día existen un sin número de teorías, de ideas, de formas distintas de pensamiento que van empujando a la ciencia cada vez más hacia adelante. Cada una de estas ideas va resolviendo preguntas, va aclarando lo que se veía oscuro en las teorías que ya se conocían y que hasta cierto punto estaban bien entendidas. Sin embargo algunas de estas nuevas ideas parecen extraordinarias o poco realistas y comenzamos a pensar que resuelven problemas matemáticos lejos de saber si en verdad están describiendo la física que hay detrás de las ecuaciones.

Para ejemplificar un poco lo que hablamos existen las teorías de dimensiones extras, de mundos brana, la teoría de cuerdas y un sin fin de ideas como estas que incluyen dentro de sus argumentos un mundo físico que está determinado por más de cuatro dimensiones. Por ejemplo la teoría de cuerdas en la que se muestra mediante el uso de la teoría electromagnética y la Relatividad general que el mundo en el espacio que habitamos es más de lo que vemos, es decir que existen más dimensiones de las que podemos ver, pero, el hecho de que no las podamos ver no significa que no existan.

Además de que puedan tener un sentido para dar coherencia a las teorías que ya existen hoy en día, esta idea tiene una peculiaridad matemática y es que podemos pensar que cada dimensión extra nos brinda grados de libertad, lo que en ocasiones es muy útil a la hora de resolver ecuaciones o simplemente al obtener simetrías que facilitan los cálculos que deseamos encontrar.

Sin embargo en esta tesis nos hacemos una pregunta que atañe a la Relatividad General y es el saber si desde el punto de vista de esta teoría la existencia de dimensiones extra no afecta en lo mínimo la manera en que sabemos que interactúa el espacio tiempo, es decir, como saber si el espacio

tiempo vacío interactúa con el espacio tiempo en el que hay materia de la misma manera en 4 dimensiones que en n dimensiones.

A lo largo del presente trabajo responderemos de alguna manera a esta cuestión y veremos si la existencia de dimensiones extra altera el comportamiento de dichas interacciones tomando un particular interés por la región de interacción para esto primeramente en el capítulo 2 explicaremos un poco las ecuaciones que nos ayudan a definir la interacción entre la geometría, la masa y los campos existentes [3], en el capítulo 3 entendemos en base a las reglas definidas en el capítulo 2 como se comporta la solución de Reissner-Nördstrom [12] y a que es debida dicha solución, entendido esto y en base a lo propuesto por Krasinski [7] de esta manera analizamos primeramente el espacio tiempo de Ruban [13] en el capítulo 4, para proceder con el acoplamiento de ambas soluciones [5] y finalmente dar una generalización de la métrica de Ruban para n -dimensiones y las implicaciones que esta puede tener en el capítulo 5.

Capítulo 2

Ecuaciones de campo

2.1. Ecuaciones de Einstein en n-dimensiones

Las ecuaciones de Einstein son las relaciones fundamentales utilizadas para describir la gravitación de manera relativista, dichas ecuaciones relacionan la materia con la geometría del espacio, esto se lo hacen a partir del tensor energía momento y un tensor métrico, de esta manera el tensor energía momento contiene información como la densidad y presión de la materia, mientras que el tensor métrico describe las propiedades del espacio tiempo, de una manera “clásica” se postularon dichas ecuaciones para una métrica 4-dimensional aunque notemos que la ecuación.

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

Conocida como la ecuación de Einstein y cuya solución admite cualquier métrica en general, sin importar la dimensión de la misma.

Sin embargo se utilizaban métricas tetradimensionales pues solo se necesitaba explicar un espacio con tres coordenadas espaciales y una temporal. El primer intento por hacer uso de métricas de mayor dimensión para dar solución a las ecuaciones de Einstein fue hecho por Theodor Kaluza [1], quien intentó incluir el campo electromagnético de manera similar a como Einstein incorporó la gravedad en la curvatura del espacio, haciendo uso de una quinta dimensión, la cual fue incluida en las ecuaciones de campo mediante una métrica 5-dimensional.

La extensión de teorías asociadas a dimensiones extras, como la teoría de cuerdas, de branas y algunas otras, mismas que son requeridas desde la perspectiva de dichas teorías implican la necesidad del desarrollo de las soluciones a las ecuaciones de Einstein en n-dimensiones. Existen una variedad

de preguntas que se han planteado en n -dimensiones. Una de estas es la existencia de soluciones similares al caso de 4-dimensiones. No es inmediato que el comportamiento de las soluciones sea identico y más aun no todas las soluciones pueden ser generalizadas y las generalizaciones no siempre son unicas. Nuestra propuesta es mostrar que la solución de Ruban admite una generalización en n -dimensiones y determinar, si hay alguna forma de distinguir alguna diferencia entre el caso en 4-dimensiones y el de n -dimensiones.

Notemos desde el punto de vista clásico que algunos conceptos no son inmediatos de generalizar. Pensemos el conocido concepto de producto cruz $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ entre dos vectores, en 3-dimensiones esta operación nos genera un vector $\vec{C}$ que es perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$, sin embargo si habláramos de dos dimensiones no existe la manera de que dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean perpendiculares a un tercer vector, mientras que si $n > 3$ existiría más de un vector perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$, este sencillo ejemplo muestra que no siempre es inmediata la generalización.

En nuestro caso es posible generalizar las ecuaciones debido a la formulación tensorial de las ecuaciones, más no necesariamente las soluciones.

2.2. Tensor electromagnético

Tomemos ahora el espacio $\mathbb{R}^4$ con las coordenadas cartesianas $(t, \vec{x})$ con relación a esto para la Física pre-relativista las ecuaciones de Maxwell tienen la forma:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi\vec{J}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

En donde las funciones vectoriales $\vec{E}$, $\vec{B}$ son funciones que dependen de $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ y $t \in \mathbb{R}$.

La teoría de Maxwell es una teoría completamente relativista y es posible por lo tanto formularla en una forma equivalente en donde las ecuaciones dinámicas sean invariantes bajo las transformaciones coordenadas de un sistema inercial del espacio tiempo del espacio tiempo de Minkowski a otro sistema de referencia inercial, esto lo logramos utilizando del grupo de transformaciones de Lorentz.

Como ya mencionamos anteriormente dentro del marco pre-relativista $\vec{E}(x, t)$ y $\vec{B}(\vec{x}, t)$ se interpretan como campos vectoriales definidos en el espacio Euclideo. Para este espacio existen sistemás de coordenadas cartesianas $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ tales que:

$$g_E = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3, -\infty < x^i < \infty, i = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

Con respecto a este sistema $\vec{E}(\vec{x}, t)$ y $B(x, t)$ admiten la representación

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = E^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + E^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + E^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \quad (2.5)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + B^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + B^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \quad (2.6)$$

Ahora para construir el tensor de electromagnético comenzamos con un sistema de referencia inercial global:

$$g_L = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3, \\ -\infty < x^i < \infty, i = 0, 1, 2, 3., x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z. \quad (2.7)$$

Desde el punto de vista de Minkowski, tal sistema resultó por la unificación del espacio Euclideo y la variable del tiempo. Recordamos que los campos vectoriales $\vec{E}$, $\vec{B}$ estan definidos sobre el campo euclideo y por lo tanto pueden ser escritos como:

$$\vec{E}(x^0, x^1, x^2, x^3) = E^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + E^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + E^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \quad (2.8)$$

$$\vec{B}(x^0, x^1, x^2, x^3) = B^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + B^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + B^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \quad (2.9)$$

Los campos que acabamos de escribir satisfacen las ecuaciones pre-relativistas (2.5) y (2.6) con $\rho(\vec{x}, t)$ y $\vec{J}(\vec{x}, t)$ dadas.

Retomando una de las ideas de Minkowski la cual consiste en tomar las 6 funciones $(E^1(x^0, \vec{x}) \dots B^3(x^0, \vec{x}))$ y reacomodarlas como las componentes de un campo tensorial (0,2) antisimétrico. Sea entonces $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$, un campo tensorial antisimico definido en $\mathbb{R}^n$ podemos expandir la suma que

corresponde a F para obtener:

$$F = F_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (2.10)$$

En donde de la estructura del lado derecho definimos una nueva operación referida como el producto cuña por medio de:

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu \quad (2.11)$$

dados los campos $(\vec{E}, \vec{B})$ como (2.8) y (2.9) según Minkowski elegimos las componentes $F_{\mu\nu}$ de F por medio de:

$$F_{01} = E_1, F_{02} = E_2, F_{03} \quad (2.12)$$

$$F_{12} = -B_3, F_{13} = B_2, F_{23} = -B_1 \quad (2.13)$$

por lo tanto el campo tensorial de Maxwell y sus componentes $F_{\mu\nu}$ tiene la forma:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta es la forma explícita del tensor electromagnético. El cual será muy útil para los fines de esta tesis pues nos permitirá además de introducir las ecuaciones de Maxwell de forma covariante introducir un concepto llamado electro-vacío el cual será discutido en el capítulo III.

2.3. Espacio Tiempo esfericamente simétrico

Un espacio-tiempo estático y esfericamente simétrico es un espacio-tiempo que describirá una geometría tal que pensada desde el punto de vista físico cuando vemos hacia cualquier parte del espacio nos es imposible diferenciar lo que vemos en una dirección que en otra, además claro esta el hecho de que sea estático nos dice que no sufre cambios con el paso del tiempo en su estructura geometrica.

Podemos definir de manera formal lo que es un espacio-tiempo esfericamente simétrico pero antes es necesario hablar de los vectores de Killing.

Definición 1 Sea (M, g) una variedad C^k -diferenciable n -dimensional con $k \geq 3$ y ξ un campo vectorial se dice que es un vector de Killing si satisface las siguientes propiedades:

$$\mathcal{L}_\xi g = 0 \quad (2.14)$$

donde $\mathcal{L}$ es la derivada de Lie de la métrica.

Esta ecuación implica que:

$$\mathcal{L}_\xi g = \nabla_\alpha \xi_\beta - \nabla_\beta \xi_\alpha = 0, \quad (2.15)$$

En otras palabras un vector de Killing es, un vector tal que deja invariante la métrica al movernos sobre él.

Además debemos ar una ecuación más la cual nos ayudará a definir si el vector de Killing es perpendicular a la hipersuperficie espacial o temporal.

$$\omega_\alpha = 0; \quad \omega_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \xi^\beta \nabla^\gamma \xi^\delta \quad (2.16)$$

Ahora sí estamos en condiciones de definir lo que es un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico. Comenzaremos por analizar que quiere decirse por espacio-tiempo estático.

Definición 2 Sea (M, g) es un espacio tiempo estático si admite un vector de Killing temporal ortogonal a una hipersuperficie.

es decir:

$$\mathcal{L}_\xi g = 0 \quad g(\xi, \xi) < 0 \quad (2.17)$$

Adaptando $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ entonces $g(\xi, \xi) = g_{tt}$ si el vector de killing no es perpendicular a la superficie existirían terminos cruzados. De manera que un espacio-tiempo es estacionario si admite un vector de Killing temporal, y si dicho vector de Killing temporal es además perpendicular a la hipersuperficie espacial es entonces estático.

Ahora hay que especificar que se quiere decir por espacio-tiempo esférico:

Definición 3 $\exists \xi_{(i)}, i = 1, 2, 3$ vectores de Killing espaciales tales que:

$$[\xi_{(i)}, \xi_{(j)}] = \epsilon_{ijk} \xi^{(k)} \quad (2.18)$$

es decir satisface un algebra de Lie.

Ahora que tenemos una definición clara para un espacio-tiempo estático esféricamente simétrico y utilizando las relaciones de (2.1) estamos en condiciones de generar las ecuaciones de campo para un espacio-tiempo del tipo que hemos estudiado hasta ahora en 4-dimensiones y tomando el caso más sencillo, el vacío, es decir $T_{\mu\nu} = 0$.

Sin embargo antes de poder obtener e incluso hablar sobre el proceso para obtener las ecuaciones de Einstein en el vacío y en una métrica tetra-dimensional es necesario especificar algunas propiedades del tensor de Riemann y del tensor de Ricci.

El tensor de Riemann determina la curvatura de un espacio-tiempo además de ser útil para encontrar un invariante del cual hablaremos en una sección posterior. El tensor de Riemann se define como sigue [2]:

Definición 4 Sean $(x, y, z) \in T_p M$ definimos:

$$R(x, y)z = \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z + \nabla_{[x, y]} z \quad (2.19)$$

donde $[x, y] = \nabla_x y - \nabla_y x$

En palabras esto lo que nos quiere decir es como cambia un vector al moverlo sobre una trayectoria cerrada, si el vector no coincide consigo mismo entonces el espacio tiempo no es plano, de manera que Riemann definió la curvatura como un tensor. En lo sucesivo nos referiremos a las componentes del tensor de Riemann aunque nos referiremos a él como tensor de Riemann. Al analizar la definición del tensor de Riemann conlleva algunas simetrías las cuales serán mencionadas a continuación:

Antisimetría frente al intercambio entre los dos primeros o los dos últimos índices:

$$R_{\mu\nu\gamma\delta} = -R_{\nu\mu\gamma\delta} = -R_{\mu\nu\delta\gamma} \quad (2.20)$$

Simetría respecto al intercambio del bloque formado por los dos primeros índices con el bloque formado por los últimos:

$$R_{\mu\nu\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\mu\nu} \quad (2.21)$$

Como consecuencia de jugar con las tres identidades anteriores viene la identidad de Bianchi: la suma en tres entradas del tensor de curvatura bajo permutación circular se anula

$$R_{\mu\nu\gamma\delta} + R_{\mu\gamma\delta\nu} + R_{\mu\delta\nu\gamma} = 0 \quad (2.22)$$

Ahora seguimos en la misma línea y halaremos sobre el tensor de Ricci que esta intimamente relacionado con el tensor de Riemann y que también es una manera de representar la curvatura de forma tensorial. El tensor de Ricci se puede definir en base al tensor de Riemann de la siguiente manera:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\gamma\nu}{}^{\gamma} \quad (2.23)$$

Esta definición es útil para sistemas que estan sobre una geometria Riemanniana y este tensor define totalmente la curvatura para una geometria Riemanniana con una dimensión menor a 4 dimensiones, sin embargo ya que estaremos trabajando con geometrias con una dimensión mayor o igual a 4 este tensor es una simple ayuda pero no define la curvatura por completo.

Para mostrar la manera de resolución de las ecuaciones de Einstein [3] resolveremos las ecuaciones para el vacio utilizando la métrica que habíamos encontrado para un espacio tiempo estático y esfericamente simétrico:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2 \quad (2.24)$$

tomando esta ecuación y recordando la definición para el tensor de Riemann y escribiendola de la siguiente forma tendremos que:

$$R_{\mu\nu\gamma}{}^{\delta} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\gamma}^{\delta} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\gamma}^{\delta} + \Gamma_{\nu\gamma}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\mu}^{\delta} - \Gamma_{\mu\gamma}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\nu}^{\delta} \quad (2.25)$$

Haciendo las operaciones que debemos realizar en base a la métrica que utilizamos tenemos que:

$$R_{00} = \frac{1}{2h}\left(\frac{f'}{f}\right)' + \frac{f'^2}{4f^2h} - \frac{f'h'}{4h^2f} + \frac{f'}{rfh} \quad (2.26)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2h}\left(\frac{f'}{f}\right)' - \frac{f'^2}{4f^2h} + \frac{f'h'}{4h^2f} + \frac{h'}{rh^2} \quad (2.27)$$

$$R_{22} = \frac{1}{2}(rfh)^{-1}f' + \frac{1}{2}(rh^2)^{-1}h' + r^{-2}(1 - h^{-1}) \quad (2.28)$$

Además debido a que $G_{\mu\nu} = 0$ entonces $R_{\mu\nu} = 0$ entonces si sumamos $R_{00} + R_{11}$ obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{f'}{rfh} + \frac{h'}{rh^2} = 0 \Rightarrow \frac{f'}{f} + \frac{h'}{h} = 0 \quad (2.29)$$

por lo tanto tenemos que:

$$[\ln f]' + [\ln h]' = 0 \Rightarrow [\ln(fh)]' \Rightarrow fh = C_1^2 \quad (2.30)$$

En este caso no se tiene cuidado con el hecho de que f y h pudieran tomar le valor nulo pues son componentes métricos.

Utilizando la relación (2.29) y sustituyendola en el valor de R_{22} y tomando en cuenta que dada la relación (2.29) tenemos como consecuencia que la derivada de la componente métrica h sera dada como $h' = C_1^2 \frac{f'}{f^2}$ para obtener así la siguiente ecuación:

$$R_{22} = -\frac{f'}{2C_1^2 r} - \frac{C_1^2 f'}{f^2} \frac{f^2}{2rC_1^4} + \frac{1}{r^2} - \frac{f}{r^2 C_1^2} = 0 \quad (2.31)$$

multiplicando (2.30) por $-C_1^2 r^2$ obtenemos:

$$-\frac{f'}{C_1^2} - \frac{f}{rC_1^2} + \frac{1}{r} = 0 \Rightarrow rf' + f - C_1^2 = 0 \quad (2.32)$$

Esta ultima ecuación diferencial de f es lineal y de primer orden lo que nos permite encontrar de manera más explicita la forma de f , de resolver (31) obtendremos que:

$$f = C_1^2 + \frac{C_2^2}{r} \quad (2.33)$$

Sustituyendo la forma de f en R_{00} y después de un sencillo proceso algebraico pero un poco largo (razón por la cual no sera incluida) se obtiene que:

$$\frac{1}{C_1^2} \left[\frac{C_2}{r^3} + \frac{C_2}{r^3} \right] = 0 \quad (2.34)$$

de igual manera sustituyendo en R_{00} la forma de f y h obtenemos la siguiente relaci

$$\frac{-2C_2}{2C_1^2 r^3} + \frac{C_2}{2C_1^2 r^3} = \frac{C_2}{C_1^2 r^3} - \frac{C_2}{C_1^2 r^3} = 0, \quad (2.35)$$

por lo que la métrica puede ser escrita de la siguiente forma:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{k}{r}\right) dt'^2 + \left(1 + \frac{k}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.36)$$

donde $k = \frac{C_2}{C_1^2}$ y $dt' = C_1 dt$ además utilizamos que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = -(1 + 2\phi), \quad (2.37)$$

donde ϕ es el campo que produce la fuerza de atracción gravitacional y de la teoría Newtoniana sabemos que $\phi = \frac{GM}{r}$ de manera que $C_1 = 2GM$ por lo

tanto la métrica estática esféricamente simétrica se puede escribir como sigue:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dt'^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.38)$$

Con esto hemos obtenido la solución exterior para un espacio tiempo tetradiimensional en el vacío, más adelante explicaremos como generar la solución a un espacio tiempo de mayor dimensión.

2.4. Invariantes de la curvatura en estos sistemas

Un invariante o escalar es una cantidad que no cambia aunque el sistema coordenado cambie, estos son de gran importancia para el estudio de los fenomenos relativistas puesto que en sistemas como los que hemos estado manejando lo que se observa depende del observador, es o será de gran utilidad tener ciertos referentes a los cuales no les importe el observador, en pocas palabras estos escalares o mejor llamados invariantes son una parte importante en la relatividad, pues permiten encontrar lo absoluto e invariante.

Tenemos como herramienta en estos sistemas algunos invariantes y en especial nos interesan dos, el escalar de Kretschmann y el escalar de Ricci. Comenzaremos por estudiar el escalar de Ricci el cual está definido como sigue:

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.39)$$

En pocas palabras es la traza del tensor de Ricci y este puede funcionar como escalar de curvatura y decirnos en que regiones podemos encontrar singularidades en el espacio; sin embargo, debemos ser cuidadosos cuando lo empleamos pues tal vez este nos devuelva singularidades debidas a la métrica con la que fue calculado el escalar y no en realidad a la geometria del espacio-tiempo que estamos analizando, un ejemplo es justamente la solución que acabamos de calcular, es decir la del espacio vacío, analicemos nuevamente el tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$ pero sabemos que ese no es el fin de la historia pues además:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \quad (2.40)$$

donde R es el escalar de Ricci y de donde podemos ver que $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}$ y veamos que pasa si a esta ecuación aplicamos la métrica $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = kg^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \quad (2.41)$$

$$R - \frac{4}{2}R = kT \quad \Rightarrow \quad R - 2R = kT \quad (2.42)$$

$$T = \kappa R \quad (2.43)$$

de donde vemos que el escalar de Ricci debe ser cero aun cuando las componentes del tensor no lo sean y que esto no es debido necesariamente a un mal comportamiento de la geometría del espacio o incluso no significa que el espacio sea plano, es por esto que el escalar de Ricci debe ser tratado con cuidado.

El escalar de Kretschmann por otra parte es un poco más completo en cuanto al número de datos que recibe y proporciona, este escalar se define como sigue:

$$K = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (2.44)$$

Como podemos ver en algunos casos como el que ahora estamos analizando es un escalar compuesto por la suma de terminos cuadrados al igual que el escalar de Ricci este escalar nos dice que tan curvo es el espacio, en pocas palabras este escalar requiere para ser cero que el tensor de curvatura sea cero pues esto es analogo a que el vector cero tiene "tamaño", como vemos este escalar no depende de otra cosa más que la geometría del espacio sin embargo también debe ser analizado pues los componentes del tensor de curvatura dependen de las coordenadas de la métrica en que dicho tensor fue medido y es necesario reconocer las singularidades debidas a la geometría del espacio y las que son debidas a la métrica utilizada para describir el espacio.

Para seguir con la idea que hemos venido desarrollando expresaremos ahora el escalar de Kretschmann para la solución de Schwarzschild, el cual queda como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} K = & \frac{1}{4} \frac{\left(-4 \left(\frac{d\Phi}{dr} \right) \left(m - r \frac{dm}{dr} \right) + 4r \left(\left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 + \frac{d^2\Phi}{dr^2} \right) (-r + 2m) \right)^2}{r^4} + \\ & + \frac{8(r - 2m)^2 \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2}{r^4} + \frac{8 \left(m - r \frac{dm}{dr} \right)^2}{r^6} + 16 \frac{m^2}{r^6} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Capítulo 3

Espacio Tiempo de Reissner-Nördstrom

3.1. La solución de Reissner- Nördstrom

En esta sección derivaremos la solución de Reissner Nördstrom tal y como hicimos para encontrar la solución de Schwarzschild en el capítulo anterior. En este caso el tensor-energía momento será distinto de cero, ya que no estaremos trabajando en el vacío, esta vez atacaremos un problema ligeramente más complicado que sin embargo se resuelve con un procedimiento idéntico al realizado en [9]. Comenzamos entonces por conocer cual es la estructura de lo que diferencia ambos casos, es decir, que partes conformaran al tensor energía momento que utilizaremos para el electro-vacío; esto es, un espacio que puede estar en ausencia de materia pero aún así contiene campos electromagnéticos que interactúan con el espacio el ejemplo más común es la luz que es irradiada hacia el espacio pero sin considerar la fuente. Al desarrollar las ecuaciones de Einstein acopladas con el tensor de Energía momento de un campo electromagnético nos topamos con un sistema de ecuaciones que respecto a un sistema de coordenadas arbitrario toma la forma:

$$G_{\mu\nu} = k[F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}] \quad (3.1)$$

$$\nabla^{\alpha}F_{\alpha\beta} = 0 \quad \nabla_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} = 0; k = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (3.2)$$

Con $F_{\mu\nu}$ el tensor de Maxwell y ∇ la derivada covariante respecto a la métrica g , además de saber que $[\quad]$ denota la antisimetrización de los índices obtenemos que el tensor de energía momento toma la siguiente forma:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (3.3)$$

El desarrollo de la forma explicita del tensor de energía momento para el electro-vacio es en verdad muy interesante e instructivo al estudiar electromagnetismo y relatividad sin embargo el cálculo y desarrollo del mismo esta fuera de los alcances de esta tesis razón por la cual no se incluye, sin embargo puede ser analizado en [12].

Regresando a el desarrollo de las soluciones de Reissner Nördstrom asumimos un espacio estático con simetria esférica, esto es tomamos la métrica que utilizamos en el capitulo anterior:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2; g(r) > 0, f(r) > 0 \quad (3.4)$$

Ahora con la ayuda del tensor de Riemann y el tensor de Einstein estamos en condiciones de generar las ecuaciones de campo que describan el sistema que estamos analizando es decir, el electro-vacio.

Comencemos entonces por decir de manera explícita como esta dado el tensor de Maxwell ya habiamos dicho en el capitulo anterior como se expresa y que adem's este tensor proviene de un campo tensorial A_{μ} y que dicho campo esta compuesto por un campo vectorial y un campo escalar $A_{\mu} = (\Phi, \vec{A})$ que sin embargo ya que para el caso que estamos analizando $\vec{A} = 0$ pues solo existe campo eléctrico $A_{\mu} = (\Phi, 0)$ el tensor de Maxwell esta definido como $F_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}A_{\nu} - \nabla_{\nu}A_{\mu}$ en base a esto es posible entonces calcular el tensor de energía-momento y además de la estructura que tiene el tensor de Einstein y de saber que estamos en un espacio Riemanniano podemos escribir el tensor energía-momento como términos de los componentes métricos lo mismo podemos hacer con el tensor de Maxwell en términos de los componentes métricos, por lo tanto F_{μ}^{ν} toma la siguiente forma:

$$\mathbf{F}_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{Q(r)}{gr^2} & 0 & 0 \\ \frac{Q(r)}{fr^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Ya que tenemos el tensor de Maxwell es posible encontrar el tensor de energía momento que es parte fundamental para encontrar las ecuaciones de Einstein tal y como hicimos en el capítulo anterior, aunque en el caso anterior el tensor Energía-momento era igual a cero. El siguiente paso es entonces

encontrar el tensor de Einstein, en base al tensor de Riemann, al hacer los cálculos correspondientes obtenemos que los componentes del tensor de Einstein son las siguientes:

$$G_0^0 = -\frac{r\frac{dg}{dr} + g}{r^2g^2}, \quad (3.6)$$

$$G_1^1 = \frac{r\frac{df}{dr} + f}{r^2gf}, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} G_2^2 = & \frac{1}{4r f^2 g^2} \left(2\frac{df}{dr}fg - 2\frac{dg}{dr}f^2 \right. \\ & \left. - \frac{dg}{dr}\frac{df}{dr}fr + 2\frac{d^2f}{dr^2}gfr - \left(\frac{df}{dr}\right)^2 gr \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$G_3^3 = G_2^2 \quad (3.9)$$

Ahora si ya tenemos casi todos los cálculos hechos, retomamos la ecuación de Einstein $G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$ veamos que con esta ecuación podemos generar un nuevo tensor, llamemosle D tal que este tensor sea igual a cero y sus componentes deben ser entonces $D_{\mu\nu} \stackrel{def}{=} G_{\mu\nu} - kT_{\mu\nu} = 0$ y las componentes de este tensor nos devolvera cuatro ecuaciones, pero esto se vera al escribir el tensor componente a componente:

$$D_0^0 = -\frac{fr^3\frac{dg}{dr} + fr^2g + Q^2g}{fr^4g}, \quad (3.10)$$

$$D_1^1 = \frac{r^3\frac{df}{dr} + fr^2 + Q^2}{gr^4f}, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} D_2^2 = & \frac{1}{4r^4f^2g^2} \left(2r^3\frac{df}{dr}gf - 2r^3\frac{dg}{dr}f^2 - r^4\frac{df}{dr}\frac{dg}{dr}f \right. \\ & \left. + 2r^4\frac{d^2f}{dr^2}gf - r^4\left(\frac{df}{dr}\right)^2 - 4Q^2fg \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$D_3^3 = D_2^2, \quad (3.13)$$

Cada una de estas componentes debe ser igual a cero pues así definimos el tensor D_μ^ν de manera que si tomamos la componente $G_1^1 = 0$ podemos obtener la siguiente relación:

$$r^3 \frac{df}{dr} = -(fr^2 + Q^2), \quad (3.14)$$

podemos multiplicar por g la expresión anterior y al sumar el resultado con la componente G_0^0 obtenemos que:

$$gr^3 \frac{df}{dr} - fr^3 \frac{g}{dr} = 0 \Rightarrow g \frac{df}{dr} - f \frac{g}{dr} = 0, \quad (3.15)$$

Aquí es importante decir que el término r^3 lo podemos operar con su inverso multiplicativo pues estamos evitando la singularidad que de calcular el tensor de curvatura sabemos que en $r = 0$ tiene lugar dicha singularidad. De la expresión (3.15) tenemos entonces que:

$$\frac{d(fg)}{dr} = 0 \Rightarrow fg = cte \quad (3.16)$$

en particular podemos tomar la constante unitaria y obtenemos que:

$$g = f^{-1} \quad (3.17)$$

De este modo la solución obtenida nos permite escribir la métrica esférica y estática de la siguiente manera:

$$ds^2 = f dt^2 - \frac{1}{f} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.18)$$

A la cual se le conoce como la métrica del agujero negro de Reissner-Nördstrom , más adelante hablaremos por que se le conoce también como agujero negro.

3.2. Horizonte de eventos y singularidades de la curvatura

Antes de introducir la noción de lo que es el horizonte de eventos es recomendable introducir otro concepto y una idea básica de la relatividad, y este concepto es el cono de luz. En este momento para fijar ideas utilizaremos el espacio plano y su elemento de línea característico en 4 dimensiones:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + y^2 + dz^2 \quad (3.19)$$

Es posible escribir la relación anterior de la siguiente manera:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{x}^2 \quad (3.20)$$

Ahora pongamos esta ecuación en el plano cartesiano para el cual la línea de abscisas representara el espacio R^3 mientras que el eje de las ordenadas representara al tiempo, de esta manera tendremos tres posibilidades:

$$-c^2 t^2 + x^2 = 0 \quad (3.21)$$

$$-c^2 t^2 + x^2 < 0 \quad (3.22)$$

$$-c^2 t^2 + x^2 > 0 \quad (3.23)$$

La primer opción nos da dos líneas rectas como solución $ct = \pm x$ por lo que despejando tenemos que $\frac{x}{t} = a$ este par de rectas se le conoce como cono de luz, donde el origen representa un evento y estas rectas representan la velocidad a la que la información de dicho evento llegará hasta un observador. El segundo caso nos deja con rectas que están entre el eje de las abscisas y la recta del caso 1 es decir fuera del cono de luz y el tercer caso son las rectas que están entre el eje de las ordenadas y la recta del caso 1 es decir dentro del cono de luz. Como podemos observar los eventos representados por el caso 2 son mensajeros que se mueven más rápido que la luz y resulta que no se han observado dichas partículas, mientras que el caso tres son todos los sucesos que ocurren dentro del cono de luz, es decir que el observador que emitió la información del evento podrá interactuar con cualquier evento producido dentro de dicho cono.

Ahora bien tal pareciera que el concepto de cono de luz es algo carente de significado para lo que se refiere en la tesis sin embargo nos abre la puerta para explicar de alguna manera lo que es el horizonte de eventos. Siguiendo con la misma línea que hemos utilizado para introducir el concepto de cono de luz introduzcamos el concepto de horizonte de eventos. Sea p un evento que ocurre para un tiempo arbitrario, a dicho evento le corresponde un cono de luz y este cono de luz contiene a todos los puntos o eventos con los que el evento p antes mencionado interactuara, esto quiere decir que por ejemplo un evento q se enterará de la ocurrencia del evento p y el evento p se enterará de la ocurrencia del evento q y el límite para los eventos con los que interactuara el evento p es precisamente las líneas $t = \pm c^{-1}x$ como se muestra en la figura que aparece a continuación.

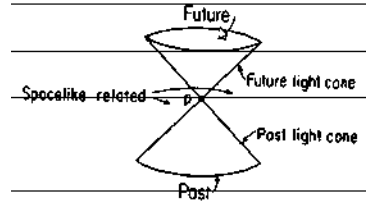


Figura 3.1: [4]

Ahora bien esta es una manera muy intuitiva de ver lo que es el horizonte de eventos pues la discusión que acabamos de hacer no incluye los eventos que aun no tienen lugar, por lo tanto aun no emiten ningun haz, mientras que el horizonte de eventos es la barrera que delimita que eventos pueden interactuar unos con otros y cuales no, esto es dos sucesos tales que el tiempo para que el haz de luz de el suceso p interacte con el suceso q es infinito, lo que quiere decir que no importa el momento en el que ocurre cada suceso, o si cuando uno ocurre el otro ya lo ha hecho o no, nunca interactuaran esto nos dice que ambos eventos estan aislados uno del otro y no es posible que intercambien información uno con el otro. En otras palabras el horizonte de eventos es el punto de no retorno, es decir una vez que cruzas dicho horizonte nunca más podrás decir lo que viste del otro lado!

Demos ahora una definición un poco más formal para el horizonte de eventos y avancemos además con la construcción de un diagrama de Penrose.

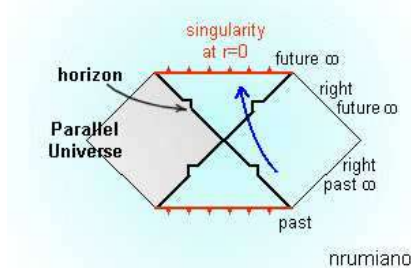
Un espacio de Minkowski tiene tres signos iguales y uno contrario de manera que si la componente métrica temporal se define como negativa sigue cumpliendo con ser espacio de Minkowski pero cambia la coordenada temporal por la espacial. Para métricas de espacios tiempo con simetrías esféricas y que además la componente métrica temporal es el inverso de la espacial son muy útiles para conocer malos comportamientos de la métrica en algunas regiones o puntos del espacio, es decir cuando la componente temporal tiende a ser cero la otra tiende a infinito y viceversa.

Decimos que un espacio es geodesicamente incompleto cuando desde cualquier punto de la estrella a la frontera la distancia es finita, es decir, no hay razón para que de la frontera no podamos extender el espacio. Esta si la analizamos a fondo es la noción que dimos para el horizonte de eventos pues siempre podemos seguir avanzando lo que significa que el tiempo para recor-

rer el camino descrito por la geodesica es infinito.

Sea ahora un vector de Killing dependiente del tiempo, $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ entonces $g(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}) = \pm f$ en el espacio de Minkowski esto nos da dos rectas como solución que son las del cono de luz. Para construir un diagrama de Penrose llamaremos a estas rectas futuro infinito nulo y pasado infinito nulo, y colocaremos dos eventos, p y q situados a una distancia infinita uno del otro a estos puntos los llamaremos infinito espaciales, para cada evento geramos su cono de luz y el cruce de ambos nos da como resultado el diagrama de Penrose- Carter en el espacio plano de Minkowski este tipo de diagramas son muy útiles pues simplifican la visualización del espacio $\mathcal{R}^4$ a solo dos dimensiones (ver figura III) y lo hace además de una manera más compacta pues es sencillo localizar el infinito espacial y temporal en ambos casos. Generar un Diagrama de Penrose-Carter para cualquier otra métrica se hace de la misma manera que con el espacio plano de Minkowski pero hay que ser cuidadosos con cuales son las superficies nulas temporales en cada caso. Estos diagramas se pueden extender para los casos n -dimensionales sin embargo no para toda clase de métrica es posible construirlos, pues como vemos dependen mucho de las coordenadas temporales y espaciales y de manera formal lo cierto es que no se dice nada a cerca de todas las componentes de la métrica salvo de la temporal y la radial. Sin embargo para métricas con simetría esférica en n -dimensiones es posible encontrar los diagramas de Penrose pues a final de cuentas la simetría de las $n-2$ esferas siempre cumple las mismas condiciones y las singularidades o irregularidades de la métrica dependen simplemente como se hace en el caso tetradimensional solo de las componentes temporales y radial.

Antes de avanzar más es importante a parecer del autor entender lo que se dice por agujero negro, para aclarar y ejemplificar esta situación utilizaremos la que es la solución más recurrida y simple que representa uno y que ventajosamente ya hemos calculado, esta es la solución de Schwarzschild, para este caso es condición que $1 - \frac{2M}{r} > 0$ para tener una solución estática. Notemos que el caso $R = 2M$ es un caso patológico ya que causa problemas pues la componente temporal va a cero mientras que la radial va a infinito. En este caso el espacio se llama geodesicamente incompleto cuando $r < 2M$ por las razones explicadas anteriormente al construir el diagrama de Penrose es necesario notar que los nulos temporales se dan para $r = \pm 2M$ además de las que ya son dadas por el cono de luz de los eventos separados por esferas de radio tan grande que tienda a infinito, lo que genera el siguiente diagrama de Penrose-Carter.



Entonces un agujero negro esta representada por la parte que esta delimitada por las rectas $R = \pm 2M$ pues estas rectas son los horizontes de eventos de la solución ya que lo que esta en esa región del espacio no se comunica con el exterior y por el hecho de que no intercambia informacion con el exterior significa que una vez dentro nunca saldra nada ni la luz a excepción de la radiación de Hawking [2], ya que precisamente en base a la velocidad de la luz y utilizando a esta como transmisora de información es que se definió lo que es un horizonte de eventos.

Ya que tenemos la solución de Reissner-Nördstrom construyamos el diagrama de PenroseCarter para esta métrica. Para esto primero encontremos el horizonte de eventos y singularidades de esta solución así como calcularemos el escalar de curvatura y haremos por primera vez uso de todas las herramientas de las cuales hemos hablado anteriormente.

recordando la solución de Reissner-Nördstrom:

$$ds^2 = f dt^2 - \frac{1}{f} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.24)$$

y de la solución de las ecuaciones de campo sabemos que:

$$f = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2} \quad (3.25)$$

podemos encontrar las las superficies nulas temporales que al igual que en el caso del agujero negro de Schwarzschild al hacer la componente métrica temporal cero la componente métrica radial tiende a infinito, entonces de la forma de f tenemos que:

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - e^2} \quad (3.26)$$

donde recordamos qu ela solución de Reissner-Nördstrom supone carga muy pequeña de manera que $e^2 < m^2$ y ademas la solución r_- es conocida como

solución interior mientras que r_+ es conocida como solución exterior y ambas soluciones son ceros de la función f . podemos de esta manera construir el diagrama de Penrose-Carter para la solución de Reissner-Nördstrom el cual queda conformado como se muestra en la figura que aparece a continuación.

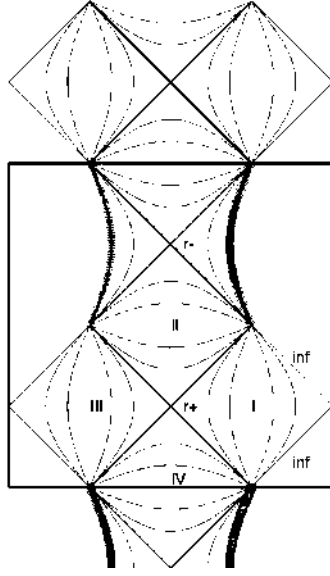


Figura 3.3: [9]

Aquí podemos identificar varias regiones del diagrama, vemos que las regiones III y I son asintoticamente planas mientras que las regiones II y IV tal como en el ejemplo de la solución de Schwarzschild también representan un agujero negro pues estas regiones están entre los horizontes de eventos, de manera que las regiones I y III representan la solución exterior y estas regiones en particular nos serán de gran utilidad pues esta región es de gran interés cuando hacemos el acoplamiento entre las geometrías pues la solución exterior representa como se ve el espacio sin materia solo con campo electromagnético, mientras que la región que representa un agujero negro será sustituida por un cúmulo de polvo electromagnéticamente cargado y esta tendrá como representación la solución de Ruban la cual se discutirá en el capítulo siguiente.

Capítulo 4

La solución de Ruban

4.1. Solución de las ecuaciones

La solución para polvo inmerso en un campo electromagnéticamente cargado y utilizando coordenadas comóviles da lugar a la siguiente métrica:

$$ds^2 = -e^{C(r,t)} dt^2 + e^{A(r,t)} dr^2 + R(r,t) d\Omega^2 \quad (4.1)$$

La solución de las ecuaciones de Einstein para polvo eléctricamente neutro fueron encontradas por Datt y posteriormente desarrolladas e interpretadas por Ruban. A lo largo de este capítulo y en lo sucesivo haremos uso de una notación distinta para las derivadas en la que $f_{,x^i}$ indica $\frac{\partial f}{\partial x^i}$.

En esta ocasión no haremos uso de un espacio tiempo estático, bastará con que sea un espacio tiempo esférico, esto se ve reflejado en la forma de las componentes métricas que son resultado de una métrica esférica, pues vemos que cada una de las componentes métricas. Por lo tanto las ecuaciones de Einstein-Maxwell quedan expresadas de la siguiente manera:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \frac{8\pi G}{c^4}\epsilon u_\alpha u_\beta + \frac{2G}{c^4}\left(F_\alpha{}^\mu F_{\mu\beta} + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \quad (4.2)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{4\pi}{c}\rho_e u^\nu \quad (4.3)$$

$$F_{[\mu\nu,\rho]} = 0 \quad (4.4)$$

donde ϵ es la densidad del polvo, u^α es la velocidad del polvo y ρ_e es la densidad de la carga eléctrica. Notemos que de (4.3) obtenemos que:

$$F^{01} = Q(r) \frac{e^{-\frac{(A+C)}{2}}}{R^2} \quad (4.5)$$

$$Q_{,r} = \frac{4\pi}{c}\rho_e e^{\frac{A}{2}} R^2, \quad (4.6)$$

en donde $Q(r)$ es una función arbitraria, la cual representa la carga contenida dentro de la esfera. Ahora las componentes del tensor de Einstein utilizando la métrica (4.1) y el tensor electromagnético (4.5) toman la siguiente forma:

$$G_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} \epsilon e^C + \frac{G}{c^4} \frac{Q^2}{R^4} e^C, \quad (4.7)$$

$$G_{01} = 0, \quad (4.8)$$

$$G_{11} = -\frac{G}{c^4} \frac{Q^2}{R^4} e^A \quad (4.9)$$

$$G_{22} = \frac{G}{c^4} \frac{Q^2}{R^4} \quad (4.10)$$

para $G_{\alpha\beta}$ es decir en terminos de las componentes métricas y el tensor de Riemann se tiene de la siguiente forma:

$$G_{00} = \frac{e^C}{R^2} + \frac{R_{,t}^2}{R^2} + \frac{A_{,t}R_{,t}}{R} + e^{C-A} \left(-\frac{R_{,r}^2}{R^2} - 2\frac{R_{,rr}}{R} + \frac{A_{,r}R_{,r}}{R} \right) \quad (4.11)$$

$$G_{01} = -2\frac{R_{,tr}}{R^2} + \frac{A_{,t}R_{,r}}{R} + \frac{R_{,t}C_{,r}}{R} \quad (4.12)$$

$$G_{11} = \frac{e^A}{R^2} + \frac{R_{,r}^2}{R^2} + \frac{C_{,r}R_{,r}}{R} + e^{C-A} \left(-\frac{R_{,t}^2}{R^2} - 2\frac{R_{,tt}}{R} + \frac{C_{,t}R_{,t}}{R} \right) \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} G_{22} = & \frac{1}{4}e^{-C}(-ARR_{,tt} + 2RC_{,t}R_{,t} - 2RA_{,t}R_{,t} - R^2A_{,t}^2 - 2RA_{,tt}) + R^2C_{,t}A_{,t}) + \frac{1}{4}e^{-A} \\ & (-ARR_{,rr} + 2RC_{,r}R_{,r} - 2RA_{,r}R_{,r} - R^2A_{,r}^2 - 2RA_{,rr}) + R^2C_{,r}A_{,r}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

de las ecuaciones (4.2) y (4.4) tenemos que:

$$(\epsilon u^\beta)_{;\beta} = 0 \quad (4.15)$$

$$\epsilon u_{;\beta}^\alpha u^\beta = -\frac{1}{c} \rho_e F_\beta^\alpha u^\beta \quad (4.16)$$

aplicando las propiedades anteriores a la métrica de Ruban encontramos que:

$$\epsilon C_{,r} = \frac{1}{2\pi} \frac{QQ_{,r}}{R^4} \quad (4.17)$$

aplicando () a la métrica de Ruban nuevamente obtenemos que:

$$\frac{R}{2} \epsilon R^2 e^{\frac{A}{2}} = \frac{G}{c^4} N_{,r} \quad (4.18)$$

donde $N_{,r}$ es una función arbitraria de integración, además es posible ver que analizando las unidades de los cálculos hechos hasta el momento de definir $N_{,r}$ esta está definida como la energía equivalente a la suma o resta de masa dentro de la esfera. De (4.6) y (4.18) podemos ver que la razón $\frac{Q_{,r}}{N_{,r}} = \frac{\rho_e}{\epsilon c}$ es independiente del tiempo.

Usando (4.17) y (4.12) obtenemos de la ecuación $G_{01} = 0$ lo siguiente:

$$2e^{-\frac{A}{2}} R_{,tr} - e^{-\frac{A}{2}} A_{,r} R_{,r} = \frac{2}{c} \frac{R_{,t}}{R^2} \left(\frac{\rho_e Q}{\epsilon} \right) \quad (4.19)$$

Es en este paso en el que debemos ser cuidadosos en cuanto a lo que queremos conseguir a partir de lo que estamos haciendo, es por eso que debemos tomar dos de manera separada, el caso $R_{,r} = 0$ y el caso $R_{,r} \neq 0$, puesto que con $R_{,r} = 0$ la ecuación $G_{01} = 0$ se reduce a $C_{,r} R_{,t} = 0$ y no sería posible utilizarla para determinar $R_{,r}$ tal y como haremos más adelante, entonces desde aquí punto trabajaremos solo el caso $R_{,r} \neq 0$, dicho esto seguimos, ya que en la expresión (4.19) el término que aparece entre parentesis es independiente del tiempo, esta expresión puede ser integrada como:

$$e^{\frac{A}{2}} R_{,r} = \Gamma(r) - \left(\frac{\rho_e Q}{\epsilon} \right) \quad (4.20)$$

donde Γ es una función arbitraria de integración. Usando (4.6) y (4.18) encontramos ahora que:

$$\frac{\rho_e Q}{\epsilon c} = \frac{Q Q_{,r}}{N_{,r}} = Q Q_{,r} \quad (4.21)$$

de esta manera (4.20) toma la siguiente forma:

$$e^{\frac{A}{2}} R_{,r} = \Gamma(r) - \frac{Q Q_{,r}}{R} \quad (4.22)$$

y entonces (4.17) se escribe como sigue:

$$C_{,r} = 2 \frac{e^{\frac{A}{2}}}{R^2} Q Q_{,r} \quad (4.23)$$

usando (4.22) y (4.23) para eliminar $R_{,r}$ y $C_{,r}$ de (4.13) e integrando la ecuación G_{11} obtendremos:

$$e^C R_{,r}^2 = \Gamma^2 - 1 + \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{Q_N^2} - \frac{G}{c^4} R^2 \quad (4.24)$$

donde $M(r)$ es una función arbitraria. Comparando esta ecuación con la ecuación de movimiento Newtoniana vemos que $\frac{\Gamma^2-1}{2}$ juega el rol de función de energía $E(r)$.

La función $M(r)$ es la masa efectiva total que junto con $Q(r)$ dirigen a evolución en terminos descriptivos. Con el fin de comparar (4.24) con el limite Newtoniano la función $\Gamma^2 - 1$ es adimensional pero por consistencia debe tener la forma $\frac{2}{c^2}$ donde epsilon tiene unidades de velocidad al cuadrado, con el fin de encontrar el limite Newtoniano de (4.24) multiplicamos por c^2 y hacemos que $c \rightarrow \infty$ denotando el limite Newtoniano por τ para obtener:

$$R_{,\tau}^2 = 2\varepsilon + \frac{2Gm(r)}{R} \quad (4.25)$$

pero la ecuación newtoniana de movimiento para el polvo cargado en una simetria esférica es:

$$r_{,\tau}^2 = 2\varepsilon(r) + \frac{2}{r} \left[G\mathcal{M}(r) - \frac{\rho_e(r)}{\rho_\mu(r)} Q(r) \right] \quad (4.26)$$

donde $\mathcal{M}(r)$ es la masa total contenida en la esfera de radio r , $Q(r)$ es la carga totla denro de la esfera de radio r , ρ_e es la densidad de carga y ρ_μ es la densidad de masa. Entonces $M(r)$ corresponde en el caso newtoniano a $[G\mathcal{M}(r) - \frac{\rho_e(r)}{\rho_\mu(r)} Q(r)]$.

Para verificar la ecuación G_{22} tenemos que encontrar $C_{,t}$ de G_{11} y $A_{,t}$ de la ecuación $G_{01} = 0$, después de la ecuación (4.22) y derivando respecto a r (4.24) encontramos:

$$Q(r)Q(r)_{,N} \left[-\frac{G}{c^4} \Gamma N_{,r} + (M(r) + Q(r)Q(r)_{,N} \Gamma)_{,r} \right] = 0 \quad (4.27)$$

una solución para esta ecuación es $Q_{,N} = 0$ es decir una carga total constante. Sin embargo cuando $Q(r)_{,N} \neq 0$

$$\frac{G}{c^4} \Gamma N_{,r} = (M(r) + Q(r)Q(r)_{,N} \Gamma)_{,r} \quad (4.28)$$

La cantidad $\mathcal{M}(r) \equiv M + Q(r)Q(r)_{,N} \Gamma$ una forma analoga de la masa newtoniana $\mathcal{M}(r)$ de (4.26) esto puede entenderse como que $\mathcal{M}(r)$ es la masa gravitacional. Entonces en (4.27) Γ determina cuanto crece o decrece $\mathcal{M}$ cuando una unidad de masa es agregada o retirada de la fuentes. Las soluciones con $\Gamma = 0$ son conocidas y estas se desarrollan en el trabajo de Datt[5].

Para finalizar las ecuaciones de Einstein-Maxwell para polvo cargado se reducen a un conjunto que define las funciones $A(t, r)$, $C(t, r)$ y $R(t, r)$ de manera implicita. La solución se construye como se mencionara a continuación:

1. escoja las funciones $N(r), Q(r)$ y $\Gamma(r)$ y despues resolver (4.28) para encontrar $M(r)$ de hecho ya que la coordenada r esta determinada por la transformación $r' = f(r)$ donde f es una función arbitraria, podemos escoger $N(r), Q(r)$ y $\Gamma(r)$ como la coordenada radial.
2. hecho esto exprese $e^{\frac{A}{2}}$ mediante R utilizando (4.22)
3. el conjunto de ecuaciones (4.23)-(4.24) definen e^C y R , resolviendo (4.23) numericamente para $C(t, r)$ y una condicion inicial se debe suponer. Notemos que ahsta ahora C no esta definida de manera que sea solución única, la coordenada t puede transformarse como $t' = g(t)$ y entonces $C = C'' - 2 \ln(g, t')$. Usando esto, podemos requerir que en el centro de simetria $C(t, r_c) = 0$.

Si $Q_{,N} = 0$ entonces $Q = \text{constante}$ es decir $\rho_e = 0$ de (4.6). Este es el caso de polvo sin carga moviendose en el campo exterior de una carga concentrada en el origen $R = 0$.

4.2. Interpretación (Región acotada)

Recordemos que la métrica que describe la región que estamos analizando, es decir, polvo eléctricamente cargado es precisamente la solución de Ruban.

$$ds^2 = -e^{C(t,r)} dt^2 + e^A(t,r) dr^2 + R^2(t,r) d\Omega^2,$$

Recordemos que esta es una solución que posee simetría esférica y al analizar su curvatura como haremos adelante, veremos que la métrica es singular en $R(t, r) = 0$ este caso representa la situación que todo el polvo se encuentra confinado a un punto así mismo su carga eléctrica, como sabemos de la teoría de gravitación Newtoniana y de electrostática estas divergencias producto de tal configuración son divergencias tipo delta de Dirac δ que precisamente son el tipo de discontinuidad que se mostrará en la diferencial de línea representado a partir de la métrica; esta situación es análoga a la que se tiene con el espacio tiempo de Reissner-Nordström para $r = 0$ sin embargo como veremos más adelante nos enfocaremos en un caso en particular que será cuando $r_{RN} = R(t, r) = r_b = \max(r_+, r_-)$ como sabemos de antemano esta

condición evita el caso $r_b = 0$ pues $r_{\pm} \neq 0$ lo que permite evitar la singularidad que hasta ahora conocemos en el espacio de Ruban además de evitar las singularidades del espacio de Reisner-Nrdstrom las cuales se encuentran para $r_{RN} = r_{\pm}, 0$ mientras que para los demás puntos es acotado, ahora solo queda checar las soluciones para $C(t, r)$, $A(t, r)$ pero ya que las funciones que acompaña dt^2 y dr^2 son exponenciales el "peligro" para tener una singularidad en la métrica es que las funciones A y C no sean acotadas para la región (t, r_b) sin embargo podemos ver que las funciones son acotadas para todos los valores acotados de r .

4.3. Curvatura en el origen

Hasta este momento ya se discutieron los puntos más importantes a tratar respecto a la curvatura de un espacio-tiempo, en específico, en los dos últimos capítulos este tema ha sido de cierta importancia para el análisis de la geometría misma de los espacios-tiempo descritos por las métricas que se trataron, es decir, la solución de Schwarzschild y la solución de Reissner-Nördstrom, y tal como se habló con anterioridad para conocer en su totalidad la manera en que se curva el espacio y las propiedades de dicha curvatura así como las causas de dicha curvatura, es necesario calcular el escalar de Kreschtmann.

$$K = \left(\frac{1}{2} \frac{C_{,r}}{e^A} + \frac{2R_{,r}}{e^A R} \right) A_{,r} + \frac{1}{2} \frac{A_{,t}^2}{e^C} + \left(-\frac{1}{2} \frac{C_{,t}}{e^C} + \frac{2R_{,t}}{R e^C} \right) - \frac{1}{2} \frac{C_{,r}^2}{e^A} - \frac{2R_{,r} C_{,r}}{e^A R} - \frac{2R_{,t} C_{,t}}{R e^C} - \frac{2R_{,t}^2}{e^A R^2} + \frac{A_{,tt}}{e^C} - \frac{C_{,rr}}{e^A} - \frac{4R_{,tt}}{R e^C} + \frac{2}{R^2} \quad (4.29)$$

Podemos analizar esta ecuación que nos define la curvatura para el espacio de Ruban y notamos que la curvatura en el origen, depende básicamente de que $R(t, r) \neq 0$ en $r = 0$ pues como podemos ver K es inversamente proporcional a R o a combinaciones de $R(t, r)e^{C(t, r)}$ o $R(t, r)e^{A(t, r)}$ pero ya que $e^{A(t, r)}$ y $e^{C(t, r)}$ son funciones exponenciales no pueden ser cero, de manera que la única manera posible para que K no sea acotada es que no se cumpla $R(t, r) \neq 0$ en $r = 0$.

Capítulo 5

El acoplamiento entre las soluciones

5.1. Condiciones de acoplamiento

La única solución o métrica exterior para una distribución esférica cargada es la solución de Reissner-Nordström. Mientras que la solución para una solución interior cargada regularmente y no vacía es decir que existe un fluido perfecto, no son únicas y como ya se mencionó en la introducción han sido ya estudiadas muchas de dichas soluciones por muchos y distintos autores. El caso de la ausencia de presión que es el caso en el que nos interesamos nosotros fue analizada en el capítulo cuatro pero desarrollada y estudiada por Ruban [15].

Tal como hacemos en electrodinámica, en la teoría gravitacional en ocasiones necesitamos acoplar soluciones de las ecuaciones de Einstein obtenidas separadamente para diferentes regiones del espacio-tiempo. A menudo queremos determinar si dado una solución del vacío puede ser interpretada como el campo gravitacional exterior de un cuerpo para el cual su solución interior fue encontrada previamente y dicha solución es distinta.

En ocasiones nos interesa describir una superficie de una distribución de materia en el límite entre dos regiones, pero excluirémos este caso. Generalmente, asumimos que no hay singularidades del tipo de las que se representan mediante una función de Dirac en las componentes del tensor de curvatura y la hipersuperficie mediante la cual acoplamos dos métricas es no-nula.

Con estas consideraciones en mente, las componentes del tensor de Rie-

mann pueden en el peor de los casos ser discontinuas en la hipersuperficie. Tenemos que permitir las discontinuidades ya que por ejemplo, la densidad de masa en la superficie de un cuerpo de fluido perfecto, la cual es igual a la componente T_0^0 del tensor de energía momento en coordenadas comóviles, es distinto de cero en la superficie y sin embargo es cero en los puntos adyacentes del vacío.

Las condiciones de acoplamiento que utilizamos para tratar el problema al que nos estamos enfrentando son las condiciones de Darmois, para explicar estas condiciones primeramente hay que pensar en lo que hemos venido hablando a lo largo de este texto, se tienen dos espacios tiempo $\mathcal{M}_+$ y $\mathcal{M}_-$ las cuales en principio no tienen por que tener o mejor dicho estar representadas por las mismas coordenadas podemos definir x_+^μ y x_-^μ respectivamente y además es posible definir en cada uno de los espacios tiempo un tensor métrico $g_+^{\mu\nu}$ y $g_-^{\mu\nu}$ respectivamente, además de los espacios tiempo que queremos acoplar es necesario definir una superficie Σ sobre la cual se realizara el acoplamiento pues pensandolo, si es que vamos a acoplar dos espacios tiempo entonces debe existir al menos una hipersuperficie común a ambos espacios, si la superficie es única entonces es sobre dicha superficie sobre la que trabajaremos para ver si ambos espacios estan en realidad acoplados o no de manera físicamente aceptable claro. Como se ilustra en la figura:

Entonces las condiciones de Darmois brindan un método que da restricciones a las soluciones que describen cada espacio tiempo de manera que geométricamente sea consistente el acoplamiento las condiciones de acoplamiento de Darmois son:

$$\begin{aligned} g_+^{\mu\nu} &= g_-^{\mu\nu} \\ K_{\alpha\beta}^+ &= K_{\alpha\beta}^- \end{aligned} \tag{5.1}$$

Estas condiciones son, la primera que la primera y segunda forma fundamental coincidan en la hipersuperficie en que se da el acoplamiento y la segunda que la segunda forma fundamental de ambos espacios coincida en la hipersuperficie Σ . Analicemos un poco la información que nos da la primera y la segunda forma fundamental para entender la razón de usar estas condiciones, la primera forma fundamental es una $n - 1$ métrica inducida sobre Σ_+ y Σ_- aquí estas hipersuperficies pertenecen a $\mathcal{M}_+$ y $\mathcal{M}_-$ respectivamente y esperamos que cuando se acerquen lo suficiente no exista diferencia entre Σ_+ y Σ_- de manera que esperamos que la $n - 1$ métrica inducida sobre cada hipersuperficie coincida ya que cuando estan lo suficientemente cerca tal que ambas

superficies son la misma entonces ambas $n - 1$ métricas estan describiendo la misma hipersuperficie solo vista desde distintas regiones por lo tanto ambas son iguales pues describen lo mismo de manera que la idea de hacer coincidir la primer forma fundamental no es para anda descabellada y parece natural pedir tal condidción. Ahora la segunda condición es hacer coincidir la segunda forma fundamental en la que recordemos que la segunda forma fundamental depende de la normal n_α de Σ .

Definición 5 sea $\hat{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ con f la ecuación parametrica de la hipersuperficie Σ entonces definimos la segunda forma fundamental como:

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \nabla_{[\alpha} n_{\beta]} \quad (5.2)$$

Dejando un poco las formalidades entendamos un poco más lo que representa y la información contenida en la segunda forma fundamental, la segunda forma fundamental describe como va cambiando la normal a lo largo de la hipersuperficie que estamos estudiando, ya que podemos utilizar la normal unitaria entonces la única variación que puede sufrir la normal es su dirección, entonces si la normal unitaria esta variando a l moverse sobre la hipersuperficie es por que su dirección esta variando. Entonces el pedir que la segunda forma fundamental interior y exterior coincidan es algo importante pues si no coinciden es por que la hipersuperficie no es continua que en el caso del acoplamiento quiere decir en pocas palabras que la hipersuperficie interior y la exterior no pueden coincidir, este detalle tiene consecuencias importantes por que entontes la unión de los dos esapacios tiempo que se quieren acoplar no tienen ninguna región en común y por lo tanto el acoplamiento carece de sentido físico y geométrico.

5.2. Acoplamiento entre las geometrías

Primeramente transformamos las coordenadas de Reissner-Nrdstrom a coordenadas apropiadas, en este caso dichas coordenadas son las comóviles. Para las coordenadas estándar de curvatura escribimos el par (τ, R_{RN}) , e introducimos el simbolo:

$$h = 1 - \frac{2m}{R_{RN}} + \frac{Q^2(r)}{R_{RN}^2} \quad (5.3)$$

y pedimos que en las nuevas coordenadas (t, r) permanezcan ortogonales así que $g_{tr} = 0$ es decir:

$$h\tau_{,t}\tau_{,r} - \frac{1}{h}R_{RN,t}R_{RN,r} = 0 \quad (5.4)$$

la función $C_{RN}(t, r)$ es:

$$e^{C_{RN}(t,r)} = h\tau_{,r}^2 - \frac{1}{h}R_{RN,t}^2 \quad (5.5)$$

Ahora resolvemos (5.4) y (5.5) para $\tau_{,r}$ y calculamos

$$(g_{11})_{RN} = h\tau_{,r}^2 - \frac{1}{h}R_{RN,t}^2 = \frac{e^C R_{RN,t}^2}{he^C + R_{RN,t}^2} \quad (5.6)$$

Este componente como podemos ver aún y será determinado por completo más adelante. Como τ esta definido por la ecuación diferencial parcial (5.4), sigue admitiendo una función arbitraria de una variable.

Deseamos acoplar el espacio representado por la solución de Ruban del capítulo 4 con el espacio de Reissner-Nordstrom en una hipersuperficie determinada por $r = r_b$. Requerimos satisfacer las condiciones de Darmois. La continuidad de la primera forma fundamental exige que:

$$e^{C(t,r_b)} = e^{C_{RN}(t,r_b)} \quad R(t, r_b) = R_{RN}(t, r_b) \quad (5.7)$$

La transformación que mantiene la métrica diagonal sigue siendo permitida. Al transformar t mediante $t' = \int e^{\alpha(t)} dt$, con $\alpha(t) = C_{RN}(t, r_b) - C(t, r_b)$ satisfacemos la condición (5.7) sin alterar la forma de g_{11} y g_{01} .

En la hipersuperficie $r = r_b$. $R_{RN}(t, r_b)$ debe ser la misma función de t que $R(t, r_b)$. En consecuencia $R_{,t}(t, r_b)$ debe ser la misma en ambas metricas, y entonces $R_{RN}(t, r_b)$ debe satisfacer:

$$e^{-C_{RN}(t,r_b)} R_{RN,t}^2(t, r_b) = \Gamma^2 - 1 + \frac{2M(r_b)}{R_{RN}(t, r_b)} - \frac{GQ^2(r_b)}{c^4 R_{RN}^2(t, r_b)} \quad (5.8)$$

El vector unitario normal a la hipersuperficie $r = r_b$ tiene las componentes:

$$X^\mu = (0, e^{\frac{-A}{2}}, 0, 0) = \left(0, \frac{\left(\Gamma - \frac{Q_{Q,N}}{R}\right)}{R_{,r}}, 0, 0\right) \quad (5.9)$$

para la métrica interior y de (5.5).

$$X_{RN}^\mu = \left(0, \frac{\sqrt{h + e^{-C_{RN}} R_{RN,t}^2}}{R_{RN,r}}, 0, 0 \right) \quad (5.10)$$

para la solución de Reissner-Nrdstrom. De la continuidad de la segunda forma fundamental tenemos $R_{,r}X^r|_{r=r_b} = R_{RN,r}X_{RN}^r|_{r=r_b}$ y $(e^C)_{,r}X^r|_{r=r_b} = (e^{C_{RN}})_{,r}X_{RN}^r|_{r=r_b}$ la primer condición dice entonces que:

$$(h + e^{-C_{RN}} R_{RN,t}^2)_{r=r_b} = \left(\Gamma - \frac{QQ_{,N}}{R} \right)^2 \quad (5.11)$$

la cual asegura la continuidad de $g_{11} = e^A$ através de $r = r_b$, aunque no teníamos que satisfacer esta condición.

Substituyendo para $R_{RN,t}^2$ de (5.8) y de h de (5.3) y comparando los coeficientes obtenemos:

$$e = \frac{\sqrt{G}}{c^2} Q(r_b) \quad m = (M + QQ_{,N}\Gamma)_{r=r_b} \quad (5.12)$$

La continuidad de la segunda forma fundamental impone una última condición sobre $C_{,r}$ utilizando (5.4), (5.5) y (5.6), la condición es entonces

$$C_{RN,r} \frac{\Gamma - QQ_{,N}/R}{R_{RN,r}}|_{r=r_b} = 2 \frac{QQ_{,N}}{R^2} \quad (5.13)$$

Aún no tenemos una expresión para $C_{RN,r}$ y la encontraremos a partir de las ecuaciones de campo. Sabemos que e^A es continua en $r = r_b$ entonces podemos utilizar (5.9) para $A_{RN}(t, r_b)$. Substituyendo esto en (5.11) y tomando la ecuación $G_{01} = 0$ en $r = r_b$ obtenemos el siguiente resultado.

$$C_{RN,r}(t, r_b) = \frac{2R_{RN,r}QQ_{,N}}{R^2(\Gamma - QQ_{,N}/R)}|_{r=r_b}, \quad (5.14)$$

lo cual muestra que (5.14) esta completamente satisfecha.

Entonces (5.12) es la única restricción en la métrica de la solución para polvo cargado por las condiciones de acoplamiento. la ecuación dada para la masa en (5.12) muestra la conexión entre la masa gravitacional activa y la masa efectiva.

5.3. polvo cargado en coordenadas curvatura y masa-curvatura

Ahora podemos describir las geometrias que hemos estado analizando mediante unas coordenadas en las que $R(t, r)$ sea la coordenada radial podemos ver que, $R_{,t}dr = dR - R_{,dt}$ tomamos t para que sea una función de las nuevas coordenadas $t = f(\tau, R)$ Entonces:

$$R_{,r}dr = dR - R_{,r}(f_{,\tau}d\tau + f_{,R}dR) \quad (5.15)$$

$$dt = f_{,\tau}d\tau + f_{,R}dR \quad (5.16)$$

y las nuevas componentes métricas quedan entonces como sigue:

$$g_{\tau\tau} = \frac{e^C f_{,\tau}^2 \Delta}{\left(\frac{\Gamma - QQ_{,N}}{R}\right)^2}, \quad (5.17)$$

$$g_{\tau R} = \frac{e^C f_{,r} f_R \Delta + f_{,\tau} R_{,t}}{\left(\frac{\Gamma - QQ_{,N}}{R}\right)^2}, \quad (5.18)$$

$$g_{RR} = \frac{e^C f_{,R}^2 \Delta - 1 + 2f_{,R} R_{,t}}{\left(\frac{\Gamma - QQ_{,N}}{R}\right)^2}, \quad (5.19)$$

$$\Delta = 1 - \frac{2\mathcal{M}}{R} + \frac{GQ^2}{c^4 R^2}, \quad (5.20)$$

donde $\mathcal{M}$ esta definida en (4.28), notemos que de (5.15) tenemos que la transformación es diferente para el polvo que colapsa $R_{,t} < 0$ y para el polvo en expansión $R_{,t} > 0$. La transformación de (τ, R) a (t, r) inversamente a (5.15) es analógo a introducir coordenadas comoviles en la región $r > r_+ = m + \sqrt{m^2 - e^2}$ en congruencia con las partículas que estan radialmente colapsando o en expansión.

Esto puede ahora ser estudiado de dos maneras distintas. una posibilidad es escoger las coordenadas de curvatura apropiadas, en las cuales $g_{\tau,R} = 0$. sin embargo a esta posibilidad no se la ha podido dar aplicación alguna hasta el día de hoy en la literatura existente, aunque resulta instructivo estudiar esta posibilidad. El otro posible caso de estudio de (5.16) a (5.18) se escoge de manera que $\mathcal{M}$ sea la nueva coordenada τ . Estas coordenadas masa-curvatura. Las superficies $\mathcal{M} = \text{constante}$ son tipo temporal. Ya que $\mathcal{M}$,

Q , Γ y N dependen solamente de r en las coordenadas originales tenemos $Q = Q(\mathcal{M})$, $\Gamma = \Gamma(\mathcal{M})$ y $N = N(\mathcal{M})$. Las matrices Jacobianas de las transformaciones $(t, r) \rightarrow (\mathcal{M}, R)$ son:

$$\frac{\partial(t, r)}{\partial(\mathcal{M}, R)} = \begin{bmatrix} f_{,\mathcal{M}} & f_{,R} \\ r_{,\mathcal{M}} & r_{,R} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial(\mathcal{M}, R)}{\partial(t, r)} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_{,r} \\ R_{,t} & R_{,r} \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

Las matrices deben ser inversas una a la otra.

$$f_{,M} = -\frac{R_{,r}}{R_{,t}M_{,r}}, \quad f_{,r} = 1/R_{,t} \quad r_{,M} = 1/M_{,r} \quad r_{,R} = 0, \quad (5.22)$$

en las coordenadas $(x^0, x^i) \stackrel{def}{=} (M, R)$ el campo de velocidades sigue teniendo una sola componente covariante:

$$u^R = \pm \sqrt{\Gamma^2 - 1 + \frac{2M}{R} + \frac{Q^2(Q_{,N}^2 - G/c^4)}{R^2} - \frac{1}{3}\Lambda R^2} \quad (5.23)$$

Ahora definimos las siguientes cantidades:

$$u \stackrel{def}{=} \Gamma - QQ_{,N}/R, \quad (5.24)$$

$$e^{C/2}/uf_{,\mathcal{M}} \stackrel{def}{=} F(\mathcal{M}, R) \quad (5.25)$$

utilizando (4.5), (4.6), (4.18), (4.21), (4.28) y (5.23)

$$G_{\mathcal{M}\mathcal{M}} = F^2\Delta \quad g_{\mathcal{M}R} = Fu/u^R \quad g_{RR} = 1/(u^R)^2, \quad (5.26)$$

mientras que las ecuaciones (5.15) y (5.16) simplifican a $dr = d\mathcal{M}/\mathcal{M}_{,r}$ y $dt = (-R_{,r}d\mathcal{M}/\mathcal{M}_{,r} + dR)/R_{,t}$. La función $F(\mathcal{M}, R)$ puede ser encontrada a partir de las ecuaciones de campo.

utilizando (5.22), (5.23) y (5.25) encontramos el único componente no cero del tensor electromagnético el cual en coordenadas $(\mathcal{M}, R)$ se expresa como sigue:

$$F^{\mathcal{M}R} = -F^{RM} = \frac{Q}{FR^2}, \quad F_{\mathcal{M}R} = -F_{R\mathcal{M}} = \frac{-FQ}{R^2} \quad (5.27)$$

de las ecuaciones (5.20) y (5.23) encontramos para la densidad de carga y la densidad de energía toman la forma:

$$\frac{4\pi\rho_\epsilon}{c} = -\frac{Q_{,\mathcal{M}}}{R^2Fu^R}, \quad \kappa\epsilon = -\frac{2}{\Gamma R^2Fu^R}. \quad (5.28)$$

Recordando que las coordenadas $(\mathcal{M}, R)$ cubren solamente la región en la cual R_t se mantiene postivo o negativo Como se muestra en (5.22) y (5.25), F cambia de signo cuando R_t lo hace y también $u^R = e^{\frac{-C}{2}} R_t$, entonces Fu^R preserva su signo cuando colapsa o se expande. Esto será importante m'pas tarde cuando calculemos F . Ahora de $F(\mathcal{M}, R)$ es la única función desconocida, la cual encontraremos más tarde.

$$u_{\mathcal{M}} = uF, \quad u_R = 1/u^R, \quad (5.29)$$

$$g^{\mathcal{M}\mathcal{M}} = -\frac{1}{(Fu^R)^2}, \quad g^{\mathcal{M}R} = \frac{u}{Fu^R}, \quad g^{RR} = -\Delta. \quad (5.30)$$

En las coordenadas $(\mathcal{M}, R)$ la ecuación (4.28) queda de la siguiente manera:

$$(G\Gamma/c^4)N_{,\mathcal{M}} = 1 \quad (5.31)$$

The function F puede ser encontrada de (4.16). Utilizando (4.21) para obtener:

$$F_{,R} = -\frac{u_{,\mathcal{M}}^R}{u(u^R)^2}. \quad (5.32)$$

Usando (5.24) y (5.31) transformamos (5.32) a:

$$F_{,R} = -\frac{1}{(u^R(\mathcal{M}, R))^3} \left\{ \Gamma_{,\mathcal{M}} + \frac{1}{R\Gamma} \left[1 - \frac{c^4}{G} (Q_{,N}^2 + QQ_{,NN}) \right] \right\}. \quad (5.33)$$

5.4. La evolución de polvo cargado en coordenadas masa-curvatura

En las coordenadas masa-curvatura es fácil de resolver la ecuación de evolución $\frac{dR}{ds} = u^R$. En esta ocasión podemos utilizar un método que previene las singularidades de Big Bang o Big Crunch.

Tomamos $l = 1$ para la expansión y $l = -1$ para la contracción, definimos los siguientes elementos:

$$2E \stackrel{def}{=} \Gamma^2 - 1 \quad \Phi \stackrel{def}{=} \frac{Q^2(Q_{,N}^2 - \frac{G}{c^4})}{2E} \quad (5.34)$$

para obtener de (5.23) que:

$$\frac{dR}{ds} = l\sqrt{2E} + \frac{2M}{R} + \frac{2E\Phi}{R^2} \quad (5.35)$$

La integral es diferente para cada signo de E , y para $E=0$ hay varios sub-casos, dependiendo de los valores de Φ y M ; $\Phi < 0$ corresponde con el caso $Q_{,N}^2 < \frac{G}{c^4}$. Con $\Phi = 0$ las soluciones son las mismas que en el modelo de L-T [6], mientras que, si $Q \neq 0$ la masa efectiva M sigue contenida en una contribución de las cargas. Con $E \neq 0$ se tiene la manera más conveniente de representar $R(s)$ mediante la formula paramétrica $(R(\omega), s(\omega))$.

Con $E > 0$ y $\Phi < \frac{M^2}{4E^2}$ la solución es:

$$\begin{aligned} R &= l\sqrt{\frac{M^2}{4E^2} - \Phi} \cosh \omega - \frac{M}{2E} \\ s &= \frac{l}{\sqrt{2E}} \left(\sqrt{\frac{M^2}{4E^2} - \Phi} \sinh \omega - \frac{M}{2E} \omega \right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Como veremos más adelante las gráficas muestran d se encuentran las singularidades de curvatura, pues sen donde la funcira $R(s)$ se va a cero lo que tendrá como consecuencia que el escalar de curvatura K sea no acotado. A continuación mostramos las gráficas de R en terminos de s , antes hacemos la aclaración de que las gráficas que se muestran son aquellos que dan lugar a singularidades, estos casos son producto de los distintos valores aceptados de M , l y Φ .

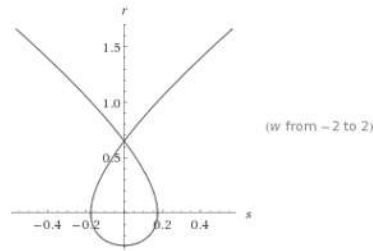


Figura 5.1: para $l = -1$, $M < 0$, $\Phi > 0$

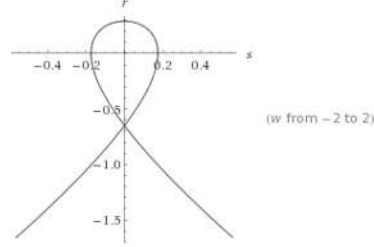


Figura 5.2: para $l = 1, M > 0, \Phi < 0$

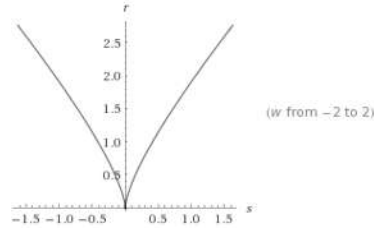


Figura 5.3: para $l = 1, M > 0, \Phi = 0$

Como ya vimos para la forma que define a R tenemos que esta solución depende de el cociente $\frac{M}{2M}$ de manera que entonces es bueno preguntarnos si existen soluciones cuando $E = 0 = M$ la solución existe unicamente cuando $Q_{,N} < \frac{G}{c^4}$ y entonces la forma de R toma la siguiente forma:

$$R = \sqrt{2l|Q|\sqrt{Q_{,N}^2 - \frac{G}{c^4}}[s]} \quad (5.37)$$

La cual tiene siempre una singularidad. Una gráfica tiene una forma similar a la curva que aparece en la figura anterior. Cuando $E < 0$, una solución existe solo con $\Phi < \frac{M^2}{4E^2}$ y dicha solución es la que se muestra:

$$\begin{aligned} R &= -\frac{M}{2E} - \sqrt{\frac{M^2}{4E^2} - \Phi \cos \omega} - \frac{M}{2E} \\ s &= \frac{l}{\sqrt{2E}} \left(\sqrt{\frac{M^2}{4E^2} - \Phi \sinh \omega} - \frac{M}{2E} \right) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Para esta solución solo mostraremos el caso que no es singular, pues para esta forma de $R(s)$ existe solo una combinación de los valores de M , Φ y l que es no singular.

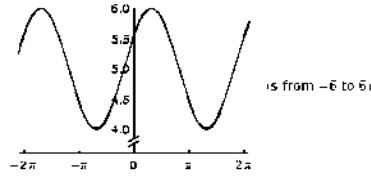


Figura 5.4: para $l = 1$, $M > 0$, $\Phi = 0$

Vemos que en concordancia con lo que se ve en la gráfica esta solución es del tipo periódica y el periodo de dicha solución es $T = \frac{2\pi M}{(-2E)^{\frac{3}{2}}}$. Algo interesante que es necesario marcar en todos los casos es que si nos damos cuenta estas formas que hemos encontrado como solución R son periódicas u oscilatorias lo cual es muy interesante pues vemos que el radio de la hipersuperficie donde se acoplan las geometrías es variable.

5.5. Generalización

Es momento de hacer una generalización a algunos de los temas que hemos venido estudiando a lo largo de la tesis, para esto solo queremos responder una pregunta, si el espacio no fuese tetradimensional, se cumplen las mismas condiciones de regularidad?. Podemos primero generalizar ambas métricas. Así que podemos generalizar las métricas (3.18) y (4.1) a sabiendas de que estamos en un espacio esférico, pensemos en que la generalización de estas métricas a n -dimensiones no es más que a una esfera de dimensión $n-2$ agregar dos dimensiones más, el espacio radial y el temporal, veamos que esto nos permite tener un espacio de n -dimensiones. Entonces generalicemos la métrica que describe un espacio esférico n -dimensional:

$$ds^2 = -f(t, r)dt^2 + h(t, r)dr^2 + R^2(t, r)d\Omega_{n-2}^2 \quad (5.39)$$

Donde el diferencial $d\Omega_{n-2}$ representa precisamente una esfera unitaria $n-2$ dimensional de la cual estábamos hablando anteriormente.

Entonces podemos escribir las soluciones de Ruban y de Reissner-Nördstrom generalizadas de la siguiente manera:

$$ds^2 = -\frac{1}{\hat{f}}dt^2 + \hat{f}dr^2 + r^2d\Omega_{n-2}^2 \quad (5.40)$$

$$d\hat{s}^2 = -e^{C(\hat{t},\hat{r})}dt^2 + e^{A(\hat{t},\hat{r})}dr^2 + R^2(\hat{t},\hat{r})d\Omega_{n-2}^2, \quad (5.41)$$

utilizamos las coordenadas $(\hat{t}, \hat{r})$ para diferenciarlas de las coordenadas (t, r) ya que en principio no tienen por que ser las mismas coordenadas aún cuando representan cosas similares.

También identificamos $\hat{f}$ que es el ango de f de la métrica (3.18). Esto nos será muy útil para lo que haremos a continuación puesto que, de acuerdo a la relación (2.1) nos es posible encontrar las ecuaciones de campo utilizando el mismo proceso que el utilizado en el capítulo II para encontrar la solución de Schwarzschild [2]. Esto pues en el capítulo II tratamos que la ecuación de Einstein esta definida para actuar sobre cualquier métrica sin importar su dimensión.

Tal y como se hizo para encontrar la solución de Ruban y de Reissner-Nördstrom podemos exresar la ecuación de Einstein para el caso generalizado el cual se verá de la siguiente manera:

$$G_\mu^\nu = k\epsilon u_\mu u_\nu + \frac{k}{4\pi}[F_\alpha^\mu F_{\alpha\beta} - \frac{g_{\mu\nu}F}{4}] \quad (5.42)$$

Es posible entonces ahora que hemos definido la métrica n-dimensional describir el tensor de Einstein o mejor dicho sus componentes:

$$G_t^t = (n-2) \left(\frac{(n-3)R_{,r}^2}{e^A R^2} - \frac{1}{2} \frac{(e^A)_{,r} R_{,r}}{R e^{2A}} - \frac{1}{2} \frac{(n-3)R_{,t}^2}{R^2 e^{2C}} - \frac{1}{2} \frac{(e^A)_{,t} R_{,t}}{R e^{C+A}} - \frac{R_{,rr}}{R e^A} - \frac{(n-3)}{R^2} \right) \quad (5.43)$$

$$G_t^r = \frac{1}{2}(n-1) \left(\frac{R_{,r}(e^A)_{,t}}{R e^{2A}} + \frac{(e^C)_{,r} R_{,t}}{R e^{A+C}} - \frac{2R_{,tr}}{R e^A} \right) \quad (5.44)$$

$$G_r^r = (n-2) \left(\frac{(n-3)R_{,r}^2}{e^C R^2} - \frac{1}{2} \frac{(e^A)_{,r} R_{,r}}{R e^{2A}} - \frac{1}{2} \frac{(n-3)R_{,t}^2}{R^2 e^{2C}} - \frac{1}{2} \frac{(e^C)_{,t} R_{,t}}{R e^{C+A}} - \frac{R_{,rr}}{R e^A} - \frac{(n-3)}{R^2} \right) \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned}
G_i{}^i = & \frac{(n-4)(n-3)R_{,r}^2}{2e^A R^2} + \left(\frac{(n-3)(e^C_{,r})}{2Re^{A+C}} - \frac{(n-3)(e^A_{,r})}{2Re^{2A}} \right) R_{,r} + \\
& \left(\frac{(n-3)(e^C_{,t})}{2Re^{2C}} - \frac{(n-3)(e^A_{,t})}{2Re^{2A+C}} \right) R_{,t} - \frac{(e^C)_{,r}}{4e^{A+2C}} - \frac{(e^C)_{,r}(e^A)_{,r}}{4e^C e^{2A}} + \frac{(e^A)_{,t}(e^C)_{,t}}{4e^{2C} e^A} + \\
& \frac{(e^A)_{,t}^2}{e^C e^{2A}} + \frac{(n-3)R_{,rr}}{Re^A} - \frac{(n-3)R_{,tt}}{Re^C} + \frac{(e^C)_{,rr}}{2e^{C+A}} - \\
& - \frac{(e^A)_{,tt}}{2e^{C+A}} - \frac{(n-4)(n-3)}{R^2}; \quad i = 3, 4 \dots n
\end{aligned}$$

Como podemos apreciar al hacer una comparación con la métrica de ruban 4-dimensional las ecuaciones no se ven afectadas sustancialmente, al menos en cuanto a las posibles singularidades que puedan existir para las ecuaciones de Einstein. Tal es el caso de la ecuación (5.43) de la que podemos observar que salvo el factor $(n-2)$ es idéntico a (4.12) y esto es muy importante pues nos permite comenzar a analizar el tensor $T_{\mu\nu}$ el cual mediante las ecuaciones (3.1) y (3.2) se puede observar que debe ser cero en su componente T_{01} esto debido a (5.43)

De las estructuras de las cuales ya hablamos previamente podemos entonces escribir las ecuaciones de Einstein para el caso generalizado:

$$T_t{}^t = k \left[\frac{F}{4} - 4\epsilon - F_{01}^2 \right], \quad (5.46)$$

$$T_r{}^t = 0, \quad (5.47)$$

$$T_r{}^r = k \left[-\frac{F}{4} - F_{01}^2 \right], \quad (5.48)$$

$$T_\theta{}^\theta = -\frac{kF}{4}, \quad (5.49)$$

Donde $F = -\frac{2Q^2}{R^{2(n-2)}(t,r)}$ de donde podemos ver que $F = -2F_{01}^2$ con F_{01} la componente que prevalece del tensor de Maxwell definida en (3.5).

Ahora tal y como hicimos en el capítulo III podemos encontrar la forma de $\hat{f}$ a partir de las ecuaciones de campo que para la métrica (5.40) toma la

siguiente forma:

$$\hat{f} = 1 - \frac{2m}{r^{n-3}} + \frac{Q^2}{r^{2(n-3)}} \quad (5.50)$$

De donde podemos ver que es exactamente la misma forma que habíamos encontrado anteriormente en el capítulo III para $n = 4$.

Mientras tanto para la métrica de Ruban[15] n -dimensional tenemos que seguimos con el mismo problema que el que tuvimos en el capítulo IV es decir encontrar las mismas funciones $C(t, r)$, $A(t, r)$ y $R(t, r)$ que son las que queremos conocer para tener bien definida la métrica aunque en el transcurso de encontrarlas debemos encontrar otras funciones como Γ y N que son hasta cierto punto auxiliares. Pero para fortuna de nuestra labor el algoritmo dado en el capítulo IV para encontrar dichas funciones sigue siendo válido. El hecho de que al aplicar el algoritmo encontremos que la función $_{,r} = 2 \frac{Q Q_{,N}}{\pi R^{2(n-2)}}$ nos permite hacer notar la que es una propiedad muy hermosa e interesante y es que podemos ver que la $R(t, r)$ del caso generalizado se puede expresar mediante una transformación como $R \rightarrow R^{n-2}$ veremos más adelante que esta transformación es muy bella pues puede alterar la forma de R sin embargo preserva los ceros de la función que son de vital importancia para el análisis de la métrica que estamos realizando.

Existe una implicación aún más fuerte y es que como sabemos comenzamos a analizar la métrica partiendo de que conocemos la geometría del espacio, así como las fuentes es decir Q , Φ y M entonces ya que la generalización de Ruban, no es más aumentar la dimensión de una esfera unitaria vemos que todo se reduce a un espacio bidimensional con ecuaciones bien definidas para R , C y A así como para las fuentes y la geometría.

Ahora bien, para una métrica esférica n -dimensional es posible calcular su escalar de curvatura, en particular para la solución de Ruban n -dimensional

es posible cumplir tal propósito.

$$\begin{aligned}
K = & \frac{1}{4e^{4C}e^{4A}}(-2(e^C)_{,rr}e^{C+A} + 2(e^A)_{,tt}e^{C+A} + e^A(e^C)_{,r}^4 - e^A(e^C)_{,t}(e^A)_{,t} - \\
& - e^C(e^A)_{,t}^4 + e^C(e^C)_{,r}(e^A)_{,r})^2 + \frac{2(n-3)(n-2)[e^{A+C} + R_{,t}^2 - R_{,r}^2]^2}{e^{4C}R^2e^{2A}} + \\
& + \frac{(n-2)(-2R_{,tt}e^{C+A} + (e^C)_{,t}R_{,t} + (e^C)_{,r}R_{,r}e^C)^2}{e^{4C}R^2e^{2A}} + \\
& + \frac{(n-2)(-2R_{,rr}e^{A+C} + R_{,t}(e^A)_{,t}e^A + (e^A)_{,r}e^C)^2}{e^{4A}R^2e^{2C}} + \\
& - \frac{(2(n-2))[-2R_{,tr}e^{A+C} + R_{,t}(e^C)_{,r}e^A + (e^A)_{,t}R_{,t}e^C]^2}{e^{3(A+C)}R^2}
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Como podemos ver el hecho de que el último término de K sea (5.43) nos permite definir el escalar de Krtschmann como suma de terminos cuadraticos positivos. Aunque K el escalar de curvatura resulto con una forma algo anti estética nos brinda mucha información y de vital importancia, vemos por ejemplo que nuevamente el escalar sería una función no acotada para los casos en que e^A y e^C se hagan nulos pero como ya dijimos en el capitulo V esto nunca sucede pues son funciones exponenciales de valores acotados de r , pues como ya se dijo en el capitulo IV $r \in (0, r_b)$. Así que la singularidad se colocara nuevamente cuando $R(t, r) = 0$ lo cual podría haber cambiado pero el hecho de que no lo hiciera nos facilita aún más el camino, puesto que otra vez basta solo con conocer $R(s)$ para saber si R es nulo en algún punto y por consecuencia los puntos en que el escalar de curvatura es singular.

Podemos hacer para fijar ideas el gráfico de una de las situaciones que tuvo mayor alcance en la tesis y es el caso en que la solución de R oscilaba, vemos que para $n = 6$ la gráfica conserva la misma forma pero se hace un poco más ancha:

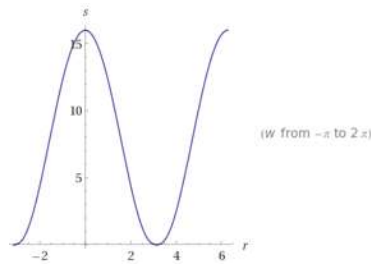


Figura 5.5: para $l = 1$, $M > 0$, $\Phi = 0$

Otro caso que podemos analizar es para $n = 6$ el cual se presenta a continuación:

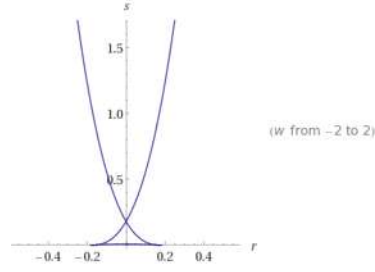


Figura 5.6: para $l = 1, M > 0, \Phi < 0$

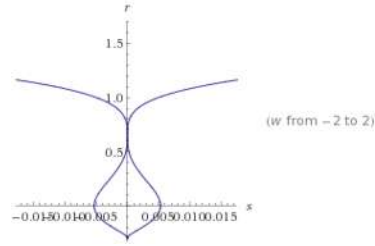


Figura 5.7: para $l = 1, M > 0, \Phi < 0$

Donde podemos observar que la forma de R cambia sin embargo su comportamiento no, a excepción de que dependiendo de si n es par o impar la gráfica será siempre positiva o tendrá parte positiva y negativa.

Capítulo 6

Conclusiones

Hemos mostrado a lo largo de la tesis que son consistentes al menos en el marco de la relatividad general la existencia de dimensiones extras lo cual apoya y da un poco más de solidez a las teorías físicas que incluyen dimensiones extra en su trabajo y actuar.

Se ha mostrado un buen método para tratar los problemas en la frontera en el acoplamiento, vemos en el trabajo que las dimensiones extras no afectan el comportamiento de las interacciones entre las geometrias descritas por el espacio tiempo de Ruban [1] y el espacio tiempo de Reissner- Nördstrom pues las dimensiones extra en espacios esféricamente simétricos se ven como esferas unitarias de dimensión $n-2$ esto da lugar a algunas analogías interesantes y es que si vemos como se modifican las cosas en la frontera durante el acoplamiento para las esferas unitarias de dimensión n es que esto a lo más puede generar movimientos como los de rotación pero no de traslación y al analizar las ecuaciones de acoplamiento vemos que estas se verían afectadas solo por movimientos de traslación.

Otro aspecto interesante de mencionar es el hecho de que la solución R pueda ser variable incluso en la frontera siendo que el espacio exterior es un espacio-tiempo estático.

Para finalizar hay aún muchas propiedades interesantes que el estudio de espacios tiempo en dimensiones extra nos puede dar e incluso los cambios o falta de ellos que puede revelar el estudiar otros procesos en dimensiones extra, por ejemplo el analizar a detalle que pasaría cuando el espacio interior es una estrella real y no solo polvo electricamente cargado.

Bibliografia

- [1] T. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Math. Phys. 96 (1921) 69, O. Klein, Z.Phys. 37 (1926) 895.
- [2] Mark Heinzle¹, Claes Uggla. Newtonian Stellar Models. arXiv:astro-ph/0211628v1. (2002).
- [3] . R. M. Wald, *General Relativity* (Univ. Chicago Press, Chicago 1984).
- [4] Andrzej Krasinski, Kryztof Bloejko. Avoidance of Singularities in spherically symmetric charged dust arXiv:gr-qc/0602090v4. (2007)
- [5] N.F. Dandash. Matching of Schwarzschild's and Friedmán Fields in Synchronous Coordinates. IL NUOVO CIMENTO (1989).
- [6] Hernando Quevedo. Matching Conditions in Relativistic Astrophysics. arxiv:gr-qc/1205.0500v1 (2012)
- [7] Andrzej Krasinski, Gabriel Giono. The charged dust solution of Ruban: matching to Reissner-Nördstrom and shell crossings. arXiv:gr-qc/44:239-51 (2012)
- [8] Hawking.S.W.,Ellis. G.F.R.: The large-scale structure of spacetime. Cambridge University Press, Cambridge (1973)
- [9] Ori, A.: Phys. Rev. D44,2278 (1991)
- [10] Plebanski.J.,Krasinski.A.: An introduction to General Relativity and Cosmology. Cambridge University Press. Cambridge. (2006)
- [11] Reissner H.:Ann. Physik. 50. 106 (1996)
- [12] Nordstöm G.: Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen Proceedings 20, 1238 (1918)
- [13] Ruban, V.A.:Zh Eksper Teor. Fiz. 85, 801 (1983); English Translation: Sov. Phys. JETP 58 463 (1983)