UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

T E S I S

Para obtener el título de
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

"La conjetura de Vaught"

Autor
Ana Lucía Vargas Sandoval

Asesor

David Meza Alcántara

Morelia Michoacán, junio de 2013

Índice general

Agradecimientos

Primero que nada, quiero darle gracias a Dios por permitirme experimentar y desarrollar mi pasión por las matemáticas, acompañandome en el camino de la ciencia.
A mis papás y a mis hermanos, por inculcarme el amor y el respeto por la ciencia, por sus útiles y sabios consejos durante este proceso y por apoyarme en cada momento, alentándome a seguirme preparando para realizar mis sueños.
A Paulo, por su continua curiosidad, interés y apoyo en este trabajo.
Al Dr. David Meza y al Dr. Fernando Hernández, por que más que exelentes profesores fueron verdaderos mentores y líderes intelectuales en mi desarrollo como estudiante y como ser humano. A mis demás sinodales, la Dra. Gabriela Campero, el Dr. Luis Valero, el Dr. Rigoberto Vera y a los lectores de mi tesis, por su tiempo y sus acertados comentarios y sugerencias para complementar este trabajo.
A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, especialmente a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, por haberme dado una formación completa, profunda y de calidad en física y en matemáticas.
Por último, a la Universidad Autónoma de México, por haberme dado la oportunidad de realizar un semestre de intercambio en la Facultad de Ciencias.

Introducción

El propósito de esta tesis de licenciatura es hacer un análisis y recuento de algunos de los resultados y avances sobre la Conjetura de Vaught formulada por el matemático Robert Lawson Vaught en 1961. Dicha Conjetura afirma que si una teoría completa tiene más de una cantidad numerable de modelos numerables, entonces debe tener exactamente 2^ω modelos numerables.

En el primer capítulo se da la notación necesaria que se utilizará a lo largo de la tesis, se definen nociones básicas y se enuncian teoremas, proposiciones y lemas muy conocidos dentro de la teoría de modelos, los cuales servirán como herramienta para resultados posteriores.

En el segundo capítulo se definen los *modelos atómicos* y los *modelos ω-saturados,* los cuales desempeñan un papel importante a lo largo de la tesis. Se demuestran los Teoremas de Existencia y Teoremas de Unicidad para los modelos atómicos así como para los modelos ω-saturados. Además, probamos el siguiente teorema,

Teorema: *Toda teoría completa T con un modelo contablemente saturado tiene un modelo atómico numerable.*

Usando principalmente estos teoremas más algunos corolarios concluimos este capítulo con la prueba de el Teorema de Vaught[1], el cual dice lo siguiente,

Teorema de Vaught: *Ninguna teoría completa tiene exactamente dos modelos numerables no isomorfos.*

En el capítulo 3 hacemos uso del lenguaje infinitario $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ para definir a un *fragmento* F el cual es un subconjunto de $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ que contiene a todas las fórmulas de primer orden y es cerrado bajo subfórmulas, combinaciones booleanas finitas, cuantificaciones finitas y bajo cambios de variables libres. Definimos también lo que son los F-tipos de manera muy similar a lo que son los tipos en $\mathcal{L}$.

Los fragmentos numerables y el conjunto de todos los F-tipos realizados por alguna n-tupla en algún modelo numerable de T, $S_n(F,T)$, nos darán las pautas para diferenciar a las Teorías Dispersas de las No Dispersas. Es necesario hacer esta distinción para entender el análisis que hizo Morley sobre la cantidad de modelos numerables no isomorfos de una teoría completa.

Para concluir la segunda sección de este capítulo probamos el siguiente teorema sobre teorías dispersas,

Teorema: *Si una teoría es dispersa, entonces tiene a lo más $\aleph_1$ modelos numerables no isomorfos.*

En la tercera sección de este capítulo definimos el F-diagrama de un modelo de manera muy similar al diagrama de un modelo en $\mathcal{L}$. Haciendo uso de la Teoría Descriptiva probamos que el conjunto de todos los F diagramas de modelos de una teoría T, $D(F,T)$, es Borel. Además dando un mapeo continuo suprayectivo de $D(F,T)$ a $S_n(F,T)$, veremos que $S_n(F,T)$ es analítico.

Concluiremos la sección con la prueba del Teorema de Morley[3], el cual dice lo siguiente,

Teorema de Morley: *Sea T una teoría completa en un lenguaje numerable. Si el número de modelos numerables no isomorfos de T es estrictamente mayor a $\aleph_1$, entonces este número es exactamente $2^{\aleph_0}$.*

El último capítulo está basado principalmente en las secciones 2, 3, 4, 5 y 6 del artículo "Theories of linear order" de Matatyahu Rubin [6]. En dicho capítulo se probará la Conjentura de Vaught para teorías completas de órdenes lineales. Antes de esto, se darán las herramientas necesarias en la Sección 1 y Sección 2.

En la Sección 1 definiremos a los modelos convexos, a las extensiones permitidas de un modelo y a los modelos autoaditivos, estos útlimos tienen la propiedad de que no tienen submodelos convexos propios distintos del vacío.

En la Sección 2 caracterizamos por completo a las teorías de orden lineal

T cuyo lenguaje contiene un conjunto finito fijo de predicados unitarios, para el cual el conjunto de tipos con una variable libre consistentes con T, $S_1(T)$, es finito.
Definimos por recursión una clase de modelos $\mathcal{I}$, de la cual surge el siguiente resultado,

Teorema(Rubin): *Una teoría T de orden lineal tiene un modelo en $\mathcal{I}$ si y sólo si $S_1(T)$ es finito.*

Además definimos una subclase de modelos $\mathcal{H}$ de $\mathcal{I}$ y enunciamos el siguiente teorema el cual se debe a J.G Rosenstein[4],

Teorema (J.G Rosenstein): *T tiene un modelo en $\mathcal{H}$ si y sólo si T es ω-categórica, es decir, todos los modelos numerables de ésta teoría son isomorfos.*

Finalmente, concluímos la Sección 3 del Capítulo 4 con los dos siguientes resultados,

1. **Conjetura de Vaught para Teorías de Orden Lineal (Rubin):** *El número de modelos numerables no isomorfos de una teoría completa de orden lineal T en un lenguaje numerable es finito o $2^{\aleph_0}$.*

2. *(Rubin) Si el lenguaje de T es finito, entonces este número es 1 o $2^{\aleph_0}$.*

Estos dos resultados nos aseguran que la Conjetura de Vaught es verdadera en el caso de Teorías Completas de Órdenes Lineales.
Además obtenemos una característica importante de estas Teorías cuando son finitas, ya que si tienen menos de $2^{\aleph_0}$ modelos numerables, entonces son ω-categóricas.

Para facilitar la lectura de este trabajo, se recomienda que el lector esté familiarizado con nociones y resultados básicos de Lógica de Primer Orden, Topología General y Teoría de Conjuntos.

Capítulo 1

Notación y Preliminares

El lector familiarizado con lo expuesto en las secciones siguientes puede omitir su lectura. A continuación enunciaremos distintos teoremas, proposiciones y lemas ampliamente conocidos en la Teoría de Modelos, los cuales no probaremos en este trabajo. Las demostraciones pueden consultarse en [1] y/o en [3].

1.1. Lógica de predicados de primer orden

A menos que se indique lo contrario, trabajaremos dentro de la Teoría de Modelos de la lógica de predicados de primer orden. Un *lenguaje* $\mathcal{L}$ es una colección de símbolos básicos y símbolos adicionales. Los símbolos básicos son: variables, conectivos lógicos, cuantificadores, el símbolo de igualdad y símbolos auxiliares como paréntesis, corchetes, comas, etc. Los símbolos adicionales se dividen en tres grupos: *símbolos de relación, símbolos de operación (o función)* y *símbolos de constantes.*
Usaremos letras mayúsculas latinas con subíndices como $P_1, ..., P_n$ para denotar a los símbolos de relación, análogamente para los símbolos de operación usaremos la letra f. Cada uno de los símbolos de relación y operación debe tener asociado un número entero positivo llamado *aridad* el cual indica la cantidad de variables necesarias para que se dé la relación o la operación. Por ejemplo, la relación de orden $<$ es de aridad 2, ya que se necesitan dos variables x y y para decir $x < y$ o $y < x$. Para los símbolos de constantes usaremos la letra c con sus respectivos subíndices y superíndices.

Cuando se trabaje con varios lenguajes simultáneamente utilizaremos las letras $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$, etc para denotarlos. La cardinalidad del lenguaje $\mathcal{L}$ la denotaremos, $||\mathcal{L}||$ y decimos que el lenguaje es numerable si $||\mathcal{L}||$ es numerable. Con frecuencia pasaremos de un lenguaje $\mathcal{L}$ a otro lenguaje $\mathcal{L}'$ el cual contiene a $\mathcal{L}$ más un conjunto extra de símbolos adicionales. En este caso decimos que $\mathcal{L}'$ es una *extensión* de $\mathcal{L}$, la cual podemos escribir como $\mathcal{L} \cup X$, donde X es un conjunto extra de símbolos, y decimos que $\mathcal{L}$ es una *reducción* de $\mathcal{L}'$. Una extensión simple de $\mathcal{L}$ es cuando sólo se le agregan símbolos constantes.

Un lenguaje de predicados se interpreta en una estructura $\mathfrak{A} = \langle A, R, O, E \rangle$, donde:

- A es un conjunto no vacío al cual llamamos *universo.* Al universo de $\mathfrak{A}$ lo denotaremos por $|\mathfrak{A}|$ o por A según se requiera.
- R es una familia de relaciones tal que hay una biyección entre R y los símbolos de relación que preservan aridades, si P es un símbolo de aridad n, entonces la interpretación de P es una relación n-aria.
- O es una familia de operaciones en A y la interpretación de un símbolo de operación f de aridad n es una operación n-aria de A *i.e.* una función de A^n en A.
- La interpretación de una constante individual es simplemente un elemento de A, y E consta de las interpretaciones de dichas constantes. A la interpretación de una constante en la estructura $\mathfrak{A}$ la denotamos, $c^{\mathfrak{A}}$.

Un término es una expresión que representa a un individuo de un universo. A continuación damos la definición recursiva de término.

Definición 1.1 *(1) Las Variables son términos. (2) Las constantes son términos. (3) Si f es un símbolo de operación de aridad n y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término.*

Una fórmula es una expresión cuya interpretación puede ser calificada como verdadera o falsa. A continuación damos la definición recursiva de fórmula.

Definición 1.2 *Fórmulas atómicas:*
Sean $t_1, \ldots, t_n$ términos.

1. $t_1 = t_2$ *es una fórmula atómica.*

2. *Si P es un símbolo de relación de aridad n, entonces $P(t_1, \ldots, t_n)$ es una fórmula atómica.*

Definición 1.3 1. *Las fórmulas atómicas son fórmulas.*

2. *Si α y β son fórmulas entonces:*
   $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ son fórmulas.

3. *Si α es una fórmula y x es variable, entonces:*
   $(\exists x\alpha)$ y $(\forall x\alpha)$ son fórmulas.

Definición 1.4 *Sea α una fórmula.*

- *Si α es atómica, entonces todas las variables que aparecen en α son variables libres en α.*
- *Si $\alpha = \beta \vee \gamma$, $\alpha = \beta \wedge \gamma$, $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$ ó $\alpha = \beta \leftrightarrow \gamma$, entonces todas las variables que son libres en β y en γ son variables libres en α.*
- *Si $\alpha = \neg\beta$, entonces todas las variables que son libres en β son variables libres en α.*
- *Si $\alpha = \forall x\beta$ ó $\alpha = \exists x\beta$, entonces todas las variables que son libres en β, menos la variable x, son libres en α.*

Se define la intrepretación de términos en $\mathfrak{A}$ bajo una función $s : VAR \longrightarrow |\mathfrak{A}|$ como $I(t) = I_s^{\mathfrak{A}}(t)$, donde t es un término, recursivamente como sigue :

- Si t es una variable, digamos x, $I_s^{\mathfrak{A}}(x) = s(x)$.
- Si t es una constante, digamos c, $I_s^{\mathfrak{A}}(c)$ es el elemento distinguido de $\mathfrak{A}$ que denotamos por $c^{\mathfrak{A}}$.
- Sea f una letra de operación de aridad n, y sean $t_1, \ldots, t_n$ términos. Inductivamente supongamos definidos: $I_s^{\mathfrak{A}}(t_1)$, $I_s^{\mathfrak{A}}(t_2)$, $\ldots$, $I_s^{\mathfrak{A}}(t_n)$.
  Sea $f^{\mathfrak{A}}$ la operación de aridad n en O que corresponde a f como sigue,
  $$I_s^{\mathfrak{A}}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathfrak{A}}(I_s^{\mathfrak{A}}(t_1), I_s^{\mathfrak{A}}(t_2), \ldots, I_s^{\mathfrak{A}}(t_n)).$$

Es intuitivamente claro lo que se obtiene al sustituir un símbolo por una cadena de símbolos. Si t y t' son términos y x es una variable, entonces $t(^x/_{t'})$ denotará a la expresión que se obtiene al sustituir todas las apariciones libres de x por t' en t.

Definición 1.5 *(De satisfacción de Tarski)*
(i) $\mathfrak{A} \models t_1 = t_2[s]$ *si y sólo si* $t_1^{\mathfrak{A}}[s] = t_2^{\mathfrak{A}}[s]$.
(ii) $\mathfrak{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)[s]$ *si y sólo si* $\langle t_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[s]\rangle \in P^{\mathfrak{A}}$.
(iii) $\mathfrak{A} \models \neg\alpha[s]$ *si y sólo si* $\mathfrak{A} \not\models \alpha[s]$.
(iv) $\mathfrak{A} \models \alpha \wedge \beta[s]$ *si y sólo si* $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$ *y* $\mathfrak{A} \models \beta[s]$.
(v) $\mathfrak{A} \models \forall x\alpha[s]$ *si y sólo si, para toda asignación* s' *que cumpla que* $s'(y) = s(y)$ *para toda variable* y *distinta de* x *sucede que* $\mathfrak{A} \models \alpha[s']$.
(vi) $\mathfrak{A} \models \exists x\alpha[s]$ *si y sólo si existe una asignación* s' *tal que* $s'(y) = s(y)$ *para toda variable* y *distinta de* x, $\mathfrak{A} \models \alpha[s']$.

Definición 1.6 α *es verdadera si para toda asignación* s *de valores a las variables,* $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$*, todas las asiganciones hacen verdadera a* α.
$\mathfrak{A} \models \alpha$ *significa que* α *es verdadera en* $\mathfrak{A}$.

Definición 1.7 *Un enunciado* es una fórmula que no tiene variables libres.

Si α es enunciado y hay una asignación s tal que $\mathfrak{A} \not\models \alpha[s]$, entonces $\neg\alpha$ es verdadera en $\mathfrak{A}$.

Decimos que α es *universalmente verdadera* si para toda estructura del lenguaje de α, $\mathfrak{A} \models \alpha$. Por ejemplo, las instancias de tautología son universalmente verdaderas.

Definición 1.8 Sea Σ un conjunto de enunciados en un lenguaje. Decimos que una estructura $\mathfrak{A}$ es un *modelo de* Σ ($\mathfrak{A} \models \Sigma$), si cada enunciado $\sigma \in \Sigma$ es verdadero en $\mathfrak{A}$.

Sea α un enunciado y Σ un conjunto de enunciados, entonces decimos que:
Σ implica lógicamente a α ($\Sigma \models \alpha$), si toda estructura $\mathfrak{A}$ que hace verdaderas a todas las fórmulas de Σ también hace verdadera a α.

Definición 1.9 Sea Σ un conjunto de enunciados. Decimos que Σ es *satisfacible* si existe un modelo $\mathfrak{A}$ del lenguaje de Σ tal que para toda $\alpha \in \Sigma$, $\mathfrak{A} \models \alpha$.

Note que si $\Delta \subseteq \Sigma$ y Σ es satisfacible, entonces Δ también lo es.
Decimos que Σ es finitamente satisfacible si cada subconjunto finito de Σ es satisfacible.

Proposición 1.1 *(i) Para cada conjunto de enunciados Σ finitamente satisfacible existe $\Sigma \subseteq \Sigma'$ maximal finitamente satisfacible.*
(ii) Si Σ es finitamente satisfacible y α es cualquier enunciado, entonces $\Sigma \cup \{\alpha\}$ es finitamente satisfacible o $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ es finitamente satisfacile.
(iii) Si Σ es maximal finitamente satisfacible y α es un enunciado, entonces $\alpha \in \Sigma$ ó $\neg\alpha \in \Sigma$. $\square$

Omitiremos detalles sobre el aspecto sintáctico de la lógica de primer orden, excepto por el concepto de consistencia, que formalmente significa "no es posible deducir una contradicción", sin embargo, utilizaremos a éste como sinónimo de finitamente satisfacible y satisfacible en virtud del siguiente teorema.

Teorema 1.1 *(Teorema de Compacidad) Si un conjunto de enunciados Σ (finito o infinito) es finitamente satisfacible, entonces Σ es satisfacible.*$\square$

1.2. Teoría General de Modelos

Sean $\mathfrak{A}$ un modelo en $\mathcal{L}$ y $Y \subseteq A$, $\mathcal{L}_Y$ y $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ denotan a los lenguajes $\mathcal{L} \cup \{c_a : a \in Y\}$ y $\mathcal{L} \cup \{c_a : a \in A\}$ respectivamente.

Llamamos *teoría* a un conjunto de enunciados en un lenguaje $\mathcal{L}$. El conjunto de enunciados Σ que usamos anteriormente en todas las proposiciones y observaciones es una teoría. Decimos que una teoría T es *completa* si, dado cualquier enunciado β, β o su negación están en T. Sea $\mathfrak{A}$ un modelo en $\mathcal{L}$, llamamos *teoría completa de* $\mathfrak{A}$, la cual denotamos $Th(\mathfrak{A})$, al conjunto de todos los enunciados que se satisfacen en el modelo $\mathfrak{A}$. Claramente para cualquier modelo $\mathfrak{A}$, $Th(\mathfrak{A})$ es completa.

Los siguientes teoremas son quizás de los más importantes y los pioneros dentro de la Teoría de Modelos, fórmulados alrededor de 1915 por Löwenheim y extendidos por Skolem en 1920.

Teorema 1.2 *(Löwenheim-Skolem)$\downarrow$ Sea T una teoría en un lenguaje $\mathcal{L}$. Si T tiene un modelo infinito,entonces T tiene un modelo cuya cardianalidad es a lo más $max\{\aleph_0, ||\mathcal{L}||\}$.*$\square$

Teorema 1.3 *(Löwenheim-Skolem-Tarski)$\uparrow$ Sea T una teoría con un modelo infinito, entonces para cada cardinal $\kappa \geqq max\{\aleph_0, ||\mathcal{L}||\}$, T tiene un modelo infinito de cardianalidad κ.*$\square$

Definición 1.10 *Sea $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dos modelos en el mismo lenguaje, decimos que:*

1. *$\mathfrak{A}$ es isomorfo a $\mathfrak{B}$, lo cual denotamos por $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, si existe una biyección φ de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ tal que*

   a) *si c es una constante, entonces $\varphi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$;*

   b) *si P es una letra de relación (o letra predicativa) de aridad n y $a_1, \ldots a_n \in A$, entonces $(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $(\varphi(a_1^{\mathfrak{A}}), \ldots, \varphi(a_n^{\mathfrak{A}})) \in P^{\mathfrak{B}}$;*

   c) *si f es una letra funcional de aridad n y $a_1, \ldots a_n \in A$, entonces $\varphi(f^{\mathfrak{A}}(a_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, a_n^{\mathfrak{A}})) = f^{\mathfrak{B}}(\varphi(a_1^{\mathfrak{A}}), \ldots, \varphi(a_n^{\mathfrak{A}}))$.*

2. *$\mathfrak{A}$ es elementalmente equivalente a $\mathfrak{B}$, lo cual denotamos por $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ si para cada enunciado α, $\mathfrak{A} \models \alpha$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \alpha$.*

3. *$\mathfrak{A}$ es un submodelo de $\mathfrak{B}$, lo cual denotamos por $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ si:*

   a) *$A \subseteq B$;*

   b) *$c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$;*

   c) *si para cada letra predicativa de aridad n y $a_a, \ldots, a_n \in A$, $(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{B}}$ (i.e. $P^{\mathfrak{A}} = P^{\mathfrak{B}} \cap A^n$);*

   d) *si f es una letra funcional n-aria, entonces $f^{\mathfrak{A}} = p^{\mathfrak{B}} \upharpoonright A^n$.*

4. *$\mathfrak{A}$ es un submodelo elemental de $\mathfrak{B}$, lo cual denotamos por $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, si pasa lo siguiente,*

   a) *$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$;*

   b) *para cada fórmula φ en $\mathcal{L}$ con variables libres $x_1, \ldots, x_n$ y cualquier n-ada $a_1, \ldots, a_n$ en A,*
   $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.

Claro que si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.
Si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ también decimos que $\mathfrak{B}$ es una *extensión de* $\mathfrak{A}$. Sea a un elemento en A, el modelo $(\mathfrak{A}, a)$ es el modelo $\mathfrak{A}$ más el elemento distinguido a. Esta definición se puede ampliar a todo subconjunto F de $\mathfrak{A}$ con el modelo $(\mathfrak{A}, F)$. Para todo subconjunto F de A, el modelo $(\mathfrak{A}, F)$ es una extensión de $\mathfrak{A}$ y

le llamamos *extensión simple.*Note que en estos casos el lenguaje se amplía con constantes para cada elemento distinguido.

Teorema 1.4 *(Test de Tarski-Vaught)*
Si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ *y para cada fórmula* φ *con variables libres* $x, x_1, \ldots, x_n$ *y cada vez que* $\mathfrak{B} \models \exists x\varphi(x, a_1, \ldots, a_n)$ *con* $a_1, \ldots, a_n \in A$*, existe* $a \in A$ *tal que* $\mathfrak{B} \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_n]$*, entonces* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.□

Sea $\mathfrak{A}$ un modelo. El *diagrama de* $\mathfrak{A}$*,* el cual denotamos $D(\mathfrak{A})$, es el conjunto de todos los enunciados atómicos y todas las negaciones de enunciados atómicos de $\mathcal{L}_A$ que se satisfacen en el modelo $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A}$. El *diagrama elemental de* $\mathfrak{A}$, el cual denotamos $DiagE(\mathfrak{A})$, es la teoría $Th((\mathfrak{A}, a)_{a\in A})$ de todos los enunciados de $\mathcal{L}_A$ que se satisfacen en el modelo $(\mathfrak{A}, a)_{a\in A}$.

Proposición 1.2 *Sea* $\mathfrak{A}$ *un modelo y* $DiagE(\mathfrak{A})$ *su diagrama elemental. Si* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$*, entonces* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ *si y solo si* $(\mathfrak{B}, a)_{a\in A} \models DiagE(\mathfrak{A})$.□

Una *cadena de modelos* es una sucesión creciente de modelos,

$$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_\beta \subseteq \ldots, \text{ con } \beta < \alpha.$$

La *unión de la cadena* es el modelo $\mathfrak{A} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ el cual se define como sigue:

- el universo de $\mathfrak{A}$ es $A = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$,
- cada relación en $\mathfrak{A}$ es la unión de las relaciones correspondientes en $\mathfrak{A}_\beta$, $R = \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$,
- similarmente, cada función G en $\mathfrak{A}$ es $G = \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$,
- los modelos $\mathfrak{A}_\beta$ y $\mathfrak{A}$ tienen las mismas constantes.

Una *cadena elemental de modelos* es una cadena de modelos

$$\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \ldots \prec \mathfrak{A}_\beta \prec \ldots, \text{ con } \beta < \alpha,$$

tal que $\mathfrak{A}_\gamma \prec \mathfrak{A}_\beta$ siempre que $\gamma < \beta < \alpha$.

Teorema 1.5 *(Teorema de la Cadena elemental)*
Sea $\mathfrak{A}_\xi, \xi < \alpha$*, una cadena elemental de modelos. Entonces* $\mathfrak{A}_\xi \prec \bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{A}_\xi$ *para todo* $\xi < \alpha$.□

1.3. n-Tipos y la Topología de Stone

Sea $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una fórmula con las variables libres $x_1, ..., x_n$, decimos que $a_1, ..., a_n \in A$ *satisface* a φ en $\mathfrak{A}$ si $\mathfrak{A}$ hace verdadera a φ (es decir, es modelo de φ) al interpretar a las variables libres $x_1, ..., x_n$ como $a_1, ..., a_n$, y se escribe $\mathfrak{A} \models \varphi[x_1/a_1, ..., x_n/a_n]$, pero para fines prácticos lo escribiremos $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$.
Decimos que $\varphi(x_1, ..., x_n)$ *se satisface en* $\mathfrak{A}$ si y sólo si existe una n-ada $a_1, ..., a_n$ en A tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$.

Un *n-tipo* o *tipo con n variables libres* es un conjunto de fórmulas con variables libres $x_1, \ldots, x_n$, consistente maximal con respecto a la contención en $\mathcal{L}$. La expresión $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ denotará que Γ es un n-tipo cuyas variables libres son $x_1, \ldots, x_n$. Dado cualquier modelo $\mathfrak{A}$ y n-tupla $a_1, \ldots, a_n \in A$, el conjunto $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ de todas las fórmulas $\gamma(x_1, \ldots, x_n)$ satisfechas por $a_1, \ldots, a_n$ es un n-tipo, de hecho es el único n-tipo realizado por $a_1, \ldots, a_n$, lo llamamos el n-tipo de $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathfrak{A}$ y lo denotamos $\Gamma(\bar{a}, \mathfrak{A})$ donde $\bar{a}$ se refiere a la n-tupla $a_1, \ldots, a_n$.
Sea $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_1, \ldots, c_m\}$ una extensión simple de $\mathcal{L}$. Existe una correspondencia uno-a-uno entre los n-tipos $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}$ y entre los tipos $\Sigma'(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}'$. Si $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ es un n-tipo de $\mathcal{L}$, entonces $\Gamma' = \Gamma(c_1, \ldots, c_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ es un $(n-m)$-tipo de $\mathcal{L}'$.
Por otro lado, si $\Sigma'(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ es un $(n-m)$-tipo de $\mathcal{L}'$, entonces

$$\Sigma = \{\sigma(x_1, \ldots, x_n) : \sigma(c_1, \ldots, c_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \in \Sigma'\}$$

es el único n-tipo de $\mathcal{L}$ tal que $\Gamma' = \Sigma'$.

Cada álgebra booleana B tiene asociado un espacio topológico llamado *Espacio de Stone* y denotado por $S(B)$. Los elementos de $S(B)$ son los ultrafiltros en B. La topología de $S(B)$ está generada por una base que consiste en todos los conjuntos de la forma $\{x \in S(B) : b \in x\}$ con $b \in B$. Para toda álgebra booleana B, $S(B)$ es un espacio compacto, totalmente disconexo y Hausdorff.
Sea T cualquier teoría. Considérese $B_n(T) = \{\varphi : \varphi$ es una fórmula con n variables libres$\}$ y la relación de equivalencia dada por $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow T \models \varphi \leftrightarrow \psi$. El cosciente correspondiente se denotará por $F_n(T)$, aunque informalmente supondremos que los elementos de $F_n(T)$ con fórmulas y no clases de fórmulas. $S_n(T)$ denota al espacio de Stone de $F_n(T)$. Identificamos a $S_n(T)$ con el conjunto de tipos con n variables libres consistentes con T sobre el

conjunto vacío.

Sea $\Sigma(x_1,\ldots,x_n)$ un conjunto de fórmulas y $\mathfrak{A}$ un modelo en $\mathcal{L}$. Decimos que Σ *omite a* $\mathfrak{A}$ si y sólo si Σ no se realiza en $\mathfrak{A}$.
Decimos que un n-tipo Σ consistente con una teoría T en $\mathcal{L}$ *es aislado en* $S_n(T)$ si y sólo si existe una fórmula que lo genera. Viéndolo desde el punto de vista lógico, Σ es aislado en $S_n(T)$ si y sólo si existe una fórmula $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ en $\mathcal{L}$ tal que φ es consistente con T y para toda $\sigma\in\Sigma$, $T\models\varphi\to\sigma$. Es decir, cada n-tupla en un modelo que satisface a φ realiza a Σ. Decimos que Σ *es límite en* $S_n(T)$ si y sólo si no es aislado. Dicho de otro modo, Σ es límite en $S_n(T)$ si y sólo si para cada fórmula $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ consistente con T existe $\sigma\in\Sigma$ tal que $\varphi\wedge\neg\sigma$ es consistente con T.

Proposición 1.3 *Sea T una teoría completa en $\mathcal{L}$ y $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ un n-tipo. Si T tiene un modelo que omite a Γ, entonces Γ es límite.* $\square$

Observe que a un n-tipo aislado Γ consistente con T o bien lo realizan todos los modelos de T o ninguno.

El siguiente Teorema de Omisión de Tipos es el inverso de la Proposición anterior y es válido para teorías consistentes arbitrarias en un lenguaje numerable.

Teorema 1.6 *Teorema de Omisión de Tipos.*
Sea T una teoría consistente en un lenguaje numerable $\mathcal{L}$ y sea $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ un n-tipo. Si Γ es límite, entonces T tiene un modelo numerable el cual omite a Γ. $\square$

1.4. Juego $EF_n(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ y equivalencia elemental

Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje finito tal que no tiene símbolos de función y $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ modelos en $\mathcal{L}$.
Definimos el juego $EF_n(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ que consta de dos jugadores I y II para $n\in\mathbb{N}$. El juego tendrá n jugadas. En la i-ésima jugada el jugador I o bien elige un $a_i\in A$ o un $b_i\in B$. Después le toca al jugador II, si el jugador I eligió $a_i\in A$, entonces el jugador II debe elegir $b_i\in B$ y viceversa. El juego termina después de haber jugado la n-ésima jugada. El jugador II gana si $\{(a_i,b_i): i=1,\ldots,n\}$ es la gráfica de un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$. A $EF_n(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ lo llamamos el n-juego Ehrenfeucht-Fraissé.

Una *estrategia* para el jugador II en $EF_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ es una función τ tal que si las primeras m jugadas con $m < n$ del jugador I son $c_1, \ldots, c_m$, entonces en la m-ésima jugada el jugador II juega $\tau(c_1, \ldots, c_m)$. El jugador II usará la estrategia τ en $EF_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, si las jugadas de II lucen como se muestra a continuación:

I: c_1, c_2, c_m, $\ldots$

II: $\tau(c_1)$, $\tau(c_1, c_2)$, $\tau(c_1, c_2, c_3)$, $\ldots$

Decimos que τ es una *estrategia ganadora para II* si para cada sucesión de jugadas $c_1, \ldots, c_m$ que hace el jugador I, el jugador II gana siempre que sigue τ.

Definimos recursivamente la *profundidad de una fórmula* y la denotamos, $d(\phi)$. Si ϕ es atómica, entonces $d(\phi) = 0$; $d(\exists\phi) = d(\forall\phi) = d(\phi) + 1$; $d(\phi \to \psi) = d(\phi \vee \psi) = d(\phi \wedge \psi) = max(d(\phi), d(\psi))$; y $d(\neg\phi) = d(\phi)$.

Decimos que $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$ si para todo enunciado con profundidad a lo más n, $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Las pruebas de los dos siguientes teoremas se pueden consultar en [3] y en [5].

Teorema 1.7 *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje finito sin símbolos de función y $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ modelos en $\mathcal{L}$. El jugador II tiene estrategia ganadora en $EF_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ si y sólo si $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$.*$\square$

Teorema 1.8 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ *si y sólo si* $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Capítulo 2

El Teorema y la Conjetura de Vaught

En este capítulo definiremos y caracterizaremos a los modelos ω-saturados y a los modelos atómicos para concluir en la primera sección con el Teorema de Vaught el cual afirma que no puede haber exactamente dos modelos numerables de una teoría completa T cualquiera. En la segunda sección enunciamos la Conjetura de Vaught y analizamos algunos posibles valores de la cardinalidad del conjunto de modelos numerables en una teoría completa.

2.1. Modelos ω-Saturados y Modelos Atómicos

Definición 2.1 Un modelo $\mathfrak{A}$ es *ω-saturado* si y sólo si para todo $Y \subseteq A$ finito, cada conjunto de fórmulas $\Gamma(x)$ de $\mathcal{L}_Y$ consistente con $Th((\mathfrak{A}, Y))$ se realiza en $(\mathfrak{A}, Y)$.

A un modelo numerable y ω-saturado le decimos *contablemente saturado.*

Los modelos contablemente saturados casi como el nombre lo indica los podemos pensar como "grandes", no grandes por la cardinalidad de su universo, ya que nos estamos refiriendo siempre a modelos numerables, sino porque con ayuda de sus extensiones $(\mathfrak{A}, Y)$ son capaces de satisfacer a todos los tipos posibles. Un ejemplo de éstos es el modelo de los números racionales con su orden [1].

A primera vista, puede parecer que si consideramos tipos con más de una variable libre obtenemos un resultado más fuerte al de ω-saturación, pero esto no es así, ya que si un modelo es ω-saturado, entonces, por medio de una inducción básica sobre n, tenemos que para cada $Y \subseteq A$ finito, cada conjunto de fórmulas $\Gamma(x_0, ..., x_n)$ de $\mathcal{L}_Y$ consistente con $Th((\mathfrak{A}, Y))$ se realiza en $(\mathfrak{A}, Y)$.

Definición 2.2 *Una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ en el lenguaje de T es completa en T* si y sólo si para cada fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ en el lenguaje de T, pasa que una de las dos siguientes propiedades

$$T \models \varphi \to \psi \ , T \models \varphi \to \neg\psi$$

se sostiene.

Decimos que una fórmula ψ es *completable en T* si existe una fórmula completa φ tal que $T \models \varphi \to \psi$.

Definición 2.3 *Un modelo $\mathfrak{A}$ es atómico* si y sólo si cada n-tupla $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ satisface una fórmula completa en $Th(\mathfrak{A})$.

Definición 2.4 *Una teoría T es atómica* si y sólo si cada fórmula de $\mathcal{L}$ consistente con T es completable en T.

A un modelo atómico y numerable le llamamos *atómico numerable,* son estos modelos los que están encajados elementalmente en cada modelo de $Th(\mathfrak{A})$ [1].

Teorema 2.1 *Una teoría completa T es atómica si y sólo si T tiene un modelo atómico numerable.*

Demostración: Suponga que T tiene un modelo atómico numerable. Sea $\mathfrak{A}$ este modelo atómico numerable de T. Sea $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula consistente con T, entonces existe un modelo de T que realiza a ψ, llamemosle $\mathfrak{B}$ a éste modelo, así $\mathfrak{B} \models (\exists x_1, \ldots, x_n)\psi(x_1, \ldots, x_n)$. Como $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$,

$\mathfrak{A} \models (\exists x_1, \ldots, x_n)\psi(x_1, \ldots, x_n)$.
Sean $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{B} \models \psi[b_1, \ldots, b_n]$, por ser $\mathfrak{A}$ atómico, existe una fórmula completa $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ tal que
$\mathfrak{B} \models \varphi[b_1, \ldots, b_n]$. Claramente $\varphi \wedge \psi$ es completa y $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$, por lo tanto, ψ es completable. Por ser ψ arbitraria y completable, T es atómica.
Supongamos que T es una teoría atómica completa. Para cada $n < \omega$, sea $\Gamma_n(x_1, \ldots, x_n)$ el conjunto de todas las negaciones de las fórmulas completas $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ en T. Como cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ consistente con T es completable, $\varphi \wedge \neg\gamma$ es consistente con T para algún $\gamma \in \Gamma_n$. Así, cada Γ_n es límite. Por el Teorema Extendido de Omisión de Tipos, T tiene un modelo numerable $\mathfrak{A}$ el cual omite a cada Γ_n. Por lo tanto, cada $a_1, \ldots, a_n \in A$ satisface una fórmula completa y así $\mathfrak{A}$ es un modelo atómico. $\square$

Cuando hablamos de modelos atómicos podemos pensar en ellos como "pequeños", porque están encajados elementalmente en cada modelo numerable de $Th(\mathfrak{A})$.
Por ejemplo, si T es la teoría de los campos ordenados y real-cerrados, entonces el campo ordenado de números reales algebraicos es el único modelo atómico de T [1].

Sea T una teoría en el lenguaje que sólo tiene símbolos constantes $c_0, c_1, \ldots,$ y axiomas $c_i \neq c_j$, $i < j < \omega$. El modelo con cero no-constantes es un modelo atómico y el modelo con ω no-constantes es un modelo contablemente saturado.

Teorema 2.2 *[Teorema de Unicidad para Modelos Atómicos] Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son modelos a lo más numerables atómicos y $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Demostración: Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son finitos, entonces trivialmente $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.
Sean $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ infinitos y bien ordenemos a los conjuntos A y B con tipo de orden ω. La prueba se realizará con el método *Back and Forth (para verificar como funciona este método vea [**?**]).*
Sea a_0 el primer elemento de A y $\varphi_0(x_0)$ una fórmula completa satisfecha por a_0 en $\mathfrak{A}$. Como $\mathfrak{A} \models (\exists x_0)\varphi_0(x_0)$ y por hipótesis $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, se tiene que $\mathfrak{B} \models (\exists x_0)\varphi_0(x_0)$.
Por lo tanto, podemos escojer a un b_0 en $\mathfrak{B}$ el cual satisface $\varphi_0(x_0)$. Ahora, sea b_1 el primer elemento de $B \backslash \{b_0\}$, y sea $\varphi_1(x_0, x_1)$ una fórmula completa satisfecha por b_0, b_1 en $\mathfrak{B}$, note que la fórmula φ_1 con las características anteriores existe por ser $\mathfrak{B}$ atómico.
Entonces ambos, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, satisfacen

$$\forall x_0(\varphi_0(x_0) \rightarrow (\exists x_1)\varphi_1(x_0, x_1)),$$

por ser φ_0 completa.
Por lo tanto, existe $a_1 \in A$ tal que a_0, a_1 satisfacen $\varphi_1(x_0, x_1)$. Ahora tomamos a_2 el primer elemento de $A \backslash \{a_0, a_1\}$, y así sucesivamente. Usando *Back and Forth [**?**]* una cantidad numerable de veces, obtenemos dos sucesiones

$$a_0, a_1, a_2, \ldots \;,\; b_0, b_1, b_2, \ldots$$

Este método nos garantiza que hemos usado todo A y todo B, así

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\} \;,\; B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\} \;.$$

Más aún, para cada n las n-tuplas $a_0, \ldots a_{n-1}$ y $b_0, \ldots b_{n-1}$ satisfacen la misma fórmula completa. Se sigue entonces que la correspondecia $a_m \mapsto b_m$ es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$. $\square$

En un capítulo posterior probaremos que todo modelo de una teoría completa T puede ser extendido a un modelo ω-saturado; lo cual afirma que toda teoría completa tiene un modelo ω-saturado, sin embargo, no cualquier teoría completa tiene un modelo contablemente saturado. El siguente Teorema nos da las condiciones necesarias y suficientes para que una teoría completa tenga un modelo contablemente saturado.

Teorema 2.3 ***(Teorema de Existencia para Modelos Contablemente Saturados)***
Sea T una teoría completa. Entonces T tiene un modelo contablemente saturado si y sólo si para cada $n < \omega$, T tiene sólo una cantidad numerable de tipos con n variables.

Demostración: Suponga primero que T tiene un modelo contablemente saturado $\mathfrak{A}$. Por ser $\mathfrak{A}$ ω-saturado, cada tipo de T con n-variables libres se realiza en $\mathfrak{A}$. Pero ningna n-tupla puede satisfacer dos tipos diferentes en n variables porque los tipos son maximales y completos. Por lo tanto, T tiene sólo una cantidad numerable de tipos.

Ahora suponga que para cada n, T tiene sólo una cantidad numerable de tipos en n variables. Añadimos un conjunto numerable de símbolos de constantes nuevas $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ a $\mathcal{L}$, formando así a $\mathcal{L}'$. Para cada subconjunto finito

$$Y = \{d_1, \ldots, d_n\} \subset C,$$

los tipos $\Gamma(x)$ de T en $\mathcal{L}_Y$ están en correspondecia uno-a-uno con los tipos $\Sigma(x_1, ..., x_n, x)$ de T en $\mathcal{L}$. Por lo tanto, T tiene sólo una cantidad numerable de tipos $\Gamma(x)$ en $\mathcal{L}_Y$. Además, sólo hay una cantidad numerable de subconjuntos finitos $Y \subset C$. Sea

$$\Gamma_1(x), \Gamma_2(x), ...$$

una enumeración de todos lo tipos de T en todas las expansiones $\mathcal{L}_Y$ con $Y \subset C$. Sea

$$\varphi_1, \varphi_2, ...$$

una enumeración de todos los enunciados de $\mathcal{L}'$. Construimos una sucesión creciente

$$T = T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset ...$$

de teorías de $\mathcal{L}'$ tal que para cada $m < \omega$:

1. T_m es una teoría consistente que contiene sólo un número finito de constantes de C,

2. se cumple que $\varphi_m \in T_{m+1}$ o $(\neg\varphi_m) \in T_{m+1}$,

3. si $\varphi_m = (\exists x)\psi(x)$ está en T_{m+1}, entonces $\psi(c) \in T_{m+1}$ para algún $c \in C$,

4. si $\Gamma_m(x)$ es consistente con T_m, entonces $\Gamma_m(d) \subset T_{m+1}$ para algún $d \in C$.

La construcción de T_m es directa para cada $m < \omega$. La unión $T_\omega = \bigcup_{n<\omega} T_n$ es una teoría maximal consistente en $\mathcal{L}'$. Usando (3) vemos que T_ω tiene un modelo $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}, a_1, a_2, ...)$ tal que $A = \{\tau^{\mathfrak{A}} : \tau$ es $\mathcal{L}'$-término cerrado$\}$. Por consiguiente $\mathfrak{A}$ es un modelo numerable de T.

Ahora veamos que $\mathfrak{A}$ es ω-saturado. Sea $Y \subset A$ finito y $\Sigma(x)$ un conjunto de fórmulas con una variable libre consistente con $Th((\mathfrak{A}, Y))$. Extendemos $\Sigma(x)$ a un tipo $\Gamma(x)$ de $Th((\mathfrak{A}, Y))$. Para alguna m, $\Gamma(x) = \Gamma_m(x)$ es consistente con T_ω y así también es consistente con T_{m+1}. Por (4), $\Gamma_m(c_i) \subset T_{m+1}$ para algún $c_i \in C$, se sigue que a_i satisface $\Gamma(x)$ en $\mathfrak{A}_Y$. $\Box$

Corolario 2.1 *Si T es una teoría completa con a lo más una cantidad numerable de modelos numerables no isomorfos, entonces T tiene un modelo contablemente saturado.*

Demostración: Note primero que cada tipo de T es satisfecho por algún modelo numerable de T, y cada modelo numerable satisface sólo una cantidad numerable de tipos. Por lo tanto, para toda $n < \omega$, T tiene sólo una cantidad numerable de tipos en n variables. En consecuencia, T tiene un modelo contablemente saturado.
$\square$

Teorema 2.4 *[Teorema de Unicidad para Modelos Contablemente Saturados] Si* $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *son modelos contablemente saturados y* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$*, entonces* $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$*.*

Demostración: En esta prueba se hace una construcción usando el método *Back and Forth*, la cual se asemeja a la prueba del Teorema de Unicidad para Modelos Atómicos. Pero en vez de trabajar con fórmulas completas trabajamos con tipos.

Usando la saturación contable de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, obtenemos dos sucesiones

$$a_0, a_1, \dots , b_0, b_1, \dots ,$$

tales que

$$A = \{a_0, a_1, ...\},\ B = \{b_0, b_1, ...\}$$

y para cada n, el tipo que realiza a_n en $(\mathfrak{A}, a_0, ..., a_{n-1})$ es el mismo tipo que realiza b_n en $(\mathfrak{B}, b_0, ..., b_{n-1})$. Luego

$$(\mathfrak{A}, a_0, ..., a_{n-1}) \equiv (\mathfrak{B}, b_0, ..., b_{n-1}).$$

Por lo anterior, obtenemos que $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ con la correspondencia $a_n \mapsto b_n$. $\square$

Sea R un conjunto no vacío, $R^{<\omega}$ denota al conjunto de todas las sucesiones finitas en R. Un subconjunto $S \subseteq R^{<\omega}$ es un *árbol* sobre R si,

$$(\forall s \in S)(\forall n \in dom(s))(s|n \in S)$$

donde $dom(s)$ es el dominio de s. Es decir, S es cerrado bajo segmentos iniciales. En particular, $\emptyset \in S$ si S es no vacío.

Si $s, t \in R^{<\omega}$, digamos $s = \langle s_0, \dots, s_k\rangle$ y $t = \langle t_0, \dots, t_l\rangle$, entonces se define la concatenación de s con t como sigue:

$$s\hat{\ }t = \langle s_0, \dots, s_k, t_0, \dots, t_l\rangle$$

.

Teorema 2.5 *Toda teoría completa T con un modelo contablemente saturado tiene un modelo atómico numerable.*

Demostración: Probaremos éste teorema por contrapuesta. Suponga que T no tiene un modelo atómico numerable. Entonces T no es atómica. Por lo tanto, T tiene una fórmula consistente $\varphi(x_1, ..., x_n)$ la cual es no-completable en T.

Para cada fórmula no-completable $\psi(x_1, ...x_n)$ de T, escojemos dos fórmulas $\psi_0(x_1, ...x_n)$ y $\psi_1(x_1, ...x_n)$ consistentes con T tales que

$$(1)\ T \models \psi_0 \rightarrow \psi\ ,\ T \models \psi_1 \rightarrow \psi\ ,\ T \models \neg(\psi_0 \wedge \psi_1)$$

y ψ_0 , ψ_1 son también incompletables. De este modo obtenemos un árbol de fórmulas incompletables

$$\{\varphi_s : s \in 2^{<\omega}\} \text{ tal que } T \models \varphi_{s\hat{}0} \rightarrow \varphi_s\ ,\ T \models \varphi_{s\hat{}1} \rightarrow \varphi_s,\\ T \models \neg(\varphi_{s\hat{}0} \wedge \varphi_{s\hat{}1}).$$

Cada sucesión infinita $s_0, s_1, s_2, ...$ de ceros y unos nos da una rama $\Gamma_s = \{\varphi, \varphi_{s_0}, \varphi_{s_0 s_1}, ...\}$ del árbol. Sabemos que hay 2^ω ramas. Por (1), cada rama $\Gamma_s(x_1, ..., x_n)$ es un conjunto de fórmulas consistente con T, y cualesquiera dos ramas son inconsistentes entre ellas. Extendiendo cada rama Γ_s a un tipo de T, obtenemos 2^ω tipos diferentes. En consecuencia, T no tiene un modelo contablemente saturado.
$\square$

El recíproco de este teorema es falso. Por ejemplo, la teoría de los campos real-cerrados ordenados tiene un modelo atómico numerable. Pero esta teoría tiene 2^ω tipos, por lo que no tiene un modelo contablemente saturado [1].

A continuación probaremos sólo una parte del Teorema de Caracterización de las Teorías ω-categóricas, la cual es suficiente para nuestros propósitos. Antes veamos el siguiente lema.

Lema 2.1 *Sea T una teoría completa con un modelo contablemente saturado y atómico $\mathfrak{A}$. Entonces para cada $n < \omega$, cada tipo $\Gamma(x_1, ..., x_n)$ de T contiene una fórmula completa.*

Demostración: Sea Γ un tipo de T. Como $\mathfrak{A}$ es contablemente saturado, el tipo Γ se realiza en $\mathfrak{A}$ por alguna n-tupla $a_1, ..., a_n$. Como $\mathfrak{A}$ es atómico,

$a_1, ..., a_n$ satisface al menos una fórmula completa $\gamma(x_1, ..., x_n)$. No puede pasar que $(\neg\gamma) \in \Gamma$, por lo que γ pertenece a Γ. $\square$

Teorema 2.6 *Sea T una teoría completa. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es ω-categórica.*
2. *T tiene un modelo $\mathfrak{A}$ el cual es contablemente saturado y atómico.*

Demostración:
$\Downarrow$] Sea $\mathfrak{A}$ el único modelo numerable de T. Como T es ω-categórica, por el Corolario 2.1, T tiene un modelo contablemente saturado y por el Teorema 2.5, T tiene un modelo atómico numerable, por ser $\mathfrak{A}$ el único modelo numerable, $\mathfrak{A}$ es éste modelo atómico. De igual manera, como T tiene un modelo contablemente saturado, $\mathfrak{A}$ es contablemente saturado.
$\Uparrow$] Probaremos por contradicción que si T tiene un modelo $\mathfrak{A}$ el cual es contablemente saturado y atómico, entonces T es ω-categórica. Suponga que $\mathfrak{A}$ es un modelo atómico numerable y contablemente saturado de T, pero que T no es ω-categórica. Entonces existe un modelo numerable $\mathfrak{B}$ de T tal que $\mathfrak{A} \ncong \mathfrak{B}$.
Veamos que $\mathfrak{B}$ es atómico numerable.
Sea $b_1, \ldots, b_n$ una n-ada de B cualquiera, veamos que satisface alguna fórmula completa. Sea $\Gamma_{b_1,...,b_n}$ el tipo que satisface $b_1, ..., b_n$, entonces por el lema anterior $\Gamma_{b_1,...,b_n}$ tiene una fórmula completa, así $b_1, ..., b_n$ satisface una fórmula completa. Por hipótesis, $\mathfrak{B}$ es numerable. Por lo tanto, $\mathfrak{B}$ es atómico numerable. Por el Teorema de Unicidad de Modelos Atómicos, $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$. Con todo lo anterior obtenemos que T es ω-categórica. $\square$

Lema 2.2 *Sea $\mathfrak{A}$ un modelo contablemente saturado, entonces $(\mathfrak{A}, Y)$ es contablemente saturado para todo $Y \subseteq A$ finito.*

Demostración: Sea $F \subseteq A$ finito. Queremos ver que para todo $Y \subseteq A$ finito y todo $\Gamma(x)$ conjunto de fórmulas con una variable libre en $\mathcal{L}_{F\cup Y}$ consistente con $Th((\mathfrak{A}, F \cup Y))$, sucede que $(\mathfrak{A}, F \cup Y)$ realiza a $\Gamma(x)$.
Sea $Y \subseteq A$ finito y $\Gamma(x)$ en $\mathcal{L}_{F\cup Y}$ consistente con $Th((\mathfrak{A}, F \cup Y))$. Como $\mathfrak{A}$ es ω-saturado y $F \cup Y$ es finito, se tiene que $\Gamma(x)$ se realiza en $(\mathfrak{A}, F \cup Y)$. Por lo tanto, $(\mathfrak{A}, Y)$ es ω-saturado.
$\square$

El siguiente resultado es vital en el desarrollo de la investigación que Vaught siguió sobre la cantidad de modelos numerables de una teoría completa, la cual desembocó en la famosa conjetura.

Teorema 2.7 *(Teorema de Vaught) Ninguna teoría completa tiene exactamente dos modelos numerables no isomorfos.*

Demostración: Suponga que T tiene exactamente dos modelos numerables no isomorfos. Por el Corolario 2.1, T tiene un modelo contablemente saturado $\mathfrak{B}$ y, por el Teorema 2.4, tiene un modelo atómico numerable $\mathfrak{A}$. Note que $\mathfrak{B}$ no puede ser atómico ya que por el Teorema de Unicidad de los modelos atómicos, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ serían isomorfos, lo cual contradice nuestra suposición inicial. De igual manera, por el Teorema de Unicidad de los modelos contablemente saturados, $\mathfrak{A}$ no puede ser contablemente saturado.
Como $\mathfrak{B}$ no es atómico, tiene una n-tupla $b_1, ..., b_n$ la cual no satisface una fórmula completa. El plan es obtener un modelo atómico numerable $(\mathfrak{C}, c_1, ..., c_n)$ de $T' = Th((\mathfrak{B}, b_1, ..., b_1))$ y mostrar que el reducto $\mathfrak{C}$ no es contablemente saturado ni atómico. Así, T tendrá al menos tres modelos numerables no isomorfos $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$.
Como $\mathfrak{B}$ es contablemente saturado, $(\mathfrak{B}, b_1, ..., b_n)$ también es contablemente saturado. En consecuencia, T' tiene un modelo contablemente saturado, así que también tiene un modelo atómico numerable $(\mathfrak{C}, c_1, ..., c_n)$. El reducto $\mathfrak{C}$ es modelo de T. Además, el modelo $\mathfrak{C}$ no es atómico, pues la n-tupla $c_1, ..., c_n$ no satisface una fórmula completa.
Veamos ahora que $\mathfrak{C}$ no es contablemente saturado. Como T no es ω-categórica, T' tampoco lo es, así ningún modelo de T' puede ser contablemente saturado y atómico numerable a la vez. En particular, como $(\mathfrak{C}, c_1, ..., c_n)$ es atómico, no puede ser contablemente saturado. Se sigue que $\mathfrak{C}$ no es contablemente saturado. □

2.2. El Número de Modelos Numerables de una teoría completa. La conjetura de Vaught

Denotamos $I(T, \aleph_0)$ como el número de modelos no isomorfos de una teoría completa T de cardinalidad $\aleph_0$. En esta sección analizaremos los posibles valores de $I(T, \aleph_0)$.

Veamos algunos ejemplos clásicos de $I(T, \aleph_0)$ para ciertas teorías completas específicas.

- Si T es la teoría completa de los órdenes lineales densos sin extremos, $I(T, \aleph_0) = 1$. Este único modelo son los racionales [5].
- Si $T = Th(\mathbb{N})$ (la teoría completa de $\mathbb{N}$), $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$.
- Si T es cualquier teoría completa, por el Teorema de Vaught, $I(T, \aleph_0) \neq 2$.

Note que a lo más hay $2^{\aleph_0}$ modelos numerables no isomorfos de T, por lo tanto es válido preguntarnos lo siguiente, ¿ habrá alguna teoría para la cual $\aleph_0 < I(T, \aleph_0) < 2^{\aleph_0}$?
Claramente, asumiendo HC(la Hipótesis del Continuo), la respuesta es trivialmente negativa. Sin tomar en cuenta HC, Vaught intuyó que esta respuesta seguía siendo negativa, ya que nunca encontró una teoría completa que cumpliera estas desigualdades, pero a su vez tampoco pudo demostrar su negación. Así se formuló la siguiente conjetura:

Conjetura de Vaught: Sin CH, se puede demostrar que cualquier teoría T con más de $\aleph_0$ modelos numerables no isomorfos tiene $2^{\aleph_0}$ modelos numerables no isomorfos.

Con más de 40 años de ser propuesto, este sigue siendo un importante problema de la Teoría de Modelos que continúa sin ser resuelto. Se han encontrado soluciones para casos específicos de teorías completas como es el caso de la Conjetura de Vaught para Teorías ω-Estables la cual fue demostrada por Shelah a principios de los años ochentas [2].

El resultado más general y apegado a la Conjetura original es el desarrollado por Morley con el teorema que lleva su nombre el cual dice que si $I(T, \aleph_0) > \aleph_1$, entonces $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$. Así que todo se reduce a la siguiente pregunta ¿Hay teorías T con $\aleph_1$ modelos numerables no isomorfos?
Hasta ahora no lo sabemos, así que enfoquémonos en lo hecho por Morley.

Capítulo 3

El Análisis de Morley Sobre Modelos Numerables

En 1970, nueve años después de que Vaught formuló la conjetura en 1961, Morley publicó un artículo en el cual demostró que, *si el número de modelos numerables de una teoría T en el lenguaje infinitario $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ es estrictamente mayor que $\aleph_1$, entonces es $2^{\aleph_0}$*, dicho Teorema lleva su nombre.

3.1. Fragmento de un lenguaje infinitario

Definición 3.1 *Llamamos $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ al lenguaje infinitario con ω variables libres, el cual permite las siguientes condiciones:*

- *el número de variables libres de cada subfórmula en cada fórmula es finito;*
- *en cada fórmula sólo puede haber cuantificaciones finitas;*
- *disyunciones y conjunciones a lo más numerables de fórmulas.*

Definición 3.2 *Un fragmento F* de un lenguaje infinitario es un subconjunto de $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ el cual contiene a todas las fórmulas de primer orden, es cerrado bajo subfórmulas, bajo combinaciones finitas booleanas, bajo cuantificaciones finitas y bajo cambio de variables libres por otras variables que no hayan aparecido anteriormente en la fórmula.

Definición 3.3 *Si F es un fragmento de $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$, decimos que $\mathfrak{A} \equiv_F \mathfrak{B}$ si para todo enunciado $\sigma \in F$,*

$$\mathfrak{A} \models \sigma \textit{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \sigma.$$

Definición 3.4 *Si F es un fragmento de $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$, decimos que $\Gamma_F \subset F$ es un F-tipo si existe un $\mathcal{L}$-modelo numerable $\mathfrak{A}$ y $a_1, ..., a_n \in A$ tal que $\Gamma_F = \{\gamma(x_1, ..., x_n) \in F : \mathfrak{A} \models \gamma[a_1, ..., a_n]\}$.*

Sea $S_n(F,T)$ el conjunto de todos los F-tipos realizados por alguna n-tupla en algún modelo numerable de T.

Teorema 3.1 *Sea T una teoría en $\mathcal{L}$. Un modelo numerable de T puede realizar sólo una cantidad numerable de tipos.*

Demostración: Sea $\mathfrak{A}$ un modelo numerable de T. Dado cualquier modelo de T y toda n-ada $a_1, ..., a_n$, el conjunto de todas las fórmulas que realiza $a_1, ..., a_n$ es un tipo.
Veamos que existe un único tipo Γ realizado por $a_1, ..., a_n$.
Suponga que existe Γ' un tipo de $a_1, ..., a_n$ distinto a Γ. Como son maximales, existe una fórmula φ en Γ tal que su negación está en Γ', pero esto no es posible ya que una n-ada no puede satisfacer a una fórmula y a su negación a la vez. Por lo tanto, Γ es único.
Como $\mathfrak{A}$ tiene sólo una cantidad numerable de n-adas y cada n-ada satisface sólo un tipo, $\mathfrak{A}$ sólo puede satisfacer una cantidad numerable de tipos. $\Box$

Corolario 3.1 *Si $|S_n(F,T)| = 2^{\aleph_0}$ para algún fragmento F, entonces $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$.*

Demostración: Suponga que hay $\kappa < 2^\omega$ modelos numerables de T, como un modelo numerable sólo satisface una cantidad numerable de tipos y $\kappa \cdot \aleph_0 = \kappa$, hay κ tipos consistentes con T, es decir, $|S_n(F,T)| = \kappa$, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$. $\Box$

3.2. Teorías Dispersas

A continuación veremos el caso de cuando una teoría tiene siempre una cantidad numerable de tipos para todo fragmento numerable F.

Definición 3.5 *Decimos que una teoría T en $\mathcal{L}$ es dispersa* si para todo fragmento F numerable de $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ y toda $n < \omega$, $|S_n(F,T)| = \aleph_0$.

Suponga que T es dispersa. Construiremos una sucesión de fragmentos numerables $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ como sigue:
Sea F_0 el fragmento que contiene todas las $\mathcal{L}$-fórmulas de primer orden. Si α es un ordinal límite, entonces $F_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$.
Suponga que F_α es un fragmento numerable. Para $\Gamma \in S_n(F_\alpha, T)$, sea $\Psi_\Gamma(x_1, ..., x_n)$ la fórmula $\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma$. Note que ésta es una $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-fórmula por que F_α es numerable. Sea $F_{\alpha+1}$ el fragmento más pequeño que contiene a Ψ_Γ para todo $\Gamma \in S_n(F_\alpha, T)$, $n < \omega$. Como T es dispersa, $F_{\alpha+1}$ es numerable.

Si $\mathfrak{A}$ es un modelo de T y $a_1, ..., a_n \in A$, sea $\Gamma_{\mathfrak{A},\alpha}(\bar{a}) \in S_n(F_\alpha, T)$ el F_α-tipo satisfecho por $\bar{a}$ en A.

Lema 3.1 *Para cada modelo numerable $\mathfrak{A}$ de T, existe un ordinal $\lambda < \omega_1$ tal que $\forall \bar{a}, \bar{b} \in A^n$, si $\Gamma_{\mathfrak{A},\lambda}(\bar{a}) = \Gamma_{\mathfrak{A},\lambda}(\bar{b})$, entonces $\Gamma_{\mathfrak{A},\alpha}(\bar{a}) = \Gamma_{\mathfrak{A},\alpha}(\bar{b})$ para toda $\alpha < \omega_1$.*

Demostración: Note que si $\Gamma_{\mathfrak{A},\alpha}(\bar{a}) \neq \Gamma_{\mathfrak{A},\alpha}(\bar{b})$, entonces $\Gamma_{\mathfrak{A},\beta}(\bar{a}) \neq \Gamma_{\mathfrak{A},\beta}(\bar{b})$ para toda $\beta > \alpha$.
Para $\bar{a}, \bar{b} \in A^n$, sea

$$f(\bar{a}, \bar{b}) = \begin{cases} -1 & \text{si } \Gamma_{\mathfrak{A},\alpha}(\bar{a}) = \Gamma_{\mathfrak{A},\alpha}(\bar{b}) \text{ para toda } \alpha < \omega_1 \\ \alpha & \text{si } \alpha \text{ es el mínimo tal que } \Gamma_{\mathfrak{A},\alpha}(\bar{a}) \neq \Gamma_{\mathfrak{A},\alpha}(\bar{b}) \end{cases}$$

Como $\mathfrak{A}$ es numerable, podemos encontrar $\gamma < \omega_1$ tal que $\gamma > f(\bar{a}, \bar{b})$ para toda $\bar{a}, \bar{b} \in A^n$ y $n < \omega$. $\square$

Definición 3.6 Llamamos *altura de* $\mathfrak{A}$ al mínimo ordinal con la propiedad del lema anterior y lo denotamos $\lambda(\mathfrak{A})$.

La altura de un modelo es un invariante del modelo, es una pieza clave (aúnque no única) de infomación para determinar el tipo de isomorfismo del modelo.

Lema 3.2 *Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son modelos numerables de T tales que $\mathfrak{A} \equiv_{F_{\lambda(\mathfrak{A})+1}} \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Demostración: Sean $\{a_0, a_1, a_2, ...\}$ y $\{b_0, b_1, b_2, ...\}$ enumeraciones de A y B respectivamente y $\lambda = \lambda(\mathfrak{A})$. La idea de la prueba es construir una

sucesión de encajes parciales finitos $f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2$... tal que si $\bar{a}$ está en el dominio de f_n, entonces $\Gamma_{\mathfrak{A},\lambda}(\bar{a}) = \Gamma_{\mathfrak{A},\lambda}(f_n(\bar{a}))$. Nos aseguraremos que a_n esté en el dominio de f_{n+1} y que b_n esté en la imagen de f_{n+1}. Luego entonces $f = \bigcup_{n\in\omega} f_n$ será el isomorfismo deseado.
Sea $f_0 = \emptyset$. Suponga que $\bar{a}$ está en el dominio de f_n y que $f_n(\bar{a}) = \bar{b}$. Sea $\Gamma = \Gamma_{\mathfrak{A},\lambda}(\bar{a}, a_n)$. Debemos encontrar $d \in B$ tal que $\Gamma_{\mathfrak{B},\lambda}(\bar{b}, d) = \Gamma$. Como

$$\mathfrak{A} \models \exists\bar{x}\exists y \bigwedge\nolimits_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\bar{x}, y),$$

ésta es una $F_{\lambda+1}$-sentencia y por hipótesis $\mathfrak{A} \equiv_{F_{\lambda+1}} \mathfrak{B}$, pasa que

$$\mathfrak{B} \models \exists\bar{x}\exists y \bigwedge\nolimits_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\bar{x}, y).$$

Por esto, existen $\bar{c}, d$ en B que hacen verdadera a $\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\bar{x}, y)$, por lo tanto, realizan a todas las fórmulas del tipo Γ. Note que como $\bar{a}$ y $\bar{c}$ realizan el mismo F_λ-tipo, $\bar{c}$ y $\bar{b}$ realizan el mismo F_λ-tipo.
Veamos que $\bar{c}$ y $\bar{b}$ realizan el mismo $F_{\lambda+1}$-tipo.
Sea $\Sigma = \Gamma_{\mathfrak{B},\lambda}(\bar{c}) = \Gamma_{\mathfrak{B},\lambda}(\bar{b})$ y sea $\psi(\bar{x})$ una $F_{\lambda+1}$-fórmula. Sea Θ la $F_{\lambda+1}$-fórmula

$$\forall\bar{x}\forall\bar{y}((\Psi_\Sigma(\bar{x}) \wedge \Psi_\Sigma(\bar{y}))) \rightarrow (\psi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{y})).$$

Como λ es la altura de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \Theta$. Por hipótesis, $\mathfrak{A} \equiv_{F_{\lambda+1}} \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B} \models \Theta$.
Así, $\Gamma_{\mathfrak{B},\lambda+1}(\bar{c}) = \Gamma_{\mathfrak{B},\lambda+1}(\bar{b})$.
Como

$$\mathfrak{B} \models \exists y \bigwedge\nolimits_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\bar{c}, y)$$

y ésta es una $F_{\lambda+1}$-fórmula, sucede que

$$\mathfrak{B} \models \exists y \bigwedge\nolimits_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\bar{b}, y).$$

En consecuencia, existe $d \in B$ tal que $\Gamma = \Gamma_{\mathfrak{B},\lambda}(\bar{b}, d)$.
Usando un argumento simétrico, podemos encontrar un $s \in A$ tal que $\Gamma_{\mathfrak{A},\lambda}(\bar{a}, a_n, s) = \Gamma_{\mathfrak{B},\lambda}(\bar{b}, d, b_n)$. Sea $f_{n+1} = f_n \cup \{(a_n, d), (s, b_n)\}$. $\square$

Teorema 3.2 *Si T es dispersa, entonces $I(T, \aleph_0) \leq \aleph_1$.*

Demostración: Para cada $\mathfrak{A} \models T$ numerable, sea

$$i(\mathfrak{A}) = (\lambda(\mathfrak{A}), \Gamma_{\mathfrak{A},\lambda(\mathfrak{A})+1}(\emptyset)).$$

Note que $\mathfrak{A} \equiv_{F_\alpha} \mathfrak{B}$ si y sólo si $\Gamma_{\mathfrak{A},\alpha}(\emptyset) = \Gamma_{\mathfrak{B},\alpha}(\emptyset)$, es decir que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ hacen verdaderos a los mismos enunciados en F_α.
Por el lema anterior, si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son modelos numerables de T, entonces $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ si y sólo si $i(\mathfrak{A}) = i(\mathfrak{B})$. Como $\lambda(\mathfrak{A}) < \omega_1$, hay sólo $\aleph_1$ posibles alturas para los modelos de T. Además, por ser T dispersa, para todo α hay sólo $\aleph_0$ posibles $\Gamma_{\mathfrak{A},\alpha}(\emptyset)$.
Note que si $\Gamma_{\mathfrak{A},\alpha}(\emptyset) = \Gamma_{\mathfrak{B},\alpha}(\emptyset)$, cabe la posibilidad de que para cada $\lambda < \omega_1$ haya un modelo numerable de T con altura λ, en este caso habría $\aleph_1$ modelos numerables de T, ése es el caso donde alcanza el máximo de posibles modelos.
Por lo tanto, $I(T, \aleph_0) \leq \aleph_1$. $\square$

Si la Conjetura de Vaught es verdadera, entonces las teorías dispersas serán precisamente las que admitan sólo una cantidad numerable de modelos numerables salvo isomorfismo.

3.3. El Teorema de Morley

Hasta el momento sólo hemos visto cuántos modelos numerables pueden tener las teorías dispersas, ahora veremos qué pasa con las teorías no dispersas. Note que si T es no dispersa, entonces para algún fragmento F y algún $n < \omega$ $|S_n(F,T)| > \aleph_0$, probaremos que $|S_n(F,T)| = 2^{\aleph_0}$. Para esto necesitamos un poco de teoría descriptiva.

Suponga que F es un fragmento de $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$. Considere los $\mathcal{L}$-modelos donde sus universos sean ω.

Definición 3.7 *Si $\mathfrak{A} = \langle \omega, ... \rangle$ es un $\mathcal{L}$-modelo, llamamos Fdiagrama de $\mathfrak{A}$* al conjunto

$$Fdiag(\mathfrak{A}) = \{\mu(x_0, ..., x_n) \in F : \mathfrak{A} \models \mu(0, 1, ..., n)\}.$$

Llamamos $D(F,T)$ el conjunto de todos los posibles Fdiagramas de modelos de T.

Existe una biyección natural entre el conjunto potencia $\mathcal{P}(F)$ y 2^F (el conjunto de todas las funciones de F a $\{0,1\}$), identificando a cada conjunto con su función característica. Más aún, $D(F,T)$ es un conjunto de subconjuntos de F, por lo que podemos ver a $D(F,T)$ como subconjunto de 2^F. Dotando a $\{0,1\}$ con la topología discreta, podemos pensar a 2^F como un espacio topológico con la topología producto. La base la conforman los conjuntos

$$\{f \in 2^F : \forall x \in F_0\ f(x) = \sigma(x)\},$$

con $F_0 \subseteq F$ finito y $\sigma : F_0 \to 2$. Note que si F es numerable, entonces 2^F es homeomorfo a 2^ω.

Llamamos σ-álgebra de Borel a la mínima σ-álgebra que contiene a una topología dada. Un conjunto Borel es un elemento de esta σ-álgebra.

Lema 3.3 *Si F es un fragmento numerable de $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$, entonces $D(F,T)$ es un subconjunto Borel de 2^F.*

Demostración: Sea

$$\begin{aligned} E_0 &= \{f \in 2^F : f(\psi) = 1 \Leftrightarrow f(\neg\psi) = 0 \text{ para toda } \psi \in F\} \\ &= \textstyle\bigcap_{\psi \in F}\{f \in 2^F : (f(\psi) = 0 \wedge f(\neg\psi) = 1) \vee (f(\psi) = 1 \wedge f(\neg\psi) = 0)\}. \end{aligned}$$

Como E_0 es una intersección de conjuntos cerrado-abiertos, E_0 es cerrado. Sea $E_1 = \{f \in 2^F : f(\exists x\psi(x)) = 1 \Leftrightarrow f(\psi(x_i)) = 1$ para algún i y toda $\psi(x)$ en $F\}$. Si

$$\begin{aligned} E^+_{1,\psi} &= \{f \in 2^F : f(\exists x\psi(x)) = 1\} \cap \textstyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{f \in 2^F : f(\psi(x_i)) = 1\} \text{ y} \\ E^-_{1,\psi} &= \{f \in 2^F : f(\exists x\psi(x)) = 0\} \cap \textstyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\{f \in 2^F : f(\psi(x_i)) = 0\}, \end{aligned}$$

note que el primer intersectando de $E^+_{1,\psi}$ es cerrado-abierto y el segundo intersectando es unión de cerrado-abiertos, por lo tanto, es abierto. Así, $E^+_{1,\psi}$ es Borel. Análogamente, $E^-_{1,\psi}$ es Borel. Como

$$E_1 = \textstyle\bigcap_{\psi\in F}(E^+_{1,\psi} \cup E^-_{1,\psi}),$$

E_1 es Borel.
Si $\varphi = \bigwedge_{i\in I}\psi_i$ y $\varphi \in F$, sea

$$E_{2,\varphi} = \{f \in 2^F : f(\varphi) = 1 \Leftrightarrow f(\psi_i) = 1 \text{ para toda } i \in I\}.$$

Como I es numerable, siguiendo un argumento similar al de E_1 obtenemos que $E_{2,\varphi}$ es Borel.
Por lo tanto,

$$E_2 = \textstyle\bigcap\{E_{2,\varphi} : \varphi = \bigwedge_{i\in I}\psi_i \text{ y } \varphi \in F\}$$

es Borel.
Similarmente los siguientes conjuntos son Borel:
$E_3 = \{f \in 2^F : f(x_i = x_j) = 0$ para toda $i \neq j\}$,
$E_4 = \{f \in 2^F : f(x_i = x_i) = 1$ para toda $i\}$,
$E_5 = \{f \in 2^F : f(x_i = x_j \to x_j = x_i) = 1$ para toda $i, j\}$,
$E_6 = \{f \in 2^F : f((x_i = x_j \wedge x_j = x_k) \to x_i = x_k) = 1$ para toda $i, j, k\}$ y
$E_7 = \{f \in 2^F : f(\sigma) = 1$ para todo $\sigma \in T\}$.
Sea $E = E_0 \cap ... \cap E_7$. Claramente, E es Borel.
Veamos que $E = D(F, T)$.
$\supseteq$]Veamos que si $\mathfrak{A}$ es un modelo de T con universo ω, entonces el F-diagrama de $\mathfrak{A}$ está en E. Claro que como para todo $\psi \in Fdiag(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{A} \models \psi$, entonces $Fdiag(\mathfrak{A}) \in E_3, \ldots, E_6$. Además como $\mathfrak{A} \models T$, $T \subseteq Fdiag(\mathfrak{A})$, por lo que $Fdiag(\mathfrak{A}) \in E_7$. Note que $Fdiag(\mathfrak{A})$ es consistente ya que $\mathfrak{A}$ satisface a todo $\psi \in Fdiag(\mathfrak{A})$, E_0 es la propiedad de ser consistente, por lo que $Fdiag(\mathfrak{A}) \in E_0$. Asimismo, si $\exists x\psi(x) \in Fdiag(\mathfrak{A})$, entonces $\psi(x_i) \in Fdiag(\mathfrak{A})$ para algún i, por lo tanto, $Fdiag(\mathfrak{A}) \in E_1$. Análogamente $Fdiag(\mathfrak{A}) \in E_2$.
$\subseteq$] Sea $f \in E$. Construimos un $\mathcal{L}$-modelo $\mathfrak{A}_f$ con universo ω. Si R es un símbolo de relación de $\mathcal{L}$ con aridad n, entonces $(i_1, ..., i_n) \in R^{\mathfrak{A}_f}$ si y sólo si $f(R(x_{i_1}, ..., x_{i_n})) = 1$. Sea G un símbolo de función de $\mathcal{L}$ con aridad n. Como $f \in E_7$, $f(\exists x G(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) = x) = 1$. Como $f \in E_1$, $f(G(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) = x_j) = 1$ para algún j. Sea $G^{\mathfrak{A}_f}(i_1, ..., i_n) = j$. Como $f \in E$, $f(G(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) = x_k) = 0$ para $k \neq j$, así $G^{\mathfrak{A}_f}$ está bien definida. Usando el hecho de que $f \in E$, podemos hacer una inducción sobre la formación de fórmulas para probar que

$$\mathfrak{A}_f \models \psi(i_1, ..., i_n) \Leftrightarrow f(\psi((x_{i_1}, ..., x_{i_n})) = 1$$

para toda $\psi \in F$. Por lo tanto , $f \in D(F, T)$. $\square$

Definición 3.8 *Si* $|X| = \aleph_0$, *decimos que* $Y \subseteq 2^X$ *es analítico* si existe una función continua $\tau : 2^X \to 2^X$ y un subconjunto Borel $B \subseteq 2^X$ tal que Y es la imagen de B bajo τ.

En otras palabras, los conjuntos analíticos son imagen continua de algún conjunto Borel. Observe que podemos ver al conjunto $S_n(F, T)$ como subconjunto de 2^F, aunque puede que no sea Borel.

Teorema 3.3 $S_n(F, T)$ *es analítico.*

Demostración: Construimos un mapeo continuo Ω tal que $S_n(F,T)$ es la imagen de $D(F,T)$ bajo Ω. Para $f \in 2^F$, sea $\Omega(f) \in 2^F$, donde $\Omega(f)(\psi) = 1$ si ψ tiene a $x_0, ..., x_{n-1}$ como variables libres y $f(\psi) = 1$, $\Omega(f)(\psi) = 0$ en otro caso.
Como $\Omega(f)(\psi) = \Omega(g)(\psi)$ si $f(\psi) = g(\psi)$, Ω es continua. Si $\Gamma \in S_n(F,T)$, entonces existe un modelo $\mathfrak{A}$ de T con universo ω tal que $(0, 1, ..., n-1)$ realiza a Γ en $\mathfrak{A}$. Así, el $Fdiag(\mathfrak{A})$ bajo Ω va a Γ. $\Box$

Note que como $S_n(F,T)$ es la imagen de $D(F,T)$ bajo la función continua Ω y F es un fragmento numerable arbitrario, $S_n(F,T)$ es analítico para todo fragmento numerable F.

Para finalizar con la prueba del Teorema de Morley necesitamos un resultado clásico de Teoría Descriptiva de Conjuntos, su prueba puede consultarse en [**?**].

Teorema 3.4 *Sea X un conjunto numerable y $Y \subseteq 2^X$ analítico. Si $|Y| > \aleph_0$, entonces $|Y| = 2^{\aleph_0}$.*$\Box$

Teorema 3.5 *(Teorema de Morley) Sea T una teoría completa en un lenguaje numerable. Si $I(T,\aleph_0) > \aleph_1$, entonces $I(T,\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$.*

Demostración: Para todo fragmento numerable F, $S_n(F,T)$ es analítico. Por el teorema anterior, sabemos que $|S_n(F,T)| \leq \aleph_0$ o $|S_n(F,T)| = 2^{\aleph_0}$. Si para algún F pasa que $|S_n(F,T)| = 2^{\aleph_0}$, entonces $I(T,\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$ porque un modelo numerable realiza sólo una cantidad numerable de tipos. Si para todo F pasa que $|S_n(F,T)| \leq \aleph_0$, entonces T es dispersa y por el Teorema de teorías dispersas, $I(T,\aleph_0) \leq \aleph_1$. $\Box$

Capítulo 4

La Conjetura de Vaught en Órdenes Lineales

Parece que probar o refutar la Conjetura de Vaught para teorías completas en general no es nada fácil, ya que hasta la fecha no se ha logrado. Con esto surge la iniciativa de hacerlo por casos, es decir, probar la veracidad de la Conjetura de Vaught para teorías completas con alguna característica extra. En este capítulo analizaremos y probaremos la Conjetura de Vaught para Teorías Completas de Órdenes Lineales.

Los dos resultados más relevantes serán los siguientes:

1. El número de modelos numerables no isomorfos de una teoría completa de orden lineal en un lenguaje numerable es finito o $2^{\aleph_0}$.

2. Si el lenguaje de T es finito, entonces este número es 1 o $2^{\aleph_0}$.

En este capítulo T denotará una teoría completa de orden lineal, es decir una teoría cuyo lenguaje incluye un símbolo de relación binaria $<$ y posiblemente más simbolos de relación y constantes; además T incluye los axiomas de orden lineal para $<$, los cuales son:

- Si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$;

- Si $x \neq y$, entonces $x < y$ ó $y < x$;

El lenguaje $\mathcal{L}_T$ denotará al lenguaje de T. $\mathfrak{A} = \langle A, <^{\mathfrak{A}}, P_1, P_2 ...\rangle$ denotará a un modelo en el lenguaje usual el cual es ordenado linealmente por $<^{\mathfrak{A}}$. Siempre interpretaremos a $<^{\mathfrak{A}}$ como el orden lineal $<$ cuyo dominio es todo el universo de $\mathfrak{A}$. Usaremos $x \leq y$ para abreviar $x < y \vee x = y$.

Si $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ es una cadena de modelos, entonces $\bigcup_{\alpha<\beta}\mathfrak{A}_\alpha$ denota la unión de esta cadena.
La notación $\mathfrak{B} \subseteq_g \mathfrak{A}$ significa que g es un monomorfismo de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{A}$.

Considere $T(LO)$ una Teoría de orden lineal. Considere las fórmulas atómicas $x_m \equiv x_n$ y $x_m < x_n$ como las fórmulas básicas y $v_0, \ldots, v_n$ variables con $n > 0$. Un *arreglo de las variables* $v_0, \ldots, v_n$ es una combinación finita de la forma

$$\theta_0 \wedge \ldots \wedge \theta_{n-1} \ ,$$

donde $u_0, \ldots, u_n$ es una renumeración de $v_0, \ldots, v_n$ y cada fórmula θ_i es, o bien $u_i < u_{i+1}$, o $u_i \equiv u_{i+1}$.

Una *fórmula abierta en* $\mathcal{L}$ es una fórmula libre de cuantificadores, es decir, no tiene cuantificadores.

El siguiente resultado dice que cualquier fórmula sin cuantificadores en una Teoría de Orden Lineal es equivalente según esta teoría a una fórmula universalmente verdadera, a una contradicción o bien a una disyunción finita de arreglos.

Proposición 4.1 *Toda fórmula abierta $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ es $T(LO)$-equivalente a una de las fórmulas $v_0 < v_0$, $v_0 \equiv v_0$, o bien a una disyunción finita de arreglos de las variables $v_0, \ldots, v_n$.*

Demostración: Primero consideramos el caso $n = 0$. En este caso, la fórmula $\varphi(v_0)$ está construida de las fórmulas atómicas $v_0 \leq v_0$, $v_0 \equiv v_0$. Como $T(LO) \models v_0 \leq v_0$ y $T(LO) \models v_0 \equiv v_0$, debe pasar o bien que $T(LO) \models \varphi$ y $T(LO) \models \varphi \leftrightarrow v_0 \equiv v_0$, o que $T(LO) \models \neg\varphi$ y $T(LO) \models \varphi \leftrightarrow v_0 < v_0$.
Hagamos ahora tres observaciones importantes acerca de los arreglos (suponga n>0):

1. Hay sólo una cantidad finita de arreglos diferentes de las variables $v_0, \ldots, v_n$.
2. Para cada estructura linealmente ordenada $\mathfrak{A}$, cada n-tupla $a_0, \ldots, a_n$ satisface algún arreglo de $v_0, \ldots, v_n$.
3. Sean $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ una fórmula abierta y ψ un arreglo de las variables $v_0, \ldots, v_n$. Entonces una o ambas de las siguientes fórmulas $\psi \to \varphi$, $\psi \to \neg\varphi$, es una consecuencia de la Teoría de orden lineal.

La observación (1) es obvia. La observación (2) se sigue del hecho de que en una estructura de orden lineal una de las siguientes relaciones binarias $a < b$, $a = b$, $b < a$ se cumple entre cualesquiera dos elementos a, b. Por inducción sobre la longitud de una fórmula abierta φ, se puede probar la observación (3).
Ahora, sea $\varphi(v_0, \dots, v_n)$ una fórmula abierta. Si $T(LO) \models \neg\varphi$, entonces φ es $T(LO)$-equivalente a la fórmula $v_0 < v_0$ y así a una contradicción. Asumamos la otra posibilidad, es decir, supongamos que no es el caso que $T(LO) \models \neg\varphi$. Considere cualquier modelo $\mathfrak{A}$ de $T(LO)$ y una n-tupla $a_0, \dots, a_n$ que satisface a φ en $\mathfrak{A}$. Por (2), $a_0, \dots, a_n$ también satisface algún arreglo ψ de $v_0, \dots, v_n$ en $\mathfrak{A}$. Por lo tanto, no puede pasar que $T(LO) \models \psi \to \neg\varphi$ y por (3) debe pasar que $T(LO) \models \psi \to \varphi$. Formemos a θ la disyunción de todos los arreglos ψ de $v_0, \dots, v_n$ los cuales cumplen que $T(LO) \models \psi \to \varphi$. Por (1), θ es la disyunción de al menos uno y a lo más una cantidad finita de arreglos. Por lo argumentado arriba, se sigue que $T(LO) \models \varphi \to \theta$, y por como definimos a θ se sigue que $T(LO) \models \theta \to \varphi$. En consecuencia φ y θ son $T(LO)$-equivalentes. $\square$

Sea $\mathfrak{A}$ un modelo, Φ un conjunto de fórmulas cuyas variables libres están entre $\{x_0, ..., x_n\}$ y sea $\bar{a} \in A^n$, definimos $|\mathfrak{A}|_{\Phi,\bar{a}}$ como el conjunto $\{b \in A : \mathfrak{A} \models \Phi[b, \bar{a}]\}$. De igual manera, $|\mathfrak{A}|_\Phi = \{b \in A : \mathfrak{A} \models \Phi[b]\}$. Además, $\mathfrak{A}_\Phi$ y $\mathfrak{A}_{\Phi,\bar{a}}$ son los submodelos con universo $|\mathfrak{A}|_\Phi$, $|\mathfrak{A}|_{\Phi,\bar{a}}$ respectivamente.

Antes de comenzar a probar lo prometido, necesitaremos una serie de definiciones y lemas como herramienta previa.

4.1. Conjuntos y Modelos Convexos, Extensiones Permitidas y Modelos Autoaditivos

Definición 4.1 Sea $\mathfrak{A}$ un modelo, decimos que $B \subseteq A$ es *definible* sobre $\bar{a}$ en $\mathfrak{A}$ si existe φ tal que $B = |\mathfrak{A}|_{\varphi,\bar{a}}$. Decimos que B es definible en $\mathfrak{A}$ si $B = |\mathfrak{A}|_\varphi$ para algún φ.

Sea $\mathfrak{A}$ un modelo. Si $B \subseteq A$, definimos $conv(B, \mathfrak{A})$ como el conjunto $\{c \in A : b_1 \leq c \leq b_2 \text{ para algún } b_1, b_2 \in B\}$.

Sea $\langle I, < \rangle$ un conjunto linealmente ordenado. Para cada $i \in I$, sea $\mathfrak{A}_i$ un modelo. Asumiendo que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cada $i \neq j$ definimos $\mathfrak{A} = \Sigma_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ como el siguiente modelo:
- $|\mathfrak{A}| = \bigcup_{i \in I} A_i$.
- $a <^{\mathfrak{A}} b$ si para algún $i \in I$ pasa que $a <^{\mathfrak{A}_i} b$, o si $a \in A_i$ y $b \in A_j$ con $i < j$.
- Para cada predicado unitario P de $\mathcal{L}$, $P^{\mathfrak{A}} = \bigcup_{i \in I} P^{\mathfrak{A}_i}$.

A $\mathfrak{A}$ lo llamamos la suma de los $\mathfrak{A}_i$. Cuando usamos el modelo $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ siempre nos referiremos a que $|I| = 2$ y los elementos de A son menores que los elementos de B.

Sea $\mathcal{C} = \langle C, < \rangle$ un conjunto linealmente ordenado, y sea $\mathfrak{A}$ un modelo en $\mathcal{L}$. Definimos $\mathfrak{A} * \mathcal{C}$ como el modelo $\sum_{c \in C} \mathfrak{A}_c$ donde para cada $c \in C$, $\mathfrak{A}_c$ es una copia de $\mathfrak{A}$ (de forma que las copias resulten isomorfas a $\mathfrak{A}$, pero ajenas dos a dos).

Definición 4.2 Sea $\mathfrak{A}$ un modelo y $B \subseteq A$. Decimos que B es un *subconjunto convexo* de A si para cada $b_1, b_2 \in B$ si $b \in \{a \in A : b_1 \leq a \leq b_2\}$, entonces $b \in B$.
$\mathfrak{B}$ es un *submodelo convexo* de $\mathfrak{A}$, si $|\mathfrak{B}|$ es un subconjunto convexo de $|\mathfrak{A}|$ y lo denotamos $\mathfrak{B} \Subset \mathfrak{A}$.
Usamos $[b_1, b_2]$ para denotar al conjunto $\{a \in A : b_1 \leq a \leq b_2\}$.

Teorema 4.1 *Sea $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ finito y $\mathfrak{B} \Subset \mathfrak{A}$. Para cada $m \geq 0$ y $l \geq 1$ existe un conjunto finito de fórmulas $\Theta^{l,m}$ tal que para cada $k \geq 0$ y cada fórmula $\phi(v_1, ..., v_l, x_1, ..., x_k)$ con a lo más m cuantificadores y para cada $\bar{a} \in (A \backslash B)^k$ existe $\phi^*(v_1, ..., v_l) \in \Theta^{l,m}$ tal que para toda $\bar{b} \in B^l$ $\mathfrak{A} \models \phi[\bar{b}, \bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi^*[\bar{b}]$.*

Demostración: Lo probaremos por inducción sobre m para toda l. Para $m = 0$, sea $\Theta^{l,0}$ un conjunto finito de fórmulas sin cuantificadores con variables libres entre $\{v_1, ..., v_l\}$ tal que para cada fórmula sin cuantificadores $\psi(v_1, ...v_l)$ existe $\phi \in \Theta^{l,0}$ tal que $\vdash \phi \longleftrightarrow \psi$. Note que esto es posible gracias a que el lenguaje es finito, pues hay una cantidad finita de fórmulas no equivalentes con a lo más l variables libres. Así, $\Theta^{l,0}$ tiene las propiedades deseadas.
Suponga que es válido para m, veamos que entonces es válido para $m + 1$. Sea

$$\Theta = \Theta^{l,m} \cup \{\exists v_{l+1} \psi : \psi \in \Theta^{l+1,m}\}$$

y

$$\Theta^{l,m+1} = \{\bigvee_{i=1}^{n} \psi_i : \{\psi_1, ..., \psi_n\} \subseteq \Theta\} \cup \{\neg \bigvee_{i=1}^{n} \psi_i : \{\psi_1, ..., \psi_n\} \subseteq \Theta\}.$$

Claro que como Θ es finito, $\Theta^{l,m+1}$ también es finito.
Sea $\chi(v_1, ...v_l, x_1, ..., x_k)$ una fórmula con $m + 1$ cuantificadores y sea $\bar{a} \in (A \backslash B)^k$. Podemos asumir que $\chi \equiv \exists y \varphi(v_1, ..., v_l, y, x_1, ..., x_k)$, donde φ es una fórmula con m cuantificadores.
Por Hipótesis de Inducción, hay un conjunto finito de fórmulas

$$\{\psi_1(v_1, ...v_l), ..., \psi_r(v_1, ..., v_l)\} \subseteq \Theta^{l,m}$$

tal que para cada $c \in A \backslash B$ existe un i ,$1 \leq i \leq r$, tal que para cada $\bar{b} \in B^l$,

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{b}, c, \bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi_i[\bar{b}].$$

Por Hipótesis de Inducción, hay una fórmula $\psi(v_1, v_2, ..., v_l, y) \in \Theta^{l+1,m}$ tal que para cada $\bar{b} \in B^l$ y $c \in B$, $((\bar{b}, c) \in B^{l+1})$

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{b}, c, \bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi[\bar{b}, c].$$

Sea $\chi^*(v_1, ..., v_l) \equiv (\bigvee_{i=1}^{r} \psi_i) \vee \exists y \psi$, entonces $\chi^* \in \Theta^{l,m+1}$, se puede ver que χ^* es la deseada. $\square$

Corolario 4.1 *Sea $\mathfrak{A}$ un modelo en un lenguaje finito o infinito $\mathcal{L}$; sea $\mathfrak{B} \Subset \mathfrak{A}$. Entonces para cada fórmula $\phi(v_1, ..., v_l, x_1, ..., x_k)$ y cada $\bar{a} \in (A \backslash B)^k$ existe $\phi^*(v_1, ..., v_l)$ tal que para cada $\bar{b} \in B^l$, $\mathfrak{A} \models \phi[\bar{b}, \bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi^*[\bar{b}]$.*

Demostración: Como $\mathfrak{B}|\mathcal{L}' \Subset \mathfrak{A}|\mathcal{L}'$ para cada sublenguaje finito $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ infinito, dado que cada fórmula emplea sólo una cantidad finita de símbolos y que el teorema anterior vale para cada $\mathcal{L}'$, entonces también es válido para $\mathcal{L}$. $\square$

En otras palabras el teorema y el corolario anteriores nos dicen que para determinar si ciertos elementos del submodelo convexo $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{A}$ satisfacen cierta fórmula ϕ en $\mathfrak{A}$, podemos verificarlo “examinando” si satisfacen a la fórmula ϕ^* en $\mathfrak{B}$. Note que esto es posible por la convexidad de $\mathfrak{B}$, ya que todos los elementos de B tienen exactamente los mismos parámetros fuera de B a su derecha y los mismos parámetros fuera de B a su izquierda, es decir, si un elemento de B tiene tres parámetros fuera de B a su derecha, entonces todos los elementos de B tienen esos mismos tres parámetros fuera de B a su derecha. Es por eso que a ϕ^* del corolario anterior le llamamos *la fórmula examinadora* de ϕ.

Sea $\mathfrak{A}$ un modelo, $\bar{a} \in A^l$, $\chi(v_0, \bar{a})$ una fórmula y $\phi_1(v_1, ..., v_l)$ una fórmula con l variables libres, *la relativización de* ϕ_1 para $\chi(v_0, \bar{a})$ es la fórmula ϕ_2 tal que para toda $\bar{b} \in (|\mathfrak{A}|_{\chi,\bar{a}})^l$, $\mathfrak{A}_{\chi,\bar{a}} \models \phi[\bar{b}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi_2[\bar{b}]$.
Construimos a ϕ_2 recursivamente. Si ϕ_1 es atómica, entonces $\phi_2 = \phi_1$. Si ϕ_1 es una combinación booleana de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ entonces ϕ_2 es la misma combinación booleana de la relativizción de las fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Si $\phi_1 \equiv \exists x \psi$, entonces $\phi_2 \equiv \exists x(\chi(x, \bar{a}) \wedge \psi(y_1, \ldots, y_n))$. Si $\phi_1 \equiv \forall x \psi$, entonces $\phi_2 \equiv \forall x(\chi(x, \bar{a}) \rightarrow \psi(y_1, \ldots, y_n))$.

Corolario 4.2 *Sea $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ finito o infinito, sean $\bar{c} \in A^n$ y B un subconjunto convexo de $\mathfrak{A}$ definible bajo $\bar{c}$ en $\mathfrak{A}$. Sea $\phi(v_1, ..., v_l, x_1, ..., x_k)$ una fórmula, $\bar{a} \in (A \backslash B)^k$; entonces existe $\phi^*(v_1, ..., v_l)$ tal que para cada $\bar{b} \in A^l$, $\mathfrak{A} \models \phi^*[\bar{b}, \bar{c}] \Leftrightarrow \bar{b} \in B^l$ y $\mathfrak{A} \models \phi[\bar{b}, \bar{a}]$.*

Demostración: Sea $\chi(v_0, \bar{c})$ la que define a B bajo $\bar{c}$. Sea $\phi_1(v_1, ..., v_l)$ la fórmula examinadora de ϕ en B, sea $\phi_2(v_1, ..., v_l, \bar{c})$ la relativización de ϕ_1 para $\chi(v_0, \bar{c})$. Sea $\phi^* \equiv \bigwedge_{i=1}^{l} \chi(\bar{c}, v_i) \wedge \phi_2$, así, ϕ^* es la deseada.$\square$

Definición 4.3 *Sea $\mathfrak{D} \supseteq \mathfrak{A}$; decimos que $\mathfrak{D}$ es una extensión simple* de $\mathfrak{A}$ si no hay $d_1, d_2 \in D \setminus A$ y $a \in A$ tal que $d_1 < a < d_2$.

Definición 4.4 *Sea $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B}$; decimos que $\mathfrak{D}$ es una extensión permitida* de $\mathfrak{B}$ relativa a $\mathfrak{A}$ si $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{D} \supseteq \mathfrak{B}$ y para cada $d \in D \setminus B$, $A_d = \{a \in A \setminus B : \forall b \in B(a < b \leftrightarrow d < b)\} \subseteq D$.

Teorema 4.2 *Sea $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$, y sea $\mathfrak{D}$ una extensión permitida de $\mathfrak{B}$ relativa a $\mathfrak{A}$; entonces $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{D} \prec \mathfrak{A}$.*

Demostración: Para demostrar que $\mathfrak{D} \prec \mathfrak{A}$ es suficiente probar que si $\phi(x_1, ..., x_k, x)$ es una fórmula cualquiera, $d_1, ..., d_k \in D$, $a \in A \backslash D$ y $\mathfrak{A} \models \phi[d_1, ..., d_k, a]$, entonces existe $d \in D$ tal que $\mathfrak{A} \models \phi[d_1, ..., d_k, d]$. Sin pérdida de generalidad, sean $d_1, ..., d_i \in D \backslash B$ y $d_{i+1}, ..., d_k \in B$. Además, podemos asumir que

$$d_1 < ... < d_r < a < d_{r+1} < ... < d_i.$$

Como $\mathfrak{D}$ es una extensión permitida de $\mathfrak{B}$, existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $d_r < b_1 < a < b_2 < d_{r+1}$. Podemos asumir que $d_{i+1}, ..., d_{i+l} \in [b_1, b_2]$ y $d_{i+l+1}, ..., d_k \notin [b_1, b_2]$. Sea $\phi^*(b_1, b_2, x_{i+1}, ..., x_{i+l}, x)$ tal que para cada $a_1, ..., a_l, b \in A$,

$$\mathfrak{A} \models \phi^*[b_1, b_2, a_1, ..., a_l, b]$$

si y sólo si $a_1, ..., a_l, b \in [b_1, b_2]$ y

$$\mathfrak{A} \models \phi[d_1, ..., d_i, a_1, ..., a_l, d_{i+l+1}, ..., d_k, b].$$

Note que

$$\mathfrak{A} \models \exists x \phi^*(b_1, b_2, d_{i+1}, ..., d_{i+l}, x)$$

y todos los parámetros en la fórmula pertenecen a B; como $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$, existe $d \in B \subseteq D$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \phi^*[b_1, b_2, d_{i+1}, ..., d_{i+l}, d].$$

Así, $\mathfrak{A} \models \phi[d_1, ..., d_k, d]$. Por lo tanto, $\mathfrak{D} \prec \mathfrak{A}$, más aún $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{D}$. $\square$

El siguiente corolario es un caso explícito en donde el teorema anterior se aplica.

Corolario 4.3 *Sea $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$, y sea $D_1 = conv(B, \mathfrak{A})$; entonces $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{D}_1 \prec \mathfrak{A}$.*

Demostración: Por convexidad de D_1, $\mathfrak{D}_1$ es una extensión permitida y, por el teorema anterior, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{D}_1 \prec \mathfrak{A}$. $\square$

Corolario 4.4 *Sea $\mathfrak{A}$ un modelo de T en $\mathcal{L}$, $\Gamma \in S_1(T)$ tal que $\mathfrak{A}$ omite a Γ; entonces existe una extensión simple de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, tal que $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ y Γ se realiza en $\mathfrak{B}$.*

Demostración: Veamos primero que existe $\mathfrak{C} \succ \mathfrak{A}$ tal que Γ se realiza en $\mathfrak{C}$. Sea $\mathcal{L}'$ el lenguaje que resulta de agregarle a $\mathcal{L}$ una constante c para cada tipo consistente con T. Tomamos $T'' = DiagE(\mathfrak{A}) \cup \{\Gamma(c) : \Gamma \text{ tipo consistente con } T\}$. Queremos ver que T'' es finitamente satisfacible para usar el Teorema de Compacidad y así ver que T'' tiene modelo, el cual será el candidato para $\mathfrak{C}$. Veamos esto por contradicción.
Suponga que existe $S \subseteq T''$ finito el cual no es satisfacible, entonces existen $\varphi \in DiagE(\mathfrak{A})$, $\psi_i \in \Gamma_i(c_i)$ con $i = 1, \ldots, n$ tal que $\varphi \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$ es una contradicción. Es decir,

$$\models \neg(\exists x_1, \ldots, \exists x_m, \exists y \varphi \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n(x_1, \ldots, x_m, y))$$

donde $x_1, \ldots, x_m, y$ no aparecen en φ ni en ψ_i para toda i.
Note que

$$DiagE(\mathfrak{A}) \models \exists x_1, \ldots, \exists x_m, \exists y \varphi(x_1, \ldots, x_m).$$

Además, como $\Gamma_i(c_i)$ es consistente con T, $T \not\models \neg(\exists y \psi_i(y))$ para toda i. Por la completud de $DiagE(\mathfrak{A})$,

$$DiagE(\mathfrak{A}) \models \exists y \psi_i(y).$$

Así,

$$DiagE(\mathfrak{A}) \models \exists x_1, \ldots, \exists x_m, \exists y \varphi(x_1, \ldots, x_m) \wedge \psi(y),$$

pero esto no es posible ya que $DiagE(\mathfrak{A})$ es consistente y no puede implicar lógicamente a contradicciones. Por lo tanto, S es satisfacible y así T'' es finitamente satisfacible.
Usando el Teorema de Compacidad, obtenemos que $\mathfrak{C} \succ \mathfrak{A}$.
Suponga $c \in C$ tal que $\mathfrak{C} \models \Gamma[c]$. Sea $Z = \{z \in C : z \text{ realiza a } \Gamma(x)\}$, $A \cup Z \subseteq C$ es una extensión permitida. Sea $W \subseteq Z$ convexo, tomemos $\mathfrak{B}$ el modelo con universo $A \cup W$, claramente es extensión simple permitida de $\mathfrak{A}$ relativa a $\mathfrak{C}$ con $c \in B$; entonces $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, y Γ se realiza en $\mathfrak{B}$. $\Box$

A partir de ahora $[c, \mathfrak{A}, d]$ denota al conjunto $\{a \in A : c < a < d\}$.

Teorema 4.3 *Sea* $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C} + \mathfrak{B}_2$.
Si $\mathfrak{D}$ *es una extensión permitida de* $\mathfrak{C}$ *relativa a* $\mathfrak{A}$ *y* $D \subseteq conv(C, \mathfrak{A})$, *entonces* $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{D}$.

Demostración: Sea $\mathfrak{C}_1$ el submodelo de $\mathfrak{A}$ cuyo universo es $conv(C, \mathfrak{A})$. Basta demostrar que $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{C}_1$, ya que si $\mathfrak{D}$ es tal que satisface la hipótesis,

entonces es una extensión permitida de $\mathfrak{C}$ relativa a $\mathfrak{C}_1$, y, por el teorema anterior, $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{D} \prec \mathfrak{C}_1$.
Sean $\{c_\xi\}_{\xi<\nu}$, $\{d_\xi\}_{\xi<\nu}$ sucesiones en B, tales que $c_{\xi_2} \leq c_{\xi_1} \leq d_{\xi_1} \leq d_{\xi_2}$ para cada $\xi_1 < \xi_2 < \nu$ y $\bigcup_{\xi<\nu}[c_\xi, \mathfrak{B}, d_\xi] = C$.
Para cada $\xi < \nu$, sean $\mathfrak{C}_\xi$ y $\mathfrak{A}_\xi$ los submodelos de $\mathfrak{A}$ cuyos universos son $[c_\xi, \mathfrak{B}, d_\xi]$ y $[c_\xi, \mathfrak{A}, d_\xi]$ respectivamente. Entonces $\mathfrak{C}_\xi = \mathfrak{B}_{\chi,\langle c_\xi, d_\xi\rangle}$ y $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{A}_{\chi,\langle c_\xi, d_\xi\rangle}$, donde $\chi \equiv c_\xi \leq v_0 \leq d_\xi$. Como $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{A}$, es fácil ver que $\mathfrak{C}_\xi \prec \mathfrak{A}_\xi$, $\mathfrak{C} = \bigcup_{\xi<\nu} \mathfrak{C}_\xi$ y $\mathfrak{C}_1 = \bigcup_{\xi<\nu} \mathfrak{A}_\xi$.
Veamos que $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{C}_1$. Sea $c_1, ..., c_k \in C$, $a \in C_1$ y $\mathfrak{C}_1 \models \phi[c_1, ..., c_k, a]$. Basta probar que existe $b \in C$ tal que

$$\mathfrak{C}_1 \models \phi[c_1, ..., c_k, b].$$

Sea ξ donde $c_1, ..., c_k, a \in A_\xi$. Como $\mathfrak{A}_\xi \Subset \mathfrak{C}_1$, existe una fórmula examinadora ϕ^* tal que para cada $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1} \in A_\xi$,

$$\mathfrak{C}_1 \models \phi[a_1, ..., a_{k+1}]$$

si y sólo si

$$\mathfrak{A}_\xi \models \phi^*[a_1, ..., a_{k+1}].$$

Por lo tanto,

$$\mathfrak{A}_\xi \models \exists x \phi^*(c_1, ..., c_{k+1}, x).$$

Como $\mathfrak{C}_\xi \prec \mathfrak{A}_\xi$, existe $b \in C_\xi$ tal que

$$\mathfrak{A}_\xi \models \phi^*[c_1, ..., c_{k+1}, b],$$

así,

$$\mathfrak{C}_1 \models \phi[c_1, ..., c_k, b].$$

En consecuencia, $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{C}_1$. $\square$

Proposición 4.2 *Sea $\mathfrak{A}$ un modelo en un lenguaje $\mathcal{L}$ cualquiera de primer orden. Existe una extensión elemental $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ tal que para todo $F \subseteq A$ finito y todo tipo $\Gamma(x)$ en $\mathcal{L}_F$, $\mathfrak{B}$ realiza a $\Gamma(x)$.*

Demostración: Sea $\{\Gamma_\alpha(x) : \alpha \in \kappa\}$ una enumeración de la familia de tipos en $\mathcal{L}_A$ omitidos por $\langle \mathfrak{A}, A\rangle$. Claramente, $\kappa \leq 2^{|\mathcal{L}|}$.
Recursivamente se construyen las siguientes cadenas,

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_A \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{L}_\alpha \subseteq \ldots \\ T_0 = DiagE(\mathfrak{A}) \subseteq T_1 \subseteq \ldots \subseteq T_\alpha \subseteq \ldots \\ \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}_1 \lceil_{\mathcal{L}_A} \prec \ldots \prec \mathfrak{B}_\alpha \lceil_{\mathcal{L}_A} \prec \ldots\end{gathered}$$

donde $\mathfrak{B}_\alpha$ es modelo de T_α. Si α es límite, entonces

$$\mathcal{L}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{L}_\beta,$$

$$T_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta$$

y

$$\mathfrak{B}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{B}_\beta.$$

Si $\alpha = \beta + 1$, entonces $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_\beta \cup \{c_\alpha\}$, donde c_α es una constante tal que $\bar{\Gamma}_\alpha(c_\alpha)$, el cual es el tipo que extiende a $\Gamma_\alpha(x)$ en $\mathcal{L}_\alpha$ y

$$T_\alpha = DiagE(\mathfrak{B}_\beta) \cup \bar{\Gamma}_\alpha(c_\alpha).$$

Usando un argumento muy similar al de la prueba del Corolario 4.4, obtenemos que T_α es finitamente satisfacible y por el Teorema de Compacidad, T_α tiene un modelo, digamos $\mathfrak{B}'$. Note que como $\mathfrak{B}'$ es modelo de $DiagE(\mathfrak{A})$,

$$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}'|_{\mathcal{L}_A}.$$

Tomemos a $\mathfrak{B}_\alpha = \mathfrak{B}'|_{\mathcal{L}_A}$.
Sea $\bar{\mathfrak{B}} = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{B}_\alpha$, por el Teorema de la Cadena Elemental, para todo $\xi < \kappa$,

$$\mathfrak{B}_\xi \prec \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{B}_\alpha.$$

Con todo, $\mathfrak{B} = \bar{\mathfrak{B}}|_{\mathcal{L}_A}$ es el modelo deseado. □

Teorema 4.4 *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y $\mathfrak{A}$ un modelo cualquiera en $\mathcal{L}$, entonces existe $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ ω-saturado.*

Demostración: Construimos una sucesión de modelos $\{\mathfrak{B}_n : n < \omega\}$ tal que $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}_{n+1}$ es el modelo que se obtiene al aplicar la Proposición anterior a $\mathfrak{B}_n$.
Sea $\bar{\mathfrak{B}} = \bigcup_{n<\omega} \mathfrak{B}_n$ y $\mathfrak{B} = \bar{\mathfrak{B}}|_{\mathcal{L}}$. Claramente, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Veamos que es ω-saturado. Sea $F \subseteq B$ finito, entonces existe $n < \omega$ tal que $F \subseteq B_n$. Si $\Gamma(x)$

es un tipo en $\mathcal{L}_F$, entonces $\Gamma(x)$ se realiza o se omite en $\mathfrak{B}_n$. Suponga que se omite, entonces por la proposición anterior, como $\mathfrak{B}_{n+1}$ realiza a todos los tipos en $\mathcal{L}_F$ con $F \subseteq B_n$ finito, $\mathfrak{B}_{n+1}$ realiza a $\Gamma(x)$. Por lo tanto, $\mathfrak{B}$ realiza a $\Gamma(x)$. $\square$

Este teorema se cumple en todo lenguaje de primer orden por lo que su validez no es exclusiva para los lenguajes con la relación binaria de orden lineal $\leq$.

Los racionales tienen la propiedad de que $\mathbb{Q} + \mathbb{Q} \succ \mathbb{Q}$, la teoría completa de los racionales cumple el siguiente teorema.

Teorema 4.5 *Suponga que T tiene un modelo que contiene a más de un punto, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
(i) Si $\mathfrak{A}$ es un modelo de T, entonces $\mathfrak{A}$ no tiene subconjuntos convexos definibles distintos a $|\mathfrak{A}|$ y $\emptyset$.
(ii) Existen modelos de T, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}'$ tales que $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' \succ \mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ y $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$.
(iii) Para cada $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son modelos de T, entonces $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$.

Demostración: Claramente el inciso (iii) implica el (ii); también es fácil ver que el inciso (ii) implica el (i).
Sea $C \subseteq A$ convexo propio definible por φ y tal que es acotado por arriba en A, y sea $f(C) \subseteq A'$, donde f es el isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}'$. Claramente $f(C)$ también es definible por φ. Note que la propiedad de que C sea convexo la podemos describir con el enunciado

$$\forall x \forall y \forall z (x < z < y \wedge \varphi(x) \wedge \varphi(y)) \rightarrow \varphi(z).$$

Este enunciado es verdadero en $\mathfrak{A}$ y en $\mathfrak{A}'$, entonces lo debe ser en la suma de ambos por ser extensión elemental. Por lo tanto, el conjunto $\{z \in A \cup A' : \varphi(z)\}$ debe ser convexo. Como $f(C)$ y C son definibles por φ, la unión de ambos también es definible por φ. Además, $C \cup f(C) = \{z \in A \cup A' : \varphi(z)\}$, pero $C \cup f(C)$ no es convexo en $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'$, ya que existe $b \in A$ tal que $C < b < f(C)$ y b no realiza a φ. Por lo anterior, no puede haber convexos definibles propios en $\mathfrak{A}$ modelos de T distintos a $|\mathfrak{A}|$ y $\emptyset$.
Suponga (i), probemos (iii). Es fácil ver que los modelos de T no tienen primer ni último elemento. Más aún, para cada fórmula $\phi(x_1, ..., x_n)$ el enunciado
(1) $\exists x_1 ... \exists x_n \phi(x_1, ..., x_n) \rightarrow \forall y \exists x_1 ... \exists x_n (\bigwedge_{i=1}^{n} (x_i > y) \wedge \phi(x_1, ..., x_n))$
pertenece a T. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ modelos de T; podemos asumir que $A \cap B = \emptyset$. Sea

$$\Sigma = DiagE(\mathfrak{A}) \cup DiagE(\mathfrak{B}) \cup \{\tilde{a} < \tilde{b} : a \in A, b \in B\},$$

donde $DiagE(\mathfrak{A})$ denota al diagrama elemental de $\mathfrak{A}$. Si Σ no es consistente entonces existe un $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finito tal que $DiagE(\mathfrak{A}) \cup \Sigma_0$ no es consistente. Sin pérdida de generalidad,

$$\Sigma_0 = \{\phi(\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_n), \tilde{a} < \tilde{b}_1, ..., \tilde{a} < \tilde{b}_n\}$$

con $a \in A$ y $b_i \in B$, donde $i = 1, ..., n$. Como los $\tilde{b}_i$ no están en $DiagE(\mathfrak{A})$,

$$DiagE(\mathfrak{A}) \vdash \forall x_1 ... \forall x_n (\bigwedge_{i=1}^{n} (\tilde{a} < x_i) \to \neg\phi(x_1, ..., x_n)),$$

pero esto contradice (1). Por lo tanto, Σ es consistente.
Sea $\mathfrak{C}$ un modelo de Σ. Podemos asumir que $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$. Sea $\bar{A} = \{c : c \leq a$ para algún $a \in A\}$ y $\bar{B} = \{c : b \leq c$ para algún $b \in B\}$.
Incluso podemos asumir que $\mathfrak{C} = \bar{\mathfrak{A}} + \mathfrak{D} + \bar{\mathfrak{B}}$. Por Teorema 4.2, $\bar{\mathfrak{A}} \succ \mathfrak{A}$ y $\bar{\mathfrak{B}} \succ \mathfrak{B}$, en consecuencia

$$\bar{\mathfrak{A}} + \mathfrak{D} + \bar{\mathfrak{B}} \succ \mathfrak{A} + \mathfrak{D} + \mathfrak{B}$$

y por esto

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{D} + \mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}.$$

Sólo falta ver que $\mathfrak{A} + \mathfrak{D} + \mathfrak{B} \succ \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, ya que en consecuencia obtenemos que $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$. Probemos esto. Sea $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \mathfrak{D} + \mathfrak{B}$, basta con ver que para toda fórmula $\phi(x_1, y, x_2)$ y cada $a \in A$, $b \in B$, si existe $d \in D$ tal que

$$\mathfrak{A}' \models \phi[a, d, b],$$

entonces existe $c \in A \cup B$ tal que

$$\mathfrak{A}' \models \phi[a, c, b].$$

Sea $\phi^*(x_1, y)$ la fórmula examinadora para $\phi(x_1, y, x_2)$ en $\mathfrak{A}$. Suponga por contradicción que no existe $c \in A$ tal que $\mathfrak{A}' \models \phi[a, c, b]$; entonces

$$\mathfrak{A} \models \neg\exists y \phi^*(a, y).$$

Como $\mathfrak{A}' \succ \mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A}' \models \neg\exists y \phi^*(a, y).$$

Por lo tanto, $\mathfrak{A}' \models \phi[a, d, b] \wedge \neg\exists y \phi^*(a, y)$. Probemos que

$$\mathfrak{A}' \models \forall z \exists x_1 \exists y (x_1 < z \wedge y < z \wedge \phi(x_1, y, b) \wedge \neg\exists u \phi^*(x_1, u)) =^{def} \chi$$

. Si no, entonces, como $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B} \models \neg\chi$. Por lo tanto, existe $b' \in B$ tal que

$$\mathfrak{B} \models \forall x_1 \forall y((x_1 < b' \wedge y < b') \rightarrow \neg(\phi(x_1, y, b) \wedge \neg\exists u \phi^*(x_1, u)))$$

. Como $\mathfrak{A}' \succ \mathfrak{B}$, lo mismo vale en $\mathfrak{A}'$; pero esto es imposible ya que $a < b'$, $d < b'$, sin embargo,

$$\mathfrak{A}' \models \phi(a, d, b) \wedge \neg\exists u \phi^*(a, u)).$$

Sea $a' \in A$; por lo anterior

$$\mathfrak{A}' \models \exists x_1 \exists y(x_1 < a' \wedge y < a' \wedge \phi(x_1, y, b) \wedge \neg\exists u \phi^*(x_1, u));$$

como ϕ^* es la fórmula examinadora de ϕ en $\mathfrak{A}$ y $a' \in A$, entonces

$$\mathfrak{A} \models \exists x_1 \exists y(x_1 < a' \wedge y < a' \wedge \phi(x_1, y) \wedge \neg\exists u \phi^*(x_1, u)),$$

pero esto es imposible. Así, debe haber un $c \in A$ tal que $\mathfrak{A}' \models \phi[a, c, b]$. $\square$

Daremos una definición de un modelo cuya teoría cumple el teorema anterior.

Definición 4.5 $\mathfrak{A}$ *se llama autoaditivo(SA) si (i), (ii) o (iii) del teorema anterior se cumple para* $Th(\mathfrak{A})$.

Como ya dijimos antes, el modelo de los racionales es un modelo autoaditivo. Ejemplos de modelos no autoaditivos son los modelos finitos. Un ejemplo más interesante de un modelo no autoaditivo es el siguiente

$$\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, >_{\mathbb{N}}) + (\mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}) + (\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}),$$

es decir, el modelo de los naturales invertido más los enteros con su orden usual más los naturales con su orden usual. No es autoaditivo ya que $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}$ hace verdadero al enunciado

$$\beta = \exists y \exists x((y < x) \wedge \forall w(w > y \rightarrow \exists z(y < z < w)) \wedge$$
$$\forall v(v > x \rightarrow \exists u(x < u < v))),$$

este enunciado β nos dice que hay dos elementos en el modelo los cuales no tienen sucesor inmediato (los testigos de esta fórmula son los ceros de las dos copias de $(\mathbb{N}, >_{\mathbb{N}})$) lo cual no pasa en $\mathfrak{A}$. Por lo tanto, $\mathfrak{A}$ no es elementalmente equivalente a $\mathfrak{A}+\mathfrak{A}$, entonces no pasa $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}+\mathfrak{A}$. El siguiente lema nos dice que cualquier subsuma de una suma de modelos autoaditivos es submodelo elemental de la suma.

Lema 4.1 *Sea $\langle I, <\rangle$ un conjunto ordenado. Si para cada $i, k \in I$, $\mathfrak{A}_i \equiv \mathfrak{A}_k$ y $\mathfrak{A}_i$ es SA; entonces para cada $J \subseteq I$, $\Sigma_{j\in J}\mathfrak{A}_j \prec \Sigma_{i\in I}\mathfrak{A}_i$.*

Demostración: Por inducción sobre $||I||$. Es fácil ver el caso finito por lo que sólo probaremos el caso infinito. Sea $||I|| = \alpha \geq \omega$ y suponga que el lema es verdadero para cada I' con $||I'|| < \alpha$. Sea $J \subseteq I$, $\mathfrak{A} = \Sigma_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ y $\mathfrak{B} = \Sigma_{j\in J}\mathfrak{A}_j$. Veamos que $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$. Sea $\{i_\nu : \nu < \alpha\} = I$ una enumeración de I, $\{i_\xi : \xi < \nu\} = I_\nu$ y $J_\nu = I_\nu \cap J$, sean $\mathfrak{A}_\nu = \Sigma_{i\in I_\nu}\mathfrak{A}_i$ y $\mathfrak{B}_\nu = \Sigma_{j\in J_\nu}\mathfrak{A}_j$, entonces por la hipótesis de inducción,

$$\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \ldots \prec \mathfrak{A}_\nu \ldots$$

y

$$\mathfrak{B}_0 \prec \mathfrak{B}_1 \prec \ldots \prec \mathfrak{B}_\nu \ldots$$

además

$$\mathfrak{A}_0 \succ \mathfrak{B}_0, \mathfrak{A}_1 \succ \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\nu \succ \mathfrak{B}_\nu \ldots$$

como $\mathfrak{A} = \bigcup_{\nu<\alpha}\mathfrak{A}_\nu$ y $\mathfrak{B} = \bigcup_{\nu<\alpha}\mathfrak{B}_\nu$, por el Teorema de la Cadena Elemental $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$. $\square$

Definición 4.6 *Sea $\mathfrak{A}$ un modelo, y $\bar{a} \in A^k$. Se define el n-tipo de $\bar{a}$ en $\mathfrak{A}$* como el conjunto $\{\phi \in \mathcal{L}_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \models \phi[\bar{a}]$ y $d(\phi) \leq n\}$.

Extendemos nuestra antigua notación para los n-tipos. Si $\mathfrak{A}$ es un modelo, $a \in A$, $\bar{a} \in A^k$, $B \subseteq A$, entonces $\Gamma_n(a, \mathfrak{A})$, $\Gamma_n(\bar{a}, \mathfrak{A})$, $\Gamma_n(B, \mathfrak{A})$ denotan los n-tipos de a, $\bar{a}$ y $\{\Gamma_n(b, \mathfrak{A})\}_{b\in B}$ respectivamente.

Sea $F_{n,k}$ el conjunto de todas las fórmulas ϕ cuyas variables libres están entre $\{v_0, ..., v_{k-1}\}$ y $d(\phi) \leq n$, entonces la equivalencia$(\leftrightarrow)$ parte a $F_{n,k}$ en un número finito de clases de equivalencia. Como $F_{n,k}$ es cerrado bajo $\wedge$, $\vee$ y $\neg$, $F_{n,k}$ puede ser considerada como álgebra booleana. Sea $t_{n,k}$ el número de atomos en $F_{n,k}$. Para cada n-tipo Γ existe un átomo de $F_{n,k}$,

ψ, tal que para cada modelo $\mathfrak{A}$ y cada $\bar{a} \in A^k$, $\mathfrak{A} \models \Gamma[\bar{a}]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \psi[\bar{a}]$.

Para cada n sea $t_n = t_{n,2}$. Definimos dos sucesiones, s_n y u_n; $s_0 = u_0 = 0$, $s_{n+1} = 2(s_n)(t_{u_n})^{s_n} + 1$ y $u_{n+1} = s_{n+1} + u_n$.

La manera en la que está enunciado el siguiente lema es para que pueda ser probado fácilmente por inducción [6], pero ya que no tenemos una aplicación directa del mismo, sólo probaremos el corolario del que sí hacemos uso más adelante.

Lema 4.2 *Sea* $\mathfrak{A} = \mathfrak{C} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{C}' + \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{C}'$. *Sea* $b_1, \ldots, b_k \in B$ $b'_1, \ldots, b'_k \in B'$, $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_k$, $b'_1 \leq b'_2 \leq \ldots \leq b'_k$, $n > 0$, *y donde las siguientes condiciones se cumplen:*

1. *Para cada* i, $\Gamma_{u_n}(b_i, \mathfrak{A}) = \Gamma_{u_n}(b'_i, \mathfrak{A}')$.

2. *Al menos una de las siguientes condiciones pasa:*

   a) $\Gamma_{u_n}(b_1, \mathfrak{B}) = \Gamma_{u_n}(b'_1, \mathfrak{B}')$.

   b) $\Gamma_{u_n-1}([\mathfrak{B}, b_1), \mathfrak{A}) = \Gamma_{u_n-1}([\mathfrak{B}', b'_1), \mathfrak{A}')$,

   y para cada $\bar{\Gamma} \in (\Gamma_{u_n-1}([\mathfrak{B}, b_1), \mathfrak{A}))^{s_n}$, $\bar{\Gamma}$ *se realiza en* $[\mathfrak{B}, b_1)$ *y en* $[\mathfrak{B}', b'_1)$ *relativo a* $\mathfrak{A}$ *y a* $\mathfrak{A}'$ *respectivamente.*

3. *Para cada* i, $1 \leq i < k$, *una de las siguientes condiciones se cumple:*

   a) $\Gamma_{u_n}(\langle b_i, b_{i+1} \rangle, \mathfrak{A}) = \Gamma_{u_n}(\langle b'_i, b'_{i+1} \rangle, \mathfrak{A}')$.

   b) $b_i \neq b_{i+1}, b'_i \neq b'_{i+1}$, $\Gamma_{u_n-1}((b_i, b_{i+1}), \mathfrak{A}) = \Gamma_{u_n-1}((b'_i, b'_{i+1}), \mathfrak{A}')$ *y para cada*
   $\bar{\Gamma} \in (\Gamma_{u_n-1}((b_i, b_{i+1}), \mathfrak{A}))^{s_n}$, $\bar{\Gamma}$ *se realiza en* (b_i, b_{i+1}) *y en* (b'_i, b'_{i+1}) *relativo a* $\mathfrak{A}$ *y a* $\mathfrak{A}'$ *respectivamente.*

Entonces $\Gamma_{u_n}(\langle b_1, \ldots, b_k \rangle, \mathfrak{B}) = \Gamma_{u_n}(\langle b'_1, \ldots, b'_k \rangle, \mathfrak{B}')$.

Corolario 4.5 *Si* $a_1 < b_1$ *y* $a_2 < b_2$, $\Gamma(a_1, \mathfrak{A}) = \Gamma(a_2, \mathfrak{A})$, $\Gamma(b_1, \mathfrak{A}) = \Gamma(b_2, \mathfrak{A})$, $\Gamma((a_1, b_1), \mathfrak{A}) = \Gamma((a_2, b_2), \mathfrak{A})$ *y para cada* n *y* $\bar{\Gamma} \in (\Gamma((a_1, b_1), \mathfrak{A}))^n$, $\bar{\Gamma}$ *se realiza en* (a_1, b_1) *y en* (a_2, b_2), *entonces* $\Gamma(\langle a_1, b_1 \rangle, \mathfrak{A}) = \Gamma(\langle a_2, b_2 \rangle, \mathfrak{A})$.

Demostración: Sea $\mathfrak{C}$ tal que contiene un sólo elemento, sea $\mathfrak{A}' = \mathfrak{C} + \mathfrak{A}$. Aplicamos el Lema anterior a la descomposición de $\mathfrak{A}'$ en $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{A}$, note que $\mathfrak{A}$ cumple las condiciones (2)-(b) y (3)-(b) del Lema anterior, así concluimos que $\Gamma(\langle a_1, b_1 \rangle, \mathfrak{A}) = \Gamma(\langle a_2, b_2 \rangle, \mathfrak{A})$. □

Sea $F \subseteq F_1(T)$ el algebra booleana generada por el conjunto de todas las fórmulas con una variable libre $\varphi(x)$, las cuales definen conjuntos convexos en cada modelo de T.
Denotamos a $\mathcal{F}_T$ como el conjunto de ultrafiltros de F, a los elementos de $\mathcal{F}_T$ los llamamos tipos convexos. Note que $\mathcal{F}_T \subseteq S_1(T)$.
$\mathcal{F}_T$ es un espacio topológico con la Topología de Stone, heredada de $S_1(T)$.

Sea $\mathfrak{A}$ un modelo de T, definimos

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{A}} := \{|\mathfrak{A}|_\Phi : \Phi \in \mathcal{F}_T, |\mathfrak{A}|_\Phi \neq \emptyset\}$$

y le llamamos conjunto de kernels en $\mathfrak{A}$.
Note que $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ es una partición de $\mathfrak{A}$ y cada uno de sus elementos es convexo. Además si $\mathfrak{A}$ es ω-saturado, entonces el orden en $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ induce un orden en $\mathcal{F}_T$. Este es,

$$|\mathfrak{A}|_\Phi < |\mathfrak{A}|_\Psi$$

si y sólo si $\Phi < \Psi$. Observe que es posible dotar a $\mathcal{F}_T$ de la topología del orden inducida por este.

Definición 4.7 *Decimos que $\mathfrak{A}$ es ω-homogeneo si para cada par de n-adas $a_1, ..., a_n$ y $b_1, ..., b_n$ de A tales que*

$$(\mathfrak{A}, a_1, ..., a_n) \equiv (\mathfrak{A}, b_1, ..., b_n)$$

y cualquier $c \in A$ existe un $d \in A$ tal que

$$(\mathfrak{A}, a_1, ..., a_n, c) \equiv (\mathfrak{A}, b_1, ..., b_n, d).$$

Decimos que un conjunto ordenado $\langle X, < \rangle$ es *completo* si cada vez que $X = L \cup R$ con $L < R$ pasa que L tiene un máximo o R un tiene mínimo. L ó R pueden ser vacíos.
El siguiente Teorema es un resultado conocido dentro de la teoría de órdenes.

Teorema 4.6 *Sea $\langle X, < \rangle$ un conjunto ordenado. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X con la topología del orden es compacto.*
2. *$\langle X, < \rangle$ es completo.*
3. *Cada subconjunto de $X \neq \emptyset$ tiene un supremo y un ínfimo.*

Sea $\langle X, < \rangle$ un conjunto ordenado. Para cada $i < \omega$ sean L_i, R_i tales que $L_i \cup R_i = X$ y $L_i < R_i$. Decimos que $\langle L_i, R_i \rangle_{i<\omega}$ es una *sucesión separadora para X,* si para cada $x < y$ existe un i tal que $x \in L_i$ y $y \in R_i$.

Sea $\mathfrak{A}$ un modelo, $a \in A$, y $K \in \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$. Decimos que K es *definible por abajo* si el conjunto $\{b \in A : b > K \text{ o } b \in K\}$ es definible en $\mathfrak{A}$. La definición de K *definible por arriba* es análoga a la anterior.

Cada vez que digamos que $K \in \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ realiza a una fórmula φ, nos estaremos refiriendo a que todo $k \in K$ realiza a φ.

El siguiente Teorema hace una comparación entre la Topología de Stone de $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ heredada de $\mathcal{F}_t$ y la topología de orden.

Lema 4.3 *Sea $\mathfrak{A}$ un modelo ω-saturado, y $K \in \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$. Entonces*

1. a) *K tiene un sucesor inmediato en $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ si y sólo si K es definible por arriba.*

   b) *K es un sucesor inmediato en $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ si y sólo si K es definible por abajo.*

   c) *K es aislado en $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ si y sólo si K es definible en $\mathfrak{A}$.*

2. *$\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ tiene una sucesión separadora.*

3. *$\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ es completo.*

Demostración: 1.a) Suponga que K es definible por arriba. Sea Φ tipo tal que $K_\Phi = K$. Como K es definible por arriba, entonces el conjunto $K_{\geq} = \{a \in A : a \leq k, k \in K\}$ es definible. Así que existe una fórmula $\varphi(x)$ tal que $K_{\geq} = |\mathfrak{A}|_\varphi$. Note que queremos encontrar un tipo $\Phi'(x)$ tal que $K_{\Phi'}$ sea el sucesor inmediato de K. Sea $G = \{\neg\varphi \wedge \psi : \psi \in \Phi,\ \psi \text{ consistente con } \neg\varphi\}$. Sea Φ' un tipo que extiende a G.
Claro que si z realiza a Φ' entonces $\forall k \in K$, $k < z$. Sea z' que realiza a Φ' y $z < z'$ que no realiza a $\varphi(x)$; entonces z realiza $\neg\varphi(x)$. Como las ψ's en Φ son convexas, z realiza a ψ para toda $\psi \in \Phi'$. Con todo lo anterior, Φ' cumple las propiedades deseadas y así $K_{\Phi'}$ es el sucesor inmediato de K.
Suponga que K tiene un sucesor inmediato en $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$. Sea K' sucesor inmediato

de K y Φ', Φ lo tipos que definen a K' y a K respectivamente. Por ser Φ y Φ' distintos, exite una fórmula convexa ψ tal que $\psi \in \Phi$ y $\psi \notin \Phi'$.
Sea $\varphi(y) \equiv \psi(y) \vee \forall x(\psi(x) \to x > y)$. Note que si $z < k$ con $k \in K$ entonces claramente z realiza a $\psi(y)$ o realiza a $\forall x \psi(x)(x > y)$. Por lo tanto, K es definible por arriba bajo $\varphi(y)$.
La demostración de 1.b) es análoga a la anterior. Usando éstas dos obtenemos la demostración directa de 1.c).
Probemos 2). Sea $K \in \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ y $\{\psi_i : i \in \omega\}$ una enumeración de Φ donde $K_\Phi = K$. Para cada $\psi_i \in \Phi$, sea L_i el conjunto definido por la fórmula

$$\varphi_i(y) \equiv (\forall x(\psi_i(x) \to x > y)) \vee \psi_i(y)$$

y R_i el conjunto definido por la fórmula

$$\neg\varphi_i(y) \equiv (\exists x \neg\psi_i(x) \wedge x < y) \wedge \neg\psi_i(y).$$

Del hecho de que cada tipo convexo contiene a φ_i o a $\neg\varphi_i$, se obtiene que $\langle L_i, R_i \rangle_{i<\omega}$ es una sucesión separadora.
Probemos 3). Esto lo haremos probando una serie de incisos.
a) Primero veamos que todo convexo definible es un abierto en la topología del orden (claramente lo es en la Topología de Stone). Es decir, debemos probar que un convexo en $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ definible por una fórmula φ tiene extremos, con lo que tal convexo sería un intervalo.
Sea I_φ un convexo definible por φ. Sea Γ el conjunto de todas las fórmulas convexas γ tales que $I_\varphi \subsetneqq I_\gamma$ y $I_{\psi_\gamma} \neq \emptyset$, donde

$$\psi_\gamma(y) \equiv \forall x \varphi(x) \to ((y > x) \wedge \gamma(y) \wedge \neg\varphi(y)).$$

Note que por ser γ convexa ψ_γ también lo es. Claro que Γ es finitamente satisfacible, por lo que Γ es satisfacible. Usando Lema de Zorn, sea Γ' una extensión completa de Γ, un tipo. Como a $\mathfrak{A}$ lo podemos pensar ω-saturado, $\mathfrak{A}$ realiza a Γ', así $K_{\Gamma'} \in \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$. Veamos que para toda $K' \in \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$, si $C < K' \leq K_{\Gamma'}$ con $C \in I_\varphi$, entonces $K' \in I_\varphi$ o $K' = K_{\Gamma'}$. Sea $C \in I_\varphi$ y sea $K \in \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ tal que $C < K < K_{\Gamma'}$.
Por como elegimos a Γ', existe una $\alpha \in \Gamma'$ tal que K realiza a α. Claro que $K_{\Gamma'}$ realiza a toda $\gamma \in \Gamma'$. Como K realiza a α, entonces $K \in I_\varphi$ ó $K \in I_{\psi_\alpha}$. Supongamos que $K \notin I_\varphi$, entonces K satisface a ψ_α y por hipótesis $K < K_{\Gamma'}$. Sea

$$\beta(x) \equiv \varphi(x) \wedge \alpha(x) \vee x \leq c_K,$$

con c_K una constante para K, por obvias razones β es convexa, además $I_{\psi_\beta} \neq \emptyset$. Por lo tanto $\beta \in \Gamma'$ y entonces $K_{\Gamma'}$ satisface a β, así

$$K_{\Gamma'} \leq K \leq K_{\Gamma'},$$

con lo cual obtenemos que $K = K_{\Gamma'}$.
Con todo lo anterior probamos que todo convexo definible (todo abierto convexo en la Topología de Stone) es un intervalo abierto en la topología del orden.
b) Ahora veamos que hay una base de abiertos definibles en la topología del orden.
Sea A un abierto en $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ y $K \in A$. Por demostrar que existe un intervalo I_φ definible por una fórmula φ el cual cumple $K \in I_\varphi \subsetneq A$.
Sean $K_\Phi, K_\Psi \in A$ tales que $(K_\Phi, K_\Psi) = A$ y así $K_\Phi < K < K_\Psi$; note que como Φ y Ψ son distintos, existen ϕ y ψ convexas tales que $\phi \in \Phi \wedge \phi \notin \Psi$ y $\psi \in \Psi \wedge \psi \notin \Phi$.
Caso 1: Suponga que $\phi \wedge \psi$ es tal que $K \in I_\phi \cap I_\psi$.
Como K_Φ omite a ψ y K_Ψ omite a ϕ, entonces $I_\phi \cap I_\psi \subseteq (K_\Phi, K_\Psi)$. Claramente por a), $I_\phi \cap I_\psi$ es un intervalo abierto en la topología del orden y $K \in I_\phi \cap I_\psi$.
Caso 2: Suponga que $\phi \wedge \psi$ es tal que $K \notin I_\phi \cap I_\psi$. Sea

$$\alpha \equiv (\neg\phi \wedge \neg\psi) \wedge (\forall y \forall z(\phi(y) \wedge \psi(z)) \to (y < x < z)),$$

claro que $K \in I_\alpha$ y $I_\alpha \subseteq (K_\Phi, K_\Psi)$ y por a) I_α es un intervalo.
Caso 3: Suponga que K realiza a ψ y no realiza a ϕ. Sea γ fórmula tal que K realiza a γ y $\gamma \notin \Psi$. El convexo $I_{\gamma\wedge\psi}$ claramente contiene a K, $I_{\gamma\wedge\psi} \subseteq (K_\Phi, K_\Psi)$ y por a) $I_{\gamma\wedge\psi}$ es un intervalo.
Con lo anterior tenemos que hay una base de intervalos abiertos definibles en la topología del orden.
c) Finalmente veamos que $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ es completo. Por el Teorema 4.6 basta ver que $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ es compacto en la topología del orden. Por un resultado bien sabido de Topología General, es suficiente con demostrar que cada cubierta de abiertos básicos tiene una subcubierta finita.
Sea $\mathcal{A}$ una cubierta de intervalos abiertos de $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$, por b) podemos tener una subcubierta $\mathcal{B}$ de intervalos definibles en $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$. Como $\mathcal{F}_T$ con la Topología de Stone es compacto, entonces podemos tener una subcubierta $\mathcal{B}'$ finita de intervalos definibles. $\square$

Observe que en la parte (3)-(a) y (3)-(b) de la prueba anterior demostramos que la Topología de Stone es más fina que la topología del orden en $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$.

Lema 4.4 *Sea $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$; $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son ω-saturados y $\Phi \subseteq F_1(Th(\mathfrak{A}))$ es finitamente satisfacible. Entonces $\mathfrak{A}_\Phi \equiv \mathfrak{B}_\Phi$.*

Demostración: Por el Teorema que dice que $\mathfrak{A}' \equiv_n \mathfrak{B}'$ si y sólo si $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{B}'$, basta probar que $\mathfrak{A}_\Phi \equiv_n \mathfrak{B}_\Phi$.
Para $n = 0$, sea φ un enunciado atómico con n constantes y $c_1^{\mathfrak{A}}, c_2^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{A}}$ las interpretaciones de estas constantes en $\mathfrak{A}$ las cuales están en $\mathfrak{A}_\Phi$, claramente $\mathfrak{A}_\Phi \models \varphi$.
Note que φ sólo puede decir cosas del orden entre éstas constantes o si son distintas entre si, ya que por ser enunciado atómico no tiene cuantificadores. Como las interpretaciones de éstas constantes en $\mathfrak{A}$ están en $\mathfrak{A}_\Phi$, estás satisfacen todas las fórmulas del tipo Φ; por lo que sus interpretaciones en $\mathfrak{B}$ están en $\mathfrak{B}_\Phi$. Claramente $\mathfrak{A} \models \varphi$, como $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \models \varphi$ y $c_1^{\mathfrak{B}}, c_2^{\mathfrak{B}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{B}}$ están en $\mathfrak{B}_\Phi$; $\mathfrak{B}_\Phi \models \varphi$.
Por lo tanto, $\mathfrak{A}_\Phi \equiv_0 \mathfrak{B}_\Phi$.
Veamos que $\mathfrak{A}_\Phi \equiv_n \mathfrak{B}_\Phi$ para toda n. Para esto usaremos el juego EF_n y el teorema que dice que $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{B}'$ si y sólo si el jugador II tiene estrategia ganadora en EF_n para toda n, dicho juego y teorema se enuncian en los preliminares. Por lo tanto, basta describir la estrategia de II.
Empieza el jugador I tomando un elemento cualquiera a_0 en $\mathfrak{A}_\Phi$, el jugador II eligirá un b_0 tal que su tipo es $\Gamma(a_0, \mathfrak{A}_\Phi)$ y realiza a cada

$$\begin{gathered}\Gamma' \in \ \{\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \in S_n(T) : \exists d_1, \ldots, d_{n-1} \in \mathfrak{A}_\Phi, \\ \text{para algún } k\ (d_1, \ldots, d_{k-1}, a_0, d_k, \ldots, d_{n-1}) \text{ realiza a } \Gamma\}\end{gathered}$$

sustituyendo a a_0 por b_0 y los d_i's por unos d_i''s en $\mathfrak{B}_\Phi$. Note que la elección de este b_0 es posible por ser $\mathfrak{B}$ ω-saturado.
Es el turno de I, el cual elige a un a_1 arbitrario. Ahora el jugador II, debe elegir un b_1 tal que el tipo de (b_0, b_1) es $\Gamma((a_0, a_1), \mathfrak{A}_\Phi)$ y realiza a cada

$$\begin{gathered}\Gamma' \in \ \{\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \in S_n(T) : \exists d_1, \ldots, d_{n-2} \in \mathfrak{A}_\Phi, \\ \text{para algún } k\ (d_1, \ldots, d_{k-1}, a_0, a_1 d_k, \ldots, d_{n-2}) \text{ realiza a } \Gamma\}\end{gathered}$$

sustituyendo a a_0 por b_0, a_1 por b_1 y los d_i's por unos d_i''s en $\mathfrak{B}_\Phi$.
Este razonamiento se sigue para toda n-jugada y así describimos la estrategia ganadora para II. □

Lema 4.5 *Sea $\mathfrak{A}$ un modelo ω-saturado de T y $\Phi \in \mathcal{F}_T$. Entonces, o bien $\mathfrak{A}_\Phi$ consta de un sólo elemento b definible en $\mathfrak{A}$, o pasa que $\mathfrak{A}_\Phi$ es autoaditivo(SA).*

Demostración: Primero veamos que, usando el Lema anterior, podemos asumir que $\mathfrak{A}$ es ω-homogeneo.
Sean $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$ tales que $(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \equiv (\mathfrak{A}, b_1, \ldots, b_n)$. Por demostrar que para toda $c \in A$ $\exists d \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n, c) \equiv (\mathfrak{A}, b_1, \ldots, b_n, d)$.
Sean $c \in A$, $\mathfrak{A}' := (\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n)$, $\mathfrak{B}' := (\mathfrak{A}, b_1, \ldots, b_n$ y $\Gamma(c, \mathfrak{A}') = \Gamma'$ el tipo de c en $\mathfrak{A}'$. Como $\mathfrak{A}$ es ω-saturado, entonces $\mathfrak{A}'$ y $\mathfrak{B}'$ son ω-saturados. Usando el Lema anterior,

$$\mathfrak{A}'_{\Gamma'} \equiv \mathfrak{B}'_{\Gamma'};$$

además por la ω-saturación existe $d \in \mathfrak{B}'_{\Gamma'}$ tal que d satisface a Γ'.
Así entonces, los enunciados que satisface c con respecto a $a_1, \ldots, a_n$ son los mismos que satisface d con respecto a $b_1, \ldots, b_n$. Por lo tanto,

$$(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n, c) \equiv (\mathfrak{A}, b_1, \ldots, b_n, d).$$

Ahora comencemos con la prueba de Lema.
Sea $\phi(v_1)$ una fórmula no necesariamente convexa tal que existe un $a \in |\mathfrak{A}|_\phi$ tal que $\mathfrak{A} \models \phi[a]$.
Afirmación: Para cada $c \in |\mathfrak{A}|_\Phi$ existe un $b \in |\mathfrak{A}|_\Phi$ tal que $c \leq b$ y $\mathfrak{A} \models \phi[b]$.
Suponga que no, entonces existe un $c \in |\mathfrak{A}|_\Phi$ y algún $\psi(v_0) \in \Phi$ tal que no existe $b \in |\mathfrak{A}|_\psi$ que cumpla $c \leq b$ y $\mathfrak{A} \models \psi[b]$. Sea $\chi(v_0) \equiv \exists x(v_0 \leq x \wedge \psi(x) \wedge \phi(x))$; entonces $|\mathfrak{A}|_\chi$ es convexo y $|\mathfrak{A}|_\Phi \supsetneq |\mathfrak{A}|_{\Phi \cup \{\chi\}} \neq \emptyset$. Esto prueba que $\chi \notin \Phi$ y $\neg\chi \notin \Phi$, lo cual contradice que Φ es un tipo convexo. Por lo tanto para cada $c \in |\mathfrak{A}|_\Phi$ existe $b \in |\mathfrak{A}|_\Phi$, $c \leq b$ y $\mathfrak{A} \models \phi[b]$.
Sea $\Gamma \in S_1(T)$ y suponga que Γ se realiza en $|\mathfrak{A}|_\Phi$. Sea $c \in |\mathfrak{A}|_\Phi$; por la afirmación anterior, $\{c \leq v_0\} \cup \Gamma$ es finitamente satisfacible y, como $\mathfrak{A}$ es ω-saturado, $\{c \leq v_0\} \cup \Gamma$ es satisfacible. Por lo tanto, si Γ se realiza en $|\mathfrak{A}|_\Phi$ entonces para cada $c \in |\mathfrak{A}|_\Phi$, Γ se realiza en

$$|\mathfrak{A}|_\Phi \cap \{a \in A : c \leq a\}.$$

Sean $a, b, a' \in |\mathfrak{A}|_\Phi$ tales que $b \leq a'$ y $\Gamma(a', \mathfrak{A}) = \Gamma(a, \mathfrak{A})$. Como $\mathfrak{A}$ es ω-homogeneo existe un automorfismo f en $\mathfrak{A}$ tal que $f(a) = a'$. Claramente $f|\mathfrak{A}_\Phi$ es un automorfismo en $\mathfrak{A}_\Phi$. Así entonces, para cada $a, b \in |\mathfrak{A}|_\Phi$ existe $a' \geq b$ y un automorfismo f en $\mathfrak{A}_\Phi$ tal que $f(a) = a'$.
También se puede definir el dual, para cada $c \in |\mathfrak{A}|_\Phi$ existe $b \in |\mathfrak{A}|_\Phi$ tal que $b \leq c$ y $\mathfrak{A} \models \phi[b]$.
Si $\mathfrak{A}_\Phi$ tuviese un subconjunto convexo propio definible, este estaría acotado superior o inferiormente. Sin pérdida de generalidad, suponga que está

acotado superiormente y sea ψ fórmula convexa que define tal conjunto. Sea $a \in \mathfrak{A}_\Phi$ tal que $\mathfrak{A}_\Phi \models \psi[a]$, y sea b cota superior. Por el argumento anterior existen $a' \geq b$ y f automorfismo tal que $f(a) = a'$, pero como f es automorfismo pasa que

$$\mathfrak{A}_\Phi \models \psi[a']$$

lo cual es una contradicción.
Esto implica que no hay subconjuntos definibles convexos de $|\mathfrak{A}|_\Phi$ distintos de $|\mathfrak{A}|_\Phi$ y $\emptyset$. Con esto podemos concluir que $\mathfrak{A}_\Phi$ es SA o $|\mathfrak{A}|_\Phi$ consta de un solo elemento; como $\mathfrak{A}$ es ω-saturado entonces claramente este elemento debe ser definible. □

4.2. Teorías de Órdenes Lineales con $S_1(T)$ finito

En ésta sección caracterizamos a las teorías completas de órdenes lineales T y sus modelos cuando el conjunto de tipos con una variable libre, $S_1(T)$, es finito. Además introduciremos la clase de modelos $\mathcal{I}$, la cual da lugar al Teorema que establece la relación entre la finitud de $S_1(Th(\mathfrak{A}))$ y la pertenencia del modelo $\mathfrak{A}$ en la clase $\mathcal{I}$.

Definición 4.8 *Sea $\mathfrak{A}$ un modelo SA de T y $a \in A$. Definimos $C^a_{\mathfrak{A}}$ como la unión de todos los subconjuntos convexos y acotados de A que tienen a a y son definibles sobre a.*
$\mathfrak{C}^a_{\mathfrak{A}}$ es el submodelo de $\mathfrak{A}$ con universo $C^a_{\mathfrak{A}}$ y lo llamamos la componente convexa de a en $\mathfrak{A}$.

Para la siguiente Proposición necesitamos un poco de notación nueva:

$$\overline{C}^a_{\mathfrak{A}} = C^a_{\mathfrak{A}} \cap \{c \in A : a \leq c\} \text{ y } \underline{C}^a_{\mathfrak{A}} = C^a_{\mathfrak{A}} \cap \{c \in A : c \leq a\}.$$

Proposición 4.3 *Sea $\mathfrak{A}$ modelo SA; entonces para cada $a, b \in A$, o bien $C^a \cap C^b = \emptyset$ o $C^a = C^b$.*

Demostración: La prueba se divide en distintas afirmaciones.
Afirmación 1): Probaremos que si $b \in \overline{C}^a$, entonces $\overline{C}^b \supseteq \overline{C}^a \cap \{c \in A : b \leq c\}$.
Si no, sea $\phi(x, v_0)$ tal que $|\mathfrak{A}|_{\phi,a}$ es acotado, convexo, con a como mínimo y

tal que existe un $d \in |\mathfrak{A}|_{\phi,a}$ el cual cumple $d > \overline{C}^b$. Por el Corolario 4.2 existe una fórmula examinadora $\phi^*(x, v_0)$ tal que $|\mathfrak{A}|_{\phi^*,b} = |\mathfrak{A}|_{\phi,a} \cap \{c \in A : b \leq c\}$. Así $d \in |\mathfrak{A}|_{\phi^*,a}$ contradiciendo la elección de d. Por lo tanto $\overline{C}^b \supseteq \overline{C}^a \cap \{c \in A : b \leq c\}$.
*Afirmación 2):*Probaremos que si $b \in \overline{C}^a$, entonces $\overline{C}^b \subseteq \overline{C}^a \cap \{c \in A : b \leq c\}$. Suponga que esto no se cumple. Sea $\phi(x, v_0)$ tal que $a, b \in |\mathfrak{A}|_{\phi,a} \subseteq \overline{C}^a$ y $\mathfrak{A}_{\phi,a} \Subset \mathfrak{A}$. Como $\overline{C}^b \supsetneqq \overline{C}^a \cap \{c \in A : b \leq c\}$ entonces existe una fórmula $\psi(x, v_0)$ tal que $b \in |\mathfrak{A}|_{\psi,a} \subseteq \overline{C}^b$ y $|\mathfrak{A}|_{\psi,a} \supsetneqq \overline{C}^a \cap \{c \in A : b \leq c\}$.
Podemos asumir que para cada $c \in A$, $|\mathfrak{A}|_{\psi,c}$ es convexo, acotado y tiene a c como mínimo. Sea $\chi(x, v_0) \equiv \phi(x, v_0) \vee \exists y(\phi(x, y) \wedge \psi(y, v_0))$. Note que $|\mathfrak{A}|_{\chi,a}$ es convexo, tiene a a como mínimo, y $|\mathfrak{A}|_{\chi,a} \supsetneqq \overline{C}^a$. Por lo tanto $|\mathfrak{A}|_{\chi,a} = \{c \in A : a \leq c\}$, así que $\mathfrak{A} \models \forall y(y > a \rightarrow \chi(a, y))$. Definimos $\Gamma = \{\neg\psi(d, v_0) : d \in |\mathfrak{A}|_{\phi,a}\} \cup \{v_0 > a\}$. Como $|\mathfrak{A}|_{\psi,c}$ es acotado por arriba para cada $c \in A$, Γ es finitamente satisfascible en $\mathfrak{A}$. Así entonces existe $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \models \Gamma[c]$ para algún $c \in \mathfrak{B}$. Pero

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \models a < c \wedge \forall y(\phi(a, y) \rightarrow \neg\psi(y, c));$$

como $|\mathfrak{A}|_{\phi,a}$ es acotado,

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \models \neg\phi[a, c].$$

Así

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \models a < c \wedge \neg\chi[a, c]$$

por lo que

$$\mathfrak{A} \models \exists y(a < y \wedge \neg\chi(a, y)).$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto la Afirmación 2) es verdadera.
Afirmación 3): Si $b \in \overline{C}^a$ entonces $a \in \underline{C}^b$.
Podemos asumir que $\overline{C}^a$ es acotado por arriba. Por contradicción. Suponga que $b \in \overline{C}^a$ y $a \notin \underline{C}^b$. Sea $\phi(x, v_0)$ tal que $|\mathfrak{A}|_{\phi,a}$ es acotado, convexo, con mínimo a y $b \in |\mathfrak{A}|_{\phi,a}$. Además podemos asumir que $|\mathfrak{A}|_{\phi,c}$ es acotado, convexo y con mínimo c para cada $c \in A$. Entonces para cada $d \in A$ existe $c < d$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \phi[c, b],$$

ya que si esto no fuera cierto tómese

$$\chi \equiv x \geq v_0 \wedge \exists y(y \leq v_0 \wedge \phi(y, x)),$$

luego entonces $|\mathfrak{A}|_{\chi,b}$ es convexo, acotado, con mínimo b y contiene a a; así $|\mathfrak{A}|_{\chi,b} \supsetneqq \underline{C}^b$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\mathfrak{A} \models \forall y \exists z(z < y \wedge \phi(z, b))$. Como $\mathfrak{A}$ es SA y $\overline{C}^a$ es acotado, existe $b' > \overline{C}^a$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \forall y \exists z(z < y \wedge \phi(z, b')).$$

Así que existe un $a' < a$ tal que $\mathfrak{A} \models \phi[a', b']$.
Con lo anterior obtenemos que $\overline{C}^{a'} \supseteq |\mathfrak{A}|_{\phi,a'} \supsetneqq \overline{C}^a$ lo cual contradice la Afirmación 1) y por lo tanto Afirmación 3) es verdadera.
Si cambiamos a $\overline{C}$ por $\underline{C}$ en las Afirmaciones 1), 2) y 3) la prueba es análoga.
Con todo lo anterior es fácil deducir que si $C^a \cap C^b \neq \emptyset$ entonces $C^a = C^b$. $\square$

Lema 4.6 *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ modelos SA. Entonces*
(i) si $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ y $a \in A$ entonces $\mathfrak{C}^a_{\mathfrak{A}} \prec \mathfrak{C}^a_{\mathfrak{B}}$.
(ii) si $\bar{a} \in A^n$, $\bar{b} \in B^n$, $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b})$, y los elementos que componen la n-ada $\bar{a}$ están todos en la misma componente $\mathfrak{C}$, entonces los elementos que componen a $\bar{b}$ están todos en la misma componente digamos $\mathfrak{D}$, y $(\mathfrak{C}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{D}, \bar{b})$.

Demostración: Probemos (i). Sea α la fórmula $\exists x \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)$ tal que $\mathfrak{C}^a_{\mathfrak{B}} \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n)$ con $a_1, \ldots, a_n$ y $b \in \mathfrak{C}^a_{\mathfrak{B}}$. Sea $\mathfrak{B}_{\psi,a}$ conjunto acotado, definible por ψ bajo a, convexo y que contiene a b. Claramente $\mathfrak{B}_{\psi,a} \subseteq \mathfrak{C}^a_{\mathfrak{B}} \subseteq \mathfrak{B}$. Entonces,

$$\mathfrak{C}^a_{\mathfrak{B}} \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n) \wedge \psi(b)$$

y

$$(\mathfrak{B}, a) \models \exists x(\varphi(x, a_1, \ldots, a_n) \wedge \psi(x)).$$

Como $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, entonces $(\mathfrak{A}, a) \prec (\mathfrak{B}, a)$ por lo que

$$(\mathfrak{B}, a) \models \exists x(\varphi(x, a_1, \ldots, a_n) \wedge \psi(x)).$$

Así que existe $a' \in |\mathfrak{A}_\psi|$ el cual satisface a $\varphi(x, a_1, \ldots, a_n)$, claro que $|\mathfrak{A}_\psi| \subseteq |\mathfrak{C}^a_{\mathfrak{A}}|$. Por lo tanto,

$$\mathfrak{C}^a_{\mathfrak{B}} \models \varphi(a', a_1, \ldots, a_n).$$

Probemos (ii). Veamos que $b_1, \ldots, b_n$ están en la misma componente. Note que por la Propocisión anterior $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{a_i}$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, por lo que pensaremos a $\mathfrak{C}$ como $\mathfrak{C}^{a_1}$. Sean $c_1, \ldots, c_n$ constantes tales que la interpretación de cada c_i en $\mathfrak{A}$ y en $\mathfrak{B}$ son a_i y b_i respectivamente. Sea $\mathfrak{A}_{\varphi,a_1} \subseteq \mathfrak{C}^{a_1}$ definible por φ bajo a_1 tal que $a_2 \in \mathfrak{A}_{\varphi,a_1}$. Además,

$$(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \varphi(c_1^{\mathfrak{A}}, c_2^{\mathfrak{A}}),$$

entonces por la equivalencia elemental

$$(\mathfrak{B}, b_1, \ldots, b_n) \models \varphi(c_1^{\mathfrak{B}}, c_2^{\mathfrak{B}}).$$

Así $\mathfrak{B}_{\varphi,b_1}$ es definible por φ bajo b_1 y $b_2 \in \mathfrak{B}_{\varphi,b_1}$. Claro que $\mathfrak{B}_{\varphi,b_1} \subseteq D_1$, por lo que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$. Lo mismo pasa para toda b_i, $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_i$.

Ahora veamos que $(\mathfrak{C}, a_1, \ldots, a_n) \equiv (\mathfrak{D}, b_1, \ldots, b_n)$. Note que basta probarlo para los enunciados de la forma $\exists x \varphi(a_1, \ldots, a_n, x)$, ya que los enunciados con el cuantificador universal $\forall x \varphi(a_1, \ldots, a_n, x)$ son equivalentes a $\neg(\exists x \neg\varphi(a_1, \ldots, a_n, x))$.

Sean $\mathfrak{C}$ componente de $\mathfrak{A}$ tal que $a_1, \ldots, a_n$ y α el enunciado $\exists x \varphi(a_1, \ldots, a_n, x)$ tal que

$$(\mathfrak{C}, a_1, \ldots, a_n) \models \exists x \varphi(a_1, \ldots, a_n, x).$$

Claro que

$$(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \exists x \varphi(a_1, \ldots, a_n, x)$$

y

$$(\mathfrak{B}, b_1, \ldots, b_n) \models \exists x \varphi(b_1, \ldots, b_n, x).$$

Sean $c \in C$ tal que $(\mathfrak{C}, a_1, \ldots, a_n) \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, c)$ y a_1, ψ tales que $c \in \mathfrak{A}_{\psi,a_1} \subseteq \mathfrak{C}$. Entonces

$$(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \exists x(\varphi(a_1, \ldots, a_n, x) \wedge \psi(a_1, x)),$$

por lo que

$$(\mathfrak{B}, b_1, \ldots, b_n) \models \exists x(\varphi(b_1, \ldots, b_n, x) \wedge \psi(b_1, x))$$

y $\mathfrak{B}_{\psi,b_1} \subseteq \mathfrak{D}$. Así, existe $d \in D$ tal que

$$(\mathfrak{B}, b_1, \ldots, b_n) \models \varphi(b_1, \ldots, b_n, x, d).$$

Por lo tanto, todo enunciado que hace verdadero $(\mathfrak{C}, a_1, \ldots, a_n)$ también lo hace verdadero $(\mathfrak{D}, b_1, \ldots, b_n)$.

Análogamente se prueba que todo enunciado que hace verdadero $(\mathfrak{D}, b_1, \ldots, b_n)$ también lo hace verdadero $(\mathfrak{C}, a_1, \ldots, a_n)$. □

Lema 4.7 *Sea $\mathfrak{A}$ SA, $T = Th(\mathfrak{A})$, $S_1(T)$ finito. Entonces,*

1. *Si $\mathcal{C}$ es una componente en $\mathfrak{A}$, entonces $||S_1(Th(\mathfrak{C}))|| \leq ||S_1(T)||$.*
2. *Exactamente una de las siguientes opciones pasa:*

- *(a)* $\forall a \in A$, $\mathfrak{C}^a \prec \mathfrak{A}$.
- *(b)* $\forall a \in A$, $\mathfrak{C}^a$ *es definible sobre* a*. No hay ni primera ni última componente. Si* $C^{a_1} < C^{a_2}$ *y* $\Gamma \in S_1(T)$ *entonces existe* $a \in A$ *tal que* $\Gamma(a, \mathfrak{A}) = \Gamma$ *y* $C^{a_1} < C^a < C^{a_2}$.

Demostración: Probemos (1). Note que si $\mathfrak{C}$ es una componente de $\mathfrak{A}$, entonces a $\mathfrak{A}$ lo podemos ver como $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C} + \mathfrak{A}_2$, con $\mathfrak{A}_1 = \{a \in A : a < c, c \in C\}$ y $\mathfrak{A}_2 = \{a \in A : c < a, c \in C\}$.
Sea Γ un tipo consistente con $Th(\mathfrak{C})$, entonces existe $\mathfrak{C}' \equiv \mathfrak{C}$ tal que $\mathfrak{C}'$ satisface a Γ. Note que $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}' + \mathfrak{A}_2$ es elementalmente equivalente a $\mathfrak{A}$ por lo que $\mathfrak{A}' \models Th(\mathfrak{C})$. Como $\mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{A}'$ y $\mathfrak{C}'$ realiza a Γ, sean $c \in C'$ que realiza a Γ y a $\varphi(x)$ una fórmula convexa en Γ, note que por Proposición 4.3 $C'^c = C'$. Además, por la convexidad de $\varphi(x)$, si $a \in A'$ satisface a $\varphi(x)$ entonces $a \in C'$. Así entonces $\mathfrak{A}'$ realiza a Γ con elementos en C'. Por lo tanto $\Gamma \in S_1(Th(\mathfrak{A}))$, luego entonces $S_1(Th(\mathfrak{C})) \subseteq S_1(Th(\mathfrak{A}))$. En consecuencia, $||S_1(Th(\mathfrak{C}))|| \leq ||S_1(Th(\mathfrak{A}))||$.
(2) Por ser $S_1(T)$ finito, todos los tipos consistentes con T son aislados. Es fácil ver que para cualquier $\mathfrak{B}$, si $\Gamma(b, \mathfrak{B})$ es aislado en $S_1(Th(\mathfrak{B}))$ y $\mathfrak{C}^b_{\mathfrak{B}}$ es definible bajo b, entonces es definible bajo cualquiera de sus elementos.
Caso 1: Si $C^a = A$ para algún $a \in A$ entonces (a) se sostiene.
Caso 2: Suponga $C^a \neq A$ y C^a no es definible bajo a para algún $a \in A$, entonces claramente C^a no es definible bajo ninguno de sus elementos.
Primero veamos que $\mathfrak{C}^a \prec \mathfrak{A}$. Por contradicción. Sean $\phi(x, y)$ una fórmula y $b \in C^a$. SPG podemos asumir que existe un $d > \overline{C}^a = C^a \cap \{c \in A : a \leq c\}$ tal que $\mathfrak{A} \models \phi[b, d]$ y para ningún $c \in C^a$, $\mathfrak{A} \models \phi[b, c]$.
Note que por Proposición 4.3 $\mathfrak{C}^a = \mathfrak{C}^b$ además es acotado por d, así $\overline{C}^b$ es definible bajo b por la fórmula

$$\psi(b, v_0) = \forall z(b \leq z \leq v_0 \rightarrow \neg\phi(z)).$$

Sean α una fórmula que genera a $\Gamma(b, \mathfrak{A})$ y

$$\chi(b, v_0) = v_0 \leq b \wedge \forall z[\exists y((\alpha(y) \wedge (\phi(y, z)) \wedge z \leq b) \rightarrow (z < v_0)],$$

es fácil ver que es convexa y que define a $\underline{C}^b$ bajo b, por lo tanto C^b es definible bajo b y esto es una contradicción.
Con esto concluimos que $\mathfrak{C}^a \prec \mathfrak{A}$. Además, como cada tipo en $S_1(T)$ es aislado, $\Gamma(C^a, \mathfrak{A}) = S_1(T)$; por (ii) del Lema anterior para cada componente $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{C}^a$. En consecuencia, como $\mathfrak{A}$ es la suma de las componentes de cada uno de sus elementos las cuales son SA y $\mathfrak{C}^a \prec \mathfrak{A}$, entonces $\mathfrak{A}$ es

la suma de modelos SA elementalmente equivalentes. Así $\mathfrak{A} \succ \mathfrak{C}$ para cada componente $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{A}$. Con lo anterior probamos que si para algún $a \in A$, C^a no es definible bajo a entonces (a) se sostiene.
Caso 3: Suponga que para cada $a \in A$, $C^a \neq A$ y C^a es definible bajo a. Suponga $C^a < C^b$ y existe $\Gamma \in S_1(T)$ el cuál no se realiza por ningún elemento c tal que $C^a < c < C^b$. Similar a como se hizo en el Caso anterior como C^a es definible bajo a y $C^a < C^b$ sea $\psi(b, v_0)$ una fórmula que define a $\underline{C}^b$ y $\phi(a, v_0)$ una fórmula que define a $\overline{C}^a$. Sea α que genera a Γ y β que genera a $\Gamma(b, \mathfrak{A})$. Sea

$$\chi(a, v_0) \equiv a \leq v_0 \wedge \exists x(v_0 \leq x \wedge \beta(x) \wedge \forall y((a \leq y \leq x \wedge \neg\psi(x, y) \wedge \neg\phi(a, y)) \rightarrow \neg\alpha(y)));$$

entonces $|\mathfrak{A}|_{\chi,a} = \{c \in [a, b'] :$ para algún b' tal que $\Gamma(b', \mathfrak{A}) = \Gamma(b, \mathfrak{A})$ y no existe elemento entre $\overline{C}^a$ y $\underline{C}^{b'}$ que realiza a $\Gamma\}$. Así $|\mathfrak{A}|_{\chi,a}$ es convexo, acotado y $|\mathfrak{A}|_{\chi,a} \supsetneqq \overline{C}^a$ lo cual es imposible. Falta ver que no hay primera ni última componente en $\mathfrak{A}$. Si C^a fuera la última componente en $\mathfrak{A}$ ésta es definible en $\mathfrak{A}$, entonces $C^a = A$, contradiciendo nuestra suposición. Con todo (b) se sostiene. $\square$

Lema 4.8 *Sea $S_1(Th(\mathfrak{A}))$ finito, $b_1 < b_2 < b_3$ elementos de A, $\Gamma(b_1, \mathfrak{A}) = \Gamma(b_2, \mathfrak{A}) = \Gamma$, y $\Gamma([b_1, b_3], \mathfrak{A}) = S_1(Th(\mathfrak{A}))$. Entonces, pasa $\Gamma([b_1, b_2], \mathfrak{A}) = S_1(Th(\mathfrak{A}))$ o pasa $\Gamma([b_2, b_3], \mathfrak{A}) = S_1(Th(\mathfrak{A}))$.*

Demostración: Primero probemos la siguiente.
Afirmación: Si $[b_1, b_2]$ realiza un tipo Γ', entonces $[b_2, b_3]$ realiza a Γ'.
Por contradicción, suponga que Γ' se realiza en $[b_1, b_2]$ y se omite en $[b_2, b_3]$. Como los tipos en $S_1(Th(\mathfrak{A}))$ son aislados, sea γ una fórmula que genera a Γ'. Sea $\varphi(b_3, v_0)$ la fórmula $\exists y((v_0 < y < b_3) \wedge \gamma(y))$. Claramente b_1 hace verdadera a $\varphi(b_3, v_0)$ por lo que $\varphi \in \Gamma(b_1, \mathfrak{A})$, pero b_2 no hace verdadera a $\varphi(b_3, v_0)$, lo cual contradice que b_1 y b_2 tengan el mismo tipo.
Con ésta Afirmación obtenemos que

$$\Gamma([b_1, b_2], \mathfrak{A}) \subseteq \Gamma([b_2, b_3], \mathfrak{A}) \subseteq S_1(Th(\mathfrak{A})).$$

Pero

$$\Gamma([b_1, b_2], \mathfrak{A}) \cup \Gamma([b_2, b_3], \mathfrak{A}) = \Gamma([b_1, b_3], \mathfrak{A}) = S_1(Th(\mathfrak{A})).$$

Así entonces $\Gamma([b_2, b_3], \mathfrak{A}) = S_1(Th(\mathfrak{A}))$. $\square$

A continuación vamos a definir una clase de modelos en $\mathcal{L}$, la cual caracterizará a las teorías completas de estos modelos.

Definimos recursivamente a la clase de modelos $\mathcal{I}$. $\mathcal{I}_\prime$ contiene a todos los modelos con un sólo elemento. $\mathfrak{A} \in \mathcal{I}_{i+1}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \in \mathcal{I}_i$ o bien una de las siguientes condiciones sucede:

1. $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ y $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in \mathcal{I}_i$.
2. $\mathfrak{A} \cong \sum_{r\in\mathbb{Q}} \mathfrak{A}^r$, donde $\mathbb{Q}$ son los racionales, cada $\mathfrak{A}^r \in \mathcal{I}_n$ y la familia $\{\{r \in \mathbb{Q} : \mathfrak{A}^r \equiv \mathfrak{A}_i\} | i \in \{1, ..., n\}\}$ es una partición de $\mathbb{Q}$ en subconjuntos densos de $\mathbb{Q}$.
3. $\mathfrak{A} \cong \sum_{z\in\mathbb{Z}} \mathfrak{A}_z$ donde para cada $z \in \mathbb{Z}$ $\mathfrak{A}_z \in \mathcal{I}_i$ y para cada $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{A}_{z_1} \equiv \mathfrak{A}_{z_2}$.

Teorema 4.7 *Sea $\mathfrak{A}$ un modelo en $\mathcal{L}$; entonces $S_1(Th(\mathfrak{A}))$ es finito si y sólo si $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}' \in \mathcal{I}$.*

Demostración: Veamos por inducción que si $\mathfrak{A} \in \mathcal{I}$ entonces $S_1(Th(\mathfrak{A}))$ es finito. Claro que si $\mathfrak{A} \in \mathcal{I}_0$ entonces $\mathfrak{A}$ es un sólo punto por lo que $||S_1(Th(\mathfrak{A}))|| = 1$.
Suponga que para cada $\mathfrak{B} \in \mathcal{I}_n$ $S_1(Th(\mathfrak{B}))$ es finito. Veamos que para cada $\mathfrak{A} \in \mathcal{I}_{n+1}$, $S_1(Th(\mathfrak{A}))$ es finito. Es claro que si $\mathfrak{A}$ es finito entonces $S_1(Th(\mathfrak{A}))$ es finito.
Caso 1: Si $\mathfrak{A} \cong \sum_{z\in\mathbb{Z}} \mathfrak{A}_z$ donde para cada $z \in \mathbb{Z}$ $\mathfrak{A}_z \in \mathcal{I}_n$ y para cada $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{A}_{z_1} \equiv \mathfrak{A}_{z_2}$.
Sea $z_0 \in \mathbb{Z}$, como para cada $z \in \mathbb{Z}$ $\mathfrak{A}_z$ es elementalmente equivalente a $\mathfrak{A}_{z_0}$ entonces $\mathfrak{A}_z \models Th(\mathfrak{A}_{z_0})$, por Hipótesis de Inducción $||S_1(Th(\mathfrak{A}_{z_0}))||$ es finito por lo que todo $\Gamma \in S_1(Th(\mathfrak{A}_{z_0}))$ es aislado, así entonces cualquier modelo de $Th(\mathfrak{A}_{z_0})$ satisface a todo $\Gamma \in S_1(Th(\mathfrak{A}_{z_0}))$. Por lo tanto, para todo $z \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{A}_z$ y $\mathfrak{A}_{z_0}$ satisfacen exactamente los mismos 1-tipos.
Sean $\Gamma \in S_1(Th(\mathfrak{A}))$ el tipo de b en $\mathfrak{A}$ y γ la fórmula generadora de Γ, claro que $\mathfrak{A} \models \gamma[b]$. Por un caso particular del Corolario 4.2 tomando cero parámetros, existe $\gamma^*(x)$, la fórmula examinadora de γ, tal que $\mathfrak{A}_z \models \gamma^*[b]$. Es claro que $\langle\gamma^*\rangle = \Gamma^*$ es el 1-tipo de b en $\mathfrak{A}_z$.
Afirmación: Si $\Gamma \neq \Sigma$ 1-tipos en $\mathfrak{A}$, entonces $\Gamma^* \neq \Sigma^*$.
Existe ψ tal que $\psi \in \Gamma$ y $\neg\psi \in \Sigma$, así $\psi^* \in \Gamma^*$ y $(\neg\psi)^* \in \Sigma^*$. Basta ver que

$\neg(\psi^*) \in \Sigma^*$ si y sólo si $(\neg\psi)^* \in \Sigma^*$.
Suponga $\neg(\psi^*) \in \Sigma^*$ y sea $b \in A_{z_0}$ tal que $\mathfrak{A}_{z_0} \models \neg(\psi^*)[b]$,

si y sólo si	$\mathfrak{A}_{z_0} \not\models \psi^*[b]$	
si y sólo si	$\mathfrak{A} \not\models \psi[b]$	(por Corolario 4.2)
si y sólo si	$\mathfrak{A} \models \neg\psi[b]$	
si y sólo si	$\mathfrak{A}_{z_0} \models (\neg\psi)^*[b]$	(por Corolario 4.2).

Así entonces $\neg(\psi^*) \in \Sigma^*$ si y sólo si $(\neg\psi)^* \in \Sigma^*$, por lo tanto $\Gamma^* \neq \Sigma^*$. Con la afirmación anterior podemos construir una función uno-a-uno $f : S_1(Th(\mathfrak{A})) \to S_1(Th(\mathfrak{A}_{z_0}))$, donde $\Gamma \mapsto \Gamma^*$.
Por lo tanto $S_1(Th(\mathfrak{A}))$ es finito.
Caso 2: $\mathfrak{A} \cong \sum_{r\in\mathbb{Q}} \mathfrak{A}^r$ donde cada $\mathfrak{A}^r \in \mathcal{I}_n$, $\mathbb{Q}$ son los racionales y la familia $\{\{r \in \mathbb{Q} : \mathfrak{A}^r \equiv \mathfrak{A}_i\} | i \in \{1, ..., n\}\}$ es una partición de $\mathbb{Q}$ en subconjuntos densos de $\mathbb{Q}$.
La prueba de este caso es análoga a la prueba del Caso 1 con
$f : S_1(Th(\mathfrak{A})) \to S_1(Th(\mathfrak{A}_1)) \cup S_1(Th(\mathfrak{A}_2)) \cup \ldots \cup S_1(Th(\mathfrak{A}_n))$.
Ahora probaremos por Inducción sobre la cardinalidad de $S_1(Th(\mathfrak{A}))$ que si $||S_1(Th(\mathfrak{A}))|| \leq n$ entonces $\mathfrak{A} \in \mathcal{I}_{2n-1}$.
Veamos que esto es cierto para $n = 1$. Sea Γ este único tipo.
Caso 1: Γ tiene a la fórmula $\varphi(x) = \neg\exists y(y < x) \wedge \neg\exists z(x < z)$, "No tengo a nadie a mi izquierda ni a mi derecha".
Note que todos los puntos de $\mathfrak{A}$ deben satisfacer a la fórmula por lo tanto $\mathfrak{A}$ es un sólo punto.
Caso 2: Γ tiene a la negación de $\varphi(x)$.
Suponga que $\exists y(x < y) \in \Gamma$. Sea $a \in A$, claro que a satisface a ésta fórmula, así que existe $b \in A$ $a < b$, pero b satisface a la fórmula $\exists z(z < x)$ la cual debe estar en Γ ya que $\Gamma(b, \mathfrak{A}) = \Gamma$, además $\Gamma(a, \mathfrak{A}) = \Gamma$. Por lo tanto, si $\exists y(x < y) \in \Gamma$, entonces $\exists z(z < x) \in \Gamma$. El reverso también se cumple usando un razonamiento similar.
Subcaso 2.1: $\psi(x) = \exists y(x < y \wedge \forall z(x < z \to y \leq z)) \in \Gamma$.
Usando los mismos argumentos que antes tenemos que $\psi(x) = \exists y(x < y \wedge \forall z(x < z \to y \leq z))$ si y sólo si $\phi(x) = \exists y(y < x \wedge \forall z(z < x \to z \leq y))$.
Observe que un modelo $\mathfrak{A}$ con un sólo tipo Γ el cual contiene a $\neg\varphi(x)$, $\psi(x)$ y a $\phi(x)$, o bien es $\mathbb{Z}$ o copias de $\mathbb{Z}$. Usando el juego EF_n es fácil ver que para todo conjunto J, $\sum_{j\in J} \mathbb{Z}_j \equiv \mathbb{Z}$. En este caso $\mathfrak{A}$ es como dice (3) en la definición de $\mathcal{I}$. Por lo tanto $\mathfrak{A} \in \mathcal{I}$.

Subcaso 2.2: $\neg\psi(x) \in \Gamma$, la cual dice $\forall y(x < y) \to \exists z(x < z < y)$. Note que cada elemento de $\mathbb{Q}$ satisface a Γ, por la ω-categoricidad de $\mathbb{Q}$ todo modelo numerable $\mathfrak{A}$ con Γ como su único tipo es isomorfo a $\mathbb{Q}$. Así $\mathfrak{A}$ es como dice (2) de la definición de $\mathcal{I}$. Por lo tanto $\mathfrak{A} \in \mathcal{I}$.
Suponga que $||S_1(Th(\mathfrak{A}))|| = n + 1$.
Primero consideremos cuando $\mathfrak{A}$ no es SA; entonces existe una fórmula convexa la cual define a un subconjunto propio y convexo en A, así que podemos ver a A como la suma de dos subconjuntos propios definibles convexos, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\varphi + \mathfrak{A}_{\neg\varphi}$. Por lo tanto $||S_1(Th(\mathfrak{A}_\varphi))||$, $||S_1(Th(\mathfrak{A}_{\neg\varphi}))|| \leq n$, debido a que ambos están contenidos en $S_1(Th(\mathfrak{A}))$, son ajenos y no vacíos. Por la Hipótesis de Inducción $\mathfrak{A}_\varphi$ y $\mathfrak{A}_{\neg\varphi}$ están en $\mathcal{I}_{2n-1}$ por lo que $\mathfrak{A} \in \mathcal{I}_{2n}$.
Ahora suponga que $\mathfrak{A}$ satisface el caso 2-(b) del Lema 4.7. Probaremos que para cada $a \in A$, $\mathfrak{C}^a \in \mathcal{I}_{2n}$.
Note que si $||S_1(Th(\mathfrak{C}^a))|| \leq n$ entonces esto es verdadero por la Hipótesis de Inducción y así pasa (2) de la definición de $\mathcal{I}$.
Suponga que $||S_1(Th(\mathfrak{C}^a))|| = n + 1$ para algún $a \in A$.
Afirmación: Para cada $b \in A$, $\mathfrak{C}^a \equiv \mathfrak{C}^b$.
Sea β el enunciado $\exists x\psi(x)$ tal que $\mathfrak{C}^b \models \beta$. Sea $d \in C^b$ tal que $\mathfrak{C}^b \models \psi[d]$. Así $\psi(x) \in \Gamma(d, \mathfrak{A})$. Como $||S_1(Th(\mathfrak{C}^a))|| = n + 1$ pasa que existe $e \in C^a$ con $\Gamma(d, \mathfrak{A}) = \Gamma(e, \mathfrak{A})$, por lo que $\mathfrak{C}^a \models \psi[e]$. Por lo tanto $\mathfrak{C}^a \models \exists x\psi(x)$. Con esto queda probada la afirmación.
Por Lema 4.1 si $\mathfrak{C}^a$ es SA pasa que $\mathfrak{C}^a \prec \mathfrak{A}$, lo cual es imposible ya que estamos en el caso 2-(b). Así entonces $\mathfrak{C}^a$ no es SA; como ya probamos el caso no-SA obtenemos que $\mathfrak{C}^a \in \mathcal{I}_{2n}$. Sea $J \subseteq A$ el cual contiene sólo un representante de cada componente de $\mathfrak{A}$. Es fácil ver que la descomposición $\mathfrak{A} = \sum_{a\in J} \mathfrak{C}^a$ cumple las condiciones del inciso (2) de la definición de $\mathcal{I}$. Con esto concluimos que $\mathfrak{A} \in \mathcal{I}_{2n+1}$.
Suponga que $\mathfrak{A}$ satisface el caso 2-(a) del Lema 4.7. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\mathfrak{A}$ consiste de una sola componente. Sea $\Gamma \in S_1(Th(\mathfrak{A}))$, como $S_1(Th(\mathfrak{A}))$ es finito podemos encontrar una sucesión $\{a_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ de elementos en $\mathfrak{A}$ que realizan a Γ. Sea $z \to a_z$ un isomorfismo de orden. Suponga que tal sucesión cumple que para cada $z \in \mathbb{Z}$, $\Gamma([a_z, a_{z+1}], \mathfrak{A}) = S_1(Th(\mathfrak{A}))$, y no existe $a \in (a_z, a_{z+1})$ que realice a Γ tal que $\Gamma([a_z, a], \mathfrak{A}) = \Gamma([a, a_{z+1}], \mathfrak{A}) = S_1(Th(\mathfrak{A}))$. Sea γ la fórmula que genera a Γ. Como $S_1(Th(\mathfrak{A}))$ es finito, sea $S_1(Th(\mathfrak{A})) = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$ y sea γ_i la fórmula que genera a cada $\Gamma_i \in S_1(Th(\mathfrak{A}))$. Si $\{a_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ fuera acotado entonces con la fórmula
$\alpha(v_0) = \exists x\exists y(x \leq v_0 \leq y) \wedge (\gamma(x) \wedge \gamma(y)) \wedge (\bigvee_{i\leq m}(\exists z(x \leq z \leq y) \to \gamma_i(z))) \wedge (\forall w((x < w < y) \wedge \gamma(w)) \to ((\bigvee_{i\leq m}(\neg\exists u(x < u < w) \wedge \gamma_i(u))) \wedge (\bigvee_{i\leq m}(\neg\exists u(w < u < y) \wedge \gamma_i(u)))$

obtendriamos un submodelo de $\mathfrak{A}$ convexo, propio y definible por α, lo cual contradice el que $\mathfrak{A}$ sea SA.

Sea $z \in \mathbb{Z}$; definimos $A_z^+ = \{a \in A : a \geq a_z$ existe $b \geq a$ que realiza a Γ, y $\Gamma([a_z, b], \mathfrak{A}) \neq S_1(Th(\mathfrak{A}))\}$, $A_z^- = \{a \in A : a \leq a_z$ existe $b \geq a$ que realiza a Γ, y $\Gamma([b, a_z], \mathfrak{A}) \neq S_1(Th(\mathfrak{A}))\}$ tal que $A_z = A_z^- + A_z^+$.

Para ver que A_z no se superpone con A_{z+1} basta con verificar que existe un 1-tipo de T el cual no se realiza en ningún A_z, así entonces $A_z \cup A_{z+1}$ no contiene a $[a_z, a_{z+1}]$. De hecho, basta con ver que existe un 1-tipo $\Gamma_i = \Omega$ el cual no se realiza en A_z, ya que como A_z es definible sobre a_z, el hecho de que ningún elemento de A_z tenga tipo Ω se expresa con una fórmula μ la cual está contenida en Γ. Así entonces ningún A_z tiene un elemento cuyo tipo sea Ω.

Veamos por contradicción que existe un 1-tipo Ω tal que no se realiza en A_z. Suponga que todo 1-tipo se realiza en A_z, entonces existen elementos $b_1, b_2 \in A_z$ con tipo Γ tales que $b_1 \leq a_z \leq b_2$ y cada 1-tipo de T se realiza en $[b_1, b_2]$. Si algún 1-tipo de T no se realiza en $[b_1, a_z]$, entonces el conjunto $I(b_1) = \{d \geq b_1 :$ no todo 1-tipo de T se realiza en $[b_1, d]\}$ es definible sobre b_1 y contiene a $[b_1, a_z]$. Similarmente hay un $I(a_z)$ que contiene a $[a_z, b_2]$. Como a_z y b_1 tienen 1-tipo Γ, si Ω no se realiza en $[b_1, a_z]$, entonces tampoco se realiza en $[a_z, b_2]$, pero esto contradice el que cada 1-tipo de T se realiza en $[b_1, b_2]$. Así que, o bien cada 1-tipo se realiza en $[b_1, a_z]$ o en $[a_z, b_2]$ pero esto contradice la definición de A_z. Con todo, Ω no se realiza en ningún A_z.

Por lo tanto, $A_z \cup A_{z+1}$ no contiene a $[a_z, a_{z+1}]$, así que hay órdenes lineales no vacíos $\{\mathfrak{B}_z : z \in \mathbb{Z}\}$ tales que $B_z = \{a \in A : A_z < a < A_{z+1}\}$ y $A = \sum\{A_z + B_z : z \in \mathbb{Z}\}$.

Afirmación: Γ no se realiza en ningún $\mathfrak{B}_z$.

Por contradicción. Si $a_z < b < a_{z+1}$, donde $b \in B_z$ y b tiene tipo Γ, entonces o bien algún 1-tipo de T no se realiza en $[a_z, b]$, en cuyo caso $b \in A_z$, o algún 1-tipo de T no se realiza en $[b, a_{z+1}]$, en cuyo caso $b \in A_{z+1}$, por lo tanto en ambos casos se contradice la definición de B_z. Así, Γ no se realiza en ningún B_z y la afirmación queda probada.

Note que $A_{z_1} \equiv A_{z_2}$ para cada $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, ya que cada A_z es definible sobre a_z por la misma fórmula, así que cualquier enunciado verdadero en A_z su relativización estará en Γ.

Veamos que $||S_1(Th(\mathfrak{A}_z))|| < ||S_1(Th(\mathfrak{A}))||$ para poder usar la Hipótesis de Inducción.

Primero veamos que $||S_1(Th(\mathfrak{A}_z))|| \leq ||S_1(Th(\mathfrak{A}))||$. Sean $b_1, b_2 \in A_z$ con el mismo 1-tipo Γ_0 en $\mathfrak{A}$ y γ_0 la fórmula generadora de Γ_0. Como ya vimos anteriormente,

$$\mathfrak{A} \models \gamma_0[b_1]$$

y

$$\mathfrak{A} \models \gamma_0[b_2]$$

si y sólo si,

$$\mathfrak{A} \models \gamma_0^*[b_1]$$

y

$$\mathfrak{A} \models \gamma_0^*[b_2].$$

Más aun, $\langle \gamma^* \rangle$ es el 1-tipo de b_1 y de b_2 en $\mathfrak{A}_z$.
Así que si $b_1, b_2 \in A_z$ tienen el mismo 1-tipo en $\mathfrak{A}$ no puede pasar que tengan tipos distintos en $\mathfrak{A}_z$. Por lo que $||S_1(Th(\mathfrak{A}_z))|| \leq ||S_1(Th(\mathfrak{A}))||$.
Ahora por contradicción suponga que $||S_1(Th(\mathfrak{A}_z))|| = ||S_1(Th(\mathfrak{A}))|| = n+1$, entonces existe un modelo $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{B} \models Th(\mathfrak{A}_z)$ y realiza a Ω. Como todos los elementos de $S_1(Th(\mathfrak{A}_z))$ son aislados, Ω es aislado y así o bien todos los modelos de $Th(\mathfrak{A}_z)$ lo realizan o ninguno. Por lo tanto $\mathfrak{A}_z$ realiza a Ω, lo cual es una contradicción.
Análogamente como Γ no se realiza en $\mathfrak{B}_z$, entonces $||S_1(Th(\mathfrak{B}_z))|| < ||S_1(Th(\mathfrak{A}))||$ y $\mathfrak{B}_{z_1} \equiv \mathfrak{B}_{z_2}$ para cada $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$.
Por Hipótesis de Inducción $\mathfrak{A}_z, \mathfrak{B}_z \in \mathcal{I}_{2n-1}$, por lo que $\mathfrak{A}_z + \mathfrak{B}_z \in \mathcal{I}_{2n}$. $\mathfrak{A} = \sum_{z\in\mathbb{Z}}(\mathfrak{A}_z + \mathfrak{B}_z)$ y ésta descomposición cumple las condiciones de la definición de la clase $\mathcal{I}$, así entonces $\mathfrak{A} \in \mathcal{I}_{2n+1}$. $\square$

Finalmente, la existencia de la sucesión $\{a_z : z \in \mathbb{Z}\}$ usada en la prueba anterior se asegura por el siguiente Lema:

Lema 4.9 *Si $\mathfrak{A}$ es SA, $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}^{a'}$ para algún $a' \in A$, y $S_1(Th(\mathfrak{A}))$ es finito, entonces para cada $a \in A$, si $\Gamma = \Gamma(a, \mathfrak{A})$ entonces:*

1. *existe $b > a$ tal que b realiza Γ, $\Gamma([a,b], \mathfrak{A}) = S_1(Th(\mathfrak{A}))$ y para cada $c \in (a,b)$ que realiza a Γ pasa que $\Gamma([a,c], \mathfrak{A}) \neq S_1(Th(\mathfrak{A}))$ o $\Gamma([c,b], \mathfrak{A}) \neq S_1(Th(\mathfrak{A}))$.*

2. *existe $b < a$ con propiedades similares a (1).*

Demostración lema:
(1) Por contradicción. Suponga que no existe b con tales propiedades. Sea $b_0 > a$ tal que $\Gamma([a,b_0], \mathfrak{A}) = S_1(Th(\mathfrak{A}))$ y $\Gamma(b_0, \mathfrak{A}) = \Gamma$. Por nuestra suposición existe un b_1 que realiza a Γ tal que $a < b_1 < b_0$ y $\Gamma([a,b_1], \mathfrak{A}) = \Gamma([b_1,b_0], \mathfrak{A}) = S_1(Th(\mathfrak{A}))$. Siguiendo ésta construcción obtenemos,

$$\Gamma([a, b_{i+1}], \mathfrak{A}) = \Gamma([b_{i+1}, b_i], \mathfrak{A}) = S_1(Th(\mathfrak{A}))$$

para cada $i \in \omega$. Sea $|\mathfrak{A}|_{\chi,a}$ convexo, acotado y $b_0 \in |\mathfrak{A}|_{\chi,a}$. Sea b que realiza a Γ y $b > |\mathfrak{A}|_{\chi,a}$. Por lo tanto $b > b_0$.

Por Corolario 4.5, $\Gamma(\langle a, b_0\rangle, \mathfrak{A}) = \Gamma(\langle a, b\rangle, \mathfrak{A})$. Pero esto es imposible ya que $\mathfrak{A} \models \chi[a, b_0]$ pero $\mathfrak{A} \models \neg\chi[a, b]$. □

A continuación probamos dos importantes resultados derivados del Teorema anterior.

Corolario 4.6 *Para cada $n < \omega$, $\{T : ||S_1(T)|| \leq n\}$ es finito.*

Demostración: Note que
$\{T : ||S_1(T)|| \leq n\} \subseteq \{T : T \text{ tiene un modelo en } \mathcal{I}_{2n-1}\}$;
como el lenguaje es finito $\{T : T \text{ tiene un modelo en } \mathcal{I}_0\}$ es finito. Haciendo una inducción directa obtenemos que $\{T : T \text{ tiene un modelo en } \mathcal{I}_n\}$ es finito. Por lo tanto $\{T : ||S_1(T)|| \leq n\}$ es finito. □

Corolario 4.7 *Si $\mathcal{L}(T)$ es finito y $S_1(T)$ es finito, entonces T tiene una axiomatización finita.*

Demostración: Siguiendo lo hecho en la prueba del Teorema anterior. Si $||S_1(T)|| = 1$ entonces, claramente, T tiene una axiomatización finita. Si $||S_1(T)|| = n + 1$ y para alguna φ convexa $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\varphi + \mathfrak{A}_{\neg\varphi}$, claramente en $\mathfrak{A}_\varphi$ y $\mathfrak{A}_{\neg\varphi}$ se satisfacen a lo más n tipos ya que en $\mathfrak{A}_\varphi$ no se satisfacen los tipos que contengan a la fórmula $\neg\varphi$, análogamente en $\mathfrak{A}_{\neg\varphi}$. Construimos una axiomatización finita para $\mathfrak{A}$ usando las axiomatizaciones de $\mathfrak{A}_\varphi$ y $\mathfrak{A}_{\neg\varphi}$. Usando este mismo argumento para los otros casos del Teorema anterior obtenemos que T tiene una axiomatización finita. □

Sea $\mathcal{H}$ la mínima clase de modelos que contiene a todos los modelos con un solo elemento, $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_{i+1}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_i$ o si $\mathfrak{A}$ se descompone bajo las operaciones 1) y 2) de la clase $\mathcal{I}$.

El siguiente Teorema se debe a J.G. Rosenstein el cual no probaremos en este trabajo pero puede, si el lector lo desea, ser consultada su prueba en su artículo [4] y en su libro [5].

Teorema 4.8 *[Teorema de Rosenstein.]*
$\mathfrak{A}$ es ω-categórico si y sólo si $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}$.

El siguiente Lema nos ayuda a ubicar dentro de la clase $\mathcal{H}$ a los submodelos convexos de los modelos que pertenecen a la clase $\mathcal{H}$.

Lema 4.10 *Si* $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_n$ *y* $\mathfrak{B} \Subset \mathfrak{A}$*, entonces* $\mathfrak{B} \in \mathcal{H}_{2n}$*.*

Demostración: Veamos por inducción sobre n. Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_0$ entonces $\mathfrak{A}$ es un sólo punto por lo que para todo $\mathfrak{B} \Subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ y así $\mathfrak{B} \in \mathcal{H}_0$.
Suponga que se cumple para n. Veamos que si $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_{n+1}$ y $\mathfrak{B} \Subset \mathfrak{A}$, entonces $\mathfrak{B} \in \mathcal{H}_{2(n+1)}$.
El caso cuando $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_n$ es trivial.
Suponga que $\mathfrak{A} = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mathfrak{A}_q$ tal que para cada $q \in \mathbb{Q}$, $\mathfrak{A}_q \in \mathcal{H}_n$ y existen $\{q_1, \ldots, q_r\}$ tal que $\mathfrak{A}_q \equiv \mathfrak{A}_{q_i}$ para algún $i \in \{1, \ldots, r\}$ y $\{q \in \mathbb{Q} : \mathfrak{A}_q \equiv \mathfrak{A}_{q_i}\}$ es denso en $\mathbb{Q}$.
Sea $\mathfrak{B} \Subset \mathfrak{A}$, si $\mathfrak{B} \in \mathfrak{A}_q$ para algún q entonces por Hipótesis de Inducción $\mathfrak{B} \in \mathcal{H}_{2n} \subseteq \mathcal{H}_{2(n+1)}$. Ahora suponga que existe un intervalo J tal que para cada $i \in J$ $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}_i \neq \emptyset$. Claro que $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}_i$ es convexo en $\mathfrak{A}_i$ y a $\mathfrak{B}$ lo podemos ver como $\mathfrak{B} = \sum_{i\in J}(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}_i)$. Además como cada $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}_i \in \mathcal{H}_{2n}$ y $J \cong \mathbb{Q}$ entonces $\mathfrak{B}$ cumple la definición recursiva de $\mathcal{H}$ y así $\mathfrak{B} \in \mathcal{H}_{2n+1} \subseteq \mathcal{H}_{2(n+1)}$.□

Lema 4.11 *Sea* $\mathcal{L}$ *un lenguaje finito o infinito.*
(i) Si $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *son* ω*-categóricos, entonces* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ *es* ω*-categórico.*
(ii) Si $\mathfrak{A} \cong \sum_{r\in\mathbb{Q}} \mathfrak{A}^r$ *donde* $\mathbb{Q}$ *son los racionales, la familia* $\{\{r \in \mathbb{Q} : \mathfrak{A}^r \equiv \mathfrak{A}_i\} | i \in \{1, ..., n\}\}$ *es una partición de* $\mathbb{Q}$ *en subconjuntos densos de* $\mathbb{Q}$ *y cada* $\mathfrak{A}_i$ *es* ω*-categórico; entonces* $\mathfrak{A}$ *es* ω*-categórico.*

Demostración: (i) Como $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son ω-categóricos, por Teorema de Rosenstein están en la clase $\mathcal{H}$. Por lo tanto, $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_n$ para algún $n < \omega$ y $\mathfrak{B} \in \mathcal{H}_m$ para algún $m < \omega$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $n < m$. Por como definimos a la clase $\mathcal{H}$, si $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_n$ entonces $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_{n+1}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_{n+2}$,..., $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_{n+l}$ con $n + l = m$. Por lo tanto $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{H}_m$. Así entonces, $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \in \mathcal{H}_{m+1}$. Por Teorema de Rosenstein $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ es ω-categórico.
(ii) Análogamente, usando el Teorema de Rosenstein la prueba es directa. □

Lema 4.12 *Sea* $\mathfrak{A}$ ω*-categórico en* $\mathcal{L}$ *finito o infinito, entonces*

1. *si* $\mathfrak{B} \Subset \mathfrak{A}$*,* $\mathfrak{B}$ *es* ω*-categórico.*

2. $\{Th(\mathfrak{B}) : \mathfrak{B} \Subset \mathfrak{A}\}$ *es finito.*

Demostración: (1) Por Lema 4.10 es claro que $\mathfrak{B}$ es ω-categórico.
(2) Como $\mathfrak{A}$ es ω-categórico, entonces $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_n$ para algún $n < \omega$,además como $\mathfrak{B} \Subset \mathfrak{A}$, por Lema 4.10, $\mathfrak{B} \in \mathcal{H}_{2n}$. Así, $Th(\mathfrak{B})$ tiene modelo en $\mathcal{H}_{2n}$. Note que por Corolario 4.6 $\{T : T \text{ tiene un modelo en } \mathcal{H}_m\}$ es finito para toda $m < \omega$. Con lo anterior, $\{Th(\mathfrak{B}) : \mathfrak{B} \Subset \mathfrak{A}\}$ es finito. $\square$

4.3. Número de Modelos Numerables en Teorías de Órdenes Lineales

Primero probaremos cuatro Lemas que nos servirán como herramienta para poder demostrar La Conjetura de Vaught para teorías completas de órdenes lineales.

Lema 4.13 *Sea $\mathfrak{A}_1$ un modelo SA, $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{A}_3$ y $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3$. Sea $d \in A_2$ y $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1 + \mathcal{C}^d_{\mathfrak{A}_2} + \mathfrak{A}_3$, entonces $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$.*

Demostración: Primero observe que como $\mathfrak{A}_1$ es SA y $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{A}_3$, entonces $\mathfrak{A}_2$ y $\mathfrak{A}_3$ son SA, además $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Veamoslo para $\mathfrak{A}_1$. Por ser SA $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$. Por lo tanto $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$, así que

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 \prec (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) + \mathfrak{A}_3.$$

Por lo tanto

$$\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3.$$

Probemos que $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$.
Sea ϕ una fórmula con parámetros en $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \models \phi[\bar{b}, a]$ con $a \in A$. Veamos que existe $a' \in \mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \models \phi[\bar{b}, a']$.
Caso 1: Los parámetros están en $A_1 \cup A_3$ y $a \in A_1 \cup A_3$. Claramente $a = a'$ con lo cual queda probado este caso.
Caso 2: Los parámetros están en $A_1 \cup A_3$ y en $C^d_{\mathfrak{A}_2}$ y $a \in A_2$.
Sea $b \in A_1 \cup A_3$ y $c \in C^d_{\mathfrak{A}_2}$. Sin pérdida de generalidad, suponga $b \in A_1$, $a \in A_2 \backslash C^d_{\mathfrak{A}_2}$ y $b < a < c$ tales que $\mathfrak{A} \models \phi[b, a, c]$.
Probaremos que el $a' \in B$ que satisface a ϕ está precisamente en A_1. Haremos esto por contradicción.
Sea $\phi^*(v_0, v_1)$ la fórmula examinadora de $\phi(v_0, v_1, c)$ en $\mathfrak{A}_1$; entonces

$$\mathfrak{A}_1 \models \neg\exists u \phi^*(b, u).$$

Como $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}$ pasa que

$$\mathfrak{A} \models \neg\exists u \phi^*(b,u) \wedge \phi(b,a,c).$$

La fórmula

$$\chi(v_0,c) \equiv (v_0 \leq c) \wedge \exists x \exists y (x \leq v_0 \wedge y \leq v_0 \wedge \neg\exists u \phi^*(x,u) \wedge \phi(x,y,c)).$$

define bajo c al conjunto convexo $\mathfrak{A}_{\chi,c}$, además $|\mathfrak{A}|_{\chi,c} \supsetneqq C^d_{\mathfrak{A}_2} \cap \{a \in A : a \leq c\}$. Como $\mathfrak{A}_2$ y $\mathfrak{A}$ con SA, $d,c \in C^d_{\mathfrak{A}_2}$, entonces $C^d_{\mathfrak{A}_2} = C^c_{\mathfrak{A}_2}$ y $C^c_{\mathfrak{A}_2} = C^c_{\mathfrak{A}}$.
Note que como $|\mathfrak{A}|_{\chi,c} \supseteq \underline{C^c_{\mathfrak{A}}}$ y χ es convexa, define un subconjunto convexo bajo c y no está en la componente de c; entonces χ es no acotada. Por lo tanto $|\mathfrak{A}|_{\chi,c} = \{a \in A : a \leq c\}$.
Sea $d' \in A_1$, como $\mathfrak{A} \models \chi[d',c]$; existen $b',a' \leq d'$ tales que

$$\mathfrak{A} \models \neg\exists u \phi^*(b',u) \wedge \phi(b',a',c)),$$

por lo que

$$\mathfrak{A}_1 \models \phi^*(b',a').$$

Como $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \models \phi^*(b',a')$$

lo cual contradice nuestra suposición.
El caso $c < a < b$ con $b \in A_3$ es análogo al anterior. □

Lema 4.14 *Sea $\mathfrak{A}$ un modelo en $\mathcal{L}$ y $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ un conjunto de kernels límite, tal que ningún $K \in \mathcal{K}$ es un punto de acumulación relativo a $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$. Sea $\mathfrak{B}$ el submodelo de $\mathfrak{A}$ con $A \setminus \cup\{K | K \in \mathcal{K}\}$ como su universo, entonces $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$.*

Demostración: Por contradicción. Suponga que existen $\bar{b} \in B^n$, ϕ fórmula con una variable libre y parámetros en B, $a \in A \setminus B$ tales que $\mathfrak{A} \models \phi[\bar{b},a]$ y para ningún $b \in B$, $\mathfrak{A} \models \phi[\bar{b},b]$.
Sea $K \in \mathcal{K}$ tal que $a \in K$; como $K = |\mathfrak{A}|_\Phi$ para algún tipo convexo Φ y K no es punto de acumulación en $\mathcal{K}$, existe $\psi(v_0) \in \Phi$ tal que $K \subseteq |\mathfrak{A}|_\psi$, $\mathfrak{A}_\psi \Subset \mathfrak{A}$, $|\mathfrak{A}|_\psi \cap K' = \emptyset$ para todo $K' \in \mathcal{K} \setminus \{K\}$ y además $|\mathfrak{A}|_\psi$ no intersecta a $\bar{b}$.
Por Corolario 4.2 existe $\phi^*(v_0)$ tal que para toda $a' \in A$, $\mathfrak{A} \models \phi^*[a'] \iff a' \in |\mathfrak{A}|_\psi$ y $\mathfrak{A} \models \phi[\bar{b},a']$. Sea

$$\alpha(v_0) \equiv \exists x_1 \exists x_2 ((x_1 \leq v_0 \leq x_2) \wedge (\phi^*(x_1) \wedge \phi^*(x_2)))$$

α define un conjunto convexo no vacío de A. Note que los elementos que satisfacen a $\phi^*(x)$ están en $A\backslash B$ ya que satisfacen a $\phi(\bar{b}, x)$, además están en $|\mathfrak{A}|_\psi$ el cual contiene a K y sabemos que no intersecta a ningún K' distinto de K. Por lo tanto los elementos que satisfacen a $\phi^*(x)$ no pueden estar fuera de K. Así entonces $|\mathfrak{A}|_\alpha \subseteq K$ y como $K \in \mathcal{K}_\mathfrak{A}$ pasa que $|\mathfrak{A}|_\alpha = K$ lo cual nos dice que K es aislado, contradiciendo nuestra hipótesis.$\square$

Lema 4.15 *Sea $\mathfrak{A}$ modelo de T, $\mathcal{L}_T$ finito, $\{\phi_i | i \in \omega\} \in \mathcal{F}_T$, $\mathfrak{B}_i \Subset \mathfrak{A}_{\wedge_{j \leq i} \phi_j}$, $\mathfrak{B}_i \Subset_{g_i} \mathfrak{B}_{i+1}$, $\mathfrak{B}_i$ ω-categórico y $\mathfrak{B} = \bigcup_{i<\omega}(\mathfrak{B}_i, g_i)$; entonces existe $\mathfrak{A}' \succ \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{B} \Subset \mathfrak{A}_{\{\phi_i | i \in \omega\}}$.*

Demostración: Sea $\{b_z : z \in \mathbb{Z}\} \subseteq B$ tal que $b_{z_1} \leq b_{z_2}$ si $z_1 \leq z_2$ y $B = \bigcup_{z>0}[b_{-z}, b_z]$. Note que, para cada $z > 0$, existe un B_j tal que $B_i \supseteq [b_{-z}, b_z]$; para ver esto sea $b_x = max\{b_{-z}, b_z\}$, entonces $[b_{-x}, b_x] \supseteq [b_{-z}, b_z]$ como la sucesión de los B_i's es creciente tómese $B_j \supseteq [b_{-x}, b_x]$.
Sea $\mathfrak{D}_z = (\mathfrak{D}'_z, \langle b_{-z}, b_{-z+1}, \ldots, b_z \rangle)$ donde $\mathfrak{D}'_z$ es submodelo de $\mathfrak{B}$ tal que $|\mathfrak{D}'_z| = [b_{-z}, b_z]$. Como cada $\mathfrak{B}_i$ es ω-categórico, $\mathfrak{B}_j \Supset [b_{-z}, b_z]$ para algún j y $|\mathfrak{D}_z| = |\mathfrak{D}'_z| = [b_{-z}, b_z]$, entonces por Lema 4.12 $\mathfrak{D}_z$ es ω-categórico. Por lo tanto $\mathfrak{D}_z \in \mathcal{H} \subseteq \mathcal{I}$, así $S_1(Th(\mathfrak{D}_z))$ es finito y por Corolario 4.7 $\mathfrak{D}_z$ tiene axiomatización finita.
Sea ψ'_z la axiomatización finita de $\mathfrak{D}_z$ y ψ_z la relativización de ψ'_z para el submodelo definido por la fórmula $\phi(\hat{b_{-z}}, v_0, \hat{b_z}) = \hat{b_{-z}} \leq v_0 \leq \hat{b_z}$. ψ_z nos dice que ψ'_z se satisface en $[b_{-z}, b_z]$.
Podemos pensar que $|\mathfrak{A}| \cap B = \emptyset$. Sea $\Sigma = DiagE(\mathfrak{A}) \cup \{\psi_z : z > 0\} \cup \{\phi_i(\hat{b_z}) : i \in \omega\}$ donde $DiagE(\mathfrak{A})$ es el diagrama elemental de $\mathfrak{A}$. Note que tomando un subconjunto F finito de Σ podemos encontrar un submodelo convexo de $\mathfrak{A}$ lo suficientemente grande que realice a F. Así Σ es finitamente satisfacible y por Teorema de Compacidad Σ es satisfacible. Además Σ es consistente con T por lo que $\Sigma \cup T$ tiene un modelo $\mathfrak{A}'$, por el Teorema Löwenheim-Skolem$\downarrow$ podemos suponer que es numerable. Sea a_z la interpretación de $\hat{b}_z$ en $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ el submodelo de $\mathfrak{A}'$ tal que $|\mathfrak{B}'| = conv(\{a_z : z \in \mathbb{Z}\})$ y $\mathfrak{C}_z$ el submodelo tal que $|C_z| = [a_{-z}, a_z]$. Como $B' = \bigcup_{z>0}[a_{-z}, a_z]$ y $\mathfrak{C}_z \cong \mathfrak{D}_z$ entonces $\mathfrak{B}' \cong \mathfrak{B}$. Con todo $\mathfrak{A}' \lceil \mathcal{L}_T \succ \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}' \Subset \mathfrak{A}'_{\{\phi_i : i \in \omega\}}$. $\square$

El siguiente Lema es otra versión del Lema de König por lo que no se prueba en este trabajo.

Lema 4.16 *Sea $\langle A, < \rangle$ un conjunto infinito parcialmente ordenado. Para cada $a \in A$, $\{x | x < a\}$ es finito. Para cada $a \in A$, definimos $h(a) = max\{n|$*

existen $a_i, i = 0, ..., n,$ *tales que* $a_0 < a_1 < ... < a_n = a\}$. *Para cada* n, $\{a|h(a) \leq n\}$ *es finito. Entonces existe* $B \subseteq A$ *con tipo de orden* ω.

Lema 4.17 *Sea* $\mathcal{L}$ *un lenguaje finito,* $\mathcal{M}$ *un conjunto infinito de modelos de* $\mathcal{L}$ *que son numerables,* ω*-categóricos y no isomorfos; tal que si* $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}$ *y* $\mathfrak{B} \Subset \mathfrak{A}$*, existe* $\mathfrak{B}' \in \mathcal{M}$ *tal que* $\mathfrak{B}' \cong \mathfrak{B}$*; entonces existen sucesiones* $\{\mathfrak{A}_i\}_{i<\omega}$ *y* $\{g_i\}_{i<\omega}$ *tal que para cada* $i < \omega$*,* $\mathfrak{A}_i \in \mathcal{M}$ *y* $\mathfrak{A}_i \Subset_{g_i} \mathfrak{A}_{i+1}$.

Demostración: Definimos un orden parcial, transitivo e irreflexivo sobre $\mathcal{M}$:

$$\mathfrak{B} < \mathfrak{A} \iff \text{Para algún } n,\ \mathfrak{B} \in \mathcal{H}_n,\ \mathfrak{B} \notin \mathcal{H}_{n+k},\ \mathfrak{A} \in \mathcal{H}_{n+k} \backslash \mathcal{H}_n \text{ para algún } k \geq 1 \text{ y } \mathfrak{B} \Subset_g \mathfrak{A} \text{ para alguna } g.$$

Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{H}_n$, entonces $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} < \mathfrak{A}\} \subseteq \mathcal{M} \cap \bigcup_{l<n} \mathcal{H}_l$. Veamos que $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} < \mathfrak{A}\}$ es finito. Note que $\{Th(\mathfrak{B}) : \mathfrak{B} < \mathfrak{A}\} \subseteq \{Th(\mathfrak{B}) : \mathfrak{B} \Subset \mathfrak{A}\}$ entonces por Lema 4.12- (ii) es finito, además cada $\mathfrak{B}$ es ω-categórico; por lo tanto, $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} < \mathfrak{A}\}$ es finito. Sea $h(\mathfrak{A}) = max\{r : \text{existen } \mathfrak{B}_i, i = 0, \ldots, r$ tales que $\mathfrak{B}_0 < \ldots < \mathfrak{B}_r = \mathfrak{A}\}$. Es fácil ver por inducción sobre n que $h(\mathfrak{A}) = n$ si y sólo si $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_n$. Note que como $|\{\mathfrak{A} : h(\mathfrak{A}) = n\}| = |\{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \in \mathcal{H}_n\}| \subseteq |\{T : T \text{ tiene modelo en } \mathcal{H}_n\}|$ y T son ω-categóricas entonces por Corolario 4.6 $\{\mathfrak{A} : h(\mathfrak{A}) = n\}$ es finito. Con todo lo anterior, $\mathcal{M}$ cumple las hipótesis del Lema anterior y por lo tanto tiene un subconjunto de tipo de orden ω, lo cual garantiza la existencia de las sucesiones y prueba el Lema.□

Lema 4.18 *Si* $\mathcal{L}$ *es finito y para cada* $i < \omega$*,* $\mathfrak{A}_i$ *es un modelo* ω*-categórico numerable en* $\mathcal{L}$*,* $\mathfrak{A}_i \ncong \mathfrak{A}_j$ *para cada* $i \neq j$ *y* $\mathfrak{A}_i \Subset \mathfrak{A}_{i+1}$ *para toda* $i < \omega$*; entonces* $\bigcup_{i<\omega} \mathfrak{A}_i$ *no es* ω*-categórico.*

Demostración: Por contradicción. Suponga que $\bigcup_{i<\omega} \mathfrak{A}_i$ es ω-categórico, como cada $\mathfrak{A}_i$ es ω-categórico y $\mathfrak{A}_i \Subset \bigcup_{i<\omega} \mathfrak{A}_i$, entonces $\{Th(\mathfrak{A}_i) : \mathfrak{A}_i \Subset \bigcup_{i<\omega} \mathfrak{A}_i\}$ es infinito, contradiciendo lo dicho en el Lema 4.12. Por lo tanto, $\bigcup_{i<\omega} \mathfrak{A}_i$ no es ω-categórico. □

A continuación, probaremos una serie de Lemas y Teoremas importantes que hablan de la cantidad de modelos numerables no isomorfos de una teoría completa de orden lineal.

Lema 4.19 *Si* $||S_1(T)|| \geq \omega$ *y los modelos de* T *son autoaditivos, entonces* T *tiene* 2^ω *modelos numerables no isomorfos.*

Demostración: Sea Γ un tipo no aislado de $S_1(T)$. Sea $\mathfrak{A}_1$ un modelo numerable de T el cual realiza a Γ y sea $\mathfrak{A}_2$ otro modelo numerable de T el cual omite a Γ (se puede porque un tipo aislado o lo realizan todos los modelos o ninguno). Sea $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_2 + \mathcal{C}^a_{\mathfrak{A}_1} + \mathfrak{A}_2$ tal que $\Gamma(a, \mathfrak{A}_1) = \Gamma$ para algún $a \in A_1$. Por Lema 4.13, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$, como $\mathfrak{A}_1$ es autoaditivo y $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{A}_2$, pasa que $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$. Por lo tanto, $\Gamma(a, \mathfrak{B}) = \Gamma$ y $\mathcal{C}^a_{\mathfrak{B}} = \mathcal{C}^a_{\mathfrak{A}_1}$, esto último por que $\mathcal{C}^a_{\mathfrak{B}}$ no puede tener elementos de $\mathfrak{A}_2$ por ser convexo.
Ahora tómese D_1 y D_2 dos órdenes no isomorfos, note que el conjunto de componentes convexas de $\mathfrak{B} * D_1$ y $\mathfrak{B} * D_2$ tienen tipo de orden D_1 y D_2 respectivamente, además componentes convexas deben ir a componentes convexas bajo cualquier isomorfismo de orden; por lo anterior $\mathfrak{B} * D_1$ y $\mathfrak{B} * D_2$ no son isomorfos. Como hay 2^ω tipos de orden numerables, entonces tenemos 2^ω modelos numerables no isomorfos de la forma $\mathfrak{B} * D$. $\Box$

Teorema 4.9 *Si $||S_1(T)||$ es finito, entonces T es ω-categórica o tiene 2^ω modelos numerables no isomorfos.*

Demostración: Suponga que $\mathcal{L}_T$ es finito, esto se puede por ser $S_1(T)$ finito ya que cada tipo es aislado por alguna fórmula φ, así podemos considerar sólo el lenguaje de éstas fórmulas φ_i. Por inducción sobre la cardinalidad de $S_1(T)$. Sea $||S_1(T)|| = 1$ veamos que T tiene un modelo con un sólo punto o T tiene un modelo con el tipo de orden de los racionales o de tipo de orden de los enteros, y cada predicado unario P en un modelo de T es vacío o todo el universo, es decir P es realizado por todos los elementos de un modelo o por ninguno. Sea Γ este único tipo.
Caso 1: Γ tiene a la fórmula $\varphi(x) = \neg\exists y(y < x) \wedge \neg\exists z(x < z)$, "No tengo a nadie a mi izquierda ni a mi derecha".
Note que todos los puntos de $\mathfrak{A}$ deben satisfacer a ésta fórmula por lo tanto $\mathfrak{A}$ es un sólo punto.
Caso 2: Γ tiene a la negación de $\varphi(x)$.
Suponga que $\exists y(x < y) \in \Gamma$. Sea $a \in A$, claro que a satisface a ésta fórmula, así que existe $b \in A$, $a < b$, pero b satisface a la fórmula $\exists z(z < x)$ la cual debe estar en Γ ya que $\Gamma(b, \mathfrak{A}) = \Gamma$, además $\Gamma(a, \mathfrak{A}) = \Gamma$. Por lo tanto, si $\exists y(x < y) \in \Gamma$, entonces $\exists z(z < x) \in \Gamma$. El reverso también se cumple usando un razonamiento similar.
Subcaso 2.1: $\psi(x) = \exists y(x < y \wedge \forall z(x < z \to y \leq z)) \in \Gamma$.
Usando los mismos argumentos que antes tenemos que $\psi(x) = \exists y(x < y \wedge \forall z(x < z \to y \leq z))$ si y sólo si $\phi(x) = \exists y(y < x \wedge \forall z(z < x \to z \leq y))$. Observe que un modelo $\mathfrak{A}$ con un sólo tipo Γ el cual contiene a $\neg\varphi(x)$, $\psi(x)$

y a $\phi(x)$, o bien es $\mathbb{Z}$ o copias de $\mathbb{Z}$. Usando el juego EF_n es fácil ver que para todo conjunto J, $\sum_{j\in J}\mathbb{Z}_j \equiv \mathbb{Z}$. En este caso $\mathfrak{A}$ es como dice (3) en la definición de $\mathcal{I}$. Por lo tanto $\mathfrak{A} \in \mathcal{I}$.
Subcaso 2.2 :$\neg\psi(x) \in \Gamma$, la cual dice $\forall y(x < y) \to \exists z(x < z < y)$. Note que cada elemento de $\mathbb{Q}$ satisface a Γ, por la ω-categoricidad de $\mathbb{Q}$ todo modelo numerable $\mathfrak{A}$ con Γ como su único tipo es isomorfo a $\mathbb{Q}$. Así $\mathfrak{A}$ es como dice (2) de la definición de $\mathcal{I}$. Por lo tanto $\mathfrak{A} \in \mathcal{I}$.
En cada uno de estos casos pasa que T tiene un modelo en la clase $\mathcal{I}$ y por lo tanto es ω-categórica o T tiene 2^ω modelos numerables no isomorfos ya que dados dos órdenes lineales numerables $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ pasa que $\mathbb{Z} * \mathcal{D}$ no es isomorfo a $\mathbb{Z} * \mathcal{D}'$ por que el isomorfismo debe ser de bloque de enteros a bloque de enteros, como hay 2^ω tipos de orden numerable, entonces hay 2^ω modelos numerables elementalmente equivalentes a $\mathbb{Z}$ no isomorfos.
Suponga que para $||S_1(T)|| = n$ ya está probado el teorema, ahora veamos para $n + 1$.
Caso 1: Los modelos de T no son autoaditivos.
Sea $\mathfrak{A}$ modelo numerable de T; como no es autoaditivo existe al menos una fórmula la cual define un subconjunto propio de A convexo, por lo tanto podemos ver a $\mathfrak{A}$ como $\mathfrak{A}_\varphi + \mathfrak{A}_{\neg\varphi}$ para alguna φ convexa, note que no pasa que $||S_1(Th(\mathfrak{A}_\varphi))|| = n + 1$ ya que existe un tipo Γ en $||S_1(T)||$ que contiene a la fórmula $\neg\varphi$, así entonces Γ no está en $S_1(Th(\mathfrak{A}_\varphi)$, en consecuencia $||S_1(Th(\mathfrak{A}_\varphi)|| \leq n$ y $||S_1(Th(\mathfrak{A}_{\neg\varphi})|| \leq n$. Si $\mathfrak{A}_\varphi$ y $\mathfrak{A}_{\neg\varphi}$ son ω-categóricos, $\mathfrak{A}$ también lo es y así T es ω-categórica. Si $\mathfrak{A}_\varphi$ no es ω-categórico, por Hipótesis de Inducción hay 2^ω modelos numerables no isomorfos de $T_{\mathfrak{A}_\varphi}$. Sea $\{\mathfrak{B}_\nu : \nu < 2^\omega\}$ tal que para cada ν, $\mathfrak{B}_\nu \equiv \mathfrak{A}_\varphi$, note que si $\nu_1 \neq \nu_2$ entonces $\mathfrak{B}_{\nu_1} \not\cong \mathfrak{B}_{\nu_2}$. Sea $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{B}_\nu + \mathfrak{A}_{\neg\varphi}$. Claro que $\mathfrak{A}_\nu \equiv \mathfrak{A}$, además $\mathfrak{A}_{\nu_1} \not\cong \mathfrak{A}_{\nu_2}$; por lo tanto, $\{\mathfrak{A}_\nu : \nu < 2^\omega\}$ son modelos numerables no isomorfos de T.
Caso 2: Suponga que los modelos de T son autoaditivos y que se cumple (a) del Lema 4.7(ii). T tiene un modelo numerable $\mathfrak{A}$ tal que para toda $a \in A$ $\mathcal{C}^a_\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}$. Como $\mathcal{C}^a_\mathfrak{A} \models T$ podemos suponer que $\mathfrak{A} = \mathcal{C}^a_\mathfrak{A}$ consta de una sola componente. Sean $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ conjuntos ordenados numerables no isomorfos, claramente por ser $\mathcal{C}^a_\mathfrak{A}$ convexo $\mathcal{C}^a_\mathfrak{A} * \mathcal{D}_1 \not\cong \mathcal{C}^a_\mathfrak{A} * \mathcal{D}_2$, por lo tanto, $\mathfrak{A} * \mathcal{D}_1 \not\cong \mathfrak{A} * \mathcal{D}_2$. Por ser $\mathfrak{A}$ autoaditivo y por Lema 4.1, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A} * \mathcal{D}_i$. Por lo tanto $\mathfrak{A} * \mathcal{D}_i \models T$. Con todo, T tiene 2^ω modelos numerables no isomorfos.
Caso 3: Los modelos de T son autoaditivos y pasa (b) del Lema 4.7(ii) Como $S_1(T)$ es finito, dado $\mathfrak{A}$ modelo de T pasa que $\mathfrak{A} \in \mathcal{I}$. Por las características de este caso y del Lema 5.4(ii), podemos escoger $\mathfrak{A}$ numerable tal que $\mathfrak{A} = \Sigma_{r\in\mathbb{Q}}\mathfrak{A}_r$, cada $\mathfrak{A}_r$ es una componente de $\mathfrak{A}$ y hay $\mathfrak{A}^1, ..., \mathfrak{A}^k$ tal que $\mathfrak{A}^i \neq \mathfrak{A}^j$ para $i \neq j$, donde $\mathbb{Q}_i = \{r : \mathfrak{A}_r \cong \mathfrak{A}^i\}$ son densos en $\mathbb{Q}$ y $\bigcup_{i=1}^k \mathbb{Q}_i = \mathbb{Q}$. Además asumimos que $\mathfrak{A}_r$ es definible sobre cualquiera de sus

elementos. Si los $\mathfrak{A}^i$'s son ω-categóricos, entonces por Lema 4.11 también lo es $\mathfrak{A}$. Si para algún i_0, $\mathfrak{A}^{i_0}$ no es ω-categórico, entonces $||S_1(Th(\mathfrak{A}^{i_0}))|| \leq n$ ó $||S_1(Th(\mathfrak{A}^{i_0}))|| = n+1$ y $\mathfrak{A}^{i_0}$ no es autoaditivo, usando *Caso 2* o *Caso 1* más la Hipótesis de Inducción obtenemos que T tiene 2^ω modelos numerables no isomorfos.□

Lema 4.20 *Si para algún modelo $\mathfrak{A}$ de T y algún $\Phi \in \mathcal{F}_T$, $\mathfrak{A}_\Phi$ no es ω-categórico, entonces T tiene 2^ω modelos numerables no isomorfos.*

Demostración: Sea $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ ω-saturado (esto se puede por el Teorema 4.4). Sea $\mathfrak{D}$ el submodelo de $\mathfrak{B}$ con universo $conv(|\mathfrak{A}|_\Phi, \mathfrak{B})$. Note que como $\mathfrak{A}_\Phi$ es convexo podemos ver a $\mathfrak{A}$ como $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_\Phi + \mathfrak{A}_2$, donde

$$|\mathfrak{A}_1| = \{a \in A : \forall b \in |\mathfrak{A}|_\Phi a < b\}$$

y

$$|\mathfrak{A}_2| = \{a \in A : \forall b \in |\mathfrak{A}|_\Phi a > b\}.$$

Por Teorema 4.3 y como $\mathfrak{D}$ es una extensión permitida de $\mathfrak{A}_\Phi$ relativa a $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_\Phi \prec \mathfrak{D}$.
Como $\mathfrak{A}_\Phi$ no es ω-categórico, $\mathfrak{D}$ tampoco lo es. Además, $\mathfrak{D} \Subset \mathfrak{B}_\Phi$ ya que $\mathfrak{A}_\Phi$ es convexo maximal para todo $\Phi \in \mathcal{F}_T$ y todo $\mathfrak{A}$ modelo en $\mathcal{L}$. Entonces, por Lema 4.12 $\mathfrak{B}_\Phi$ no es ω-categórico.
Por Lema 4.5 $\mathfrak{B}_\Phi$ es autoaditivo, entonces podemos usar Lemas 4.19 y el Teorema 4.9 los cuales afirman que hay 2^ω modelos numerables no isomorfos elementalmente equivalentes a $\mathfrak{B}_\Phi$.
Sean $\{\mathfrak{B}_\nu | \nu < 2^\omega\}$ el conjunto de estos modelos. Sea $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{B}$ un submodelo numerable y sean

$$C_< = \{c \in C | c < |\mathfrak{B}|_\Phi\},$$
$$C_> = \{c \in C | c > |\mathfrak{B}|_\Phi\}.$$

Por lo tanto, $\{C_< + \mathfrak{B}_\nu + C_> | \nu < 2^\omega\}$ es un conjunto de 2^ω modelos numerables no isomorfos de T. □

Lema 4.21 *Sea $\Phi \in \mathcal{F}_T$ y $\mathcal{T} = \{Th(\mathfrak{A}_\Phi) | \mathfrak{A}$ es modelo de $T\}$; si cada $T' \in \mathcal{T}$ es ω-categórica, entonces $\mathcal{T}$ es finito.*

Demostración: Para cada $T' \in \mathcal{T}$ sea $\mathfrak{A}(T')$ un modelo de T tal que $\mathfrak{A}(T')_\Phi \models T'$. Sea $\mathfrak{B}(T')$ ω-saturado tal que $\mathfrak{B}(T') \succ \mathfrak{A}(T')$ para cada $T' \in \mathcal{T}$. Como en el lema anterior, $\mathfrak{B}(T')_\Phi \Supset \mathfrak{D}_{T'} \succ \mathfrak{A}(T')$ donde $D_{T'} = conv(|\mathfrak{A}(T')|_\Phi, \mathfrak{B}(T'))$. Como $\mathfrak{B}(T')_\Phi$ es ω-categórico, por Lema 4.12 $\{Th(\mathfrak{D}_{T'}) : \mathfrak{D}_{T'} \Subset \mathfrak{B}(T')_\Phi\}$ es finito. Como para cada $\mathfrak{A}(T')_\Phi$ hay un $\mathfrak{D}_{T'} \Subset \mathfrak{B}(T')_\Phi$, entonces $\{Th(\mathfrak{A}(T')_\Phi) : \mathfrak{A}(T')_\Phi \prec \mathfrak{D}_{T'} \Subset \mathfrak{B}(T')_\Phi\}$ es finito. Por lo tanto $\mathcal{T}$ es finito. □

El siguiente Teorema prueba la Conjetura de Vaught para órdenes lineales.

Teorema 4.10 *Sea T una teoría completa de orden lineal, entonces T tiene sólo una cantidad finita de modelos numerables no isomorfos o T tiene 2^ω modelos numerables no isomorfos.*

Demostración: Por los lemas anteriores esto es cierto cuando los modelos de T son autoaditivos.
Si para algún n, $||S_n(T)|| = 2^\omega$, trivialmente T tiene 2^ω modelos numerables no isomorfos porque cada modelo numerable sólo puede satisfacer una cantidad numerable de tipos. Usando el mismo argumento de la prueba de que $S_n(F,T)$ es analítico para toda n y F fragmento numerable del capítulo anterior obtenemos que $S_n(T)$ es analítico para toda n. Así entonces, lo que resta por demostrar es cuándo los modelos de T no son autoaditivos y $||S_n(T)|| \leq \omega$ para toda n.
Caso 1: Hay una cantidad infinita de kernels límite en $\mathcal{K}_\mathfrak{A}$.
Sea $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_\mathfrak{A}$ infinito donde sus elementos son puntos límite y no hay $K \in \mathcal{K}$ tal que K es punto de acumulación de $\mathcal{K}$, esto es posible ya que por compacidad de $\mathcal{F}_T$ el conjunto de puntos aislados es finito, por lo que debe haber una infinidad de puntos límite. Para cada $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$, sea $\mathfrak{A}_{\mathcal{K}'}$ el submodelo de $\mathfrak{A}$ con $A \setminus \cup \{K' : K' \in \mathcal{K}'\}$ como su universo. Por Lema 4.14 $\mathfrak{A}_{\mathcal{K}'}$ es un modelo de T para cada $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$. Note que $\mathcal{P}(\mathcal{K}) = 2^\omega$ y claro que si $\mathcal{K}_1 \neq \mathcal{K}_2$ entonces $\mathfrak{A}_{\mathcal{K}_1} \ncong \mathfrak{A}_{\mathcal{K}_2}$. Por lo tanto T tiene 2^ω modelos numerables no isomorfos.
Caso 2: Suponga que T tiene una cantidad finita de kernels límite y hay un modelo $\mathfrak{A}$ de T y $\Phi \in \mathcal{F}_T$ tal que $\mathfrak{A}_\Phi$ no es ω-categórico.
Entonces por Lema 4.20 T tiene 2^ω modelos numerables no isomorfos.
Caso 3: Suponga que T tiene una cantidad finita de kernels límite en $\mathcal{F}_T$ y para cada $\Phi \in \mathcal{F}_T$ y $\mathfrak{A}$ modelo de T, $\mathfrak{A}_\Phi$ es ω-categórico.
Para cada $\Phi \in \mathcal{F}_T$ sea $\mathcal{T}_\Phi = \{Th(\mathfrak{A}_\Phi) : \mathfrak{A} \models T\}$, por Lema 4.21 $\mathcal{T}_\Phi$ es finito

para cada $\Phi \in \mathcal{F}_T$.
Afirmación: Si Φ es aislado en $\mathcal{F}_T$, entonces tiene sólo una completación.
Tomando en cuenta la topología de Stone de $S_1(T)$, $\{\Phi\}$ es cerrado-abierto; note que si U es un abierto básico que contiene a Φ, entonces $\{\Phi\} \subseteq U$. Por contradicción, sean U_β y $U_{\neg\beta}$ abiertos básicos distintos que contienen a Φ, note que $U_\gamma \supseteq U_\alpha \iff \alpha \to \gamma$, por lo tanto $\Phi \models \beta$ y $\Phi \models \neg\beta$, en consecuencia Φ es inconsistente, contradiciendo el hecho de que Φ tiene un modelo por ser consistente con T. Así entonces, Φ tiene sólo una extensión completa.
Por la afirmación anterior obtenemos que $||\mathcal{T}_\Phi|| = 1$, entonces $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_\Phi : \Phi \in \mathcal{F}_T\}$ es finito. Así, hay una cantidad finita de estructuras de la forma $\mathfrak{A}_\Phi$ con $\mathfrak{A} \models T$ y $\Phi \in \mathcal{F}_T$. Como a todo modelo $\mathfrak{B}$ lo podemos ver como suma de éstas subestructuras y sólo hay un número finito de combinaciones de las mismas, entonces sólo hay una cantidad finita de modelos numerables de T. $\square$

A continuación probaremos un caso específico del Teorema anterior. Cuántos modelos numerables tiene una teoría completa cuando su lenguaje es finito.

Teorema 4.11 *Si $\mathcal{L}_T$ es finito, entonces T es ω-categórica o tiene 2^ω modelos numerables no isomorfos.*

Demostración: Por Lema 4.19 este Teorema es verdadero para teorías cuyos modelos son autoaditivos y por el Teorema 4.9 también es verdadero para teorías con $S_1(T)$ finito. Para completar la prueba del teorema basta con probar cuando hay una cantidad infinita de tipos en $\mathcal{F}_T$; la prueba se divide en los siguientes casos.
Caso 1: Hay una cantidad infinita de tipos límite en $\mathcal{F}_T$.
Por la prueba del Teorema 4.10, si hay una cantidad infinita de tipos límite en $\mathcal{F}_T$ entonces T tiene 2^ω modelos numerables no isomorfos.
Caso 2: Hay sólo una cantidad finita de tipos límite en $\mathcal{F}_T$.
Sea $\mathfrak{A}$ un modelo numerable de T. Si $\mathfrak{A}_\Phi$ no es ω-categórico para algún punto aislado Φ en $\mathcal{F}_T$, entonces como $\mathfrak{A}_\Phi$ es autoaditivo, T tiene 2^ω modelo numerables no isomorfos.
Suponga que para cada tipo aislado Φ en $\mathcal{F}_T$, $\mathfrak{A}_\Phi$ es ω-categórico. Note que como hay una cantidad finita de tipos límite, entonces debe haber una cantidad infinita de tipos aislados en $\mathcal{F}_T$. Además, recuerde que cada tipo aislado, o bien lo satisfacen todos los modelos de T o ninguno. Como estamos suponiendo que para cada tipo aislado Φ en $\mathcal{F}_T$, $\mathfrak{A}_\Phi$ es ω-categórico entonces en $\mathfrak{A}$

se satisfacen todos los tipos aislados. Así entonces, $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ es infinito. Note que si nos tomamos un kernel límite $K \in \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ y una sucesión de puntos aislados que converge a K, entonces podemos encontrar una vecindad V de K tal que no tiene más kernels límite distintos a K y contiene un subconjunto convexo $V' \subseteq V$ que tiene tipo de orden $\omega + 1$. Por lo tanto, podemos suponer que $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ tiene un subconjunto convexo de tipo de orden $\omega + 1$. Sea $\{\mathfrak{K}_i\}_{i\in\omega+1}$ este subconjunto y $i \mapsto \mathfrak{K}_i$ un isomorfismo de orden. Primero suponga que existe un subconjunto infinito de ω, M, tal que si $i, j \in M$ y $i \neq j$ entonces $\mathfrak{K}_i \ncong \mathfrak{K}_j$. Por Lema 4.17, existen sucesiones $\{v_i\}_{i<\omega}, \{\mathfrak{C}_{\mathrm{i}}\}_{i<\omega}$ tal que $v_i > v_j$ para $i > j$ y $v_i \in M$ para cada i, $\mathfrak{C}_i \Subset \mathfrak{K}_{v_i}$ y para cada i existe g_i tal que $\mathfrak{C}_i \Subset_{g_i} \mathfrak{C}_{i+1}$.

Sea $\mathfrak{K}_\omega = \mathfrak{A}_\Phi$ con $\Phi \in \mathcal{F}_T$; entonces por Lema 4.15, $\bigcup_{i<\omega}(\mathfrak{C}_i, g_i) \Subset \mathfrak{B}_\Phi$ para algún $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$. Por Lema 4.18, $\bigcup_{i<\omega}(\mathfrak{C}_i, g_i)$ no es ω-categórico, entonces por Lema 4.12, $\mathfrak{B}_\Phi$ no es ω-categórico. Por todo lo anterior y por Lema 4.20, T tiene 2^ω modelos numerables no isomorfos.

Ahora suponga que existen modelos $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$ tales que para cada $i < \omega$, $\mathfrak{K}_i \cong \mathfrak{C}_j$ para algún j. Definimos por recursión una sucesión $\{k_i\}_{i<\omega}$ donde $1 \leq k_i \leq n$ y para cada i el conjunto $\{v|\mathfrak{K}_{v+j} \cong \mathfrak{C}_{k_j}, 0 \leq j \leq i\} = M_i$ es infinito.

Definimos a $k_0 = m$ donde m es el mínimo $l \in \{1, \ldots, n\}$ tal que el conjunto $\{v : \mathfrak{K}_v \cong \mathfrak{C}_l\}$ es infinito, claro que $M_0 = \{v : \mathfrak{K}_v \cong \mathfrak{C}_m\}$. Suponga que $k_0, \ldots, k_i$ ya fueron definidas. Por Hipótesis de Inducción M_i es infinito, por lo que existe r, tal que $\{v \in M_i : \mathfrak{K}_{v+i+1} \cong \mathfrak{C}_r\}$ es infinito. Sea $k_{i+1} = r$, entonces k_{i+1} tiene las propiedades deseadas.

Sea $\mathcal{D}_i = \sum_{j=0}^{i} \mathfrak{C}_{k_j}$; entonces $\mathcal{D}_i$ es ω-categórico porque cada $\mathfrak{C}_r$ lo es. Si $i > j$ entonces $\mathcal{D}_i \Supset \mathcal{D}_j$. Para cada $i > j$ existen $\mathcal{D}'_i$ y $\mathcal{D}'_j$ tales que $\mathfrak{A} \Supset \mathcal{D}'_i \Supset \mathcal{D}'_j$, $D'_i \supsetneqq D'_j$, $\mathcal{D}'_i \cong \mathcal{D}_i$, y $\mathcal{D}'_j \cong \mathcal{D}_j$; además D_j es definible en D_i, así D'_j es definible en $\mathcal{D}'_i$ por lo que $||S_1(Th(\mathcal{D}_i))|| > ||S_1(Th(\mathcal{D}_j))||$, por lo tanto $\mathcal{D}_i \ncong \mathcal{D}_j$. Por Lema 4.18, $\bigcup_{i<\omega} \mathcal{D}_i$ no es ω-categórico y por Lema 4.15, $\bigcup_{i<\omega} \mathcal{D}_i \Subset \mathfrak{B}_\Phi$ para algún $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$. Con todo lo anterior y por Lema 4.20 concluimos que hay 2^ω modelos numerables no isomorfos elementalmente equivalentes a $\mathfrak{A}$. $\square$

Bibliografía

[1] C.C. Chang and H.Jerome Keisler. *Model theory*, volume 73 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* Dover, 3rd edition, 2012.

[2] D. Lascar. Why some people are excited by vaught's conjecture. *The Journal of Symbolic Logic*, 50(4):973–982, December 1985.

[3] D. Marker. *Model theory: An Introduction.*, volume 217 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2002.

[4] J.G. Rosenstein. $\aleph_0$-categoricity of linear orderings. *Fund. Math*, 64:1–5, 1969.

[5] J.G Rosenstein. *Linear Orderings*, volume 98 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, 1982.

[6] M. Rubin. Theories of linear order. *Israel J. Math*, 17:392–426, 1974.