UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

"Estudio de problemas en Geometría Moderna y la incorporación del software dinámico"

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciada en Ciencias Físico-Matemáticas

PRESENTA:

Alma Rosa Méndez Gordillo

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Armando Sepúlveda López

MORELIA, MICHOACÁN, MARZO DE 2013

Agradecimientos

A las personas que día a día están conmigo

En primer lugar te agradezco a ti Dios, por ayudarme a terminar este proyecto, gracias por darme la fuerza y el coraje para hacer este sueño realidad, por ponerme en este loco mundo, por estar conmigo en cada momento de mi vida. Por cada regalo de gracia que me has dado y que inmerecidamente he recibido, como la beca sin la cual no hubiera podido concluir mis estudios, una prueba más de tu fidelidad, prometiste una buena escuela y diste algo que fue más allá de mis expectativas, por lo que me doy cuenta que no te vale mi desarrollo, pero antes de ser profesionista quiero ser siempre tu hija, ya que es el mayor privilegio que podemos tener, más valioso que todos los títulos de la tierra.

A Jesucristo por hacer algo tan brutal en mi vida con tu sacrificio en la cruz, gracias por haberme sacado de la basura para llevarme a lugares celestiales, ya que sin ti no existiría razón para vivir, me has dado hasta lo que ni siquiera he imaginado. El haberte conocido ha sido lo mejor que me ha pasado, ya que si no hubiera sido por ti no sé dónde estaría ahora y mi vida no seria emocionante. Gracias porque me has iluminado y guiado durante este tiempo en la universidad, porque sin ti no hubiera podido salir adelante en los momentos difíciles y de prueba, no tengo palabras para agradecer lo mucho que me has dado, lo único que puedo decir es que te necesitaré en cada proyecto que emprenda en mi vida, por

lo que nunca me apartaré de ti.

A mi papá Raúl, gracias por todo el apoyo que me has dado desde la infancia hasta ahora y porque siempre has trabajado para darnos lo mejor a mis hermanos y a mí. A través de estas líneas quiero decirlo lo mucho que te quiero, gracias por ser el mejor padre del mundo y por quitarte el pan de la boca con tal de que no nos faltara nada, además de un padre has sido un gran amigo y consejero, te amo pa'.

A mi mamá Graciela, gracias por tu apoyo incondicional, por el desvelo que has tenido por nosotros "en especial en mí", por estar conmigo en cada etapa de mi vida y por ser una amiga y comprenderme en los momentos más difíciles, como toda buena madre das la vida por tus hijos.

A mi hermana Lucy, gracias por aguantar a la hermanita menor y por preocuparte por mi cuando las cosas me salían mal, sigue adelante con esas criaturitas que Dios te va poniendo en el camino, cuídalas como las joyas más valiosas, sigue tus sueños y anhelos aun cuando se vean un poco lejitos sabes que siempre estaré ahí contigo para lo que necesites, te quiero hermanita.

A mi hermano Raúl, gracias por los consejos que me has dado, por estar en los momentos más difíciles que he tenido, por nunca dejarme caer y deseo que culmines tu carrera así como lo deseas y siempre persigue tus sueños que los lograras, eres un ser humano único que me enorgulleces te quiero mucho.

A mi hermano más "peque" Carlos, gracias por tus consejos que apresar de tu corta edad has madurado mucho y eso me hace muy feliz, te doy las gracias por estar siempre cuando lo he necesitado, porque nos cuidas y nos quieres proteger siempre, te digo lo mismo que a Lucy y a Raúl, siempre sigue tus sueños no per-

mitas que los obstáculos que se presentaran hagan que desistas de lo que añoras pelea siempre y acuérdate que eres un gran guerrero y lo que te propongas lo conseguirás, siempre te querré mucho y de manera muy especial, ya que nos parecemos mucho, te quiero.

A mis amores mis tres perritos Morro, Güera y Peque, gracias por cuidar de la casa cuando no estamos y por ser buenos ejemplos de guardianes, y a nuestra torcaza Cucu que da alegría a la casa.

A mi familia en general, Abuelos (as), Tíos (as), Primos (as) que siempre me han ayudado cuando lo he necesitado, gracias por las sonrisas, su generosidad para con nosotros y lo mejor los momentos felices que hemos compartido con todos ustedes.

A mis maestros que han ayudado a forjarme como una buena persona con educación, gracias a mis profesores de Kinder, Primaria, Secundaria, Preparatoria y la Universidad.

En especial le agradezco a mis maestros de secu, mi maestro Gabino quien gracias a él, conocí este mundo tan fascinante que son las matemáticas, gracias por todos los sabios consejos que durante todo este tiempo he recibido de su parte, a mi maestra Chivis que gracias a ella aprendí mucho sobre un mundo también muy agradable que es la poesía, la literatura y por ser tan estricta con nosotros para hacernos disciplinados y responsables.

A mis maestros de la prepa les quiero agradecer que siempre nos enseñaron que nunca debemos de desistir aun cuando todo se torna obscuro sin salida, por ser siempre estrictos y hacer que fuéramos personas que se enfrentaran a un futuro de trabajo y siempre competitivos.

A mis maestros de la facultad de cada uno aprendí muchísimas cosas, ya que cuando uno va pasando a otro nivel, nos vamos dando cuenta que sabemos cada vez menos pues ahora la carrera la veo como un bosque tan espeso y con tantas curiosidades que nunca se termina de examinar.

En especial agradecimiento por siempre dedicar de su tiempo para explicarnos ya fuesen dudas de clase o de tareas al profesor Jorge López, a un maestro que siempre admire por su forma de dar clase, por la forma de conducirse con nosotros y por todo lo que aprendí académicamente, al profesor Homero Díaz, al profesor David Meza ya que su manera de dar clase era única y muy divertida, a los profesores Luis Valero, José Gerardo Tinoco, Elmar, Mario Cesar, Nadia Romero, Ma. De Lourdes y a mis profesores de Física.

Y por último, a una persona muy especial a mi asesor y maestro el *Dr. Armando Sepúlveda* quien me apoyo desde siempre gracias por todos los consejos que me ha dado, por las experiencias en las que me invito a participar, por la amistad que me ofreció y por apoyarme en los momentos difíciles que he tenido que pasar, sé que no hay palabras para decir lo mucho que lo aprecio y admiro, pues es una persona que se ha ganado el respeto de muchos así como su admiración, la dedicación que presto en mi tesis y para conmigo, gracias por todo y siempre espero contar con su amistad así como usted con la mía.

A mis sinodales, por estar comprometidos con su profesión y hacer aportaciones para mejorar el presente trabajo: Dr. Jorge Luis López López, Dr. Fernando Hernández Hernández, Dr. David Meza Alcántara y M.C. Roberto García.

A finalmente a todos mis compañeros que han estado conmigo desde Primaria, Secundaria, Prepa, Universidad, los de la Parroquia, del Ingles que siempre han dejado huella en mi vida y por todos los momentos compartidos.

En especial a mis amigos con los que hicimos travesuras, pase mi adolescencia, cumplimos retos, y ahora he podido compartir una etapa muy padre de sus vidas “ser mamás.ª mis amigas Nereyda y Julieta. A Cesar por ser un súper amigo con el que aun cuento en todo momento. A una persona tan especial en mi vida Carmen que es como una hermana para mi le agradezco toda la amistad que siempre me ha brindado y su apoyo, por las locuras que hemos hecho juntas y las vivencias que hemos compartido, ¡te quiero mucho amiga!

A mis amigos Carmen, Laura, Brenda y Alex que conocí en su mayoría en la prepa, con los cuales probablemente nos tocó superar obstáculos bastantes fuertes pero que también hicieron que maduráramos y formaran a las personas que ahora somos gracias amigos por todo.

A mis amigos de la facu Javier, Antón, Heber y Valentin que fueron con los que primero me hable y que me apoyaron siempre, gracias por la lealtad, por su sinceridad y por ser tan diferentes ya que nuestro grupo era característico por eso, los adoro niños y saben que Rosita siempre estará para ustedes. Gracias a Fabi, Yun, Meztli que aunque las conocí un poco más adelante en la carrera pero que no significa que no se ganaron un lugar especial en mi corazón, fueron geniales conmigo, gracias por siempre brindarme su amistad y cariño y por ayudarme cuando lo necesitaba las adoro niñas y saben que siempre estaré para ustedes. A otros grandes amigos que me ayudaron a madurar muchísimo y con los que pase momentos geniales Cecilio, Zaredh, Humberto, Cesar Guerra y Darío con quienes encontré una amistad sincera y muy leal.

A una personita que llego a mi vida a dar un giro de 360 grados, pues hizo que mi vida se llenara de alegría y felicidad, supo darme los consejos necesarios y precisos para salir siempre adelante, que me entrego su amistad sincera y que nunca tendré con que pagarle el ayudarme a regresar a una vida de paz espiritual que siempre había añorado, gracias Juanpis por ser tan especial y compartir tus experiencias que han sido los cimientos para lo que ahora quiero construir y que se cuesta mucho, pero como siempre me lo has dicho querer es poder... gracias amigo.

A una amiga con la cual hubo un especial cariño y que jamás pensé pasar tantas vivencias pero que le agradezco desde el fondo de mi corazón y por todo su apoyo brindado, por las veces que le toco hacerme reír, que hablo conmigo, por apoyarme incondicionalmente y con la que aprendí tantas cosas y por lo que aún nos falta aprender juntas… a mi amiga Marian, que sabe que la adoro y que jamás la dejare sola, siempre estaré contigo.

Y por último a Ezequiel una persona que también quiero muchísimo y de una manera muy especial, ya que me enseño a que la vida no es solamente blanca o negra, sino que existen matices y que también son hermosos y que vale la pena disfrutar, además de quitar miedos de mi vida, a ser una persona con más fortaleza y madurez, me enseño a nunca dejarme vencer por más feos que se me presenten los obstáculos pues es un ejemplo de ello, gracias también por tu sinceridad en todo momento y por todos aquellos momentos que pasamos juntos, y sobre todo el luchar por una amistad sincera que ha podido vencer los obstáculos que se han presentado por todo esto y todo lo que prefiero se quede atesorado en mi corazón gracias. Sé que aquí se culmina un capitulo en mi vida que ha sido maravilloso y del cual jamás me arrepentiré haber vivido como lo hice, por todo esto doy gracias a Dios y cada uno de los que estuvieron presentes.

A las personas que se molesten por leer esta tesis gracias y ojala tengan la fortuna como ahora la tengo yo de poder agradecer a todos y cada una de las personas con las que han vivido esta experiencia de culminar sus estudios universitarios.

Presentación

Este trabajo tiene que ver con el estudio de temas típicos de la Geometría Moderna y, durante su desarrollo, se destacan las acciones sustanciales en el proceso de resolución de problemas y se remarca cómo el uso del software dinámico puede contribuir al entendimiento y solución de problemas geométricos que involucran los conceptos de variación, tangencia, eje radical e inversión.

En el Capítulo 1 se dedica al establecimiento del problema de investigación, los objetivos y metas de este trabajo. El Capítulo 2 contiene una revisión de literatura relacionada con los tópicos que respaldan el estudio que se ha realizado.

El Capítulo 3 es la parte central del trabajo; está dedicado al estudio de los problemas geométricos que hemos seleccionado con la intensión de cubrir los contenidos correspondientes al nivel superior, en una escuela de ciencias. En todos ellos resaltamos aspectos históricos, la potencia y aplicabilidad de los resultados y destacamos la convivencia de la combinación del uso de estrategias heurísticas y recursos matemáticos en la solución de los mismos.

Finalmente, el Capítulo 4 se dedica a presentar las conclusiones del trabajo. En la presentación de los problemas del Capítulo 3, enunciados como Teoremas, se utilizan, de manera central, las nociones de variación, cuadriláteros cíclicos, eje radical e inversión.

El Teorema 3.1 corresponde a un problema que nos muestra resultados importantes que se relacionan con el área de un triángulo en función del semi perímetro, la relación existente entre el radio del incírculo y los radios de los excírculos; y con las alturas. Así mismo, de manera inmediata se pueden obtener los ejes radicales de las tres parejas de circunferencias formadas por la inscrita y a cada una de las excrítas.

Los que siguen corresponden a problemas de importancia histórica, que fueron planteados por distinguidos matemáticos en los siglos $XVIII$ y XIX.

El Teorema 3.2 se debe, al parecer, al gran matemático Euler (1707-1783), quien fue el primero en abordar este problema y establecer la Circunferencia de los nueve puntos. Sin embargo, aunque no se le atribuye, casi siempre se hace referencia a Karl Feuerbach (1804-1872) en relación a esta circunferencia.

En 1765 Euler demuestra que una *circunferencia pasa por nueve puntos notables: el punto medio de cada lado del triángulo, los pies de las alturas, los puntos medios de los segmentos determinados por el ortocentro y los vértices del triángulo.*

El Teorema 3.3 corresponde a un problema que ha sido considerado por no pocos matemáticos, como una verdadera joya de la Geometría moderna del siglo XIX, y se debe a Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) cuyo enunciado afirma que: *la circunferencia de nueve puntos es tangente a otras cuatro circunferencias: la inscrita al triángulo y las tres excritas.*

El Teorema 3.4 también corresponde a un problema de importancia histórica, que aborda una aspiración que el hombre tenía desde la antigüedad, la cual consiste en trazar una línea *recta sin regla; o bien, trazar una circunferencia sin usar compás.*

Dicho problema fue resuelto hasta 1864 por el matemático Charles Nicolás Peaucellier (1832-1913), quien diseñó un mecanismo articulado que resultó muy útil para el correcto funcionamiento de la máquina de vapor; dicho mecanismo permite *transformar una circunferencia (o un arco) en una recta (o segmento), y viceversa.*

Interesa mostrar que estos problemas implican conceptos matemáticos fundamentales y durante el desarrollo de su solución, resaltamos trazos, heurísticas, y uso de recursos matemáticos. Así mismo, destacamos la potencia que tiene el uso del software dinámico para que, quien lo necesite, acceda al problema y realice acciones, con sentido, que tienden a la solución.

Índice general

Capítulo 1

Problema de Investigación

1.1. Introducción

En esta tesis se estudian problemas de Geometría Moderna y se analiza la incorporación del software dinámico Cabri Géometrè como un medio que facilita su visualización y puede contribuir al análisis y solución de los mismos. Durante el desarrollo de los problemas, se procura crear un espacio de reflexión que permita valorar dificultades, explicar estrategias heurísticas y usar los recursos matemáticos que proporciona ésta área de la geometría para justificar la solución o demostración del teorema enunciado.

Tres de los problemas están relacionados con el triángulo, uno de los cuales es considerado como una de las joyas de la Geometría Moderna; el Teorema de Feuerbach.

La Geometría Moderna es la Geometría que se desarrolla es la Geometría que se desarrolla durante la época moderna (Fines del siglo XV y principios del siglo XIX), en la que se incorpora a la Geometría Euclidiana (Shively, 1997, pp. 13-18; Eves, 1985, pp. 64-73):

a) Los segmentos y ángulos dirigidos;

b) La noción de correspondencia biunívoca entre, por ejemplo, las rectas que pasan por un punto que no pertenece a una recta y los puntos de intersección con las misma;

c) La existencia de puntos y líneas al infinito; y.

d) La combinación de métodos sintéticos y analíticos.

Se espera que este trabajo permita al lector adquirir una visión de la Geometría Moderna donde se destaque:

i) El razonamiento matemático, más que procedimientos de simple memorización.

ii) La formulación de conjeturas, la aplicación de heurísticas y la resolución de problemas, descartando el énfasis en la búsqueda mecánica de respuestas.

iii) La conexión entre ideas matemáticas y sus aplicaciones, en contra de la visión de las matemáticas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.

iv) La conveniencia de usar apropiadamente el software dinámico para potenciar el aprendizaje de los estudiantes pues, por ejemplo, con un movimiento del ratón, se cubren un gran número de casos particulares; contribuyendo así al desarrollo de la intuición y a un mejor entendimiento de los problemas.

En este sentido, nos parece que los recursos tecnológicos en el ámbito escolar deben usarse de manera amplia y responsable, con el fin de enriquecer el aprendizaje matemático

1.2. Carácter de la investigación.

Esta investigación es de carácter documental y de desarrollo de soluciones de los problemas propuestos. Es documental porque reúne problemas que se encuentran en la literatura relacionada con dos ramas básicas de la Geometría: Geometría Euclidiana y Geometría Moderna.

Es de desarrollo porque en el proceso de solución que hemos elegido, se analiza cada problema y se detectan unas dificultades, para luego implementar acciones que contribuyen a la solución, como realizar trazos, hacer sustituciones, subdividir el problema, aplicar recursos matemáticos, etc., lo cual puede hacerse con lápiz y papel pero, a veces, las dificultades siguen estando presentes o no estamos convencidos porque no hemos visualizado completamente la solución; es aquí donde el uso del software dinámico puede ayudarnos en disminuir el tiempo que requerimos para entender el problema o para realizar algún trazo faltante o para visualizar un aspecto importante para la solución de los problemas.

Ahora bien, en este contexto, los resultados en el aprendizaje de las matemáticas dependen de una serie de factores que intervienen en el sistema educativo: (1) el currículum, (2) la organización escolar, (3) el tipo de enseñanza, entre otros.

El curriculum incluye la estructuración de las asignaturas, los programas de estudio y sus objetivos; la organización escolar tiene que ver con la disposición de las instituciones por atender problemas educativos. En estos dos primeros factores también se incluyen cuestiones políticas como el carácter de las decisiones que se toman en los niveles cupulares y que, la mayoría de las veces, no tienen que ver con el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En el tipo de enseñanza que el profesor desarrolla en el salón de clases, tiene que ver con el papel que juegan tanto el profesor como los estudiantes durante las sesiones de clase.
Algunos de estos factores están estrechamente interrelacionados.

El tercer punto merece especial atención, puesto que es sobre el que tenemos la posibilidad de incidir los interesados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La educación en general y la educación matemática en particular tienen como propósito principal, formar ciudadanos educados, reflexivos, constructivos y comprometidos, con la idea de que su conocimiento les permita resolver los problemas que se les presentan en su trabajo y la vida cotidiana.

Además, en la geometría escolar se tiene la oportunidad de involucrar a los estudiantes en la resolución de problemas y de plantearlos en diferentes contextos, tanto los referentes a las propiedades de las figuras y sus relaciones de posición en el plano y en el espacio, como a las transformaciones geométricas y a las medidas de áreas y volúmenes.

En este contexto, es conveniente enseñar geometría con mayor énfasis en las construcciones y transformaciones geométricas, mostrar la potencia de sus métodos y resultados, así como su vinculación con las ciencias naturales; no solo basándose en métodos analíticos, sino también intentando, resolver los problemas geométricos de manera gráfica, cuando las soluciones lo permitan.

Además, acompañar la resolución de problemas geométricos con una discusión sobre el uso de recursos algebraicos también puede conducir a una mayor comprensión y significación de los resultados, pues la intuición y la comprensión matemática requieren ser cultivadas y estimuladas desde diferentes ángulos; de ahí la importancia de combinar simultáneamente el uso de recursos gráficos y el lenguaje algebraico. Las transformaciones de igualdad (traslaciones, simetrías, giros) proporcionan sugestivos ejemplos, para pasar después a las transformaciones de semejanza (homotecias y semejanzas). Los problemas de construcciones geométricos pueden no sólo aclarar estos conocimientos, sino también estimular la creatividad y la imaginación.

Escolarmente, la geometría del espacio requiere mayor atención en todos los niveles educativos y, en las escuelas de ciencias, debería profundizarse más en otras transformaciones geométricas como las afines, las proyectivas y la de inversión; con una introducción a los sistemas de representación.

Así la interacción de los estudiantes con estos problemas, ya sea mediante lápiz y papel o con el uso de la tecnología (computadora con software dinámico) puede contribuir a la evolución de los ciclos de entendimiento de las nociones y conceptos involucrados (Lesh, *et al.* 2000); es decir, las representaciones externas que manifiesta un sujeto depende de la existencia de representaciones internas en él que, a su vez, se van modificando por el uso de las externas, originando ciclos que van evolucionando hacia la conformación de nuevas estructuras de conocimiento. De esta manera, existe el reconocimiento de que así se origina un aprendizaje que va más allá de conocimientos adquiridos memorísticamente.

1.3. Planteamiento del problema

La formulación y resolución de problemas matemáticos es una actividad que ha caracterizado al hombre desde la antigüedad. En este sentido, Polya (1945) establece que la resolución de problemas es una actividad inherentemente humana, que ha contribuido al desarrollo del conocimiento matemático. En diferentes épocas el hombre se ha planteado problemas matemáticos en diversas áreas y de distintos grados de dificultad; en algunos casos los matemáticos tardaron siglos en resolverlos o en justificar por qué no se pueden resolver.

Como ya mencionamos, en este trabajo abordaremos cuatro problemas de Geometría moderna y una de las preocupaciones que estuvo latente durante su desarrollo, es hacer un tratamiento serio de los contenidos matemáticos, sin privilegiar argumentos teóricos o procedimentales, intentando ubicarlo en el justo equilibrio. Además, se pretende alejar esta tesis de la tendencia ingenua de atribuir virtudes a la tecnología con el sentido de sustituir el razonamiento y las explicaciones que puede dar el profesor en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Es decir, en este trabajo abordamos los contenidos matemáticos y ubicamos al uso de la tecnología como un recurso que puede facilitar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pero que no sustituye los procesos cognitivos que, forzosamente, deben realizarse. Una pregunta ambiciosa que podría uno intentar entender es la siguiente:

¿Cómo influye el uso del software dinámico en el entendimiento y solución de problemas típicos de la Geometría Moderna?

De esta manera, será este el problema que guie nuestra investigación, con el fin de tratar de entender que sucede, aclarando que no se dará una respuesta específica a dicha pregunta.

1.4. Objetivos y metas de la tesis

El rigor y la precisión son tan esenciales para las matemáticas como la experimentación lo es para el resto de las ciencias; en gran medida, éstas son las razones que justifican y dan credibilidad a los métodos y resultados derivados de los procedimientos utilizados en matemáticas. Ahora bien, en problemas donde aparece el concepto de inversión, es importante que quien los estudie combine aspectos formales e intuitivos, y considere que la “experimentación”que pueden proporcionar los medios tecnológicos, permite explorar un sin número de casos, con un simple movimiento del ratón, imposible de realizar con lápiz y papel.

Los objetivos y metas de esta tesis, al desarrollar los problemas seleccionados, son:

Objetivos:

1. Analizar los conceptos geométricos involucrados e identificar las heurísticas y el uso de recursos que intervienen en la solución o demostración de los teoremas.

2. Mostrar el potencial que proporciona el software dinámico Cabri Géometrè para explorar y desarrollar ideas matemáticas que fomentan la visualización, contribuyendo así a la resolución de los problemas.

Metas:

Analizar, desarrollar y justificar la solución de los cuatro problemas seleccionados, enunciados como teoremas, incorporando el uso del software dinámico en su estudio. Los problemas son:

1. Problemas derivados de la relación entre la circunferencia inscrita y las circunferencias excritas.

2. Teorema de la Circunferencia de los nueve puntos.

3. Teorema de Feuerbach.

4. Teorema de la Celda de Peaucellier.

1.5. Preguntas que guían el desarrollo de esta tesis

Las preguntas que guían el desarrollo de esta tesis, las cuales nos servirán para responder nuestro problema, son:

1. ¿Qué tipo de procesos heurísticos y cómo se usan los recursos matemáticos en la resolución de problemas de Geometría Moderna?

2. ¿Cuáles son los conceptos fundamentales que están involucrados en los problemas típicos de la Geometría Moderna?

3. ¿Cómo contribuye el uso de software dinámico Cabri Géometrè en el estudio de problemas de Geometría Moderna?

Capítulo 2

Revisión de Literatura

2.1. Resolución de problemas

Diferentes propuestas curriculares y de investigación identifican a la resolución de problemas como una actividad importante para el aprendizaje de las matemáticas (Schoenfeld, 1992; Alarcón, 1994; Santos, 2007; NCTM, 2000). Dichas propuestas señalan que aprender matemáticas va más allá de memorizar un conjunto de definiciones, algoritmos y técnicas para resolver problemas rutinarios. Resolver un problema permite formular constantemente preguntas, utilizar distintas representaciones, buscar relaciones y formas de sustentarlas, así como la necesidad de comunicar resultados y la reconstrucción individual del problema; ya que, con frecuencia, uno hace pausas, reflexiona y a veces hasta puede ser que ejecute pasos novedosos que tienden a la solución.

Actualmente existe el reconocimiento de que la resolución de problemas plantea demasiadas exigencias tanto para el estudiante que intenta aprender a resolverlos, como para el profesor que se empeña en enseñar el proceso de resolución; quizás esta sea una de las razones por las que el aprendizaje de las matemáticas, de ciertos niveles o áreas, representa dificultades insuperables para la mayoría de las personas.

En este contexto Polya (1945), preocupado por el acostumbrado fracaso de sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, se propuso diseñar un método que pudiera ayudarles a resolver problemas de matemáticas y, en consecuencia, superar dichas dificultades de aprendizaje; es decir, la intención inicial de Polya era establecer una estrategia de aprendizaje para los estudiantes que, más tarde, se convirtió también en una manera de llevar a cabo la enseñanza de las matemáticas. El famoso método de Polya consiste de cuatro fases:

I. Entender el problema. Sugiere que el interesado en resolver un problema de matemáticas, primero debe pasar por un proceso de entendimiento del enunciado y plantea una serie de preguntas encaminadas a ese fin.

II. Diseñar un plan de solución. Aquí sugiere, a través de preguntas, la realización de acciones encaminadas a obtener pistas que conduzcan a la solución; acciones que Polya identifico como estrategias heurísticas.

III. Llevar acabo el plan de solución. En la ejecución del plan interviene, necesariamente, la experiencia del sujeto que, a su vez, promueve el desarrollo de la capacidad de monitorearse a sí mismo y controlar sus acciones futuras para resolver problemas. Es decir, debe comprobarse cada uno de los pasos y verificar que estén correctos.

IV. Hacer una revisión del trabajo realizado. También denominada la etapa de la visión retrospectiva y se trata de verificar y comparar el resultado para detectar inconsistencias y compatibilidad de la solución. Es decir, detenerse a observar qué fue lo que se hizo.

Polya distingue dos tipos de problemas:

1) Los problemas rutinarios son aquellos en los que el enunciado desencadena una acción mental de búsqueda y el resolutor encuentra rápidamente el procedimiento, recurso o pistas que ayudan a resolver el problema.

2) Los problemas no rutinarios son aquellos en los que la solución no es inmediata; requieren de meditación, reflexión y aplicación de estrategias heurísticas, antes de tener claridad sobre cómo se resuelve.

Desde luego, esta clasificación es relativa, un problema que demanda un gran esfuerzo de un estudiante, puede representar un acto de simple recordatorio para otro o para un matemático experimentado.

A continuación se muestran ejemplos de problemas rutinarios y no rutinarios, para estudiantes de bachillerato.

Problema rutinario.- *El área de un trapecio es de* $40cm^2$*, si sus bases miden* 12 *y* $8cm.$*, hallar su altura.*
Para calcular la altura del trapecio se requiere conocer la definición y forma que tiene esta figura, así como la fórmula para calcular su área, despejar la altura y sustituir los datos.

Problema no rutinario.- *Las diagonales de un cuadrilátero lo dividen en* 4 *triángulos. Si las áreas de tres de ellos son* 12*,* 20 *y* $30cm^2.$*, hallar el área del otro triángulo.*

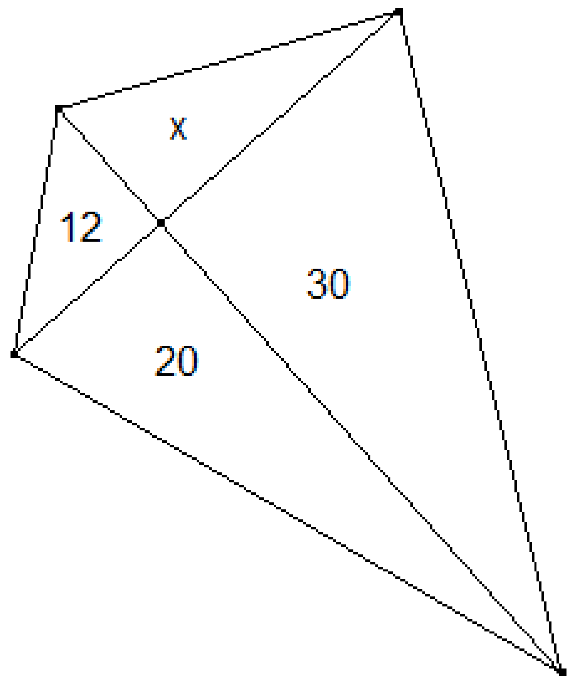


Figura 2.1: Ilustración dada con el enunciado del problema.

Para la resolución de este problema, aunque se da la figura, primero se requiere visualizar que sobre cualquiera de sus diagonales hay dos parejas de triángulos que tienen sus alturas iguales, respectivamente, y las bases son distintas en los triángulos de cada pareja, pero son las mismas bases en los triángulos respectivos de la otra, para entonces aplicar el teorema de la Geometría euclidiana: Dados dos triángulos que tienen la misma altura, pero distintas bases, entonces la razón de sus áreas es a la razón de sus bases. De esta manera es posible establecer dos proporciones y conectarlas para encontrar x.

Ahora bien, si un estudiante no conoce el teorema, puede llegar a construirlo mediante el cálculo de áreas de las parejas de triángulos y escribir su razón; pero, de hecho, puede resolver el problema sin que su interés sea establecer dicho teorema.

La visualización de trabajar por parejas estos triángulos, constituye una heurística.

La heurística es una parte del conocimiento que antiguamente estaba más ligada con la lógica, la filosofía y la psicología. Su objetivo era establecer las reglas y procedimientos del descubrimiento y la invención. Actualmente, la heurística se dedica a estudiar cuáles son las acciones particularmente útiles para resolver problemas.

La utilización de las estrategias heurísticas se desarrolla en el sujeto en la medida que adquiere mayor experiencia en la resolución de problemas. Por eso, la lista de preguntas planteada por Polya pretende motivar la realización de acciones que conlleven a la utilización de las estrategias heurísticas, sin que esto signifique que esas son las únicas preguntas que deban hacerse; más bien, son preguntas como las que uno podría plantearse.

La utilización de estrategias para la resolución de problemas se realiza como un medio que propicia el desarrollo del pensamiento. Polya supo destacar la importancia de la resolución de problemas para el desarrollo de habilidades que son típicas en el quehacer matemático. Posteriormente, su trabajo fue ampliamente fundamentado por Schoenfeld (1980, 1994).

Lo particular y lo general en la resolución de problemas. Entender y explicar cómo se desarrollan las habilidades del pensamiento matemático, quizás resulte demasiado ambicioso, pero tener en mente la clasificación de los procesos generales y particulares de la matemática como disciplina, puede contribuir a la claridad de quien resuelve problemas en las habilidades que se promueven.

Al respecto, Santos (2007, pp. 28, 29) hace las siguientes consideraciones:

i. Estudiar matemáticas implica asimilar conceptos, métodos y principios específicos en este dominio de conocimientos y a veces distintos de los que se estudian en otros.

ii. La propuesta de que la resolución de problemas es una actividad esencial que está relacionada con el desarrollo del pensamiento crítico.

iii. Permite la transferencia, que es catalogada como un componente importante en el aprendizaje de las estrategias para resolver problemas matemáticos.

Entender cómo un individuo resuelve problemas de matemáticas desempeña un papel fundamental en el aprendizaje e influye, definitivamente, en el tipo de actividades que deben realizar los estudiantes.

El uso y aplicación de métodos heurísticos propuestos por Polya (1945), para la resolución de problemas, son útiles para avanzar en la solución de los problemas, no exclusivamente de matemáticas, sino incluso en otras áreas del conocimiento..

En uno de los capítulos de su libro *How to solved it*, Polya hace un "Breve diccionario de heurística"(1945, 1980); y sugiere al estudiante que se plantee preguntas como: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿conoces algún problema parecido?, ¿has visto esto antes?, ¿qué teorema o propiedades se conocen relacionadas con el problema?..., entre otras. Todas ellas son invitaciones para que el estudiante conciba un plan de solución y utilice procedimientos heurísticos como: trazar una figura, tomar casos particulares, elaborar una tabla, y muchos otros cuya finalidad es llevar a cabo el plan concebido.

En realidad, lo que está intentando hacer Polya es externar su experiencia como matemático en el desarrollo de procesos del pensamiento cuando se encuentra inmerso en la resolución de un problema; esto para ayudar al estudiante a encontrar “un camino”que le permita resolver el problema, con la esperanza de que después, el estudiante, por sí sólo, podrá repetir esta experiencia en otros problemas.

Polya habla de los siguientes aspectos como habilidades potenciales de quien aprende resolviendo problemas:

- Afición a resolver problemas. Quien logra interesarse en resolver problemas al grado de verse involucrado en este quehacer, no tendrá nada que lo detenga para seguir aprendiendo.
- Reformular problemas. Ver el problema desde otro punto de vista, cambiar el enunciado, dividir el problema en subproblemas, etc., son estrategias útiles para reformular un problema y atacarlo más fácilmente.

Indudablemente la resolución de problemas implica procesos de reflexión, análisis, síntesis y toma de decisiones que difícilmente se desarrollan con una enseñanza tradicional y rutinaria.

Un aspecto que hay que tomar en cuenta, al momento de enfrentarse a un problema, es el control, el cual se refiere al desarrollo de esa “intuición”que nos dice cuándo estamos tomando argumentos incorrectos o hay que cambiar de estrategia; es un monitoreo para que esa idea reveladora llegue, más que de manera milagrosa, como resultado de una serie de razonamientos bien entendidos, producto de la experiencia.

Con este método se trata de romper con la tradición en la que al principio, cuando se intenta resolver un problema, los estudiantes suelen comenzar haciendo operaciones, plantean y resuelven ecuaciones, sin haber siquiera entendido el significado que éstas puedan tener; para ellos lo importante es llegar a tener una respuesta (tal vez sin sentido).

A continuación se presentan los métodos heurísticos (o estrategias heurísticas) más usuales, de acuerdo a los casos contemplados por Polya (1945). Con la aclaración de que la lista puede no incluir algún método particular que, en determinada situación, le funcionó a alguien para resolver un problema.

Tomar casos particulares. Frecuentemente, para entender un problema, uno considera varios casos particulares, lo cual puede sugerir la dirección que se debe seguir y quizás, dar la plausibilidad de la solución; corresponde a la típica pregunta ¿qué pasa si? Un procedimiento general que podemos incluir en esta estrategia es el llamado principio extremo: funciona cuando consideramos los casos extremos, como tomar el punto más cercano o más alejado; o considerar valores máximos o mínimos de alguna variable, etc.

Usar analogías. Es una de las estrategias más utilizadas para resolver problemas, no nada más en matemáticas sino en otras ciencias o en problemas en general; por ejemplo, cuando tenemos dos sistemas S y S' cuyos elementos pueden corresponder a una figura, una ecuación o alguna otra situación, a partir de la preservación de las relaciones básicas en el sistema, podemos establecer una analogía y hacer inferencias para llegar a una conclusión. Las relaciones de convergencia y homotecia de figuras geométricas, son ejemplos de analogías que se pueden establecer entre dos o más figuras.

Establecer submetas. Como su nombre lo dice, esta estrategia consiste en considerar submetas al abordar un problema general, las cuales incluyen condiciones parciales y al resolverlas puede servir de base para construir la solución requerida. Algunos suelen considerar como otra estrategia el dividir el problema en subproblemas, pero para otros ambas son equivalentes. Algunos problemas de diferente grado de dificultad suelen plantearse como compuestos, con varias metas que nos permitan evaluar varias habilidades en su proceso de resolución.

Simplificar un problema. En ocasiones *traducir* de un lenguaje a otro nos facilita la solución, por ejemplo traducir del lenguaje común al algebraico; o enunciar el problema con otras palabras que contengan menos conceptos técnicos y, quizás, esto permita visualizar un camino solución. Por ejemplo, en un problema geométrico se puede trabajar algebraicamente o viceversa. También podemos *reducirlo*, es decir, si en un problema se observa que hay un comportamiento cíclico de las variables, entonces se trata el caso a partir de que inicia un nuevo ciclo.

Ejemplo.- Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios cuyos coeficientes son los mismos pero en orden inverso; es decir,

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n,$$
$$Q(x) = a_nx^n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + ... + a_0x^n$$

¿Cuál es la relación entre las raíces de $P(x)$ y $Q(x)$?

Solución: De manera directa, nos toparemos con dificultades relacionadas con la solución de ecuaciones de grado n, lo cual no parece deseable. Pero podemos comenzar con un polinomio particular cuya factorización sea sencilla, digamos $P(x) = (x-3)(x-1) = x^2 - 4x + 3$ y entonces $Q(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Calculando las raíces de P, obtenemos $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$; para Q tenemos $x_1 = 1$ y $x_2 = \frac{1}{3}$.

Si ahora consideramos $P(x) = (x+4)(x+2) = x^2 + 6x + 8$. Entonces $Q(x) = 8x^2 + 6x + 1$ y vemos que sus raíces son: $x_1 = -2$ y $x_2 = -4$ para P; mientras que para Q, $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{4}$.

Estos casos particulares nos sugieren la siguiente **conjetura**: las raíces de P son las recíprocas de las raíces de Q.

Para probar esto consideremos el caso general $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Si r es raíz de P, entonces lo que queremos ver es que $\frac{1}{r}$ es raíz de $Q(x) = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + ... + a_0x^n$, para lo cual basta evaluar Q en $\frac{1}{r}$:

$$\begin{aligned}
Q\left(\frac{1}{r}\right) &= a_n + a_{n-1}\left(\frac{1}{r}\right) + ... + a_1\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} + a_0\left(\frac{1}{r}\right)^n \\
&= \left(\frac{1}{r}\right)^n \left(a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + ... + a_1r + a_0\right) \\
&= \left(\frac{1}{r}\right)^n P\left(r\right) \\
&= \left(\frac{1}{r}\right)^n (0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces, efectivamente, las raíces de P son las recíprocas de Q.

Hacer un dibujo. El trazo de una figura que ilustre el enunciado de un problema es útil no sólo en Geometría, sino en otras ramas de las matemáticas o ciencias; se trata de una representación que, desde otro ángulo, permite visualizar y describir condiciones, lo cual puede contribuir en el entendimiento (inicial, en su caso) del problema.

En cierto sentido, ésta es una forma de traducir el problema, lo cual da pie a la introducción de elementos auxiliares que puede ser algún trazo o, en otro caso, una variable muda, otra cantidad, etc. También puede ser que la figura nos permita visualizar la necesidad de incorporar alguna definición, teorema, restricción, etc.

Ejemplo: En el rectángulo $ABCD$, $AB = 5$ y $AD = 3$. Un punto P se mueve libremente en AB y desde él se trazan perpendiculares a las diagonales. Calcular la suma $PM + PN$.

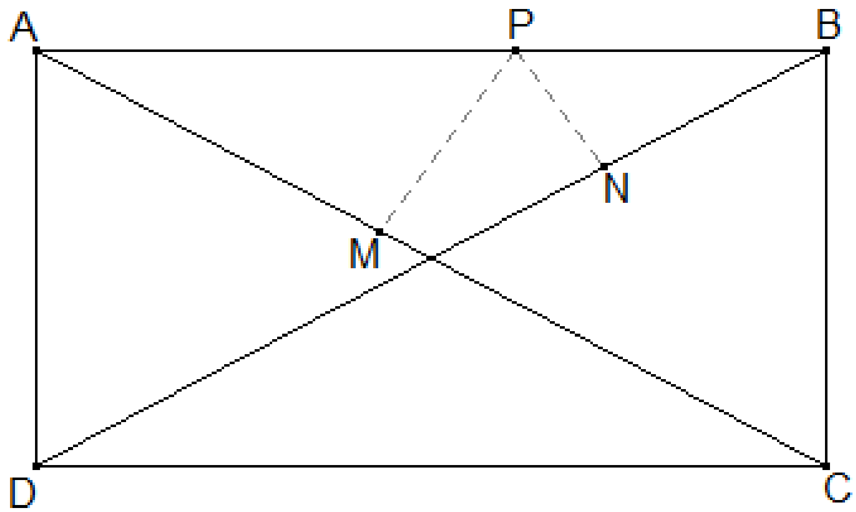


Figura 2.2: Ilustración que acompaña al problema.

Solución: Una pregunta natural que puede plantearse el estudiante es ¿por qué si P es un punto que varía, nos piden obtener un número que es el resultado de una suma?, ¿significa que la suma es constante?, ¿cómo averiguar esto?, ¿cómo "verlo"? Exploremos y valoremos esta situación.

Primero tratemos de encontrar la suma. Por criterio de semejanza AAA (los tres pares de ángulos correspondientes son congruentes), tenemos que los triángulos PMA y CBA son semejantes. Entonces es posible escribir:

$$\frac{PM}{CB} = \frac{PA}{CA} = \frac{MA}{BA}$$

Además los triángulos PNB y DAB también son semejantes por AAA, así que

$$\frac{PN}{DA} = \frac{PB}{DB} = \frac{NB}{AB}$$

De las relaciones anteriores obtenemos $PM = CB\left(\frac{PA}{CA}\right)$ y $PN = DA\left(\frac{PB}{DB}\right)$. Sumando

$$PM + PN = \frac{CB(PA)}{CA} + \frac{DA(PB)}{DB}.$$

Como $CA = DB = \sqrt{34}$ por el teorema de Pitágoras, entonces

$$PM + PN = \frac{CB(PA)}{\sqrt{34}} + \frac{DA(PB)}{\sqrt{34}} = \frac{3(5)}{\sqrt{34}} = \frac{15}{\sqrt{34}}.$$

La Figura 3.3 muestra uno de los posibles trazos que permiten apreciar por qué la suma es una constante; en ella $C\prime$, D' y N' son los puntos simétricos respecto de AB, de los puntos C, D y N, respectivamente.

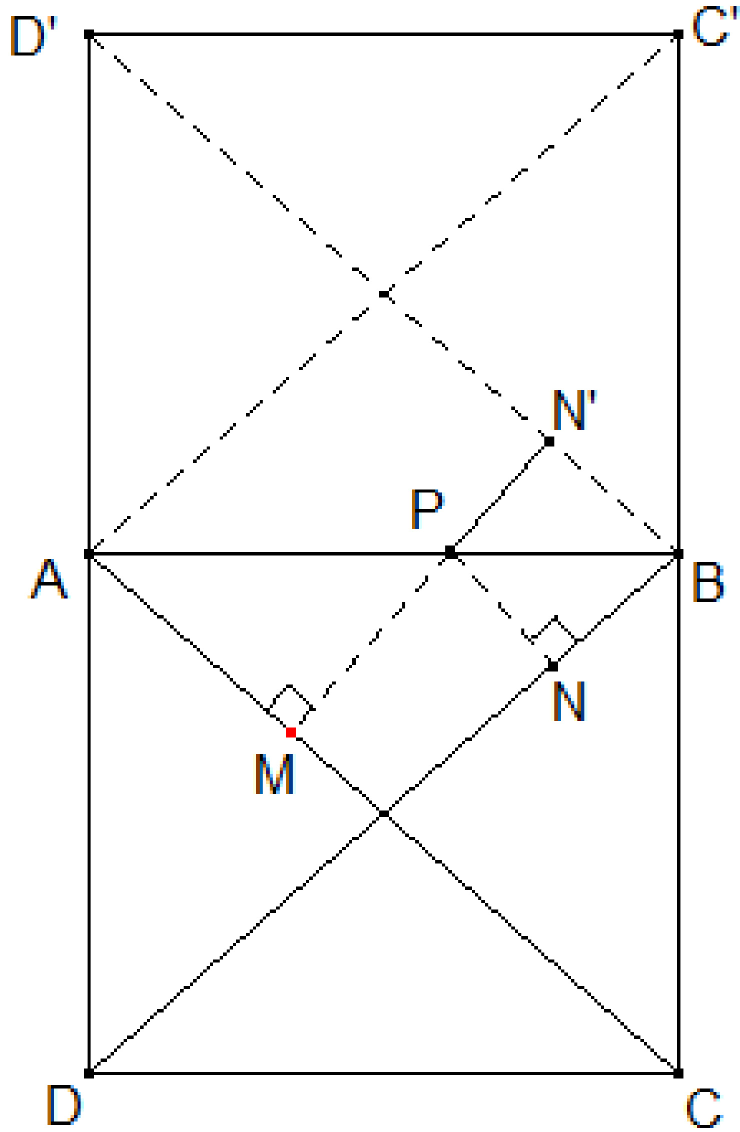


Figura 2.3: La suma PM + PN es una constante.

Regresar a las definiciones. Esta sencilla estrategia es útil cuando uno se encuentra abrumado por el trabajo aritmético, algebraico o manipulativo en el proceso de resolución de un problema; o bien cuando se ha pensado en diferentes maneras de atacarlo. A veces, cuando se regresa a las definiciones, resulta que ahí esta ya la solución pero nos era inadvertida.

Las siguientes dos estrategias son más propias de la Geometría y el uso de ellas fue el paso clave para la solución de algunos problemas abordados en este trabajo.

Establecer una simetría. En Geometría resulta bastante útil el recurrir al simétrico de un punto o de una recta, figura, etc., respecto a otro punto o una recta para encontrar pistas sobre el comportamiento de una cantidad variable o constante.

Problema en el que se aplica esta heurística.- Si l es un río rectilíneo y de un mismo lado l se encuentran un bombero en B y una casa quemándose en C, ¿cuál es el punto P sobre l al que debe ir el bombero por agua al río y luego regrese a la casa para apagar el fuego, de modo que recorra la menor distancia?

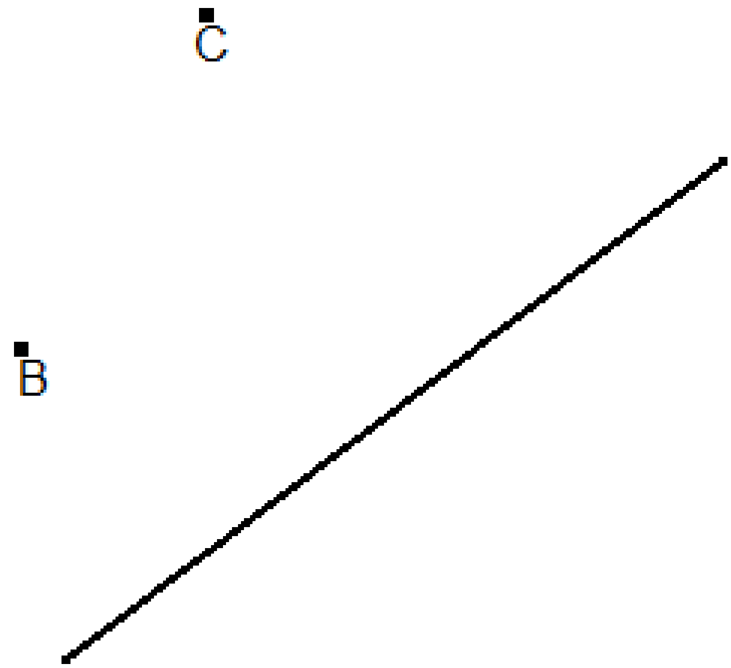


Figura 2.4: Representación gráfica del problema.

Solución: La ubicación de un punto P sobre la recta l, de manera que $BP+PC$ sea mínimo. Introduzcamos un elemento auxiliar. Sea C' el simétrico de C respecto a l, y tracemos BC' que cruza a l en P. Veamos entonces que P es el punto buscado.

Si trazamos PC se forma el triángulo PCD, el cual es congruente con el triángulo $PC'D$ por el criterio de congruencia LAL y entonces se tiene que $PC = PC'$.

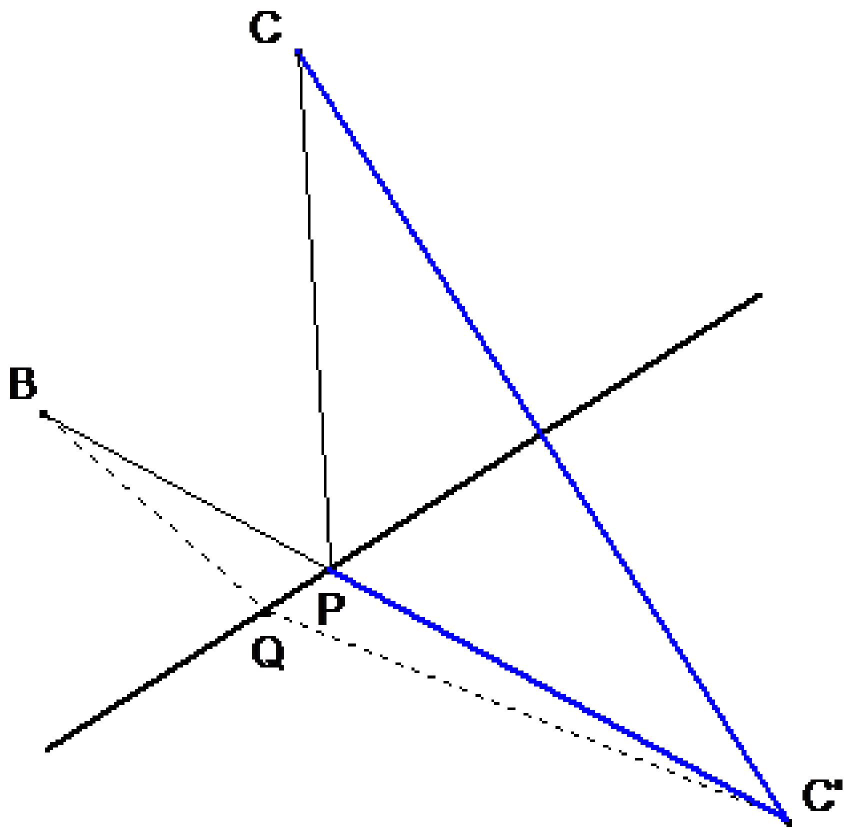


Figura 2.5: Aplicación de la heurística de la simetría.

Ahora, $BC' = BP + PC$ y si M es cualquier otro punto de l, al trazar BM y MC'' se forma el triángulo $BC'M$ y por el Teorema de la desigualdad del triángulo, $BC' < BM + MC$. Por tanto, en efecto, P es el punto que minimiza el recorrido del bombero.

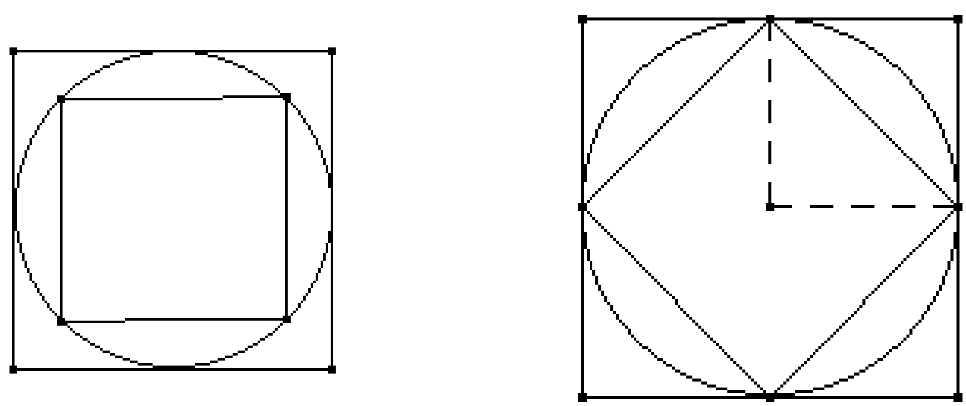
Problema típico de optimización en el que se aprecia la potencia de la estrategia heurística de la simetría.

Cabe mencionar que la noción de simetría no se restringe a la Geometría, también en álgebra y aritmética se encuentran problemas en los que la identificación de simetría facilita la solución.

Realizar una rotación. En algunos problemas de Geometría resulta conveniente la rotación de una figura un cierto ángulo; lo cual permite observar una congruencia o semejanza, o aplicar un teorema como el de la desigualdad del triángulo y, enseguida emerge la solución al problema.

A continuación se presenta un ejemplo que ilustra lo que es un procedimiento heurístico (Schoenfeld, 1985; Zeitz, 1999); se trata de un problema que bien puede proponerse a estudiantes de tercer grado de secundaria o de primero de bachillerato.
Su enunciado puede ser contextualizado en diferentes situaciones:

Hallar la razón del área del cuadrado excrito al área del cuadrado inscrito en el círculo de radio r.



(a) (b)

Figura 2.6: Figura (a) Sin uso de la estategia heurística y (b) Con uso de la estrategia heurística

Este es un problema accesible para los estudiantes. Es razonable suponer que se localizará el centro del círculo y se trazarán algunos radios, lo cual permitirá calcular el área del cuadrado excrito $A_e = (2r)^2 = 4r^2$. En seguida se buscará la manera de calcular el lado del cuadrado inscrito a través del teorema de Pitágoras y calcular $A_i = (\sqrt{2}r)^2 = 2r^2$ para obtener la respuesta.

Sin embargo, si imaginamos que el círculo es un émbolo que puede girar 45°, podemos preguntarnos ¿en qué se diferencia la nueva figura de la anterior, respecto a lo que se pide?

Es claro que las dos figuras se refieren al mismo problema; pero de la segunda emerge inmediatamente la solución. Esa acción de girar y reflexionar sobre la pregunta, es parte de la heurística.

Razonamiento regresivo: Una técnica muy común y fértil del pensamiento matemático consiste en suponer el problema resuelto y trabajar desde el principio con su solución como si fuera un elemento conocido. Este método ha sido utilizado desde la época de oro de los griegos en la resolución de problemas geométricas, algunos de los cuales son difíciles de resolver, como ciertos problemas de Apolonio, cuando suponemos el problema resuelto, lo más común es remontar desde la situación final a la inicial, recorriendo de forma inversa el que luego será el proceso de resolución.

Schoenfeld *et al.* (1992), han puesto en claro cuáles son las acciones típicas que promueven el aprendizaje de las matemáticas, y las que identifica como las características del pensamiento matemático: considerar casos particulares, descubrir patrones y relaciones, plantear conjeturas, realizar generalizaciones y justificar resultados.

Regularmente, estas acciones aparecen acompañadas del uso de recursos matemáticas, o implícitamente forman parte de ese uso; de manera que en ese proceso se está en posibilidades de irse adentrando en la realización de prácticas consistentes con el quehacer matemático.

En este sentido, Lesh *et al.* (2000), plantean que el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes, se entiende como una evolución en sus ciclos de entendimiento que puede traducirse en un manejo más robusto y sofisticado de las estrategias y recursos para resolver problemas; lo que se logra cuando los estudiantes realizan prácticas que son consistentes con el quehacer de las matemáticas.

Además, cuando alguien intenta resolver un problema no rutinario y requiere de la meditación y reflexión, después de la primera fase de entendimiento del problema, suele aparecer una idea brillante (insight) que representa un acto de inspiración que resuelve el problema. Desde luego, su aparición no es obra de la casualidad, sino producto de la experiencia y de un cierto "tino"que se va fomentando, poco a poco, como resultado de examinar y reflexionar diversas situaciones problemáticas. Históricamente pueden encontrarse casos del surgimiento de una idea brillante.

Finalmente, Postman y Weingartner (1969) destacan la importancia de que los estudiantes adquieran un comportamiento propio del método inquisitivo, donde los estudiantes aprendan y se acostumbren a plantearse preguntas:

> El conocimiento se produce en respuesta a preguntas ... Una vez que ha aprendido a cómo preguntar - preguntas relevantes, apropiadas y sustanciosas- el estudiante ha aprendido cómo aprender y ya nadie lo puede detener en el camino de seguir aprendiendo lo que necesite y

quiera conocer. (pág. 23)

2.2. La Geometría en el currículum escolar

Las matemáticas ocupan una parte importante del currículum escolar de los niveles básicos en diferentes sistemas educativos del mundo. La mayoría de las personas que acudieron a la escuela, hayan terminado o no una carrera profesional, tuvieron la necesidad de estudiar varios temas de matemáticas en las distintas materias o asignaturas que aparecen, prácticamente, en todos los grados escolares de los niveles básicos y medio superior; en el nivel superior sólo muy pocas carreras las excluyen de sus planes de estudio.

Entre las asignaturas de las matemáticas básicas se encuentra la Geometría, la cual empieza a estudiarse desde la primaria y contribuye con varios de los contenidos fundamentales del currículum escolar: figuras geométricas y sus propiedades, cálculo de áreas y volúmenes, proporcionalidad, semejanza, entre otros; dichos contenidos aparecen de manera explícita o implícita en los programas de estudio de diferentes asignaturas.

Ahora bien, aunque en el ámbito educativo se reconoce la importancia del carácter formativo que proporciona el estudio de la Geometría, la enseñanza de esta materia no siempre recibe la atención necesaria por parte de profesores y autoridades, descuidando la enseñanza de sus contenidos, sobre todo en el nivel medio superior (Sepúlveda, Hernández, 1998).

Por su parte, la noción de variación, una de las más importantes en todo el currículum escolar, regularmente aparece asociada, desde los estudios elementales, a contenidos diversos de las diferentes ramas de las matemáticas, por ejemplo: en el estudio de las funciones; su inclusión en el cálculo conforma lo que se llama la matemáticas del cambio; en el estudio de las sucesiones numéricas; en la denominación misma de variable en álgebra; en Geometría también existen problemas geométricos de variación que, a veces, aunque tengan distintas formas de solución, el acercamiento geométrico es poderoso y breve.

Sin embargo, a pesar de que el estudio de las matemáticas se considera fundamental para la formación educativa de las personas es, al mismo tiempo, la parte sobre la que se ha generado mayor discusión en cuanto los resultados en el aprendizaje, existiendo cuestionamientos no nada más en relación a la justeza de las decisiones que se toman con base en los niveles de aprovechamiento, sino también respecto a su necesidad y utilidad en la vida cotidiana.

Ante esta situación, algunas instituciones e investigadores han implementado acciones para mejorar la situación, sobre todo lo relacionado con la calidad del aprendizaje de los estudiantes. Algunas de estas acciones han derivado en propuestas curriculares basadas en resolución de problemas, como la propuesta de la SEP[2] en México (SEP, 1993) o en el NCTM en Norteamérica (NCTM, 2000).

La Reforma a la educación básica en México de 1993, ponía el centro de atención en que los estudiantes se involucraran en procesos de resolución de problemas, con orientaciones a estudiantes a través de novedosos libros de texto y a los profesores con *Libro para el Maestro de Educación Secundaria* (Alarcón 1994), así como cuadernillos con problemas; lamentablemente, las orientaciones contenidas en este libro no se implementaron como debiese, pues exigía estudio y compromiso de parte de los maestros y no faltó quienes se opusieran a su implementación. En estos materiales se contempla, generosamente, el estudio de contenidos de Geometría en sintonía con la teoría de la resolución de problemas.

[2]SEP.- Secretaría de Educación Pública.

Los *Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares* es un proyecto curricular del NCTM (2000), según el cual se pretende lograr los fines de la educación a través de una serie **principios** (seis principios) y **estándares** (cinco sobre líneas de contenido y cinco sobre procesos de pensamiento), donde se flexibiliza la visión del orden tradicional en que deben cubrirse los contenidos matemáticos, desde el primer año escolar hasta el bachillerato.

Uno de los principios está enmarcado en el hecho de que en la educación no puede sustraerse de los avances que proporciona el desarrollo tecnológico a la sociedad, y establece el **Principio de la tecnología**:

> La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, influye en las matemáticas que se enseñan en la actualidad y aumenta las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes. Este principio es importante, ya que brinda la oportunidad de que los estudiantes estén actualizados en los avances tecnológicos que se producen en el mundo, independientemente del país donde se encuentren (NCTM, 2000, p. 43).

Uno de los estándares está relacionado con el estudio de la Geometría, área de las matemáticas encargada de estudiar el medio en el que el sujeto vive y se desarrolla; y se denomina estándar de **Geometría**:

> Las ideas geométricas son de gran utilidad en la representación y resolución de problemas. Los estudiantes deben tener experiencias usando una variedad de representaciones visuales a través de figuras, con o sin coordenadas, para analizar un problema. Asimismo, deben practicar un razonamiento espacial y modelado geométrico. (NCTM, 2000, pp.)

Finalmente, Resolución de problemas es un estándar sobre el proceso de pensamiento que da coherencia al proyecto curricular propuesto, e imprime el aspecto principal sobre las intensiones educativas a desarrollar en los estudiantes. Ya desde 1980, el NCTM proclamó que la resolución de problemas debería ser el centro de la educación matemática, con el propósito de que los estudiantes logren un aprendizaje de las matemáticas con entendimiento (Hiebert y Carpenter, 1992). El estándar **Resolución de problemas** (NCTM, 2000, pp.):

Cuando los estudiantes aprenden a resolver problemas, desarrollan procesos de pensamiento ordenados que, poco a poco, se van convirtiendo en una habilidad para encontrar estrategias adecuadas para determinado tipo de problemas, lo cual permite el desarrollo de nuevas comprensiones matemáticas. Los estudiantes deben ser animados e involucrados en la resolución de problemas, se debe propiciar el espíritu de aferrarse a encontrar y formular una solución cuando intenta resolver un problema complejo.

Para aprender a resolver problemas en matemáticas, los estudiantes deben adquirir formas de pensamiento, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza en sus acciones para explorar situaciones desconocidas. Esto contribuye a un dominio de situaciones similares y a la adquisición de la capacidad de exteriorizar ideas matemáticas. Hoy en día, se considera que la resolución de problemas puede ser una guía importante para lograr grandes avances.

La resolución de problemas no es una parte aislada de la educación matemática y de los programas de las materias, es una parte fundamental para todo aprendizaje matemático. La resolución de problemas debe involucrar los cinco primeros estándares.

El contexto de los problemas puede variar de experiencias que son familiares a los estudiantes, hasta aplicaciones involucradas con las ciencias. La idea es que en los problemas estén involucrados los conceptos matemáticos importantes del currículum; y si se hace una buena elección respecto al nivel y familiaridad con los estudiantes, se puede lograr un gran avance en el aprendizaje matemático que, posteriormente, será el soporte para atacar y resolver problemas más complejos.

Los profesores juegan un papel muy importante al elegir los problemas que valen la pena, pues la resolución de problemas debe ser útil para ayudar a los estudiantes a desarrollar dominios de contenidos con técnicas específicas.

Un problema muy bien resuelto, ayuda al estudiante a enfrentar problemas en situaciones de su vida cotidiana. Inicialmente consideran casos simples y familiares y luego van aumentando la complejidad de los problemas y del análisis involucrado. Los estudiantes deben aprender a aplicar y adoptar una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas. Algunas de las mejores sugerencias para aprender a resolver problemas las podemos encontrar en Polya (1945); Santos (2007).

2.3. Niveles de razonamiento geométrico

Desde la antigüedad, la función de la Geometría ha sido esencial en el desarrollo personal de profesiones de la educación matemática y en general, para toda persona educada, pues presenta valores insustituibles que Thom (1973) resume así:

1) La Geometría proporciona uno o más puntos de vista en casi todas las áreas de las matemáticas.

2) Las interpretaciones geométricas continúan proporcionando visiones directoras del entendimiento intuitivo y avances en la mayoría de las áreas de las matemáticas.

3) Las técnicas geométricas proporcionan eficaces herramientas para resolver problemas en casi todas las áreas de las matemáticas. (p.5)

Dirigido en esta línea, una aspiración central de todo sistema educativo es que los estudiantes desarrollen los distintos tipos de razonamiento matemático a lo largo del currículo escolar; en particular el razonamiento geométrico.

A finales de los años 1950 los educadores holandeses, Pierre van Hiele y Dina van Hiele-Geldof, desarrollan un modelo que describe como los estudiantes razonan y desarrollan la Geometría. Aunque el modelo se centra en la Geometría y tenga como objetivo llegar a una Geometría muy tradicional, su conocimiento puede dar pistas de cómo partiendo de la realidad se puede se puede ir creando modelos cada vez más abstractos.

Conforme la teoría de los van Hiele, los estudiantes progresan a través de los niveles discretos, cualitativamente diferentes de pensamiento geométrico. Como se concibió originalmente, los niveles son secuenciales y jerárquicos, de manera que los estudiantes alcancen un nivel, deben haber pasado por los niveles que le preceden.

Al respecto, el modelo de razonamiento de Van Hiele (1986) indica que el razonamiento geométrico de los estudiantes puede evolucionar desde las nociones más intuitivas a otros niveles. Este modelo explica cómo evoluciona el razonamiento geométrico de los estudiantes. Dicha teoría consta de dos partes:

I. ***Niveles de razonamiento.***

- Nivel 1:*(Razonamiento visual-holístico)* Los estudiantes identifican, describen, y razonan acerca de las formas y otras configuraciones geométricas de acuerdo a su aspecto visual como un todo.

Es decir en este estado inicial, los estudiantes tienen conciencia del espacio como algo que existe alrededor de ellos. Los conceptos geométricos se ven como entidades totales más que sus componentes o atributos. Las figuras geométricas, por ejemplo, se reconocen por su forma como un todo, esto es, por su apariencia física, no por sus partes o propiedades.

En resumen son tres las características fundamentales de este nivel:

1) Los objetos se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes.
2) Se describen por su apariencia física mediante descripciones meramente visuales y asemejándoles a elementos familiares del entorno (parece una rueda, es como una ventana, etc.) No hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto.
3) No reconocen de forma explícita componentes y propiedades de los objetos motivo de trabajo.

- Nivel 2: *(Razonamiento descriptivo-analítico)* Los estudiantes atienden tanto, conceptos, y en especifico las formas de descripción de cada parte y las relaciones espaciales entre las partes. Sin embargo, las descripciones de los estudiantes y los conceptos varían en gran medida en la sofisticación. En primer lugar, los estudiantes describen las partes y propiedades de manera informal e imprecisa usando estrictamente un lenguaje informal típicamente aprendido en experiencias diarias.

  Ya que los estudiantes comienzan a adquirir conceptos geométricos formales enseñadas de manera explícita en los currículos de las matemáticas (como medida del ángulo y el paralelismo), comienzan a utilizar una combinación de descripciones formales e informales de las formas.

Sin embargo, las porciones formales de las descripciones de los estudiantes de forma son insuficientes para especificar formas completamente. Finalmente, los estudiantes de manera explícita y exclusivamente, pueden utilizar conceptos geométricos formales y el lenguaje para describir y conceptualizar las formas de una manera que atienda a un conjunto suficiente de propiedades para especificar las formas.

Los estudiantes pueden utilizar y formular definiciones formales para las clases de formas. Sin embargo, sus definiciones no son mínimos, porque no se interrelacionan propiedades o ver que algún subconjunto de propiedades implica otras propiedades. Simplemente pensar en términos de listas ajenas a las características descritas formalmente.

Dos factores interrelacionados principales contribuyen al desarrollo del razonamiento del Nivel 2. La *primera* es una mayor capacidad y la inclinación para dar cuenta de la estructura espacial de las formas mediante el análisis de las piezas de forma. La *segunda* es una capacidad creciente para comprender y aplicar conceptos geométricos formales para especificar las relaciones entre las partes de forma.

Es decir comienza un análisis de los conceptos geométricos. Por ejemplo, mediante la observación y la experimentación los estudiantes empiezan a discernir las características de las figuras. Estas propiedades emergentes se utilizan para conceptualizar clases de figuras. Se ven las partes de las figuras y se reconocen éstas.

Y se consideran cuatro características importantes:

1) Se perciben las componentes y propiedades (condiciones necesarias) de los objetos y figuras. Esto lo obtienen tanto desde la observación como de la experimentación.

2) De una manera informal pueden describir las figuras por sus propiedades pero no de relacionar unas propiedades con otras o unas figuras con otras. Como muchas definiciones en Geometría se elaboran a partir de propiedades no pueden elaborar definiciones.

3) Experimentando con figuras u objetos pueden establecer nuevas propiedades.

4) Sin embargo no realizan clasificaciones de objetos y figuras a partir de sus propiedades.

Los estudiantes empiezan a generalizar, con lo que inician el razonamiento matemático, señalando qué figuras cumplen una determinada propiedad matemática pero siempre considerará las propiedades como independientes no estableciendo, por tanto, relaciones entre propiedades equivalentes.

- Nivel 3: *(Razonamiento relacional-inferencial)* Los estudiantes infirieren las relaciones entre las propiedades geométricas de las formas. Comenzando por la inferencia empírica, por ejemplo, darse cuenta de que cada vez que han visto la propiedad X se producen, propiedad Y ocurre.

  Siguiendo, mediante el análisis de cómo las formas se pueden construir una parte en el momento, los estudiantes concluyen que cuando una propiedad se produce, otra propiedad debe ocurrir.

  Por ejemplo, los estudiantes pueden concluir que si un cuadrilátero tiene cuatro ángulos rectos, sus lados opuestos son iguales, porque cuando se dibuja un rectángulo haciendo una secuencia de perpendiculares, que no puede hacer que los lados opuestos sean desiguales.

Después, los estudiantes hacen simples inferencias lógicas sobre las propiedades. Por ejemplo, unos estudiantes podrían razonar que debido a un cuadrado tiene todos los lados iguales, que tiene lados opuestos iguales.
Tal razonamiento permite a los estudiantes para hacer las inferencias necesarias para la clasificación jerárquica.

Así mismo, un estudiante cuya definición de un rectángulo es "cuatro ángulos rectos y los lados opuestos iguales"podría inferir que un cuadrado es un rectángulo porque "un cuadrado tiene cuatro ángulos rectos, que un rectángulo tiene que tener, y como un cuadrado tiene cuatro lados iguales, tiene lados opuestos iguales, que un rectángulo tiene que tener".

Sin embargo, la capacidad de hacer tales inferencias no necesariamente conduce a los estudiantes adoptar una forma jerárquica sistemática de clasificación, que todavía se resisten a la idea de que un cuadrado es un rectángulo a pesar de que puede seguir la lógica que justifique tal declaración. En la fase final del nivel 3, los estudiantes usan la inferencia lógica para reorganizar su clasificación de las formas en una jerarquía lógica.

No sólo la razón de un cuadrado es un rectángulo claro, pero la clasificación de un cuadrado como un rectángulo se convierte en una parte necesaria de la razón. Los estudiantes dan argumentos lógicos para justificar sus clasificaciones jerárquicas. Finalmente, como progreso de los estudiantes hasta el nivel 3, que son cada vez más capaces de entender y apreciar las definiciones mínimas para las clases de formas.

Los estudiantes pueden establecer las interrelaciones de las propiedades de las figuras y entre figuras. Pueden deducir propiedades de las figuras y reconocer clases de figuras. Se entiende la inclusión de clases. Las definiciones son significativas. Se pueden seguir e incluso construir argumentos informales.

En este nivel el estudiante, no obstante, no comprende el significado de la deducción como un todo o el papel de los axiomas. Con frecuencia se utilizan resultados empíricos junto con técnicas deductivas. Se puede seguir la demostración formal, pero el estudiante no ve cómo se podría cambiar el orden lógico y no ve cómo construir una demostración partiendo de premisas diferentes o no familiares.

Alcanzar este nivel significa que ...

1) Se describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Esto es importante pues conlleva entender el significado de las definiciones, su papel dentro de la Geometría y los requisitos que siempre requieren.
2) Realizan clasificaciones lógicas de manera formal ya que el nivel de su razonamiento matemático ya está iniciado. Esto significa que reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones.
3) Siguen las demostraciones pero, en la mayoría de los casos, no las entienden en cuanto a su estructura. Esto se debe a que en su nivel de razonamiento lógico son capaces de seguir pasos individuales de un razonamiento pero no de asimilarlo en su globalidad. Esta carencia les impide captar la naturaleza axiomática de la Geometría.

- Nivel 4: *(Prueba deductiva formal)* Los estudiantes entiendan y puedan construir pruebas geométricas formales. Es decir, dentro de un sistema axiomático, que pueden producir una secuencia de sentencias que, lógicamente, justifica una conclusión como consecuencia de los "datos". Reconocen las diferencias entre los términos no definidos, definiciones, axiomas y teoremas. Sólo en este nivel son capaces los estudiantes de tener el tipo de razonamiento exigido en los cursos axiomáticos.

En este nivel, se entiende la deducción como un camino para establecer la verdad geométrica dentro de un sistema axiomático. Se ve la interrelación y el papel de los términos no definidos, axiomas, postulados, definiciones, teoremas y demostraciones. Una persona en este nivel puede construir, y no sólo memorizar, las demostraciones; se ve la posibilidad de desarrollar una demostración de varias formas; se entiende la relación entre las condiciones necesaria y suficiente; se distingue una afirmación y su inversa.

Este nivel se caracteriza en resumen por:

1) Se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas.

2) Se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos, por lo que ya se entiende la naturaleza axiomática de las matemáticas.

3) Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas formas de demostraciones para obtener un mismo resultado.

Es claro que, adquirido este nivel, al tener un alto nivel de razonamiento lógico, se tiene una visión globalizadora de las Matemáticas.

- Nivel 5: *(Rigor)* Los estudiantes pueden entender, utilizar y analizar, sistemas axiomáticos alternativos. Este nivel corresponde generalmente a los estudios universitarios de la Geometría.

  En este estado el alumno puede trabajar en una variedad de sistemas axiomáticos, esto es, se pueden estudiar las Geometrías no-Euclídeas, y se pueden comparar sistemas diferentes. Se ve la Geometría en abstracto.

  El último nivel es el menos desarrollado en los trabajos originales y ha recibido poca atención por parte de los investigadores. P. M. van Hiele ha reconocido que está interesado en los tres primeros niveles en particular (comunicación personal a Alan Hoffer del 25 de Febrero de 1985). Se caracteriza este nivel por:

  1) Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes Geometrías.
  2) Se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático.

     Sin embargo, se reconoce que este nivel sólo se encuentra al alcance de algunos matemáticos profesionales y de ciertos estudiantes muy adelantados de las facultades de matemáticas.

II. ***Fases de aprendizaje.***

  i) Indagación. Los estudiantes se nutren de ella;

  ii) Orientación dirigida. Los estudiantes exploran en el campo de investigación proporcionado por el profesor;

  iii) Explicitación. Ocurre cuando se establece diálogo entre estudiantes;

iv) Integración. Los estudiantes, auxiliados por el profesor integran los conocimientos que acaban de aprender.

De la descripción anterior, concluimos que la importancia practica de este modelo de enseñanza, radica en que muestra las líneas básicas que debe seguir un profesor que desee fundamentar sus clases en el mismo, el cual contiene los distintos tipos de razonamiento geométrico que los estudiantes adquieren a lo largo de su formación matemática; que van desde el razonamiento visual de los niños de prescolar, hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las facultades de ciencias.

Además cada vez resulta más relevante el uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ya que la evolución de la sociedad es paralela al desarrollo de los medios tecnológicos, los cuales se vuelven imprescindibles para el estudio de algunas ciencias y algunas áreas de las matemáticas. Como herramienta, la tecnología permite que la atención del estudiante se centre en los procesos de razonamiento, de reflexión y de resolución de problemas; y puede mostrar ciertas formas de pensar que de otra manera sería difícil de observar (Santos, 2007).

2.4. Uso de la tecnología

El mundo actual se caracteriza por la difusión e incorporación de los medios tecnológicos en todos los ámbitos de la vida, así como por la evolución de las prácticas laborales y ciudadanas que imponen un extraordinario dinamismo a la sociedad. Diferentes investigaciones (NCTM, 2000; Santos, 2007) destacan el uso de la tecnología, cuyo propósito es favorecer el aprendizaje de aspectos relevantes del razonamiento geométrico, haciendo énfasis en la potencialidad que tiene el software de Geometría dinámica para promover el desarrollo, no sólo de la exploración y el planteamiento de conjeturas, sino también habilidades y capacidades para realizar demostraciones formales a través de su estructura; y se puede ver como una herramienta básica para la enseñanza y el aprendizaje efectivos de las matemáticas; amplía las matemáticas que se pueden enseñar y mejoran el aprendizaje de los estudiantes mediante el software dinámico, para la realización de exploraciones, la búsqueda o detección de patrones y a formulación de conjeturas, las cuales forman parte de las actividades que son propias del quehacer matemático.

Santos (2001), indica que la facilidad de mover puntos, segmentos, de generar lugares geométricos y la posibilidad de calcular las longitudes de lados, hallar áreas, perímetros, entre otros, permite que el uso de un programa dinámico se convierta en una poderosa herramienta para el estudio de las Matemáticas, en particular de la Geometría.

Laborde (1993, citado en Balacheff y Kaput 1996), señala que los dibujos en la pantalla de la computadora en un ambiente de Geometría dinámica, pueden ser manipulados *tomando* y *arrastrando* cualquier punto con libertad; así las propiedades geométricas y las relaciones entre los elementos de las figuras resultantes, ayudan a la descripción de un fenómeno accesible a la observación. "Los programas de Geometría dinámica representan objetos geométricos e introducen un nuevo elemento: ellos representan acción".

Ya que el uso de herramientas tecnológicas para trabajar en contextos de problemas interesantes puede facilitar el logro de los estudiantes en una variedad de categorías de aprendizaje de orden superior tales como reflexión, razonamiento, planteamiento de problemas, solución de problemas y toma de decisiones. Pues un programa de Geometría dinámica es un editor gráfico que da la posibilidad de dibujar diagramas geométricos en la pantalla del computador.

Pero en realidad es más que un simple editor en el que el niño puede agarrar con el ratón un elemento del diagrama y arrastrarlo en la pantalla: el diagrama se redibuja de manera continua conservando intactas las relaciones geométricas que hayan sido declaradas en su construcción, así como todas las propiedades geométricas implícitas en ella. Así, la naturaleza de las figuras que se hacen en un entorno de Geometría dinámica es diferente a la de los dibujos que hacemos con papel y lápiz.

El amplio desarrollo de herramientas computacionales ha influido notablemente tanto en los métodos y caminos de producir conocimiento disciplinar, como en la forma en que los estudiantes pueden aprender o construir ese conocimiento.

En este sentido, el Principio de la tecnología de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (NCTM, 2000), menciona en los estándares correspondientes a los niveles 9-12, que en vez de dedicar tiempo a los algoritmos debería invertirse más tiempo y esfuerzo a que los estudiantes adquieran estructuras conceptuales mediante exploraciones, basadas en experiencias numéricas y geométricas, aprovechando las posibilidades que proporciona el uso de la tecnología.

El software de Geometría dinámica Cabri Géometrè puede clasificarse dentro del grupo de software abierto, en el sentido en que los estudiantes producen ideas, las expresan, desarrollan y editan. En este tipo de ambientes computacionales, el maestro y el alumno deciden qué hacer con la herramienta, en lugar de que el propio programa de cómputo guíe de manera directa el trabajo del alumno, como ocurre con los llamados tutoriales.

El trazo de objetos geométricos que se visualizan en pantalla, permite al alumno manipular y deformar figuras, corregirlas, obtener tablas, entre otras cosas; un seguimiento de los cambios que se producen en estas transformaciones puede conducir a conjeturar propiedades invariantes de figuras. Este tipo de software genera interés y entusiasmo de tal manera que se esta incorporando rápidamente a las escuelas; el software proporciona ciertos objetos primitivos (puntos, líneas, círculos), herramientas básicas (por ejemplo, la paralela $L^{'}$ a través de una línea L dada); agrupando todo esto en los objetos compuestos, y varias posibles transformaciones, incluyendo, por ejemplo, partes del dibujo, y examinar la traza que dejan los puntos, segmentos, o círculos cuando se aplica una transformación dinámica.

Así, después de hacer una construcción o tomar una figura hecha, se pueden mover libremente ciertos elementos de un dibujo y observar cómo se van transformando otros elementos. Mientras que los elementos libres se mueven en el dominio en el cual existen, el software mantiene todas las relaciones que fueron especificados como atributos esenciales de la construcción original.

Ya que los dibujos dinámicos ofrecen fenómenos visuales más fuertes que los dibujos estáticos. Una propiedad espacial puede surgir como invariante en el movimiento, lo cual puede ser imposible de percibir en un dibujo estático. En este caso, puede pasar desapercibido por ejemplo, que una recta siempre pasa por un punto dado. Asumimos que en este tipo de tareas el entorno de software da más importancia a la observación visual y por lo tanto puede obligar a los alumnos a explicar por qué obtienen tal o cual fenómeno visual.

Se dice entonces que la Geometría dinámica, instalada en un ambiente computacional, se coloca a medio camino entre el mundo sensible (perceptible por los sentidos), en este caso esencialmente visual, y el mundo matemático (o esencialmente abstracto). Es decir, al mismo tiempo que traduce de manera visual un universo teórico, gracias a la manipulación de objetos virtuales en la pantalla, responde a ese conocimiento teórico organizado en una estructura axiomática deductiva.

El papel que juegan las construcciones geométricas realizadas en el entorno de Geometría dinámica es fundamental, pues se convierten en los objetos de "experimentación"sobre la teoría, sin utilizar de manera directa el discurso, contribuyendo a superar uno de los obstáculos principales del aprendizaje de la Geometría, como es, la superación de las tensiones entre los procesos de visualización y su potencial heurístico en la resolución de problemas y los procesos de justificación y su potencial pedagógico para dar sentido a la organización deductiva del conocimiento matemático.

Para aprovechar ese potencial, no basta con proponer a los alumnos una construcción. Es necesario que la tarea de construcción sea un problema en cuya solución pongan en juego sus conocimientos previos y las posibilidades del software.

Producir un dibujo en Cabri Géometrè que preserve propiedades espaciales durante el arrastre, requiere el uso de propiedades geométricas para su construcción, y descalifica los procesos de ensayo y error controlados únicamente de manera perceptiva.

Un proceso de construcción en Cabri Géometrè *"a ojo"* deja de satisfacer las condiciones cuando se mueve uno de los objetos de base. La tarea requiere el uso de relaciones geométricas y no sólo una percepción visual de estas, como en el entorno de papel y lápiz.
Se dice entonces que el medio funciona como un soporte para el establecimiento de conexiones entre fragmentos de conocimiento. A partir de la experimentación, los estudiantes son capaces de articular los resultados de sus exploraciones de manera tal que estos pueden ser llevados más allá del medio computacional o pueden dar lugar posteriormente a nuevas versiones de un resultado que hacen clara la

visibilidad del medio computacional.

Desde esta perspectiva, se trata de conectar el conocimiento informal del estudiante con fragmentos de conocimiento matemático constituyéndose en lo que Niss y Hoyles (1992) han denominados un *dominio de abstracción*.

El entorno de Geometría dinámica se convierte entonces en un campo de experimentación en el cual los alumnos pueden realizar secuencias de exploración, y al interior del cual pueden sistematizar sus acciones y sus argumentaciones para realizar procesos de abstracción situada. (esto es posible gracias a la posibilidad de enriquecimiento de una figura y la invalidación de propiedades no invariantes por el arrastre).

Algunas características que tiene el software dinámico:

a) Puede ayudar a los estudiantes a explorar y construir conjeturas.

b) Permite hacer simulaciones de los problemas matemáticos para ayudar a encontrar relaciones.

c) Posibilita un acercamiento grafico a la solución de problemas de variación.

d) Permite el empleo de diferentes registros de representación (verbal, grafico, tabular, geométrico).

Duval (1996) en su teoría sobre los registros semióticos de representación, asigna primordial importancia al uso de diferentes representaciones de los componentes de un problema, para aprender los conceptos involucrados. Estas representaciones pueden ser generadas por el aprendiz a través del lenguaje oral, escrito o los medios tecnológicos; o bien, una mezcla de ellos.

Un sistema de registros semióticos de representación confirma cuando es posible realizar tres actividades cognitivas ligadas con la semiósis (aprehensión o producción de una representación semiótica): identificación, tratamiento y conversión. Un sujeto ha aprendido de un registro de representación a otro.

2.5. Visualización en las matemáticas

La visualización es un campo de investigación de creciente importancia en educación matemática. Sin embargo, el estudio de su naturaleza y relación con otras formas de registro y comunicación de información continúa siendo tema de reflexión.

Según Zimmermann y Cunningham (1991), “Desde la perspectiva de la matemática es inusual la restricción de que las imágenes deben ser manipuladas. La visualización se toma como la habilidad para trazar con lápiz y papel un diagrama apropiado, con ayuda de una calculadora o una computadora.

El diagrama sirve para representar un concepto matemático o un problema y ayuda a comprender el concepto o a resolver el problema. La visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir entendimiento”, en una consecuencia de esto Vicente Carrión (1999), establece:
“Obsérvese que no se habla de visualizar un diagrama sino de visualizar un concepto o problema.

Visualizar un diagrama significa formar una imagen mental del diagrama; visualizar un problema significa entender el problema en términos de un diagrama o de una imagen. La visualización en matemáticas es un proceso para formar imágenes mentales con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas”.

Lo cual pone de manifiesto la importancia de la visualización dentro del ámbito del proceso del aprendizaje de las matemáticas.

La visualización ha recibido mucha atención como tema de investigación en Educación Matemática, especialmente en el área de la Geometría (Bishop, 1989; Clement y Battista, 1992; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Gutiérrez, 1996). Se trata de evaluar los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren *ver* o *imaginar* mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos. También este tema ha recibido atención desde un punto de vista del propio trabajo del matemático, en los momentos de abordar la resolución de problemas, formulación de conjeturas, así como en otras áreas diferentes de la Geometría (Guzmán, 1996).

Duval (2002) distingue entre visión y visualización. La visión es la percepción directa de un objeto espacial; la percepción visual necesita exploración mediante movimientos físicos, del sujeto que ve, o del objeto que se mira, porque nunca da una aprehensión completa del objeto. Entiende la visualización como representación semiótica de un objeto, una organización bi-dimensional de relaciones entre algunos tipos de unidades. Mediante la visualización cualquier organización puede ser esquemáticamente comprendida como una configuración (p. 15), haciendo visible todo lo que no es accesible a la visión y aportando una aprehensión global de cualquier organización de relaciones. Para Duval (2002) la visualización plantea tres problemas desde el punto de vista del aprendizaje: (1) discriminación de las características visuales relevantes; (2) el procesamiento figural, cambios entre registros visuales (descomponer, recomponer una figura; reconfiguración); cambio de perspectiva,...; (3) coordinación con el registro discursivo.

La visualización se puede entender como un doble proceso, uno que va de lo material a lo inmaterial (mental o ideal) (que podemos llamar visualización ascendente), y el inverso que va de lo inmaterial a lo material (visualización descendente). “La visualización ofrece un método de ver lo invisible”(Arcavi, 2003, p. 216). Este “ver”puede ser puramente mental y entonces involucra objetos no-ostensivos, o puede estar relacionado con una representación física y entonces ser objeto perceptible.

Con la visualización en matemáticas se pretende que las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas.

La visualización constituye un aspecto extraordinariamente importante de la actividad matemática es algo totalmente natural si se tiene en cuenta la naturaleza misma de la matemática.

2.6. El constructivismo

Es una corriente de la pedagogía que se basa en la teoría del conocimiento constructivista. En la que nosotros como seres humanos no tenemos acceso a una realidad objetiva; esto es, una realidad independiente de nuestras vías de conocimiento. Ya que, nosotros construimos nuestro conocimiento del mundo desde nuestras percepciones y experiencias; las cuales, ellas mismas, son medidas por nuestro conocimiento previo (Simon 1995). Desde el punto de vista del constructivismo, el aprendizaje es que nosotros no tenemos manera de saber si un concepto es igual a una realidad objetiva. Nuestro interés en todo caso, es si lo trabajamos y lo usamos apropiadamente en nuestro mundo experimental. Mientras que el aprendizaje puede ser visto como el proceso por el cual los seres humanos adaptan su mundo experiencial, es parte del supuesto de que la persona construye activamente su conocimiento a partir de la organización de su experiencia; por tanto, se rechaza la posibilidad de la existencia de una realidad única.

En general la perspectiva constructivista del aprendizaje puede situarse en oposición a la instrucción del conocimiento. Desde la postura constructivista, el aprendizaje puede facilitarse, pero cada persona reconstruye su propia experiencia interna, con lo cual puede decirse que el conocimiento no puede medirse, ya que es único en cada persona, en su propia reconstrucción interna y subjetiva de la realidad.

Por el contrario, la instrucción del aprendizaje postula que la enseñanza o los conocimientos pueden programarse, de modo que pueden fijarse de antemano los contenidos, el método y los objetivos en el proceso de enseñanza.

Entonces, el conocimiento se concibe como un proceso adaptativo del sujeto que organiza su propia experiencia sobre el mundo; es decir, el conocer implica un proceso de construcción que realiza el sujeto cognoscente que interactúa con su entorno y, como resultado de esa interacción, el sujeto construye el objeto de conocimiento y, al mismo tiempo, él resulta transformado por esa acción; ya que no es el mismo. Las distintas posturas que se han desarrollado bajo el constructivismo reconocen figuras clave como podemos citar a Piaget, a Novak y a von Glasersfeld como sus precursores.

Para Piaget, el desarrollo intelectual, es un proceso de restructuración del conocimiento, que inicia con un cambio externo, creando un conflicto o desequilibrio en la persona, el cual modifica la estructura que existe, elaborando nuevas ideas o esquemas, a medida que el humano se desarrolla.

Los procesos mediante los cuales el ser humano evoluciona y adquiere su capacidad de adaptación con el medio ambiente, son los de asimilación y acomodación (Piaget, 1991).

Ambas capacidades innatas que, por factores genéticos, se van desplegando ante diversos estímulos en determinadas etapas o estudios del desarrollo y en ciertas edades sucesivas.

La asimilación se refiere al modo en que un individuo se enfrenta a un estimulo del entorno en términos de organización actual, es decir consiste en utilizar los esquemas existentes para dar sentido a un objeto o un evento; implica tratar de comprender algo nuevo ajustándolo a lo que ya sabemos.

La acomodación, es una modificación actual en respuesta a las demandas del medio, es decir; consiste en la modificación de la estructura cognitiva para incorporar nuevos objetos y eventos que, hasta el momento, eran desconocidos.

Mediante ambos procesos (asimilación y acomodación) vamos restructurando cognitivamente nuestro aprendizaje a lo largo del desarrollo, ya que se alternan en la constante búsqueda de equilibrio para intentar el control del mundo externo. Y cuando una nueva información no se puede interpretar inmediatamente, basándose en esquemas prexistentes, el sujeto entra en un momento de crisis y busca encontrar nuevamente el equilibrio, para esto se producen modificaciones en los esquemas cognitivos, incorporándose así las nuevas experiencias.

Para Piaget, desde los 12 años en adelante el cerebro humano está potencialmente capacitado para formular pensamientos realmente abstractos; o un pensamiento de tipo hipotético deductivo. Además, Piaget postula que la lógica es la base del pensamiento y que, en consecuencia, la inteligencia es un término genérico para designar al conjunto de operaciones lógicas para las que está capacitado el ser humano, pasando desde la percepción, las operaciones de clasificación, substitución, abstracción, etc., hasta –por lo menos- el cálculo proporcional.

Posiblemente una de las contribuciones más valiosas del trabajo de Piaget tiene que ver con el carácter activo y constructivo que asignó el sujeto en desarrollo.

Vygotsky (1988), por su parte es considerado el precursor del constructivismo social, ya que incorpora la dimensión social al constructivismo. Para Vygotsky, el conocimiento es un proceso de interacción entre el sujeto y el medio, pero el medio entendido como algo social y cultural, no solamente físico. Así, entonces el desarrollo de los seres humanos puede ser explicado únicamente en términos de su interacción social. En sus estudios de formación de conceptos, Vygotsky parte de la idea que ésta no puede reducirse a conexiones asociativas.
Establece una pirámide en la cual jerarquiza diferentes formas de conocimiento:

1) *Conceptos espontáneos*, donde intervienen dos sub-etapas:

    a) Cúmulos no organizados qué tiene que ver con la agrupación de objetos dispares sin ninguna base común y la etapa se caracteriza por el uso de palabras como “nombres propios”.

    b) Pseudoconceptos donde se agrupan objetos adecuadamente pero a partir de rasgos sensoriales inmediatos, sin que el sujeto tenga una idea precisa de los rasgos comunes de los objetos. Los pseudoconceptos no sólo aparecen en el pensamiento infantil, sino también en la etapa adulta ya que conviven simultáneamente con ambas formas de pensamiento.

2) *Conceptos científicos*, adquiridos a través de la instrucción. Se caracterizan por:

    a) Forman parte de un sistema,

b) Se adquieren a través de una toma de conciencia de la propia actividad,

c) Implican una relación espacial con el objeto basada en la internalización de la esencia del concepto.

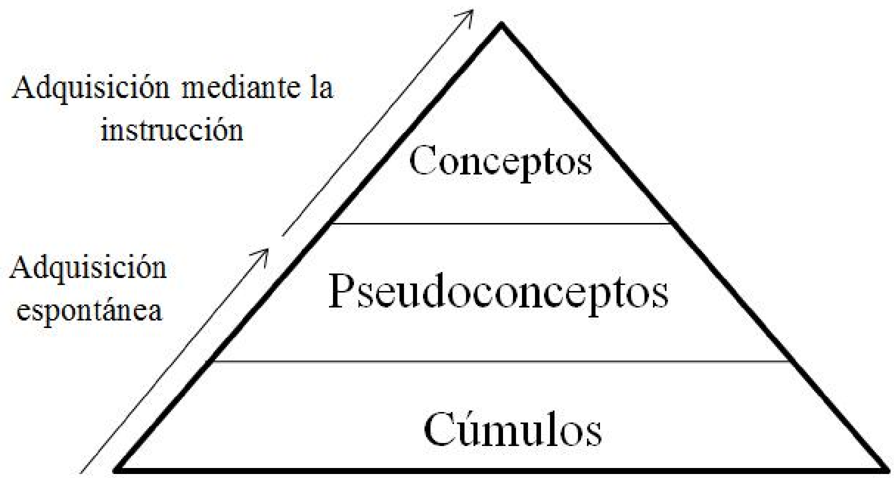


Figura 2.7: Concepto Espontáneo y Científico

Capítulo 3

Presentación y análisis de los problemas

El primer problema está compuesto de varias partes, de las que se deriva un resultado de la Geometría Euclidiana sobre el área de un triángulo, y otros que corresponden a la Geometría Moderna, como la relación entre los exradios y el radio de la circunferencia inscrita, así como el eje radical de cada pareja de estas circunferencias con el incírculo. Los siguientes tres problemas corresponden a la Geometría Moderna, siendo el segundo el de la Circunferencia de los nueve puntos, que se utiliza en el tercer problema junto con el concepto de inversión para demostrar el Teorema de Feuerbach. El último de los cuatro problemas también depende del concepto de inversión, y resuelve una vieja aspiración de los geómetras: ¿Cómo trazar una recta sin regla y cómo trazar una circunferencia sin compás?, lo cual se logra mediante un mecanismo articulado, denominado Celda de Peaucellier.

3.1. Resultados derivados de la relación entre la circunferencia inscrita y las circunferencias excritas.

Introducción. El conocimiento geométrico básico regularmente que, adquiere toda persona que asistió a la escuela, está relacionado con medición de longitudes, comparación de segmentos, cálculo de ciertas áreas (rectángulos, triángulos, paralelogramos), relaciones entre triángulos (congruencia, semejanza); destacamos tres resultados que, son conocidos por la mayoría: Cálculo del área de un triángulo, suma de ángulos en un triángulo y el Teorema de Pitágoras.

El área del triángulo puede obtenerse fácilmente, involucrando el radio de la circunferencia inscrita y el semiperímetro, originando una fórmula poco usual en la Geometría euclidiana; fórmulas similares se obtienen involucrando los radios de las circunferencias excritas, que desembocan en una relación importante entre los radios de las circunferencias excritas y la inscrita. Para obtener dicha relación requerimos del siguiente teorema.

Teorema 3.1.1 *El punto medio de un lado de un triángulo es también el punto medio del segmento determinado por los puntos de contacto de dicho lado con la circunferencia inscrita y la correspondiente excrita.*

Demostración. Sea el $\triangle ABC$ con su incentro I y sus tres excentros I_1, I_2 e I_3 como se muestra en la Figura 3.1. L, M y N son los puntos medios de los lados, D es punto de tangencia del incírculo, E, F y J son puntos de tangencia del excírculo I_2. Veamos que M, el punto medio de CA, es también punto medio de DE. Supongamos que $BC = a$, $CA = b$ y $AB = c$, de modo que el perímetro $AB + BC + CA = a + b + c = 2s$, donde s es el semi perímetro.

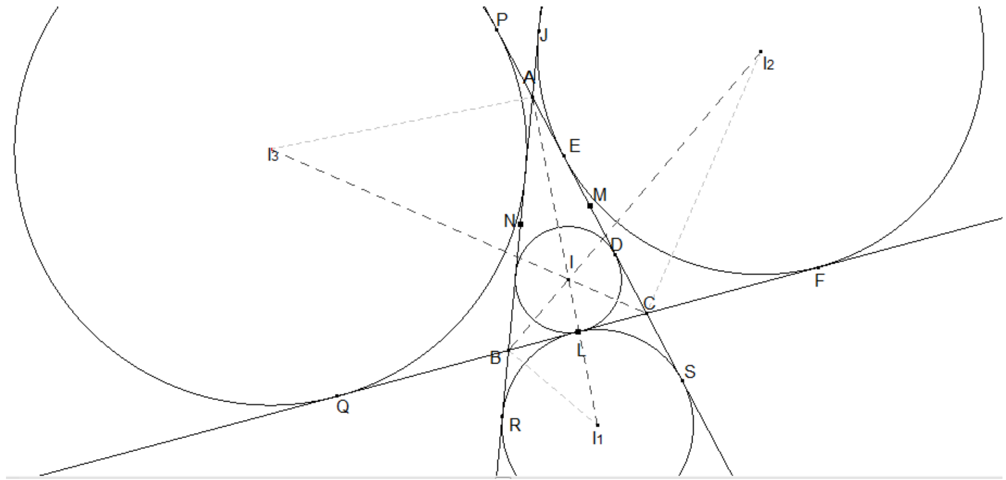


Figura 3.1: El punto medio del lado de un triángulo es punto medio de los puntos de tangencia del incírculo y del excírculo

Sabemos que $BF = JB$, $CF = CE$, $EA = JA$, y en consecuencia $BF + JB = 2s$; por lo tanto:

$$BC + CE = EA + AB = s \Rightarrow CE = s - a$$

Además:

$$BC + DA = s \Rightarrow DA = s - a$$

Si restamos DE:

$$CE - DE = DA - DE \Rightarrow CD = EA$$

Por lo tanto,

$$CE = DA$$

De ahí que M, el punto medio de CA, también es el punto medio de DE.

De igual manera se prueba para L y N. ■

Se pueden obtener distintas formas de calcular el área del triángulo y otros resultados interesantes; llamaremos r al radio del incírculo y r_1, r_2 y r_3 a los radios de los excírculos de centros I_1, I_2 e I_3:

$$\begin{aligned} a(\triangle ABC) &= a(\triangle IBC) + a(\triangle ICA) + a(\triangle IAB) \\ &= \frac{(a \cdot r)}{2} + \frac{(b \cdot r)}{2} + \frac{(c \cdot r)}{2} \\ &= \frac{r(a+b+c)}{2} \\ \Rightarrow a(\triangle ABC) &= rs. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Resultado que suele enunciarse como:“ El área de un triángulo es igual al producto del semi perímetro por el radio del incírculo”.

Además, el área del triángulo ABC se puede calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a(\triangle ABC) &= a(\triangle I_1AB) + a(\triangle I_1AC) - a(\triangle I_1BC) \\ &= \frac{(c \cdot r_1}{2}) + \frac{(b \cdot r_1)}{2} - \frac{(a \cdot r_1)}{2} \\ &= \frac{r_1(c+b-a)}{2} \\ \Rightarrow a(\triangle ABC) &= r_1(s-a); \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} a(\triangle ABC) &= a(\triangle I_2CB) + a(\triangle I_2BA) - a(\triangle I_2CA) \\ &= \frac{(a \cdot r_2)}{2} + \frac{(c \cdot r_2)}{2} - \frac{(b \cdot r_2)}{2} = \frac{r_2(a+c-b)}{2} \\ \Rightarrow a(\triangle ABC) &= r_2(s-b); \end{aligned} \tag{3.3}$$

y

$$
\begin{aligned}
a(\triangle ABC) &= a(\triangle I_3AB) + a(\triangle I_3AC) - a(\triangle I_3BC) \\
&= \frac{b \cdot r_3}{2} + \frac{a \cdot r_3}{2} - \frac{c \cdot r_3}{2} \\
&= \frac{r_3(b + a - c)}{2} \\
\Rightarrow a(\triangle ABC) &= r_3(s - c). \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Estos tres resultados se enuncian como: " El área de un triángulo es igual al producto del radio del excírculo por el semi perímetro menos el lado correspondiente".

Finalmente, de las últimas cuatro relaciones obtenemos el siguiente resultado:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} &= \frac{(s-a)}{a(\triangle ABC)} + \frac{(s-b)}{a(\triangle ABC)} + \frac{(s-c)}{a(\triangle ABC)} \\
&= \frac{3s - (a+b+c)}{a(\triangle ABC)} = \frac{(3s - 2s)}{a(\triangle ABC)} \\
\Rightarrow \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} &= \frac{1}{r}. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Es decir, "La suma de los recíprocos de los radios de los excírculos es igual al recíproco del radio del incírculo". ■

Estrategia heurística utilizada: Hacer un dibujo; usar analogías para establecer una relación entre triángulos.

Uso de recursos: Operatividad algebraica, igualdades entre segmentos, el semiperímetro.

Ideas principales que guiaron el desarrollo del problema fueron:

1. Siempre presente lo que se quería demostrar, es decir, dado que M es punto medio de CA, ver que también lo es de DE.

2. Ver igualdades de segmentos dados por el teorema siguiente que se da en Geometría Euclidiana.

3. Uso del siguiente teorema:

   Teorema.- Si por un punto exterior a una circunferencia se trazan dos tangentes, los segmentos comprendidos entre dicho punto y los de contacto son iguales. La semirrecta que contiene al segmento punto-centro es bisectriz del ángulo que forman las dos tangentes.

4. El uso del concepto de semiperímetro dado por el triángulo ABC.

5. Demostrar que $CE = DA$.

Visualización con el software dinámico

Con ayuda de Cabri se puede construir la figura que nos permite visualizar de manera precisa lo que se pretende demostrar, así como también segmentos de igual distancia, los semiperimetros que se involucran en el problema y las relaciones que nos permiten ver el cálculo del área con respecto al incírculo y los excírculos del triángulo ABC.

También es posible obtener una relación similar con las alturas.

Corolario 3.1.1 *La suma de los recíprocos de las alturas de un triángulo es igual a la suma de los recíprocos de los radios de los excírculos.*

Demostración. Para cualquier $\triangle ABC$, si r, r_1,r_2 y r_3 son los radios del incírculo y de los excírculos y s es su semi perímetro, sabemos que:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{s}{(\triangle ABC)}. \tag{3.6}$$

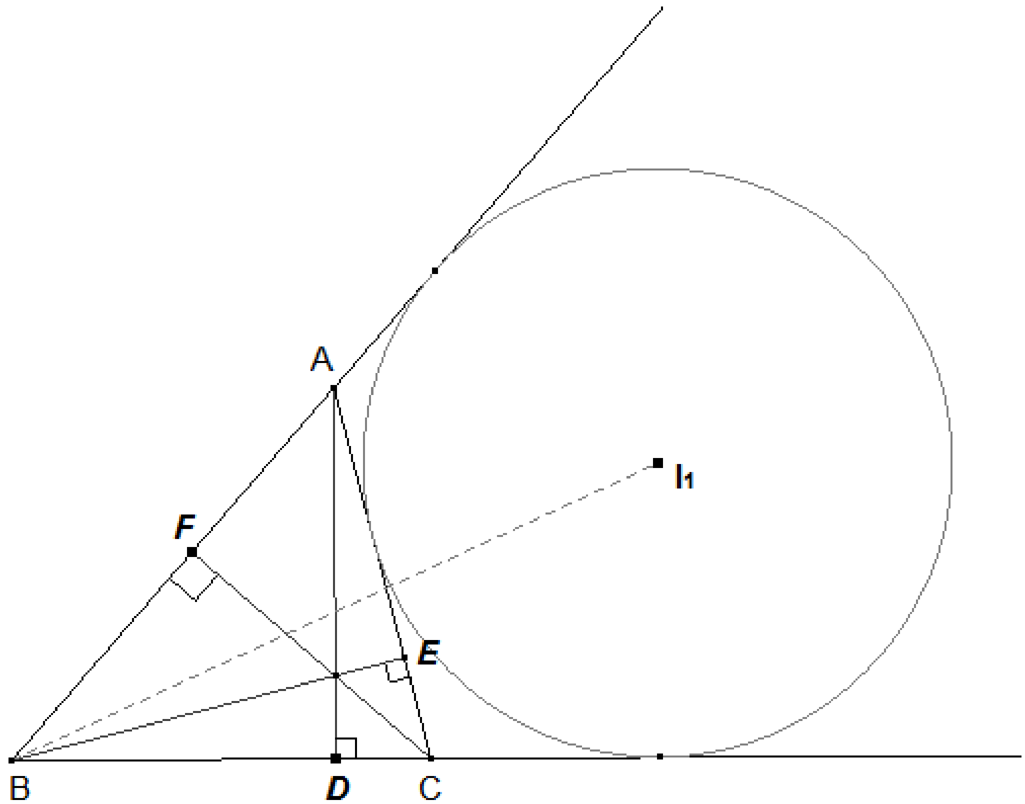


Figura 3.2: Relación entre los recíprocos de las alturas y los exradios.

Consideremos el $\triangle ABC$ de la Figura 3.2, con las alturas AD, BE y CF; y sea I_1 el centro de uno de los excírculos; calculemos el área del $\triangle ABC$ usando cada una de las alturas:

$$a(\triangle ABC) = \frac{BC \cdot AD}{2} \Rightarrow \frac{1}{AD} = \frac{BC}{2a(\triangle ABC)}$$

$$a(\triangle ABC) = \frac{CA \cdot BE}{2} \Rightarrow \frac{1}{BE} = \frac{CA}{2a(\triangle ABC)}$$

$$a(\triangle ABC) = \frac{AB \cdot CF}{2} \Rightarrow \frac{1}{CF} = \frac{1}{2a(\triangle ABC)}$$

$$\therefore \frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{BC + CA + AB}{2a(\triangle ABC)} = \frac{s}{a(\triangle ABC)}.$$

De ahí que:

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} \quad = \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

como se quería.■

Estrategia heurística utilizada: Básicamente consisten en usar analogías con problemas propuestos antes, donde nos permite establecer relaciones de las alturas y los excírculos.

Uso de recursos: uso de las alturas del triángulo ABC, fórmula del área para un triángulo y el semiperímetro.

Ideas principales que guiaron el desarrollo del problema fueron:

1. Tener siempre presente el uso de radios (incírculo y excírculos).
2. Uso de los semiperimetros del triángulo ABC.
3. Calcular el reciproco de cada una de las alturas respectivas a los vértices del triángulo.

Visualización con el software dinámico

Con Cabri Géometrè podemos visualizar la gráfica (3.2) correspondiente a la relación entre los recíprocos de las alturas y los exradios, ya que también en dicha figura si movemos un vértice del triángulo podemos ver sigue respetando las propiedades que mencionamos.

Finalmente, a raíz del teorema inicial y teniendo en cuenta los siguientes conceptos, se obtiene el corolario 3.2.2.

Definición (Potencia de un punto).- La potencia de un punto con respecto a una circunferencia, es el producto de sus distancias a cualquier par de puntos en la circunferencia que sean colineales con él.

Definición (Eje radical).- El eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de un punto cuyas potencias con respecto a las dos circunferencias es igual.

Corolario 3.1.2 *El eje radical de la circunferencia inscrita y cada una de las circunferencias excritas, son las bisectrices del ángulo externo del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo dado.*

Demostración. Ya que el punto medio de los lados de un triángulo era también el punto medio de los puntos de contacto del incírculo y cada uno de los excírculos, entonces, en las Figuras 3.3a y 3.3b, $RL = LS$; es decir, desde L, los segmentos de tangente al incírculo de centro I y el excírculo de centro I_1, son iguales.

Por lo tanto, la potencia del punto Lrespecto a estas dos circunferencias es la misma y su eje radical pasa por L. La bisectriz en A es la línea de los centros de las dos circunferencias; y como los triángulos ABC y LMN son homotéticos, la bisectriz en el vértice L (LD) del $\triangle LMN$ es paralela a la bisectriz en A (AI) del $\triangle ABC$; por tanto, la perpendicular a LD es perpendicular a AI; y es bisectriz del ángulo exterior en L del $\triangle LMN$. Esta recta por L, perpendicular a la bisectriz en A, es el eje radical del incírculo de centro I y el excírculo de centro I_1.

De la misma manera se procede con las otras dos parejas de circunferencias. ■

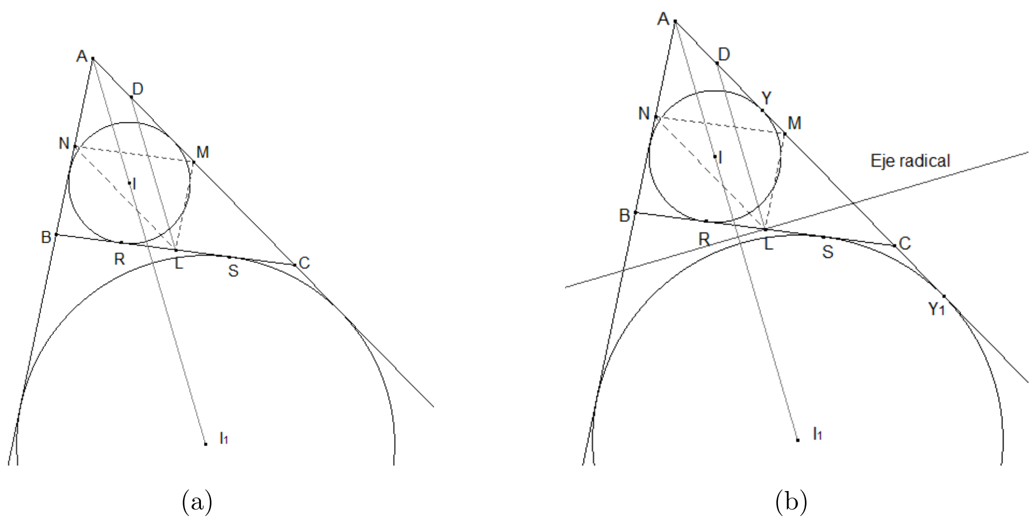


Figura 3.3: Eje radical del incírculo y uno de sus excírculos.

3.2. Problema de la Circunferencia de los nueve puntos

Introducción. Al parecer, Leonard Euler (1707-1783) fue el primero en abordar este problema y establecer la Circunferencia de los nueve puntos o en abordar este problema y establecer la Circunferencia de los nueve puntos.

Sin embargo, aunque no se le atribuye, casi siempre se hace referencia a Karl Feuerbach (1804-1872) cuando se habla de esta circunferencia; quizá, por el Teorema que lleva su nombre y que abordaremos más adelante.

La circunferencia recibe este nombre, porque para cualquier triángulo dado, ésta pasa por nueve puntos (3.4):

- los puntos medios de cada lado del triángulo (L,M y N);
- los pies de las alturas (E,D y F); y

- los puntos medios de los segmentos determinados por el ortocentro y los vértices del triángulo (P,Q y R).

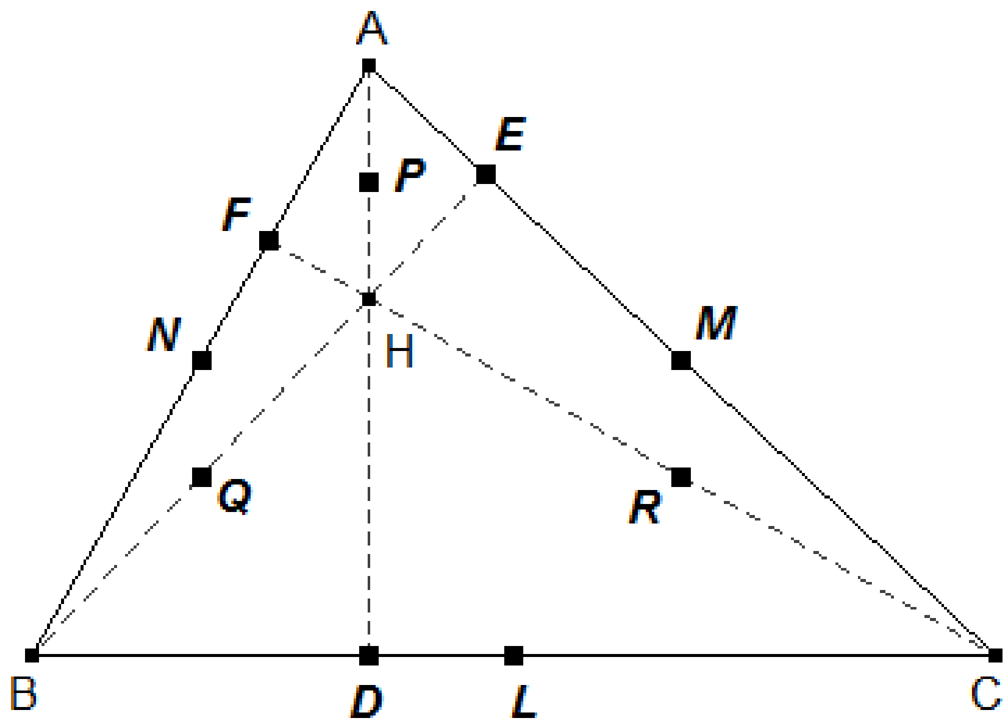
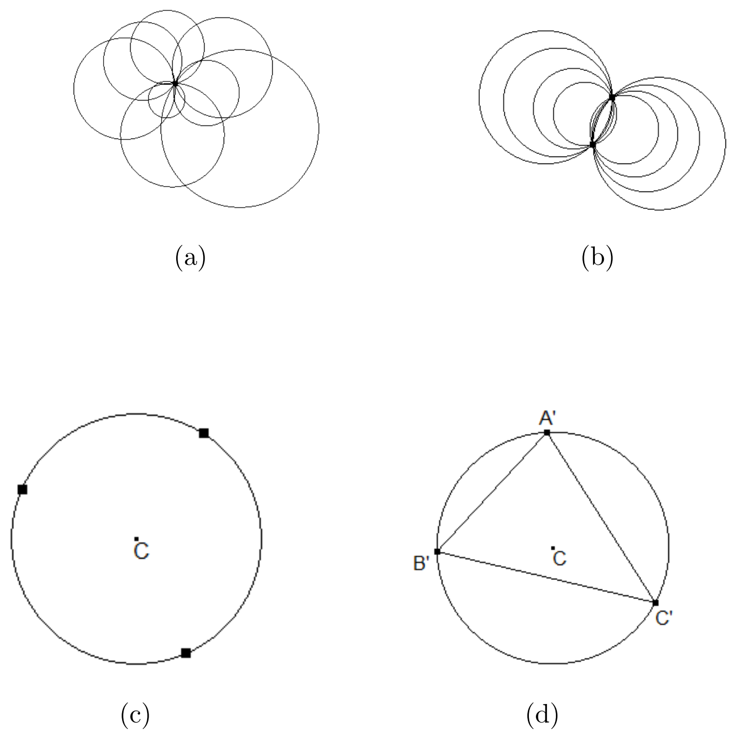


Figura 3.4: Puntos que intervienen en la Circunferencia

En 1820 los matemáticos franceses Charles Julien Brianchon (1783-1864) y Jean Victor Poncelet (1788-1867) redescubrieron la circunferencia hallada por Euler, y le dieron ese nombre: Circunferencia de los nueve puntos.

Para apreciar la virtud de este hallazgo, notemos que dado un punto, existe un haz de circunferencias que pasan por él; lo mismo ocurre cuando se dan dos puntos, hay una infinidad de circunferencias que pasan por ellos. Sin embargo, dados tres puntos no colineales en un plano pasa una, y sólo una, circunferencia por ellos como se muestra en la 3.5.



(a) (b) (c) (d)

Figura 3.5: Figuras para una mejor apreciación del hallazgo

Las cosas cambian a partir de cuatro puntos dados; para garantizar que hay una circunferencia que pasa por ellos, los puntos deben cumplir con una fuerte restricción: el cuadrilátero que forman tiene ángulos opuestos suplementarios (cuadriláteros cíclicos); es decir dados cualesquiera cuatro puntos en el plano, no se puede garantizar que exista una circunferencia que pase por ellos.

A partir de cinco puntos, las cosas se complican y resulta cada vez más difícil encontrar una circunferencia que pase por ellos.

Teorema 3.2.1 **Circunferencia de los nueve puntos.** *Los puntos medios de los lados de un triángulo, los pies de sus alturas y los puntos medios de los segmentos que unen los vértices a su ortocentro, están en una circunferencia, llamada Circunferencia de los nueve puntos.*

Demostración. Primero se tiene un triángulo ABC con los puntos involucrados; debemos probar que existe una circunferencia que pasa por esos nueve puntos; para ello debemos localizar el centro y probar que son concíclicos; lo haremos de tal manera que vamos a ir incorporando cada uno de los seis puntos a la circunferencia circunscrita del $\triangle LMN$.

i. Primero veremos que D está en la circunferencia del $\triangle LMN$. N es punto medio de AB y D es pie de la altura AD entonces, $ND = \frac{AB}{2}$ ya que $\angle ADB$ es recto; y como L y M son puntos medios de BC y CA, $LM = \frac{AB}{2}$. Además $MN \parallel BC$, entonces $MNDL$ es un trapecio isósceles por tener dos lados no paralelos iguales y, por tanto, es inscriptible; es decir la circunferencia del $\triangle LMN$ pasa por D.

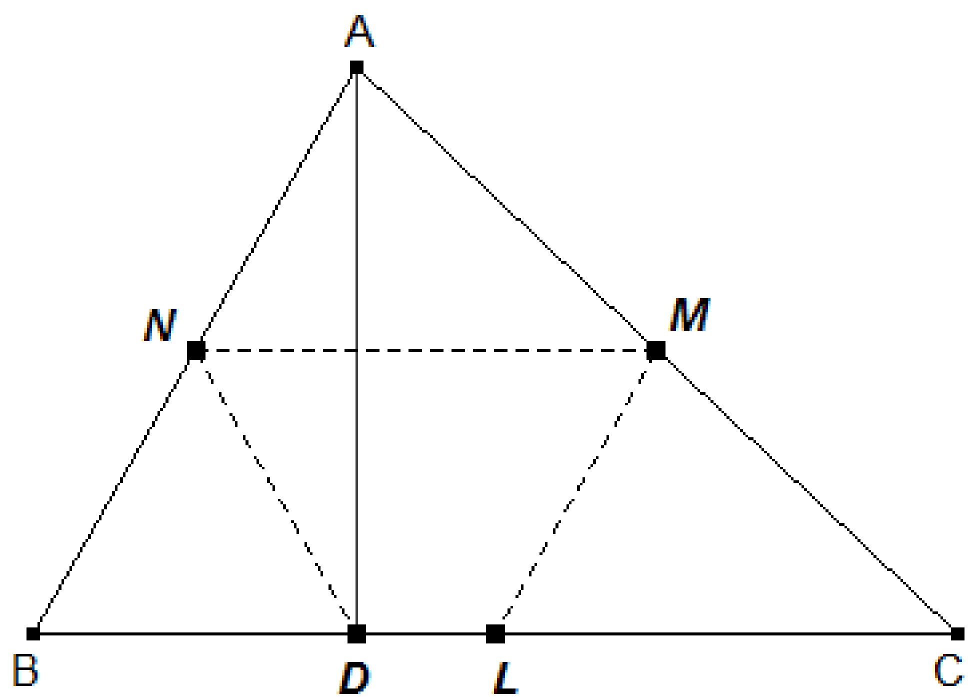


Figura 3.6: Ilustración donde se muestra que D estará en la Circunferencia de los nueve puntos

ii. Ahora incorporaremos al punto P. Al ser NL paralela a AC, es perpendicular a la altura BE; y como N y P son puntos medios del $\triangle ABH$ entonces $PN \perp NL$. Como también $PD \perp DL$, entonces la circunferencia que pasa por N, D y L también pasa por P; de hecho PL es diámetro y en su punto medio estará el centro (Figura 3.7). Por lo tanto P está en la circunferencia que contiene a L,M, N y D.

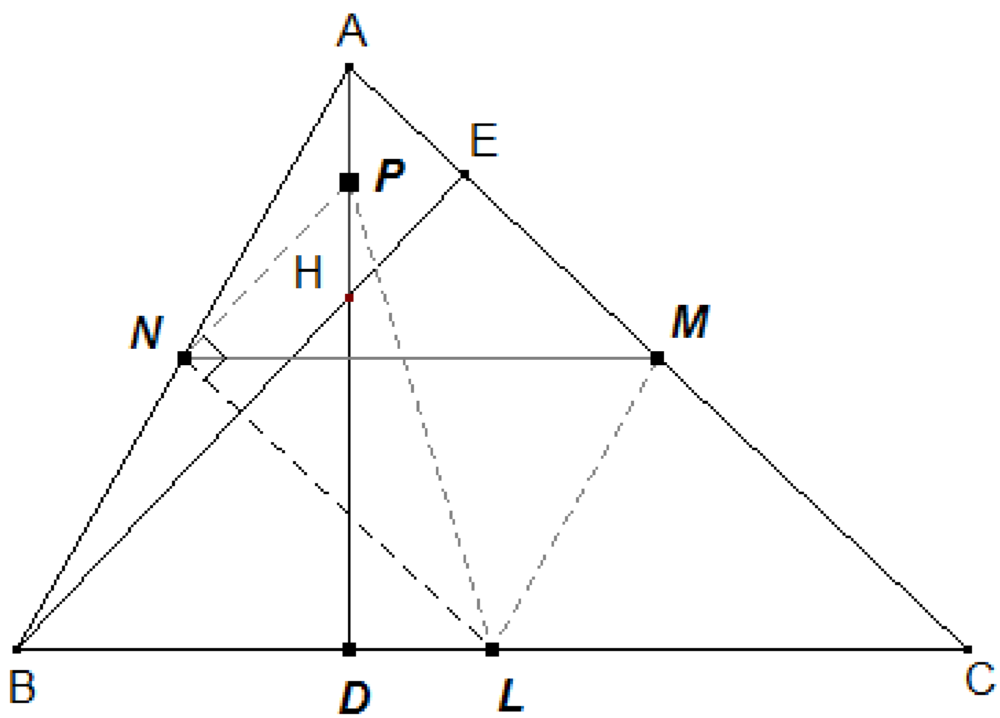


Figura 3.7: Figura que nos muestra que tambén P está en dicha Circunferencia.

iii. Veamos que F está en la circunferencia. También $MF = NL$ pues $NL = \frac{1}{2}$ y como CFA es rectángulo, entonces $MF = \frac{1}{2}AC$; ahora, como $LM \parallel FN$, el trapecio $LMFN$ es isósceles y F está en la circunferencia de L, M y N. Como $PQ \parallel AB$ y $QL \parallel CF$, entonces $\angle LQP$ es recto y, por tanto también Q está en la circunferencia de diámetro PL (Figura 3.8). En forma similar se prueba que E y R están en dicha circunferencia. ■

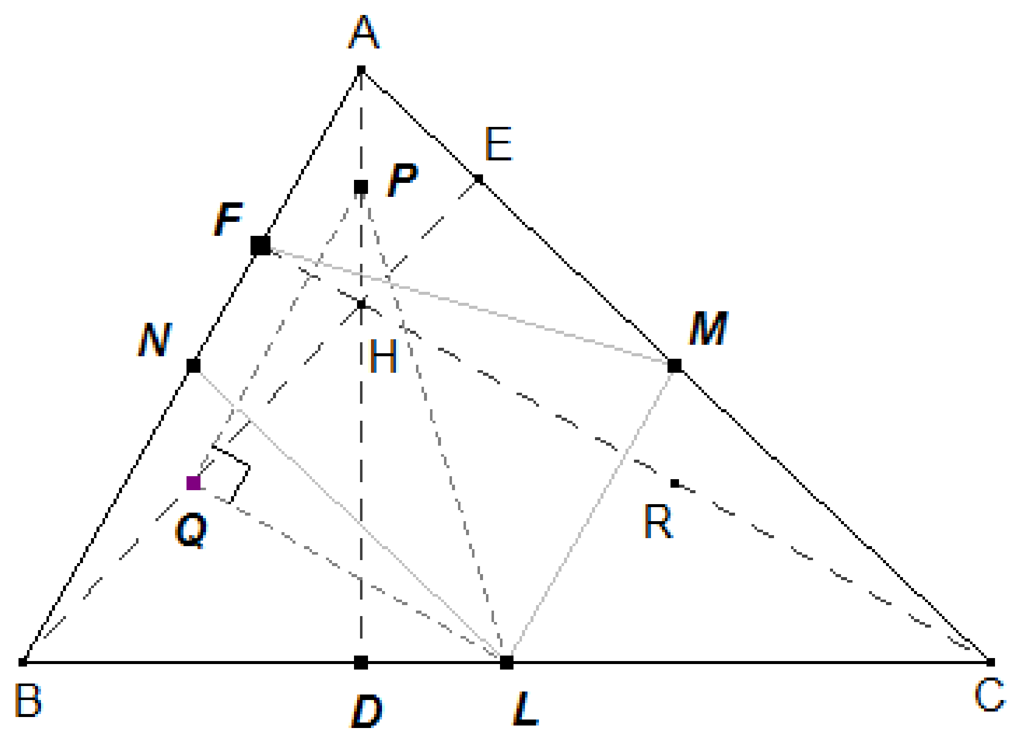


Figura 3.8: Muestra que el punto Q está en la circunferencia y realizando pasos similares se obtiene E y R.

Por lo tanto, los puntos L, R, M, E, P, F, N,Q y D están en la circunferencia de los nueve puntos, cuyo centro es el punto medio de PL (o de QM, o de RN), que llamaremos C_9. El Circuncentro del triángulo ABC, es el punto O; se puede probar que O, G, C_9 y H están alineados, como se muestra en la Figura 3.9.

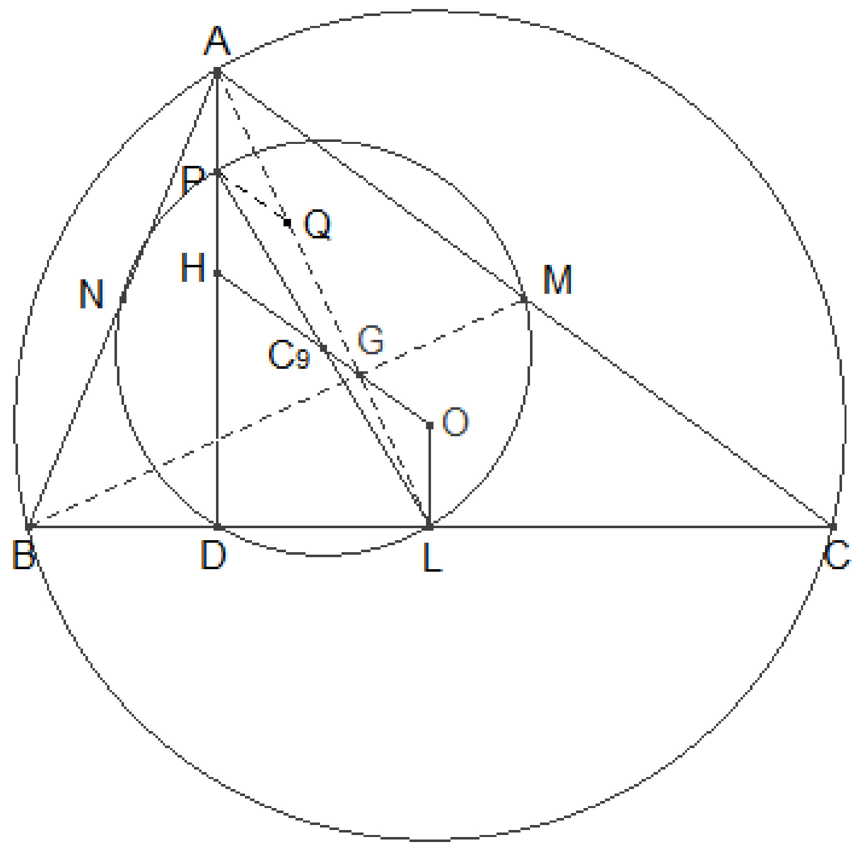


Figura 3.9: Circunferencia de los nueve puntos y la Circunferencia circunscrita, donde H es el ortocentro, y G Centro gravedad del $\triangle ABC$.

La Figura 3.10 contiene una serie de ilustraciones que permiten visualizar mejor la demostración anterior.

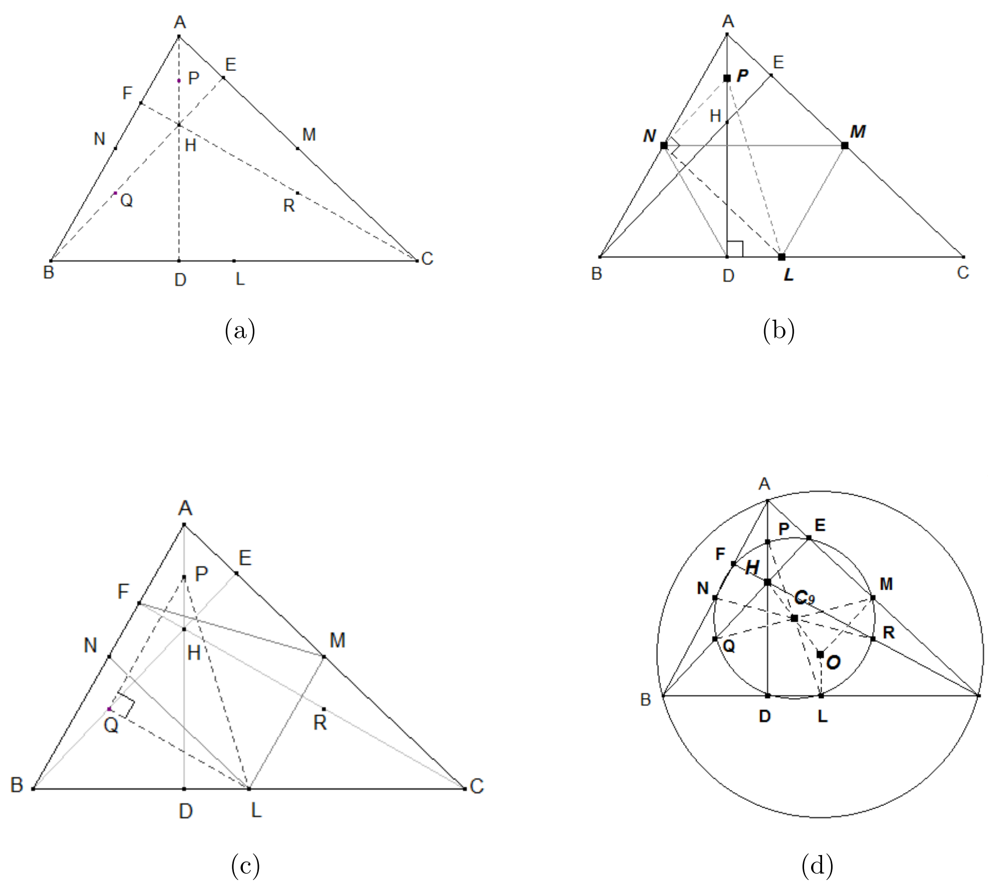


Figura 3.10: Figuras para una mejor visualización de la demostración.

Estrategia heurística utilizada: hacer un dibujo, dividir el problema en subproblemas, trazar segmentos paralelos a otros.

Uso de recursos: usar las propiedades de los cuadriláteros concíclicos, teorema de Tales, trazar perpendiculares a un segmento, paralelas y desde luego que el conocimiento y habilidad para trabajar con el software son aspectos esenciales para tener éxito con este acercamiento las cuestiones claves son: los trazos necesarios y determinar el centro de dicha circunferencia.

Ideas principales que guiaron el desarrollo del problema fueron:

1. El ir incluyendo dichos puntos a la circunferencia que menciona el teorema, es decir, ver que tales puntos satisfacen las condiciones de ser un trapecio isósceles.

2. Notar segmentos de medidas iguales por medio del teorema de Tales.

3. Segmentos perpendiculares a los lados que nos generan triángulos rectángulos. Segmentos paralelos que se derivan de trazos con los puntos medios.

Visualización con el software dinámico
Con Cabri realizamos un dibujo suponiendo todos los puntos dados en el triángulo ABC y el centro de la circunferencia, para luego observar las relaciones que hemos mencionado como paralelas, perpendiculares, triángulos rectángulos y finalmente ver que si cumple con que la Circunferencia de los nueve puntos pasa por dichos puntos y verificar que en efecto, el centro C_9 es punto medio de PL.

De lo anterior, se desprenden una serie de propiedades que se enunciaran como:

Corolario 3.2.1 *El radio de la circunferencia de los nueve puntos mide la mitad del radio del cincucírculo.*

Demostración. Es inmediato del hecho de que el triángulo LMN es homotético con el triángulo ABC con razón de semejanza $\frac{1}{2}$, entonces las circunferencias conservan esa relación entre los radios. ■

Estrategia heurística utilizada: establecer relación de homotecia entre dos triángulos.

Uso de recursos: usar el concepto y las propiedades de homotecia y razones de congruencia.

Ideas principales que guiaron el desarrollo del problema fueron:

1. Ver que triángulos son homotéticos y utilizar las propiedades de homotecia en ellos.

2. Ver que la relación entre las circunferencias conservan la relación de los radios.

Corolario 3.2.2 *El centro de la Circunferencia de los nueve puntos es el punto medio del segmento que une el Ortocentro y el Circuncentro.*

Demostración. En la figura 3.11 se muestran los triángulos ANM y LMN, congruentes, P es el ortocentro del primero y O es el ortocentro del segundo, entonces $AP = LO$, pero $AP = PH \Rightarrow PH = LO$ y como son segmentos paralelos, entonces $PHLO$ es un paralelogramo, cuyas diagonales se bisecan. Por lo tanto C_9, el centro de la Circunferencia de los nueve puntos está en el punto medio de H, el Ortocentro, y O, el Circuncentro.

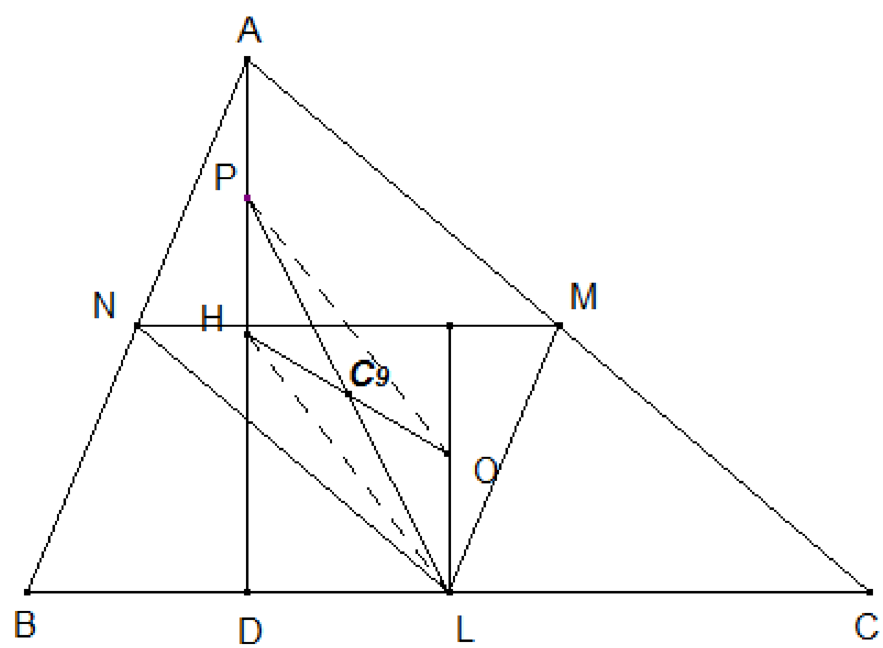


Figura 3.11: Ubicación del centro de la circunferencia de los nueve puntos.

Estrategia heurística utilizada: congruencia de triángulos.

Uso de recursos: usar los conceptos de ortocentro, paralelogramo y congruencia de triángulos.

Ideas principales que guiaron el desarrollo del problema fueron:

1. Observar congruencia de triángulos,
2. Tener en cuenta los ortocentros de dichos triángulos,
3. Verificar que segmentos son iguales, y
4. Utilizar las propiedades de paralelogramo.

Visualización de Cabri

Con este software dinámico podemos obtener la figura, que muestra lo que nuestro corolario menciona. Además se puede ver la igualdad de segmentos, el paralelogramo y los demás puntos que se mencionan en la demostración.

Corolario 3.2.3 El Centro de gravedad G y el ortocentro H del triángulo ABC, son los centros de homotecia de la Circunferencia de los nueve puntos y el Circuncírculo.

Demostración. Notemos en la figura 3.12 que los triángulos $\triangle GOL \sim GHA$, con razón de semejanza $\frac{1}{2}$; y que si Q es el punto medio de AG entonces $\triangle C_9GL \sim \triangle PQL$ también con razón de semejanza $\frac{1}{2}$; y como $\triangle APQ \cong \triangle LOG$,

$$PQ = GO \Rightarrow \frac{C_9G}{GO} = \frac{1}{2} \tag{3.7}$$

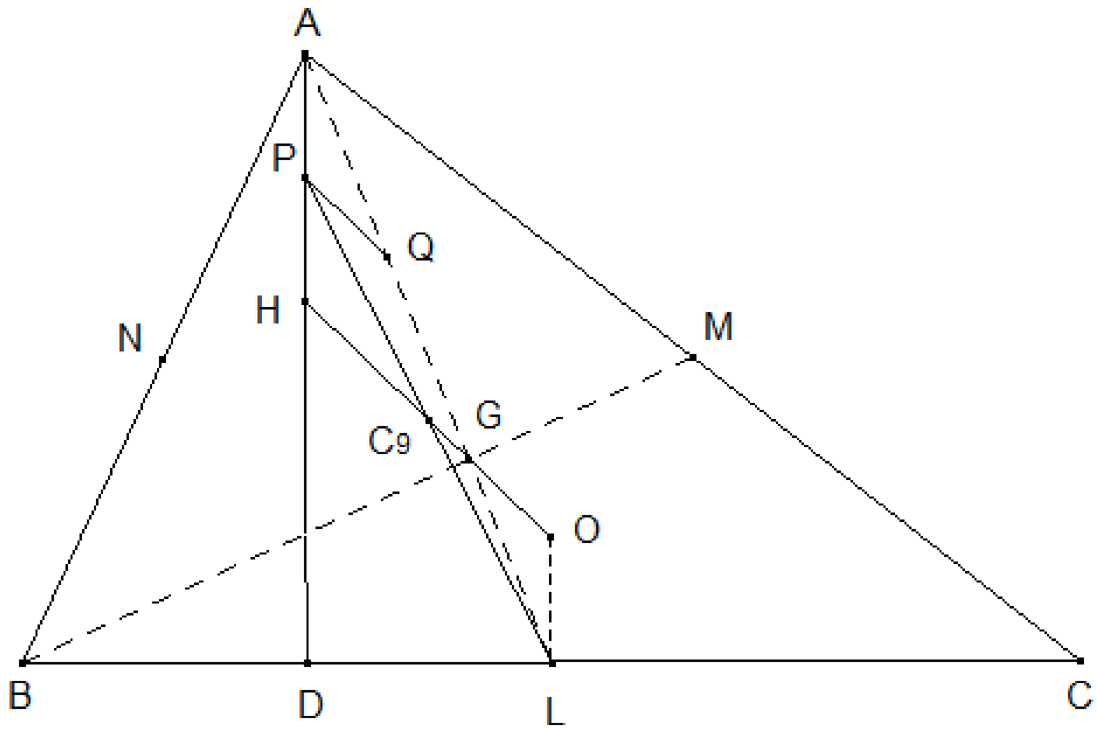


Figura 3.12: G y H son los centros de homotecia de las circunferencias de centros C9 y O.

Además, si recordamos que la razón de los radios de los círculos, el de los nueve puntos con el circuncírculo es $\frac{1}{2}$ entonces, puesto que los centros de homotecia de dos circunferencias son los puntos sobre la línea de los centros que la dividen interna y externamente en la razón de los radios, tendremos:

$$\frac{C_9G}{GO} = -\frac{C_9H}{HO} = \frac{1}{2} = \frac{r_{C_9}}{r_0} \qquad (3.8)$$

De ahí que, efectivamente G y H son los centros de homotecia. Además, podemos relacionar este resultado con otro concepto; los centros de las circunferencias C_9 (de los nueve puntos) y O (el circuncírculo), están separados armónicamente por G (centroide) y H (ortocentro); es decir, O, C_9, G y H son armónicos.■

Estrategias heurísticas utilizadas: usar analogías para establecer relación entre dos triángulos.

Uso de recursos: semejanza de triángulos, congruencia de triángulos y el uso de propiedades de homotecia.

Ideas principales que guiaron el desarrollo del problema fueron:

1. Notar semejanza de triángulos con razón de homotecia,

2. Verificar la congruencia de triángulos que se presenta,

3. Usar el hecho de que la razón de los radios entre los círculos de la Circunferencia de los nueve puntos con el circuncírculo es de $\frac{1}{2}$.

4. Aplicación de las propiedades derivadas de homotecia.

3.3. Teorema de Feuerbach

Introducción. Este teorema nos habla de una circunferencia que pasa por ¡nueve puntos!; su establecimiento se debe al matemático Karl Wilhelm Feuerbach quien lo publicó en 1822. Incluye tres propiedades importantes que enunciamos a continuación:

- La circunferencia de los nueve puntos es tangente a la circunferencia inscrita en el triángulo.

- Es también tangente exterior a las tres circunferencias exinscritas al triángulo, y

- El centro de la circunferencia de los nueve puntos se halla en la Recta de Euler y en el punto medio del segmento cuyos extremos son el ortocentro y el circuncentro.

El Teorema de Feuerbach también hace alusión a algunas notas históricas referidas a la geometría del triángulo y la circunferencia, rama que se nutrió de numerosos resultados a lo largo del siglo XIX.

Teorema 3.3.1 La circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es tangente a la circunferencia inscrita y a cada una de las circunferencias excritas del triángulo.

La figura 3.13 muestra de forma más visual el Teorema de Feuerbach (para la demostración se requiere de otra figura que nos permita visualizarla mucho mejor); los puntos de tangencia están marcados.

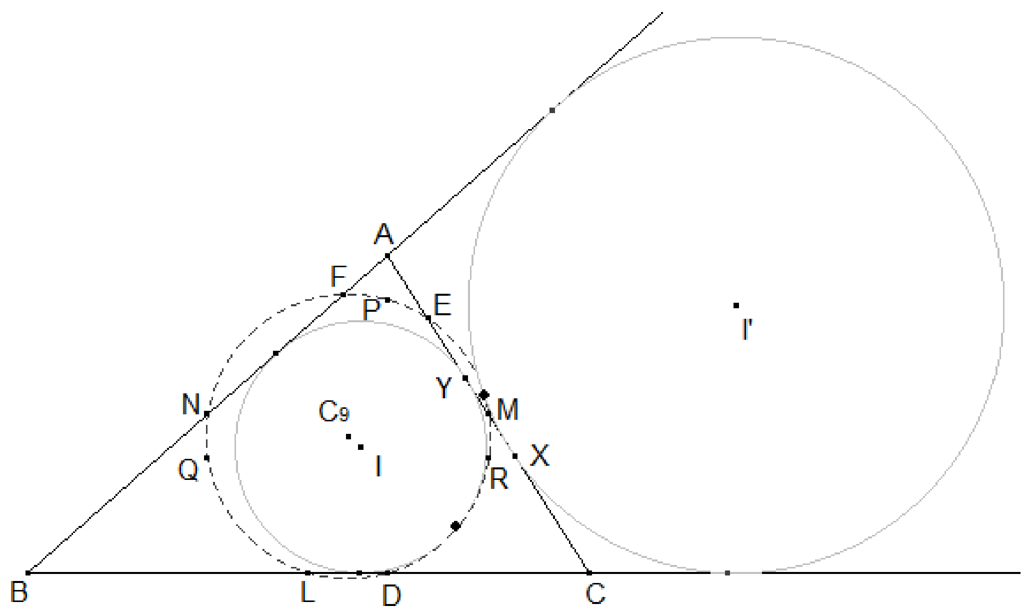


Figura 3.13: Teorema de Feuerbach.

Demostración. El triángulo dado es $\triangle ABC$: L,M y N son puntos medios de los lados; $AD\perp BC$ en D; I e $I^{'}$ son los centros de las circunferencias inscrita y excrita; A y $A^{'}$ son los centros de homotecia de las circunferencias; S es la intersección de $B^{'}C^{'}$ y BC; L es el centro de la circunferencia de inversión cuyo radio es $r = LX$; y C_9 es el centro de la Circunferencia de los nueve puntos. Donde además se tiene que $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Primero se probara que A y D son puntos inversos: A y $A^{'}$ son conjugados armónicos respecto a I e $I^{'}$ se tiene que:

$$\frac{I^{'}A^{'}}{A^{'}I} = \frac{I^{'}A}{AI} \tag{3.9}$$

y como los segmentos $I^{'}X^{'}$, IX y AD son perpendiculares a BC, entonces $X^{'}$, X, $A^{'}$ y D también son conjugados armónicos, ya que:

$$\frac{X^{'}A^{'}}{A^{'}X} = \frac{I^{'}A^{'}}{A^{'}I} \Rightarrow \frac{X^{'}A^{'}}{A^{'}X} = -\frac{I^{'}A}{AI} \tag{3.10}$$

Por lo que de (3.9) y (3.10) se obtiene:

$$\frac{I^{'}A^{'}}{A^{'}I} = -\frac{I^{'}A}{AI} \Longrightarrow \frac{X^{'}A^{'}}{A^{'}X} = -\frac{X^{'}D}{DX} \tag{3.11}$$

Sabiendo que L es punto medio de BC y de $X^{'}X$, y que L es el centro de la circunferencia de inversión con radio $r = LX$, por lo que $A^{'}$ y D son puntos inversos, y entonces:

$$LA^{'} \cdot LD = r^2 = (\frac{c-b}{2})^2 \tag{3.12}$$

Para la primera igualdad la explicación es la siguiente:

$$LA^{'} \cdot LD = r^2$$

Como $X^{'}$, X, $A^{'}$ y D son conjugados armónicos y como L es punto medio de $X^{'}X$. Sabemos que:

$$\frac{X^{'}A^{'}}{XA^{'}} = \frac{X^{'}D}{XD}$$

Remplazando las longitudes de los segmentos en término del punto L y teniendo en cuenta que $LX^{'} = LX$, obtenemos;

$$\begin{aligned}
\frac{(X^{'}L + LA^{'})}{(LX^{'} - LA^{'})} &= \frac{(LD + X^{'}L)}{(LD - X^{'}L)} \\
(X^{'}L + LA^{'}) \cdot (LD + X^{'}L) &= (LD + X^{'}L) \cdot (LX^{'} - LA^{'}) \\
X^{'}L \cdot LD - X^{'}L^{2} + LA^{'} \cdot LD - LA^{'} \cdot X^{'}L &= LD \cdot LX^{'} - LD \cdot LA^{'} + X^{'}L \cdot LX^{'} - X^{'}L \cdot LA^{'} \\
2LA^{'} \cdot LD &= X^{'}L^{2} + LX^{'2} \\
2LA^{'} \cdot LD &= 2LX^{2} \\
LA^{'} \cdot LD &= LX^{2} \\
LA^{'} \cdot LD &= r^{2}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

La razón de la segunda igual, es decir de:

$$LA^{'} \cdot LD = (\frac{c-b}{2})^{2} \tag{3.14}$$

Ya que:

$$\begin{aligned}
X^{'}X &= BC - 2 \cdot XC \\
&= a - 2(s - c) \\
&= a - a - b + c = c - b
\end{aligned}$$

Por lo que se obtiene lo deseado.

Ahora se probara que S y M también son puntos inversos: como L y M son puntos medios, $LM = \frac{c}{2}$; además,

$$\triangle B^{'}SM \sim \triangle B^{'}C^{'}A \Rightarrow \frac{SM}{C^{'}A} = \frac{B^{'}M}{B^{'}A}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore SM &= \frac{C^{'}A \cdot B^{'}M}{B^{'}A} = \frac{CA \cdot (BA - MA)}{BA} = \frac{b \cdot \left(c - \frac{b}{2}\right)}{c} \\
&= \frac{b \cdot (2c - b)}{2c} = \frac{2bc - b^2}{2c}
\end{aligned}
$$

$$
LS = LM - SM = \frac{c}{2} - \frac{2bc - b^2}{2c} = \frac{(c-b)^2}{2c}.
$$

Calculemos el producto:

$$
LS \cdot LM = \frac{(c-b)^2}{2c} \cdot \frac{c}{2} = \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 = r^2.
$$

De ahí que S y M sean puntos inversos respecto a la misma circunferencia. $B^{'}C^{'}$ es una recta que no pasa por el centro de inversión, por lo tanto su inversa es una circunferencia que pasa por L (el centro de inversión) y los puntos D (la altura respecto a BC) y M (el punto medio de AC), la cual es, precisamente, la Circunferencia de los nueve puntos. Como las circunferencias de centros I e $I^{'}$ son ortogonales a la de inversión, se invierten en ellas mismas, y debido a que $B^{'}C^{'}$ es tangente a dichas circunferencias; si aplicamos que la inversión es una transformación isogonal, se tiene que si dos curvas son tangentes una a la otra, las respectivas curvas inversas también son tangentes una a la otra.

Por lo tanto, la Circunferencia de los nueve puntos es tangente al incírculo y al excírculo del $\triangle ABC$. De manera similar se procede con los otros dos excírculos.

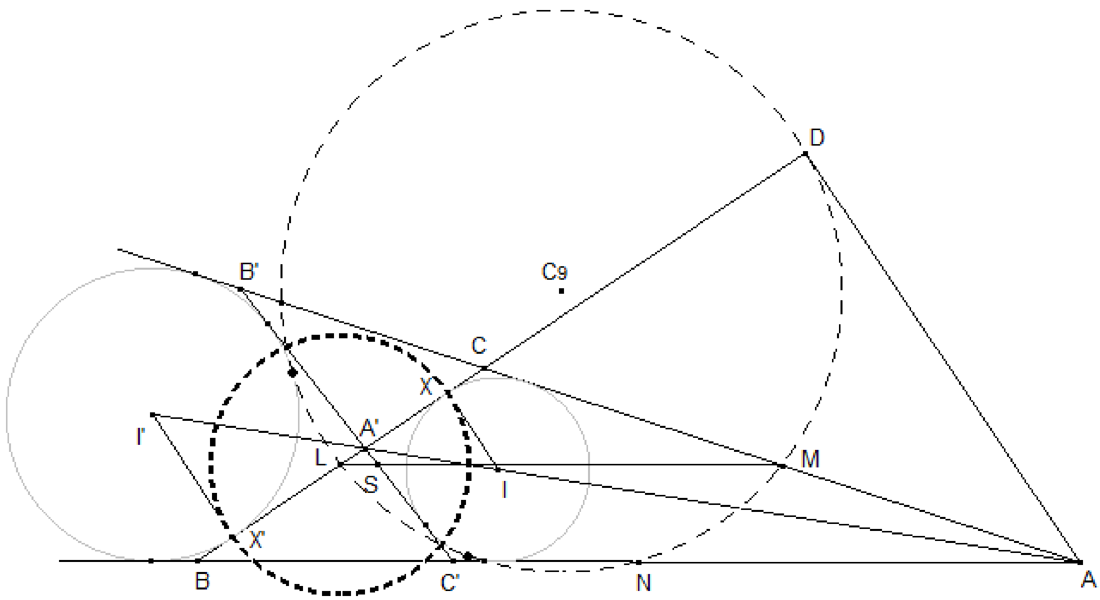


Figura 3.14: Ilustración que permite visualizar la demostración del Teorema de Feuerbach.

Estrategias heurísticas utilizadas: hacer un dibujo, usar analogías para establecer relación entre triángulos, establecer simetría de un punto o figura respecto a un punto o una circunferencia y dividir el problema en subproblemas.

Uso de recursos: congruencia de triángulos, propiedades de conjugados armónicos, homotecia, puntos inversos, semiperímetro y propiedades de inversión.

Ideas principales que guiaron el desarrollo del problema fueron:

1. Mostrar los puntos dados por el teorema, además de nombrar los puntos de intersección que se generan al realizar algunos trazos necesarios para la demostración.

2. Verificar que en efecto los puntos A, D, S y M son puntos inversos, respecto a la misma circunferencia, la de inversión y que cumple con las propiedades de dicha circunferencia.

3. Usando las propiedades de ser ortogonal y verificar que las circunferencias de centros I e I' lo son a la de inversión.

Visualización de Cabri
Con este software podemos trazar la figura con todos los elementos dados para ellos las cuestiones claves son: saber hacer los trazos necesarios por ejemplo para determinar la tangente interior de la circunferencia inscrita con la excrita y determinar los puntos de tangencia que se dan en dichas circunferencias; así como se determina la circunferencia de inversión.

Además, de visualizar varios casos moviendo alguno de los vértices del triángulo y observando que se sigue cumpliendo el teorema.

3.4. Problema de la Celda de Peaucellier

Introducción. El contexto en el que presentamos este problema da origen al nombre elegido para su denominación, pero puede ser presentado (y aparece en algunos textos de Geometría Moderna) en términos de un sistema mecánico articulado, entre otros. Es un problema de variación en el que hay una relación de dependencia entre la línea recta a trazar y la circunferencia.

Dado como un hecho de importancia histórica el hombre tenía desde la antigüedad el deseo de trazar una línea recta sin regla; o bien, trazar una circunferencia sin usar compás y se lleva a cabo a partir de los postulados de Euclides, y con otras herramientas.

Fue alcanzado hasta 1864 por el matemático francés Charles Nicolás Peaucellier (1832-1913), quien diseñó un mecanismo articulado que se utilizó para el correcto funcionamiento de la máquina de vapor, más sin embargo existen otros mecanismos con menos articulaciones que casi hacen lo que se desea pero no exactamente, es el mecanismo por James Watt en 1784, considerado el más óptimo para las pocas aplicaciones encontradas; pero el que nosotros mostramos se ve la potencia del concepto de inversión, ya que dicho mecanismo permite transformar una circunferencia (o un arco) en una recta (o segmento) y viceversa.

Teorema 3.4.1 **Celda de Peaucellier.** O es un punto fijo que será el centro de inversión y r el radio; D es el centro de una circunferencia que pasa por O y P. El inverso de P es P'; $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son barras $\big($movibles$\big)$ de la misma longitud y $PAP'B$ es un rombo $\big($movible$\big)$, de modo que $\overline{OA} > \overline{OB}$ y tales que $r^2 = \overline{OA^2} - \overline{PA^2}$.

Además la constante de inversión esta dada por $a^2 - b^2$.

Demostración. Entonces, si todas las partes se pueden mover libremente con P en una circunferencia, los puntos P y $P^{'}$ describen curvas inversas; pues:

$$\begin{aligned} OP \cdot OP^{'} &= (OC - PC) \cdot (OC + PC) \\ &= (\overline{OC^2}) - (\overline{PC^2}) \\ &= (\overline{OC^2}) + (\overline{CA^2}) - ((\overline{PC^2}) + (\overline{CA^2})) \end{aligned}$$

Pero

$$\overline{OC^2} + \overline{CA^2} = \overline{OA^2}$$

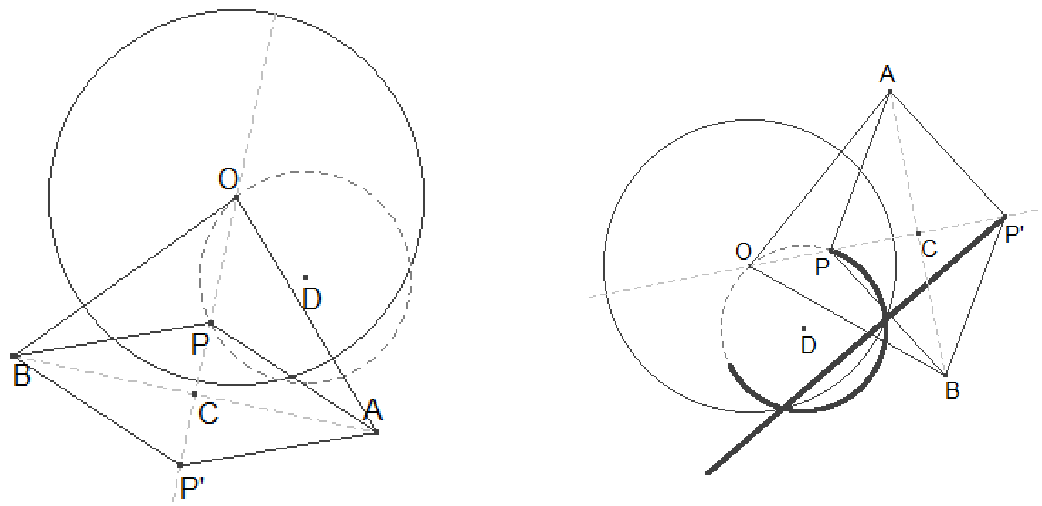
y

$$\overline{PC^2} + \overline{CA^2} = \overline{PA^2}$$

Entonces:

$$OP \cdot OP' = \overline{OA^2} - \overline{PA^2} = r^2 \tag{3.15}$$

Entonces P y P' describen curvas inversas, como muestran las figuras 3.15a y 3.15b; la inversa de la circunferencia de centro D es la recta que pasa por P' y viceversa.



(a) (b)

Figura 3.15: Figura a) muestra el mecanismo de Peaucellier mientras que b) describe lo que se quiere demostrar del Teorema de Peaucellier.

Casos de la Celda de Peaucellier (*Demostración del inverso de P*)

Caso 1.- Cuando P un punto está dentro de la circunferencia de inversión.

Demostración.- Digamos la semi-recta OP y trazamos la perpendicular en P que corte a la circunferencia en T, por T trazamos una tangente que cruza OP en P' entonces P' es el inverso de P, puesto que:

$$\triangle OPT \sim \triangle OTP' \Longrightarrow \frac{OP}{OT} = \frac{OT}{OP'} \tag{3.16}$$

$$\therefore OP \cdot OP' = OT^2 = r^2$$

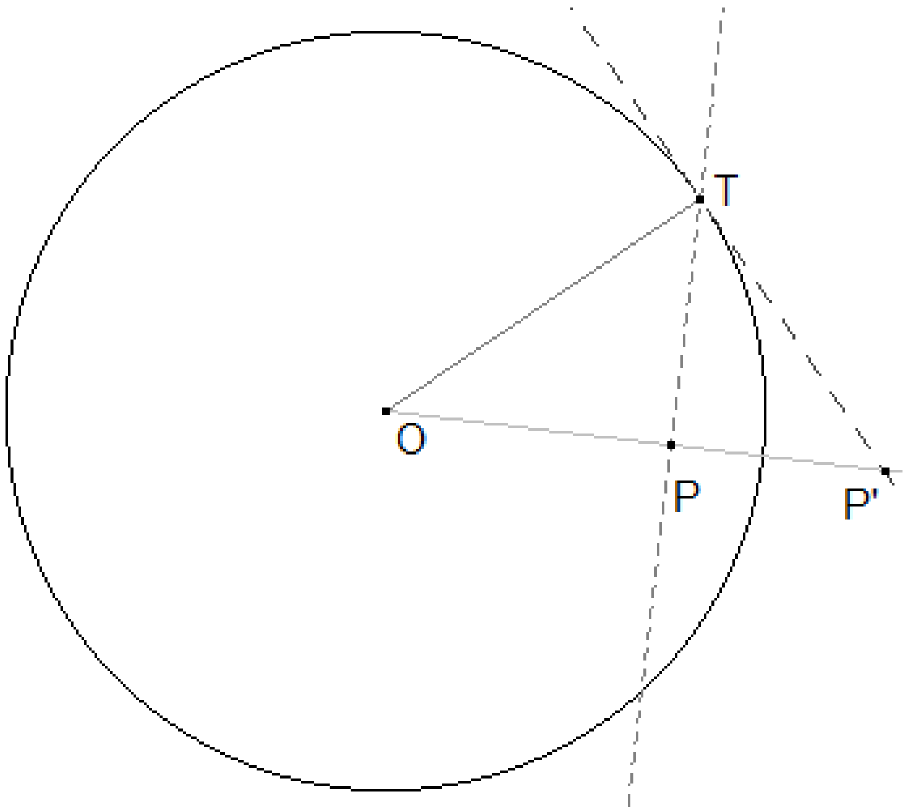
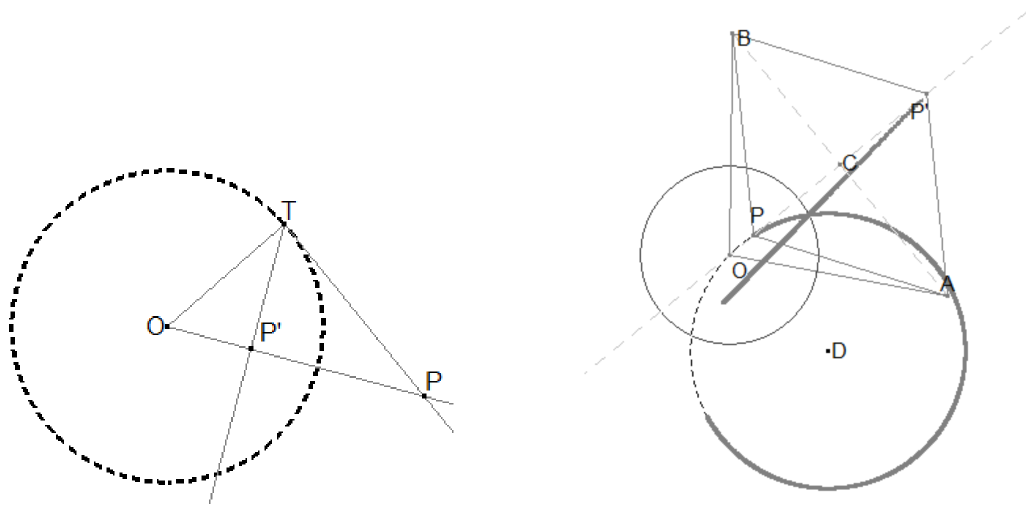


Figura 3.16: Ilustración que permite visualizar la demostración del Caso 1.

Caso 2.- Cuando P un punto está fuera de la circunferencia de inversión.

La demostración es análoga a la anterior. Por lo que sólo se muestra la figura.



(a) (b)

Figura 3.17: Ilustración que permite visualizar la demostración del Caso 2.

Demostración de la Constante de Inversión

Si el punto P describe una curva otro punto del mecanismo, el P' describe su curva inversa respecto al punto O, con una constante de inversión igual a $a^2 - b^2$, siendo a, b las longitudes de los tipos de barras utilizadas.

Aplicando el teorema del seno al triángulo $\triangle OAP'$, se tiene:

$$a \sin \alpha = b \sin \beta \tag{3.17}$$

Y llamado d, d' a las longitudes OC y OP' se pueden escribir:

$$d = a \cos \alpha + b \cos \beta$$

$$d' = a \cos \alpha - b \cos \beta$$

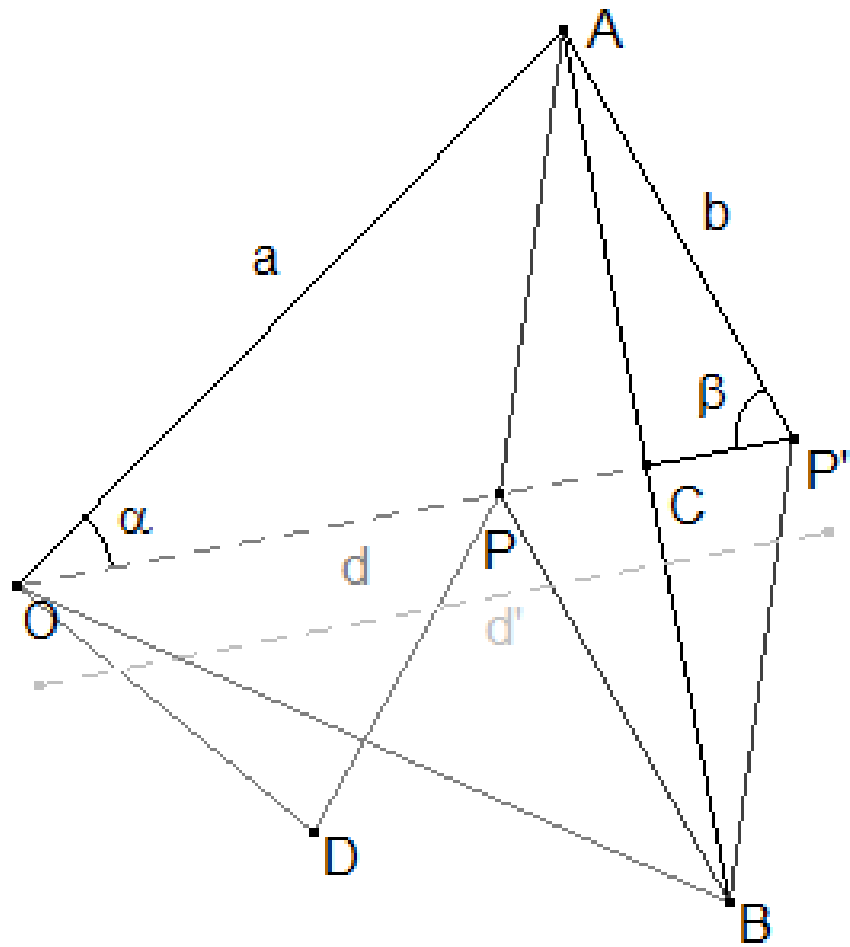


Figura 3.18: Ilustración que permite visualizar la demostración de la Constante de Inversión.

Estrategia heurística utilizada: congruencia de triángulos.

Uso de recursos: usar los conceptos de ortocentro, paralelogramo y congruencia de triángulos.

Ideas principales que guiaron el desarrollo del problema fueron:

1. Observar congruencia de triángulos,

2. Tener en cuenta los ortocentros de dichos triángulos,

3. Verificar que segmentos son iguales, y

4. Utilizar las propiedades de paralelogramo.

Visualización de Cabri

Con este software dinámico podemos obtener la figura, que muestra lo que nuestro corolario menciona. Además se puede ver la igualdad de segmentos, el paralelogramo y los demás puntos que se mencionan en la demostración.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo se demostraron cuatro problemas que involucran conceptos tanto de Geometría Euclidiana como de la Geometría Moderna, tres de ellos están relacionados con el triángulo, uno de los cuales es considerado como una joya de la Geometría Moderna, el Teorema de Feuerbach; así como la incorporación del software dinámico Cabri Géometrè para obtener así una mejor visualización de los problemas y así también facilitar su demostración.

Al inicio se plantearon las siguientes preguntas que guiarían el desarrollo de esta tesis:

1. ¿Qué tipo de procesos heurísticos y cómo se usan los recursos matemáticos en la resolución de problemas de Geometría Moderna?

2. ¿Cuáles son los conceptos fundamentales que están involucrados en los problemas típicos de la Geometría Moderna?

3. ¿Cómo contribuye el uso de software dinámico Cabri Géometrè en el estudio de problemas de Geometría Moderna?

A continuación daremos respuesta a ellas de la siguiente manera: enunciaremos cada pregunta y narrare, de acuerdo a mi punto de vista ya que fui yo quien lo aplique en mi misma lo que observe en el análisis de cada pregunta y problema, y el resultado que obtuve.

1. ***¿Qué tipo de procesos heurísticos y cómo se usan los recursos matemáticos en la resolución de problemas de Geometría Moderna?***

   Existen varios tipos de procesos heurísticos como se mencionan en el Capítulo 2, pero por ejemplo de los que más aborde en los problemas fueron: hacer un dibujo correspondiente al problema, el uso de analogías para establecer relaciones entre triángulos, con problemas resueltos con anterioridad, dividir el problema en subproblemas, el hacer trazos auxiliares, establecer simetrías y el método del análisis.

   Y con respecto a la utilización de recursos matemáticos fueron: operatividad algebraica, igualdades de segmentos, el uso de conceptos y propiedades de: semiperímetro, uso de alturas de un triángulo, fórmula del área de un triángulo, cuadriláteros concíclicos, homotecia, razones de semejanza, congruencia de triángulos, conjugados armónicos, puntos inversos e inversión, así también el Teorema de Tales y Teorema del Seno, desde luego el conocimiento y habilidad para trabajar el software dinámico Cabri, que son aspectos esenciales para tener éxito con este acercamiento a dichos problemas.

   Cabe señalar que esta es sólo una manera más de resolver dichos problemas aun cuando yo solo utilicé estas heurísticas hay distintas maneras de resolver dichos problemas, así como también en las herramientas o recursos matemáticos utilizados.

Y en lo personal algo que me mucha ayudo mucho fue el uso del software, ya que conforme hacia los trazos necesarios para la construcción de la figura que enunciaba al teorema en cuestión, me quedaba claro el problema de lo que se quería y de que estrategias podría seguir para su demostración, así como tomar varios casos con respecto a un movimiento del ratón que cabe señalar la construcción lleva su tiempo y a veces no es sencilla pero para construcciones con demasiados trazos es muy valiosa y evita el tomar ideas erróneas que se dan debido a construcciones un poco burdas.

2. ***¿Cuáles son los conceptos fundamentales que están involucrados en los problemas típicos de la Geometría Moderna?***
   Los conceptos que se involucraron en estos cuatro problemas son básicamente el uso de *área, semiperímetro, formula de la altura de un triángulo, eje radical, cuadriláteros concíclicos, homotecia* e *inversión* que fue clave en el uso de los últimos dos problemas que se abordaron.

3. ***¿Cómo contribuye el uso de software dinámico Cabri Géometrè en el estudio de problemas de Geometría Moderna?***
   Como ya se ha dicho anteriormente en primera instancia para la *visualización* del problema, entendimiento de él, así como también cabe señalar que para poder hacer uso del software también es necesario un entendimiento claro de conceptos previos pues el software esta diseñado para que con la experiencia que nosotros tenemos con el manejo de conceptos sea útil esta herramienta, ya que si carecemos de dichos conocimientos el software será inútil pues llevara mucho el realizar la figura, y probablemente no generemos lo que deseamos.

   Para realizar una figura cuando se lleva poco tiempo familiarizado con el software dinámico Cabri es conveniente mencionar que cuesta tiempo y trabajo elaborar las figuras, pero estos tiempos se acortan conforme el uso puede ser que en figuras un poco sencillas sea más el tiempo que requerimos para la figura que incluso lo que nos lleva la demostración, en otros casos es mucho más útil el tener una buena figura que nos vaya indicando con precisión los trazos, los puntos involucrados y a veces hasta los trazos auxiliares, ya que en ocasiones figuras o construcciones hechas a lápiz y papel nos sugieren ya sean congruencias, trazos auxiliares o seguir una intuición falsa que nos genera errores para la demostración.

Cuando menciono que un simple movimiento del ratón se abarcan muchos casos particulares, no quise decir que ser minimice el hecho de la construcción o el trabajo hecho en el software, pero si el que nos toma menos tiempo el hacer un movimiento he ir visualizando lo que pasa en ciertos casos que el realizar figures a lápiz y papel para cada caso.

A continuación se enlistan algunas de las ventajas que proporciona el software de geometría dinámica:

1. El software dinámico permite la exploración de una figura con un simple movimiento del ratón, que equivale a una múltiple aplicación de la estrategia heurística "tomar casos particulares"; una de las prácticas más usuales en el quehacer matemático, la cual debe ser enseñada a los estudiantes (Schoenfeld, 1992). En nuestro caso, el uso del Cabri Géometrè en el estudio de los cuatro problemas que hemos abordado, permite ver las ventajas del dinamismo que, sin duda, contribuye a un mejor entendimiento de los problemas.

2. La toma de múltiples casos particulares puede conducir a que los estudiantes se "planteen conjeturas"*o* "descubran patrones o relaciones", otras de las prácticas que son consistentes con el quehacer de las matemáticas.

3. El software está elaborado de manera que con el dinamismo de las figuras, las propiedades de las mismas no se pierden; de igual manera, si hacemos una construcción manteniendo las reglas establecidas en el software, podemos visualizar las propiedades de lo que se afirma en las proposiciones. Por ejemplo, en los teoremas de la Circunferencia de los nueve puntos y en el de Feuerbach, al modificar el triángulo ABC, se modifica la figura manteniendo las propiedades de los elementos involucrados (los nueve puntos y los puntos de tangencia entre las circunferencias) cosa imposible de "ver"sólo con lápiz y papel.

   En este sentido, remarcamos que quizás haya estudiantes que no requieran el uso del software para tener éxito en el estudio de este tipo de problemas, pero habrá otros que si lo requieran. También insistimos en que el software dinámico es una herramienta que puede ayudar a aprender –desde entender, y avanzar poco a poco hacia la solución- pero que nunca sustituirá al razonamiento matemático; además, puede influir en cómo dar la argumentación matemática de una solución a un problema o a una demostración, pero sólo eso.

4. El adecuado uso del software dinámico puede contribuir, en diferentes maneras, a que los estudiantes obtengan extensiones de los problemas, lo cual es muy difícil (para la mayoría) de lograr con lápiz y papel.

5. Finalmente, la exploración de los elementos que constituyen un problema o teorema y el dinamismo de las figuras, propicia el desarrollo de una de las habilidades más importantes en el aprendizaje de las matemáticas, que es la visualización; identificada por Presmeg (2006) como la habilidad cognitiva que permite la formación de imágenes mentales a través de las representaciones internas. En nuestros cuatro problemas, es claro que la exploración ayuda que tengamos una mejor idea del problema, que lo visualicemos cada

> vez mejor para, posteriormente, realizar acciones encaminadas a la solución.
>
> Presmeg *(Ibid.)* afirma que la visualización es una de las habilidades que más tiempo requieren para que se desarrolle en los estudiantes, de ahí la importancia de que se esfuercen en poner en juego su imaginación; y para ello resulta útil el software. Por ejemplo, en el problema de la Celda de Peaucellier, mediante la construcción correcta, el dinamismo obtenido de las herramientas del software permite "ver"la correspondencia entre las figuras inversas.

Para abordar y resolver los problemas geométricos analizados en este trabajo, primero es necesario entender el problema: si textualmente no se entiende, conviene seguir las recomendaciones de Polya (1945), hacer un dibujo, marcar lo que se conoce, tener claro qué es lo que se pide en el problema. Si ya que se entendió, tratar de relacionar los datos que nos dan con lo que piden para diseñar un plan de solución. En algunos problemas se puede llegar a la solución desde diferentes caminos, conviene hacer un esfuerzo por distinguir qué lo que nos sirve, de los que sabemos de matemáticas, para abordar el problema. Esto no quiere decir que al primer intento nuestro esfuerzo produzca la solución del problema; en ocasiones que lo que hagamos no nos sirve para llegar a la solución pero tal vez nos da ideas para encontrar otro camino correcto.

En todo momento conviene destacar la utilización de las estrategias heurísticas de Polya y el uso de recursos matemáticos necesarios para arribar a la solución. En los cuatro problemas, quedó manifiesta la importancia de la aplicación de las estrategias heurísticas y de la aplicación correcta de los recursos matemáticos; mediados por procesos de meditación y reflexión.

De esta manera, con las posibilidades de aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas, manifestada en este trabajo, se procura que la incorporación del software de geometría dinámica:

i) Propicie que el que resuelve problemas, plantee conjeturas, aspecto primordial y clave para desencadenar procesos de resolución de problemas, las cuales surgen no por casualidad, sino por actos internos de reflexión y meditación que el sujeto realiza alrededor de un problema. Esto no significa que para plantear conjeturas se tenga que contar, necesariamente, con el uso del software, durante siglos éstas han sido planteadas sin siquiera existir el software; lo que aquí se plantea es utilizar el potencial de la tecnología para fomentar esta actividad en el estudio de las matemáticas;

ii) Facilite la realización de exploraciones de varios casos particulares, entre ellos los valores extremos, que permita identificar elementos que antes, quizás, eran inadvertidos, contribuyendo al entendimiento del problema mismo;

iii) Aliente a descubrir patrones y relaciones entre los elementos involucrados en un problema o en una proposición matemática;

iv) Fomente el desarrollo de la visualización y la imaginación espacial, aspectos esenciales para el entendimiento matemático en una diversidad de situaciones.

Finalmente, es importante señalar que el uso de la tecnología es un recurso que puede ayudar a que el estudiante vaya, interactivamente, aprendiendo cada vez más algo sobre la posible solución de los problemas, pero nunca como un sustituto del maestro; contribuyendo así a la evolución del entendimiento de una determinada situación. En problemas como los aquí planteados seguramente el estudiante requerirá de la orientación y ayuda del maestro de del software.

Bibliografía

[1] Craine T. V. (2009). *Understanding Geometry for a Changing World*, Seventy-first Yearbook; Rheta Rubenstein, general yearbook editor. ISBN 978-0-87353-619-6

[2] Duval, R. (1996). *Registros de representación simiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* Traducción de uso interno realizada por el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav IPN, México. Título original Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5,37-65, IREM de Stramburgo, 1993.

[3] Estrada, M. J. (2003). La formulación y reformulación de problemas o preguntas. En *Revista Educación Matemática*, Vol. 15, No. 2, (pp.77-103).

[4] Eves, H. (1969). *Estudio de las Geometrías.* Editorial UTEHA, México.

[5] Hiebert, J., Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En D. A. Grouwns (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan Publishing Co. (pp. 65-97).

[6] Hiele-Geldof, D. (1984). *The didactics of geometry in the lower class of secondary school* (de didaktiek van de meetkunde in de eerte klas van het V.H.M.O.) en Fuys; Geddes, Tischler. Selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and Pierre M. Van Hiele, Brooklyn College, C.U.N.Y., Nueva York.

[7] Hoyles, C., Noss, R. (1992). A Pedagogy for Mathematical Microworlds. En *Educational Studies in Mathematics 23.*

[8] Lehrer, R., Chazan, D. (1998). *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space.* ISBN 0-8058-1948-7

[9] Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., Post, T. (2000). *Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers.* En A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), Handbook of Research Desing in Mathematics and Science Education (pp. 591-645). Mahwa, NJ: Laurence Erlbaum Associates, Inc. Publishers.

[10] Lester, F. K., Kehle, P. (2003). From problem solving to modeling: An evolution in thinking. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.) *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. (pp. 501-517)

[11] Moriena, S., Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. En *Revista Educación Matemática*, Vol. 15, No. 1, (pp. 5-18).

[12] National Council of Theachers of of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Inc. 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-9988. ISBN 0-87353-480-8

[13] Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*, Ed. F. Trillas, S.A. México, D.F. (pp 51-97).

[14] Postman, N. & Weingarther (1969) *Teaching as a subversive activity.* New York: A Delta Book.

[15] Presmeg, N. (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education.* Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics (pp. 205-235). ISBN 90-77874-19-4

[16] Sánchez, S. E. (2003). La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración: una experiencia en un ambiente de geometría dinámica. En *Revista Educación Matemática,* , Vol. 15, No. 2. (pp.27-53).

[17] Santos, T. L. M. (2001). otencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. En *Revista Avance y Perspectiva.*Vol. 20. (pp. 247-258).

[18] Shively, L. S. (1961). *Introducción a la Geometría Moderna.* Editorial CECSA, México.

[19] Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouwns (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan Publishing Co. (pp. 334-370).

[20] Thom, R. (1973) *Matemáticas de hoy y matemáticas de siempre.* En J. Hernández (Ed.) La enseñanza de la matemática moderna. Madrid: Alianza Editorial. España.

[21] Verdugo, Santos, Rivera, Palmas, Briceño, Barrera. (2001). *El curriculum de matemáticas en el nivel medio superior en México* Un Estudio sobre los Propósitos y Contenidos de los Cursos de Matemáticas del nivel Medio Superior. Proyecto de la Sociedad Matemática Mexicana, financiado por CONACYT. México.

[22] Página de Internet. Revisión de Literatura. Capítulo Uso de la tecnología, en: `http://www.colombiaaprende.edu.cohtmlmediateca1607articles-113753_archivo.pdf`

[23] Página de Internet. Revisión de Literatura. Capítulo El Constructivismo, en: `http://vigotsky.idoneos.com/index.php/314925`