



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE  
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

UN ESQUEMA DIRECTO DE DIFERENCIAS FINITAS PARA LA  
SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES ELÍPTICAS EN REGIONES  
IRREGULARES DEL PLANO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

PRESENTA

Pablo Michel Fernández Valdez

ASESOR:

DR. EN CS. MATEMÁTICAS FRANCISCO JAVIER DOMÍNGUEZ MOTA

MORELIA MICHOACÁN, MARZO 2013





*A Sergio, Daniel y Christopher.*

*May we be as good as a continental breakfast.  
(Got dibs on the coffee. Just saying...)*

---

# Agradecimientos

Para empezar, quiero agradecer a mi familia: a mi mamá, por estar siempre ahí, en las buenas y en las malas, desde los desayunos por las mañanas, hasta las desveladas por la noche, gracias de verdad por enseñarme a ser, por preocuparte y comprender; a Daniel, por haberme guiado en los primeros pasos, por el apoyo incondicional durante la escuela violando la ley general del abusivo hermano mayor; a Omar, por permitirme comportarme como infante, por haber compartido cinco herencias desde la mosca que se ríe hasta la tergiversación del lenguaje; a Sergio, que retando los pronósticos estuvo ahí para dar el consejo adecuado en el momento oportuno; a mi papá, *made me that much stronger, made me work a little bit harder, made me that much wiser so thanks for making me a foghter*, a mi tía Marce, por ayudarme con trámites fuera y dentro de la escuela y por regañarme cuando estuve a punto de salirme del huacal. A mis primos, sobrinos y tíos, tanto Fernández como Valdez(es).

Agradezco también a mi asesor el Dr. Francisco J. Domínguez Mota por darme la oportunidad de trabajar con él, por ver que tenía potencial, por mostrarme un gran abanico de oportunidades y apoyarme durante la realización de este trabajo de tesis así como en mi paso a través de los cursos de licenciatura. A los profesores Gerardo Tinoco Ruiz y Mario César Suárez Arriaga con cuyas correcciones le dieron forma a mi trabajo y ayudaron a cincelar mi personalidad científica resolviendo mis dudas, corrigiendo algunos de mis errores y haciendo aportaciones significativas. Y no sólo a ellos, sino a los que han dejado huella en mi formación académica hasta este punto: Gheno, Zerón, Gil, Hiro, Maria, Chamorro, Liz, Norma, Chipitín, Rocha, Cárdenas, Omar, Angela, Malú, Siddhartha, Campos, Tututi, Longina, Rigo, Adán, Mauricio, Pavel, Elmar, Valero, Emi, Rye, Homero... Gracias por la paciencia, las enseñanzas, los jalones de oreja, los chistes y todo. Lo que sé ahora es en gran parte gracias a ellos. A la UMSNH, mi casa de estudios, por permitirme ser parte de los egresados de tan preciada institución, financiar viajes, congresos y fomentar el espíritu nicolaita.

Ya encarrerados, aprovecho para agradecer a Oreno sugoi tomodachi, die Parvated: Chux «*dubistsehrnett*» Luzbel, más de 10 años sobre la marcha y lo que nos falta, *dankeschön* por ser el faro que une a la Parvada, por crear la revista *Canal*<sup>2</sup> y la válvula de escape, además de comprobar la teoría de que la distancia que separa dos puntos es completamente relativa; Edoth «*¡Sáquenlodelmundo!*» por acompañarme y sermonearme en las malas y en las peores, por seguir soportándome sin importar la geografía y por demostrarme que las penas con *hamburguesa de pechuga de bebé* son menos; Mary Jonesy, los cumpleaños definitivamente empiezan mejor con un *Eeeestas sooooon...*, gracias por estar ahí para compartir un café, una bebida de coco, jícamas, un cuernito o una camaronina, gracias por reír conmigo y que “Dios bendiga al muerto”.

VK Oldman, por ser esa actriz que hace que las películas sean más graciosas, por la genialidad detrás de cada línea en lenguaje parvadezco y por mostrarme que uno no debe darse por vencido sin importar que tan fuerte sople el viento en nuestra contra; Brenn Nocturna, por ser el oximorón andante que muestra que la intuición científica y el saber artístico pueden convivir y dar grandiosos resultados, por ser la *siquiatra* oficial del grupo y moderadora de las tertulias; Alejandra «*Tablonga*», por que los resbalones, películax, horchatas y piedrazos te hacen un indispensable elemento del grupo a pesar de las fricciones; Monty Rosas, por enseñarme que existen accidentes fortuitos, que una sonrisa ayuda a ver el lado positivo y por ser el eslabón en varias cadenas; a Nanche «*Pitufresa*», por los chistes, las anécdotas, la buena vibra y toda la actitud desenfadada y pro-positiva, por ayudarme a ver el vaso medio lleno; Aldo GT, sin palabras cursis \*brofist\*. El mundo es un mejor lugar con ustedes en él.

Debo mencionar algunos que facilitaron el camino hacia donde me encuentro hoy: Gus Hope Paladio<sup>†</sup>, mensajero de los malestares y las quesadillas, gracias por los cds, juegos y situaciones involuntariamente graciosas; Víctor «*Turtle*», señor de las leyes que rigen a los hombres, los rayitos y las vikingas, gracias por acompañarme en el camino al Vallhalla; Eduardo Henry, guardián de los bosques y las marionetas, gracias por instruirme en el arte de los videojuegos; J. Rada, artesano musical de una extraña filosofía de-bida; Edgar «*Nosey*», avatar de la ociosidad, las frazadas rosas y la libido, inseparable aliado en la lucha contra el crimen y los zombis; Marko «*Moquillo*», tótem de la tecnodromía y el espionaje, gracias por el apoyo informático en las infiltraciones; Mauricio «*Miku*» Zacarías, apóstol de la guerra ficticia, el dibujo y las chokogalletas, gracias por las historias xalapeñas e incitarme a la cultura japonesa; Pris, náyade de la sabiduría, Eldis, dríada del poder, Chivis, sílfide del valor, las tres valkirias siempre juntas que inspiran a los guerreros en la batalla; Paisano, ecopublicista de la red de amistades más grande que he visto; Luisillo «*Corunda*», porque hay que luchar por lo que queremos; los editores, tanto del Periódico FM como de Fismateros; N°18 y sus verdes ojos de una hermosura maligna, Káiser Guille y sus anécdotas de pelos, cuando crezca quiero ser un *deutsch* como ustedes; Victorok y Riktue, por los matices que van desde lo verde hasta lo industrial. Mención especial a Gera, Erika, Yunn, Belem y [Lucy] compañeros de guerra en el cubo, quienes ayudaron a que el proceso de creación de tesis fuera menos tedioso con café, dulces, maldad, chilaquiles y taquitos.

Last but not Least, I would like to thank my Bandmates... without them I wouldn't be a Rising Star, but a Falling Meteor. En los coros, Isa y Pau las voces de la demencia, la sapiencia y la conciencia, la erudición, la imaginación y la intuición, compañeras de viajes y congresos que tienen a la mano consejos y andan con ese par de... compadres; en la incómoda bataca, el Moc, quien al lado de sus bestias con senda pachorra no tiene empacho en retobar contra lo chapucero y los pichicatos; en la tornamesa, el DJ Fer «*Malaonda*», quien me demostró que pueden en un lugar cohabitar piedras pesadas y frías tonadas y que las paredes hay que saltárselas; en el sintetizador, Vicky «*Verrücte*», por todos los buenos momentos de centro, helados, café, los secretos que me contaste, los ánimos que me diste y las historias que escuchaste; en el bajo, Sergio «*Chekowsky*», por enseñarme que cuando uno cae debe tomar impulso y llegar más alto, por los libros, las canciones y por los consejos medicinales, con responsabilidad; y en la guitarra, Pablo «*Namensvetter*», gracias por ayudarme a salir adelante con las metafóricas patadas en el trasero del subconsciente, por ser un maestro en varios aspectos y un compinche en otros tantos. Salud.

# Prefacio

La gran mayoría de los fenómenos físicos que ocurren en la naturaleza se pueden describir usando Ecuaciones Diferenciales, desde la caída de un cuerpo a través de un fluido hasta el comportamiento de una región sometida a cierto esfuerzo después de cierto tiempo. El problema con la mayoría de los esquemas que describen la naturaleza es que la solución a ellos no se puede alcanzar por métodos analíticos convencionales. Solamente los problemas idealizados de ecuaciones diferenciales en los que se omiten factores presentes en problemas reales tienen solución analítica exacta.

Una respuesta natural a estos problemas en los que no se puede encontrar la solución, es encontrar un aproximado que sea lo suficientemente bueno. Es entonces cuando surgen los Métodos Numéricos. Con ayuda de computadoras y diferentes esquemas de aproximación se logra encontrar soluciones que, aunque no sean exactas y tengan cierto margen de error, logran predecir la evolución del fenómeno estudiado.

El esquema a utilizarse está basado en el esquema de diferencias finitas. Dada la relativa sencillez para la formulación y aplicación del esquema, se intenta hacer uso de éste para dar solución a problemas cuyas fronteras presentan una complejidad mayor que las definidas por productos de intervalos y regiones rectangulares. Con ayuda de un mallado adecuado de la región del problema, se pueden obtener resultados para ecuaciones elípticas como los mostrados en el presente trabajo. Hoy en día, el estudio del mallado de superficies, la discretización de un problema y el uso de cómputo científico no son nuevos para la comunidad científica, sin embargo eso no quiere decir que no se pueda profundizar más en el estudio y refinamiento de esquemas para lograr soluciones que se aproximen más al resultado esperado.

El contenido del primer capítulo está orientado a explicar de una manera somera los conceptos básicos a tratar en la tesis, se explica brevemente las ecuaciones diferenciales a tratarse, el diseño del mallado de una región, así como una descripción del problema en una dimensión y de algunas dificultades que surgen durante el análisis, así como también se muestra un par de ejemplos básicos de cómo aplicar el método para problemas sencillos.

Lo que se explica en el segundo capítulo es una introducción al método de diferencias finitas clásicas para resolver las ecuaciones de Poisson en regiones rectangulares. Se hace un análisis de aproximación en el cual se hace referencia a propiedades del método como son la estabilidad, la convergencia y la consistencia a la hora de aplicarlo.

Se describe un poco de la teoría involucrada así como el razonamiento detrás de la aplicación del método. Por medio de un par de proposiciones y demostraciones de algunos teoremas se reafirma la importancia de las propiedades mencionadas anteriormente para lograr un buen funcionamiento cuando se definen nuevos esquemas.

En el tercer capítulo se hablará acerca de lo que se ha estado trabajando para extender los esquemas de diferencias finitas a regiones más complicadas y no rectangulares por medio de software especializado. El capítulo también contiene referencias a la literatura que existe actualmente y se enuncian algunos de los esquemas con los que se pretende obtener resultados en el presente trabajo, así como también se describe la forma de deducir y aplicar dichos esquemas.

El cuarto capítulo consta de una explicación acerca de la implementación de los esquemas descritos en el capítulo tres, las pruebas numéricas realizadas y los resultados obtenidos. Se muestra gráficamente la comparación entre los resultados del nuevo esquema contra los resultados de métodos ya existentes y utilizados ampliamente en la actualidad.

En el quinto capítulo se muestra un ejemplo de una aplicación física del esquema propuesto. Después de dar una breve reseña de términos utilizados y deducir unas cuantas ecuaciones, se establecen los parámetros para aplicar el esquema propuesto y se resuelven algunos problemas de mecánica de fluidos. El último capítulo está integrado por las conclusiones a las que se llegó luego de terminar este trabajo de tesis.

# Índice general

|                                                       |            |
|-------------------------------------------------------|------------|
| <b>Dedicatoria.</b>                                   | <b>v</b>   |
| <b>Agradecimientos.</b>                               | <b>vii</b> |
| <b>Prefacio.</b>                                      | <b>ix</b>  |
| <b>1. Introducción</b>                                | <b>1</b>   |
| 1.1. Consideraciones preliminares . . . . .           | 1          |
| 1.2. Condiciones en la frontera . . . . .             | 3          |
| 1.3. Diferencias Finitas 1D . . . . .                 | 4          |
| 1.3.1. Mallado del dominio . . . . .                  | 4          |
| 1.3.2. Definiendo el método . . . . .                 | 5          |
| <b>2. Diferencias Finitas</b>                         | <b>11</b>  |
| 2.1. Diferencias Finitas en 2D . . . . .              | 11         |
| 2.2. Ecuaciones elípticas . . . . .                   | 15         |
| 2.2.1. Ecuación de Poisson . . . . .                  | 16         |
| 2.3. Análisis de aproximación . . . . .               | 16         |
| 2.3.1. Estabilidad . . . . .                          | 19         |
| 2.3.2. Consistencia . . . . .                         | 19         |
| 2.3.3. Convergencia . . . . .                         | 20         |
| <b>3. Diferencias Finitas en Regiones Irregulares</b> | <b>25</b>  |
| 3.1. Regiones irregulares . . . . .                   | 25         |
| 3.2. UNAMalla . . . . .                               | 26         |
| 3.2.1. Generación variacional de mallas . . . . .     | 26         |
| 3.2.2. Calidad de mallas . . . . .                    | 29         |
| 3.3. Esquema propuesto . . . . .                      | 34         |
| <b>4. Implementación del Método</b>                   | <b>39</b>  |
| 4.1. Pruebas numéricas . . . . .                      | 39         |
| 4.2. Resultados . . . . .                             | 42         |

|                                                                   |           |
|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5. Una Aplicación a la Mecánica de Fluidos Computacional</b>   | <b>57</b> |
| 5.1. Ejemplo de aplicación del esquema . . . . .                  | 57        |
| 5.2. Teoría de fluidos . . . . .                                  | 57        |
| 5.2.1. Campo de aceleraciones en un fluido . . . . .              | 58        |
| 5.2.2. Conservación de la masa y cantidad de movimiento . . . . . | 59        |
| 5.3. Simplificación de las ecuaciones . . . . .                   | 61        |
| 5.3.1. Flujo incompresible . . . . .                              | 61        |
| 5.3.2. Flujos irrotacionales no viscosos . . . . .                | 62        |
| 5.4. Cálculo del potencial . . . . .                              | 63        |
| <b>6. Conclusiones</b>                                            | <b>71</b> |
| <b>Bibliografía</b>                                               | <b>73</b> |
| <b>A. Programas</b>                                               | <b>75</b> |
| A.1. Descripción de los programas . . . . .                       | 75        |
| A.1.1. dirich4.m . . . . .                                        | 75        |
| A.1.2. cholesky.m . . . . .                                       | 79        |
| A.2. Cómo usar los programas . . . . .                            | 80        |

# Índice de figuras

|                                                          |    |
|----------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Mallado del intervalo $[a,b]$ . . . . .             | 4  |
| 1.2. Comparación de errores Ej1 . . . . .                | 8  |
| 1.3. Comparación de errores Ej2 . . . . .                | 10 |
| 2.1. Mallado de la región $[0,1] \times [0,1]$ . . . . . | 12 |
| 2.2. Estencil a usarse . . . . .                         | 13 |
| 2.3. Inestabilidad . . . . .                             | 13 |
| 2.4. Mejoría del error . . . . .                         | 15 |
| 3.1. Región no rectangular . . . . .                     | 25 |
| 3.2. Región sin bordes rectangulares . . . . .           | 25 |
| 3.3. Región simple elongada. . . . .                     | 26 |
| 3.4. Región altamente irregular. . . . .                 | 26 |
| 3.5. Descripción gráfica . . . . .                       | 27 |
| 3.6. Celda convexa. . . . .                              | 28 |
| 3.7. Celda no convexa. . . . .                           | 28 |
| 3.8. Reubicación de celdas . . . . .                     | 29 |
| 3.9. Ejemplos de celdas elongadas. . . . .               | 30 |
| 3.10. Ejemplos de celdas elongadas. . . . .              | 31 |
| 3.11. Región Cóncava. . . . .                            | 31 |
| 3.12. Mallado con baja torcedura. . . . .                | 31 |
| 3.13. Mallado con alta torcedura. . . . .                | 31 |
| 3.14. Mallado con baja torcedura . . . . .               | 32 |
| 3.15. Mallado con alta torcedura . . . . .               | 32 |
| 3.16. Celda del mallado . . . . .                        | 33 |
| 3.17. Triángulos generados . . . . .                     | 33 |
| 3.18. Estencil a utilizarse . . . . .                    | 34 |
| 3.19. Orden de la numeración de los nodos. . . . .       | 38 |
| 4.1. Regiones Simples. . . . .                           | 40 |
| 4.2. Regiones de complejidad media. . . . .              | 40 |
| 4.3. Regiones Geográficas. . . . .                       | 41 |
| 4.4. Frontera mal condicionada en EQL. . . . .           | 42 |
| 4.5. Frontera mal condicionada en CRN. . . . .           | 43 |

|                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.6. Celdas degeneradas . . . . .                                               | 43 |
| 4.7. Comparación de resultados P1 . . . . .                                     | 44 |
| 4.8. Comparación de resultados P1 . . . . .                                     | 45 |
| 4.9. Comparación de resultados P1 . . . . .                                     | 46 |
| 4.10. Comparación de resultados P2 . . . . .                                    | 47 |
| 4.11. Comparación de resultados P2 . . . . .                                    | 48 |
| 4.12. Comparación de resultados P2 . . . . .                                    | 49 |
| 4.13. Comparación de esquemas . . . . .                                         | 50 |
| 4.14. Comparación de esquemas . . . . .                                         | 51 |
| 4.15. Coeficiente de convexidad . . . . .                                       | 52 |
| 4.16. Coeficiente de torcedura . . . . .                                        | 54 |
| 4.17. Coeficiente de irregularidad . . . . .                                    | 55 |
| 5.1. Volumen de control . . . . .                                               | 60 |
| 5.2. Vector unitario $n$ . . . . .                                              | 64 |
| 5.3. Región $\Omega_1$ . . . . .                                                | 65 |
| 5.4. Región $\Omega_2$ . . . . .                                                | 66 |
| 5.5. Región $\Omega_3$ . . . . .                                                | 66 |
| 5.6. Modelo numérico del flujo de potencial para la región $\Omega_1$ . . . . . | 67 |
| 5.7. Modelo numérico del flujo de potencial para la región $\Omega_2$ . . . . . | 68 |
| 5.8. Modelo numérico del flujo de potencial para la región $\Omega_3$ . . . . . | 69 |
| A.1. Relación entre $x$ , $y$ y $G$ . . . . .                                   | 81 |

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Consideraciones preliminares

En la actualidad existen varios trabajos en la literatura acerca de como tratar de resolver ecuaciones diferenciales parciales, ya sea por métodos analíticos o por métodos numéricos, la motivación principal para la realización de este trabajo es la de encontrar un esquema nuevo que se base en conceptos simplificados y que las definiciones y teoremas involucrados en su deducción sean sencillos de entender y aplicar, aunado a esto, se espera que se siga logrando una precisión aceptable en los resultados que se obtengan con el nuevo esquema.

Obteniendo un sistema sencillo y directo que obtenga resultados similares a los obtenidos con esquemas clásicos y métodos de mayor complejidad se logrará simplificar la manera de resolver problemas que se presentan en varios ámbitos del conocimiento científico. Cabe mencionar que una de las mayores motivaciones para usar métodos de aproximación, en particular las diferencias finitas, es el hecho de que por medio de éstos se puede transformar el problema original en un problema más sencillo que puede resolverse. Los métodos actuales de solución de ecuaciones diferenciales parciales lineales (EDP) están definidos para regiones que resultan de productos de intervalos, por lo que su aplicación se limita bastante cuando la región no es de este tipo.

Para poder trabajar con esquemas que aproximen situaciones reales en la naturaleza se hace uso de representaciones de dichos fenómenos por medio de ecuaciones, las cuales en su mayoría son ecuaciones diferenciales parciales. Una ecuación en derivadas parciales es una relación entre una función de dos o más variables y algunas de sus derivadas parciales. El *orden* de la EDP se define como el mayor orden de las derivadas que están presentes en la ecuación. Los sistemas de ecuaciones diferenciales que simulan fenómenos físicos comúnmente se separan en grupos dependiendo del tipo de las relaciones existentes entre las derivadas que se involucran.

Los sistemas a tratarse en el presente trabajo son las EDP de segundo orden. Éstas se pueden clasificar en *hiperbólicas*, *parabólicas* y *elípticas*.

Una típica EDP lineal de segundo orden tiene la forma:

$$A\delta_{xx}^2\varphi + B\delta_{xy}^2\varphi + C\delta_{yy}^2\varphi + D\delta_x\varphi + E\delta_y\varphi + F = 0, \quad (1.1)$$

en donde  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  y  $F$  son coeficientes que pueden depender tanto de la variable  $x$  como de la variable  $y$ . Una de las formas más usadas para saber a qué grupo pertenece una EDP es obteniendo el determinante de una matriz cuyos coeficientes son los coeficientes  $A$ ,  $B$  y  $C$  de la ecuación 1.1.[1]

Una ecuación es *hiperbólica* si

$$Z = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0,$$

es *parabólica* si

$$Z = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0,$$

es *elíptica* si

$$Z = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0.$$

Las ecuaciones hiperbólicas modelan el transporte y movimiento de alguna cantidad física, ya sea perturbaciones del medio o flujo de fluidos. Como ejemplo de una EDP hiperbólica podemos citar una de las ecuaciones más importantes de la física, la ecuación de onda en una dirección

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

en donde, si ordenamos los términos, podemos ver que  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = -c^2$ . Esto nos da que  $Z < 0$ . Por otra parte, los problemas con ecuaciones parabólicas describen un fenómeno que evoluciona en el tiempo y que llevan a un estado de equilibrio. Si tomamos la ecuación que describe el calentamiento de una barra a lo largo de uno de sus ejes, obtenemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

de la cual vemos que  $A = 0$ ,  $B = 0$  y  $C = \alpha$ , por lo que  $Z = 0$  lo que nos dice que la ecuación de difusión del calor es una ecuación parabólica. Por último, tenemos las ecuaciones elípticas, estas ecuaciones están asociadas con un estado especial del sistema el cual corresponde a un estado de mínima energía. El ejemplo en este caso será la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f$$

es claro ver que  $A = C = 1$  y  $B = 0$  por lo que  $Z = 1$ .

## 1.2. Condiciones en la frontera

Un factor fundamental para poder resolver una EDP son las llamadas condiciones de frontera. Cuando se trata de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) podemos recurrir al teorema fundamental de existencia y unicidad, el cual nos garantiza que existe una solución a nuestro problema y que dicha solución es única para el problema si se da un cierto conjunto de condiciones que la función debe cumplir. Sabemos que la solución general viene dada por una familia de funciones con la misma gráfica pero que difieren en las constantes, las condiciones de frontera son las que nos ayudan a especificar dichas constantes. Dependiendo del grado de la ecuación diferencial es el número de constantes que necesitan ser especificadas, para el caso de las EDO de segundo orden, *se necesita dar condiciones de frontera suficientes para determinar de manera única dos constantes*.

A diferencia de la teoría involucrada en la solución de EDO, cuando se trata de EDP no existe un único teorema fundamental con el que podamos justificar la existencia y unicidad en general de soluciones. En vez de eso, existen diversas teorías independientes que son usadas para cada uno de los grandes grupos de tipos de EDP con los cuales se trabaja comúnmente ya sea lineales como la ecuación de Laplace, la ecuación de calor o la ecuación de onda, o no lineales como la ecuación de Burgers o la ecuación de Monge-Ampère.

De acuerdo con la forma en que se especifiquen las condiciones de frontera el problema puede ser de valor inicial (IVP), donde se da el valor de la función y su derivada en el punto inicial del intervalo, o de valores en la frontera (BVP) donde se da el valor, ya sea de la función o de la derivada en cada uno de los puntos que componen la frontera. En el caso de que se trate de un BVP y se dé el valor de la función en la frontera, se dice que las condiciones son de tipo Dirichlet, si se dan los valores de la derivada las condiciones son de tipo Neumann y en el caso de que se trate de una combinación lineal de ambos valores las condiciones se dicen de Robin.

### 1.3. Diferencias Finitas 1D

Con el propósito de lograr un mejor entendimiento de cómo es que se aplica el método de las diferencias finitas iniciaremos viendo cómo se resuelve el problema en una dimensión. La idea principal al querer resolver una EDP por aproximación con diferencias finitas es remplazar el problema continuo por un número finito de evaluaciones en un subconjunto del dominio. De esta manera el problema de encontrar una solución a una ecuación diferencial parcial se convierte en tratar de encontrar la solución a un sistema algebraico de dimensión finita, para los cuales existen herramientas más básicas y simples que podemos utilizar.

Para definir el subconjunto del dominio en donde se harán las evaluaciones, se hace un mallado con el fin de discretizar el dominio, esto es, dividir el área de interés en pequeños subdominios en los que se harán las aproximaciones a la función continua. Suponemos que el mallado se hace de una forma que nos permita el cálculo, esto es, que el dominio de las ecuaciones parciales va a discretizarse haciendo uso de intervalos más pequeños en donde se requiera una aproximación más fina. Sin embargo, esperaríamos que una discretización regular funcione bien en la mayoría de los casos.

#### 1.3.1. Mallado del dominio

Tomemos por ejemplo, el intervalo  $[a, b]$  de la recta real y hagamos un mallado regular con  $M$  subintervalos de ancho  $\Delta x = \frac{b-a}{M}$ . A cada uno de los puntos  $x_i$  en los que empieza o termina un subintervalo le llamaremos nodo, en este caso indexamos los nodos de manera natural empezando por la cota inferior del intervalo,  $x_0 = a; x_1 = x_0 + \Delta x; x_2 = x_1 + \Delta x; \dots; x_{M-1} = x_{M-2} + \Delta x; x_M = b$  como se muestra en la figura 1.1. Ésta no es la única manera de hacer el mallado, pero es la más sencilla y nos ayudará para ilustrar cómo es que funciona el método de las diferencias finitas.

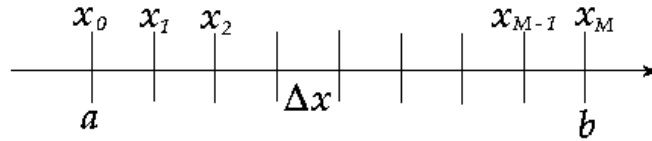


Figura 1.1: Mallado del intervalo  $[a, b]$ .

### 1.3.2. Definiendo el método

Las matemáticas detrás del método de diferencias finitas son relativamente sencillas. Todo parte del uso del teorema de Taylor para expandir una función continua en términos de las derivadas en puntos dentro de una vecindad.

**Teorema 1 *Taylor***

Sea  $\varphi(x)$  una función continua definida en el intervalo  $[a, b]$  que además cumple la propiedad de pertenecer a la clase de funciones infinito diferenciables sobre  $(a, b)$ ,  $C^\infty$ ; dado un punto  $\xi \in (a, b)$ , entonces se tiene que para cualquier otro punto  $x \in (a, b)$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \varphi(\xi) + \frac{d\varphi(\xi)}{dx}(x - \xi) + \frac{d^2\varphi(\xi)}{dx^2} \frac{(x - \xi)^2}{2!} + \dots \\ & \dots + \frac{d^{N-1}\varphi(\xi)}{dx^{N-1}} \frac{(x - \xi)^{N-1}}{(N-1)!} + R_N \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde  $R_N$  es el residuo.

Una demostración del teorema puede verse en [2].

Sea  $\varphi$  una función que cumple con las condiciones mencionadas en el teorema 1, sea  $G$  el conjunto de subintervalos del intervalo  $[a, b]$  que se obtiene de hacer un mallado como en la figura 1.1, tomemos  $x$  como el nodo  $x_{i+1}$  y  $\xi$  como el nodo  $x_i$ , aplicando el teorema 1 obtenemos

$$\varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i) + \varphi'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{\varphi''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \dots$$

Dependiendo de la precisión que deseemos y el esquema que vayamos a utilizar se trunca la serie de Taylor hasta cierta potencia de las derivadas para obtener un polinomio y el resto se engloba en el residuo, que es un error de truncación, el cual se verá más a fondo en el capítulo 2. Tomemos la expansión hasta el término que involucra la primera derivada,

$$\hat{\varphi}(x_{i+1}) = \hat{\varphi}(x_i) + \hat{\varphi}'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

en donde  $\hat{\varphi}$  cumple que  $\varphi(x) = \hat{\varphi}(x) + R_N$  y es nuestra aproximación sobre la cual vamos a trabajar,  $R_N$  es el error de truncación. Despejando de la fórmula anterior obtenemos

$$\hat{\varphi}'(x_i) = \frac{\hat{\varphi}(x_{i+1}) - \hat{\varphi}(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}. \quad (1.3)$$

Dado que  $\varphi$  pertenece a  $C^\infty$ , podemos aplicar de nuevo el teorema 1, lo que nos da una aproximación para la segunda derivada.

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}'(x_{i+1}) &= \hat{\varphi}'(x_i) + \hat{\varphi}''(x_i)(x_{i+1} - x_i) \\
\hat{\varphi}''(x_i) &= \frac{\hat{\varphi}'(x_{i+1}) - \hat{\varphi}'(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} \\
\hat{\varphi}''(x_i) &= \frac{\frac{\hat{\varphi}(x_{i+2}) - \hat{\varphi}(x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_{i+1})} - \frac{\hat{\varphi}(x_{i+1}) - \hat{\varphi}(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}}{(x_{i+1} - x_i)} \\
\hat{\varphi}''(x_i) &= \frac{\hat{\varphi}(x_{i+2}) - 2\hat{\varphi}(x_{i+1}) + \hat{\varphi}(x_i)}{\Delta x^2}. \tag{1.4}
\end{aligned}$$

Este proceso lo podemos repetir para obtener derivadas de mayor orden. La ecuación (1.3) es comúnmente conocida como diferencia hacia adelante, puesto que involucra el valor del siguiente nodo, también existen las que se conocen como diferencia hacia atrás (1.5) y diferencia central (1.6)

$$\hat{\varphi}'(x_i) = \frac{\hat{\varphi}(x_i) - \hat{\varphi}(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} \tag{1.5}$$

$$\hat{\varphi}'(x_i) = \frac{\hat{\varphi}(x_{i+1}) - \hat{\varphi}(x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})}. \tag{1.6}$$

El uso de diferentes esquemas puede facilitar obtener un buen resultado que depende de la ecuación que se presente. Comúnmente los métodos se dividen en *explícitos* o *implícitos*. Los métodos explícitos se caracterizan por usar los datos obtenidos con anterioridad para calcular los datos en el siguiente nodo, mientras que los métodos implícitos calculan todos los valores de un cierto paso al mismo tiempo.

Generalmente los métodos explícitos son más económicos en cuanto a tiempo y procesamiento, puesto que para encontrar un valor se utiliza una combinación de algunos de los valores ya conocidos, sin embargo, los métodos implícitos son más estables en sus resultados aunque consuman más tiempo.

Veamos ahora un par de ejemplos en los que se muestran las diferencias existentes entre ambos tipos de método. Primero veamos como se resuelve un problema que involucra la ecuación del oscilador armónico amortiguado por el método implícito:

### Ejemplo 1

$$\begin{aligned}
m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\kappa \varphi, \quad t \in \Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R} \\
\varphi(0) &= 1; \quad \varphi(1) = 0
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Buscando la solución exacta de esta ecuación por medio de métodos analíticos obtenemos  $\varphi = \cos(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t) - \cot(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t)\sin(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t)$ . Con esta solución podremos comparar los resultados obtenidos con el método de diferencias finitas. Discreticemos el intervalo en  $N = 25$  subintervalos tales que  $\Delta t = 0,04$ . Así, tenemos que  $G = \{t_i | t_0 = 0; t_i = t_{i-1} + \Delta t; i = 1, 2, \dots, 25\}$ , donde  $t_0 = 0; t_1 = 0,04; \dots; t_{25} = 1$ . Supongamos en nuestro caso que tenemos los valores de  $m = 1$  y  $\kappa = 4$ . Sustituyamos la aproximación (1.4) en (1.7) y lo que obtenemos es

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\varphi}(t_{i+1}) - 2\hat{\varphi}(t_i) + \hat{\varphi}(t_{i-1}))}{\Delta t^2} + 4\hat{\varphi}(t_i) &= 0 \\ \frac{1}{\Delta t^2}\hat{\varphi}(t_{i+1}) + (4 - \frac{2}{\Delta t^2})\hat{\varphi}(t_i) + \frac{1}{\Delta t^2}\hat{\varphi}(t_{i-1}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

para cada uno de los puntos del conjunto  $G$ , entonces tenemos  $N + 1$  ecuaciones. Por otro lado, sabemos que  $\hat{\varphi}(t_0) = 1$  y  $\hat{\varphi}(t_{25}) = 0$  dado que representan los valores en la frontera, los cuales ya conocemos. Lo que nos falta conocer son los valores que toma la función en los nodos desde  $t_1$  hasta  $t_{24}$ , entonces vemos que hay 24 incógnitas. Si de las  $N + 1$  ecuaciones que teníamos tomamos sólo las que involucran las incógnitas que tenemos es fácil ver que nos quedamos con 24 ecuaciones.

Esto nos da como resultado un sistema de ecuaciones completo cuya representación matricial  $A$  es una matriz en bandas;  $B$  es el vector que representa las funciones independientes de  $t$  y las condiciones de frontera;  $\Phi$  es el vector de nuestras incógnitas, cuyas entradas son las evaluaciones de

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} (4 - \frac{2}{\Delta t^2}) & \frac{1}{\Delta t^2} & 0 & \dots & \dots \\ \frac{1}{\Delta t^2} & (4 - \frac{2}{\Delta t^2}) & \frac{1}{\Delta t^2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \frac{1}{\Delta t^2} & (4 - \frac{2}{\Delta t^2}) & \frac{1}{\Delta t^2} \\ \dots & \dots & 0 & \frac{1}{\Delta t^2} & (4 - \frac{2}{\Delta t^2}) \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} \frac{-\hat{\varphi}(t_0)}{\Delta t^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{-\hat{\varphi}(t_{25})}{\Delta t^2} \end{pmatrix} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}(t_1) \\ \hat{\varphi}(t_2) \\ \vdots \\ \hat{\varphi}(t_{23}) \\ \hat{\varphi}(t_{24}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Una vez que tenemos integrado nuestro sistema, escogemos el método para resolver sistemas de ecuaciones que consideremos conveniente. Éste es uno de los motivos más importantes por los cuales se utiliza el método de diferencias finitas, puesto que reduce nuestro problema de minimización de un error a resolver un sistema de ecuaciones, que, en general, resulta más sencillo. En nuestro caso particular tenemos

$$A = \begin{pmatrix} -1246 & 625 & 0 & \dots & \dots \\ 625 & -1246 & 625 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 625 & -1246 & 625 \\ \dots & \dots & 0 & 625 & -1246 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -625 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos las aproximaciones a la función en los nodos dados. Podemos repetir el proceso para el mismo ejemplo, pero ahora usando un  $\Delta t = 0,01$ , para observar cómo se comporta la aproximación si aumentamos el número de nodos (fig.1.2). En la tabla 1.1 podemos observar los resultados obtenidos que corresponden a los primeros y los últimos cinco nodos, para ambos casos.

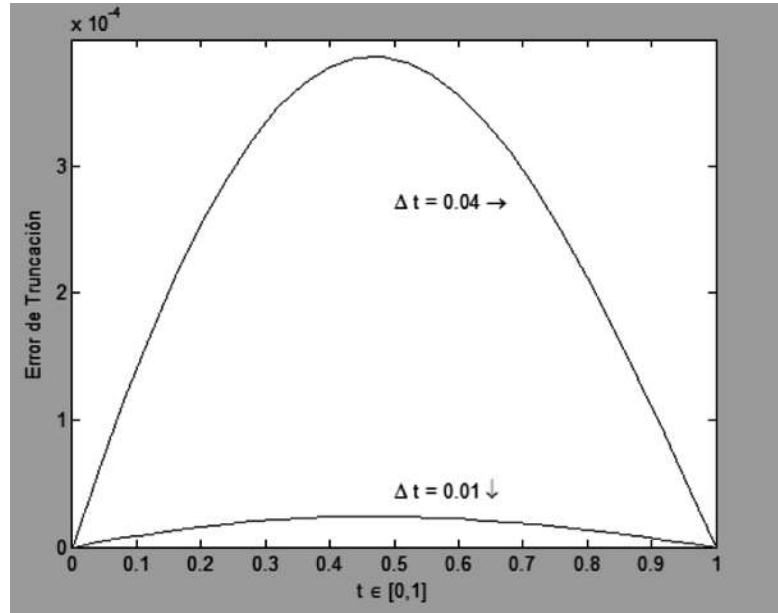


Figura 1.2: Comportamiento del error a diferentes pasos de tiempo para el ejemplo 1.

Tabla 1.1: Comparación de resultados para el ejemplo 1

| $\Delta t = 0,04$ | $\Delta t = 0,01$ | Solución Exacta   |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1.033434914231021 | 1.033378993438964 | 1.033375269702002 |
| 1.060255845010963 | 1.060147667603634 | 1.060140464179769 |
| 1.080291138382835 | 1.080134788625409 | 1.080124377527689 |
| 1.093412568469057 | 1.093212502878303 | 1.093199180897540 |
| 1.099536158117077 | 1.099297154833088 | 1.099281240166899 |
| $\vdots$          | $\vdots$          | $\vdots$          |
| 0.428475730785885 | 0.428276175470301 | 0.428262888269786 |
| 0.346118365015554 | 0.345955474502825 | 0.345944628606567 |
| 0.261545841709123 | 0.261421765378928 | 0.261413503892719 |
| 0.175299425015754 | 0.175215793372414 | 0.175210224855050 |
| 0.087931092002284 | 0.087889000889149 | 0.087886198301640 |

## Ejemplo 2

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi = 0, \quad t \in \Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$$

$$\varphi(0) = 1 \quad (1.10)$$

En este caso, la solución analítica es simplemente  $\varphi = e^t$ . Si hacemos la sustitución de (1.3) en (1.10) para el mismo mallado  $G$  del intervalo  $[0, 1]$  usado anteriormente nos queda:

$$\frac{\hat{\varphi}(t_{i+1}) - \hat{\varphi}(t_i)}{\Delta t} - \hat{\varphi}(t_i) = 0$$

con la condición de frontera  $\hat{\varphi}(t_0) = 1$ .

Usemos en esta ocasión un método explícito para encontrar la solución de la ecuación. Dado que se trata de una ecuación de primer grado podemos despejar y a partir de la condición de frontera encontrar los términos siguientes con el esquema que se muestra a continuación.

$$\hat{\varphi}(t_{i+1}) = (1 + \Delta t)\hat{\varphi}(t_i). \quad (1.11)$$

Así obtenemos el valor del nodo  $i$  en términos del nodo  $i - 1$ . Si de nueva cuenta acortamos el tamaño del paso en el tiempo,  $\Delta t$ , podemos comparar los resultados obtenidos nuevamente (fig.1.3).

En las figuras 1.2 y 1.3 se puede ver que el tamaño del error decrece al menos un orden de magnitud cuando reducimos el tamaño del paso  $\Delta t$  en 4. Si redujéramos todavía más la magnitud del paso la intuición nos dice que podemos disminuir todavía más el tamaño del error.

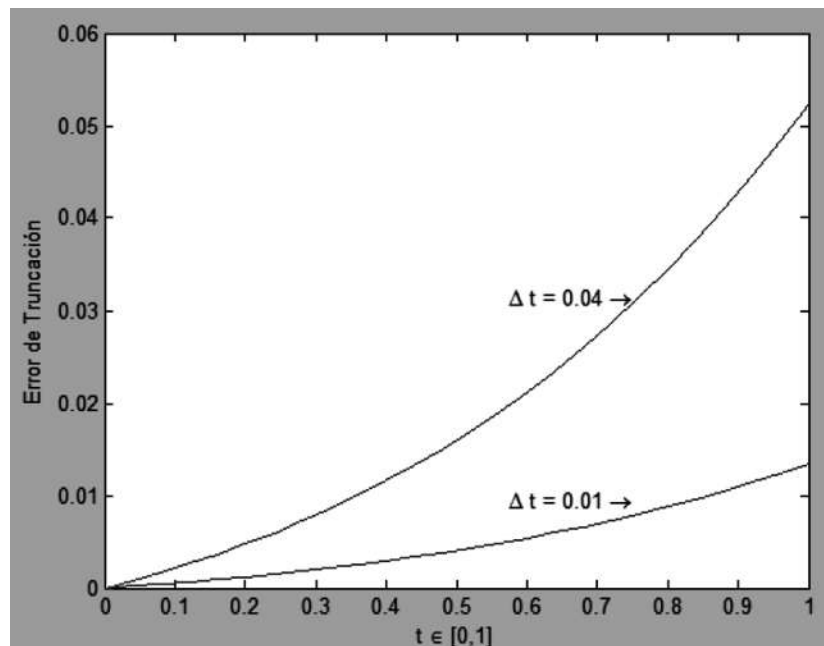


Figura 1.3: Comportamiento del error a diferentes pasos de tiempo para el ejemplo 2.

Tabla 1.2: Comparación de resultados para el ejemplo 2

| $\Delta t = 0,04$  | $\Delta t = 0,01$  | Solución Exacta   |
|--------------------|--------------------|-------------------|
| 1.0400000000000000 | 1.0406040100000000 | 1.040810774192388 |
| 1.0816000000000000 | 1.082856705628080  | 1.083287067674959 |
| 1.1248640000000000 | 1.126825030131970  | 1.127496851579376 |
| 1.1698585600000000 | 1.172578644923699  | 1.173510870991810 |
| 1.2166529024000000 | 1.220190039947967  | 1.221402758160170 |
| ⋮                  | ⋮                  | ⋮                 |
| 2.191123143033421  | 2.216715217194259  | 2.225540928492467 |
| 2.278768068754758  | 2.306722744040367  | 2.316366976781092 |
| 2.369918791504948  | 2.400384937406610  | 2.410899706417210 |
| 2.464715543165146  | 2.497850191408917  | 2.509290389936298 |
| 2.563304164891752  | 2.599272925559387  | 2.611696473423118 |

## Capítulo 2

# Diferencias Finitas

### 2.1. Diferencias Finitas en 2D

Una vez que hemos estudiado el problema en 1D y analizado algunos de los diferentes casos que se presentan, podemos comenzar a estudiar algunos problemas con mayor dificultad así como las consideraciones que deberán tomarse en cuenta para que los cálculos caigan dentro de la región de confianza.

Al igual que en el caso de una dimensión, podemos hacer uso una vez más del teorema de Taylor que nos garantiza la validez de las diferencias finitas en dimensiones mayores a uno, de modo que se pueden extender los métodos vistos en el capítulo anterior a problemas en el plano  $\mathbb{R}^2$ . Como se vio en el capítulo anterior existen varias clases de métodos y las diferencias entre ellos se hacen más evidentes cuando se involucran dos variables. Sin embargo, en el caso 2D hay que tener especial cuidado cuando se hace el mallado del dominio o de lo contrario los resultados obtenidos pueden ser erróneos. Veamos esto con un ejemplo.

#### Ejemplo 3

Encontrar la solución para el problema

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2 \quad (2.1)$$

$$\varphi = f, \quad (x, t) \in \partial\Omega \quad (2.2)$$

donde  $f$  es el conjunto de valores que toma la función evaluada en la frontera del dominio  $\varphi(0, t) = 0$ ;  $\varphi(1, t) = 0$ ;  $\varphi(x, 0) = \sin(\pi x)$ .

Para este caso usemos un método explícito. Lo primero es hacer un mallado del dominio, como estamos trabajando en una región rectangular podemos hacer un mallado similar al que se hizo en el caso de una dimensión.

Se hace un mallado  $\mathbb{X}$  del eje  $x$  con subintervalos de tamaño  $\Delta x$  y un mallado  $\mathbb{T}$  del eje  $t$  con subintervalos  $\Delta t$ . El mallado de la región  $\Omega$  quedará definido entonces como  $\mathbb{G} = \{(x, t) | x \in \mathbb{X}, t \in \mathbb{T}\}$ , lo que nos da algo que se ve como muestra la figura 2.1.

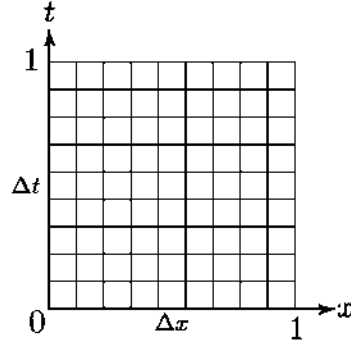


Figura 2.1: Mallado de la región  $[0,1] \times [0,1]$ .

Gráficamente, podemos ver que los nodos serán los puntos de intersección entre las líneas perpendiculares al eje  $x$  que pasan por los nodos del mallado  $\mathbb{X}$  y las perpendiculares al eje  $t$  que pasan por los nodos del mallado  $\mathbb{T}$ . Una vez que tenemos el mallado. Procedemos a definir el estencil que usaremos, esto es la forma que tendrá el esquema explícito. Al sustituir las aproximaciones (1.3) y (1.4) en la ecuación (2.1) obtenemos el problema discretizado:

$$\frac{\hat{\varphi}(x_i, t_{k+1}) - \hat{\varphi}(x_i, t_k)}{\Delta t} = \frac{\hat{\varphi}(x_{i+1}, t_k) - 2\hat{\varphi}(x_i, t_k) + \hat{\varphi}(x_{i-1}, t_k)}{\Delta x^2} \quad (2.3)$$

$$\hat{\varphi}(x_i, t_{k+1}) = \hat{\varphi}(x_i, t_k) + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\hat{\varphi}(x_{i+1}, t_k) - 2\hat{\varphi}(x_i, t_k) + \hat{\varphi}(x_{i-1}, t_k)). \quad (2.4)$$

Una representación gráfica de lo anterior se puede ver en la figura 2.2, en la que se muestra cómo serán calculados los valores de los nodos a cierto paso  $k+1$  basándonos en el hecho de que se conocen los valores en los nodos alrededor del nodo  $x_i$  para el tiempo  $k$ , lo cual es cierto dado que por (2.2) conocemos los valores de  $\hat{\varphi}$  a lo largo de la frontera de  $\Omega$ ,

$$\hat{\varphi}(0, t) = 0, \quad \hat{\varphi}(1, t) = 0, \quad \hat{\varphi}(x, 0) = \sin(\pi x).$$

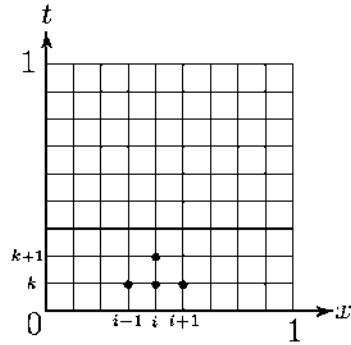


Figura 2.2: Estencil a usarse para el método explícito.

Analíticamente obtenemos que la solución al problema es  $\varphi = \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t}$ , si tomamos un  $\Delta t = 0,001$  y un  $\Delta x = 0,1$  obtenemos unos resultados similares a los esperados, sin embargo, si intentamos hacer un refinamiento para mejorar nuestra aproximación como hicimos en casos anteriores, digamos hacer que el  $\Delta x = 0,05$ , los resultados obtenidos comienzan a alejarse de lo esperado (fig.2.3).

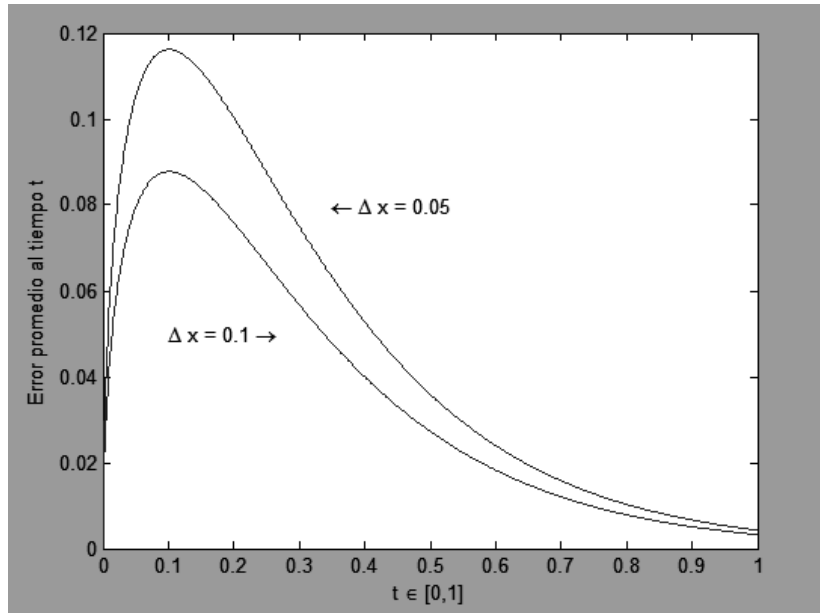


Figura 2.3: Gráfica de errores promedio para diferentes pasos en el espacio para el intervalo de tiempo  $[0,1]$ .

En los ejemplos 1 y 2 veíamos que acortar el tamaño del paso tenía un efecto positivo ya que decrementaba la magnitud del error de nuestra aproximación, sin embargo, en el ejemplo 3 disminuir el paso aumenta el error. No solo eso, si disminuimos el paso en el espacio a  $\Delta x = 0,01$  la magnitud del error aumenta hasta el orden de  $10^{29}$  como se observa en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Resultados para el Ejemplo 3 al tiempo  $t = 1$  con intervalos  $\Delta t = 0,0001$

| Solución Exacta ( $10^{-4}$ ) | $\Delta x = 0,1$ ( $10^{-4}$ ) | $\Delta x = 0,01$ ( $10^{29}$ ) |
|-------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| 0                             | 0                              | 0                               |
| 0.16141873846796              | 0.16514364198175               | -0.082258794011479              |
| 0.30703668614420              | 0.31412187366292               | 0.156469235392114               |
| 0.42259974373026              | 0.43235166773417               | -0.215369382768445              |
| 0.49679579397445              | 0.50825986819640               | 0.253193679333846               |
| 0.49679579397445              | 0.50825986819640               | 0.253193679333846               |
| 0.42259974373026              | 0.43235166773417               | -0.215411659320090              |
| 0.30703668614420              | 0.31412187366292               | 0.156511511943759               |
| 0.16141873846796              | 0.16514364198175               | -0.082284922357323              |
| 0                             | 0                              | 0                               |

De los anteriores ejemplos se podía deducir que la aproximación a la solución mejoraría si disminuíamos el tamaño de  $\Delta x$ , pues intuitivamente pensamos que si nos acercamos más al problema continuo obtendremos mejores resultados, sin embargo, el ejemplo 3 nos muestra que esto no siempre es cierto. Una característica que presentan algunas EDP lineales de segundo orden es que poseen rigidez, esto es, que los cambios que ocurren en una dimensión son muy bruscos comparados con los cambios que se presentan en las otras dimensiones. Esto trae como consecuencia que en ciertos esquemas de diferencias finitas se presente lo que se conoce como inestabilidad.

La inestabilidad de un método de solución se refiere a la existencia de un parámetro o constante que restringe la aplicación del método. Un esquema inestable no es necesariamente inútil; comúnmente los sistemas inestables están basados en encontrar soluciones directas, rápidas y económicas, por lo que dentro de su rango de aplicación son suficientemente efectivos. Como podemos ver del ejemplo 3, si el  $\Delta x$  se reduce mucho en comparación con el  $\Delta t$  los resultados son completamente erróneos, sin embargo, si reducimos al mismo tiempo el orden del paso  $\Delta t$  la aproximación mejora (fig.2.4).

La mejoría en este caso se debe a que al disminuir el  $\Delta t$  se sigue cayendo dentro del rango de la constante de restricción. Esta constante de restricción está intrínsecamente relacionada con cómo se origina el esquema que vamos a utilizar. En el caso del ejemplo 3 el esquema explícito utilizado tiene una justificación analítica en la cual se asumen ciertos valores para que la demostración pueda completarse. Esto se hace para asegurar que el esquema diseñado tenga convergencia, es decir, se acerque a la solución esperada.

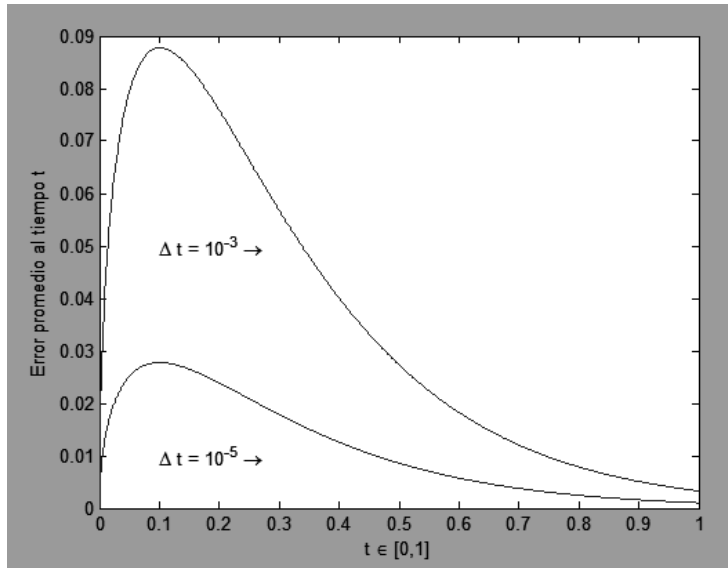


Figura 2.4: Gráfica de errores promedio para diferentes pasos en el tiempo para el intervalo de tiempo  $[0,1]$  con un  $\Delta x = 0,01$ .

Entonces ¿cómo se puede saber si la solución que obtenemos se aproxima a la solución real en caso de no conocer ésta última? Lo que necesitamos hacer es un análisis de aproximación de nuestros diferentes métodos. Existen ciertos parámetros fundamentales que sirven para determinar si cierto esquema funciona correctamente o si los resultados obtenidos se aproximan a los que buscamos. Estos parámetros son la estabilidad, la consistencia y la convergencia. Dado que en este trabajo nos enfocaremos en trabajar con la ecuación de Poisson, veremos los conceptos antes mencionados en referencia a ésta.

## 2.2. Ecuaciones elípticas

Como se mencionó en el capítulo anterior, la ecuación de Poisson es una ecuación diferencial parcial de tipo *elíptico*. Algunos de los problemas físicos que se pueden representar por medio de esta clase de ecuaciones incluyen los relacionados con el flujo, ya sea que se trate de flujo de calor que se disipa dentro de un material, el cálculo de presiones para un fluido incompresible o el flujo de un fluido viscoso a través de un medio poroso. Los parámetros físicos asociados a los términos involucrados dependen del contexto que se esté tratando, sin embargo, visto desde el punto de vista matemático la mayoría de los problemas se reducen a estudiar las propiedades generales de la ecuación, así como los problemas asociados al contorno del dominio.

### 2.2.1. Ecuación de Poisson

El objetivo que se persigue es encontrar la solución a la ecuación de Poisson; de no lograrse, se busca dar la mayor información posible acerca de la naturaleza de las funciones que cumplen la ecuación bajo ciertas condiciones adicionales, como pueden ser las condiciones de frontera. El problema general de la ecuación de Poisson queda descrito por la ecuación

$$-\nabla^2 \varphi = F \quad (2.5)$$

donde  $\varphi$  y  $F$  se encuentran definidas en una región  $\Omega$  ya sea de  $\mathbb{R}^2$  o de  $\mathbb{R}^3$  y el operador nabla representa

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad o \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

dependiendo de si el dominio es de dos o tres dimensiones respectivamente. Si se da el caso que  $F = 0$  el problema se reduce a lo que se conoce como la ecuación de Laplace. Por supuesto, para poder encontrar una solución al problema necesitamos de las condiciones de frontera, que en este caso se pueden escribir como

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} + \beta \varphi \Big|_{\partial \Omega} = f \quad (2.6)$$

donde  $n$  es la normal a la frontera y  $f$  es una función conocida. Si  $\alpha = 0$  entonces decimos que se trata de condiciones de Dirichlet, si  $\beta = 0$ , es el caso de las condiciones de Neumann. Si  $\partial \Omega$  se puede escribir como dos subconjuntos disjuntos, no vacíos  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$  tales que  $\alpha = 0 \in \mathbb{A}$  y  $\beta = 0 \in \mathbb{B}$  se dice que es un problema mixto. Si  $\alpha$  y  $\beta$  son diferentes de cero en toda la frontera se dice que el problema tiene condiciones de Robin. Los ejemplos que utilizaremos en este trabajo solamente involucran condiciones de frontera de Dirichlet.

## 2.3. Análisis de aproximación

Los objetos físicos modelados con la ecuación de Poisson ocurren de manera continua, es decir, la densidad de carga eléctrica en problemas electrostáticos o la densidad de masa en problemas de potencial gravitatorio se definen en todo el espacio, sin embargo, a pesar de que la EDP modela estos fenómenos de manera continua, los métodos numéricos usados para realizar los cálculos aproximan el modelo continuo por medio de un sistema mecánico discreto con un gran número de grados de libertad.

El problema de eigenvalores para la ecuación diferencial se aproxima entonces por un problema de eigenvalores para una matriz de  $m \times n$  donde  $m$  y  $n$  son considerablemente grandes. De esta forma se pretende crear un vínculo entre las técnicas que se enseñan para resolver problemas en álgebra lineal y las técnicas utilizadas para los problemas de EDP. El hecho de que se use un sistema discreto para aproximar un problema continuo tiene justificación analítica, incluso en algunos casos el modelo discreto describe mejor el fenómeno que el modelo continuo. Sin embargo, dado que el modelo discreto es solo una aproximación del fenómeno se generan ciertos errores al hacer el cálculo de las soluciones.

Dos tipos de errores que comúnmente aparecen al hacer aproximaciones numéricas son el error de *truncamiento* y el error de *redondeo*. El error de truncamiento se genera cuando se toma un número finito de términos de una serie, como lo hicimos para obtener los esquemas de diferencias hacia adelante y centrales, en nuestro caso el error de truncamiento viene representado por  $R^N$  ya que con esta notación se engloba la diferencia existente entre la representación en serie de Taylor de la función y la aproximación que estaremos utilizando. El error de redondeo generalmente ocurre por causa de las limitaciones del equipo de cómputo que estemos utilizando, se reduce el número de cifras significativas de su representación decimal para facilitar su uso; sin embargo, dado que el número que estamos usando no es el número real, los cálculos que se hagan con esta representación no serán estrictamente los correctos.

Empecemos poniendo un ejemplo general de la ecuación de Poisson que nos va a servir como modelo básico para hacer el análisis de aproximación de nuestros métodos. Sea el problema

$$-\nabla^2 \varphi = F, \quad (x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \quad (2.7)$$

$$\varphi = f, \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (2.8)$$

Hagamos un mallado de la región  $\Omega$  como se hizo en la figura 2.1 y aproximemos el problema (2.7)-(2.8) por

$$-\frac{1}{\Delta x^2} \delta_x^2 u_{j,k} - \frac{1}{\Delta y^2} \delta_y^2 u_{j,k} = F_{j,k}; \quad j = 1, \dots, M-1; \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (2.9)$$

$$u_{0,k} = f_{0,k}, \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (2.10)$$

$$u_{M,k} = f_{M,k}, \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (2.11)$$

$$u_{j,0} = f_{j,0}, \quad j = 1, \dots, M-1 \quad (2.12)$$

$$u_{j,N} = f_{j,N}, \quad j = 1, \dots, M-1 \quad (2.13)$$

donde  $\delta^2$  es el esquema que usamos para aproximar la segunda derivada. Ahora estudiaremos un poco el concepto de orden de aproximación.

Aplicando el teorema 1 para el punto  $x_{i+1}$  obteníamos

$$\begin{aligned}\varphi(x_{i+1}) &= \varphi(x_i) + \varphi'(x_i)\Delta x + \frac{\Delta x^2}{2!}\varphi''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!}\varphi'''(x_i) + \dots \\ \frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)}{\Delta x} &= \varphi'(x_i) + \frac{\Delta x}{2!}\varphi''(x_i) + \frac{\Delta x^2}{3!}\varphi'''(x_i) + \dots \\ \frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)}{\Delta x} &= \varphi'(x_i) + \Delta x \left( \frac{1}{2!}\varphi''(x_i) + \frac{\Delta x}{3!}\varphi'''(x_i) + \dots \right)\end{aligned}$$

Si suponemos que las derivadas de  $\varphi$  son acotadas, podemos hacer uso de la siguiente definición:

**Definición 2.1**  $f(s) = \mathcal{O}(\phi(s))$  para  $s \in S$  si existe una constante  $A$  tal que  $|f(s)| \leq A|\phi(s)| \quad \forall s \in S$ . Decimos que  $f(s)$  es “ $\mathcal{O}$  grande” de  $\phi(s)$  o que  $f(s)$  es de orden  $\phi(s)$ .

Así podemos escribir

$$\frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)}{\Delta x} = \varphi'(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (2.14)$$

y es por esto que decimos que la aproximación hacia adelante es de orden  $\Delta x$ , análogamente podemos demostrar que las diferencias hacia atrás también son de orden  $\Delta x$ . Ahora veamos que pasa con la diferencia central. Ésta se deduce de hacer una resta de las anteriores

$$\begin{aligned}\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_{i-1}) &= 2\varphi'(x_i)\Delta x + 2\frac{\Delta x^3}{3!}\varphi'''(x_i) + 2\frac{\Delta x^5}{5!}\varphi^{(5)}(x_i) + \dots \\ \frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_{i-1})}{2\Delta x} &= \varphi'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{3!}\varphi'''(x_i) + \frac{\Delta x^4}{5!}\varphi^{(5)}(x_i) + \dots \\ \frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_{i-1})}{2\Delta x} &= \varphi'(x_i) + \Delta x^2 \left( \frac{1}{3!}\varphi'''(x_i) + \frac{\Delta x^2}{5!}\varphi^{(5)}(x_i) + \dots \right) \\ \frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_{i-1})}{2\Delta x} &= \varphi'(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x^2).\end{aligned} \quad (2.15)$$

Podemos comprobar el orden de la diferencia central de segundo grado de manera similar, si en vez de restar hacemos la suma.

$$\begin{aligned}\varphi(x_{i+1}) + \varphi(x_{i-1}) &= 2\varphi(x_i) + 2\frac{\Delta x^2}{2!}\varphi''(x_i) + 2\frac{\Delta x^4}{4!}\varphi^{(4)}(x_i) + \dots \\ \frac{\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1}))}{\Delta x^2} &= \varphi''(x_i) + \Delta x^2 \left( \frac{2}{4!}\varphi^{(4)}(x_i) + \frac{2\Delta x^2}{6!}\varphi^{(6)}(x_i) + \dots \right) \\ \frac{\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1}))}{\Delta x^2} &= \varphi''(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x^2).\end{aligned} \quad (2.16)$$

Ahora definamos un poco de notación que estaremos utilizando. Digamos que la función continua  $\varphi$  es la solución real del problema (2.7)-(2.8) y la función discreta  $\mathbf{u} = \{u_{j,k}\}$  es una aproximación a  $\varphi$  que cumple con ser la solución del problema (2.9)-(2.13) para  $j = 1, 2, \dots, M$  y  $k = 1, 2, \dots, N$ .  $L_{j,k}$  representa la ecuación que vamos a resolver, en nuestro caso es la ecuación de Poisson  $-(\frac{1}{\Delta x^2}\delta_x^2 + \frac{1}{\Delta y^2}\delta_y^2)$ , donde  $\delta^2$  es el esquema de diferencias finitas (1.4). Sea  $G_\Omega$  el mallado de la región  $\Omega$  con  $G_\Omega^\circ$  los puntos del mallado en el interior de  $\Omega$  y  $\partial G_\Omega$  los puntos que pertenecen a la frontera.

### 2.3.1. Estabilidad

Del ejemplo 3 vemos que un pequeño cambio en los datos de entrada puede llevarnos a obtener resultados que claramente no se aproximan al resultado esperado. Este error en los resultados es consecuencia de la falta de robustez en el esquema utilizado para aproximar las derivadas. Esto no quiere decir que el esquema esté equivocado, lo que nos muestra es que el rango de utilidad del esquema es limitado, esto es, que existe una condición que los parámetros deben de cumplir para que la solución se siga considerando aceptable.

Uno de los conceptos que nos ayuda para saber si nuestra solución se aproxima a la real es el de estabilidad numérica, una propiedad que nos describe la forma en que los errores en los datos de entrada se propagan a través del algoritmo, en otras palabras, suponiendo que tenemos errores de medición en nuestros datos la estabilidad numérica nos dice cómo se comportarán estos errores mientras el proceso de cálculo continúe.

En un algoritmo estable pequeños cambios en los datos de entrada se irán atenuando conforme se repita el proceso, en cambio, en un algoritmo inestable pequeñas variaciones en los datos generarán errores que se irán acumulando de manera que el resultado final se aleja del esperado.

**Definición 2.2** *Un esquema diferencial es estable con respecto a la norma  $\|\cdot\|$  si existe una constante positiva  $\Delta x_0$  y una constante no negativa  $K$  tal que:*

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\| \leq K \|\mathbf{u}^0\| \quad \text{mientras} \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

### 2.3.2. Consistencia

El concepto de consistencia en un esquema diferencial se puede definir ya sea en general o punto a punto. Este concepto está relacionado con el error de truncamiento, dado que si el error de truncamiento es muy grande, a la hora de hacer un refinamiento de nuestro mallado el error tenderá a incrementarse.

Como se vio anteriormente, de hacer la diferencia entre la solución real y la solución al problema aproximado se eliminan algunos términos que se engloban bajo la notación de la  $\mathcal{O}$ , cuando se quiere que un esquema de diferencias sea consistente se quiere que este error disminuya, o en su defecto, que no crezca exponencialmente.

**Definición 2.3** *Un esquema diferencial es consistente con una ecuación parcial diferencial de acuerdo a la norma  $\|\cdot\|$  si cumple con que*

$$\|\varphi - \mathbf{u}\| \rightarrow 0 \quad \text{mientras} \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

### 2.3.3. Convergencia

Para encontrar una conexión entre estabilidad, consistencia y convergencia necesitamos hacer uso del siguiente teorema.

**Teorema 2** *Equivalencia de Lax.*

*Considérese un problema lineal de valores en la frontera bien planteado. Un esquema en diferencias finitas para este problema es estable si y sólo si es convergente.*

De este modo podemos probar que nuestro esquema es estable partiendo de querer probar que es convergente. Partiremos del supuesto que nuestro sistema que representa la ecuación de Poisson tiene solución y además ésta es única, una demostración de esto se puede leer en [3]. Ahora que sabemos que el sistema (2.9)-(2.13) tiene solución, queremos ver qué tanto se parece realmente nuestra aproximación a la solución real. En la primer parte de este trabajo se usaron las diferencias hacia adelante para resolver los ejemplos, ahora usaremos las diferencias centrales dado que su orden de aproximación es mejor.

Definamos entonces las normas para funciones definidas sobre mallas como se muestra a continuación:

$$\|u\|_{\infty} = \max_{\substack{0 \leq j \leq M \\ 0 \leq k \leq N}} |u_{j,k}| \quad (2.17)$$

$$\|u\|_{\infty}^{\circ} = \max_{\substack{1 \leq j \leq M-1 \\ 1 \leq k \leq N-1}} |u_{j,k}| \quad (2.18)$$

$$\|u\|_{\infty}^{\partial G_{\Omega}} = \max_{(j,k) \in \partial G_{\Omega}} |u_{j,k}|. \quad (2.19)$$

Estas funciones definidas en  $G_{\Omega}$ ,  $G_{\Omega}^{\circ}$  y  $\partial G_{\Omega}$  respectivamente nos serán de utilidad para la demostración de un par de proposiciones que finalmente nos ayudarán en la demostración de un teorema para la convergencia.

**Proposición 2.1 Principio del Máximo para dominios discretos.** *Si*

$$L_{j,k}u_{j,k} = -\left(\frac{1}{\Delta x^2}\delta_x^2 + \frac{1}{\Delta y^2}\delta_y^2\right)u_{j,k} \leq 0$$

en  $G^\circ$  entonces el máximo valor de  $u_{j,k}$  en  $G$  se alcanza en  $\partial G$ .

**Demostración.**

Probaremos que  $u_{j,k}$  no puede tener un máximo local en  $G^\circ$ . Para esto podemos ver que la condición  $L_{j,k}u_{j,k} \leq 0$  es equivalente a decir que

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{1}{\Delta x^2}\delta_x^2 + \frac{1}{\Delta y^2}\delta_y^2\right)u_{j,k} \leq 0 \\ & -\left(\frac{1}{\Delta x^2}(u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}) + \frac{1}{\Delta y^2}(u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1})\right) \leq 0 \\ & 2\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)u_{j,k} - \frac{1}{\Delta x^2}(u_{j+1,k} + u_{j-1,k}) - \frac{1}{\Delta y^2}(u_{j,k+1} + u_{j,k-1}) \leq 0 \\ & \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)u_{j,k} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Delta x^2}(u_{j+1,k} + u_{j-1,k}) + \frac{1}{\Delta y^2}(u_{j,k+1} + u_{j,k-1})\right], \quad (2.20) \end{aligned}$$

supongamos ahora que  $u_{j,k}$  es un máximo local. De ahí que  $u_{j+1,k} \leq u_{j,k}$ ;  $u_{j-1,k} \leq u_{j,k}$ ;  $u_{j,k+1} \leq u_{j,k}$ ;  $u_{j,k-1} \leq u_{j,k}$ . Sustituyendo del lado izquierdo de (2.20) tenemos la siguiente serie de desigualdades

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Delta x^2}(u_{j+1,k} + u_{j-1,k}) + \frac{1}{\Delta y^2}(u_{j,k+1} + u_{j,k-1})\right] \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Delta x^2}(u_{j+1,k} + u_{j-1,k}) + \frac{2}{\Delta y^2}u_{j,k}\right] \\ & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Delta x^2}u_{j+1,k} + \frac{1}{\Delta x^2}u_{j-1,k} + \frac{2}{\Delta y^2}u_{j,k}\right] \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Delta x^2}u_{j+1,k} + \frac{1}{\Delta x^2}u_{j,k} + \frac{2}{\Delta y^2}u_{j,k}\right] \\ & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Delta x^2}u_{j+1,k} + \frac{1}{\Delta x^2}u_{j,k} + \frac{2}{\Delta y^2}u_{j,k}\right] \leq \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)u_{j,k} \quad (2.21) \end{aligned}$$

y encadenando (2.20) y (2.21) podemos obtener la siguiente igualdad

$$\frac{1}{\Delta x^2}u_{j,k} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Delta x^2}u_{j+1,k} + \frac{1}{\Delta x^2}u_{j,k}\right]$$

de aquí que  $u_{j,k} = u_{j+1,k}$ . Acomodando de manera similar los diferentes términos en (2.20) podemos obtener que

$$u_{j,k} = u_{j+1,k} = u_{j-1,k} = u_{j,k+1} = u_{j,k-1}$$

y esto sucede para cada uno de los puntos de  $G^\circ$ , por lo que se deduce que si  $G$  tiene un máximo debe ser alcanzado en  $\partial G$ . Análogamente se puede probar el Principio del Mínimo para dominios discretos simplemente cambiando el sentido de las desigualdades.  $\square$

**Proposición 2.2** *Supóngase que  $u_{j,k}$  con  $j = 0, \dots, M$ ,  $k = 0, \dots, N$  es una función definida en  $G_\Omega$  con  $u_{0,k} = u_{M,k} = u_{j,0} = u_{j,N} = 0$ . Entonces*

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|L_{j,k} u_{j,k}\|_\infty^\circ$$

**Demostración.**

Consideremos una función  $u_{j,k}$  definida sobre la malla  $G_\Omega$  y que cumpla con que  $u_{j,k} = 0$  en  $\partial G_\Omega$ . Definamos una función  $H_{j,k}$  en  $G_\Omega^\circ$  como

$$H_{j,k} = L_{j,k} u_{j,k}.$$

Utilizando (2.18) es claro deducir que

$$-\|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \leq L_{j,k} u_{j,k} \leq \|\mathbf{H}\|_\infty^\circ. \quad (2.22)$$

Definamos también

$$\omega_{j,k} = \frac{1}{4} \left[ \left( x_j - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( y_k - \frac{1}{2} \right)^2 \right]$$

de manera que  $L_{j,k} \omega_{j,k} = -1$ . A partir de la desigualdad (2.22) y usando la función que acabamos de definir, podemos obtener que

$$\begin{aligned} L_{j,k}(u_{j,k} + \|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \omega_{j,k}) &= L_{j,k} u_{j,k} + \|\mathbf{H}\|_\infty^\circ L_{j,k} \omega_{j,k} \\ &= L_{j,k} u_{j,k} - \|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \leq 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} L_{j,k}(u_{j,k} - \|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \omega_{j,k}) &= L_{j,k} u_{j,k} - \|\mathbf{H}\|_\infty^\circ L_{j,k} \omega_{j,k} \\ &= L_{j,k} u_{j,k} + \|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \geq 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Usando la proposición 2.1 podemos ver que el máximo de  $u_{j,k} + \|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \omega_{j,k}$  y el mínimo de  $u_{j,k} - \|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \omega_{j,k}$  deben de alcanzarse en  $\partial G_\Omega$ . Sabemos que  $u_{j,k} = 0$  en  $\partial G_\Omega$ , que el máximo de  $u_{j,k} + \|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \omega_{j,k}$  ocurre en la frontera y que  $\|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \omega_{j,k}$  es no negativo. Usando lo anterior, podemos obtener las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \max_{\partial G_\Omega} [\mathbf{u} + \|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \boldsymbol{\omega}] &= \|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \|\boldsymbol{\omega}\|_\infty^\circ \\ &\geq u_{j,k} + \|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \omega_{j,k} \\ &\geq u_{j,k} \quad \forall (j,k) \in G_\Omega \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \min_{\partial G_\Omega} [\mathbf{u} - \|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \boldsymbol{\omega}] &= -\|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \|\boldsymbol{\omega}\|_\infty^\circ \\ &\leq u_{j,k} - \|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \omega_{j,k} \\ &\leq u_{j,k} \quad \forall (j,k) \in G_\Omega. \end{aligned} \quad (2.26)$$

De (2.25) y (2.26) obtenemos

$$-\|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \|\boldsymbol{\omega}\|_\infty^\circ \leq u_{j,k} \leq \|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \|\boldsymbol{\omega}\|_\infty^\circ$$

$$\|\mathbf{u}\|_\infty \leq \|\mathbf{H}\|_\infty^\circ \|\boldsymbol{\omega}\|_\infty^\circ$$

y dado que nuestro dominio es  $[0,1] \times [0,1]$  tenemos que  $\|\boldsymbol{\omega}\|_\infty^\circ = \frac{1}{8}$ , lo que nos da como resultado

$$\|\mathbf{u}\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|L_{j,k} u_{j,k}\|_\infty^\circ. \quad \square$$

Ahora que ya hemos demostrado ambas proposiciones probaremos el siguiente teorema de convergencia.

**Teorema 3** Sea  $\varphi \in C^4(\bar{\Omega})$  una solución al problema (2.7)-(2.8) y  $u_{j,k}$  una solución al problema (2.9)-(2.13). Entonces decimos que  $\mathbf{u}$  converge a  $\boldsymbol{\varphi}$  si

$$\|\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{u}\|_\infty \leq C(\Delta x^2 + \Delta y^2) \|\partial^4 \varphi\|_\infty^\circ \quad (2.27)$$

donde

$$\|\partial^4 \varphi\|_\infty^\circ = \sup \left\{ \left| \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^p \partial y^q}(x, y) \right| : (x, y) \in \Omega^\circ, p+q=4; p, q=0, \dots, 4 \right\}$$

#### Demostración.

Sea  $\varphi$  una solución de la ecuación diferencial parcial (2.7)-(2.8). Aplicando el esquema a la solución podemos ver que cumple con

$$L_{j,k} \varphi_{j,k} = F_{j,k} + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2) \quad (2.28)$$

También sabemos que

$$L_{j,k} u_{j,k} = F_{j,k} \quad (2.29)$$

si hacemos la resta de (2.28) y (2.29) podemos obtener

$$L_{j,k}(\varphi_{j,k} - u_{j,k}) = \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2)$$

Dado que  $\|\partial^4 \varphi\|_\infty^\circ$  es el máximo de las derivadas de cuarto grado podemos cambiar la notación de la  $\mathcal{O}$  ya que la constante de la definición está acotada por  $C \|\partial^4 \varphi\|_\infty^\circ$  para alguna constante  $C$ . De lo anterior vemos que

$$\|L_{j,k}(\varphi_{j,k} - u_{j,k})\|_\infty^\circ \leq C(\Delta x^2 + \Delta y^2) \|\partial^4 \varphi\|_\infty^\circ$$

además,  $\varphi_{j,k} - u_{j,k} = 0$  en  $\partial G_\Omega$ , por lo que usando la proposición 2.2 obtenemos que

$$\|\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{u}\|_\infty \leq \frac{C}{8} (\Delta x^2 + \Delta y^2) \|\partial^4 \varphi\|_\infty^\circ. \quad \square$$

De esta manera podemos probar que un esquema es incondicionalmente convergente, lo que quiere decir que podremos disminuir el tamaño de los pasos en cualquier dimensión con cierta libertad. Claro está que la libertad con la que podemos modificar los incrementos se sigue viendo restringida por los parámetros involucrados en estas demostraciones, es decir, debemos tener los mismos valores a lo largo de toda la frontera en el esquema y en el problema original para poder seguir aplicando la proposición 2.2.

Recordemos también que deben de cumplirse las suposiciones de la proposición 2.1 ya que sin el principio del máximo no podríamos justificar la convergencia. Finalmente, la suposición más fuerte que hacemos con respecto a  $\varphi$  es que suponemos que las parciales de órdenes superiores deben de ser acotadas, de lo contrario no solo no podríamos aplicar el teorema 3, sino que no podríamos probar convergencia con nuestro esquema dado que no se podría acotar el error obtenido.

## Capítulo 3

# Diferencias Finitas en Regiones Irregulares

### 3.1. Regiones irregulares

Hasta ahora lo que hemos mostrado ha sido ejemplos resueltos en regiones regulares, productos de intervalos que dan como resultado regiones rectangulares cuyo mallado puede fácilmente generarse como un producto de subespacios, sin embargo, la mayoría de las regiones en la que nos interesa trabajar no posee una geometría tan sencilla, como puede verse en las figuras 3.1-3.2.



Figura 3.1: Región sencilla no rectangular.



Figura 3.2: Región sencilla con bordes no rectangulares.

Es cierto que podríamos hacer un mallado cuadrículado de estas regiones, simplemente tendríamos que ajustar nuestro método para dividir la región en rectángulos más simples, pero cuando las regiones se tornan más complejas (fig.3.3-3.4) la descomposición en rectángulos podría hacernos perder precisión al no poder cubrir la superficie en su totalidad o a tener excedentes. Regiones irregulares como la superficie del caudal de un río, la forma de un acuífero subterráneo, la geometría de piezas para ciertas maquinarias son ejemplos de regiones en la industria sobre las que se esperaría se pudiera resolver problemas.

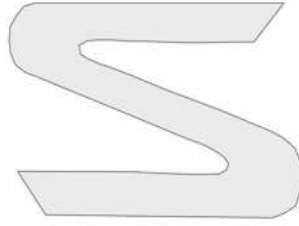


Figura 3.3: Región simple elongada.

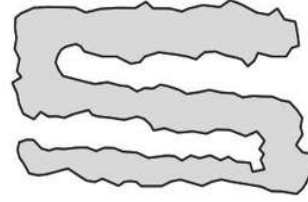


Figura 3.4: Región altamente irregular.

Regiones que se muestran más adelante en el capítulo podrían representar las esclusas de una presa, los ductos de conexión entre algún alcantarillado o la delta de un río; todos estos casos involucran el flujo de fluidos, fenómeno que está relacionado con la ecuación de Poisson. Un ejemplo de aplicación puede verse en el capítulo 5.

En este trabajo propondremos una reformulación sólida, no iterativa, simple, del enfoque con que normalmente se intenta solucionar los problemas que involucran resolver la ecuación de Poisson en regiones planas altamente irregulares implementando un esquema de diferencias finitas que se basa en resolver un sistema de ecuaciones asociado a las ecuaciones normales de un problema de optimización. Sin embargo, para que esto funcione, el esquema debe ser aplicado sobre un mallado lógicamente rectangular, por lo tanto la primer interrogante que surge al atacar el problema es el de cómo hacer un mallado de regiones irregulares sobre el que se pueda aplicar el método de diferencias finitas.

## 3.2. UNAMalla

El sistema UNAMalla[5] es un paquete computacional, en el que podemos apoyarnos para resolver de una manera lo suficientemente eficaz el problema que resulta al querer generar mallas convexas que describan regiones irregulares planas y acotadas. El tipo de mallas que se generan al trabajar con este programa son en su mayoría estructuradas y rectangulares, dos características muy útiles que nos facilitan el cálculo y producen buenos resultados cuando buscamos la solución numérica de EDP por el método de diferencias finitas.

### 3.2.1. Generación variacional de mallas

En la sección 1.3.1 se dio una idea muy intuitiva de lo que es un mallado y eso nos sirvió para los ejemplos básicos con los que se trabajó, sin embargo, ahora daremos una definición más específica de cómo trataremos el concepto de malla, en particular, del mallado de una región en dos dimensiones [6, 7].

Suponiendo que podemos ver a  $\Omega$  como un dominio en el plano determinado por una región simplemente conexa, y  $\partial\Omega$  como una curva simple, cerrada y orientada, entonces se puede generar en la mayoría de los casos un mapeo 1-1 de la región  $\Omega$  y su frontera a  $R$ , el cuadrado unitario en  $\mathbb{R}^2$ .

Retomando el concepto que habíamos visto de malla como el conjunto de puntos en  $R$  que cumplen  $\mathbb{U} = \{(\xi_i, \eta_j) \mid 1 \leq i \leq M; 1 \leq j \leq N\}$ , donde  $M$  y  $N$  son el número de subintervalos en  $\xi$  y  $\eta$  respectivamente, podemos dar la siguiente definición.

**Definición 3.1** Decimos que un mallado continuo  $\mathbb{G}(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  sobre una región  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es una biyección continua

$$\mathbb{G} : R \mapsto \Omega$$

con  $\mathbb{G}(\partial R) = \partial\Omega$  donde  $R$  es el cuadrado unitario  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

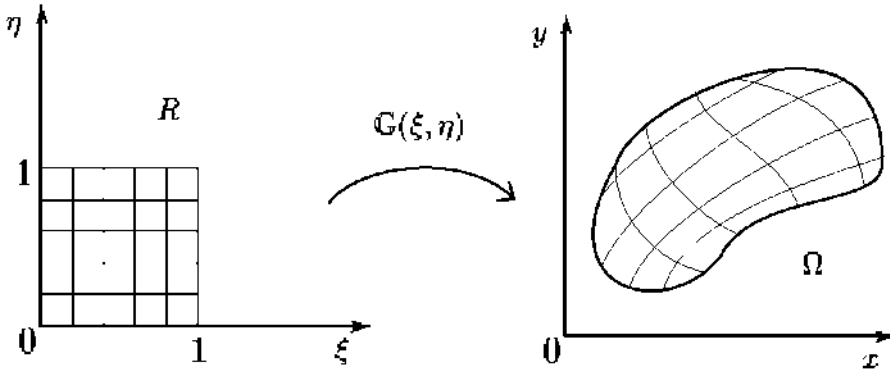


Figura 3.5: Descripción gráfica de la definición 3.1.

De esta manera un mallado como el realizado en el ejemplo 3 puede aplicarse a regiones irregulares. Sea  $G$  el conjunto de puntos de  $\Omega$  que resulta de aplicar  $\mathbb{G}$  al subconjunto  $\mathbb{U}$ . Decimos que  $G$  es una malla de orden  $M \times N$ . Así vemos que

$$\partial G \equiv \left\{ (x, y) = \mathbb{G}(\xi, \eta) \mid (\xi, \eta) \in R; \xi \in \{0, 1\} \text{ o } \eta \in \{0, 1\} \right\}.$$

De igual forma,

$$G^\circ \equiv \left\{ (x, y) = \mathbb{G}(\xi, \eta) \mid (\xi, \eta) \in R; \xi \notin \{0, 1\} \text{ y } \eta \notin \{0, 1\} \right\}.$$

No obstante, hacer una adaptación del mallado realizado en  $R$  al dominio  $\Omega$  no es un problema trivial. Para poder aplicar nuestro esquema y conseguir que se sigan conservando las propiedades que demostramos en el capítulo 2 la malla que resulte de aplicar el mallado  $\mathbb{G}$  debe seguir siendo una malla *lógicamente rectangular y convexa*.

**Definición 3.2** Decimos que un mallado genera una malla ***lógicamente rectangular***  $G$  si para cada nodo  $p_k$  de  $G$  se puede identificar de manera sencilla cuáles son los nodos «vecinos». Esto es, dado un esquema  $L_0$  se puede identificar homogéneamente sobre toda la malla los puntos superior, inferior, etc.

**Definición 3.3** Decimos que  $G$  es ***convexa*** si y sólo si cada cuadrilátero  $c_{i,j}$  generado en  $G$  es convexo y no degenerado (fig.3.6), donde  $c_{i,j}$  es el polígono delimitado por los nodos  $\{P_{i,j}, P_{i+1,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}\}$ ,  $1 \leq i < m$ ,  $1 \leq j < n$

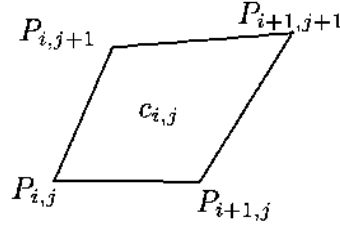


Figura 3.6: Celda convexa.

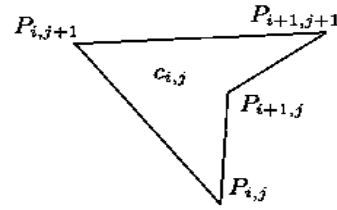


Figura 3.7: Celda no convexa.

Por esto, no cualquier mallado continuo nos va a generar una malla útil. Al usar el software de UNAMalla, lo primero que se debe hacer es determinar los nodos que formarán la frontera, para luego determinar cuáles representarán las esquinas del cuadrado unitario al hacer el mapeo. Luego se especifica el orden que tendrá la malla y se procede a generar el mallado. Comúnmente el mallado inicial resultará un buen mallado, salvo en regiones no convexas, pero el programa cuenta con la opción de poder realizar un proceso de optimización por medio de funcionales con los cuales se garantizará que la malla cumpla con las condiciones que queremos.

Los funcionales son una pieza fundamental en la generación variacional de mallas óptimas [8]. Podemos decir que un funcional  $\Phi[f]$  es una función cuyo dominio es un espacio de funciones y su codominio es un campo escalar.

En este trabajo, lo que haremos será utilizar una combinación lineal de dos funcionales implementados en UNAMalla, el *funcional de área adaptiva* (3.1) y el *funcional de suavidad* (3.2).

$$S_t(\mathbb{G}) = \sum_{q=1}^N f(t\alpha_q). \quad (3.1)$$

$$H_\omega(\mathbb{G}) = \sum_{q=1}^N \lambda(\Delta_q) \varphi_\omega(\Delta_q). \quad (3.2)$$

La explicación de cómo funcionan estos funcionales puede verse en [9]. Dado que nuestro objetivo es encontrar el mallado óptimo, lo que queremos es minimizar el funcional  $\Phi$  cuyo dominio es el conjunto de todos los mallados continuos que van de  $R$  a  $\Omega$  y su codominio es el campo de los reales. Una vez que hemos encontrado un mallado continuo que genere una malla óptima, podemos proceder a aplicar nuestro esquema para resolver la ecuación.

### 3.2.2. Calidad de mallas

A pesar de haber conseguido una malla convexa por medio del programa UNAMalla, esto no nos garantiza que sea un buen mallado para aplicar nuestro esquema. Independientemente de cómo se comporte la frontera en nuestra región  $\Omega$ , al momento de querer aplicar el método necesitamos esencialmente dividir  $\partial\Omega$  en cuatro fronteras ( $\Omega_N$ ,  $\Omega_S$ ,  $\Omega_E$ ,  $\Omega_W$ ) que representan los lados de  $R$ . Si los valores que después del mapeo van a dar a las fronteras de  $R$  no están bien distribuidos se puede presentar un problema de reubicación de celdas.

Por ejemplo, supongamos que  $\Omega$  es un círculo, este tipo de problema se presentaría si se definen tres fronteras en un arco de 30 y la frontera restante como el arco de 330. Se podría generar un mallado convexo y estructurado pero la mayoría de los nodos estarían concentrados en una región muy pequeña de  $\Omega$  lo cual podría no darnos buenos resultados (fig.3.8).

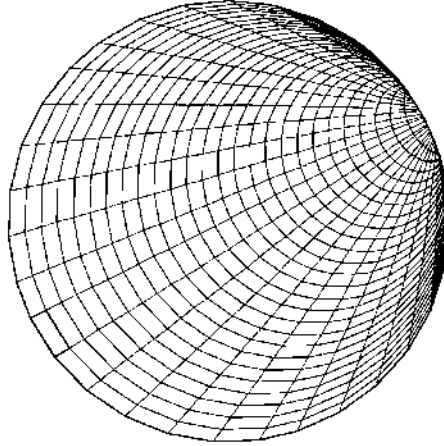


Figura 3.8: Reubicación de celdas que podría no favorecer el cálculo.

La reubicación de celdas podría usarse en nuestro beneficio, si lo que queremos es concentrar la mayor precisión en un área específica, pero dado que *a priori* no conocemos dónde debemos enfocar la precisión no es recomendable que se genere este tipo de mallados, es mejor generar una distribución lo más uniforme que sea posible e intentar cubrir el dominio de manera igualitaria. Una vez que se haya realizado un primer cálculo para identificar las regiones problemáticas se puede proceder a la reubicación de celdas para enfocarse en las zonas que se compruebe necesiten mayor precisión. A esto se le conoce como *adaptación*.

Otro de los problemas que más se presenta al hacer mallados de regiones irregulares es la generación de celdas elongadas (fig.3.9). Generalmente se presenta este problema cuando el área de nuestro dominio  $\Omega$  difiere en gran medida del área de la envolvente convexa de  $\Omega$  (Recordemos que la envolvente convexa de un conjunto  $U$  definido en  $\mathbb{R}^2$  es el conjunto  $\tilde{U}$  que cumple que  $\tilde{U}$  es convexo,  $U \subseteq \tilde{U}$  y dado  $V$  convexo tal que  $U \subseteq V$  entonces  $\tilde{U} \subseteq V$ ). La elongación de las celdas propicia pérdida de precisión en el cálculo ya que, como en el caso anterior, se disminuye la uniformidad en el mallado, pues unos nodos se encuentran muy lejanos de algunos nodos vecinos y muy cercanos a otros.

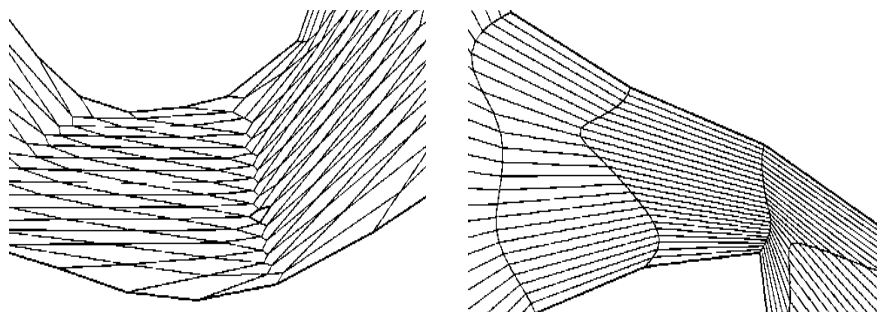


Figura 3.9: Ejemplos de celdas elongadas.

Como sabemos que en el caso de que  $\Omega$  sea un cuadrado con un mallado uniforme los cálculos se simplifican y facilitan, lo que buscamos al momento de seleccionar regiones irregulares y mallados apropiados es que se parezcan lo más posible a éste. La envolvente convexa es una primer herramienta para poder comparar regiones irregulares.

Al calcular el cociente del área definida por  $\Omega$  y su envolvente convexa podemos medir la concavidad de  $\Omega$ , le llamaremos *cociente de convexidad*  $C_x$ . Entre más se acerque el cociente a 1 decimos que  $\Omega$  es más convexa. Sin embargo, sólo con el cociente de convexidad no podemos hacer un buen criterio de discriminación, puesto que incluso si  $\Omega$  es convexa la forma de definir la frontera puede generar celdas elongadas (fig.3.10).

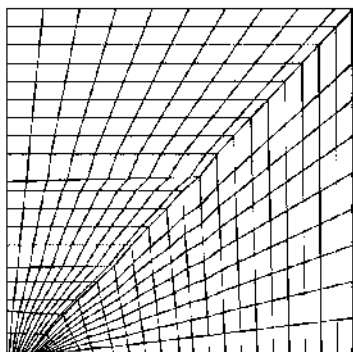


Figura 3.10: Ejemplo de celdas elongadas en una región convexa.

Supongamos que en nuestro problema tenemos un dominio como se muestra en la figura 3.11. Claramente se puede observar que el dominio presenta una fuerte concavidad en el centro de la figura. Se observa un fenómeno que podemos llamar «cuello de botella» en el que el área de una sección del dominio es mucho menor que el área de las dos secciones que separa.

En las figuras 3.12 y 3.13 podemos observar dos diferentes mallados hechos con el mismo contorno. El coeficiente de convexidad de ambos mallados es 1.4238 pero los resultados obtenidos con cada uno difieren bastante. Esto es debido a la manera que están definidas las fronteras  $\Omega_N$ ,  $\Omega_S$ ,  $\Omega_E$  y  $\Omega_W$ .

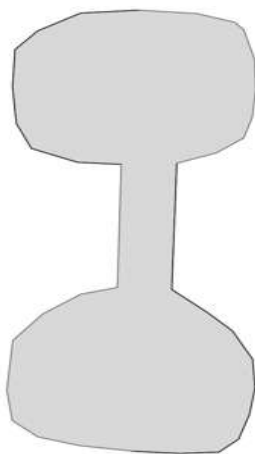


Figura 3.11: Región Cóncava.

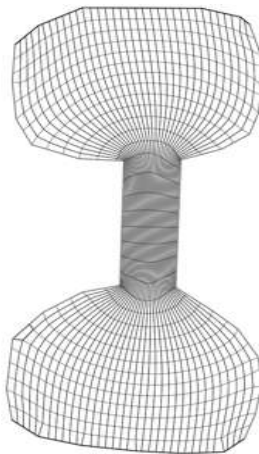


Figura 3.12: Mallado con baja torcedura.

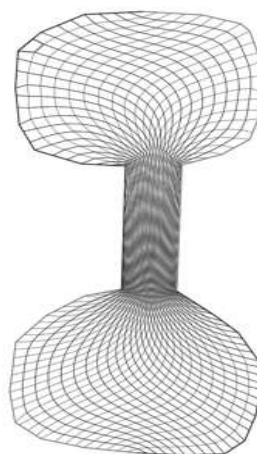


Figura 3.13: Mallado con alta torcedura.

En las figuras 3.14 y 3.15 se puede observar que las celdas presentan diferencias en una propiedad que llamaremos *torcedura*. La torcedura  $\tau$  se define como el cociente entre el máximo y el mínimo de las diagonales de todas las celdas del mallado. Entre más cercana sea la torcedura a 1 diremos que el mallado es más *recto*, como ocurre en el caso de un mallado regular de una región cuadrada. Si un mallado presenta un alto índice de torcedura nos generará errores en los cálculos si el problema que estamos tratando tiene cambios bruscos en la norma del gradiente de la función.

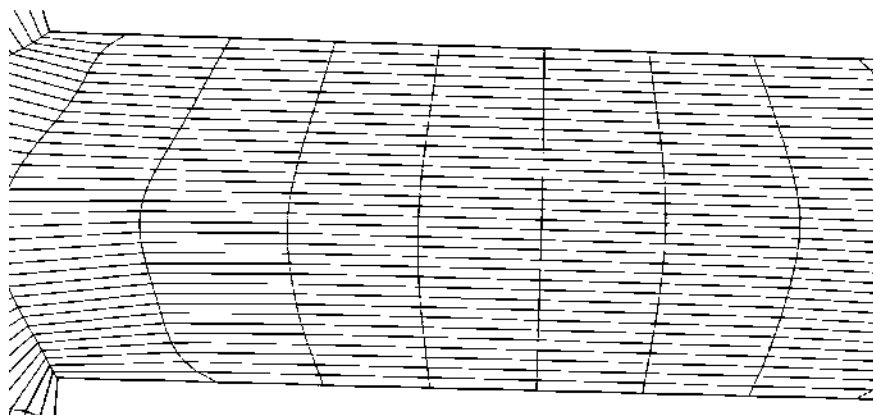


Figura 3.14: Celdas del mallado de la Fig.3.12. Ejemplo de mallado recto.

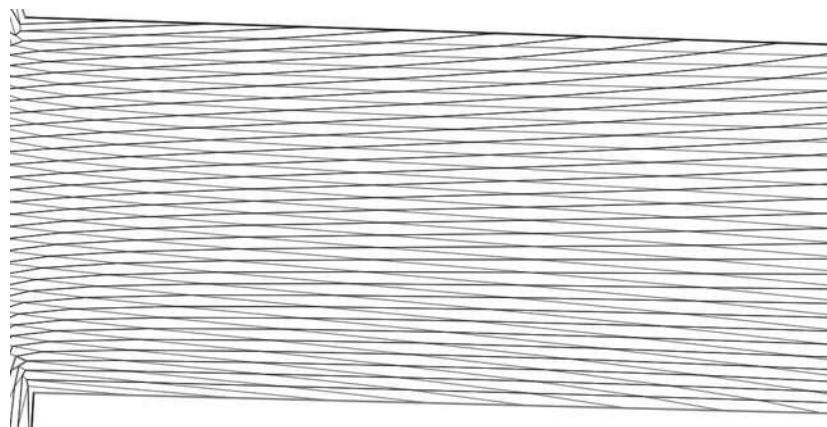


Figura 3.15: Celdas del mallado de la Fig.3.13. Ejemplo de mallado con alta torcedura.

Otra de las formas que tenemos para medir la regularidad de un mallado y decidir si es conveniente o no para aplicar nuestro esquema es tomar en cuenta el área de los triángulos que forman los nodos de cada zelda. Para definir un nuevo cociente de regularidad, lo que hacemos es obtener nuevamente el cociente entre el máximo y el mínimo de las áreas de los triángulos y entre más se acerque a 1 diremos que el mallado es más regular.

A este cociente le llamaremos *cociente de irregularidad*  $\gamma$ . Sea el cuadrilátero PQRS (fig.3.16) un cuadrilátero que representa alguna de las celdas de algún mallado  $\mathbb{G}$ , entonces los cuatro vértices determinan cuatro triángulos diferentes,  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$  (fig.3.17), que tomaremos de forma orientada antihorario.

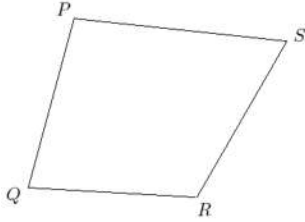


Figura 3.16: Cuadrilátero que representa alguna celda de  $\mathbb{G}$ .

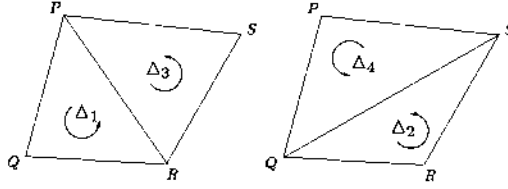


Figura 3.17: Triángulos orientados generados por PQRS.

Para calcular el área de cada uno de ellos podemos hacer uso del determinante de una matriz, ya que podemos conocer la posición de los vértices que están dados en términos de la posición de los nodos de  $\mathbb{G}$ . Obtendremos  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  con las fórmulas

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \det \begin{vmatrix} 1 & P_x & P_y \\ 1 & Q_x & Q_y \\ 1 & R_x & R_y \end{vmatrix}, & \alpha_2 &= \det \begin{vmatrix} 1 & Q_x & Q_y \\ 1 & R_x & R_y \\ 1 & S_x & S_y \end{vmatrix}, \\ \alpha_3 &= \det \begin{vmatrix} 1 & R_x & R_y \\ 1 & S_x & S_y \\ 1 & P_x & P_y \end{vmatrix}, & \alpha_4 &= \det \begin{vmatrix} 1 & S_x & S_y \\ 1 & P_x & P_y \\ 1 & Q_x & Q_y \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Así obtenemos el área de cada uno de los triángulos definidos por PQRS. En un mallado de  $m \times n$  existen  $4(m-1)(n-1)$  triángulos, entonces definimos

$$\gamma = \frac{\max_i \alpha_i}{\min_i \alpha_i}. \quad (3.4)$$

En el caso ideal, el máximo y el mínimo de las áreas de los triángulos coinciden, si se da el caso de que el mínimo de las áreas es 0, quiere decir que existe al menos un triángulo degenerado en nuestro mallado. El cómo este tipo de diferencias en un mallado afecta la precisión de los valores obtenidos se verá más a fondo en la sección de resultados.

### 3.3. Esquema propuesto

Una vez que hemos definido cómo se hará el mallado de la región  $\Omega$  procederemos a ver cómo es que se aplican en ellos los esquemas de diferencias finitas. En general, los esquemas de diferencias finitas se obtienen de considerar un punto central  $p_0$  y un conjunto finito de nodos vecinos  $p_{1,0}, p_{2,0}, \dots, p_{k,0}$  en cierta región de interés, para los cuales es necesario encontrar los coeficientes  $\Gamma_{1,0}, \Gamma_{2,0}, \dots, \Gamma_{k,0}$  que cumplan con

$$\sum_{i=0}^k \Gamma_{i,0} \varphi(p_{i,0}) \approx \frac{\partial^q \varphi}{\partial x^l \partial y^{q-l}} \Big|_{x=p_0} ; \quad q = 0, 1, 2, \dots ; \quad 0 \leq l \leq q. \quad (3.5)$$

En este trabajo se utilizará un esquema de 9 puntos, esto quiere decir que se aplicará un estencil como se muestra en la figura 3.18. De este modo, tenemos que  $i = 0, \dots, 8$ . Recordemos que la forma general que tienen las ecuaciones elípticas es

$$L\varphi = A\varphi_{xx} + B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} + D\varphi_x + E\varphi_y = F.$$

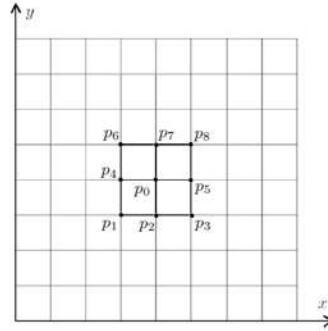


Figura 3.18: Estencil utilizado para el método desarrollado.

Queremos que nuestro esquema sea convergente, esto es, que nuestra aproximación se acerque a la solución a medida que los nodos vecinos se aproximan al nodo central  $p_0$ . Entonces queremos que se cumpla que

$$\sum_{i=0}^8 \Gamma_{i,0} \varphi(p_{i,0}) - [A\varphi_{xx} + B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} + D\varphi_x + E\varphi_y]_{p_0} \rightarrow 0,$$

lo anterior se puede reescribir usando la expansión de Taylor mencionada en el teorema 1, expandiendo hasta el tercer orden podemos reagrupar los términos de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
& [A\varphi_{xx} + B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} + D\varphi_x + E\varphi_y + F\varphi]_{p_0} - \sum_{i=0}^8 \Gamma_{i,0} \varphi(p_{i,0}) = \\
& \left( F(p_0) - \sum_{i=0}^8 \Gamma_{i,0} \right) \varphi(p_0) + \left( D(p_0) - \sum_{i=1}^8 \Gamma_{i,0} \Delta x_{i,0} \right) \varphi_x(p_0) + \\
& \left( E(p_0) - \sum_{i=1}^8 \Gamma_{i,0} \Delta y_{i,0} \right) \varphi_y(p_0) + \left( A(p_0) - \sum_{i=1}^8 \frac{\Gamma_{i,0} (\Delta x_{i,0})^2}{2} \right) \varphi_{xx}(p_0) + \\
& \left( B(p_0) - \sum_{i=1}^8 \Gamma_{i,0} \Delta x_{i,0} \Delta y_{i,0} \right) \varphi_{xy}(p_0) + \left( C(p_0) - \sum_{i=1}^8 \frac{\Gamma_{i,0} (\Delta y_{i,0})^2}{2} \right) \varphi_{yy}(p_0) + \\
& \left( - \sum_{i=1}^8 \frac{\Gamma_{i,0} (\Delta x_{i,0})^3}{3!} \right) \varphi_{xxx}(p_0) + \left( - \sum_{i=1}^8 \frac{\Gamma_{i,0} (\Delta x_{i,0})^2 \Delta y_{i,0}}{2} \right) \varphi_{xxy}(p_0) + \\
& \left( - \sum_{i=1}^8 \frac{\Gamma_{i,0} \Delta x_{i,0} (\Delta y_{i,0})^2}{2} \right) \varphi_{xyy}(p_0) + \left( - \sum_{i=1}^8 \frac{\Gamma_{i,0} (\Delta y_{i,0})^3}{3!} \right) \varphi_{yyy}(p_0) + \\
& \mathcal{O}(\max\{\Delta x_{i,0}, \Delta y_{i,0}\})^4 \quad (3.6)
\end{aligned}$$

donde  $\Delta x_{i,0}$  y  $\Delta y_{i,0}$  son las distancias horizontal y vertical respectivamente del nodo central  $p_0$  a cada uno de los nodos vecinos  $p_{i,0}$ .

Suponiendo una vez más que las derivadas de orden mayor se encuentran acotadas por una función  $\mathcal{O}(\max\{\Delta x_{i,0}, \Delta y_{i,0}\})^4$ , lo que queremos es que cada uno de los coeficientes entre paréntesis en 3.6 sea cero, si logramos esto la diferencia entre nuestro esquema y el operador quedará acotada por la función  $\mathcal{O}$  y disminuirá al acercarse los nodos vecinos.

Entonces de (3.6) podemos obtener un sistema de ecuaciones (3.7). Queremos ver cuáles son los coeficientes  $\Gamma_{i,0}$  tales que al realizar el producto con los respectivos  $\Delta x_{i,0}$  y  $\Delta y_{i,0}$  nos den los coeficientes correspondientes del operador lineal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_{1,0} & \dots & \Delta x_{8,0} \\ 0 & \Delta y_{1,0} & \dots & \Delta y_{8,0} \\ 0 & (\Delta x_{1,0})^2 & \dots & (\Delta x_{8,0})^2 \\ 0 & \Delta x_{1,0} \Delta y_{1,0} & \dots & \Delta x_{8,0} \Delta y_{8,0} \\ 0 & (\Delta y_{1,0})^2 & \dots & (\Delta y_{8,0})^2 \\ 0 & (\Delta x_{1,0})^3 & \dots & (\Delta x_{8,0})^3 \\ 0 & (\Delta x_{1,0})^2 \Delta y_{2,0} & \dots & (\Delta x_{8,0})^2 \Delta y_{8,0} \\ 0 & (\Delta y_{1,0})^2 \Delta x_{2,0} & \dots & (\Delta y_{8,0})^2 \Delta x_{8,0} \\ 0 & (\Delta y_{1,0})^3 & \dots & (\Delta y_{8,0})^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{0,0} \\ \Gamma_{1,0} \\ \Gamma_{2,0} \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma_{8,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(p_0) \\ D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Dado que el sistema resultante de (3.7) es indeterminado, surge la problemática de encontrar una solución que nos brinde un esquema consistente. En [10] se explica una forma de resolver este sistema, asumiendo que se puede atacar viéndolo como un problema de mínimos cuadrados, se descarta los residuales de tercer orden y se obtiene un sistema de menor dimensión.

Se pueden obtener buenos resultados como se muestra en [11], sin embargo, este sistema resultante se tiene que resolver para cada uno de los puntos interiores del mallado  $G$  y al hacerlo de manera iterativa el tiempo de ejecución aumenta considerablemente con pequeños aumentos en el número de puntos. El enfoque que se quiere ver en este trabajo es el de poder resolver el problema de encontrar los coeficientes  $\Gamma_{i,0}$  no de forma iterativa, sino de forma directa, con el propósito de ahorrar en el tiempo de ejecución. De esta manera, aunque el número de veces que se tenga que resolver el sistema aumente, el tiempo en que se resuelve será menor que si se hace iterativamente.

Para lograr lo anterior hacemos un cambio en el sistema de ecuaciones (3.7) que se va a resolver, incluyendo en la matriz los residuales de tercer orden, separamos el primer renglón de la matriz; esto es debido a que de la condición de consistencia que habíamos probado

$$[L\varphi]_{p_0} - [Lu]_{p_0} \rightarrow 0, \quad \text{cuando} \quad p_{1,0}, \dots, p_{8,0} \rightarrow p_0,$$

y queremos que esto se cumpla para nuestro esquema, además, dado que vamos a enfocar este trabajo a resolver problemas del tipo de la ecuación de Poisson esto implica que  $F(p_0) = 0$ , lo que nos da

$$R_0 = \sum_{i=1}^8 \Gamma_{i,0} = 0 \quad (3.8)$$

de lo anterior, nuestro sistema queda de la forma

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{1,0} & \Delta x_{2,0} & \dots & \Delta x_{8,0} \\ \Delta y_{1,0} & \Delta y_{2,0} & \dots & \Delta y_{8,0} \\ (\Delta x_{1,0})^2 & (\Delta x_{2,0})^2 & \dots & (\Delta x_{8,0})^2 \\ \Delta x_{1,0} \Delta y_{1,0} & \Delta x_{2,0} \Delta y_{2,0} & \dots & \Delta x_{8,0} \Delta y_{8,0} \\ (\Delta y_{1,0})^2 & (\Delta y_{2,0})^2 & \dots & (\Delta y_{8,0})^2 \\ (\Delta x_{1,0})^3 & (\Delta x_{2,0})^3 & \dots & (\Delta x_{8,0})^3 \\ (\Delta x_{1,0})^2 \Delta y_{1,0} & (\Delta x_{2,0})^2 \Delta y_{2,0} & \dots & (\Delta x_{8,0})^2 \Delta y_{8,0} \\ (\Delta y_{1,0})^2 \Delta x_{1,0} & (\Delta y_{2,0})^2 \Delta x_{2,0} & \dots & (\Delta y_{8,0})^2 \Delta x_{8,0} \\ (\Delta y_{1,0})^3 & (\Delta y_{2,0})^3 & \dots & (\Delta y_{8,0})^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{1,0} \\ \Gamma_{2,0} \\ \Gamma_{3,0} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma_{8,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Podemos encontrar la solución al sistema al minimizar el residual  $A\Gamma - \beta$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} \Delta x_{1,0} & \Delta x_{2,0} & \dots & \Delta x_{8,0} \\ \Delta y_{1,0} & \Delta y_{2,0} & \dots & \Delta y_{8,0} \\ (\Delta x_{1,0})^2 & (\Delta x_{2,0})^2 & \dots & (\Delta x_{8,0})^2 \\ \Delta x_{1,0} \Delta y_{1,0} & \Delta x_{2,0} \Delta y_{2,0} & \dots & \Delta x_{8,0} \Delta y_{8,0} \\ (\Delta y_{1,0})^2 & (\Delta y_{2,0})^2 & \dots & (\Delta y_{8,0})^2 \\ (\Delta x_{1,0})^3 & (\Delta x_{2,0})^3 & \dots & (\Delta x_{8,0})^3 \\ (\Delta x_{1,0})^2 \Delta y_{1,0} & (\Delta x_{2,0})^2 \Delta y_{2,0} & \dots & (\Delta x_{8,0})^2 \Delta y_{8,0} \\ (\Delta y_{1,0})^2 \Delta x_{1,0} & (\Delta y_{2,0})^2 \Delta x_{2,0} & \dots & (\Delta y_{8,0})^2 \Delta x_{8,0} \\ (\Delta y_{1,0})^3 & (\Delta y_{2,0})^3 & \dots & (\Delta y_{8,0})^3 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{1,0} \\ \Gamma_{2,0} \\ \Gamma_{3,0} \\ \Gamma_{4,0} \\ \Gamma_{5,0} \\ \Gamma_{6,0} \\ \Gamma_{7,0} \\ \Gamma_{8,0} \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dado que en este caso nos sigue quedando un sistema indeterminado no tenemos una solución única, por lo que debemos buscar la solución de otra manera. Como se mencionó anteriormente, se busca una manera *directa* de resolver el sistema. Lo primero que haremos será tomar la matriz de las ecuaciones normales asociadas al sistema (3.9), esto convierte el problema en un problema de optimización. A diferencia de la manera *iterativa*, que también resulta en un problema de optimización, las restricciones en este enfoque son diferentes ya que son más relajadas. En el método iterativo lo que se busca es aproximar en el sentido de mínimos cuadrados, esto es, se minimiza el residual

$$\|A\Gamma - \beta\|_2 = \|\mathbf{r}\|_2.$$

Para obtener las ecuaciones normales consideramos la función cuadrática

$$\begin{aligned} Q(\Gamma) &= \frac{1}{2} \|A\Gamma - \beta\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2} (A\Gamma - \beta)^T (A\Gamma - \beta) \\ &= \frac{1}{2} (\Gamma^T A^T A \Gamma - 2\Gamma^T A^T \beta + \beta^T \beta) \end{aligned}$$

la cual es una función diferenciable en  $\Gamma$ . Para encontrar el mínimo de  $Q(\Gamma)$  el gradiente debe de ser cero y de esta forma el sistema de ecuaciones que queremos resolver queda de la forma

$$M\Gamma = A^T \beta \quad (3.10)$$

donde  $M$  es la matriz que resulta de  $A^T A$ , por lo que  $M$  es una matriz cuadrada, simétrica y semidefinida positiva. Ya que  $M$  posee estas características, podemos aplicar el algoritmo de la factorización de Cholesky, mencionado en el Apéndice A del presente trabajo, a (3.10) y obtenemos

$$(\Lambda\Lambda^T)\Gamma = A^T\beta \quad (3.11)$$

donde  $\Lambda$  es la matriz resultante de la factorización de Cholesky de  $M$ , de aquí podemos resolver fácilmente el sistema por medio de los métodos de sustitución hacia adelante y hacia atrás. De esta manera obtenemos los coeficientes  $\Gamma_{1,0}$ ,  $\Gamma_{2,0}, \dots, \Gamma_{8,0}$ , para obtener el coeficiente  $\Gamma_{0,0}$  se sustituyen los valores anteriores en (3.8). Una vez que conocemos todos los coeficientes involucrados con el nodo  $p_0$ , se almacenan adecuadamente en una matriz  $K$  y se procede a buscar los coeficientes involucrados con el siguiente nodo interno de  $G$ .

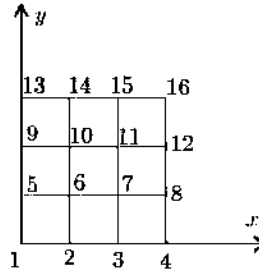


Figura 3.19: Orden de la numeración de los nodos en un mallado de 4x4.

El orden que se sigue al numerar los nodos de  $G$  en este trabajo es hacia la derecha y hacia arriba (fig. 3.19), es decir, comenzamos en la imagen del punto inferior izquierdo, nos movemos sobre el eje  $x$  y al llegar al punto final se procede a numerar la siguiente línea horizontal y así hasta llegar al punto superior derecho. Una vez que se han computado todos los nodos internos de  $G$  dentro de la matriz  $K$  se procede a resolver el sistema resultante a través del método de Gauss-Jordan y de esta manera se obtiene la aproximación del operador lineal en cada punto de la región  $\Omega$ .

Debemos resaltar que esta forma de resolver el problema está enfocada a regiones altamente irregulares, donde los renglones y las columnas de la matriz resultante  $A$  son linealmente independientes. Cuando este método se aplica a regiones simples rectangulares la matriz  $A$  tiene renglones que no son linealmente independientes por lo que siguiendo el esquema no se obtiene una solución deseable. Para obtener resultados aceptables lo que podemos hacer es una modificación en el esquema para evitar este problema. Lo que hace el segundo esquema en vez de hacer la factorización de Cholesky es hacer una división directa; de esta manera se evita el tener que resolver el sistema de ecuaciones por otro método y el error que ocurre cuando los renglones son linealmente dependientes. Implementando este segundo esquema la precisión que perdemos no es realmente apreciable y se tiene la ventaja de que se puede aplicar sobre regiones regulares e irregulares por igual.

## Capítulo 4

# Implementación del Método

### 4.1. Pruebas numéricas

Para hacer las pruebas del esquema propuesto se seleccionaron 12 regiones poligonales divididas en tres grupos de acuerdo con sus propiedades:

**Regiones simples** Polígonos sencillos compuestos de un número pequeño de lados. El principal problema era lograr la independencia lineal de los nodos en la frontera.

- |       |       |
|-------|-------|
| ■ M14 | ■ ROM |
| ■ M19 | ■ ELE |

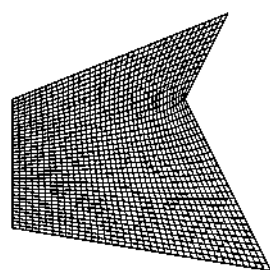
**Regiones de complejidad media** Polígonos que asemejan contornos curvos. Dada la naturaleza del programa UNAMalla las partes curvas de la frontera se aproximaron por secciones poligonales.

- |                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| ■ Círculo (CIR) | ■ Escualo (EQL) |
| ■ Cisne (SWA)   | ■ Cráneo (CRN)  |

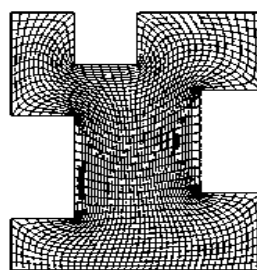
**Regiones Geográficas** Polígonos complejos que representan un esbozo de las fronteras geográficas de regiones reales.

- |                    |                   |
|--------------------|-------------------|
| ■ Inglaterra (ENG) | ■ Michoacán (MIC) |
| ■ La Habana (HAB)  | ■ Tabasco (TAB)   |

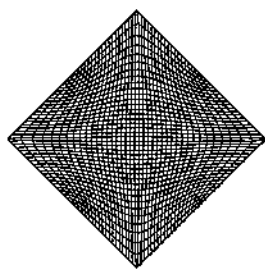
En las figuras 4.1-4.3 se muestra un mallado de  $41 \times 41$  nodos para las regiones mencionadas. Para las pruebas todas las regiones se encuentran contenidas en  $R_2 = [0, 1] \times [0, 1]$



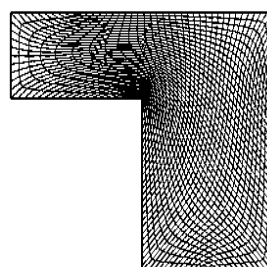
M14.



M19.

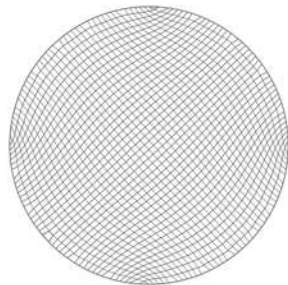


Rombo.

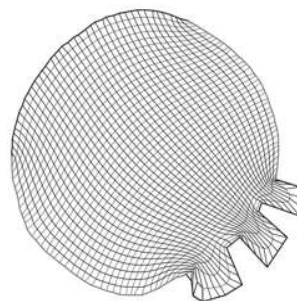


L.

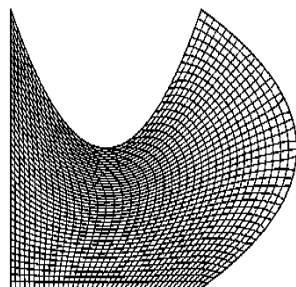
Figura 4.1: Regiones Simples.



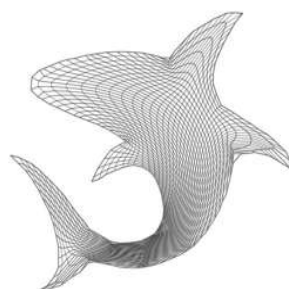
Círculo.



Cráneo.



Cisne.



Escualo.

Figura 4.2: Regiones de complejidad media.

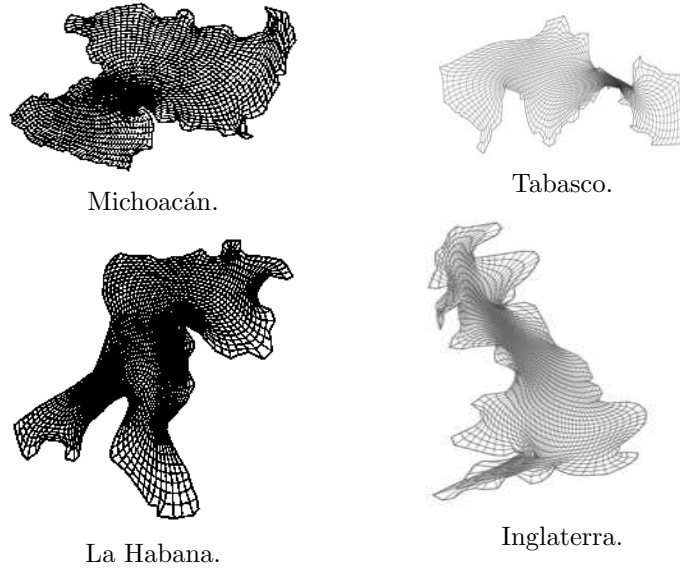


Figura 4.3: Regiones Geográficas.

Usando estos 12 contornos se generaron mallas convexas de 21 (25 en el caso de complejidad media), 41 y 81 nodos por lado por medio de minimizar el funcional  $\frac{1}{2}(H_\omega(G) + S_t(G))$  con el uso del programa UNAMalla [5]. Una vez que fueron construídas las mallas estructuradas, éstas fueron usadas para calcular los coeficientes  $\Gamma_i$  como se propuso en la sección anterior.

Los sistemas algebraicos resultantes del uso del primer esquema y la factorización de Cholesky (3.11) fueron resueltos usando un algoritmo basado en el método de Gauss-Seidel. Los sistemas algebraicos resultantes del segundo esquema se resolvieron usando la división de matrices. Para hacer las pruebas del esquema propuesto se seleccionaron los siguientes dos problemas [12]:

**Problema 1**

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) = 10e^{2x+y}, \quad u|_{\partial\Omega} = g(x, y) = 2e^{2x+y}.$$

*Solución Analítica:*  $u(x, y) = 2e^{2x+y}$

**Problema 2**

$$\nabla \cdot (Z \nabla u(x, y)) = f(x, y); \quad u|_{\partial\Omega} = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

donde

$$Z \equiv \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} = P^{-1}DP,$$

$$P = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{8}) & \sin(\frac{\pi}{8}) \\ -\sin(\frac{\pi}{8}) & \cos(\frac{\pi}{8}) \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 + 2x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 + 2y^2 \end{bmatrix}$$

*Solución Analítica:*  $u(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$  (Ver el Ap.B)

## 4.2. Resultados

La función  $f$  del lado derecho de la igualdad en ambos problemas fue escogida de tal forma que cumpliera con que  $u$  fuera la solución exacta. La norma  $\|\cdot\|_2$  para el error obtenido durante estas pruebas puede verse en las tablas 4.1-4.6. La fórmula usada para calcularlo fue:

$$\|u - v\|_2 = \sqrt{\sum_i^M \sum_j^N (u_{i,j} - v_{i,j})^2 \mathcal{A}_{i,j}} \quad ,$$

donde  $u$  y  $v$  son las soluciones aproximada y exacta, respectivamente, calculadas en el  $i,j$ -ésimo elemento,  $\mathcal{A}_{i,j}$  es el área de ese elemento y  $M$  y  $N$  son el número de nodos por lado. El orden empírico entre dos mallas fue calculado como  $\left(\frac{\log \epsilon_{k-1}}{\log \epsilon_k}\right) \left(\frac{\log N_k}{\log N_{k-1}}\right)$ , donde  $\epsilon_k$  y  $N_k$  son el error cuadrático y el número de nodos por lado, respectivamente.

Cuatro casos especiales que surgieron al trabajar con estas regiones fue con las mallas ROM, ELE, EQL y CRN ya que generaron problemas a la hora de generar el mallado dada la forma en la que fueron definidas las fronteras. Recordemos que, para que la teoría que definimos para el caso de un mallado rectangular pudiera seguirse aplicando en regiones irregulares, el mapeo resultante debía seguir conservando las propiedades de convexidad.

En el caso de las regiones EQL y CRN las fronteras fueron definidas de tal manera que algunas «esquinas» del mallado eran forzadas a ser no convexas (fig.4.4-4.5). En el caso de las regiones ROM y ELE la ubicación de las «esquinas» del mallado daba como resultado celdas convexas, pero degeneradas, es decir, las celdas tenían forma triangular (fig.4.6).

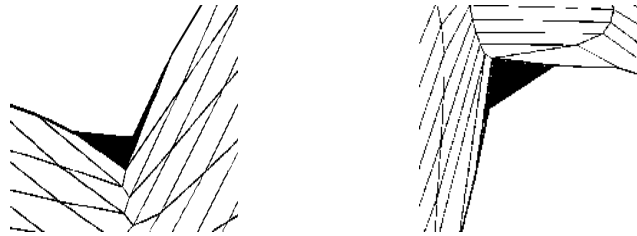


Figura 4.4: Frontera mal condicionada en EQL.



Figura 4.5: Frontera mal condicionada en CRN.

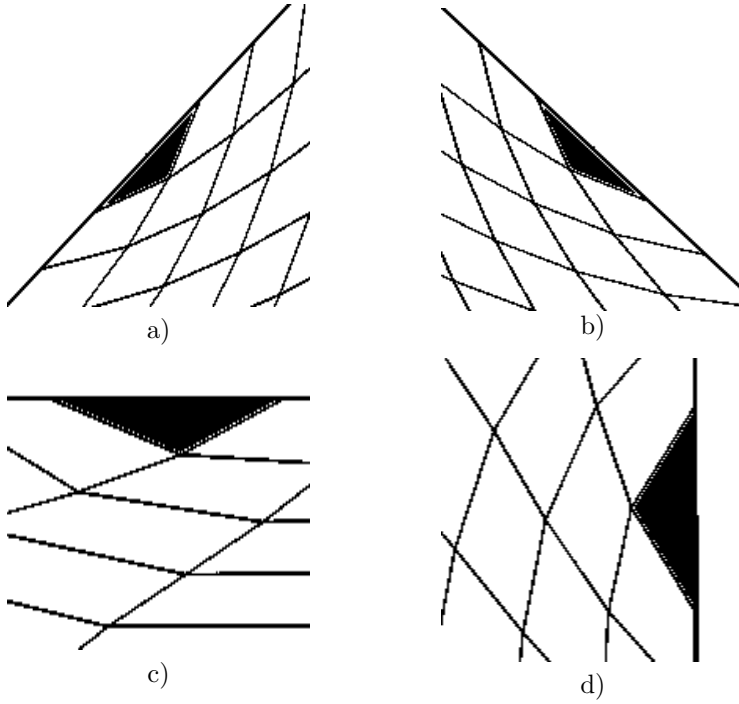


Figura 4.6: Celdas degeneradas en ROM (a,b) y ELE (c,d).

Es interesante observar que al aplicar los métodos en las regiones cuyo malla era no completamente convexo vemos que, aunque se da una disminución en la precisión de los resultados, estos no se ven realmente afectados por las excentricidades en la frontera. Una de las hipótesis de porqué sucede esto es que, debido a la forma en la que está estructurado el método, no se realizan cálculos dentro de las celdas degeneradas o no convexas, aunado a que son a lo más cuatro celdas las que tienen esta peculiaridad.

Sabiendo que el porcentaje de celdas mal definidas es mínimo, podemos ver porqué el impacto del error no se aprecia realmente en las tablas.

| Malla | Nodos | $l_2$ -error E1 | $l_2$ -error E2 | Orden E1 | Orden E2 |
|-------|-------|-----------------|-----------------|----------|----------|
| M14   | 21    | 1.95 E-02       | 1.95 E-02       |          |          |
|       | 41    | 5.30 E-03       | 5.30 E-03       | 1.94     | 1.94     |
|       | 81    | 1.40 E-03       | 1.40 E-03       | 1.95     | 1.95     |
| ROM   | 21    | 3.17 E-02       | 3.17 E-02       |          |          |
|       | 41    | 9.40 E-03       | 9.40 E-03       | 1.81     | 1.81     |
|       | 81    | 1.90 E-03       | 2.50 E-03       | 2.34     | 1.94     |
| M19   | 21    | 2.00 E-02       | 2.00 E-02       |          |          |
|       | 41    | 6.50 E-03       | 6.50 E-03       | 1.67     | 1.67     |
|       | 81    | 1.80 E-03       | 1.80 E-03       | 1.88     | 1.88     |
| ELE   | 21    | 2.85 E-02       | 2.86 E-02       |          |          |
|       | 41    | 8.10 E-03       | 8.10 E-03       | 1.88     | 1.88     |
|       | 81    | 2.60 E-03       | 3.00 E-03       | 1.66     | 1.45     |

Tabla 4.1: Problema 1. Regiones simples.

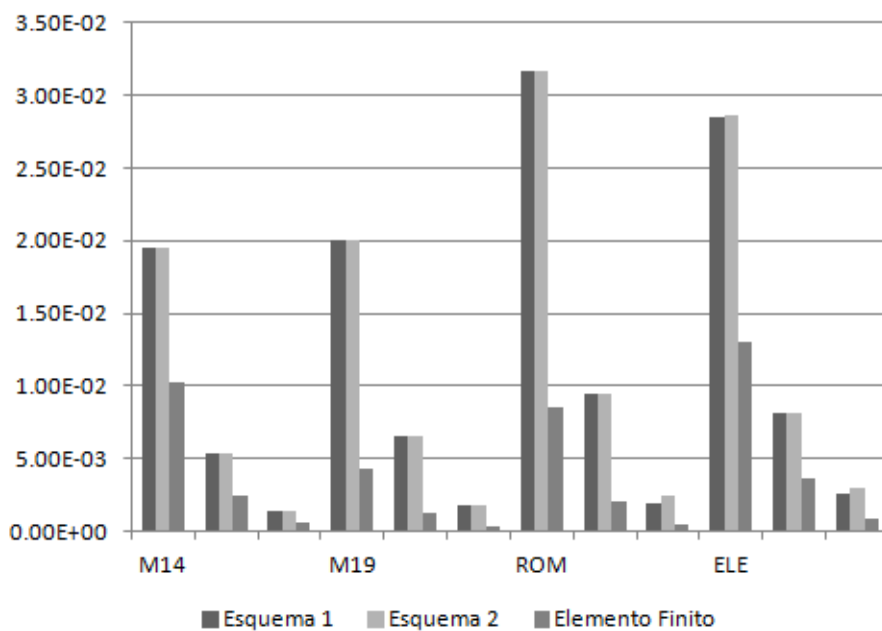


Figura 4.7: Comparación de resultados de los dos nuevos esquemas, contra elemento finito en regiones simples para el problema 1.

| Malla | Nodos | $l_2$ -error E1 | $l_2$ -error E2 | Orden E1 | Orden E2 |
|-------|-------|-----------------|-----------------|----------|----------|
| CIR   | 25    | 4.69 E-02       | 4.69 E-02       |          |          |
|       | 41    | 9.80 E-03       | 9.80 E-03       | 3.16     | 3.16     |
|       | 81    | 1.90 E-03       | 7.40 E-03       | 2.4      | 0.41     |
| SWA   | 25    | 1.02 E-02       | 1.02 E-02       |          |          |
|       | 41    | 2.60 E-03       | 2.60 E-03       | 2.04     | 2.04     |
|       | 81    | 7.00 E-04       | 6.54 E-04       | 1.92     | 2.02     |
| EQL   | 25    | 8.86 E-02       | 8.48 E-02       |          |          |
|       | 41    | 1.51 E-02       | 1.51 E-02       | 3.76     | 3.48     |
|       | 81    | 9.60 E-03       | 8.70 E-03       | 0.67     | 0.80     |
| CRN   | 25    | 2.02 E-02       | 2.02 E-02       |          |          |
|       | 41    | 5.90 E-03       | 5.90 E-03       | 2.48     | 2.48     |
|       | 81    | 8.20 E-03       | 8.50 E-03       | -0.48    | -0.53    |

Tabla 4.2: Problema 1. Regiones de complejidad media.

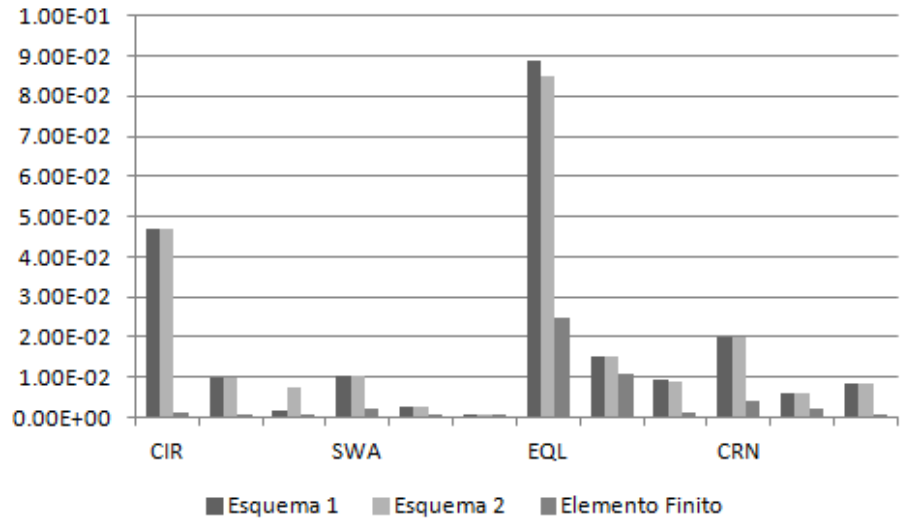


Figura 4.8: Comparación de resultados de los dos nuevos esquemas, contra elemento finito en regiones de complejidad media para el problema 1.

| Malla | Nodos | $l_2$ -error E1 | $l_2$ -error E2 | Orden E1 | Orden E2 |
|-------|-------|-----------------|-----------------|----------|----------|
| MIC   | 21    | 1.46 E-02       | 1.46 E-02       |          |          |
|       | 41    | 5.00 E-03       | 5.00 E-03       | 1.60     | 1.60     |
|       | 81    | 2.60 E-03       | 2.60 E-03       | 0.96     | 0.96     |
| TAB   | 21    | 1.85 E-02       | 1.85 E-02       |          |          |
|       | 41    | 3.00 E-03       | 3.00 E-03       | 3.67     | 3.67     |
|       | 81    | 2.10 E-03       | 2.10 E-03       | 0.523    | 0.523    |
| HAB   | 21    | 7.80 E-03       | 7.80 E-03       |          |          |
|       | 41    | 7.30 E-03       | 7.30 E-03       | 0.099    | 0.099    |
|       | 81    | 1.30 E-03       | 1.30 E-03       | 2.53     | 2.53     |
| ENG   | 21    | 9.10 E-03       | 9.10 E-03       |          |          |
|       | 41    | 1.70 E-03       | 1.70 E-03       | 2.5      | 2.5      |
|       | 81    | 1.80 E-02       | 2.85 E-02       | -3.46    | -4.14    |

Tabla 4.3: Problema 1. Regiones geográficas.

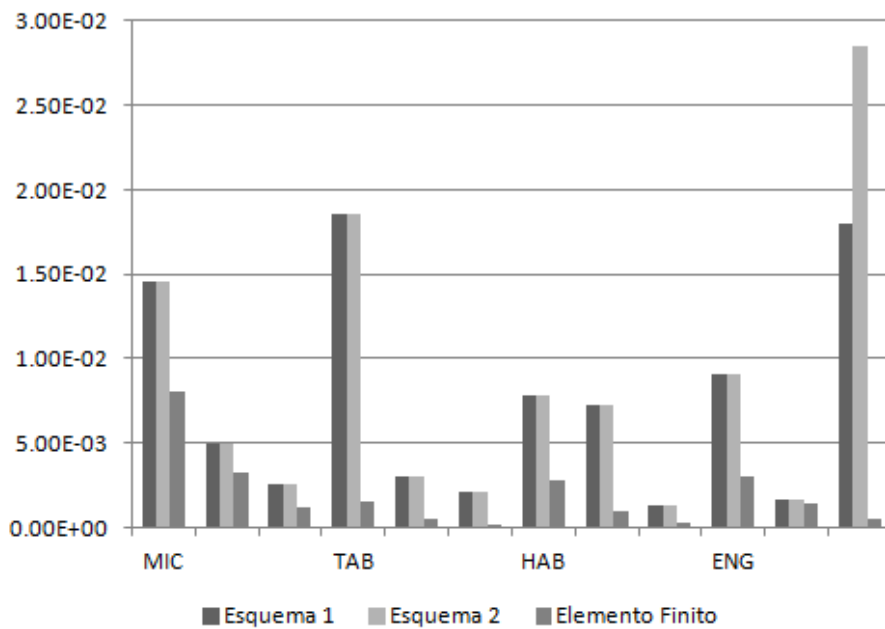


Figura 4.9: Comparación de resultados de los dos nuevos esquemas, contra elemento finito en regiones geográficas para el problema 1.

| Malla | Nodos | $l_2$ -error E1 | $l_2$ -error E2 | Orden E1 | Orden E2 |
|-------|-------|-----------------|-----------------|----------|----------|
| M14   | 21    | 2.80 E-03       | 2.80 E-03       |          |          |
|       | 41    | 1.10 E-03       | 1.10 E-03       | 1.39     | 1.39     |
|       | 81    | 1.86 E-04       | 1.86 E-04       | 2.61     | 2.61     |
| ROM   | 21    | 4.80 E-03       | 4.80 E-03       |          |          |
|       | 41    | 1.20 E-03       | 1.20 E-03       | 2.07     | 2.07     |
|       | 81    | 2.90 E-04       | 2.92 E-04       | 2.08     | 2.08     |
| M19   | 21    | 3.70 E-03       | 3.70 E-03       |          |          |
|       | 41    | 1.10 E-03       | 1.10 E-03       | 1.81     | 1.81     |
|       | 81    | 2.92 E-04       | 2.92 E-04       | 1.95     | 1.95     |
| ELE   | 21    | 3.90 E-03       | 3.90 E-03       |          |          |
|       | 41    | 9.40 E-04       | 9.43 E-04       | 2.12     | 2.12     |
|       | 81    | 1.70 E-03       | 2.89 E-03       | -0.87    | -1.6     |

Tabla 4.4: Problema 2. Regiones simples.

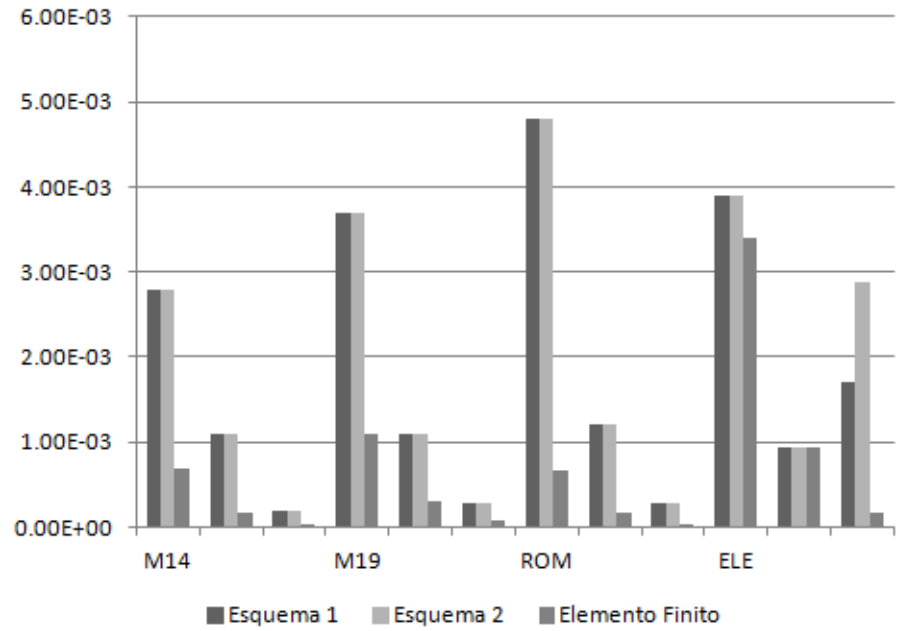


Figura 4.10: Comparación de resultados de los dos nuevos esquemas, contra elemento finito en regiones simples para el problema 2.

| Malla | Nodos | $l_2$ -error E1 | $l_2$ -error E2 | Orden E1 | Orden E2 |
|-------|-------|-----------------|-----------------|----------|----------|
| CIR   | 25    | 4.90 E-03       | 4.90 E-03       |          |          |
|       | 41    | 1.00 E-03       | 1.00 E-03       | 3.21     | 3.21     |
|       | 81    | 1.40 E-03       | 1.50 E-03       | -0.49    | -0.59    |
| SWA   | 25    | 3.20 E-03       | 3.20 E-03       |          |          |
|       | 41    | 8.30 E-04       | 8.33 E-04       | 2.72     | 2.72     |
|       | 81    | 2.10 E-04       | 2.13 E-04       | 2.01     | 2.01     |
| EQL   | 25    | 2.30 E-02       | 2.37 E-02       |          |          |
|       | 41    | 2.30 E-03       | 2.30 E-03       | 4.89     | 4.59     |
|       | 81    | 1.20 E-03       | 1.06 E-02       | 0.97     | -2.11    |
| CRN   | 25    | 6.40 E-03       | 6.40 E-03       |          |          |
|       | 41    | 2.40 E-03       | 2.40 E-03       | 1.98     | 1.98     |
|       | 81    | 1.20 E-03       | 1.20 E-03       | 1.01     | 1.01     |

Tabla 4.5: Problema 2. Regiones de complejidad media.

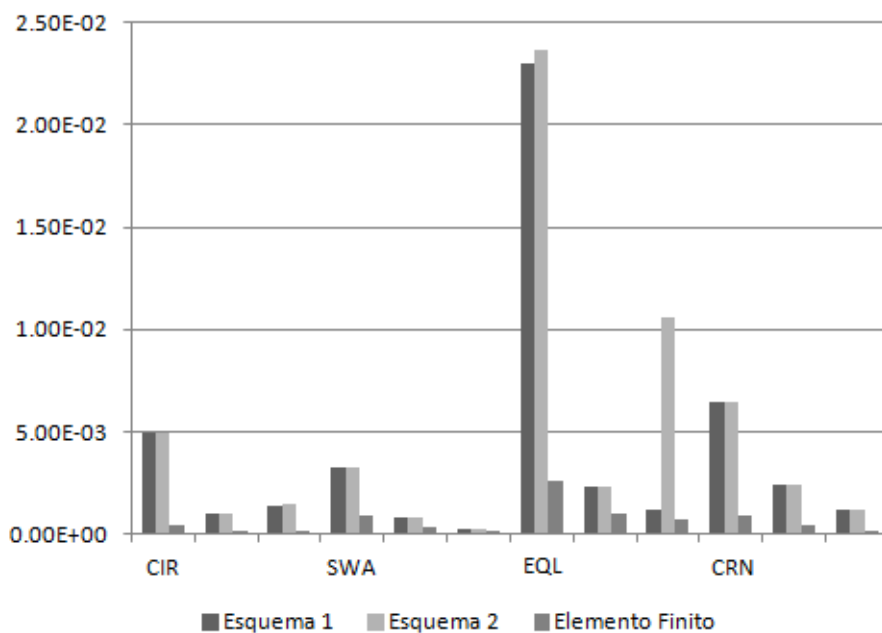


Figura 4.11: Comparación de resultados de los dos nuevos esquemas, contra elemento finito en regiones de complejidad media para el problema 2.

| Malla | Nodos | $l_2$ -error E1 | $l_2$ -error E2 | Orden E1 | Orden E2 |
|-------|-------|-----------------|-----------------|----------|----------|
| MIC   | 21    | 2.60 E-03       | 2.60 E-03       |          |          |
|       | 41    | 9.09 E-04       | 9.09 E-04       | 1.57     | 1.57     |
|       | 81    | 2.10 E-04       | 2.10 E-04       | 2.15     | 2.15     |
| TAB   | 21    | 6.90 E-03       | 6.90 E-03       |          |          |
|       | 41    | 1.30 E-03       | 1.30 E-03       | 2.49     | 2.49     |
|       | 81    | 1.90 E-04       | 1.90 E-04       | 2.82     | 2.82     |
| HAB   | 21    | 2.10 E-03       | 2.10 E-03       |          |          |
|       | 41    | 8.20 E-04       | 8.27 E-04       | 1.4      | 1.4      |
|       | 81    | 4.40 E-04       | 4.41 E-04       | 0.91     | 0.91     |
| ENG   | 21    | 4.40 E-03       | 4.40 E-03       |          |          |
|       | 41    | 1.70 E-03       | 1.70 E-03       | 1.42     | 1.42     |
|       | 81    | 1.40 E-03       | 1.40 E-03       | 0.28     | 0.28     |

Tabla 4.6: Problema 2. Regiones geográficas.

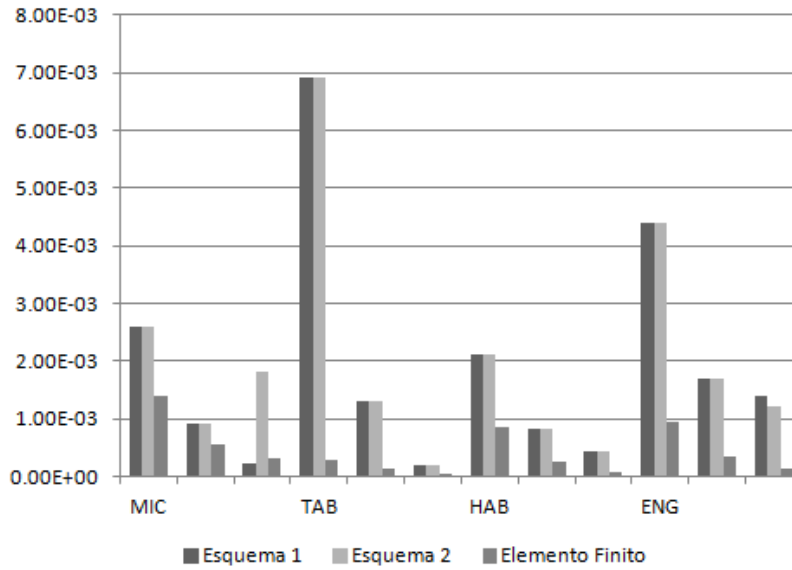


Figura 4.12: Comparación de resultados de los dos nuevos esquemas, contra elemento finito en regiones geográficas para el problema 2.

En las figuras 4.7-4.12 podemos ver que la precisión al utilizar el segundo esquema y no realizar la factorización de Cholesky se mantiene dentro del margen aceptable, en algunos casos se pierde un poco de precisión, pero en otros incluso se mejora. La diferencia entre ambos esquemas se aprecia más entre mayor sea el número de nodos que tenga nuestro mallado, esto debido a que entre mayor sea el número de cálculos realizados se espera que un esquema se aproxime mejor.

En la tabla 4.7 se puede comparar los resultados obtenidos con el Esquema 2, un esquema que involucra elemento finito y un esquema clásico de nueve puntos. Se probaron los mismos problemas en una región cuadrada de 21, 41, 61 y 81 nodos por lado. Recordemos que el Esquema 1 no puede aplicarse en regiones rectangulares dado que se origina un problema de dependencia lineal en los renglones de la matriz asociada al problema de ecuaciones normales.

|            | Nodos | Esquema Nuevo | Elemento Finito | Esquema Clásico |
|------------|-------|---------------|-----------------|-----------------|
| Problema 1 | 21    | 8.52 E-02     | 2.66 E-04       | 1.50 E-03       |
|            | 41    | 2.38 E-02     | 6.66 E-05       | 3.77 E-04       |
|            | 61    | 9.80 E-03     | 2.96 E-05       | 1.68 E-04       |
|            | 81    | 6.30 E-03     | 1.66 E-05       | 9.45 E-05       |
| Problema 2 | 21    | 8.80 E-03     | 1.50 E-03       | 1.10 E-03       |
|            | 41    | 1.80 E-03     | 3.71 E-04       | 2.74 E-04       |
|            | 61    | 7.46 E-04     | 1.65 E-04       | 1.41 E-04       |
|            | 81    | 4.30 E-04     | 9.29 E-05       | 6.87 E-05       |

Tabla 4.7: Resultados obtenidos con diferentes métodos para una región cuadrada de 21, 41, 61 y 81 nodos para los problemas 1 y 2.

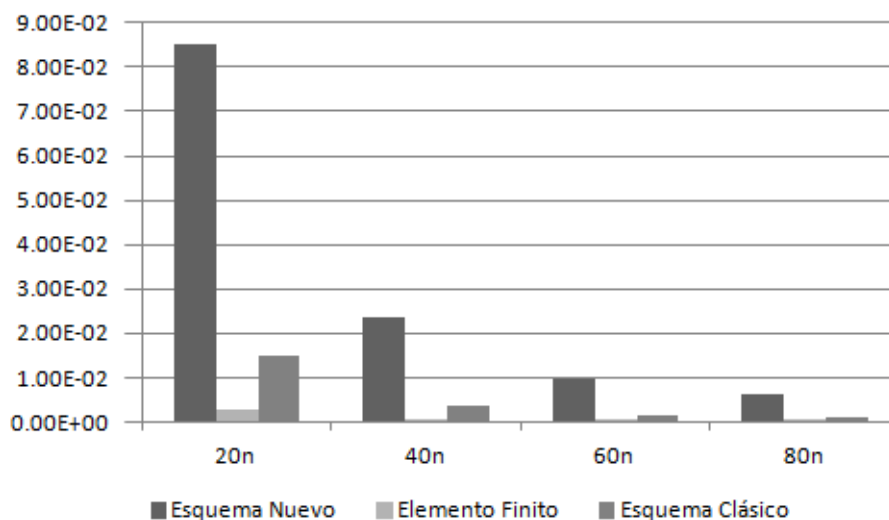


Figura 4.13: Errores obtenidos para el problema 1 en regiones cuadradas con el esquema 2, el método de elemento finito y un esquema de diferencias finitas clásico para mallados de 20, 40, 60 y 80 nodos.

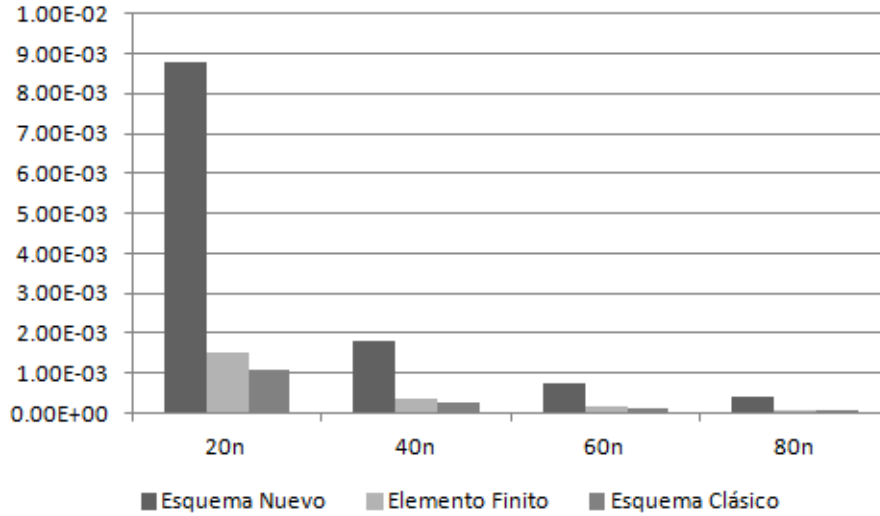


Figura 4.14: Errores obtenidos para el problema 2 en regiones cuadradas con el esquema 2, el método de elemento finito y un esquema de diferencias finitas clásico para mallados de 20, 40, 60 y 80 nodos.

Como se mencionó en la sección 3.2.2 podemos decir cuándo es probable que se generen celdas elongadas, para esto usamos el cociente de convexidad. El  $C_x$  que se obtuvo para las regiones con las que se trabajó durante esta tesis se encuentran enumerados en la tabla 4.8 de menor a mayor. De ahí podemos observar que las regiones ROM y CIR son convexas como cabía esperarse.

| Región | Área ( $\Omega$ ) | Área ( $\tilde{\Omega}$ ) | $C_x$  |
|--------|-------------------|---------------------------|--------|
| EQL    | 0.3480            | 0.6215                    | 0.5599 |
| HAB    | 0.3939            | 0.6470                    | 0.6088 |
| ENG    | 0.2456            | 0.3932                    | 0.6246 |
| TAB    | 0.2169            | 0.3348                    | 0.6478 |
| MIC    | 0.3977            | 0.5351                    | 0.7432 |
| M19    | 0.6000            | 0.8000                    | 0.7500 |
| SWA    | 0.4453            | 0.5933                    | 0.7505 |
| CRN    | 0.5637            | 0.7493                    | 0.7523 |
| M14    | 0.5833            | 0.6944                    | 0.8400 |
| ELE    | 0.3750            | 0.4375                    | 0.8571 |
| ROM    | 0.5000            | 0.5000                    | 1.0000 |
| CIR    | 0.7852            | 0.7852                    | 1.0000 |

Tabla 4.8: El área de  $\Omega$  está dada en  $cm^2$ . El cociente  $Q$  es adimensional

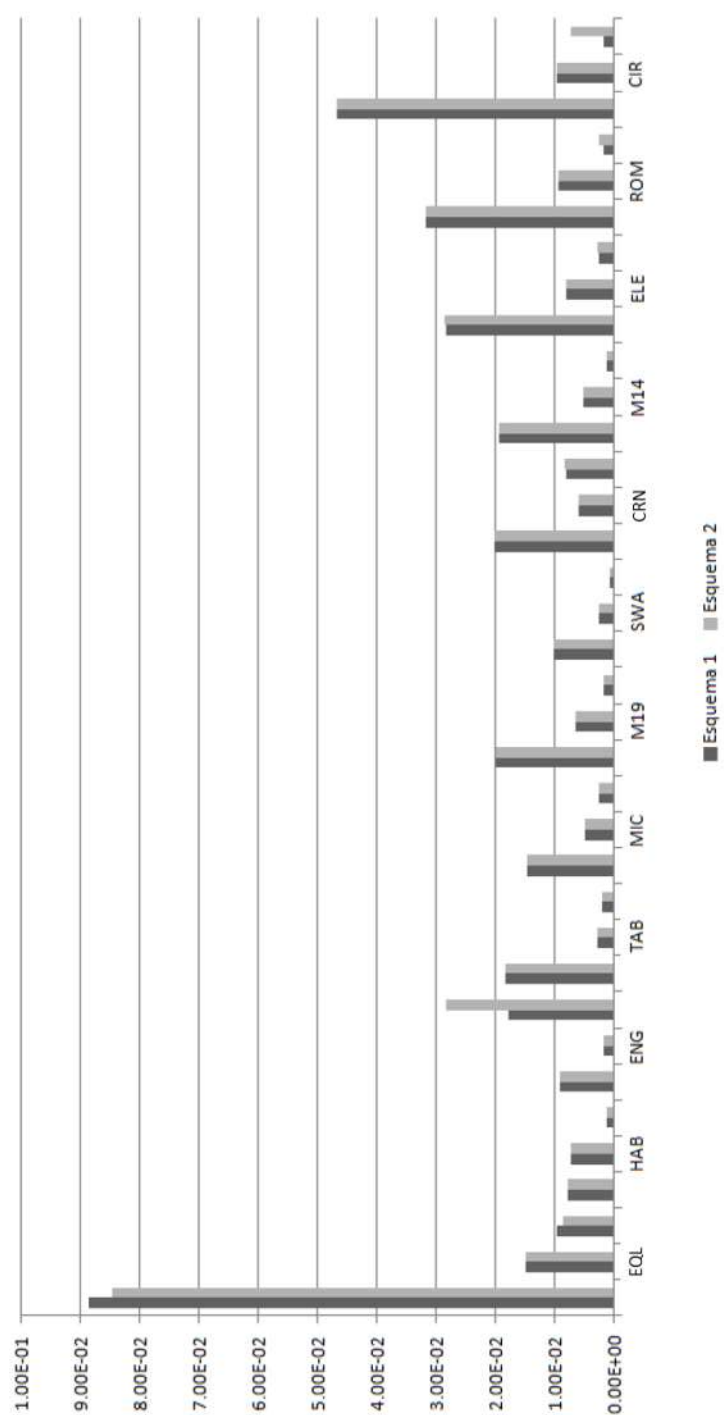


Figura 4.15: Errores obtenidos para el problema 1 con los dos nuevos esquemas para las regiones ordenadas de acuerdo a su coeficiente de convexidad ( $C_x$ ) para mallados de 21 (25), 41 y 81 nodos.

En general las regiones geográficas resultaron las menos convexas, esto debido a que la frontera de las regiones presenta la mayor irregularidad. Un caso especial es la región EQL, la cual presenta el mayor índice de concavidad puesto que se presenta el fenómeno de «cuello de botella» en una región curva bastante prolongada, esto aunado al hecho de que tiene un mal condicionamiento en la frontera como se mencionó anteriormente.

En las tablas 4.9 y 4.10 se pueden observar los otros dos criterios que habíamos definido para determinar si el mallado es conveniente o no, se ordenaron las regiones de acuerdo a su cociente de torcedura en base a las diagonales y las áreas de los triángulos respectivamente, para 21 (25), 41 y 81 nodos.

| Región | 21      | 41      | 81      |
|--------|---------|---------|---------|
| EQL    | 41.7104 | 46.8609 | 58.7173 |
| CIR    | 3.9679  | 44.7676 | 58.1291 |
| ENG    | 14.8971 | 2.8203  | 30.5980 |
| CRN    | 19.6775 | 22.2255 | 24.7155 |
| MIC    | 6.0144  | 18.3612 | 15.8782 |
| TAB    | 17.0918 | 9.6930  | 14.3185 |
| HAB    | 8.0665  | 11.2287 | 13.7706 |
| ROM    | 6.2730  | 8.6584  | 9.5554  |
| SWA    | 5.8710  | 6.4864  | 7.2174  |
| M19    | 5.8128  | 5.7054  | 5.9092  |
| ELE    | 2.6230  | 3.1565  | 3.5680  |
| M14    | 2.5584  | 2.6039  | 2.6134  |

Tabla 4.9: Cociente de torcedura ( $\tau$ )

| Región | 21       | 41       | 81       |
|--------|----------|----------|----------|
| ROM    | Inf      | Inf      | Inf      |
| ENG    | 82.7752  | 417.1169 | 794.0358 |
| HAB    | 57.3744  | 135.8933 | 250.3783 |
| TAB    | 178.3698 | 137.6327 | 208.7286 |
| MIC    | 54.9244  | 45.9191  | 205.551  |
| CIR    | 224.043  | 115.7158 | 91.872   |
| SWA    | 17.626   | 14.053   | 24.0078  |
| ELE    | 9.7003   | 14.6935  | 23.3349  |
| M19    | 17.2617  | 16.9582  | 22.9717  |
| M14    | 3.7167   | 3.9582   | 5.2144   |
| EQL    | 1.9526   | 2.2725   | 3.9248   |
| CRN    | 2.3516   | 1.637    | 1.4216   |

Tabla 4.10: Cociente de irregularidad ( $\gamma$ )

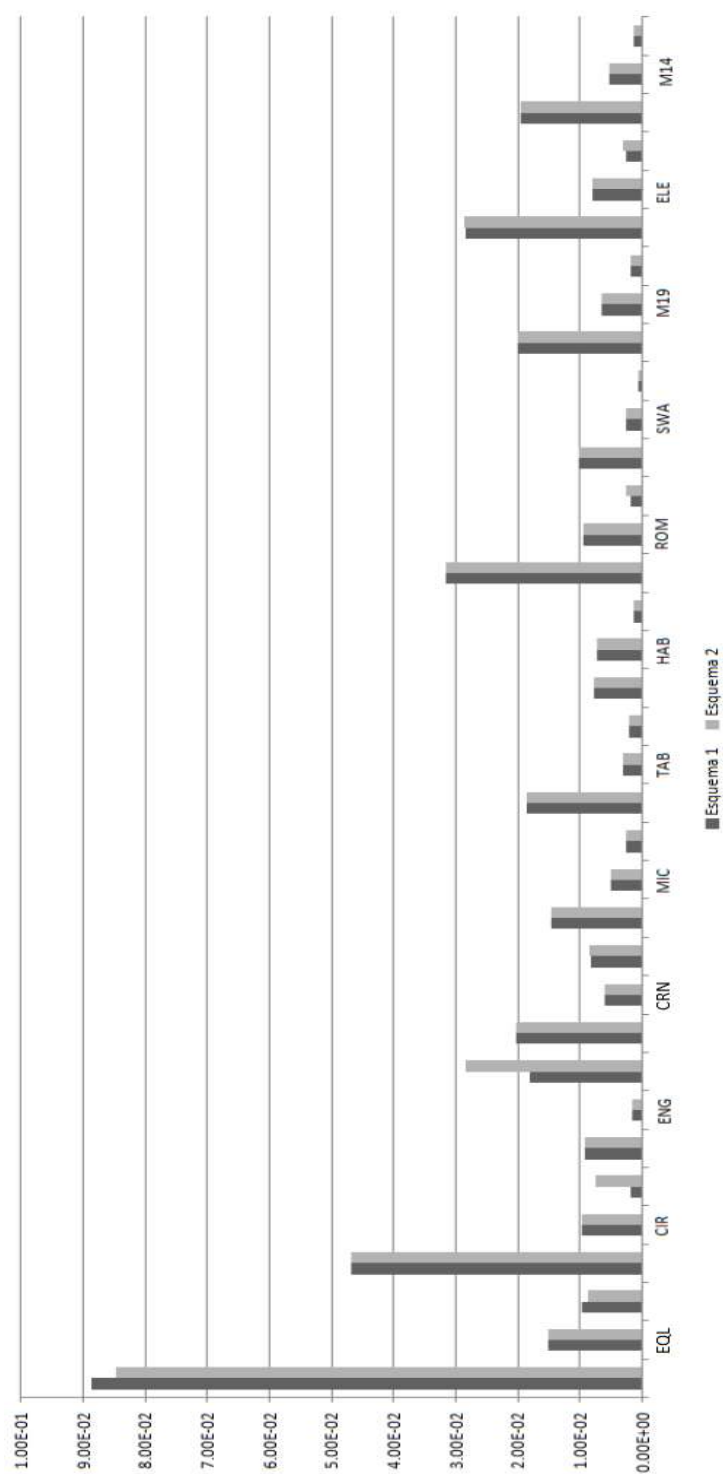


Figura 4.16: Errores obtenidos para el problema 1 con los dos nuevos esquemas para las regiones ordenadas de acuerdo a su coeficiente de torcedura ( $\tau$ ) para mallados de 21 (25), 41 y 81 nodos.

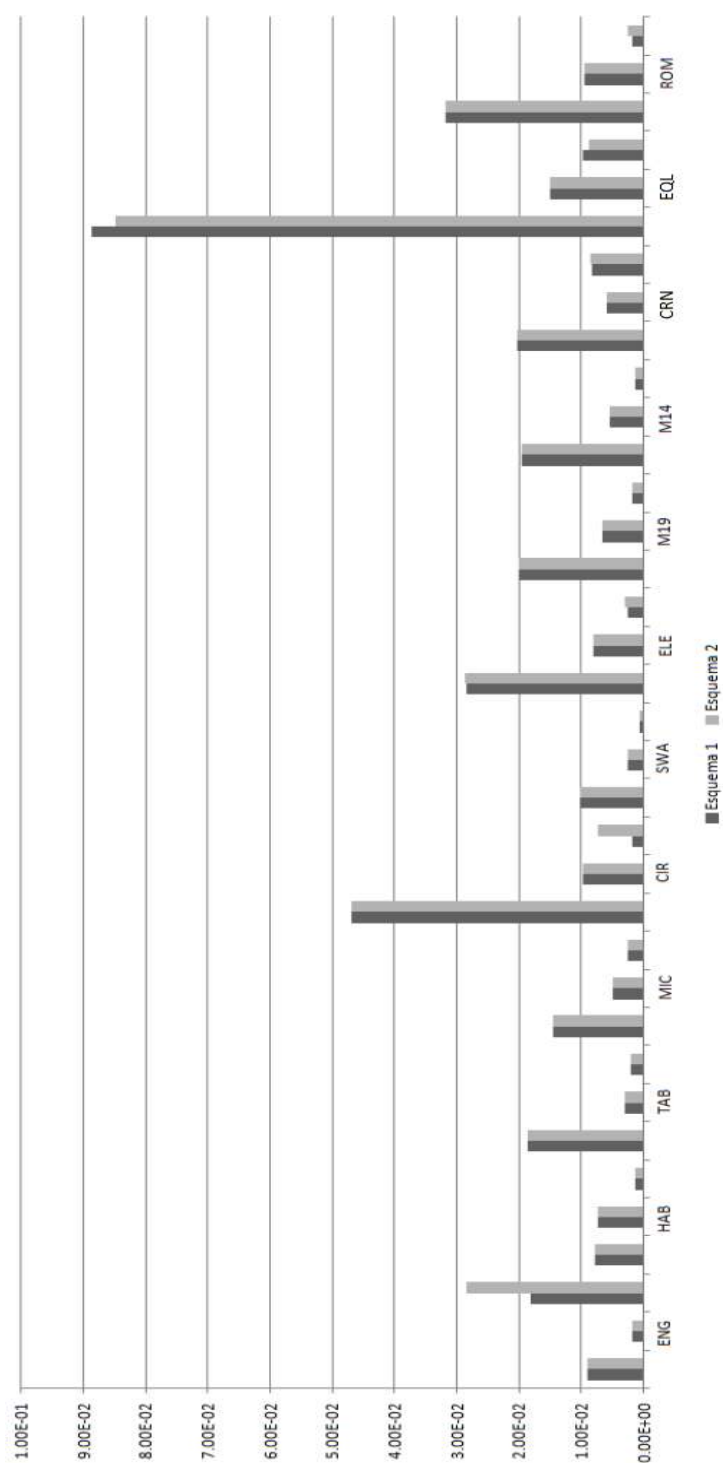


Figura 4.17: Errores obtenidos para el problema 1 con los dos nuevos esquemas para las regiones ordenadas de acuerdo a su coeficiente de irregularidad ( $\gamma$ ) para mallados de 21 (25), 41 y 81 nodos.

Las irregularidades de los mallados de las regiones EQL, CRN, ROM y ELE se pueden ver en las tablas 4.9 y 4.10, de aquí que el coeficiente de torcedura de la región ROM sea infinito, pues dado que su mallado posee triángulos degenerados el área mínima es cero. En el caso de la región ELE se hizo una modificación en el mallado que permitió eliminar las celdas degeneradas y como consecuencia se disminuyó el coeficiente de irregularidad. Se tomó el valor absoluto de las áreas de las regiones EQL y CRN para poder anexarlas en la tabla, dado que el mal condicionamiento de la frontera generaba áreas negativas.

Puesto que los errores de no convexidad en las celdas y degeneración de los triángulos fueron ocasionados por una mala definición en la frontera y podrían omitirse al definir las «esquinas» de forma conveniente, en las gráficas (4.16) y (4.17) se graficaron los resultados omitiendo las cuatro celdas de las esquinas de cada uno de los mallados. Es por esto que las regiones ELE y ROM muestran poca irregularidad en las gráficas.

## Capítulo 5

# Una Aplicación a la Mecánica de Fluidos Computacional

### 5.1. Ejemplo de aplicación del esquema

Una vez que hemos probado que el esquema que proponemos es consistente y nos da resultados aceptables, procederemos a resolver una versión de un ejemplo de la literatura [13] que se aplicó en una región sencilla y que gracias al método descrito en este trabajo se puede aplicar en regiones más complejas. Dado que los problemas para los que probamos el esquema se tratan de resolver para la ecuación de Poisson entonces veremos una aplicación de problemas que involucren dicha ecuación, en particular, veremos el caso de un fluido viajando a través de un canal desde el punto de vista lateral.

### 5.2. Teoría de fluidos

La mecánica de fluidos se ocupa del estudio de los fluidos en movimiento o en reposo, tanto los líquidos como los gases son considerados fluidos. Por ser una rama de la mecánica dispone de un conjunto de leyes de conservación bien documentadas y es posible realizar un análisis riguroso.

Uno de los principales problemas al realizar un análisis de fluidos es la geometría de la región a estudiarse, dado que la estructura de la teoría general casi no permite abordar configuraciones geométricas arbitrarias. Este problema puede ser atacado desde el punto de vista de los métodos numéricos y poder utilizar geometrías arbitrarias, como lo haremos en este trabajo.

El segundo problema corresponde a los efectos de la viscosidad, ya que aumenta la dificultad de las ecuaciones básicas y además cuando las velocidades no son muy pequeñas los fluidos viscosos presentan el fenómeno de turbulencia, para el cual no hay una teoría refinada en la cual basarse para hacer estudios.

Cuando analizamos el movimiento de los fluidos podemos seguir dos caminos distintos, buscar una estimación de los efectos globales o analizar punto a punto los detalles del campo fluido analizando una región infinitesimal del flujo. En este capítulo se verá los fluidos por medio de un estudio a pequeña escala. De esta forma lograremos obtener las ecuaciones diferenciales básicas del movimiento de un fluido y las condiciones de contorno adecuadas.

En su forma más básica, estas ecuaciones diferenciales del movimiento son bastante difíciles de resolver y se conoce muy poco sobre sus propiedades matemáticas generales, sin embargo, haciendo algunas hipótesis simplificadoras se puede encontrar una gran cantidad de soluciones lo suficientemente útiles como para ser aplicables. Suponemos entonces que nuestro problema trata con un flujo que es estacionario e incompresible. Así es como a pesar de que las ecuaciones poseen una gran dificultad podemos resolverlas por medio de un análisis numérico como el que hemos presentado.

### 5.2.1. Campo de aceleraciones en un fluido

La forma vectorial cartesiana de un campo de velocidades en función de la posición y el tiempo tiene la forma

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \hat{i}u(x, y, z, t) + \hat{j}v(x, y, z, t) + \hat{k}w(x, y, z, t), \quad (5.1)$$

esta es una ecuación importante, ya que la velocidad es la variable más importante de la mecánica de fluidos. Conocer el campo de velocidades es comúnmente equivalente a resolver el problema. La aceleración también es fundamental en la mecánica de fluidos, puesto que aparece al aplicar la segunda ley de Newton a un sistema fluido infinitesimal, por lo que necesitamos calcular la derivada total del vector 5.1 con respecto al tiempo

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \hat{i}\frac{du}{dt} + \hat{j}\frac{dv}{dt} + \hat{k}\frac{dw}{dt}. \quad (5.2)$$

Dado que cada una de las componentes escalares de  $\mathbf{V}$  es función de otras cuatro variables ( $x, y, z, t$ ) podemos utilizar la regla de la cadena para obtener la derivada temporal de cada escalar y si sustituimos la definición de velocidad local y sumamos los términos obtenidos, resulta

$$\begin{aligned}
\frac{du(x, y, z, t)}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \\
\frac{dv(x, y, z, t)}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} \\
\frac{dw(x, y, z, t)}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial w}{\partial t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \\
\frac{dv}{dt} &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \\
\frac{dw}{dt} &= u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \left( u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + z \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

El término  $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$  se denomina *aceleración local* y se anula cuando el flujo es estacionario, es decir, independiente del tiempo. Los términos entre paréntesis se llaman *aceleración convectiva*, esta aparece cuando el fluido fluye a través de regiones donde la velocidad varía, como cuando hay un cambio en la geometría.

### 5.2.2. Conservación de la masa y cantidad de movimiento

Todas las ecuaciones diferenciales básicas pueden deducirse considerando un volumen de control elemental, que en nuestro caso será un pequeño cubo de dimensiones  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$ . El flujo a través de cada cara del elemento es aproximadamente unidimensional y la relación de conservación de la masa es

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{sal} - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{ent} = 0, \tag{5.4}$$

donde, dado que el elemento es tan pequeño (fig.5.1), la integral de volumen se reduce al término diferencial, y si introducimos los términos de flujo másico a lo largo de las seis caras y quitamos la diferencial del volumen nos queda una ecuación diferencial pura que relaciona las derivadas parciales de la densidad y la velocidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (5.5)$$

A la ecuación 5.5 a menudo se le denomina como *ecuación de continuidad*, dado que la única suposición que requiere para cumplirse es la de la continuidad de las funciones que dan la densidad y la velocidad, no toma en cuenta si el flujo es estacionario o no, si posee viscosidad o no es viscoso ni si es compresible o incompresible. Sin embargo, la ecuación no admite la presencia de singularidades como fuentes o sumideros dentro del elemento infinitesimal.

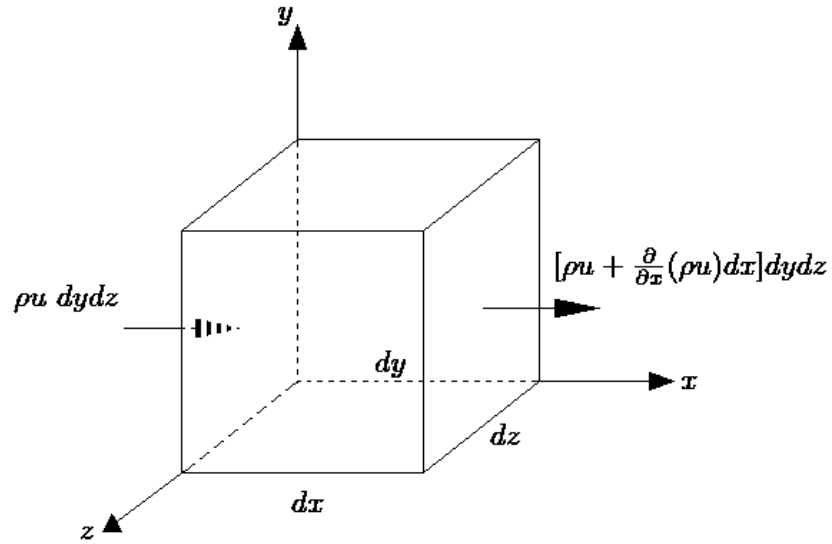


Figura 5.1: Representación gráfica del volumen de control que se define para poder describir la ecuación 5.5 en su forma diferencial.

Hay que mencionar que la ecuación de continuidad es indispensable para todo análisis racional de la estructura de un flujo ya que siempre debe de satisfacerse, de lo contrario, si nuestra solución a las ecuaciones de conservación de la energía o de movimiento no satisface la ecuación de continuidad un análisis crítico nos demostrará que la solución obtenida no nos resultará útil.

Ahora veamos la ecuación de cantidad de movimiento. Aplicando la segunda ley de Newton, la ecuación en su forma diferencial se puede escribir

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \mathbf{V} dV + \sum_i (\dot{m}_i V_i)_{sal} - \sum_i (\dot{m}_i V_i)_{ent}, \quad (5.6)$$

donde de nueva cuenta usando el elemento mostrado en la figura 5.1, la integral de volumen se reduce y si introducimos los términos del flujo de cantidad de movimiento de entrada y salida se obtiene

$$\sum \mathbf{F} = dxdydz \left[ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \mathbf{V}) \right]. \quad (5.7)$$

Tomando en cuenta los términos entre corchetes podemos simplificar la forma en que se escriben si los reacomodamos de forma que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \mathbf{V}) \\ &= V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] + \rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right), \quad (5.8) \end{aligned}$$

el primer sumando es idénticamente nulo de acuerdo con la ecuación de continuidad (5.5) y el segundo sumando es la aceleración total de la partícula que ocupa en ese instante el volumen de control de acuerdo a la ecuación (5.3). Por lo tanto podemos reescribir (5.7) como

$$\sum \mathbf{F} = \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dxdydz. \quad (5.9)$$

Esta ecuación indica que la fuerza neta sobre el volumen de control debe ser infinitesimal y proporcional al volumen elemental. Estas fuerzas pueden ser de dos tipos: fuerzas *volumétricas* y fuerzas *superficiales*. Las fuerzas volumétricas se deben a campos externos que actúan sobre toda la masa del volumen elemental. Las únicas fuerzas volumétricas que consideraremos en este trabajo son las gravitatorias. La fuerza de gravedad sobre una masa diferencial dentro del volumen de control es

$$d\mathbf{F}_{grav} = \rho \mathbf{g} dxdydz \quad (5.10)$$

donde en general  $\mathbf{g}$  puede tener una orientación arbitraria con respecto al sistema de coordenadas. Las fuerzas de superficie se deben a los esfuerzos en las caras de la superficie de control.

## 5.3. Simplificación de las ecuaciones

### 5.3.1. Flujo incompresible

Un caso especial que da lugar a una gran simplificación es el flujo incompresible, donde las variaciones de densidad son despreciables, dado que  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$ , independientemente de que el flujo sea estacionario o no, podemos sacar la densidad de la divergencia en (5.3). El resultado tiene entonces la forma del operador de Laplace, que es un caso particular de la ecuación de Poisson.

De esta manera se obtienen ecuaciones diferenciales lineales, para las cuales podemos aplicar nuestro esquema y encontrar soluciones satisfactorias. Hacer esta simplificación ayuda en gran medida dado que la mayoría de los flujos prácticos en la ingeniería son aproximadamente incompresibles.

### 5.3.2. Flujos irrotacionales no viscosos

Cuando el flujo es a la vez irrotacional y no viscoso, ocurren varias cosas interesantes. En primer lugar, la ecuación de la cantidad de movimiento (5.9) se reduce a la ecuación de Euler:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p. \quad (5.11)$$

En segundo lugar, recordemos que el término de la aceleración se puede simplificar considerablemente, de la sección 5.2.1 la aceleración tiene dos términos, utilizando una identidad vectorial podemos reescribir (5.3) como

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \equiv \nabla \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + \zeta \times \mathbf{V} \quad (5.12)$$

donde  $\zeta$  es la vorticidad del fluido. Si combinamos (5.11) y (5.12), haciendo un poco de álgebra y multiplicando por un vector de desplazamiento arbitrario  $d\mathbf{r}$ , obtenemos

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + \zeta \times \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g} \right] \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (5.13)$$

El tercer sumando en (5.13) será idénticamente 0 bajo alguna de las siguientes circunstancias:

- $\mathbf{V}$  es cero; caso trivial, no hay flujo.
- $\zeta$  es cero; flujo irrotacional.
- $d\mathbf{r}$  es perpendicular a  $\zeta \times \mathbf{V}$ .
- $d\mathbf{r}$  es paralelo a  $\mathbf{V}$ .

Tomemos la segunda condición como cierta. La irrotacionalidad da lugar a una función escalar  $\phi$  similar y complementaria a la función de corriente. Un teorema de análisis vectorial [14] muestra que un vector con rotacional nulo debe ser el gradiente de una función escalar. Entonces tenemos que  $\mathbf{V} = \nabla \phi$  donde  $\phi = \phi(x, y, z, t)$  recibe el nombre de *potencial de velocidades*. Si conocemos  $\phi$  se pueden determinar de forma inmediata las componentes de la velocidad, ya que

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Esto reduce el problema de encontrar las tres incógnitas  $u$ ,  $v$  y  $w$  a encontrar un único potencial desconocido  $\phi$ . Si  $\phi$  existe, la ecuación (5.13) se puede simplificar. Si integramos a lo largo de una línea de corriente del flujo incompresible y no viscoso y sustituimos  $\mathbf{V} = \nabla\phi$  tenemos

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + gz = C \quad (5.14)$$

que es la ecuación de Bernoulli para movimiento irrotacional no estacionario.

Haciendo un repaso, tenemos que cuando despreciamos los efectos viscosos y el flujo es incompresible, el movimiento es irrotacional,  $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ , y existe un potencial de velocidades  $\phi$  tal que  $\mathbf{V} = \nabla\phi$ . Entonces la ecuación de continuidad (5.5) se convierte en la de Laplace

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.15)$$

y la de cantidad de movimiento (5.6) en la de Bernoulli (5.14), donde las condiciones de contorno son conocidas, tenemos la velocidad de la corriente de agua en la superficie, las velocidades de entrada y de salida de la región y no hay velocidad normal a las superficies sólidas fijas. Podemos proceder entonces al análisis numérico de este problema.

## 5.4. Cálculo del potencial

Comúnmente para encontrar la solución del flujo de fluidos a través de una región se utiliza el método clásico de superposición, pero cuando el flujo potencial presenta geometrías complicadas o condiciones de corriente inusuales se debe proceder de otra manera. Como se vio en este trabajo, el esquema que se presenta obtiene resultados aceptables en regiones de geometrías bastante arbitrarias, por lo que lo emplearemos para resolver los problemas de esta sección. En los tres casos se encontrará la velocidad del fluido en la región, que representa la sección lateral de un canal con diferentes geometrías, dadas las condiciones de frontera adecuadas.

Recordemos que en nuestro análisis hecho en el capítulo 2, tomábamos las condiciones de frontera de Dirichlet, sin embargo, para poder resolver el problema del potencial de flujo necesitamos tomar en cuenta condiciones de Robin, dado que la información que tenemos es el vector de velocidad (condición de Neumann) en algunas fronteras y la posición (condición de Dirichlet) en otras. Si las condiciones fueran de Dirichlet en este problema, no habría flujo y tendríamos el caso de hidrostática.

Dado que las condiciones de Robin se pueden definir como un operador lineal diferencial, un esquema análogo al esquema 1 se puede aplicar a los nodos de la frontera similarmente a como se aplicó a los nodos internos del mallado.

Por definición, cada nodo de la frontera  $p_0 \in \partial\Omega$  de un mallado  $G$  tiene cinco nodos vecinos (sin tomar en cuenta el caso de los nodos en las esquinas); lo que tenemos que hacer es considerar la condición de frontera

$$\left[ au + b \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\partial\Omega} = g$$

en donde  $n$  es un vector normal a la superficie (fig.5.2), podemos descomponerlo de forma que

$$\left[ au + b_x \frac{\partial u}{\partial x} + b_y \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{\partial\Omega} = g \quad (5.16)$$

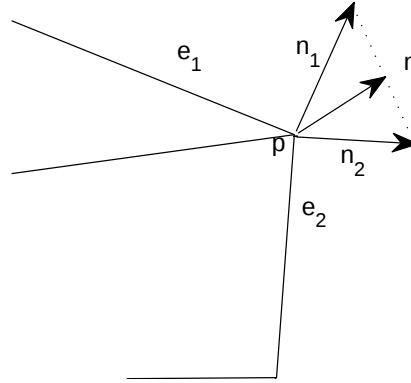


Figura 5.2: Vector unitario  $n$  en el nodo  $p$  de la frontera de  $\Omega$ .

y lo que se hace es aplicar una aproximación en cada nodo. Se aplica un esquema de seis puntos similar al de nueve puntos que es el esquema 1. Entonces la adaptación del esquema se traduce en obtener los coeficientes  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$  que se requieren para aproximar (5.16) y se dan como la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_5 \\ 0 & \Delta y_1 & \dots & \Delta y_5 \\ 0 & (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_5)^2 \\ 0 & \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_5 \Delta y_5 \\ 0 & (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_5)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(p_0) \\ b_x(p_0) \\ b_y(p_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Una vez que tenemos este sistema, podemos darnos cuenta de que es similar al visto en (3.7), entonces procedemos a encontrar la solución de manera similar. La diferencia entre el esquema 1 y el esquema que utiliza condiciones de Robin es que en vez de tomar el valor de la frontera como un valor dado se tiene que resolver el sistema (5.17), lo que conlleva un poco más de cálculos, pero aproximadamente de manera satisfactoria las condiciones que se presentan en estos problemas de mecánica de fluidos.

Ilustremos esto con unos ejemplos, sean las regiones  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  (figs.5.3-5.5) secciones laterales de caudales por donde atraviesa un fluido, tenemos condiciones de Neumann en los extremos que representan la entrada y salida de flujo del caudal y condiciones de Dirichlet en la parte superior e inferior.

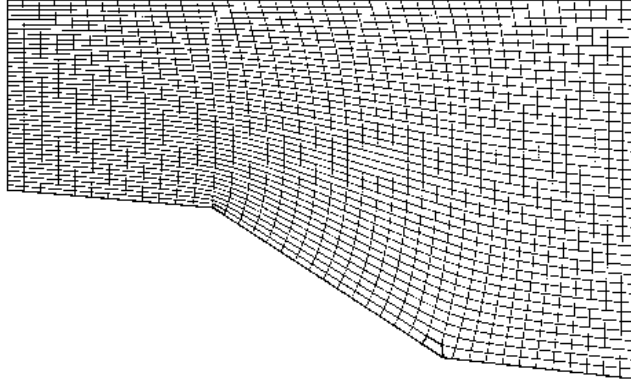


Figura 5.3: Región  $\Omega_1$ . Mallado de 41x41 nodos.

Ahora procederemos a calcular el potencial de flujo en la región de la figura 5.3. Supongamos que en los nodos interiores de la región se aplica el esquema 1 y en la frontera el esquema modificado para las condiciones de Neumann. Por conveniencia se tomará la función de corriente igual a cero en la pared inferior, de esta manera la función de corriente es igual a la velocidad de entrada en la pared superior. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{yy} &= 0, & \phi_{ent} &= 10m/s, & \phi_{sal} &= 5m/s. \\ \mathcal{L}_{ent} &= 30cm, & \mathcal{L}_{sal} &= 60cm \end{aligned}$$

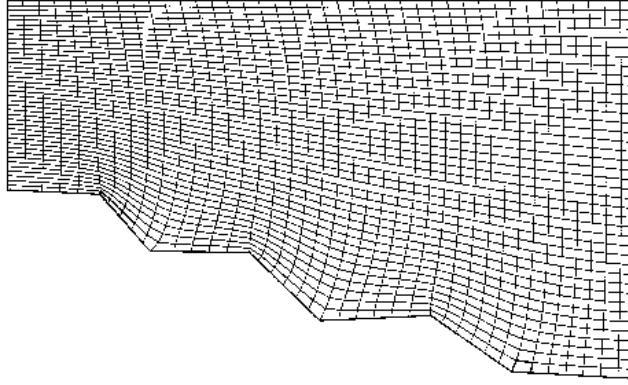


Figura 5.4: Región  $\Omega_2$ . Mallado de 41x41 nodos.

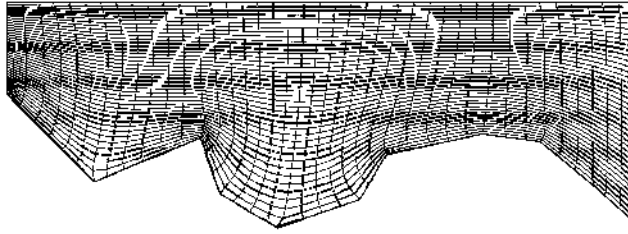


Figura 5.5: Región  $\Omega_3$ . Mallado de 41x41 nodos.

Variando el piso del canal, obtenemos la figura 5.4 que tiene una geometría un poco más complicada. Para calcular el potencial se tomará nuevamente la función de corriente igual a cero en la pared inferior, disminuyendo la velocidad mientras mantenemos el mismo tamaño del canal de entrada y salida tenemos

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad \phi_{ent} = 5m/s, \quad \phi_{sal} = 2,5m/s.$$

$$\mathcal{L}_{ent} = 30cm, \quad \mathcal{L}_{sal} = 60cm$$

Veamos que pasa ahora si calculamos el potencial de flujo en la región de la figura 5.5, una región altamente irregular. Igual que en los casos anteriores la función de corriente es cero en la parte inferior e igual a la velocidad de entrada en la parte superior. Variando la velocidad de entrada y salida y el tamaño del canal tenemos

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad \phi_{ent} = 3m/s, \quad \phi_{sal} = 1,2m/s.$$

$$\mathcal{L}_{ent} = 14cm, \quad \mathcal{L}_{sal} = 35cm$$

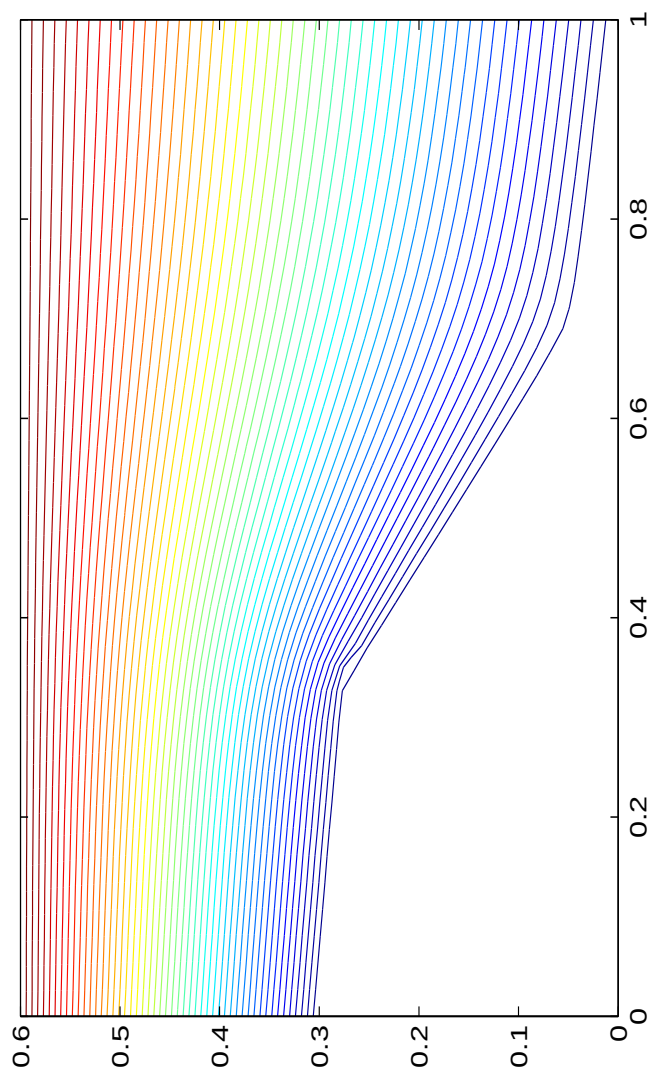


Figura 5.6: Modelo numérico del flujo de potencial para la región  $\Omega_1$ .

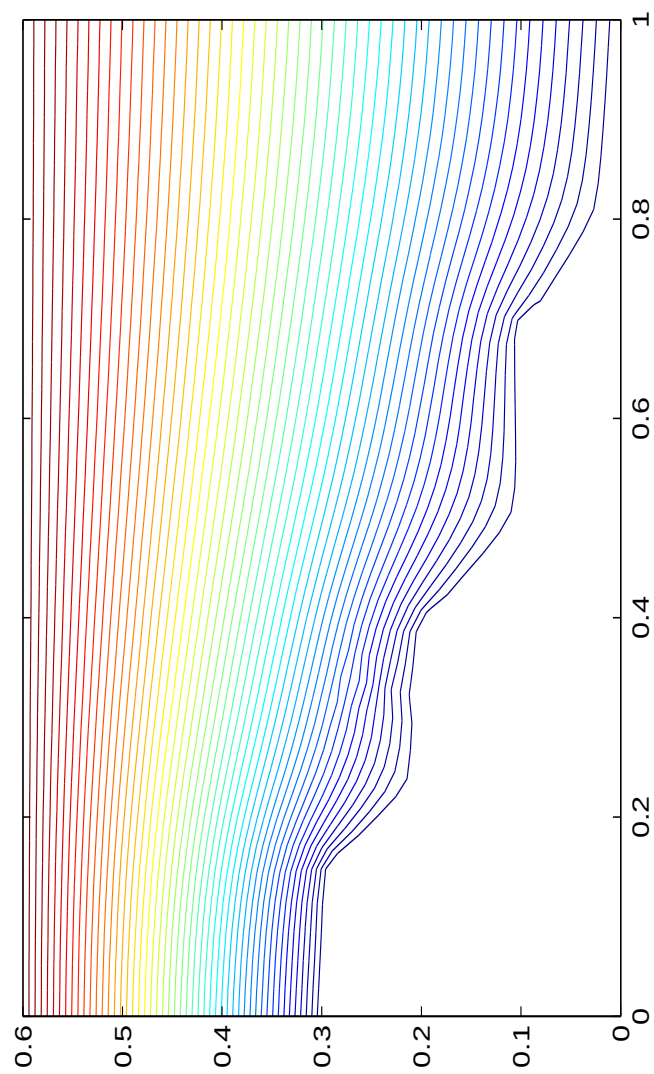


Figura 5.7: Modelo numérico del flujo de potencial para la región  $\Omega_2$ .

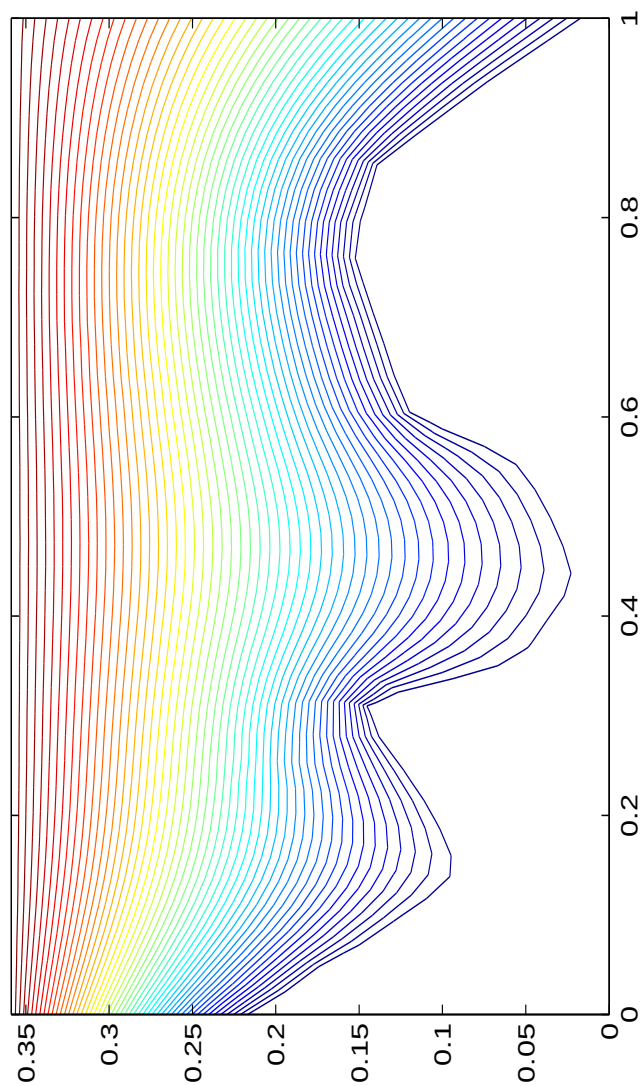


Figura 5.8: Modelo numérico del flujo de potencial para la región  $\Omega_3$ .

El flujo no es realmente unidimensional en el conducto de entrada. El fluido se acelera en la parte inferior, que contiene la sección divergente, y se desacelera en la parte superior plana que representa la superficie. Este análisis es para la sección lateral de un ducto que se supone uniforme a lo largo del eje  $z$  (perpendicular a la hoja), cabe mencionar que un análisis tridimensional es posible.

En las figuras 5.6-5.8 podemos apreciar cómo se distribuye el potencial de velocidades en cada una de las regiones. En los tres casos se cumplen las ecuaciones de continuidad y conservación de la masa. Como podemos observar, el esquema definido en este trabajo tiene aplicaciones que dan buenos resultados para problemas de mecánica de fluidos.

## Capítulo 6

# Conclusiones

Como puede verse, ambos esquemas propuestos producen unos resultados que son aceptablemente satisfactorios, incluso a pesar de que la precisión sea un poco menor que con otros métodos existentes. Una de las ventajas del primer esquema es que se puede usar con una gran facilidad, dado que los conocimientos que se necesitan para entenderlo y desarrollarlo pueden aprenderse en cursos básicos de cálculo de varias variables y álgebra lineal. Como se explica en esta tesis las diferencias finitas se basan en el uso del teorema de Taylor para generar un esquema que aproxime la solución de la función y nos dé un sistema de ecuaciones que, en este caso, se resuelve por medio de la factorización de Cholesky.

Con el segundo esquema se reduce la dificultad de hacer la factorización de Cholesky y, a pesar de que se reduce ligeramente la precisión del cálculo de la solución se amplía el campo de aplicación del esquema. La colinealidad de los nodos en el mallado de las regiones trae como consecuencia que la matriz asociada al problema sea singular o mal condicionada lo que evita que pueda aplicarse el primer esquema. Este problema puede evitarse en varios casos usando el segundo esquema, que brinda un poco más de estabilidad en regiones regulares y puede obtener resultados confiables en regiones altamente irregulares.

En cualquiera de los dos casos uno de los problemas a tener en cuenta no es tanto en el diseo del esquema sino más bien, en el área donde va a aplicarse. Si el mallado que generamos de nuestra región resulta con celdas definidas de manera muy elongada como en el caso de las regiones EQL y CIR los resultados tienden a ser menos precisos. Otro aspecto a considerar son las condiciones de convexidad de la frontera, si ésta presenta fuertes condiciones de no convexidad las aproximaciones a la solución podrían estar lejos de ser las correctas; sin embargo, a pesar de que en las regiones EQL y CRN se tienen celdas no convexas, los resultados obtenidos se encuentran dentro del orden esperado.

Lo anterior nos demuestra que determinar cómo se va a discretizar el dominio es una parte fundamental del problema. Dependiendo de cómo esté estructurada y definida la malla nuestro esquema podría funcionar bien en ciertas regiones y obtener grandes errores en otras. En general podemos ver que los esquemas propuestos en este trabajo se aplican de manera aceptable en diversos tipos de regiones produciendo resultados cercanos a los esperados.

Una cosa importante que hay que resaltar es la discretización del operador, ya que es parte integral de la formulación del nuevo esquema. El operador se sustituye por una función discreta de forma que para obtener los coeficientes se resuelve un sistema de ecuaciones. Los resultados obtenidos con esta discretización se compararon con métodos de orden superior y mayor complejidad obteniendo resultados similares en cierto sentido, por lo que estos esquemas representan una alternativa confiable de bajo nivel, fácil de entender y aplicar y que produce resultados aceptables.

Del capítulo 5 se ve que los esquemas aquí presentados tienen aplicaciones significativas en ámbitos científicos que pueden relacionarse con la industria y las ingenierías, por lo que la gama de aplicación de dichos esquemas es amplia y dado que producen resultados confiables, resultan muy útiles. Además con ligeras modificaciones y adaptaciones, el esquema puede ser aplicado a problemas con un nivel de complejidad mayor, como es el caso de problemas con condiciones de Neumann en la frontera.

# Bibliografía

- [1] Randall J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, Steady-State and Time-Dependent Problems*. Año de publicación: Julio, 2007
- [2] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. Second Edition. Año de publicación: 1976
- [3] John Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations* Second Edition. Año de publicación: 2004
- [4] J.W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Año de publicación: 1995
- [5] UNAMALLA Versión 4.0. *An automatic package for numerical grid generation*. Web site: [http://www.mathmoo.unam.mx/unamalla/home\\_e.html](http://www.mathmoo.unam.mx/unamalla/home_e.html). Última versión publicada en Junio, 2011
- [6] S.K. Godunov. *On the Ideas Underlying Grid Generation Methods*. Año de publicación: Junio, 2002
- [7] Patrick Knupp, Stanly Steinberg. *Fundamentals of Grid Generation*. Año de publicación: 1993
- [8] J.G. Tinoco. *Funcionales Discretos para la Generación de Mallas Suaves y Convexas sobre Regiones Planas Irregulares*. Tesis Doctoral.CIMAT.,Guanajuato, Gto., México. 1997.
- [9] Barrera, P., Cortés J. J., Domínguez-Mota, F.J. y González, F.G., Flores G., Tinoco-Ruiz J. G. *Smoothness and convex area functionals - revisited* . Revisited 40, 2002.
- [10] Fernández V. P. M., Tinoco-Ruiz J. G., Domínguez-Mota F. J., Tinoco G. G. Un esquema explícito de diferencias finitas en 9 puntos para mallas estructuradas en regiones irregulares del plano..
- [11] Tinoco-Ruiz J. G., Domínguez-Mota F. J., Tinoco G. G., Mendoza A. S., Equihua T. M. E. Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas en el Plano Usando un Esquema General de Diferencias Finitas Consistente.

- 
- [12] Mikhail Shashkov. *Conservative Finite-Difference Methods on General Grids*. CRC Press. inc, 1996.
  - [13] Frank M. White. *Mecánica de Fluidos*. Quinta Edición. Año de publicación: 2004
  - [14] George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists*. Año de publicación: 1970
  - [15] A.A. Samarskii, Petr N. Vabishchevich, Lubin G. Vulkov. *Finite Difference Methods: Theory and Applications*. Año de publicación: 1999
  - [16] MATLAB<sup>©</sup> Versión R2011b. *The language of technical computing*. Web site: <http://www.mathworks.com/products/matlab/>

# Apéndice A

## Programas

### A.1. Descripción de los programas

#### A.1.1. dirich4.m

El siguiente programa fue el usado para producir los resultados mostrados en el capítulo 4, fue diseñado con ayuda del lenguaje de programación MATLAB<sup>®</sup>[16] y está pensado para correr sobre la versión R2011b. La finalidad del programa es encontrar una aproximación a la solución de problemas del estilo de la ecuación de Poisson dadas las funciones necesarias.

```
function [U]=dirich4(x,y,f,g,A,B,C,D,E,F)
% x representa la matriz de distribucion para la posicion de
% los nodos en el eje X.
% y representa la matriz de distribucion para la posicion de
% los nodos en el eje Y.
% f es la funcion del lado derecho de la igualdad en la ecuacion
% de Poisson, fisicamente representaria si hay fuentes o pozos de
% potencial en la region.
% g es la funcion que sera evaluada para obtener las condiciones
% de frontera. En este programa se supone que la funcion es la
% misma sobre toda la frontera.
% Los coeficientes A,B,C,D,E y F son los coeficientes
% involucrados en la forma canonica de la ecuacion de modo que
%  $A_{xx} + B_{xy} + C_{yy} + D_x + E_y + F = f$ .

[m,n]=size(x);K=sparse((m-2)*(n-2),(m-2)*(n-2));
RHS=sparse((m-2)*(n-2),1);
```

```

% A continuacion se procede a llenar los valores de la
%matriz que corresponden a los nodos que no involucran
%valores en la frontera
for i=3:(m-2)
    for j=3:(n-2)
        u=x((i-1):(i+1),(j-1):(j+1));v=y((i-1):(i+1),(j-1):(j+1));
        xc=u(2,2);yc=v(2,2);
        I=setdiff(1:9,5);
        dx=u(I)-u(5);dy=v(I)-v(5);
        M=[dx;dy;dx.*dx;dx.*dy;dy.*dy;dx.^3;dx.^2.*dy;...
            dx.*dy.^2;dy.^3];
        Gamma=cholesky(M'*M,M'*[D(xc,yc) E(xc,yc) 2*A(xc,yc)...
            B(xc,yc) 2*C(xc,yc) 0 0 0 0]');
        Gamma=[F(xc,yc)-sum(Gamma);Gamma];
        p=(m-2)*(j-2)+(i-1);
        K(p,(p-1):(p+1))=[Gamma(5) Gamma(1) Gamma(6)];
        K(p,[(p-1):(p+1)]-(m-2))=[Gamma(2) Gamma(3) Gamma(4)];
        K(p,[(p-1):(p+1)]+(m-2))=[Gamma(7) Gamma(8) Gamma(9)];
        RHS(p)=RHS(p)+f([x(i,j),y(i,j)]);
        Gamma=[];
    end
end
Gamma=[];

% En esta parte del codigo se procede a llenar las
%entradas de la matriz que involucran las fronteras
%verticales
for i=2:(m-1)
    p=(i-1);
    u=x((i-1):(i+1),1:3);v=y((i-1):(i+1),1:3);
    I=setdiff(1:9,5);
    dx=u(I)-u(5);dy=v(I)-v(5);
    M=[dx;dy;dx.*dx;dx.*dy;dy.*dy;dx.^3;dx.^2.*dy;...
        dx.*dy.^2;dy.^3];
    Gamma=cholesky(M'*M,M'*[D(xc,yc) E(xc,yc) 2*A(xc,yc)...
        B(xc,yc) 2*C(xc,yc) 0 0 0 0]');
    Gamma=[F(xc,yc)-sum(Gamma);Gamma];
    RHS(p)=RHS(p)-Gamma(2)*g([x(i-1,1),y(i-1,1)])...
        -Gamma(3)*g([x(i,1),y(i,1)])-Gamma(4)*...
        g([x(i+1,1),y(i+1,1)]);
    RHS(p)=RHS(p)+f([x(i,j),y(i,j)]);

    if (i==2),
        RHS(p)=RHS(p)-Gamma(5)*g([x(i-1,2),y(i-1,2)])...
            -Gamma(7)*g([x(i-1,3),y(i-1,3)]);
        K(p,(p):(p+1))=[Gamma(1) Gamma(6)];
    end
end

```

```

    K(p, [(p):(p+1)]+(m-2))=[Gamma(8) Gamma(9)];
elseif (i==(m-1)),
    RHS(p)=RHS(p)-Gamma(6)*g([x(i+1,2),y(i+1,2)])...
        -Gamma(9)*g([x(i+1,3),y(i+1,3)]);
    K(p, (p-1):(p))=[Gamma(5) Gamma(1)];
    K(p, [(p-1):(p)]+(m-2))=[Gamma(7) Gamma(8)];
else
    K(p, (p-1):(p+1))=[Gamma(5) Gamma(1) Gamma(6)];
    K(p, [(p-1):(p+1)]+(m-2))=[Gamma(7) Gamma(8) Gamma(9)];
end
Gamma=[];

p=(m-2)*((n-1)-2)+(i-1);
u=x((i-1):(i+1),(n-2):n);v=y((i-1):(i+1),(n-2):n);
I=setdiff(1:9,5);
dx=u(I)-u(5);dy=v(I)-v(5);
M=[dx;dy;dx.*dx;dx.*dy;dy.*dy;dx.^3;dx.^2.*dy;...
    dx.*dy.^2;dy.^3];
Gamma=cholesky(M'*M,M'*[D(xc,yc) E(xc,yc) 2*A(xc,yc)...
    B(xc,yc) 2*C(xc,yc) 0 0 0 0]');
Gamma=[F(xc,yc)-sum(Gamma);Gamma];
RHS(p)=RHS(p)-Gamma(7)*g([x(i-1,n),y(i-1,n)])...
    -Gamma(8)*g([x(i,n),y(i,n)])-Gamma(9)...
    *g([x(i+1,n),y(i+1,n)]);
RHS(p)=RHS(p)+f([x(i,j),y(i,j)]);
if (i==2),
    RHS(p)=RHS(p)-Gamma(5)*g([x(i-1,n-1),y(i-1,n-1)])...
        -Gamma(2)*g([x(i-1,n-2),y(i-1,n-2)]);
    K(p, (p):(p+1))=[Gamma(1) Gamma(6)];
    K(p, [(p):(p+1)]-(m-2))=[Gamma(3) Gamma(4)];
elseif (i==(m-1)),
    RHS(p)=RHS(p)-Gamma(6)*g([x(i+1,n-1),y(i+1,n-1)])...
        -Gamma(4)*g([x(i+1,n-2),y(i+1,n-2)]);
    K(p, (p-1):(p))=[Gamma(5) Gamma(1)];
    K(p, [(p-1):(p)]-(m-2))=[Gamma(2) Gamma(3)];
else
    K(p, (p-1):(p+1))=[Gamma(5) Gamma(1) Gamma(6)];
    K(p, [(p-1):(p+1)]-(m-2))=[Gamma(2) Gamma(3) Gamma(4)];
end
Gamma=[];
end

% En esta parte del codigo se procede a llenar las
%entradas de la matriz que involucran las fronteras
%horizontales

```

```

for j=3:(n-2)
    p=(m-2)*(j-2)+(2-1);
    u=x((1):(3),(j-1):(j+1));v=y((1):(3),(j-1):(j+1));
    I=setdiff(1:9,5);
    dx=u(I)-u(5);dy=v(I)-v(5);
    M=[dx;dy;dx.*dx;dx.*dy;dy.*dy;dx.^3;dx.^2.*dy;...
        dx.*dy.^2;dy.^3];
    Gamma=cholesky(M'*M,M'*[D(xc,yc) E(xc,yc) 2*A(xc,yc)...
        B(xc,yc) 2*C(xc,yc) 0 0 0 0]');
    Gamma=[F(xc,yc)-sum(Gamma);Gamma];
    RHS(p)=RHS(p)-Gamma(2)*g([x(1,j-1),y(1,j-1)])...
        -Gamma(5)*g([x(1,j),y(1,j)])-Gamma(7)...
        *g([x(1,j+1),y(1,j+1)]);
    RHS(p)=RHS(p)+f([x(i,j),y(i,j)]);
    K(p,(p):(p+1))=[Gamma(1) Gamma(6)];
    K(p,[p):(p+1)]+(m-2)=[Gamma(8) Gamma(9)];
    K(p,[p):(p+1)]-(m-2)=[Gamma(3) Gamma(4)];
    Gamma=[];

    p=(m-2)*(j-2)+((m-1)-1);
    u=x((m-2):(m),(j-1):(j+1));v=y((m-2):(m),(j-1):(j+1));
    I=setdiff(1:9,5);
    dx=u(I)-u(5);dy=v(I)-v(5);
    M=[dx;dy;dx.*dx;dx.*dy;dy.*dy;dx.^3;dx.^2.*dy;...
        dx.*dy.^2;dy.^3];
    Gamma=cholesky(M'*M,M'*[D(xc,yc) E(xc,yc) 2*A(xc,yc)...
        B(xc,yc) 2*C(xc,yc) 0 0 0 0]');
    Gamma=[F(xc,yc)-sum(Gamma);Gamma];
    RHS(p)=RHS(p)-Gamma(4)*g([x(m,j-1),y(m,j-1)])...
        -Gamma(6)*g([x(m,j),y(m,j)])-Gamma(9)...
        *g([x(m,j+1),y(m,j+1)]);
    RHS(p)=RHS(p)+f([x(i,j),y(i,j)]);
    K(p,(p-1):(p))=[Gamma(5) Gamma(1)];
    K(p,[p-1):(p)]+(m-2)=[Gamma(7) Gamma(8)];
    K(p,[p-1):(p)]-(m-2)=[Gamma(2) Gamma(3)];
    Gamma=[];
end

%Una vez que se tiene ensamblada la matriz que se usara
%se procede a encontrar la solucion.

U(:,1)=g([x(:,1) y(:,1)]);
U(:,n)=g([x(:,n) y(:,n)]);
U(1,:)=g([x(1,:) y(1,:)'])';
U(m,:)=g([x(m,:) y(m,:)'])';
U(2:(m-1),2:(n-1))=reshape(K\RHS,m-2,n-2);

```

El resultado de este programa es una matriz que representa la aproximación a la solución en cada uno de los puntos del dominio. Los dominios fueron diseñados con ayuda del software UNAMalla como se mencionó en la sección 3.2, con ayuda de una pequeña rutina se importó la ubicación de los puntos del mallado obtenido en un par de matrices que se pasan como datos de entrada para el programa `dirich4.m`.

### A.1.2. `cholesky.m`

El siguiente programa es una rutina diseñada en MATLAB cuyo fin es la de realizar la factorización de Cholesky de una forma directa.

```
function x=cholesky(A,b)
% A = Matriz a la que se le va a aplicar el algoritmo
% de Cholesky que representa el sistema.
% b = Vector del lado derecho de la ecuacin.
% x = Vector solucin del sistema de ecuaciones.
[m,n]=size(A);
L=zeros(m,n);
for j=1:n
    for i=j:m
        ac=0;
        if i==j
            for k=1:j-1
                ac=ac+(L(i,k)^2);
            end
            L(i,j)=sqrt(A(i,j)-ac);
        else
            for k=1:j-1
                ac=ac+(L(j,k)*L(i,k));
            end
            L(i,j)=(A(i,j)-ac)/L(j,j);
        end
    end
end

b=b(:);
y=zeros(m,1);
y(1)=b(1)/L(1,1);
for i=2:n
    ac=0;
    for j=1:i-1
        ac=ac+L(i,j)*y(j);
    end
    y(i)=(b(i)-ac)/L(i,i);
end
```

```

end
y(i)=(b(i)-ac)/L(i,i);
end

L=L';
x=zeros(m,1);
x(n)=y(n)/L(n,n);
for i=1:n-1
    ac=0;
    for j=0:i-1
        ac=ac+L(n-i,n-j)*x(n-j);
    end
    x(n-i)=(y(n-i)-ac)/L(n-i,n-i);
end

```

Los argumentos de entrada son el vector del lado derecho de la igualdad y la matriz a la que se le va a aplicar el algoritmo de Cholesky. El vector de salida es la solución al sistema de ecuaciones. Esta rutina se utiliza dentro del programa `dirich4.m` para encontrar la solución al problema de optimización para obtener los coeficientes  $\Gamma$ . Después de obtener los coeficientes y llenar la matriz, se busca una solución con funciones internas de MATLAB.

## A.2. Cómo usar los programas

Para dar un ejemplo de cómo se usa el programa `dirich4.m` usaremos el Problema 2 (Sección 4) para la malla de Michoacán (MIC fig.4.3).

### Problema 2

$$\nabla \cdot (Z \nabla u(x, y)) = f(x, y); \quad u|_{\partial\Omega} = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

donde

$$Z \equiv \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} = P^{-1} D P,$$

$$P = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{8}) & \sin(\frac{\pi}{8}) \\ -\sin(\frac{\pi}{8}) & \cos(\frac{\pi}{8}) \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 + 2x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 + 2y^2 \end{bmatrix}$$

*Solución Analítica:*  $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ .

Veamos la instrucción que inicia el programa para darnos una idea de los datos involucrados que debemos conocer,

$[U]=\text{dirich4}(x,y,f,g,A,B,C,D,E,F),$

por lo que tenemos diez datos de entrada, los primeros datos  $x$  y  $y$  deben ser dos matrices con las mismas dimensiones, en las cuales están guardados los valores de las posiciones de los nodos del mallado  $G$  de forma ordenada. Un mallado de  $n \times m$  nodos generará matrices  $x$ ,  $y$  de dimensión  $n \times m$ .

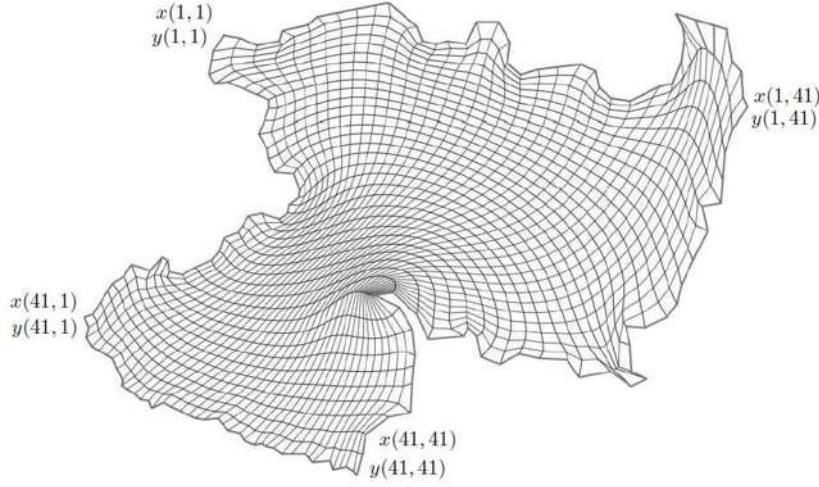


Figura A.1: Muestra del orden que llevan las matrices  $x$  y  $y$  en relación con el mallado  $G$  de 41x41 nodos. Las esquinas corresponden a los extremos de la matriz.

Al siguiente valor,  $f$ , se le asigna la función del lado derecho de la igualdad en el operador lineal. Multiplicando las matrices que se proporcionan y aplicando el operador a la función  $u$  comprobamos que

$$\begin{aligned}
 f(x,y) &= \pi \cos(\pi x) \sin(\pi y) \left( 4x \cos \frac{\pi^2}{8} + 2x \sin \frac{\pi^2}{8} \right) \\
 &+ \pi \cos(\pi y) \sin(\pi x) \left( 4y \cos \frac{\pi^2}{8} + 2y \sin \frac{\pi^2}{8} \right) \\
 &+ 2\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} ((2x^2 + y^2 + 1) - (x^2 + 2y^2 + 1)) \\
 &- \pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \left( (2x^2 + y^2 + 1) \cos \frac{\pi^2}{8} + (x^2 + 2y^2 + 1) \sin \frac{\pi^2}{8} \right) \\
 &- \pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \left( (x^2 + 2y^2 + 1) \cos \frac{\pi^2}{8} + (2x^2 + y^2 + 1) \sin \frac{\pi^2}{8} \right) \\
 &+ 2\pi \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} (x \cos(\pi y) \sin(\pi x) - y \cos(\pi x) \sin(\pi y)).
 \end{aligned}$$

El valor de  $g$  lo obtenemos directamente de la condición de frontera del problema, en este caso

$$g(x,y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

Los siguientes valores  $(A, B, C, D, E, F)$  hacen referencia a los coeficientes del operador lineal que va a aproximarse. En un problema de Laplace los valores serían 1,0,1,0,0,0, respectivamente, para el caso del Problema 2 los coeficientes son funciones dadas por

$$\begin{aligned}
 A &= (1 + 2x^2 + y^2)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 + (1 + x^2 + 2y^2)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)^2, \\
 B &= (2x^2 - 2y^2)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right), \\
 C &= (1 + 2x^2 + y^2)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 + (1 + x^2 + 2y^2)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)^2, \\
 D &= 4x\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 + 2x\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 - 2y\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right), \\
 E &= 4y\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 + 2y\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 - 2x\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right), \\
 F &= 0.
 \end{aligned}$$

Una vez que tenemos los datos de entrada sólo hay que introducirlos en el orden adecuado, dado que `dirich4.m` usa el programa `cholesky.m` de manera automatizada.