UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

"ESTABLECIENDO CLASES DE ISOMORFÍA DE GRUPOS FINITOS POR MEDIO DE INVARIANTES BAJO ISOMORFISMOS DE TABLAS DE MARCAS"

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

PRESENTA:
MARGARITA ANGÉLICA MARTÍNEZ LÓPEZ

ASESOR:
Dr. LUIS VALERO ELIZONDO

MORELIA MICHOACÁN, JULIO 2013

Para mi asesor, quien me guió con paciencia y dedicación.

Para mis cinco sinodales, a los que tuve la oportunidad de elegir y son mis profesores más queridos y que más han influido en mí.

Para mis padres que me han entregado todo para que yo lograra realizar mis sueños y han estado a mi lado en cada paso que he dado.

A mi querido hermano quien desde el primer instante me ha mostrado las maravillas del universo y a quien admiro por su gran sabiduría.

A mi mamá Mago y papá Gil que me educaron con amor y sobre todo con su ejemplo.

A mis suegros que me han cuidado y querido como a una hija.

A mi querida cuñada Paty que me ha mostrado que los pequeños detalles son los que hacen la vida.

A mis cuñados que siempre me han consentido y apoyado.

A mis incondicionales amigos Lulú, Sergio, Lua y Miguel con los que he crecido, reído y llorado y que se estarán siempre en mi corazón.

Y especialmente a mi amado esposo, que ha estado presente en cada etapa de este trabajo y que con su amor ha hecho cada uno de mis sueños realidad. Hemos vivido una hermosa aventura juntos y una nueva nos aguarda.

Contenido

Introducción

La tabla de marcas de un grupo contiene extensa información del grupo, lo ideal sería que lo caracterizara totalmente, es decir, dada una tabla de marcas correspondiera a un único grupo salvo isomorfismo, pero esto no ocurre como probó Thévenaz en 1988 dando un ejemplo de grupos de orden $5 \cdot 11^2$ no isomorfos con tablas de marcas isomorfas[1]. Recientemente se encontraron dos grupos de orden 96 con tal propiedad, obtenidos computacionalmente usando GAP (ver [2]). En esta tesis se pretende demostrar que éste es el ejemplo más pequeño, es decir, *dados dos grupos no isomorfos de orden menor que 96 sus tablas de marcas no son isomorfas.*

En realidad sólo faltan los casos más difíciles que son los de orden 24, 32, 36, 40, 48, 54, 56, 60, 64, 72, 80, 81 y 84, ya que los otros fueron tratados en una tesis anterior (ver [4]). La dificultad reside en que hay más de 10 grupos no abelianos y no isomorfos de cada orden.

La forma de trabajo consiste en encontrar todos los grupos hasta isomorfismo de cada uno de los órdenes anteriores, después dados dos grupos no isomorfos se buscarán invariantes preservados bajo isomorfismos de tablas de marcas tales que un grupo lo tenga y el otro no, por lo que sus tablas de

[1] Jacques Thévenaz. Isomorphic Burnside rings. *Communications in Algebra*, 16(9):1945-1947, 1988.

marcas no serán isomorfas.

La tesis se divide en tres capítulos:

En el primer capítulo se revisan las nociones básicas que servirán para el desarrollo de la tesis, y algunos de los métodos que se pueden seguir para encontrar todos los grupos no isomorfos de cierto orden.

En el segundo capítulo se verá el proceso que se debe seguir para encontrar la tabla de marcas de un grupo, cuáles son sus propiedades, qué información se puede encontrar en ellas y los invariantes que las caracteriza.

Finalmente, en el último capítulo se demuestra que los grupos cuyo orden es distinto de 72, no es múltiplo de 16 y es menor que 96 están caracterizados por su tabla de marcas.

Capítulo 1

Nociones Básicas

1.1. Grupos

Desde los inicios de la teoría de grupos con Galois en el siglo XIX, los grupos han aparecido en casi todas las áreas de las matemáticas, de allí la importacia de su estudio. ¿Pero qué es un grupo?

Definición 1. Un **grupo** es un conjunto no vacío G con una operación binaria asociativa $*$, denotado $(G, *)$, que contiene un elemento 1 tal que:

i) $1 * g = g$ para todo $g \in G$.

ii) $\forall\, g \in G$, existe un elemento $h \in G$ tal que $h * g = 1$.

Debido a la unicidad de estos elementos se les asigna un nombre especial: el 1 es llamado **elemento neutro** y a h se le llama **inverso de** g y se denota por g^{-1}.

Se suele escribir G para referirse a $(G, *)$ y gh en lugar de $g * h$. A lo largo del capítulo, G será considerado un grupo.

Definición 2. El número de elementos contenidos en un grupo G se llama **orden** y se denota por $|G|$. Si $|G| < \infty$ se dice que el grupo es **finito**.

A continuación se definirá una familia de grupos que facilitará el análisis, ya que sus tablas de marcas los caracterizan.

Definición 3. Dos elementos g y h en un grupo se dice que **conmutan** si $gh = hg$. Un grupo es llamado **abeliano** si todos sus elementos conmutan.

Existen unas funciones especiales que ayudan a comparar un grupo con otro:

Definición 4. Sean $(G, *)$ y $(H, \cdot)$ grupos. Un **homomorfismo** $\phi : G \to H$ es una función tal que $\phi(g * h) = \phi(g) \cdot \phi(h)$ para todo g, h en G. Usando la notación usual quedaría: $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$.

Cuando los homomorfismos tienen alguna característica adicional reciben un nombre de acuerdo a ella:

- Un **monomorfismo** es un homomorfismo inyectivo.
- Un **epimorfismo** es un homomorfismo suprayectivo.
- Un **isomorfismo** es un homomorfismo biyectivo. Dos grupos G y H son **isomorfos**, denotado por $G \cong H$, si existe un isomorfismo de G en H.
- Un **endomorfismo** es un homomorfismo de un grupo en sí mismo.
- Un **automorfismo** es un isomorfismo de un grupo en sí mismo.

Los subconjuntos de un grupo que a su vez son grupos con la operación heredada son muy importantes:

Definición 5. Un subconjunto no vacío S de un grupo G se llama **subgrupo** de G, denotado por $S \leq G$, si para todo $g, h \in S$ se tiene que g^{-1} y gh están en S. Se dice que es **propio** si $S \leq G$ y $S \neq G$, y se denota por $S < G$.

Hay una clase de subgrupos que es muy interesante ya que está intimamente relacionada con los homomorfismos.

Definición 6. Sea N un subgrupo de G. Se dice que N es un subgrupo **normal** de G, denotado $N \trianglelefteq G$, si $N = gNg^{-1}$ para todo $g \in G$. La notación $N \triangleleft G$ significa que N es un subgrupo normal de G distinto de G.

Sea S un subgrupo de G. El **normalizador** de S en G, denotado $N_G(S)$, es el conjunto $N_G(S) = \{g \in G : gSg^{-1} = S, S \leq G\}$. Si $N_G(S) = G$, entonces S es un subgrupo normal de G.

El kernel de un homomorfismo $f : G \to H$ es un subgrupo normal de G. Inversamente cada subgrupo normal es el kernel de algún homomorfismo.

Las clases de conjugación son básicas para definir la tabla de marcas de un grupo como se verá en el siguiente capítulo.

Definición 7. Sea $a \in G$. Una **conjugación** por a es una función $\gamma_a : G \to G$, donde $\gamma_a(g) = aga^{-1}$.

Definición 8. Sean $k, g \in G$. Se dice que k es un **conjugado** de g si $k = aga^{-1} = \gamma_a(g)$, para algún $a \in G$.

Análogamente se pueden conjugar subgrupos:

Definición 9. Dos subgrupos H y K de un grupo G se dicen **conjugados** si $K = aHa^{-1}$ para algún $a \in G$.

Teorema 1. La relación ser conjugado en G es una relación de equivalencia en G.

Definición 10. Las clases de equivalencia bajo esta relación se llaman **clases de conjugación** de G. $G_x = \{axa^{-1} : a \in G\}$. Se denota por $\mathscr{C}(G)$ al conjunto de las clases de conjugación de los subgrupos de G.

Usando esta definición se puede encontrar una equivalencia de la definición de grupos abelianos.

Teorema 2. Un grupo es abeliano si y sólo si todas sus clases de conjugación son conjuntos de cardinalidad 1.

Y también una para subgrupos normales:

Teorema 3. Sea S un subgrupo de G. S es un subgrupo normal de G si y sólo si $\gamma(S)$ es un subgrupo de S para toda conjugación γ.

Ahora se verá qué es un G-conjunto, esta definición surge de las propiedades fundamentales del grupo simétrico S_n. Pero hay otro rasgo fundamental de S_n: sus elementos son funciones actuando en algún conjunto dado. La idea de G-conjunto es la abstracción adecuada a esta idea.

Definición 11. Un **G-conjunto** es un conjunto X en el que el grupo G actúa, es decir, existe una función $\cdot : G \times X \to X$ (llamada la acción de G en X) para la cual usamos la notación gx que satisface:

i) $\forall\, x \in X$ se tiene que $1x = x$, donde 1 es la identidad de G.

ii) $\forall\ g, h \in G$ y $\forall\ x \in X$, se tiene que $(gh)x = g(hx)$.

Para finalizar esta sección, se verá lo que es un producto directo:

Definición 12. Sean G y H grupos. El **producto directo externo** de G y H, denotado $G \times H$, es el conjunto de pares ordenados (g, h), donde $g \in G$, $h \in H$, con la operación binaria $(g, h)(k, l) = (gk, hl)$.

Definición 13. Sea G un grupo con subgrupos normales N y M. Si $N \cap M = \{1\}$ y $NM = G$, entonces se dice que G es el **producto directo interno** de los subgrupos N y M, es decir $G = N \times M$.

1.2. Clasificando grupos

En esta sección se verán algunas definiciones y teoremas que son útiles en la clasificación de grupos hasta isomorfismo, tales como los teoremas de Sylow y las extensiones de grupos.

Teoremas de Sylow

Una tarea importante que se deriva de la teoría de Galois es la búsqueda de subgrupos de un grupo finito. El teorema de Lagrange garantiza que el orden de todo subgrupo es divisor del orden del grupo, lo que acota las posibilidades.

Ahora nacen dos preguntas: ¿Se debe buscar subgrupos de orden cualquier divisor del orden del grupo? ¿Cuántos y cuáles son los subgrupos que posee un grupo G de un orden dado?

En el caso de grupos cíclicos, se han contestado estas preguntas: Para cada divisor del orden del grupo, existe un único subgrupo de ese orden, que además es cíclico.

Por otro lado el recíproco del teorema de Lagrange es falso, como contraejemplo se tiene a A_4, el cual tiene orden 12 pero no tiene subgrupos de orden 6.

Para el caso de que la primera pregunta sea afirmativa nótese que S_3 tiene 3 subgrupos de orden 2; estos grupos son isomorfos; aún más, los 3 son conjugados, lo que facilita su localización. Otra situación no tan deseada la presenta D_8: es un grupo de orden 8 que tiene un subgrupo de orden 4 que es cíclico y dos subgrupos de orden 4 que son productos directos de grupos cíclicos de orden 2. Por lo tanto, no pueden ser isomorfos y deben ser localizados uno a uno. Los teoremas de Sylow localizan en un grupo finito los subgrupos de orden potencia de primo.

Definición 14. Sea p un número primo. Un grupo K es un p**-grupo** si para todo elemento g en K, el orden de g es una potencia de p.

Definición 15. Sean p un número primo y H un subgrupo de G. Se dice que H es un p**-subgrupo** de G si H es un p-grupo.

Definición 16. Sea p un número primo. Un subgrupo H de G es un p**-subgrupo de Sylow** de G si es un p-subgrupo de G que no está contenido propiamente en ningún otro p-subgrupo de G.

Teorema 4. (Teorema de Cauchy) Si G es un grupo finito y p es un primo divisor de $|G|$ entonces existe al menos un elemento de orden p.

El primer teorema de Sylow dice que todo grupo finito posee p-subgrupos de Sylow.

Teorema 5. (1er Teorema de Sylow)
Sea G un grupo de orden $p^n m$, con p primo y $p \nmid m$. Entonces para cada $r = 0, \cdots, n$, G posee, al menos un subgrupo de orden p^r.

El segundo teorema de Sylow ayuda a encontrar el número de p-subgrupos de Sylow que tiene un grupo.

Teorema 6. (2do Teorema de Sylow)
Sea G un grupo y p primo.

i) El número n_p de p-subgrupos de Sylow es congruente con 1 mod p.

ii) Los p-subgrupos de Sylow de G son conjugados. En consecuencia, si H es un p-subgrupo de Sylow entonces $n_p \mid [G : H]$.

Teorema 7. (3er Teorema de Sylow)
Cada p-subgrupo de G está contenido en un p-subgrupo de Sylow.

Extensiones

Un grupo G que tiene un subgrupo normal K se puede factorizar en K y G/K. El estudio de extensiones trata de resolver el problema inverso, es decir: dados $K \lhd G$ y G/K, ¿hasta qué punto se puede recuperar a G? Primero se verá qué es una extensión:

Definición 17. Si K y Q son grupos, entonces una **extensión de** K **por** Q es un grupo G que tiene un subgrupo normal K_1 isomorfo a K y con G/K_1 isomorfo Q.

Ejemplo 1. Si $K \lhd G$ entonces G es extensión de K por G/K.

Ejemplo 2. Si $\varphi : G \to G'$ es un homomorfismo entonces G es extensión de $ker(\varphi)$ por $G/ker(\varphi)$.

Ejemplo 3. Tanto S_3 como C_6 son extensiones de C_3 por C_2. Sin embargo, C_6 es una extensión de C_2 por C_3 y S_3 no, porque S_3 no tiene subgrupos normales de orden 2.

El problema de extensión (formulado por O. Hölder) consiste en encontrar todas las extensiones de K por Q, con K y Q grupos dados. Una solución a este problema consiste en determinar a partir de K y Q todos los grupos G para el cual $G/K \cong Q$, pero ¿qué significa que algo "determine" al grupo? Una respuesta es que la clase de isomorfismo de G puede ser caracterizada, es decir, que si se cuenta con el grupo de automorfismos de K se podrá determinar al grupo.

Definición 18. El conjunto de todos los automorfismos de G bajo la operación de composición de funciones forma un grupo, llamado el **grupo de automorfismos** de G y denotado por $\mathrm{Aut}(G)$.Un elemento φ en $\mathrm{Aut}(G)$ se dice que es **interno** si es la conjugación por algún elemento de G, es decir $\varphi = \varphi_a$ con a en G. El conjunto de todos los automorfismos internos de G se denota por $\mathrm{Inn}(G)$.

Por otra parte si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, el grupo $GL(V)$ se define como el grupo de transformaciones lineales invertibles de V a V, cuya operación es la composición de funciones.

Si $V = \mathbb{F}^n$ para algún campo $\mathbb{F}$, entonces el grupo $GL(V)$ es denotado comúnmente por $GL(n, \mathbb{F})$. En este caso si se identifica cada transformación lineal $T : V \to V$ con su matriz, respecto a su base estandar, este grupo se identifica con el grupo de matrices invertibles de tamaño $n \times n$, bajo la operación de grupo de producto de matrices.

Los siguientes cuatro teoremas ayudan a determinar el grupo de automorfismos de algunos grupos específicos (su demostración se puede encontrar en [4]):

Teorema 8. Si G es un grupo cíclico de orden p con p primo, entonces $Aut(C_p) \cong C_{p-1}$.

Teorema 9. $Aut(C_2) \cong 1$; $Aut(C_4) \cong C_2$; si $n \geq 3$, entonces $Aut(C_{2^n}) \cong C_2 \times C_{2^{n-2}}$.

Teorema 10. Si p es un primo diferente de 2, entonces $Aut(C_{p^n}) \cong C_r$ donde $r = (p-1)p^{n-1}$.

Teorema 11. Si $G = H \times K$, con $(|H|, |K|) = 1$. Entonces se cumple que:

$$Aut(G) = Aut(H \times K) \cong Aut(H) \times Aut(K).$$

Productos semidirectos

A continuación se presenta la definición de producto semidirecto que es un tipo particular de extensiones y muchos de los grupos que se estudiarán son de esta forma:

Definición 19. Sean K, Q subgrupos de G. Se dice que el grupo G es el *producto semidirecto* de K por Q, denotado $G = K \rtimes Q$, si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(i) K es normal en G,

(ii) $KQ = G$,

(ii) $K \cap Q = \{1\}$.

También se dice que G se **divide** sobre K.

Antes de presentar algunos ejemplos se verán algunas equivalencias de este concepto.

Lema 1. Si K es un subgrupo normal de un grupo G, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) G es el producto semidirecto de K por Q donde $Q \cong G/K$.

(ii) Existe un subgrupo $Q \leq G$ tal que cada elemento $g \in G$ tiene una única expresión $g = ax$, con $a \in K$ y $x \in Q$.

(iii) Existe un homomorfismo $s : G/K \to G$ con $\pi s = 1_{G/K}$, donde $\pi : G \to G/K$ es la proyección natural (cociente).

(iv) Existe un homomorfismo $\pi : G \to G$ con $\ker(\pi) = K$ y $\pi(x) = x$ para toda x en $Im(\pi)$. El mapeo π es llamado **retracción** de G y la $Im(\pi)$ es llamado el **retracto** de G.

Ejemplo 4. $A_4 = (C_2 \times C_2) \rtimes C_3$.

Ejemplo 5. $S_n = A_n \rtimes C_2$.

Ejemplo 6. $D_{2n} = C_n \rtimes C_2$.

Ejemplo 7. Aut(S_6)=$S_6 \rtimes C_2$

Ejemplo 8. Si $G = \langle a \rangle$ es cíclico de orden 4 y $K = \langle a^2 \rangle$, entonces G no es un producto semidirecto de K por G/K.

Demostración. $K \cong C_2$, $G/K \cong C_2$ entonces la extensión de K por G/K sería $Q = C_2 \times C_2$ pero $G \ncong Q$.

Ejemplo 9. Tanto S_3 como C_6 son productos semidirectos de C_3 por C_2.

Lo ideal sería que el producto semidirecto estuviera determinado por sus dos subgrupos factores, pero este último ejemplo muestra que no siempre ocurre. Sin embargo, se puede ver que el producto semidirecto depende de "cómo" K es normal en G.

Lema 2. Si G es un producto semidirecto de K por Q, entonces existe un homomorfismo $\theta : Q \to \mathrm{Aut}(K)$, definido por

$$\theta(x)(a) = \theta_x(a) = xax^{-1}$$

con $x \in Q$ y $a \in K$.

Más aún, para todo $x, y, 1 \in Q$ y $a \in K$, se tiene que

$$\theta_1(a) = a \quad \text{y} \quad \theta_x(\theta_y(a)) = \theta_{xy}(a).$$

El objetivo es recuperar a G a partir de K y Q cuando G es producto semidirecto de K por Q, sólo que G también involucra a un homomorfismo $\theta : Q \to \mathrm{Aut}(K)$.

Definición 20. Sean Q y K grupos, y $\varphi : Q \to \mathrm{Aut}(K)$ un homomorfismo. Un producto semidirecto G de K por Q **realiza** a φ si para todo $x \in Q$ y $a \in K$,

$$\varphi_x(a) = xax^{-1}.$$

En este contexto el lema 2 dice que cada producto semidirecto G de K por Q determina algún θ al cual realiza. Intuitivamente, "realizando a θ " es una manera de describir cómo K es normal en G. Por ejemplo, si θ es el homomorfismo trivial, es decir, $\theta_x = 1_K$ para cada $x \in G$, entonces $a = \theta_x(a) = xax^{-1}$ para cada $a \in K$, y por lo tanto $K \leq C_G(Q)$.

Definición 21. Sean Q y K grupos y $\theta : Q \to \mathrm{Aut}(K)$ un homomorfismo. Se define $G = K \rtimes_\theta Q$ como el conjunto de los pares ordenados $(a, x) \in K \times Q$ con la operación:

$$(a, x)(b, y) = (a\theta_x(b), xy).$$

Entonces un grupo G que es producto semidirecto de K por $Q \cong G/K$ queda determinado por K, Q y por el homomorfismo $\theta : Q \to \mathrm{Aut}(K)$:

Teorema 12. Sean Q y K grupos y $\theta : Q \to \mathrm{Aut}(K)$ un homomorfismo, entonces $G = K \rtimes_\theta Q$ es un producto semidirecto de K por Q que realiza a θ.

Además cualquier producto semidirecto realiza a un homomorfismo.

Teorema 13. Si G es un producto semidirecto de K por Q, entonces existe $\theta : Q \to \mathrm{Aut}(K)$ tal que $G \cong K \rtimes_\theta Q$.

La siguiente proposición da la relación entre los ordenes de K, Q y G.

Proposición 1. Sea G un grupo y sean K y Q subgrupos de G tal que $G = K \rtimes Q$. Entonces $|G| = |K|\,|Q|$.

Los productos directos son un caso especial de los productos semidirectos como se ve en la siguiente proposición:

Proposición 2. Sea G un grupo y sean N y M subgrupos de G. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) G es el producto directo interno de N y M.

ii) G es el producto semidirecto interno de N por M y también el producto semidirecto interno de M por N.

Extensiones cíclicas

Hay un tipo de extensiones que son de gran utilidad las cuales serán tratadas en esta sección y son utilizadas en [10] para encontrar todos los grupos hasta isomorfismo de orden 81.

Sea G un grupo finito y $N \lhd G$ tal que G/N es cíclico, es decir, G/N es isomorfo al grupo cíclico de orden n. Ahora, tómese $a \in G - N$ tal que la clase Na genera a G/N. Sea $\upsilon = a^n \in N$ y sea $\tau \in Aut(N)$ que actúa via conjugación con a. Entonces se tiene que:

$$\tau(\upsilon) = aa^n a^{-1} = a^n = \upsilon.$$

En otras palabras: τ fija a υ. También, para $x \in N$,

$$\tau^n(x) = a^n x a^{-n} = \upsilon x \upsilon^{-1}.$$

Así, τ^n actúa via conjugación por υ. En particular, si N es un grupo abeliano, entonces τ^n es el automorfismo identidad.

Definición 22. Un **tipo de extensión** para un grupo N es una cuádrupla (N, n, τ, υ), que satisface las condiciones anteriores.

Nótese que esta definición se establece sin mención de un grupo G específico. Sin embargo, empezando con un grupo G que tiene un grupo factor $G/N \cong C_n$, se puede construir un tipo de extensión (N, n, τ, υ) como se explicó en líneas anteriores; aún más, el tipo de extensión determina a G hasta isomorfismo.

Teorema 14. (Teorema de extensiones cíclicas)
Cada tipo de extensión (N, n, τ, υ) es realizada por un grupo G adecuado.

Definición 23. Dos tipos de extensión son **equivalentes** si ambas determinan grupos isomorfos.

Definición 24. Los tipos de extensión (N, n, τ, υ) y (N', n, σ, ω) son conjugadas si hay un isomorfismo $\phi : N \to N'$ tal que $\sigma = \phi \circ \tau \circ \phi^{-1}$ y $\omega = \phi(\upsilon)$.

El lema siguiente nos dice que la conjugación de tipos de extensión es una relación de equivalencia.

Lema 3. Los tipos de extensión conjugadas son equivalentes.

Capítulo 2

Tablas de marcas

En este capítulo se explicará cómo se construyen las tablas de marcas, qué información se puede deducir de los grupos a partir de ellas y cuáles son los invariantes que ayudan a deducir cuándo dos tablas de marcas no son isomorfas.

2.1. Construcción de Tablas de Marcas

Sean G un grupo finito y $\mathscr{C}(G)$ la familia de todas las clases de conjugación de los subgrupos de G. Para todo $[H] \in \mathscr{C}(G)$ se elige un representante, por ejemplo H, y se numeran (de menor a mayor respecto al orden), por decir $H_1,\ H_2, \ldots, H_n$.

La tabla de marcas de G es la matriz $T_G = (a_{ij})$, cuya entrada a_{ij} es el número de puntos fijos bajo H_i del G-conjunto G/H_j, denotado por $\varphi_{H_i}(G/H_j)$. Es decir:

$$a_{ij} = \varphi_{H_i}(G/H_j) = |\{x \in G/H_j :\ hx = x, \forall h \in H_i\}|.$$

Ejemplo 10. Sea $G = C_p$ el grupo cíclico de orden p primo. Los subgrupos de G son $H_1 = \{1\}, H_2 = G$.

$G/H_1 = G/\{1\} = G = C_p$ y $G/H_2 = G/G = \{1\}$.

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= |\{x \in G/H_1 : h(x) = x, \forall h \in H_1\}| = |\{x \in C_p : h(x) = x, \forall h \in \{1\}\}| \\
&= p \\
a_{12} &= |\{x \in G/H_2 : h(x) = x, \forall h \in H_1\}| = |\{x \in \{1\} : h(x) = x, \forall h \in \{1\}\}| \\
&= 1 \\
a_{21} &= |\{x \in G/H_1 : h(x) = x, \forall h \in H_2\}| = |\{x \in C_p : h(x) = x, \forall h \in C_p\}| \\
&= 0 \\
a_{22} &= |\{x \in G/H_2 : h(x) = x, \forall h \in H_2\}| = |\{x \in \{1\} : h(x) = x, \forall h \in C_p\}| \\
&= 1
\end{aligned}
$$

por lo que su tabla de marcas se ve

$$T_{C_p} = \begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las dos afirmaciones siguientes dan equivalencias que ayudan a calcular las entradas de las tablas de marcas.

Afirmación 1. $\varphi_H (G/K) = \alpha (H, K) \frac{|N_G(K)|}{|K|}$.

Donde $\alpha (H, K)$ es el número de subgrupos de G que son conjugados a K y que contienen a H.

$$\alpha (H, K) = |\{N \leq G : H \leq N, N = gKg^{-1}, g \in G\}|.$$

Demostración. Se puede ver en [3].

Afirmación 2. $\varphi_H (G/K) = \beta(H, K)\frac{|N_G(H)|}{|K|}$.

Donde $\beta(H, K)$ es el número de subgrupos de G que son conjugados a H y están contenidos en K.

$$\beta (H, K) = |\{N \leq G : N \leq K, N = gHg^{-1}, g \in G\}|.$$

Demostración. También disponible en [3].

Ejemplo 11. Sea $G = C_9$ el grupo cíclico de orden 9. Los subgrupos de G son $H_1 = \{1\}, H_2 = C_3, H_3 = C_9$.

$|N_G(H_1)|=|N_G(H_2)|=|N_G(H_3)|=|G|=9$

$\beta(H_1, H_1)=|\{N \leq C_9 : N \leq \{1\}, N = g\{1\}g^{-1}, g \in C_9\}|=1$

$\beta(H_1, H_2)=|\{N \leq C_9 : N \leq C_3, N = g\{1\}g^{-1}, g \in C_9\}|=1$

$\beta(H_1, H_3)=|\{N \leq C_9 : N \leq C_9, N = g\{1\}g^{-1}, g \in C_9\}|=1$

$\beta(H_2, H_1)=|\{N \leq C_9 : N \leq \{1\}, N = gC_3g^{-1}, g \in C_9\}|=0$

$\beta(H_2, H_2)=|\{N \leq C_9 : N \leq C_3, N = gC_3g^{-1}, g \in C_9\}|=1$

$\beta(H_2, H_3)=|\{N \leq C_9 : N \leq C_9, N = gC_3g^{-1}, g \in C_9\}|=1$

$\beta(H_3, H_1)=|\{N \leq C_9 : N \leq \{1\}, N = gC_9g^{-1}, g \in C_9\}|=0$

$\beta(H_3, H_2)=|\{N \leq C_9 : N \leq C_3, N = gC_9g^{-1}, g \in C_9\}|=0$

$\beta(H_3, H_3)=|\{N \leq C_9 : N \leq C_9, N = gC_9g^{-1}, g \in C_9\}|=1$

$$a_{ij} = \varphi_{H_i}(G/H_j) = \beta(H_i, H_j)\,\tfrac{|N_G(H_i)|}{|H_j|}$$

por lo que la tabla de marcas queda:

$$T_{C_9} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los dos ejemplos siguientes involucran a los grupos hasta isomorfismo de orden 6.

Ejemplo 12. Sea $G = C_6$ el grupo cíclico de orden 6. Sus subgrupos son $H_1 = \{1\}, H_2 = C_2, H_3 = C_3, H_4 = C_6$ así que su tabla de marcas es

$$T_{C_6} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 13. Sea $G = S_3$ el grupo simétrico de orden 6. Los únicos subgrupos de G son $H_1 = \{1\}, H_2 = \langle(12)\rangle, H_3 = \langle(123)\rangle, H_4 = S_3$ entonces se tiene que su tabla de marcas luce

$$T_{S_3} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las tablas de marcas anteriores no son isomorfas ya que difieren en la entrada a_{22}.

Si se observan los ejemplos se puede notar que hay ciertas características que todas las tablas tienen en común, por ejemplo que la última columna tiene sólo unos. La siguiente proposición reune estas peculiaridades.

Proposición 3. La tabla de marcas $T_G = (a_{ij})$ del grupo G satisface:

1. T_G es cuadrada de tamaño $n \times n$ donde $n = |\mathscr{C}(G)|$.

2. T_G tiene coordenadas enteras.

3. T_G es triangular superior.

4. $a_{in} = 1,\ 1 \leq i \leq n$, es decir, la última columna es la unidad de $\prod_{x \in \mathscr{C}(G)} \mathbb{Z}_x$.

5. La primer fila de G corresponde a los índices de los subgrupos de G, esto es:
$$a_{1i} = [G : H_i] = \tfrac{|G|}{|H_i|},\ 1 \leq i \leq n.$$

6. $a_{ii} = \left|\frac{N_G(H_i)}{H_i}\right|, 1 \leq i \leq n.$

7. Un elemento en la diagonal divide a cada elemento de la misma columna, es decir:

$$\varphi_{H_i}\left(G/H_i\right) \mid \varphi_{H_j}\left(G/H_i\right),\ 1 \leq j \leq i.$$

8. $a_{11} = |G|$ es la entrada mayor de T_G.

9. $|H_i| = \frac{a_{11}}{a_{1i}}$.

10. $\alpha\left(H_i, H_j\right) = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$.

11. $\beta\left(H_i, H_j\right) = \frac{a_{ij}a_{1i}}{a_{ii}a_{1j}}$.

Demostración. Se puede consultar en [4].

2.2. Propiedades de las tablas de marcas

Dada una tabla de marcas T_G se pueden obtener muchas propiedades del grupo G al que está asociada. La siguiente información se deriva de conocer la tabla de marcas de un grupo.

El orden del grupo G: Es la entrada más grande de T_G (en el lugar (1,1)).

El número de clases de conjugación de subgrupos de G: Es el tamaño de T_G.

Los índices de los subgrupos de G: Son las entradas del primer renglón de T_G.

Los órdenes de los subgrupos de G: Se sigue de conocer los índices y el orden de G.

Los p-subgrupos de Sylow de G: Se conocen por su orden.

El índice de H_i en su normalizador: Es la entrada a_{ii}.

El orden del normalizador de H_i en G: Se obtiene de la siguiente forma

$$|N_G(H_i)| = \tfrac{a_{ii}a_{11}}{a_{1i}}.$$

El índice del normalizador de H_i en G: Se encuentra como se muestra abajo, nótese que también es el número de conjugados del subgrupo H en G,

$$[G : N_G(H_i)] = \tfrac{a_{1i}}{a_{ii}} = |\{K \leq G : gHg^{-1} = K, g \in G\}|.$$

El número de subgrupos de G: Se obtiene sumando el número de conjugados de H_i para todo i,

$$|\{N \leq G\}| = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{ii}}.$$

Los subgrupos normales de G: Son los H_i tales que la columna i-ésima tiene sólo dos valores que son cero y el índice de H_i en G.

Los subgrupos H_j (hasta conjugación) de un subgrupo H_i de G: Son aquellos para los que la entrada a_{ij} es diferente de cero.

Los subgrupos maximales propios de G: Son los H_i para los cuales las entradas del renglón i-ésimo entre la a_{ii} y la a_{in} son cero.

El subgrupo de Frattini de G: El subgrupo de Frattini de un grupo es la intersección de todos los subgrupos maximales. En T_G se puede identificar por ser el mayor subgrupo normal de G contenido en todos los subgrupos maximales.

La tabla de marcas de un grupo cociente G/H: Usando el teorema de la correspondencia se obtiene encontrando los subgrupos de G que contienen a H.

Si G es abeliano: Podemos saber si G es abeliano por su tabla de marcas checando que todos sus subgrupos son normales y no tienen ningún cociente isomorfo a los cuaternios de orden 8.

El subgrupo derivado de G: Es el mayor subgrupo normal de G cuyo cociente es abeliano.

Los subgrupos cíclicos de G: Son los H_i tales que tienen un único subgrupo para cada divisor del orden de H_i.

Los subgrupos elementales abelianos de G: Están caracterizados por el número de subgrupos de orden p^2. Un subgrupo H de G es elemental abeliano si el orden de H es p^n para algún p primo y un entero $n \geq 1$, y ya sea que $n = 1$, o que $n = 2$ y H no sea cíclico, o que $n \geq 3$ y que el número de subgrupos de H de orden p^2 sea $\frac{(p^n-1)(p^n-p)}{(p^2-1)(p^2-p)}$.

2.3. Invariantes preservados por isomorfismos de tablas de marcas

Como se ha mencionado anteriormente se puede decir mucho acerca de un grupo en términos de su tabla de marcas. Pero ¿Qué tanto se puede decir acerca de los subgrupos de un grupo conociendo su tabla de marcas? En esta sección, se verán algunos atributos de los subgrupos que se preservan bajo isomorfismos entre tablas de marcas.

Definición 25. Sean G, Q grupos finitos. Sea $\mathscr{C}(G)$ la familia de todas las clases de conjugación de los subgrupos de G. Se asume que los elementos de $\mathscr{C}(G)$ están ordenados en orden creciente, respecto al orden. Sea ψ una función de $\mathscr{C}(G)$ a $\mathscr{C}(Q)$. Dado un subgrupo H de G, se denota por H' a algún representante de $\psi([H])$, donde $[H]$ es la clase de conjugación de H. Se dice que ψ es un isomorfismo entre las tablas de marcas de G y Q si ψ es una biyección y si $\varphi_{H'}(Q/K') = \varphi_H(G/K)$ para cualesquiera subgrupos H, K de G.

El siguiente teorema es la herramienta principal usada en la tesis para decidir cuando dos tablas de marcas no son isomorfas.

Teorema 15. Atributos preservados

Sean G y Q grupos finitos con tablas de marcas isomorfas. Sean K, H subgrupos de G y sean K', H' representantes en sus respectivas clases de conjugación de subgrupos bajo el isomorfismo entre sus tablas de marcas entonces tenemos que:

1.
   - $G' = Q$
   - $(1_G)' = 1_Q$
   - $|G| = |G'|$
   - $|H| = |H'|$
   - $\alpha(H, K) = \alpha(H', K')$
   - $\beta(H, K) = \beta(H', K')$
   - $|N_G(H)| = |N_Q(H')|$

2. El subgrupo H es normal en G si y sólo si H' es normal en Q. En consecuencia G/H y Q/H' tienen tablas de marcas isomorfas.

3. Si $K \leq H$ y si al menos uno de estos dos subgrupos es normal en G, entonces $K' \leq H'$ para cualesquiera H' y K'.

4. Si K y H son subgrupos normales de G, entonces $(K \cap H)' = K' \cap H'$ y $(KH)' = K'H'$. En particular dos subgrupos normales con intersección trivial corresponden a dos subgrupos normales con intersección trivial. Aún más, si $G = H \times K$ entonces $Q = H' \times K'$, K y K' tienen tablas de marcas isomorfas y H, H' tienen tablas de marcas isomorfas.

5. El subgrupo H es maximal en G si y sólo si H' es maximal en Q.

6. Si G es un p-grupo, entonces $socle(Z(G))' = socle(Z(Q))$. El *socle* de un grupo es el subgrupo generado por los subgrupos normales minimales.

7. Los subgrupos de Frattini se corresponden, es decir, $\Phi(G)' = \Phi(Q)$.

8. Para cualquier divisor d del orden de H, el número de subgrupos de H de orden d es preservado; en particular, el número total de subgrupos de H se preserva.

9. El subgrupo H es cíclico si y sólo si H' es cíclico.

10. Si H es isomorfo al grupo de los cuaternios de orden 8, entonces H' también lo es.

11. Si G es abeliano entonces $G \cong Q$.

12. Los subgrupos conmutadores se corresponden, es decir $[G, G]' = [Q, Q]$. Por otra parte los grupos abelianizados se corresponden esto es:
$$G/[G,G] \cong Q/[Q,Q].$$

13. Si $G \cong S_n$ con $n \geq 5$, entonces $Q \cong G$.

14. El subgrupo H es elemental abeliano si y sólo si H' es elemental abeliano.

15. El grupo G es nilpotente si y sólo si Q es nilpotente. Sin embargo, hay p-grupos no isomorfos con tablas de marcas isomorfas.

Demostración. 1. No es difícil de ver.

2. Se sigue de 1.

3. El subgrupo normal corresponde a un único subgrupo: el resto se sigue de 1.

4. La intersección de dos subgrupos normales es el subgrupo normal más grande contenido en ambos subgrupos, KH es el subgrupo normal más pequeño que contiene a K y a H; el resto es claro.

5. Asumase que H es subgrupo maximal de G. Sea M' un subgrupo de Q entre H' y Q, y sea M el subgrupo correspondiente en G. Como $0 = \alpha\,(H', M') = \alpha\,(H, M)$, un conjugado de M contiene a H. Pero H es maximal, así que este conjugado es o bien H (así que $M' = H'$) o G (por lo que $M' = Q$).

6. Note que el socle del centro de un p-grupo está caracterizado por ser el subgrupo normal más pequeño de G tal que tiene intersección no trivial con cada subgrupo normal no trivial de G. Esta propiedad es preservada bajo la correspondencia.

7. Sea $X = \Phi(G)$. Por simetría, es suficiente mostrar que $X' \leq \Phi(Q)$. Note que X es un subgrupo normal de G contenido en todos los subgrupos

maximales. Como los subgrupos maximales se corresponden, entonces X' es un subgrupo normal de Q contenido en todos los subgrupos maximales, por lo que $X' \leq \Phi(Q)$.

8. Cada p-subgrupo de Sylow de G es normal y esta propiedad es preservada.

9. El número de subgrupos de H de orden d es igual a $\sum \beta(K, H)$ para todo $K \in \mathscr{C}(G)$ de orden d.

10. Un subgrupo H es cíclico si y sólo si para cada divisor d de $|H|$, H tiene exactamente un subgrupo de orden d.

11. El grupo de los cuaternios es el único grupo de orden ocho con tres subgrupos de orden cuatro.

12. El grupo G es un producto directo de subgrupos cíclicos.

13. El subgrupo conmutador es el subgrupo normal más pequeño de G con un cociente abeliano. Esta propiedad es preservada bajo la correspondencia.

14. S_n con n mayor o igual a 5 está caracterizado por las siguientes tres propiedades. (1)Tiene orden $n!$; (2)Solo tiene un subgrupo normal propio, cuyo orden es $n!/2$; (3)Tiene un subgrupo de índice n (la acción en las n clases de conjugación da un isomorfismo a S_n). Estas propiedades son preservadas por un isomorfismo entre las tablas de marcas.

15. Se demuestra en [1].

Capítulo 3

Aportaciones Originales

Ahora que ya se tienen las nociones básicas, se abordará el objetivo principal de esta tesis. Cada sección será dedicada a uno de los órdenes que se establecieron en la introducción. Se empezará dando la lista de grupos hasta isomorfismo de cada orden, en la cual también se indicará el ID del grupo en la libreria de GAP para facilitar su manejo. Después se localizará alguno de los atributos que aparecen en el capítulo anterior, por ejemplo si el grupo es abeliano, se puede estar seguro que su tabla de marcas no es isomorfa a la de ningún otro grupo por el atributo 11 del teorema 15.

Nota: Sólo se tomarán en cuenta homomorfismos con los que se construyan grupos no isomorfos: $K \rtimes_{\varphi} Q \cong K \rtimes_{\varphi'} Q$ si $\varphi' = \varphi\beta$ con $\beta \in$Aut(Q) o si $\varphi' = \alpha \cdot \varphi \cdot \alpha^{-1}$ con $\alpha \in$Aut(K).

3.1. Grupos de orden 24

La clasificación de los grupos de orden 24 se puede encontrar en [5], en total hay 15 grupos no isomorfos y están listados a continuación:

- $\star$ $G_1 = C_{24} = [24, 2]$
- $\star$ $G_2 = C_{12} \times C_2 = [24, 9]$
- $\star$ $G_3 = C_6 \times C_2 \times C_2 = [24, 15]$
- $\star$ $G_4 = C_3 \times Q_8 = [24, 11]$
- $\star$ $G_5 = C_3 \times D_8 = [24, 10]$
- $\star$ $G_6 = C_3 \rtimes C_8 = [24, 1]$
- $\star$ $G_7 = C_4 \times S_3 = [24, 5]$
- $\star$ $G_8 = C_2 \times (C_3 \rtimes C_4) = [24, 7]$
- $\star$ $G_9 = C_2 \times A_4 = [24, 13]$
- $\star$ $G_{10} = C_2 \times C_2 \times S_3 = [24, 14]$
- $\star$ $G_{11} = Q_8 \rtimes C_3 = [24, 3]$
- $\star$ $G_{12} = C_3 \rtimes Q_8 = [24, 4]$
- $\star$ $G_{13} = D_{24} = [24, 6]$
- $\star$ $G_{14} = (C_6 \times C_2) \rtimes C_2 = [24, 8]$
- $\star$ $G_{15} = S_4 = [24, 12]$

¿Por qué no pueden tener tablas de marcas isomorfas?

- $\cdot$ G_1, G_2 y G_3 son abelianos.

- G_4, G_5, G_7, G_8, G_9 y G_{10} son productos directos, por el atributo 4 se sigue que la tabla de marcas de cada uno de estos grupos no es isomorfa a otra.

- Q_8 es subgrupo de G_{11} y G_{12}, por el atributo 10 no pueden tener tablas de marcas isomorfas al del resto de los grupos. Q_8 es normal en G_{11} y G_{12} no tiene subgrupos normales de orden 8, por el atributo 2 se tiene que $T_{G_{11}} \ncong T_{G_{12}}$.

- C_8 es subgrupo solamente de G_6 por 9, se sabe que su tabla de marcas no es isomorfa a la de ningún otro grupo. Análogamente, como C_{12} es subgrupo de G_{13} y no lo es de G_{14} ni de G_{15} se llega a la misma conclusión.

- C_3 es subgrupo normal de G_{14} pero no de G_{15}, por lo que $T_{G_{15}} \ncong T_{G_{14}}$.

3.2. Grupos de orden 36

Por los teoremas de Sylow $n_3 \in \{1, 4\}$.

Lema 4. Sea G un grupo de orden 36, si $n_3 = 4$ entonces G tiene un único 2-subgrupo de Sylow y este es isomorfo a $C_2 \times C_2$.

Demostración. Ver [7].

Teorema 16. Sea G un grupo de orden 36, entonces G es isomorfo a uno de los grupos de la siguiente lista:

- ⋆ $G_1 = C_{18} \times C_2 = [36, 5]$

- ⋆ $G_2 = (C_2 \times C_2) \rtimes_\varphi C_9 = [36, 3]$

- $\star$ $G_3 = C_6 \times C_6 = [36, 14]$
- $\star$ $G_4 = C_3 \times A_4 = [36, 11]$
- $\star$ $G_5 = C_{36} = [36, 2]$
- $\star$ $G_6 = C_9 \rtimes_\varphi C_4 = [36, 1]$
- $\star$ $G_7 = D_{36} = [36, 4]$
- $\star$ $G_8 = C_6 \times S_3 = [36, 12]$
- $\star$ $G_9 = C_2 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes_\varphi C_2) = [36, 13]$
- $\star$ $G_{10} = S_3 \times S_3 = [36, 10]$
- $\star$ $G_{11} = C_3 \times C_{12} = [36, 8]$
- $\star$ $G_{12} = C_3 \times (C_3 \rtimes_{\varphi_1} C_4) = [36, 6]$
- $\star$ $G_{13} = (C_3 \times C_3) \rtimes_{\varphi_2} C_4 = [36, 7]$
- $\star$ $G_{14} = (C_3 \times C_3) \rtimes_{\varphi_3} C_4 = [36, 9]$

Demostración. Sea G un grupo de orden 36, $P, Q \leq G$ tal que $|P|$=4 y $|Q|$=9. Recuerdese que $n_3 \in \{1, 4\}$.

(*a*) $n_3 = 4$. Por el lema 4, se sigue que $P = C_2 \times C_2$ es subgrupo normal de G, como $P \cap Q = 1$ y $PQ = G$ entonces $G = P \rtimes_\varphi Q$ donde $\varphi : Q \to \mathrm{Aut}(P)$ es un homomorfismo. Supongase que $C_2 \times C_2 = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$.

Aut(P)=Aut($C_2 \times C_2$)=$S_3 = \{1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_1, \alpha_2\}$.

Debido a que existen dos grupos no isomorfos de orden 9, entonces se tienen dos casos:

1. $Q = C_9 = \langle\sigma\rangle$

   Primero se obtendrán todos los posibles homomorfismos $\varphi : C_9 \rightarrow S_3$.

   $|Im(\varphi)| \in \{1, 3\}$, los únicos elementos de S_3 de orden 3 son α_1 y α_2, pero como son conjugados lo productos semidirectos que se obtienen de ellos son isomorfos, así que sólo hay dos homomorfismos:

   $\varphi_0(\sigma) = 1$

   $\varphi_1(\sigma) = \alpha_1$ donde $\alpha_1(x) = y$ y $\alpha_1(y) = xy$

   Con ellos se contruyen los primeros dos grupos de la lista.

   No son isomorfos porque $ker(\varphi_0) = C_9$ y $ker(\varphi_1) = C_3$.

2. $Q = C_3 \times C_3 = \langle\sigma\rangle \times \langle\tau\rangle$

   $\varphi : C_3 \times C_3 \rightarrow S_3$

   $|Im(\varphi)| \in \{1, 3\}$, como en el caso anterior se tienen dos homomorfismos:

   $\varphi_0(\sigma) = 1$, $\varphi_0(\tau) = 1$

   $\varphi_1(\sigma) = \alpha_1$, $\varphi_1(\tau) = 1$

   con los que se obtienen G_3 y G_4 respectivamente.

   $G_3 \ncong G_4$ ya que $ker(\varphi_0) = C_3 \times C_3$ y $ker(\varphi_1) = C_3$.

(*b*) $n_3 = 1$ esto implica que Q es un 3-subgrupo de Sylow normal, entonces $G = Q \rtimes_{\varphi} P$ donde $\varphi : P \rightarrow$Aut(Q). Nuevamente como hay 2 grupos de orden 9 se tienen 2 casos:

1. $Q = C_9 = \langle\alpha\rangle$

Aut(C_9)=$C_6 = \langle\sigma\rangle$.

Como también existen dos grupos no isomorfos de orden 4 hay 2 subcasos:

i) $P = C_4 = \langle x\rangle$

$\varphi : C_4 \to C_6$

$|Im(\varphi)| \in \{1, 2\}$, C_6 solamente tiene un elemento de orden 2, por lo que hay dos homomorfismos:

$\varphi_0(x) = 1$

$\varphi_1(x) = \sigma^3$ donde $\sigma^3(\alpha) = \alpha^{-1}$

con los que se obtienen G_5 y G_6.

No son isomorfos pues $ker(\varphi_0) = C_4$ y $ker(\varphi_1) = C_2$.

ii) $P = C_2 \times C_2 = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$

$\varphi : C_2 \times C_2 \to C_6$

$|Im(\varphi)| \in \{1, 2\}$

Hay dos homomorfismos:

$\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_0(y) = 1$

$\varphi_1(x) = \sigma^3$, $\varphi_1(y) = 1$ donde $\sigma^3(\alpha) = \alpha^{-1}$

Con los que se construyen los grupos:

$G_0 = C_9 \rtimes_{\varphi_0} (C_2 \times C_2) = C_9 \times C_2 \times C_2 = C_{18} \times C_2$

que es el primero de la lista y ya se había encontrado.

$G_1 = C_9 \rtimes_{\varphi_1} (C_2 \times C_2) = C_2 \times (C_9 \rtimes_{\varphi_1} C_2) = C_2 \times D_{18} = D_{36}$

que es el séptimo de la lista.

Como $ker(\varphi_0) = C_2 \times C_2$ y $ker(\varphi_1) = C_2$ entonces no son isomorfos.

2. $Q = C_3 \times C_3 = \langle\alpha\rangle \times \langle\beta\rangle$.

Aut($C_3 \times C_3$)=GL(2,3)

i) $P = C_2 \times C_2 = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$

$\varphi : C_2 \times C_2 \to$ GL(2,3)

$|Im(\varphi)| \in \{1, 2\}$. Hay dos clases de conjugación de los subgrupos de GL(2,3) de orden 2:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Los subgrupos de orden 2 están en correspondencia con los elementos de orden 2, por lo que los generadores de las clases de conjugación de orden 2 son con los que se definen los homomorfismos:

$\varphi_0(x,1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi_0(1,y)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi_1(x,1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\varphi_1(1,y)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi_2(x,1)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\varphi_2(1,y)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi_3(x,1)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi_3(1,y)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Con ellos se obtienen los grupos:

$G_0 = (C_3 \times C_3) \rtimes_{\varphi_0} (C_2 \times C_2) = C_3 \times C_3 \times C_2 \times C_2 = C_6 \times C_6$

que es el tercero de la lista y ya se tenía.

$$\begin{aligned}G_1 =&\langle \alpha, \beta, x, y \mid \alpha^3 = \beta^3 = x^2 = y^2 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha, xy = xy,\\ &x\alpha x^{-1} = \alpha, x\beta x^{-1} = \beta^{-1}, y\alpha y^{-1} = \alpha, y\beta y^{-1} = \beta\rangle\\ =&(C_3 \times C_2) \times (C_3 \rtimes_{\varphi_1} C_2) = C_6 \times D_6 = C_6 \times S_3\end{aligned}$$

que es el octavo de la lista.

$$\begin{aligned}G_2 =&\langle \alpha, \beta, x, y \mid \alpha^3 = \beta^3 = x^2 = y^2 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha, xy = xy,\\ &x\alpha x^{-1} = \alpha^{-1}, x\beta x^{-1} = \beta^{-1}, y\alpha y^{-1} = \alpha, y\beta y^{-1} = \beta\rangle\\ =&C_2 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes_{\varphi_2} C_2)\end{aligned}$$

que es el noveno de la lista.

$$\begin{aligned}G_3 =&\langle \alpha, \beta, x, y \mid \alpha^3 = \beta^3 = x^2 = y^2 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha, xy = xy,\\ &x\alpha x^{-1} = \alpha^{-1}, x\beta x^{-1} = \beta, y\alpha y^{-1} = \alpha, y\beta y^{-1} = \beta^{-1}\rangle\\ =&(C_3 \rtimes_{\varphi_3} C_2) \times (C_3 \rtimes_{\varphi_3} C_2) = S_3 \times S_3\end{aligned}$$

que es el décimo de la lista.

Estos grupos no son isomorfos porque $ker(\varphi_0) = C_2 \times C_2$, $ker(\varphi_1) = C_2$, $ker(\varphi_2) = C_2$ y $ker(\varphi_3) = 1$; G_1 tiene elemento de orden 6 y G_2 no, por lo que $G_1 \ncong G_2$.

ii) $P = C_4 = \langle x\rangle$

$\varphi : C_4 \to$ GL(2,3)

$|Im(\varphi)| \in \{1, 2, 4\}$. Solamente hay una clase de conjugación de subgrupos cíclicos de GL(2,3) de orden 4, (sólo importan los cíclicos porque el otro grupo de orden 4, que es $C_2 \times C_2$, no tiene elementos de orden 4):

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Así que tomando este generador y los elementos de orden 2 obtenidos anteriormente se tienen cuatro homomorfismos:

$$\varphi_0(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_{11} = (C_3 \times C_3) \rtimes_{\varphi_0} C_4 = C_3 \times C_3 \times C_4 = C_3 \times C_{12}.$$

$$\begin{aligned} G_{12} =& \langle \alpha, \beta, x \mid \alpha^3 = \beta^3 = x^4 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha, x\alpha x^{-1} = \alpha, \\ & x\beta x^{-1} = \beta^{-1} \rangle \\ =& C_3 \times (C_3 \rtimes_{\varphi_1} C_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{13} =& \langle \alpha, \beta, x \mid \alpha^3 = \beta^3 = x^4 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha, x\alpha x^{-1} = \alpha^{-1}, \\ & x\beta x^{-1} = \beta^{-1} \rangle \\ =& (C_3 \times C_3) \rtimes_{\varphi_2} C_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{14} =& \langle \alpha, \beta, x \mid \alpha^3 = \beta^3 = x^4 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha, x\alpha x^{-1} = \beta^{-1}, \\ & x\beta x^{-1} = \alpha \rangle \\ =& (C_3 \times C_3) \rtimes_{\varphi_3} C_4 \end{aligned}$$

Obteniendo así los últimos cuatro grupos de la lista. No son isomorfos pues $ker(\varphi_0) = C_4$, $ker(\varphi_1) = C_2$, $ker(\varphi_2) = C_2$ y

$ker(\varphi_3) = 1$. G_{12} tiene elementos de orden 12 y G_{13} no, por lo que $G_{12} \not\cong G_{13}$.

□

Ahora que ya se conocen todos los grupos de orden 36 hasta isomorfismo, se verificará que sus tablas de marcas no son isomorfas.

· G_1, G_3, G_5 y G_{11} son abelianos.

· G_i con $i \in \{4, 8, 9, 10, 12\}$ es producto.

· $C_2 \times C_2$ es elemental abeliano y es subgrupo de G_2 y G_7, por la propiedad 14 se puede concluir que sus tablas de marcas no son isomorfas a alguna otra. G_2 tiene 3 elementos de orden 2 mientras que G_7 tiene 19 elementos de ese orden, como los grupos de orden 2 están en correspondencia con los elementos de orden 2 y por el atributo 8 se sigue que $T_{G_2} \not\cong T_{G_7}$.

· Análogamente $C_3 \times C_3$ es subgrupo de G_{13} y G_{14} por lo que sus tablas de marcas se distinguen del resto. $C_6 \times C_3$ es subgrupo normal de G_{13} y no lo es de G_{14} así que $T_{G_{13}} \not\cong T_{G_{14}}$.

3.3. Grupos de orden 40

Teorema 17. Si G es un grupo de orden 40, entonces G es isomorfo a uno de los grupos de la siguiente lista:

⋆ $G_1 = C_{40} = [40, 2]$

- $\star$ $G_2 = C_{20} \times C_2 = [40, 9]$
- $\star$ $G_3 = C_{10} \times C_2 \times C_2 = [40, 14]$
- $\star$ $G_4 = C_5 \times D_8 = [40, 10]$
- $\star$ $G_5 = C_5 \times Q_8 = [40, 11]$
- $\star$ $G_6 = C_5 \rtimes_{\varphi_1} C_8 = [40, 1]$
- $\star$ $G_7 = C_5 \rtimes_{\varphi_2} C_8 = [40, 3]$
- $\star$ $G_8 = C_2 \times (C_5 \rtimes_{\psi_1} C_4) = [40, 12]$
- $\star$ $G_9 = C_2 \times (C_5 \rtimes_{\psi_2} C_4) = [40, 7]$
- $\star$ $G_{10} = C_4 \times D_{10} = [40, 5]$
- $\star$ $G_{11} = C_2 \times C_2 \times D_{10} = [40, 13]$
- $\star$ $G_{12} = D_{40} = [40, 6]$
- $\star$ $G_{13} = (C_{10} \times C_2) \rtimes C_2 = [40, 8]$
- $\star$ $G_{14} = C_5 \rtimes_{\varphi} Q_8 = [40, 4]$

Demostración. Sea G un grupo de orden 40, $H, K \leq G$ tal que $|H|$=8 y $|K|$=5. Por los teoremas de Sylow se sabe que $n_2 \in \{1, 5\}$ y $n_5 = 1$.

(a) Si $n_2 = 1$ entonces $H \lhd G$ como $K \lhd G$ se sigue que $G = K \times H$, ya que existen hasta isomorfismos 5 grupos de orden 8 y uno de orden 5, se obtienen 5 grupos los cuales son los primeros de la lista.

(*b*) $n_2 = 5$. Como $K \lhd G$, $K \cap H = 1$ y $KH = G$ entonces $G = K \rtimes_{\varphi} H$ donde $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(K)$. El homomorfismo trivial da el producto directo de los grupos los cuales se encontraron en (a), por lo que sólo se considerarán homomorfismos no triviales.

$K = C_5 = \langle \alpha \rangle$

Aut(K)=Aut(C_5)=$C_4 = \langle \sigma \rangle$ definido por $\sigma(\alpha) = \alpha^2$.

Hay 5 casos dependiendo de quien sea H:

1. $H = C_8 = \langle x \rangle$

   $\varphi : C_8 \to C_4$

   $|Im(\varphi)| \in \{1, 2, 4\}$ por lo que se tienen 2 homomorfismos no triviales:

   $\varphi_1(x) = \sigma^2$

   $\varphi_2(x) = \sigma$

   con los que se construyen los grupos:

$$\begin{aligned} G_6 =& \langle \alpha, x \mid \alpha^5 = x^8 = 1, x\alpha x^{-1} = \alpha^{-1} \rangle \\ =& C_5 \rtimes_{\varphi_1} C_8 \end{aligned}$$

   y

$$\begin{aligned} G_7 =& \langle \alpha, x \mid \alpha^5 = x^8 = 1, x\alpha x^{-1} = \alpha^{2} \rangle \\ =& C_5 \rtimes_{\varphi_2} C_8 \end{aligned}$$

   respectivamente.

   $G_6 \ncong G_7$ porque $\mathrm{Ker}(\varphi_1) = C_4$ y $\mathrm{Ker}(\varphi_2) = C_2$.

2. $H = C_4 \times C_2 = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$

   $\psi : C_4 \times C_2 \to C_4$

$|Im(\varphi)| \in \{1, 2, 4\}$.

Se tienen 3 homomorfismos no triviales:

$\psi_1(x, 1) = \sigma, \psi_1(1, y) = 1$

$\psi_2(x, 1) = \sigma^2, \psi_2(1, y) = 1$

$\psi_3(x, 1) = 1, \psi_3(1, y) = \sigma^2$

con los que se obtienen los grupos:

$$\begin{aligned} G_8 =& \langle \alpha, x, y \mid \alpha^5 = x^4 = y^2 = 1, xy = yx, x\alpha x^{-1} = \alpha^2, y\alpha y^{-1} = \alpha \rangle \\ =& C_2 \times (C_5 \rtimes_{\psi_1} C_4) \\ G_9 =& \langle \alpha, x, y \mid \alpha^5 = x^4 = y^2 = 1, xy = yx, x\alpha x^{-1} = \alpha^{-1}, y\alpha y^{-1} = \alpha \rangle \\ =& C_2 \times (C_5 \rtimes_{\psi_2} C_4) \\ G_{10} =& \langle \alpha, x, y \mid \alpha^5 = x^4 = y^2 = 1, xy = yx, x\alpha = \alpha x, y\alpha y^{-1} = \alpha^{-1} \rangle \\ =& C_4 \times (C_5 \rtimes_{\psi_3} C_2) = C_4 \times D_{10}. \end{aligned}$$

Estos 3 grupos no son isomorfos pues Ker (ψ_1)=C_2, Ker (ψ_2)=$C_2 \times C_2$ y Ker (ψ_3)=C_4.

3. $H = C_2 \times C_2 \times C_2 = \langle x \rangle \times \langle y \rangle \times \langle z \rangle$

   $\varphi : C_2 \times C_2 \times C_2 \to C_4$

   $|Im(\varphi)| \in \{1, 2\}$.

   Sólo se tiene un homomorfismo no trivial:

   $\varphi(x, 1, 1) = \sigma^2, \varphi(1, y, 1) = 1, \varphi(1, 1, z) = 1$

   con el que se construye el grupo:

$$\begin{aligned} G_{11} =& \langle \alpha, x, y, z \mid \alpha^5 = x^2 = y^2 = z^2 = 1, xyz = zyx, y\alpha = \alpha y, \\ & z\alpha = \alpha z, x\alpha x^{-1} = \alpha^{-1} \rangle \\ =& C_2 \times C_2 \times (C_5 \rtimes_{\varphi} C_2) = C_2 \times C_2 \times D_{10}. \end{aligned}$$

4. $H = D_8 = \langle r, f \mid r^4 = f^2 = 1, frf^{-1} =, r^{-1} \rangle$

   $\varphi : D_8 \to C_4$

   $|Im(\varphi)| \in \{1, 2, 4\}$.

   Hay dos homomorfismos no triviales con los que se obtienen dos grupos nuevos:

   $\varphi_1(f) = \sigma^2$, $\varphi(r) = 1$,$\varphi(r^2) = 1$

   $\varphi_2(f) = 1$, $\varphi(r) = \sigma^2$, $\varphi(r^2) = 1$

$$
\begin{aligned}
G_{12} =&\langle \alpha, r, f \mid \alpha^5 = r^4 = f^2 = 1, frf^{-1} = r^{-1}, f\alpha f^{-1} = \alpha^{-1}, \\
&r\alpha r^{-1} = \alpha, r^2\alpha r^{-2} = \alpha \rangle \\
=&(C_5 \times C_4) \rtimes_{\varphi_1} C_2 = C_{20} \rtimes_{\varphi_1} C_2 = D_{40},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{13} =&\langle \alpha, r, f \mid \alpha^5 = r^4 = f^2 = 1, frf^{-1} = r^{-1}, f\alpha f^{-1} = \alpha, \\
&r\alpha r^{-1} = \alpha^{-1}, r^2\alpha r^{-2} = \alpha \rangle \\
=&(C_5 \times C_2 \times C_2) \rtimes_{\varphi_2} C_2 = (C_{10} \times C_2) \rtimes_{\varphi_2} C_2.
\end{aligned}
$$

   $G_{12} \ncong G_{13}$ porque el $ker(\varphi_1) = C_4$ y el $ker(\varphi_2) = C_2 \times C_2$.

5. $H = Q_8 = \langle r, f \mid r^4 = f^4 = 1, r^2 = f^2, frf^{-1} =, r^{-1} \rangle$

   $\varphi : Q_8 \to C_4$

   $|Im(\varphi)| \in \{1, 2, 4\}$.

   Unicamente hay un homomorfismo no trivial:

   $\varphi(r, 1) = \sigma^2$, $\varphi(1, f) = \sigma^2$

$$
\begin{aligned}
G_{14} =&\langle \alpha, r, f \mid \alpha^5 = r^4 = f^4 = 1, r^2 = f^2, frf^{-1} = r^{-1}, \\
&r\alpha r^{-1} = \alpha^{-1}, f\alpha f^{-1} = \alpha^{-1} \rangle \\
=&C_5 \rtimes_{\varphi} Q_8.
\end{aligned}
$$

$\square$

¿A qué se debe que estos grupos no tengan tablas de marcas isomorfas?

- G_1, G_2 y G_3 son abelianos.

- G_i con $i \in \{4, 5, 8, 9, 10, 11\}$ son productos.

- Q_8 es subgrupo únicamente de G_{14}.

- G_7 es el único que no tiene subgrupos normales de orden 4.

- $C_2 \times C_2$ es subgrupo de G_{12} y G_{13} pero no de G_6, así que no pueden tener tablas de marcas isomorfas a este último.

- El número total de subgrupos de G_{12} es 48 mientras que el de G_{13} es 40, por el atributo 8 se concluye que $T_{G_{12}} \ncong T_{G_{13}}$.

3.4. Grupos de orden 54

Teorema 18. Si G es un grupo de orden 54 entonces es isomorfo a uno de los siguientes grupos:

- $\star$ $G_1 = C_{54} = [54, 2]$

- $\star$ $G_2 = C_{18} \times C_3 = [54, 9]$

- $\star$ $G_3 = C_2 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) = [54, 10]$

- $\star$ $G_4 = C_2 \times (C_9 \rtimes C_3) = [54, 11]$

- $\star$ $G_5 = C_6 \times C_3 \times C_3 = [54, 15]$

- $\star$ $G_6 = D_{54} = [54, 1]$
- $\star$ $G_7 = (C_9 \times C_3) \rtimes_\varphi C_2 = [54, 7]$
- $\star$ $G_8 = (C_3 \times C_3 \times C_3) \rtimes_\varphi C_2 = [54, 14]$
- $\star$ $G_9 = C_9 \times S_3 = [54, 4]$
- $\star$ $G_{10} = C_3 \times C_3 \times S_3 = [54, 12]$
- $\star$ $G_{11} = C_3 \times D_{18} = [54, 3]$
- $\star$ $G_{12} = ((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes_{\varphi_1} C_2 = [54, 5]$
- $\star$ $G_{13} = ((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes_{\varphi_2} C_2 = [54, 8]$
- $\star$ $G_{14} = (C_9 \rtimes C_3) \rtimes_\varphi C_2 = [54, 6]$
- $\star$ $G_{15} = C_3 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes_\varphi C_2) = [54, 13]$

Demostración. Sea G un grupo de orden 54, $P, Q \leq G$ tal que $|P|$=27 y $|Q|$=2, $Q = C_2 = \langle x \rangle$. Los grupos de orden 27 son 5 y se listan a continuación:

- $\diamond$ $P_1 = C_{27} = \langle a \rangle$
- $\diamond$ $P_2 = C_9 \times C_3 = \langle a, b \mid a^9 = b^3 = 1, bab^{-1} = a \rangle$
- $\diamond$ $P_3 = (C_3 \times C_3) \rtimes C_3$
  $= \langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^3 = 1, aba^{-1} = b, aca^{-1} = cb, cbc^{-1} = b \rangle$
- $\diamond$ $P_4 = C_9 \rtimes C_3 = \langle a, b \mid a^9 = b^3 = 1, aba^{-1} = ba^3 \rangle$
- $\diamond$ $P_5 = C_3 \times C_3 \times C_3$
  $= \langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^3 = 1, aba^{-1} = b, aca^{-1} = c, cbc^{-1} = b \rangle$

Por los teoremas de Sylow se tiene que $n_3 = 1$, es decir G tiene un 3-subgrupo de Sylow normal, debido a que $P \cap Q = 1$ y $PQ = G$ entonces $G = P \rtimes_{\varphi} Q$, donde $\varphi : Q \to \text{Aut}(P)$ es un homomorfismo. También se tiene que $n_2 \in \{1, 3, 9, 27\}$.

(*a*) $n_2 = 1$, esto implica que $Q \lhd G$ y como $P \lhd G$ entonces $G = P \times Q$, ya que hay 5 grupos de orden 27 y uno de orden 2, se obtienen 5 productos que son los primeros de la lista.

(*b*) $n_2 = 27$. En este caso habría 27 elementos de orden 2 y como $|P|$=27, se tendrían los 54 elementos del grupo por lo que no hay elemento de orden $2 \cdot 3, 2 \cdot 9, 2 \cdot 27$, esto quiere decir que los elementos de Q no conmutan con los de P. Los únicos grupos nuevos de orden 54 se obtienen con P_1, P_2 y P_5:

$$P_1 \rtimes C_2 = \langle a, x \mid a^{27} = x^2 = 1, xax^{-1} = a^{-1} \rangle = D_{54} = G_6$$

$$\begin{aligned} P_2 \rtimes C_2 =& \langle a, b, x \mid a^9 = b^3 = x^2 = 1, bab^{-1} = a, xax^{-1} = a^{-1}, xbx^{-1} = b^{-1} \rangle \\ =& (C_9 \times C_3) \rtimes C_2 = G_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_5 \rtimes C_2 =& \langle a, b, c, x \mid a^3 = b^3 = c^3 = x^2 = 1, aba^{-1} = b, aca^{-1} = c, cbc^{-1} = b, \\ & xax^{-1} = a^{-1}, xbx^{-1} = b^{-1}, xcx^{-1} = c^{-1} \rangle \\ =& (C_3 \times C_3 \times C_3) \rtimes C_2 = G_8 \end{aligned}$$

(*c*) $n_2 = 3$. Se sigue que 3 elementos de orden 2 no conmutan con elementos de P. Solamente hay grupos de orden 54 nuevos con P_2 y P_5:

$$\begin{aligned} P_2 \rtimes C_2 =& \langle a, b, x \mid a^9 = b^3 = x^2 = 1, bab^{-1} = a, xax^{-1} = a, xbx^{-1} = b^{-1} \rangle \\ =& C_9 \times S_3 = G_9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_5 \rtimes C_2 =& \langle a,b,c,x \mid a^3=b^3=c^3=x^2=1, aba^{-1}=b, aca^{-1}=c,\\ & cbc^{-1}=b, xax^{-1}=a^{-1}, xbx^{-1}=b, xcx^{-1}=c\rangle \\ =& C_3\times C_3\times S_3 = G_{10}. \end{aligned}$$

(d) $n_2 = 9$, es decir, 9 elementos de orden 2 no conmutan con elementos de P:

$$\begin{aligned} P_2 \rtimes C_2 =& \langle a,b,x \mid a^9=b^3=x^2=1, bab^{-1}=a, xax^{-1}=a^{-1}, xbx^{-1}=b\rangle \\ =& C_3\times D_{18} = G_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 \rtimes C_2 =& \langle a,b,c,x \mid a^3=b^3=c^3=x^2=1, aba^{-1}=b, aca^{-1}=cb, cbc^{-1}=b,\\ & xax^{-1}=a^{-1}, xbx^{-1}=b^{-1}, xcx^{-1}=c\rangle \\ =& ((C_3\times C_3)\rtimes C_3)\rtimes C_2 = G_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 \rtimes C_2 =& \langle a,b,c,x \mid a^3=b^3=c^3=x^2=1, aba^{-1}=b, aca^{-1}=cb, cbc^{-1}=b,\\ & xax^{-1}=a^{-1}, xbx^{-1}=b, xcx^{-1}=c^{-1}\rangle \\ =& ((C_3\times C_3)\rtimes C_3)\rtimes C_2 = G_{13} \end{aligned}$$

Los dos grupos anteriores no son isomorfos porque el subgrupo derivado del primero es $C_3 \times C_3$ y del segundo es $(C_3 \times C_3) \rtimes C_3$.

$$\begin{aligned} P_4 \rtimes C_2 =& \langle a,b,x \mid a^9=b^3=x^2=1, aba^{-1}=ba^3, xax^{-1}=a^{-1}, xbx^{-1}=b\rangle \\ =& (C_9\rtimes C_3)\rtimes C_2 = G_{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_5 \rtimes C_2 =& \langle a,b,c,x \mid a^3=b^3=c^3=x^2=1, aba^{-1}=b, aca^{-1}=c, cbc^{-1}=b,\\ & xax^{-1}=a^{-1}, xbx^{-1}=b^{-1}, xcx^{-1}=c\rangle \\ =& C_3\times((C_3\times C_3)\rtimes C_2) = G_{15}. \end{aligned}$$

Lo que da un total de 15 grupos no isomorfos.

$\square$

¿Cuáles son las razones por las que se puede asegurar que sus tablas de marcar no son isomorfas?

- G_1, G_2 y G_5 son abelianos.
- $G_3, G_4, G_9, G_{10}, G_{11}$ y G_{15} son productos.
- C_{27} es subgrupo solamente de G_6.
- $C_3 \times C_3 \times C_3$ es subgrupo de G_8 pero no de los restantes.
- Los subgrupos derivados de G_7, G_{12}, G_{13} y G_{14} son respectivamente: $C_9 \times C_3, C_3 \times C_3, (C_3 \times C_3) \rtimes C_3$ y C_9. Por el atributo 12 se sabe que no tienen tablas de marcas isomorfas.

3.5. Grupos de orden 56

Existen 13 grupos no isomorfos de orden 56, los cuales se obtuvieron de [8]:

- ⋆ $G_1 = C_{56} = [56, 2]$
- ⋆ $G_2 = C_{28} \times C_2 = [56, 8]$
- ⋆ $G_3 = C_{14} \times C_2 \times C_2 = [56, 13]$
- ⋆ $G_4 = C_2 \times C_2 \times D_{14} = [56, 12]$
- ⋆ $G_5 = C_2 \times (C_7 \rtimes_\varphi C_4) = [56, 6]$
- ⋆ $G_6 = C_4 \times D_{14} = [56, 4]$

- ⋆ $G_7 = C_7 \rtimes_\varphi C_8 = [56, 1]$
- ⋆ $G_8 = C_7 \times Q_8 = [56, 10]$
- ⋆ $G_9 = C_7 \rtimes_\varphi Q_8 = [56, 3]$
- ⋆ $G_{10} = C_7 \times D_8 = [56, 9]$
- ⋆ $G_{11} = (C_{14} \times C_2) \rtimes_\varphi C_2 = [56, 7]$
- ⋆ $G_{12} = D_{56} = [56, 5]$
- ⋆ $G_{13} = (C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes_\varphi C_7 = [56, 11]$

Ahora se verán argumentos que justifiquen que las tablas de marcas de los grupos anteriores no son isomorfas.

- · G_1, G_2 y G_3 son abelianos.
- · G_4, G_5, G_6, G_8 y G_{10} son productos directos.
- · Q_8 es subgrupo solamente de G_9.
- · G_{13} es el único con un subgrupo elemental abeliano, el cual es $C_2 \times C_2 \times C_2$.
- · C_8 es subgrupo únicamente de G_7.
- · Finalmente el número total de subgrupos de G_{11} es 50 y el de G_{12} es 62.

3.6. Grupos de orden 60

La clasificación de los grupos de orden 60 está dada en [9], en total hay 13 grupos y se presentan en seguida.

- $\star$ $G_1 = A_5 = [60, 5]$
- $\star$ $G_2 = A_4 \times C_5 = [60, 9]$
- $\star$ $G_3 = C_{60} = [60, 4]$
- $\star$ $G_4 = C_3 \times (C_5 \rtimes_{\varphi_1} C_4)$=[60,2]
  $=\langle a, b, x \mid a^5 = b^3 = x^4 = 1, ab = ba, xax^{-1} = a^{-1}, xbx^{-1} = b\rangle$
- $\star$ $G_5 = C_3 \times (C_5 \rtimes_{\varphi_2} C_4)$=[60,6]
  $=\langle a, b, x \mid a^5 = b^3 = x^4 = 1, ab = ba, xax^{-1} = a^2, xbx^{-1} = b\rangle$
- $\star$ $G_6 = C_5 \times (C_3 \rtimes_{\varphi_3} C_4) = [60, 1]$
- $\star$ $G_7 = C_{15} \rtimes_{\varphi_4} C_4$=[60,3]
  $=\langle a, b, x \mid a^5 = b^3 = x^4 = 1, ab = ba, xax^{-1} = a^{-1}, xbx^{-1} = b^{-1}\rangle$
- $\star$ $G_8 = C_{15} \rtimes_{\varphi_5} C_4$=[60,7]
  $=\langle a, b, x \mid a^5 = b^3 = x^4 = 1, ab = ba, xax^{-1} = a^2, xbx^{-1} = b^{-1}\rangle$
- $\star$ $G_9 = C_{30} \times C_2$=[60,13]
- $\star$ $G_{10} = C_6 \times D_{10}$=[60,10]
- $\star$ $G_{11} = C_{10} \times S_3$=[60,11]
- $\star$ $G_{12} = D_{30} \times C_2$=[60,12]

⋆ $G_{13} = D_{10} \times S_3$=[60,8]

¿Por qué ninguno de los grupos anteriores tienen tablas de marcas isomorfas?

· G_3 y G_9 son abelianos.

· $G_2, G_4, G_5, G_6, G_{10}, G_{11}, G_{12}$ y G_{13} son productos directos.

· A_5 es el único que no tiene subgrupos normales no triviales.

· Por último C_2 es subgrupo normal de G_7 y no lo es G_8 por lo tanto $T_{G_7} \ncong T_{G_8}$.

3.7. Grupos de orden 81

Por el teorema fundamental de los grupos abelianos finitamente generados se sabe que los grupos abelianos de orden 81 son:

⋆ $G_1 = C_{81} = [81, 1]$

⋆ $G_2 = C_9 \times C_9 = [81, 2]$

⋆ $G_3 = C_{27} \times C_3 = [81, 5]$

⋆ $G_4 = C_9 \times C_3 \times C_3 = [81, 11]$

⋆ $G_5 = C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3 = [81, 15]$

En [10], se clasifican los grupos no abelianos de este orden usando extensiones cíclicas. Se concluye que cualquier grupo con estas cualidades es isomorfo a uno de los siguientes tipos de extensión:

Para N=$C_9 \times C_3$:

1.
$$\left(N,3,\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

2.
$$\left(N,3,\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

3.
$$\left(N,3,\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

4.
$$\left(N,3,\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

5.
$$\left(N,3,\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

6.
$$\left(N,3,\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

7.
$$\left(N,3,\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

8.
$$\left(N,3,\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Para N=$C_3 \times C_3 \times C_3$:

9.
$$\left(N,3,\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

10.
$$\left(N, 3, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

O escribiendolos de una forma más familiar:

$\star$ $G_6 = \langle a, b, x \mid a^9 = b^3 = x^3 = 1, bab^{-1} = ab^3, xax^{-1} = a, xbx^{-1} = a^3b\rangle$
$= (C_9 \times C_3) \rtimes C_3$=[81,14]

$\star$ $G_7 = \langle a, b \mid a^{27} = b^3 = 1, aba^{-1} = ba^9\rangle = C_{27} \rtimes C_3$=[81,6]

$\star$ $G_8 = \langle a, b, x \mid a^9 = b^3 = x^3 = 1, bab^{-1} = ab^3, xax^{-1} = a^4, xbx^{-1} = b\rangle$
$= C_3 \times (C_9 \rtimes C_3)$=[81,13]

$\star$ $G_9 = C_9 \rtimes C_9$=[81,4]

$\star$ $G_{10} = \langle a, b, x \mid a^9 = b^3 = x^3 = 1, bab^{-1} = ab^3, xax^{-1} = ab, xbx^{-1} = b\rangle$
$= (C_9 \times C_3) \rtimes C_3$=[81,3]

$\star$ $G_{11} = \langle a, b, x \mid a^9 = b^3 = x^3 = 1, bab^{-1} = ab^3, xax^{-1} = ab, xbx^{-1} = a^3b\rangle$
$(C_9 \times C_3) \rtimes C_3$=[81,8]

$\star$ $G_{12} = \langle a, b, x \mid a^9 = b^3 = x^3 = 1, bab^{-1} = ab^3, xax^{-1} = ab, xbx^{-1} = a^6b\rangle$
$(C_9 \times C_3) \rtimes C_3$=[81,9]

$\star$ $G_{13} = (C_3 \times C_3) \to G \to (C_3 \times C_3)$=[81,10]

$\star$ G_{14} =$\langle a, b, c, x \mid a^3 = b^3 = c^3 = x^3 = 1, aba^{-1} = b, aca^{-1} = c, bcb^{-1} = c,$
$xax^{-1} = a, xbx^{-1} = ab, xcx^{-1} = bc\rangle$
$=(C_3 \times C_3 \times C_3) \rtimes C_3 = [81, 7]$

$$\begin{aligned}\star\quad G_{15} =&\langle a,b,c,x \mid a^3=b^3=c^3=x^3=1, aba^{-1}=b, aca^{-1}=c, bcb^{-1}=c,\\ &xax^{-1}=a, xbx^{-1}=ab, xcx^{-1}=c\rangle\\ =&C_3\times((C_3\times C_3)\rtimes C_3)=[81,12]\end{aligned}$$

Ahora se dan atributos que señalan que sus tablas de marcas no son isomorfas.

- Los primeros 5 grupos son abeliano.
- G_8 y G_{15} son productos.
- El grupo elemental abeliano $C_3\times C_3\times C_3$ es subgrupo solamente de G_{10} y G_{14}. El subgrupo derivado de G_{14} es $C_3\times C_3$ mientras que el de G_{10} es C_3, por el atributo 12 se sigue que sus tablas de marcas difiere.
- C_3 es el subgrupo derivado de G_6, G_7 y G_9, mientras que $C_3\times C_3$ es el de G_{11}, G_{12} y G_{13}.

  1. Los subgrupos de Frattini de los primeros 3 son distintos:
     $\Phi(G_6)=C_3, \Phi(G_7)=C_9$ y $\Phi(G_9)=C_3\times C_3$.
     Por el atributo 7 se tiene que no tienen tablas de marcas isomorfas.
  2. El número de subgrupos de G_{11}, G_{12} y G_{13} son respectivamente 32,50 y 23.

3.8. Grupos de orden 84

Existen 15 grupos de orden 84 hasta isomorfismo, se clasifican en [11] y se presentan en seguida:

- $\star$ $G_1 = A_4 \times C_7 = [84, 10]$

- $\star$ $G_2 = (C_7 \rtimes C_4) \rtimes C_3$=[84,1]
$$= \langle a, x, y \mid a^4 = x^3 = y^7 = 1, xyx^{-1} = y^4, axa^{-1} = x, aya^{-1} = y^{-1} \rangle$$

- $\star$ $G_3 = C_4 \times (C_7 \rtimes C_3)$=[84,2]

- $\star$ $G_4 = C_2 \times C_2 \times (C_7 \rtimes C_3)$=[84,9]

- $\star$ $G_5 = C_2 \times ((C_7 \rtimes C_3) \rtimes C_2)$=[84,7]

- $\star$ $G_6 = (C_{14} \times C_2) \rtimes C_3$=[84,11]
$$= \langle a, x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^3 = a^7 = 1, xy = yx, (xz)^3 = 1,$$
$$xax^{-1} = a, yay^{-1} = a, zaz^{-1} = a^4 \rangle$$

- $\star$ $G_7 = C_{42} \times C_2$=[84,15]

- $\star$ $G_8 = D_{14} \times S_3$=[84,8]

- $\star$ $G_9 = D_{14} \times C_6$=[84,12]

- $\star$ $G_{10} = D_{42} \times C_2$=[84,14]

- $\star$ $G_{11} = S_3 \times C_{14}$=[84,13]

- $\star$ $G_{12} = C_{84}$=[84,6]

- $\star$ $G_{13} = C_3 \times (C_7 \rtimes C_4)$=[84,4]

- $\star$ $G_{14} = C_7 \times (C_3 \rtimes C_4)$=[84,3]

- $\star$ $G_{15} = C_{21} \rtimes C_4$=[84,5]

¿Cuáles son los atributos que permiten distinguir las tablas de marcas de los grupos de orden 84?

· G_7 y G_{12} son abelianos.

· G_i con $i \in \{1, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 13, 14\}$ es producto directo.

· G_{15} es el único con un grupo cíclico de orden 21.

· C_2 es subgrupo normal de G_2 pero no de G_6.

Restaría para un trabajo posterior, analizar los grupos de orden: 32, 48, 64, 72 y 80. Cada caso tiene más de 50 grupos no isomorfos.

Apéndice A

GAP

GAP es un sistema para álgebra discreta computacional, con especial énfasis en teoría de grupos.

Dispone de un lenguaje de programación, una librería de miles de funciones empleando algoritmos algebráicos escritos en el lenguaje de GAP así como una larga librería de datos de objetos algebraicos. Es importante resaltar que incluye una libreria con todos los grupos de orden menor o igual a 2000.

Es usado en investigación y enseñanza de grupos y sus representaciones, anillos, espacios vectoriales, álgebras, estructuras combinatorias y más.

El sistema, incluyendo la fuente, es distribuido gratuitamente y se puede obtener en `http://www.gap-system.org/`.

Algoritmos

Algunos de los algoritmos que fueron utlizados a lo largo de la tesis son los siguientes:

1. Ejemplo con el que se obtiene la tabla de marcas de un grupo conociendo su ID.

   ```
   Display(TableOfMarks( SmallGroup(24,3) ));
   ```

2. Este es un ejemplo de como se escribe la presentación de un grupo, se necesitan los generadores y las relaciones.

   ```
   #[56,4]
   f:=FreeGroup("p","q","x"); # generadores
   g:=f/[f.1^4,f.2^2,f.3^7,f.1*f.2*f.1^-1*f.2^-1,
      f.3^(f.1)*f.3^-1,f.3^(f.2)*f.3];# relaciones
   P:=PresentationFpGroup( g );
   Print( IdSmallGroup( g ) ); # Imprime el ID del grupo:[56,4]
   Print( StructureDescription( g ) ); # Imprime el grupo en una
   forma más conocida: C4 x D14.
   ```

3. Encuentra los p-subgrupos de Sylow de todos los grupos de un orden dado, estan acomodados según la ID cada grupo. Se requieren el orden del grupo y un número primo divisor del orden.

   ```
   # p-Subgrupos de Sylow de los grupos de orden n.
   n:=24; # orden del grupo
   p:=2; # p primo
   for i in [1..NumberSmallGroups(n)] do
      G:=SmallGroup(n,i);
      s:=SylowSubgroup(G,p);
      Print(i,":",IdSmallGroup(s),"\n");
   od;
   ```

4. Encuentra los subgrupos hasta conjugación de un grupo dado, sólo se necesita la ID del grupo en la libreria de GAP.

```
n:=24; # Orden del grupo
t:=1; # ID de SmallGroup en GAP.
G:=SmallGroup(n,t);
l:=LatticeSubgroups(G);
k:=ConjugacyClassesSubgroups(l);

lista:=[];
for i in [1..Length(k)] do
   subg:=IdSmallGroup(Representative(k[i]));
   Add(lista,subg);
od;
```

5. Regresa una lista con las IDs de los sugrupos normales de uno o más grupos dados. Sirve para comparar los subgrupos normales de varios grupos del mismo orden.

```
GruposN:=[];
n:=8; # Orden del grupo
for i in [2,3,5]do # ID de los grupos que queremos comparar
   G:=SmallGroup( n,i );
   list:=NormalSubgroups(G);
   l:=Length( list );

   Grupos:=[];
```

```
    for i in [ 1..l ] do
        Add( Grupos,IdSmallGroup( list[i] ) );
    od;
    Add( GruposN,Grupos);
od;

for i in [1..Length(GruposN)] do
Print(GruposN[i],"\n","\n");
od;
```

6. Regresa las IDs de subgrupos maximales de uno o varios grupos. Sirve para comparar los subgrupos maximales de varios grupos.

```
n:=40;
totoro:=[];
for i in [6,8] do
    G:=SmallGroup(n,i);
    m:=MaximalSubgroups(G);

    toto:=[];
    for i in [1..Length(m)] do
        Add(toto,IdSmallGroup(m[i]));
    od;
    Add(totoro,toto);
od;

for i in [1..Length(totoro)] do
```

```
        Print(i,totoro[i],"\n","\n");
    od;
```

7. Con este algoritmo se pueden obtener los grupos de orden 36 que son productos semidirectos de $C_3 \times C_3$ y $C_2 \times C_2$.

   Produto semidirecto $Q \rtimes_\varphi P$, donde φ es un homomorfismo de P al grupo de automorfismos de Q.

   # i) Productos semidirectos (C3 x C3) : (C2 x C2), en GAP " : " representa al producto semidirecto.

```
c3:=CyclicGroup(3);
Q:=DirectProduct(c3,c3);

c2:=CyclicGroup(2);
P:=DirectProduct(c2,c2);
p1:=GeneratorsOfGroup(P)[1];
p2:=GeneratorsOfGroup(P)[2];

AutQ:=AutomorphismGroup(Q);
IsAutomorphismGroup(AutQ);
l:=Elements(AutQ);

lista:=[];
for i in [1..Length(l)] do
  if Order(l[i])=2 then
```

```
    Add(lista, i);
  elif Order(l[i])=1 then
    Add(lista, i);
    Print(i);
  else
    i:=i+1;
  fi;
od;

HOM:=[];
for i in lista do
  for j in lista do
    Add(HOM,GroupGeneralMappingByImages( P,AutQ,
    [p1,p2],[l[i],l[j]] ));
  od;
od;

IdsGrupos:=[];
for i in [1..Length(HOM)] do
  if IsGroupHomomorphism(HOM[i])=true then
    sem:=SemidirectProduct( P,HOM[i],Q );
    Add(IdsGrupos,IdSmallGroup(sem));
  else
    i:=i+1;
  fi;
```

```
od;
```

De forma similar se obtienen los otros casos, pero no serán anexados.

Bibliografía

[1] Luis M. Huerta Aparicio, Ariel Molina Rueda, Alberto G. Raggi Cárdenas, Luis Valero Elizondo. On Some Invariants Preserved by Isomorphism of Table of Marks, *Revista Colombiana de Matemáticas*, 2007.

[2] Alberto G. Raggi Cárdenas, Luis Valero Elizondo. Two non-isomorphic groups of order 96 with isomorphic tables of marks and non-corresponding centres and abelian subgroups, *Communications in Algebra* 37 (2009), 209212, ISSN: 0092-7872, DOI: 10.1080/00927870802243614.

[3] Luis Valero Elizondo. *Las Buenas Marcas Ayudan Mucho*. UMSNH, 2009. Disponible en: `http://www.fismat.umich.mx/`$\sim$ *valero/*

[4] Eder Vieyra Sánchez. *Isomorfismos Entre Tablas de Marcas de Grupos de Orden Menor o Igual a 95*. Tesis de Licenciatura. Michoacán, México, 2009.

[5] William Burnside. *Theory of Groups of Finite Order*, Dover Phoenix Editions, 2da edición, 1911. ISBN: 0486495752.

[6] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer-Verlag New York, Inc., 4ta edición, 1995. ISBN: 0387942858.

[7] Jordan Lewinsky. *Every group of order 36 has a normal Sylow subgroup*[en línea]. 2010. [Consulta: 21 octubre 2012]. Disponible en: `http://crazyproject.wordpress.com/2010/07/18/every-group-of-order-36-has-a-normal-sylow-subgroup/`

[8] Jordan Lewinsky. *Thirteen nonisomorphic groups of order 56*[en línea]. 2010. [Consulta: 3 mayo 2012]. Disponible en: `http://crazyproject.wordpress.com/2010/06/25/thirteen-nonisomorphic-groups-of-order-56/`

[9] Alfonso Saz Gracia. *Classification of Groups of Order 60* [en línea]. Toronto, Canada. 2008. [Consulta: 3 mayo 2012]. Disponible en: `http://drorbn.net/images/0/04/Groups60.pdf`

[10] Michael W. Garlow. *An Elementary Classification of the Groups of the Order 81*. Tesis de maestría. Ohio, EUA. 2006.

[11] Sergio Da Silva, *Classification of Groups of Order 84.*[en línea]. Toronto, Canada. 2008. [Consulta: 3 mayo 2012]. Disponible en: `http://drorbn.net/images/d/d3/Group84.pdf`

[12] The GAP Group. *GAP - Groups, Algorithms and Programming, Version 4.4,* 2006. (`http:www.gap-system.org`).