



UNIVERSIDAD MICHOCANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

Axioma de Constructibilidad

T E S I S

para obtener el título de
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

Autor:

José Antonio Corona García

Asesor:

Doctor en filosofía de las Matemáticas,
Fernando Hernández Hernández

Julio, 2013
Morelia, Michoacán



Agradecimientos

Cuando inicie este trabajo pensé quienes habían sido hasta entonces las personas que me han ayudado y habían sido importantes en mi carrera y en mi vida. Ahora que termino veo que estas personas se han mantenido cerca de mi ayudandome y tal vez han surgido algunas más. Tratando de no ser muy extenso quiero agradecer a las siguientes personas:

Primero agradezco a mis padres María Dolores García Orozco y Mateo Corona Pérez que siempre me han apoyando incondicionalmente durante toda mi vida en mis estudios. A mis hermanos que en la medida de sus posibilidades me ayudaron en esta aventura que tome al estudiar Físico-Matemáticas.

A mi profesor y asesor de este trabajo, el Dr. Fernando Hernández Hernández, que desde los primeros días en la facultad ha sido una persona que me ha sido fundamental en mi desarrollo como estudiante, en gran medida gracias a el decidí estudiar Matemáticas, además de que ha sido alguien muy importante en mi desarrollo como persona.

Agradezco también a mis sinodales el Dr. David Meza Alcántara, Dr. Luis Valero Elizondo, Dr. Armando Sepúlveda López y el Dr. Petr Zhevandrov Bolshakova que revisaron el presente trabajo, por sus comentarios, observaciones y también como profesores ya que con la mayoría tuve la oportunidad de asistir a algunos de sus cursos en la licenciatura.

A mis amigos que me han ayudado siempre y que han sido un gran apoyo académicamente y personalmente.

A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, particularmente a la facultad de Ciencias Físico-Matemáticas que en general ha ayudado a mi formación como persona y como estudiante.

Introducción

La Hipótesis del Continuo(CH) fue uno de los problemas más importantes a finales del siglo XIX y gran parte del siglo XX. Georg Cantor al final del siglo XIX planteo este problema: ¿ $2^{\aleph_0} = \aleph_1$? Al final de la vida de Cantor este fue el último gran problema que trató de resolver, sin llegar nunca a una conclusión. En 1900 David Hilbert lo presentó como su primer problema de una lista propuesta en la conferencia de París durante el Congreso Internacional de Matemáticas. Cuando Kurt Gödel publica en 1930 los teoremas de incompletud, se tenía la preocupación de que la Hipótesis del Continuo fuese uno de estos enunciados indecidibles. En 1940 Gödel publica la consistencia relativa de Hipótesis Generalizada del Continuo(GCH) y Axioma de Elección(AC) a partir de Axiomas de Zermelo-Fraenkel(ZF) con lo cual se concluyó que era consistentemente cierto que CH fuese válido. En 1963 cuando Paul Cohen termina con este problema creando un modelo en el que CH es falso.

En el presente trabajo se da una breve explicación de qué es el universo construible y algunas de sus propiedades básicas. Es cierto que Gödel construye este modelo de ZF , sin embargo varias definiciones y resultados son publicados después de “The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory”; por ejemplo la teoría Kripke-Platek que fue introducida en 1964. Esta teoría se caracteriza por ser la teoría más pequeña a partir de la cual es posible crear el universo construible. Por otra parte, también se muestran varias fórmulas en su forma lógica que son herramientas para ir creando conjuntos que son necesarios para hablar de conceptos como satisfacción, sustitución de variables en una fórmula, etc. La intención de estas fórmulas es ofrecer una forma explícita a tales conceptos.

Otra parte del objetivo es mostrar todos los teoremas hasta la sección tres con el fin de que al menos hasta esta parte las únicas referencias sean el teorema de compacidad y el teorema de Löwenheim-Skolem. Así que al terminar de leer los primeros tres capítulos sin referir a otro libro se pueda comprender la idea general de cuál

fue la idea de Gödel para construir el universo L y de como probó la consistencia relativa de GCH y AC .

Este trabajo se divide en cuatro capítulos. En el primero se abordan algunas nociones acerca de Lógica y del lenguaje de la Teoría de conjuntos (LST), además de algunas herramientas que se usan más adelante y que fueron demostradas después de 1940; por ejemplo el Colapso transitivo de Mostowski-Shepherdson que fue introducido en 1949 de forma independiente. En esta sección se toman teoremas, observaciones y resultados de [6] y [3]. El principio de reflexión generalizado 1.6.1 se deben a Mountague y Lévy en 1960. La jerarquía de Lévy fue introducida por Lévy en 1965. Sin embargo, los conceptos de absolutez descritos en el teorema 1.6.3 se deben a Gödel. Finalmente la última sección del capítulo 1 presenta un repaso a algunos conceptos sobre cerrados y no acotados, los cuales serán retomados en los siguientes capítulos, especialmente en el capítulo 4. Además varios de los conceptos básicos se escriben como una fórmula lógica de manera que con el teorema 1.6.3, varios de ellos pueden usarse como fórmulas de apoyo en la redacción de otros conceptos en las siguientes secciones.

En el segundo capítulo se aborda un concepto conocido como el lenguaje $\mathcal{L}$, el cual se considera como LST , junto con constantes individuales por cada conjunto; la intención es contrastar LST y $\mathcal{L}$ para concluir que en modelos transitivos son equivalentes. Primero enumeramos los símbolos que son utilizados en la creación de fórmulas de la Teoría de conjuntos. La Teoría BS se utiliza para mostrar qué axiomas son suficientes para hablar del concepto de satisfacción, es decir, si tenemos una fórmula φ , queremos saber si esta fórmula es válida en la estructura $\langle u, \in \rangle$. Finalmente agregamos dos conceptos, el concepto de definible, y la Teoría KP . Con la teoría KP se trabaja un poco hasta concluir que desde KP es posible tener algunas versiones más fuertes de los axiomas de KP mismo.

Hasta aquí las primeras dos secciones son de trabajo para tener los elementos necesarios para crear el universo construible.

En el tercer capítulo se precisa cuándo un conjunto es definible, en las secciones 1 y 2 las demostraciones son tomadas de la idea original de Gödel, excepto el final cuando se prueba que L_α para α límite es admisible, esa es una observación de [3] que se cambio a teorema. Como ya se dijo la jerarquía de Lévy es posterior a los trabajos de Gödel, así que varios resultados de la tercera sección son posteriores. En la sección cuatro se especifica qué es el Axioma de Constructibilidad. La sección cinco, que es acerca del Axioma de Elección, es una versión posterior a la versión de

Gödel, pero el argumento es el original de Gödel. Se muestra el lema de condensación que es una parte central de la teoría construible de conjuntos, de la cual se deriva fácilmente GCH ; este teorema facilita el estudio de submodelos de subteorías de ZF dentro de L . Finalmente en la sección 7 se concluyen los resultados de consistencia relativa, que son el objetivo principal de esta tesis, cuyo argumento es una vez más el de Gödel, sin embargo; el teorema 3.7.4 se debe a Shepherdson.

En el cuarto capítulo se presentan dos temas adicionales donde se hace uso de la Axioma de Constructibilidad. En la primera sección se habla acerca de el principio combinatorio $\diamond^\#$ que es estudiado por Keith Devlin en 1982 [2] y que es una hipótesis más fuerte que $\diamond^+$, este principio fue introducido por Ronald Jensen en 1972. En [3] hay una demostración de que $V = L$ implica $\diamond^+$; sin embargo nosotros probaremos que $V = L$ implica $\diamond^\#$, para ello hablaremos un poco acerca de qué es una función primitiva y recursiva, las cuales fueron introducidas por Carol Karp y Ronald Jensen en 1962. En la segunda sección se usa $V = L$ para crear un sistema de escaleras con propiedades interesantes, otras variaciones del método permiten otras construcciones de sistemas de escaleras con diferentes propiedades. En este caso en específico se usa el sistema de escaleras para crear un objeto topológico que es un ejemplo de un espacio normal X pero que $X \times I$ no es normal.

Con respecto a las referencias históricas antes mencionadas la mayoría están comentadas en [3] y www.bit.ly/12reEUf.

Índice general

Agradecimientos	i
Introducción	iii
1 Preliminares	1
1.1 Lenguaje	1
1.2 Modelos y submodelos	3
1.3 Lenguaje de la Teoría de conjuntos	5
1.4 Ordinales	7
1.5 Lema del colapso transitivo	9
1.6 Relativización y reflexión	14
1.7 Cerrados y no acotados	21
2 El lenguaje $\mathcal{L}_V$	25
2.1 Fórmulas	25
2.2 La Teoría BS	28
2.3 Satisfacción	32
2.4 Definibilidad	39
2.5 La Teoría KP	43
2.6 Principio de recursión y clausura transitiva	47
3 El universo construible	51
3.1 Definición de los conjuntos construibles	52
3.2 Propiedades del modelo L	53
3.3 Fórmulas en L	60
3.4 El Axioma de Constructibilidad	65
3.5 Axioma de Elección en L	67
3.6 GCH en L	73
3.7 Consistencia relativa	81

4	Uso del Axioma de Constructibilidad	85
4.1	El principio combinatorio $\diamond^\#$	85
4.2	Sistema de escaleras	95
	Bibliografía	105

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Lenguaje

La **Lógica de primer orden**, también llamada Lógica de predicados o Cálculo de predicados, es un sistema formal diseñado para estudiar la inferencia en los lenguajes de primer orden. Los **lenguajes de primer orden** son a su vez lenguajes formales con cuantificadores que alcanzan sólo a variables de individuo, y con predicados y funciones cuyos argumentos son sólo constantes o variables de individuo.

Los símbolos básicos de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ son:

1. Delimitadores y símbolos auxiliares $\mathcal{B} = \{ \text{ }, (,), \{, \}, [,], \langle, \rangle, = \}$.
2. Los conectivos Lógicos “**y**” $\wedge$ y “**negación**” $\neg$.
3. El símbolo cuantificador “**existe**” $\exists$.
4. Un conjunto tal que para cada natural n , v_n es una variable y $\mathcal{V} = \{v_n : n \text{ es natural}\}$ es el conjunto de variables.
5. Un conjunto $\mathcal{R} = \{R_i : i \in I\}$ de símbolos relaciones.
6. Un conjunto $\mathcal{F} = \{f_j : j \in J\}$ de símbolos funcionales.
7. Un conjunto $\mathcal{C} = \{c_k : k \in K\}$ de símbolos de constantes individuales.

Un lenguaje es un conjunto de símbolos tal que $\mathcal{L}$ consta de:

$$\langle \wedge, \neg, \exists, \mathcal{V}, \mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$$

Con los conectivos Lógicos $\wedge$ y $\neg$ se pueden definir los demás conectivos Lógicos **implicación** “ $\rightarrow$ ”, **doble implicación** “ $\leftrightarrow$ ” y **ó** “ $\vee$ ” a partir de los dos primeros como sigue:

- $\varphi \vee \psi := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.
- $\varphi \rightarrow \psi := \neg(\varphi \wedge \neg\psi) = \neg\varphi \vee \psi$.
- $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

Donde p y q intuitivamente son proposiciones, más adelante se definirá formalmente, por ahora sólo se define bajo esta intuición.

Para el caso del cuantificador **para todo** $\forall$, se define a partir de los conectivos $\exists$ y $\neg$, de tal forma que $\forall x\varphi(x) := \neg\exists x\neg\varphi(x)$.

En estos casos el Lenguaje $\mathcal{L}$ no está incrementando nuevos símbolos ya que sólo es una abreviación de la definición antes mencionada, por ejemplo se escribe $p \rightarrow q$ pero esta fórmula abrevia $\neg(p \wedge \neg q)$ que además de ser más complicada sintácticamente no es intuitiva como $p \rightarrow q$.

Los conjuntos de símbolos relacionales y funcionales cada uno de ellos tiene asignado un número natural que se conoce como aridad, este número se refiere a la cantidad de elementos que necesita para operar dicha relación o función. Los conjuntos I , J y K son conjuntos de índices que enumeran relaciones, funciones y constantes respectivamente.

Un término es una expresión que representa a un individuo de un universo. Las fórmulas se definen de manera recursiva de la siguiente manera:

Definición 1.1.1. Sólo son términos:

- Las Variables.
- Las constantes.
- Si h es un símbolo funcional de aridad n y $t_1, \dots, t_n$ son términos, entonces $h(t_1, \dots, t_n)$ es un término.

Una fórmula es una expresión que se interpreta como alguna relación que puede ocurrir o no entre individuos del universo de interpretación, las fórmulas se definen recursivamente de la misma manera que los términos.

Definición 1.1.2. Una fórmula es atómicas si cumple alguno de los siguientes esquemas:

- Si t_1 y t_2 son términos $t_1 = t_2$ es fórmula atómica.
- Si h es un símbolo relacional de aridad n , y $t_1, \dots, t_n$ son términos entonces $h(t_1, \dots, t_n)$ es una fórmula atómica.

Una función es en general una relación que puede tener $\vec{c}$ parámetros y exhibe un único elemento como resultado, es decir usando la notación que se usará más adelante, $(\vec{a}, \vec{c}) \in f$ quiere decir que f es una función y $f(\vec{c}) = \vec{a}$. También $\vec{c} = c_1, \dots, c_n$ y $\vec{a} = a_1, \dots, a_m$, esta notación es muy utilizada para abreviar parámetros.

Ahora las fórmulas de primer orden se definen a partir de los términos como sigue:

- Las fórmulas atómicas son fórmulas.
- Si α y β son fórmulas entonces: $(\neg\alpha)$ y $(\alpha \wedge \beta)$ son fórmulas.
- Si α es una fórmula y x es variable, entonces: $\exists x\alpha$ es fórmula.

Es importante resaltar que en todas las definiciones anteriores se considera h letra funcional o relacional que está en el lenguaje definido. El Cálculo de predicados consta todos los esquemas de fórmulas universalmente verdaderas, además de las reglas de inferencia Lógica, un estudio formal y extenso se encuentra en [7].

1.2 Modelos y submodelos

Dado un lenguaje de predicados $\mathcal{L}$, un modelo $\mathfrak{A}$ es una dupla $\langle A, \mathcal{I} \rangle$ donde A es el universo y donde $\mathcal{I}$ es la interpretación que identifica los símbolos de $\mathcal{L}$ con funciones, relaciones y constantes al universo A . Esta función de interpretación se define de manera recursiva; entonces si $s = \langle s_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión de elementos de A se interpreta de la siguiente manera:

- Si x_k es una variable, entonces $x_k[s] = x_k^{\mathfrak{A}} = s_k$.
- Si c es una constante, entonces para cualquier asignación c es $c^{\mathfrak{A}}$.
- Si h es un símbolo relacional o funcional de aridad n y $t_1, \dots, t_n$ son términos cuyas interpretaciones son $t_1^{\mathfrak{A}}[s], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[s]$, entonces la interpretación de $h(t_1, \dots, t_n)$ bajo s es $h^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[s], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[s])$.

Para definir la noción de satisfacción también se hace de manera recursiva, entonces sean t_1, t_2 términos, φ una fórmula, y entonces decimos que $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$ si:

1. Si φ es $t_1 = t_2$ y $t_1^{\mathfrak{A}}[s]$ es el mismo elemento que $t_2^{\mathfrak{A}}[s]$.
2. Si φ es $h(t_1, \dots, t_n)$ y sucede que $(t_1^{\mathfrak{A}}[s], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[s]) \in h^{\mathfrak{A}}$, donde h es letra relacional de aridad n .
3. Si φ es de la forma $\neg\psi$ y no sucede que $\mathfrak{A} \models \psi[s]$.
4. Si φ es de la forma $\psi_1 \wedge \psi_2$ y sucede que $\mathfrak{A} \models \psi_1[s]$ y $\mathfrak{A} \models \psi_2[s]$.

5. Si φ es de la forma $\exists x\psi$ y existe una asignación s' que cumpla que $s'(y) = s(y)$ para toda variable y distinta de x sucede que $\mathfrak{A} \models \psi[s']$.

Entonces dado un modelo $\mathfrak{A}$ y un modelo $\mathfrak{B}$ se definen las siguientes propiedades y comparaciones entre estos.

1. $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ es isomorfa a $\mathfrak{B}$), si existe una biyección G de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ que cumpla que si c es una constante entonces $G(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$, si p es una letra predicativa de aridad n y $a_1, \dots, a_n \in A$ entonces $(a_1, \dots, a_n) \in p^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $(G(a_1), \dots, G(a_n)) \in p^{\mathfrak{B}}$ y si f es una relación o función de aridad n y $a_1, \dots, a_n \in A$ entonces

$$G(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(G(a_1), \dots, G(a_n)).$$

2. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ es elementalmente equivalente a $\mathfrak{B}$), si para cada fórmula φ del lenguaje de $\mathfrak{A}$, se tiene que

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi.$$

3. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ es subestructura o submodelo de $\mathfrak{B}$) si $A \subseteq B$, $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$ para toda constante c . Para cada letra predicativa h de aridad n , $a_1, \dots, a_n \in A$, $(a_1, \dots, a_n) \in h^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $(a_1, \dots, a_n) \in h^{\mathfrak{B}}$ (es decir $h^{\mathfrak{A}} = h^{\mathfrak{B}} \cap A^n$). Finalmente para cada letra funcional f en $\mathfrak{B}$ hay una letra funcional g en $\mathfrak{A}$ de aridad m tal que $g^{\mathfrak{A}} = f \upharpoonright A^n$.
4. $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ es subestructura elemental de $\mathfrak{B}$) si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, para cada fórmula φ con variables libres $x_1, \dots, x_n$ y cada $a_1, \dots, a_n \in A$.
 $\mathfrak{A} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n]$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n]$.

Este último caso, para ser más claro dice intuitivamente que cualquier cosa que se puede decir en la estructura $\mathfrak{B}$ también puede ser dicho dentro de la estructura $\mathfrak{A}$; desde luego restringiendo la toma elementos dentro del modelo $\mathfrak{A}$.

Para darle sentido a los modelos, considérese una lista de enunciados T escritos en lógica de primer orden, entonces decimos que $\mathfrak{A}$ es un modelo para T si para cada fórmula φ de T sucede que $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Se define la noción de deducción $T \vdash \varphi$, si con T junto y el cálculo de predicados es posible obtener la fórmula φ . Entonces dada una teoría T tenemos las siguientes propiedades:

- Satisfacible: Hay un modelo en cual la hace verdadera.
- Completa: Si para cada enunciado α o bien $\alpha \in T$ o $\neg\alpha \in T$.

- Dos teorías T y T' son equivalentes, si tienen los mismos modelos.
- Un conjunto de axiomas para T , es simplemente una teoría equivalente para T .
- T es axiomatizable, si existe un conjunto decidable de axiomas para T .
- T es finitamente axiomatizable, si existe un conjunto finito de axiomas para T .

Es muy común reemplazar $\mathfrak{A} \models \varphi$ por $A \models \varphi$, donde A es el universo de interpretación de $\mathfrak{A}$; cuando se desea resaltar el universo de interpretación.

Teorema 1.2.1. (*Compacidad*) Sea T un conjunto de enunciados. Si cada subconjunto finito de T es satisfacible entonces T es satisfacible.

Por otra parte si tenemos una teoría T satisfacible, es posible encontrar modelos de ciertas cardinalidades de esta teoría, en particular el teorema de Löwenheim-Skolem afirma que existe un modelo para T de tal manera que su cardinalidad es determinada por la cantidad de elementos del lenguaje.

Teorema 1.2.2. (*Löwenheim-Skolem*) Sea $\mathfrak{A}$ un modelo infinito y sea $X \subseteq A$. Entonces existe $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ tal que:

- i) $X \subseteq B$.
- ii) $|\mathfrak{B}| = \max\{|\rho|, \aleph_0, |X|\} = \kappa$, donde $\rho = \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$.

Si tenemos dos modelos $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y queremos mostrar que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ el siguiente teorema simplifica mucho esta demostración.

Teorema 1.2.3. (*Criterio de Tarski-Vaught*) $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y para todas las fórmulas $(\exists x)\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ y $a_1, \dots, a_n \in A$, si $\mathfrak{B} \models \exists x\varphi[x, a_1, \dots, a_n]$, entonces existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi[a, a_1, \dots, a_n]$.

Una demostración de estos tres últimos teoremas requiere un poco más de trabajo en Lógica, estas demostraciones pueden ser encontradas en [1] y [7].

1.3 Lenguaje de la Teoría de conjuntos

El lenguaje de la Teoría de conjuntos (*LST* por sus siglas en inglés) es un lenguaje de primer orden que consta de sólo una letra relacional $\in$ de tal forma que sólo $(v_m = v_n)$ y $(v_m \in v_n)$ son fórmulas atómicas. Se agregan más símbolos que abrevian ciertas fórmulas, estos son:

- $(\exists v_m \in v_n)\psi$ reemplaza a $\exists v_m(v_m \in v_n \wedge \psi)$.
- $(\forall v_m \in v_n)\psi$ reemplaza a $\forall v_m(v_m \in v_n \rightarrow \psi)$.
- $v_m \subseteq v_n$ reemplaza a $(\forall v_k \in v_m)(v_k \in v_n)$.
- $\exists! v_n \psi$ reemplaza a $\exists v_n(\psi(v_n) \wedge \forall v_m(\psi(v_m) \leftrightarrow v_n = v_m))$.

Para hacer más amable la notación, se tiende a usar x, y, z etcétera como variables, y $\psi(x, y)$ significa que x, y son variables libres en la fórmula ψ , donde ser variable libre quiere decir que no está al alcance de un cuantificador.

Ahora los axiomas de la Teoría de conjuntos, primero se enuncia cuál es su significado, después se escribirán en Lógica de primer orden. Estos son los axiomas:

- Extensionalidad: Si todo elemento de y es un elemento de x , y todo elemento de x es un elemento de y , entonces $x = y$.
- Unión: Para todo conjunto x existe un conjunto y tal que para todo z , z está en y si y sólo si existe un v en x tal que z está en v .
- Infinito: Existe un conjunto infinito.
- Fundación: En cada conjunto no vacío x existe u en x tal que u y x son ajenos.
- Conjunto Potencia: Para cualquier conjunto x existe un conjunto s (usualmente denotado por $\mathcal{P}(x)$) tal que a está en s si y sólo si a es un subconjunto x .
- Esquema de Comprensión: Sea ϕ una fórmula, para cualquier conjunto a , hay un conjunto b tal que x está en b si y sólo si x está en a y x satisface la fórmula ϕ .
- Esquema de Colección: Para todo parámetro $\vec{a}$, para todo x existe y tal que si $\phi(x, y, \vec{a})$ entonces para todo u , si $x \in u$ existe v tal que hay un $y \in v$ y x, y hacen verdadera a $\phi(x, y, \vec{a})$.
- Axioma de Elección: Sea x un conjunto no vacío, entonces para todo y no vacío en x hay un z de tal forma que hay un único $v \in y$ tal que $v \in z$.

Y su forma en Lógica de primer orden:

- Extensionalidad: $\forall x \forall y [\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow (x = y)]$.
- Unión: $\forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow (\exists u \in x)(z \in u)]$.
- Infinito: $\exists x [\exists y (y \in x) \wedge (\forall y \in x)(\exists z \in x)(y \in z)]$.
- Conjunto Potencia: $\forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow z \subseteq x]$.
- Fundación: $\forall x [\exists y (y \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge (\forall z \in y)(z \notin x))]$.
- Esquema de Comprensión: $\forall \vec{a} \forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \Phi(z, \vec{a}))]$.
- Esquema de Colección: $\forall \vec{a} [\forall x \exists y \Phi(y, x, \vec{a}) \rightarrow$

$$\forall u \exists v (\forall x \in u) (\exists y \in v) \Phi(y, x, \vec{a}).$$

- Axioma de Elección: $\forall x [(\forall y \in x)(y \neq \emptyset) \wedge (\forall y, y' \in x)(y \neq y' \rightarrow \forall w (w \in y \leftrightarrow w \notin y')) \rightarrow (\exists z)(\forall y \in x)(\exists! v \in y)(v \in z)]$.

El Axioma de Elección y el Axioma de Infinito tienen muchas formas distintas de enunciarse, en este caso las fórmulas de estos dos axiomas son las fórmulas que se interpretan como la existencia de un conjunto infinito y la existencia de una función de elección. El Axioma de Esquema de Reemplazo dice que si v es un conjunto y Θ es una fórmula con dos variables libres x, y , tales que para cada $x \in v$ existe un único y tal que $\Theta(x, y)$ se cumple, entonces existe un conjunto w tal que $y \in w$ si y sólo si $\Theta(x, y)$. A partir de axioma se implica el Esquema de Colección y Esquema de Comprensión. Usualmente se agregan los Axiomas del Par y de Existencia; sin embargo, el de existencia es implicado por el Axioma de Infinito, y el del par es una consecuencia de los Axiomas del Conjunto Potencia y Esquema de Comprensión.

Como definición mas general a un conjunto se toma la noción informal de clase; si $\varphi(y, \vec{x})$ es una fórmula, entonces una clase es la colección de todos los conjuntos que cumplen tal fórmula, es decir

$$C = \{y : \varphi(y, \vec{x})\};$$

por ejemplo, se puede considerar la clase universal

$$V = \{y : y = y\}.$$

También es posible decir que dos clases C y D son iguales si y sólo si dadas Φ y Ψ respectivamente sucede que ZFC puede probar que Φ y Ψ son equivalentes. Es posible definir nociones de operaciones de clases, tal y como se hizo con la noción de igualdad.

1.4 Ordinales

En esta sección, además repasar las definiciones de ordinales, se escribirán las fórmulas que más adelante nos serán de utilidad en el objetivo de esta tesis. Sea

$$Trans(x) = (\forall y \in x)(\forall z \in y)(z \in x).$$

Definición 1.4.1. Un conjunto x es transitivo si y sólo si $Trans(x)$.

Un número ordinal es un conjunto transitivo que es linealmente ordenado por $\in$. La fórmula que dice x es un ordinal es:

$$On(x) = Trans(x) \wedge (\forall y \in x)(\forall z \in x)(y = z \vee y \in z \vee z \in y).$$

Para referirse a los ordinales usualmente se usan las letras griegas α, β, γ , etcétera. Por el Axioma de Fundación $\in$ es una relación de buen orden sobre On . La clase $On = \{x : On(x)\}$, es conocida como la clase de ordinales, a continuación se varias convenciones acerca de cómo se trabajan los ordinales, cómo son referidos y algunas observaciones acerca de ellos.

- $\alpha < \beta$, significa $\alpha \in \beta$.
- $\alpha \leq \beta$, significa $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$.
- Como los ordinales son una clase transitiva $\alpha \leq \beta$ también es $\alpha \subseteq \beta$.
- $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$.

Sea, A un conjunto de ordinales, entonces:

- $\delta = sup(A) = \bigcup A$ es el supremo de los ordinales de A .
- $\delta = min(A) = \bigcap A$ es el ínfimo de los ordinales de A .

El primer ordinal con el buen orden $\in$ es el conjunto vacío $\emptyset$, que es denotado por 0 , $1 = \{\emptyset\}$ o $\{0\}$, entonces

- $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$, que es el sucesor de α .
- Un ordinal es sucesor, si es de la forma $\alpha + 1$, es decir si cumple que $succ(x)$ que es la siguiente fórmula

$$On(x) \wedge (\exists y \in x)(\forall z \in x)(z \in y \vee z = y).$$

Si un ordinal no es sucesor se conoce como ordinal límite, un ordinal es límite si cumple la fórmula $lim(x)$ que es:

$$On(x) \wedge (\forall y \in x)(\exists z \in x)(y \in z).$$

Usando el Axioma de Infinito es posible demostrar que un ordinal límite existe; por ejemplo, el segundo más pequeño de ellos se denota por ω (el primero es 0) y es el conjunto de todos los ordinales finitos (puede decirse que es el conjunto de los números naturales), ω puede ser definido por la siguiente fórmula:

$$lim(x) \wedge (\forall y \in x)(succ(y) \vee (\forall z \in y)(z \neq z)).$$

- Escribimos $\exists \alpha \Psi(\alpha)$ en lugar de $\exists x[On(x) \wedge \Psi(x)]$.
- Escribimos $\forall \alpha \Psi(\alpha)$ en lugar de $\forall x[On(x) \rightarrow \Psi(x)]$.

- Si $(X, <)$ es un conjunto bien ordenado entonces existe un único ordinal α tal que $(X, <)$ es isomorfo a α . Este α es llamado tipo de orden de $(X, <)$ que es denotado por $otp(X, <)$.

Las siguientes definiciones son repaso rápido de objetos referentes a los ordinales que serán utilizados de forma cotidiana en el capítulo 3 pero más en el último capítulo.

Definición 1.4.2. Un número cardinal es un ordinal α tal que no hay un ordinal $\beta < \alpha$ y una función $f : \beta \rightarrow \alpha$ de tal forma que f sea suprayectiva.

Claramente los números naturales son cardinales, ω es cardinal.

Definición 1.4.3. Un cardinal λ es sucesor de un cardinal κ y se denota como κ^+ si es el mínimo cardinal más grande que κ .

Definición 1.4.4. Un cardinal κ es sucesor si sucede que existe un cardinal λ tal que $\lambda^+ = \kappa$ y un cardinal es llamado límite en otro caso.

Definición 1.4.5. Se define por recursión los siguientes cardinales:

- $\omega_0 = \omega$.
- $\omega_{\alpha+1} = \omega_\alpha^+$.
- $\omega_\delta = \sup_{\alpha < \delta} \{\omega_\alpha\}$, si δ es límite.

En muchos textos (originalmente introducida por Cantor) se utiliza $\aleph_\alpha$ en lugar de ω_α y este último es usado más para ser tomado en cuenta como un ordinal.

1.5 Lema del colapso transitivo

Definición 1.5.1. Sea E una relación binaria para una clase P , entonces para cada $x \in P$ definimos:

$$ext_E(x) = \{z \in P : zEx\}.$$

Definición 1.5.2. Una relación E sobre una clase P es bien fundada si:

- Para cada $X \subseteq P$ no vacío, X tiene un elemento E -minimal, es decir que existe un $a \in X$ tal que para cualquier $x \in X$ no es cierto que xEa .
- $ext_E(x)$ es un conjunto para cada $x \in P$.

De la definición anterior $\in$ es una relación bien fundada.

Definición 1.5.3. Un elemento s de una clase C es $\in$ -minimal si $s \cap C = \emptyset$.

Lema 1.5.4. *Para cada conjunto s hay un conjunto transitivo t de tal forma que $s \subseteq t$.*

Demostración. Definimos $s = s_0$, $s_{n+1} = \bigcup s_n$ y $t = \bigcup_{n=0}^{\infty} s_n$. Note que $s \subseteq t$, ahora suponga que $x \in s$ y $x \not\subseteq t$, entonces hay un $x_1 \in x$ de tal forma que $x_1 \not\subseteq t$ de lo contrario $x_1 \subseteq s_n$ para algún n y por consiguiente $x_1 \in s_{n+1}$, por lo tanto hay un $x_2 \in x_1$ y $x_2 \not\subseteq t$; si suponemos que $x_n \not\subseteq t$ entonces hay un $x_{n+1} \in x_n$ de tal forma que $x_{n+1} \not\subseteq t$ y por lo tanto hay una cadena descendiente de elementos de la siguiente forma:

$$\cdots \in x_{n+1} \in x_n \cdots \in x_1 \in x$$

lo cual contradice el Axioma de Fundación. $\square$

Lema 1.5.5. *Cualquier clase C tiene elemento $\in$ -minimal.*

Demostración. Sea $S \in C$ un conjunto arbitrario, si $S \cap C = \emptyset$ ya terminamos, así entonces supongase $S \cap C \neq \emptyset$. Sea T un conjunto transitivo de tal forma que $S \subseteq T$ y $X = T \cap C$, por Fundación existe un $x \in X$ de tal forma que $x \cap X = \emptyset$, ahora sólo falta mostrar que $x \cap C = \emptyset$, suponga que no, esto implica que existe $y \in x$ tal que $y \in C$, por lo tanto $y \in T$ pues T es transitivo y $y \in x \cap T \cap C = x \cap X$, lo que es una contradicción; por lo tanto x es $\in$ -minimal. $\square$

Teorema 1.5.6. *(Inducción sobre relaciones bien fundadas) Sea E una relación bien fundada sobre P . Sea Φ una propiedad y suponga que:*

- i) *Cualquier elemento E -minimal tiene la propiedad Φ .*
- ii) *Si $x \in P$ y para cada z tal que zEx la propiedad $\Phi(z)$ es cierta, entonces $\Phi(x)$. Entonces cada $x \in P$ tiene la propiedad Φ .*

Demostración. Supóngase que existe un $x \in P$ de tal forma que $\neg\Phi(x)$, entonces sea $C = \{x : \neg\Phi(x)\}$, entonces C tiene elemento E -minimal s . Sin embargo, para todo yEs sucede $\Phi(y)$ y esto implica que $\Phi(s)$ lo cual contradice la minimalidad de s y por lo tanto para todo $x \in P$, $\Phi(x)$. $\square$

Teorema 1.5.7. *(Recursión bien fundada) Sea E una relación bien fundada sobre P , sea G una función (Sobre $V \times V$), entonces existe una única función F en P tal que*

$$F(x) = G(x, F \upharpoonright \text{ext}_E(x))$$

para cada $x \in P$.

Demostración. Para cada $x \in P$ sea:

$$F(x) = y \leftrightarrow \text{Existe una función } f \text{ tal que:}$$

- i) $\text{dom}(f)$ es un conjunto de tal forma que $(\forall z \in \text{dom}(f))(z \subseteq \text{dom}(f))$,
- ii) $(\forall z \in \text{dom}(f))f(z) = G(f \upharpoonright z)$,
- iii) $f(x) = y$.

Dadas las condiciones anteriores, F es la función que necesitamos, ahora por E -inducción vemos que F es única. Sea F' una función que cumpla las condiciones anteriores y $C = \{x : F(x) \neq F'(x)\}$, entonces C tiene elemento E -minimal s . Como F y F' cumplen con las condiciones del teorema existen f y f' de tal forma que $(\forall z \in \text{dom}(f))f(z) = G(f \upharpoonright z) = f'(z)$ y $f(x) = y = f'(x)$, entonces $F(x) = F'(x)$, una contradicción, entonces es única. $\square$

Una vez probado E -recursión, $\in$ -recursión es una consecuencia de este teorema. Esto permite cambiar la forma de ver a la clase universal V , antes se definió como los conjuntos que cumplen la fórmula $x = x$ para ello se usa el Axioma del Conjunto Potencia $\mathcal{P}$, ahora por inducción transfinita se define:

$$V_0 = \emptyset \quad V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha) \quad V_\alpha = \bigcup_{\gamma < \alpha} V_\gamma, \text{ si } \alpha \text{ es límite.}$$

Y finalmente:

$$V = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha.$$

Teorema 1.5.8.

- i) Cada V_α es transitivo.
- ii) Si $\beta < \alpha$ entonces $V_\beta \subseteq V_\alpha$.
- iii) $\alpha \subseteq V_\alpha$.

Demostración. Por inducción, para $\alpha = 0$ se cumple trivialmente, ahora suponga que hasta antes de α suceden las tres condiciones, entonces hay dos casos: α es un ordinal límite, α es un ordinal sucesor. Si $x \in V_\alpha$ para α límite, $x \in V_{\beta+1}$ para algún $\beta + 1 < \alpha$ ya que $V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$, así entonces sólo es necesario verificar cuando el ordinal es sucesor. Sea $\alpha = \beta + 1$:

- i) Sea $y \in x \in V_{\alpha+1}$, entonces $x \subseteq V_\alpha$ y por hipótesis de inducción $y \in V_\alpha$ implica que $y \subseteq V_\alpha$ y entonces $y \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$.
- ii) Por hipótesis de inducción para $\beta < \alpha$, $V_\beta \subseteq V_\alpha$. Sea $x \in V_\alpha$, por i) V_α es transitivo, entonces $x \subseteq V_\alpha$ y $x \in V_{\alpha+1}$, así $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$; por lo tanto si $\beta < \alpha + 1$, $V_\beta \subseteq V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$.
- iii) $\beta \subseteq V_\beta$, entonces $\{\beta\} \in V_{\beta+1} = V_\alpha$ y $\alpha = \beta \cup \{\beta\} \subseteq V_\alpha$.

$\square$

Lema 1.5.9. Para cada conjunto x hay un ordinal α tal que $x \in V_\alpha$.

Demostración. Sea C la clase de todos los conjuntos que no están en ningún V_α . Si C es no vacía tiene elemento $\in$ -minimal. Entonces hay $x \in C$ y $z \in \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$ para cada $z \in x$ y entonces $x \subseteq \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$ y por Esquema de Colección se cumple la siguiente fórmula:

$$\forall z \exists \alpha (z \in x \rightarrow z \in V_\alpha) \rightarrow (\exists \delta)(\forall z \in x)(\exists \alpha \in \delta)(z \in V_\alpha).$$

Entonces existe un δ tal que $x \in V_{\delta+1}$ y entonces C es la clase vacía. $\square$

Es muy importante señalar que este cambio en la forma de ver la clase universal es otra forma de formular el Axioma de Fundación, y no sólo como se había mencionado antes donde $V = \{x : x = x\}$. Al decir que todo conjunto está en la clase V se está suponiendo el Axioma de Fundación, por ejemplo al definir la noción de rango:

Definición 1.5.10. Para cada $x \in V$:

$$\text{rank}(x) = \text{el mínimo ordinal tal que } x \in V_{\alpha+1}.$$

Una vez definido el rango tenemos las siguientes propiedades:

1. $x \in y$ implica $\text{rank}(x) < \text{rank}(y)$.
2. $\text{rank}(\alpha) = \alpha$.

Estos teoremas definen las características de las relaciones bien fundadas; en particular se usará para la relación $\in$. Se enunciará un teorema que es extremadamente importante en teoría de constructibilidad, el lema del colapso de Mostowski-Shepherdson.

Definición 1.5.11. Un conjunto X es extensional si:

$$(\forall u \in X)(\forall v \in X)(u \neq v \rightarrow (\exists x \in X)(x \in u \leftrightarrow x \notin v)).$$

Es decir que X es extensional si y sólo si $\langle X, \in \rangle$ es un modelo del Axioma de Extensionalidad.

Teorema 1.5.12. (*Lema del colapso transitivo*). Sea X un conjunto extensional, entonces hay un único conjunto transitivo M y una única biyección $\pi : X \longleftrightarrow M$ tal que:

- i) $\pi : \langle X, \in \rangle \cong \langle M, \in \rangle$, es decir que si $x, y \in X$ y $x \in y$ entonces $\pi(x) \in \pi(y)$.
- ii) Si $Y \subseteq X$ es transitivo, entonces $\pi \upharpoonright Y = \text{id} \upharpoonright Y$.

Demostración. Primero, supongamos que π existe, lo que queremos es notar algunas de sus propiedades. Sea $y \in x \in X$, como π es un isomorfismo $\pi(y) \in \pi(x)$, además

$$\{\pi(y) : y \in X \wedge y \in x\} \subseteq \pi(x).$$

Ahora sea $x \in X$ y $z \in \pi(x)$, como M es transitivo $z \in M$ entonces para algún $y \in X$ $z = \pi(y)$ y por lo tanto $\pi(y) \in \pi(x)$ y como π es un isomorfismo $y \in x$, entonces

$$\pi(x) \subseteq \{\pi(y) : y \in X \wedge y \in x\};$$

luego

$$\pi(x) = \{\pi(y) : y \in X \wedge y \in x\}.$$

Si existe una función π que cumpla las condiciones del teorema esta es única. Suponga que existen dos funciones π_1 y π_2 de tal forma que cumplen el teorema, entonces sea $C = \{x \in X : \pi_1(x) \neq \pi_2(x)\}$, este conjunto tiene elemento $\in$ -minimal y , entonces para todo $z \in y$ $\pi_1(z) = \pi_2(z)$, sin embargo como se vio anteriormente, $\pi_1(y) = \{\pi_1(z) : z \in X \wedge z \in y\} = \{\pi_2(z) : z \in X \wedge z \in y\} = \pi_2(y)$ contradiciendo que $\pi_1(y) \neq \pi_2(y)$. Para que M sea único, $M = \text{ran}(\pi)$ es el que necesitamos. Por lo tanto si π existe, es única.

Se define π por $\in$ -recursión para X

$$\pi(x) = \{\pi(y) : y \in X \wedge y \in x\}.$$

Primero probaremos que π es inyectiva, supóngase que no y sean $x_1, x_2 \in X$ distintos de rango mínimo y de tal forma que $\pi(x_1) = \pi(x_2)$, como X es extensional existe $y \in X$ de tal forma que $y \in x_1$ y $y \notin x_2$ o viceversa.

Suponga, sin pérdida de generalidad, $y \in x_1$ y $y \notin x_2$, entonces $\pi(y) \in \pi(x_1)$; por definición de π , como $\pi(x_1) = \pi(x_2)$; $\pi(y) \in \pi(x_2)$ y entonces hay un $z \in x_2$ de tal forma que $\pi(z) = \pi(y)$. Sin embargo $y \neq z$, pues $y \notin x_2$ y esto contradice la minimalidad de x_1, x_2 . Entonces π es inyectiva.

Para ver que es isomorfismo sea $x \in y \in X$, por la definición de $\pi(y)$, $\pi(x) \in \pi(y)$. Ahora suponga $\pi(x) \in \pi(y)$, por la definición de $\pi(y)$ hay un $z \in y$ de tal forma que $\pi(x) = \pi(z)$. Sin embargo, como se vio antes, π es inyectiva y entonces $x = z$. Por lo tanto, π es un $\in$ -isomorfismo.

Ahora suponga que $Y \subseteq X$ es transitivo. Entonces para $x \in Y$ tenemos que $y \in x \rightarrow y \in Y$. Por lo tanto si $x \in Y$

$$\pi(x) = \{\pi(y) : y \in x\}.$$

Supóngase que $\pi \upharpoonright Y \neq \text{id} \upharpoonright Y$, entonces tomemos x el $\in$ -mínimo que cumple que $\pi(x) \neq x$ y para todo $y \in x$ $\pi(y) = y$. Por lo tanto $\pi(x) = \{\pi(y) : y \in x\} = \{y : y \in x\} = x$ y esto contradice a minimalidad de x . $\square$

De este lema es posible desprender con una demostración casi idéntica el siguiente lema:

Teorema 1.5.13. (*Lema de Representación*) Sea X una clase, E una relación en X que cumpla:

- i) $(\forall u \in X)(\forall v \in X)(u \neq v \rightarrow (\exists x \in X)(xEu \leftrightarrow \neg xEv))$.
- ii) E es bien fundado.

Entonces hay una única clase transitiva M y una única función $\pi : \langle X, E \rangle \cong \langle M, \in \rangle$.

1.6 Relativización y reflexión

Sea M una clase, para cada Φ se define una nueva fórmula Φ^M que es conocida como la relativización de Φ en M , Φ también es una fórmula de LST . La idea de crear estas fórmulas es que sólo se refieran a conjuntos de M , sobre todo con las fórmulas que tienen cuantificadores. Como antes se mencionó, si M es una clase entonces hay una LST -fórmula que refiere a la clase M . La definición de estas fórmulas es recursiva.

- Si Φ es primitiva, entonces $\Phi^M = \Phi$.
- Si Φ es de la forma $\Psi_1 \wedge \Psi_2$, entonces $\Phi^M = \Psi_1^M \wedge \Psi_2^M$.
- Si Φ es de la forma $\neg\Psi$, entonces $\Phi^M = \neg(\Psi^M)$.
- Si Φ es de la forma $\exists v_n \Psi$, entonces $\Phi^M = (\exists v_n \in M)(\Psi^M)$.

Otra forma de ver este último caso es tomando en cuenta que $M = \{x : \Theta(x)\}$ y entonces la fórmula Φ^M es la fórmula $\exists v_n(\Theta(v_n) \wedge \Phi_0^M)$.

El siguiente teorema fue probado por Montague y Lévy (1960-1965).

Teorema 1.6.1. (*Principio de reflexión generalizado*) Sea $(W_\alpha : \alpha \in On)$ conjuntos transitivos definidos por una LST -fórmula Ψ de tal forma que:

- i) $W_\alpha = \{x : \Psi(x, \alpha)\}$.
- ii) $\alpha < \beta$ implica que $W_\alpha \subseteq W_\beta$.
- iii) Si δ es límite, entonces $W_\delta = \bigcup_{\gamma \in \delta} W_\gamma$.

Sea

$$W = \bigcup_{\alpha \in On} W_\alpha.$$

Sea $\Phi(\vec{v})$ una LST -fórmula con variables libres en $\vec{v}$, entonces la siguiente fórmula es un teorema que puede ser demostrado a partir de ZF :

$$(\forall \alpha)(\exists \beta > \alpha)[\lim(\beta) \wedge (\forall \vec{v} \in W_\beta)[\Phi^W(\vec{v}) \leftrightarrow \Phi^{W_\beta}(\vec{v})]].$$

Demostración. Sea $\Phi(\vec{v})$ una LST -fórmula. Sean $\Phi_0(\vec{x}_0), \dots, \Phi_n(\vec{x}_n)$ una sucesión de fórmulas LST de tal forma que $\Phi_n(\vec{x}_n) = \Phi(\vec{v})$ y para cada $i = 0, \dots, n$ $\Phi_i(\vec{x}_i)$ es una fórmula primitiva o es obtenida por fórmulas previas por medio de aplicar negación, conjunción o el cuantificador existencial (esto es posible por cómo se definen las fórmulas LST).

Para cada fórmula Φ_i sea $f_i(\vec{x}_i) = 0$ si $\Phi_i(\vec{x}_i)$ es de la forma $\neg \Phi_j(\vec{x}_j)$ para alguna $j < i$ o $\Phi_j(\vec{x}_j) \wedge \Phi_k(\vec{x}_k)$ para algún $j, k < i$ o es primitiva. Si es el caso que $\Phi_i(\vec{x}_i)$ es de la forma $\exists y \Phi_j(y, \vec{x}_i)$ sea $f_i(\vec{x}_i)$ el menor ordinal γ de tal forma que:

$$(\exists y \in W) \Phi_j^W(y, \vec{x}_i) \rightarrow (\exists y \in W_\gamma) \Phi_j^W(y, \vec{x}_i).$$

Sea β un ordinal límite tal que para cada $i = 0, \dots, n$,

$$(\forall \vec{x}_i \in W_\beta)(f_i(\vec{x}_i) < \beta),$$

la existencia de este β es por el Axioma de Colección, por inducción en $i = 0, \dots, n$ vamos a probar que para $\vec{x}_i \in W_\beta$,

$$\Phi_i^W(\vec{x}_i) \leftrightarrow \Phi_i^{W_\beta}(\vec{x}_i),$$

para $i = 0$ $\Phi_0^W(\vec{x}_0)$ es primitiva y se cumple trivialmente, suponga que hasta antes de i el resultado es válido, vamos a demostrar para i . Si $\Phi_i^W(\vec{x}_i)$ es de la forma $\neg \Phi_j^W(\vec{x}_j)$ o $\Phi_j^W(\vec{x}_j) \wedge \Phi_k^W(\vec{x}_k)$ la inducción es inmediata. Si $\Phi_i^W(\vec{x}_i)$ es de la forma $\exists y \Phi_j^W(y, \vec{x}_i)$. Sea $\vec{x}_i \in W_\beta$ y suponga que $\Phi_i^W(\vec{x}_i)$; entonces:

$$(\exists y \in W) \Phi_j^W(y, \vec{x}_i),$$

como $f_i(\vec{x}_i) < \beta$, $(\exists y \in W_\beta) \Phi_j^W(y, \vec{x}_i)$. Por hipótesis de inducción, si $y, \vec{x}_i \in W_\beta$ sucede $\Phi_j^W(y, \vec{x}_i) \leftrightarrow \Phi_j^{W_\beta}(y, \vec{x}_i)$.

Ahora suponga $\Phi_i^{W_\beta}(\vec{x}_i)$, entonces

$$(\exists y \in W_\beta) \Phi_j^{W_\beta}(y, \vec{x}_i).$$

Usando la hipótesis de inducción

$$(\exists y \in W_\beta) \Phi_j^W(y, \vec{x}_i);$$

pero $W_\beta \subseteq W$, por lo tanto,

$$(\exists y \in W)\Phi_j^{W_\beta}(y, \vec{x}_i);$$

así $\Phi_i^W(\vec{x}_i)$. □

Tomando como caso particular $W_\beta = V_\beta$ tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.6.2. (*Principio de reflexión*) Sea $\Phi(\vec{v})$ una *LST*-fórmula con variables libres en $\vec{v}$, entonces la siguiente fórmula es un teorema que puede ser demostrado a partir de *ZF*:

$$(\forall \alpha)(\exists \beta > \alpha)[\text{lim}(\beta) \wedge (\forall \vec{v} \in V_\beta)[\Phi^V(\vec{v}) \leftrightarrow \Phi^{V_\beta}(\vec{v})]].$$

Sea M una clase transitiva y sea $\Phi(\vec{x})$ una *LST*-fórmula, decimos que $\Phi(\vec{x})$ es absoluta hacia abajo (D-absoluta) para M si y sólo si

$$(\forall \vec{x} \in M)(\Phi(\vec{x}) \rightarrow \Phi(\vec{x})^M).$$

$\Phi(\vec{x})$ es absoluta hacia arriba (U-absoluta) para M si y sólo si

$$(\forall \vec{x} \in M)(\Phi(\vec{x})^M \rightarrow \Phi(\vec{x})).$$

En el caso de que sucedan ambas simplemente decimos que $\Phi(\vec{x})$ es absoluta para M . La **jerarquía de Lévy** es una clasificación de las fórmulas por medio de sus cuantificadores. Una fórmula es Σ_0, Π_0 o Δ_0 , si las fórmulas son primitivas, o con cuantificadores acotados (por ejemplo de la forma $(\forall x \in y)$). Una fórmula es Σ_1 , si es de la forma $\exists y\Phi$, donde Φ es Δ_0 . Una fórmula es Π_1 , si es de la forma $\forall y\Phi$, donde Φ es Δ_0 y una fórmula es Δ_1 , si es Σ_1 y Π_1 . Se define de la misma forma las fórmulas Σ_n, Π_n y Δ_n de tal forma que por ejemplo una fórmula Σ_n si hay una fórmula Φ que es Π_{n-1} de tal forma que es de la forma $\exists y\Phi$. Como consecuencia de esto la base de las fórmulas son las Δ_0 pues una fórmula por ejemplo Π_n por un bloque de cuantificadores y al final una fórmula Δ_0 . Ahora, si tenemos una teoría T decimos que una fórmula Φ es Σ_n^T, Π_n^T o Δ_n^T si y sólo si hay una fórmula Ψ que es Σ_n, Π_n o Δ_n , respectivamente, de tal forma que

$$T \vdash \Phi \leftrightarrow \Psi.$$

Lema 1.6.3. Sea T alguna subteoría de *ZF*, sea M una clase transitiva tal que Θ^M para cada axioma Θ de T . Sea Φ cualquier fórmula de *LST*, entonces:

- i) Si Φ es Δ_0^T , entonces es absoluta (en M).
- ii) Si Φ es Σ_1^T , entonces es U-absoluta.
- iii) Si Φ es Π_1^T , entonces es D-absoluta.

iv) Si Φ es Δ_1^T , entonces es absoluta.

Demostración. i) Sea Φ una fórmula cuyas variables libres están en $\vec{v}$ y sea $\Psi(\vec{v})$ una Σ_0 fórmula de LST de tal forma que $T \vdash \Phi \leftrightarrow \Psi$, como T es una subteoría de ZF se tiene que $\forall \vec{v}[\Phi \leftrightarrow \Psi]$ y entonces como para cada axioma Θ de T sucede Θ^M , entonces $[\forall \vec{v}[\Phi \leftrightarrow \Psi]]^M$; por lo tanto, $\forall \vec{v}[\Phi^M \leftrightarrow \Psi^M]$ es válido, entonces en este caso es suficiente probar el resultado para Ψ , es decir que no se pierde generalidad al pensar que Φ misma es una fórmula Δ_0 .

Si Φ es primitiva se cumple trivialmente, si Φ es de la forma $\Phi_1 \wedge \Phi_2$ o $\neg \Phi_1$ donde Φ_1 y Φ_2 cumplen el teorema, también se cumple, entonces los únicos dos casos que faltan son $(\forall x \in y)\Psi$ y $(\exists x \in y)\Psi$. Entonces suponga que $\Phi(y, \vec{v})$ es de la forma $(\exists x \in y)\Psi(x, y, \vec{v})$ y que $\Psi(x, y, \vec{v}) \leftrightarrow \Psi^M(x, y, \vec{v})$. Sean $y, \vec{v} \in M$, supóngase $\Phi^M(y, \vec{v})$, entonces $[(\exists x \in y)\Psi(x, y, \vec{v})]^M$ y para algún $x \in M$, $x \in y$ y $\Psi^M(x, y, \vec{v})$; entonces por hipótesis de inducción $\Psi(x, y, \vec{v})$ y por lo tanto $(\exists x \in y)\Psi(x, y, \vec{v})$. Ahora suponga $\Phi(y, \vec{v})$, entonces $(\exists x \in y)\Psi(x, y, \vec{v})$, por lo tanto para algún $x \in y$ $\Psi(x, y, \vec{v})$, entonces para algún $x \in y \in M$ $\Psi^M(x, y, \vec{v})$, como M es transitivo $x \in M$ y $[(\exists x \in y)\Psi(x, y, \vec{v})]^M$ que es $\Phi(y, \vec{v})$. El caso $(\forall x \in y)\Psi(x, y, \vec{v})$ es análogo.

ii) Como en la parte i) sin pérdida de generalidad suponga $\Phi(\vec{v})$ es Σ_1 . Sea $\Phi = \Phi(\vec{v}) = \exists \vec{u}\Psi(\vec{u}, \vec{v})$, donde $\Psi(\vec{v})$ es una fórmula Δ_0 . Supóngase $\Phi^M(\vec{v})$ donde $\vec{v} \in M$. Entonces para algún $\vec{u} \in M$ $\Psi^M(\vec{u}, \vec{v})$, por i) entonces $\Psi(\vec{u}, \vec{v})$ y entonces $\exists \vec{u}\Psi(\vec{u}, \vec{v})$, es decir $\Phi(\vec{v})$.

iii) Suponga $\Phi(\vec{v})$ es Π_1 , sea $\Phi = \Phi(\vec{v}) = \forall \vec{u}\Psi(\vec{u}, \vec{v})$ donde $\Psi(\vec{v})$ es una fórmula Δ_0 . Supóngase $\Phi^M(\vec{v})$ donde $\vec{v} \in M$. Entonces para todo $\vec{u} \in M$ $\Psi^M(\vec{u}, \vec{v})$, por i) entonces $\Psi(\vec{u}, \vec{v})$ y entonces $[\forall \vec{u}\Psi(\vec{u}, \vec{v})]^M$, es decir $\Phi^M(\vec{v})$.

iv) Por ii) y iii). □

Como se verá más adelante, muchas fórmulas que serán de gran utilidad pueden ser escritas como una fórmula Δ_0 , Δ_1 , Σ_1 o Π_1 . Entonces, si tenemos una clase transitiva M y una subclase transitiva N podemos saber si una fórmula es absoluta, absoluta hacia arriba o hacia abajo.

Lema 1.6.4. Las siguientes fórmulas son Δ_0 :

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1. $x = y$. | 5. $y = (x_1, \dots, x_n)$. |
| 2. $x \in y$. | 6. $y = (x)_i^n$ para $i = 0, \dots, n-1$. |
| 3. $x \subseteq y$. | 7. $y = x \cup z$. |
| 4. $y = \{x_1, \dots, x_n\}$. | 8. $y = x \cap z$. |

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 9. $y = \bigcap x$. | 20. $y = x \times z$. |
| 10. $y = \bigcup x$. | 21. $y = x^{-1}$. |
| 11. $y = x - z$. | 22. $y = x \cup \{x\}$. |
| 12. x es una n -ada. | 23. $On(x)$. |
| 13. x es una relación en y . | 24. $lim(x)$. |
| 14. x es una función. | 25. $succ(x)$. |
| 15. $y = dom(x)$. | 26. x es un número natural. |
| 16. $y = ran(x)$. | 27. x es una sucesión. |
| 17. $y = x(z)$. | 28. $x : y \longrightarrow z$. |
| 18. $y = ran(R \upharpoonright z) = x''z$. | 29. $x : y \longleftrightarrow z$. |
| 19. $y = x \upharpoonright z$. | |

Ahora un ejemplo de una fórmula Σ_1 .

Lema 1.6.5. *La fórmula “ x es finito” es Σ_1 .*

Demostración.

$$x \text{ es finito} \leftrightarrow \exists n \exists f [n \text{ es un número natural} \wedge f : n \longleftrightarrow x].$$

□

Lema 1.6.6. *Sea T una LST-teoría, sea Φ y Ψ dos LST-fórmulas, entonces:*

- i) *Si Φ y Ψ son Δ_0^T también lo son $\Phi \wedge \Psi$ y $\neg\Phi$.*
- ii) *Si Φ es Σ_n^T entonces $\neg\Phi$ es Π_n^T ; Si Φ es Π_n^T entonces $\neg\Phi$ es Σ_n^T .*
- iii) *Φ es Δ_n^T si y sólo si $\neg\Phi$ y Φ son fórmulas Σ_n^T .*
- iv) *Si Φ y Ψ son Σ_n^T también lo son $\Phi \wedge \Psi$, $\neg\Phi$, $\exists x \Psi$ y $(\exists x \in z) \Psi$.*
- v) *Si Φ y Ψ son Π_n^T también lo son $\Phi \wedge \Psi$, $\neg\Phi$, $\forall x \Psi$ y $(\forall x \in z) \Psi$.*
- vi) *Si Φ y Ψ son Δ_n^T también lo son $\Phi \wedge \Psi$ y $\neg\Phi$.*
- vii) *$m < n \rightarrow \Sigma_n^T, \Pi_n^T \subseteq \Delta_n^T$.*

Una noción muy importante es la de ser bien fundado. El siguiente lema convierte esta noción en una LST-fórmula.

Lema 1.6.7. *La fórmula $WF(x, y) \leftrightarrow$ “ x es una relación bien fundada en y ” es Δ_1^T .*

Demostración. Primero para decir que “ x es una relación binaria en y ”, la siguiente LST-fórmula dice eso:

$$\Theta(x, y) = (\forall z \in x)(z = (a, b) \wedge a \in y \wedge b \in y).$$

Sea E una relación sobre un conjunto X entonces la fórmula que dice que E una relación bien fundada es:

$$\forall A [A \subseteq X \wedge A \neq \emptyset \rightarrow (\exists a \in A)(\forall x \in A) \neg (xEa)].$$

Esta es Π_1 , para mostrar una equivalencia Σ_1 note que E es una relación bien fundada sobre X si y sólo si:

$$\exists f[f : X \longrightarrow On \wedge (\forall x, y \in X)(xEy \rightarrow f(x) < f(y))].$$

En esta equivalencia se usa el principio de recursión y es claro que esta fórmula es Σ_1 ; por lo tanto, ser bien fundado es una proposición Δ_1 . $\square$

Dada una LST -fórmula $\Phi(y, \vec{z})$, se denota $\Psi((x)_0, \vec{z})$ como la siguiente LST -fórmula:

$$(\exists u \in x)(\exists a \in u)(\exists b \in u)[x = (a, b) \wedge \Psi(a, \vec{z})],$$

similarmente para $\Psi((x)_1, \vec{z})$.

Corolario 1.6.8. *Si $\Psi(x, \vec{z})$ es una fórmula Δ_0 entonces también son Δ_0 $\Psi((x)_0, \vec{z})$ y $\Psi((x)_1, \vec{z})$.*

Lema 1.6.9. *(Contracción de Cuantificadores) Sea T cualquier LST -teoría y que incluya el Axioma del Conjunto Vacío y el Axioma del Conjunto Par (considerando que el Axioma del Par es una consecuencia de el Axioma del conjunto Potencia y el Esquema de Comprensión, se debilita la teoría al sólo pedir que cumpla el Axioma del Par), entonces:*

- i) Sea $n \geq 1$ y sea $\Psi(\vec{z})$ una fórmula Σ_n . Entonces hay una fórmula $\Psi(\vec{x}, \vec{z})$ Δ_0 de tal forma que:*

$$T \vdash \Phi(\vec{z}) \leftrightarrow \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \cdots - x_n \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n, \vec{z}).$$

- ii) Sea $n \geq 1$ y sea $\Psi(\vec{z})$ una fórmula Π_n . Entonces hay una fórmula $\Psi(\vec{x}, \vec{z})$ Δ_0 de tal forma que:*

$$T \vdash \Phi(\vec{z}) \leftrightarrow \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \cdots - x_n \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n, \vec{z}).$$

Demostración. Sólo se va a probar el inciso *i*), *ii*) se demuestra de la misma forma. Considérese el caso $n = 1$ entonces, una fórmula Σ_1 $\Phi(\vec{z})$ es de la forma $\exists y_1 \exists y_2 \dots \exists y_m \Theta(y_1, \dots, y_m, \vec{z})$, donde $\Theta(y_1, \dots, y_m, \vec{z})$ es Δ_0 . Si $m = 1$ no hay nada que probar, suponga $m = 2$, (cualquier caso $m > 2$ sigue los mismos argumentos) Sea $\Psi(x, \vec{z})$ la siguiente fórmula:

$$(x \text{ es un par ordenado}) \wedge \Theta((x)_0, (x)_1, \vec{z}),$$

por el corolario 1.6.8, esta fórmula es Δ_0 y entonces para cualquier T que tenga el axioma del Par y el Axioma del Conjunto Vacío

$$T \vdash \Phi(\vec{z}) \leftrightarrow \exists x \Psi(x, \vec{z}).$$

Para $n = 1$ *ii*) se demuestra de la misma forma, así que podemos suponer inductivamente que para antes de n el teorema es cierto, hay que mostrar para $n + 1$. Esta vez probaremos *ii*), *i*) es una demostración casi idéntica. Sea $\Phi(\vec{z})$ una fórmula Π_{n+1} entonces existe una fórmula $\Psi(y_1, \dots, y_m, \vec{z})$ que es Σ_n tal que $\Phi(\vec{z}) = \forall y_1 \dots \forall y_m \Psi(y_1, \dots, y_m, \vec{z})$ y por hipótesis de inducción existe una fórmula Δ_0 de tal forma que

$$\Phi(\vec{z}) = \forall y_1 \dots \forall y_m \exists t_1 \forall t_2 \dots - t_n \Theta(y_1, \dots, y_m, t_1, \dots, t_n, \vec{z})$$

y por el lema 1.6.6 la fórmula

$$(x \text{ es una } m - \text{tupla}) \wedge \exists t_1 \forall t_2 \dots - t_n \Theta((x)_1, \dots, (x)_m, t_1, \dots, t_n, \vec{z})$$

es Σ_n , entonces

$$T \vdash \Phi(\vec{z}) \leftrightarrow \forall x \exists t_1 \forall t_2 \dots - t_n \Theta((x)_1, \dots, (x)_m, t_1, \dots, t_n, \vec{z}).$$

□

Para terminar esta sección es importante notar que con estos teoremas podemos crear fórmulas e indicar rápidamente en qué nivel de la jerarquía de Lévy se encuentran. Si creamos fórmulas en bloques separados por los conectivos lógicos, sólo es necesario identificar cuál es la fórmula que está más lejana en la jerarquía y ese sería el nivel de la fórmula.

Lema 1.6.10.

- i)* Si Φ es una LST-fórmula Σ_n , entonces $(\forall x \in y)\Phi$ es Σ_n^{ZF} .
- ii)* Si Φ es una LST-fórmula Π_n , entonces $(\exists x \in y)\Phi$ es Π_n^{ZF} .

Demostración. Probaremos *i)* y *ii)* al mismo tiempo. Para $n = 0$ no hay nada que probar. Suponga que para n el teorema es válido, entonces probaremos *i)* y *ii)* para $n + 1$.

i) Sea Φ una fórmula Σ_{n+1} por el lema 1.6.9 hay una fórmula Ψ que es Π_n de tal forma que $ZF \vdash \Phi \leftrightarrow \exists z \Psi$. Entonces $ZF \vdash (\forall x \in y)\Phi \leftrightarrow (\forall x \in y)\exists z \Psi$.

Entonces por el Axioma de Colección,

$$ZF \vdash (\forall x \in y)\exists z \Psi \leftrightarrow \exists u(\forall x \in y)(\exists z \in u)\Psi;$$

consecuentemente

$$ZF \vdash (\forall x \in y)\Phi \leftrightarrow \exists u(\forall x \in y)(\exists z \in u)\Psi.$$

Por hipótesis de inducción $(\exists z \in u)\Psi$ es Π_n^{ZF} . Entonces usando el lema 1.6.6 $(\forall x \in y)(\exists z \in u)\Psi$ es Π_n^{ZF} , por lo tanto $\exists u(\forall x \in y)(\exists z \in u)\Psi$ es Σ_{n+1}^{ZF} . Lo cual significa que $(\forall x \in y)\Psi$ es Σ_{n+1}^{ZF} .

ii) Ahora suponga que Φ es Π_{n+1} , entonces $\neg\Phi$ es Σ_{n+1}^{ZF} . Por el inciso anterior $(\forall x \in y)\neg\Phi$ es Σ_{n+1}^{ZF} , entonces $\neg(\exists x \in y)\Phi$ es Σ_{n+1}^{ZF} y por lo tanto $(\exists x \in y)\Phi$ es Π_{n+1}^{ZF} . $\square$

1.7 Cerrados y no acotados

Definición 1.7.1. Sea α un ordinal límite, y sea f una función de un ordinal β menor o igual que α , y $f : \beta \rightarrow \alpha$ creciente de tal forma que el $\sup\{f(\delta) : \delta \in \beta\} = \alpha$, entonces β es la cofinalidad de α si β es el mínimo ordinal que cumple estas hipótesis.

Definición 1.7.2. Un cardinal κ es regular si su cofinalidad (abreviada $cf(\kappa)$) es igual a κ . Un cardinal es singular en otro caso.

Definición 1.7.3. Sea α un ordinal límite, $A \subseteq \alpha$ es no acotado si y sólo si

$$(\forall \nu \in \alpha)(\exists \tau \in A)(\tau \geq \nu).$$

Definición 1.7.4. Un conjunto $A \subseteq \alpha$ es cerrado si y sólo si $cld(A, \alpha)$ que es

$$(\forall \beta \in \alpha)[(lim(\beta)) \wedge (\sup\{\gamma \cap A : \gamma < \beta\} = \beta) \rightarrow \beta \in A].$$

Un conjunto es cerrado y no acotado (abreviado en textos matemáticos casi siempre como “club”) si cumple las dos definiciones anteriores.

Definición 1.7.5. Sea κ un cardinal, y $f : \kappa \rightarrow \kappa$ una función creciente (es decir $f(\alpha) \leq f(\alpha + 1)$), f es normal si para todo ordinal límite menor que κ sucede que

$$f(\delta) = \bigcup_{\beta < \delta} f(\beta).$$

Teorema 1.7.6. Sea κ un cardinal no numerable y regular, entonces la intersección de menos que κ clubs es club.

Demostración. Primero hay que ver que la intersección de dos clubs es club. Sean C y D clubs, y sea una sucesión $\{\alpha_\delta : \delta < \lambda\}$ de tal forma que está contenida en $C \cap D$, entonces en particular está contenida en C y D y entonces el límite de esta sucesión está en C y D y por lo tanto en $C \cap D$. Para ver que es no acotado considere la siguiente sucesión:

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < \dots$$

de tal forma que $\alpha_0, \dots, \alpha_{2n}$ sean elementos de C y $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+1}$ sean elementos de D , sea β el límite de la sucesión $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < \dots$ entonces $\beta \in C$ y $\beta \in D$ por lo tanto $\beta \in C \cap D$.

Para el caso general se va a demostrar por inducción sobre $\gamma < \kappa$ que la intersección de $\langle C_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ cerrados y no acotados es cerrado y no acotado, suponga que hasta antes de γ el resultado es cierto, si γ es sucesor es como en el caso de dos clubs. El caso faltante es cuando γ es límite, entonces para cada α reemplazamos C_α por $\bigcap_{\xi \leq \alpha} C_\xi$ y obtenemos una colección de conjuntos decreciente cuya intersección es la misma. Entonces, sin pérdida de generalidad, sucede $C_0 \supseteq C_1 \supseteq \dots \supseteq C_\alpha \supseteq \dots$, por hipótesis de inducción para todo $\alpha < \gamma$ C_α es club, entonces por demostrar que $C = \bigcap_{\alpha < \gamma} C_\alpha$ es club.

Para mostrar que C es cerrado, sea $\delta < \kappa$ y $\langle \alpha_\xi : \xi < \delta \rangle$ una sucesión en C , sea η el punto límite. La sucesión está en C_α para todo $\alpha < \gamma$ y C_α es club, el punto límite de esta sucesión está en C_α para toda α y entonces $\eta \in C$.

Ahora sea $\alpha < \kappa$ vamos a construir una γ -sucesión:

$$\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_\xi < \dots \quad (\xi < \gamma)$$

como sigue:

Sea $\beta_0 \in C_0$ de tal forma que $\beta_0 > \alpha$, para cada $\xi < \gamma$ sea $\beta_\xi \in C_\xi$ de tal forma que $\beta_\xi > \sup\{\beta_\nu : \nu < \xi\}$. Sea β el punto límite de esta sucesión, como κ es regular el límite de esta sucesión existe es menor que κ . Para cada $\mu < \gamma$, β es el punto límite de la sucesión $\langle \beta_\xi : \mu \leq \xi < \delta \rangle$ y esta sucesión está en C_μ , entonces $\beta \in C$. $\square$

Lema 1.7.7. *Sea κ cardinal regular no numerable y f normal, entonces el conjunto $\{\alpha \in \kappa : f(\alpha) = \alpha\}$ es club en κ .*

Demostración. Sea

$$A = \{\alpha \in \kappa : f(\alpha) = \alpha\}.$$

Si $\gamma < \kappa$ es un punto límite de A , entonces

$$f(\gamma) = \bigcup_{\alpha < \gamma} f(\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A \cap \gamma} f(\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A \cap \gamma} \alpha = \gamma$$

(como $\bigcup(A \cap \gamma) = \gamma$). Así, $\gamma \in A$. Por lo tanto A es cerrado en κ .

Para ver que A es no acotado en κ , sea $\alpha_0 \in \kappa$ dado. Por recursión definimos $\alpha_{n+1} = f(\alpha_n)$. Sea $\alpha = \bigcup_{n < \omega} \alpha_n$. Entonces como f es normal $\alpha \geq \alpha_0$ y por continuidad

$$f(\alpha) = \bigcup_{n < \omega} f(\alpha_n) = \bigcup_{n \in \omega} f(\alpha_{n+1}) = \alpha.$$

Así, $\alpha \in A$. Por lo tanto A es no acotado en κ . $\square$

Lema 1.7.8. *Sea κ un cardinal regular no numerable, f una función normal, entonces el conjunto $A = \{f(\alpha) : \alpha < \kappa\}$ es club en κ .*

Demostración. Por lema anterior es no acotado, para ver que es cerrado sea $\langle \alpha_\xi < \kappa : \xi < \gamma \rangle$ una sucesión en A y sea β el punto límite, entonces como κ es regular $\beta < \kappa$. Como $\langle \alpha_\xi < \kappa : \xi < \gamma \rangle$ está en A entonces existe una sucesión $\langle \delta_\xi < \kappa : \xi < \gamma \rangle$ de tal forma que $f(\delta_\xi) = \alpha_\xi$ y $\langle \delta_\xi < \kappa : \xi < \gamma \rangle$ tiene un punto límite δ , entonces

$$\beta = \bigcup_{\xi < \gamma} \alpha_\xi = \bigcup_{\xi < \gamma} f(\delta_\xi) = f(\delta),$$

por lo tanto $\beta \in A$ y con todo A es club. $\square$

Para definir con Lógica de primer orden si un conjunto es club es posible con la fórmula $club(A, \alpha)$ que es

$$cld(A, \alpha) \wedge [(\forall \nu \in \alpha)(\exists \tau \in A)(\tau \geq \nu)].$$

Corolario 1.7.9. *“ C es club” es una LST-fórmula Δ_0 .*

Un concepto más débil de club es la noción de estacionario.

Definición 1.7.10. Sea κ un cardinal regular no numerable, entonces $S \subseteq \kappa$ es estacionario en κ si y sólo si sucede:

$$\forall x (club(x, \kappa) \wedge \neg(x \cap S = \emptyset)).$$

Corolario 1.7.11. *“ S es estacionario” es una LST-fórmula Σ_1 .*

Capítulo 2

El lenguaje $\mathcal{L}_V$

Junto con el lenguaje LST ahora se desarrollará un análogo que incluye además del mismo lenguaje LST a cada uno de los conjuntos en V como constantes individuales, el cual se denota $\mathcal{L}_V$ para indicar la presencia de estas constantes. También se utiliza para denotar sublenguajes $\mathcal{L}_X$ donde X es un conjunto arbitrario y la presencia de las constantes son sólo las que aparecen en X .

Cabe destacar que todo el desarrollo de $\mathcal{L}_V$ tiene lugar dentro de la Teoría de conjuntos, en particular, todos los “símbolos” y las “fórmulas” de $\mathcal{L}_V$ serán conjuntos. Nosotros exigiremos a las diversas nociones sintácticas y semánticas de $\mathcal{L}_V$, de ser posible, que tengan ciertas propiedades referentes a Σ_1 , Π_1 o Δ_1 . Este será el objetivo de este capítulo.

2.1 Fórmulas

Se va a trabajar libremente entre los conceptos $\mathcal{L}_V$ y LST , para ello las fórmulas que se usarán al menos en esta sección serán diferenciadas como lo hace [3] tomando letras griegas ϕ , φ o ψ para referirse al lenguaje $\mathcal{L}_V$ y Φ , Ψ y Θ para referirse a las fórmulas LST .

Es importante notar que una fórmula es sólo una sucesión finita de elementos cuyo dominio es un número natural y el rango son los símbolos de la Lógica de primer orden, de acuerdo a esto es posible notar que podemos tratar los símbolos lógicos como cadenas de naturales visto como sigue:

$$\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle,$$

esto es una función de dominio $\{0, 1, \dots, n-1\}$ y valores $x_0, \dots, x_{n-1}$. Así es posible tomar dos sucesiones finitas digamos s y t y definir una nueva sucesión finita que es la concatenación de s y t denotada por $s \frown t$ que es $\langle x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{m-1} \rangle$. Para precisar los elementos x_n y y_n que son elementos de $\mathcal{L}$ definimos un valor para los símbolos del lenguaje según la siguiente tabla.

(	)	v_n	$\overset{\circ}{x}$	$\in$	$=$	$\wedge$	$\neg$	$\exists$
0	1	(2,n)	(3, $\overset{\circ}{x}$)	4	5	6	7	8

Donde v_n son las variables y $\overset{\circ}{x}$ son las constantes individuales del lenguaje. También es posible definir cuando un símbolo es una constante, una variable o una fórmula primitiva de la siguiente forma:

- $Const(x) \leftrightarrow [x \text{ es un par ordenado}] \wedge [(x)_0 = 3]$.
- $Vbl(x) \leftrightarrow [x \text{ es un par ordenado}] \wedge [(x)_0 = 2] \wedge [(x)_1 \text{ es un número natural}]$.
- $x \in y$ es $\langle 0, x, 4, y, 1 \rangle$.
- $x = y$ es $\langle 0, x, 5, y, 1 \rangle$.

Donde estos dos últimos es posible escribir ambos casos en una fórmula:

$$PFml(x) \leftrightarrow [x \text{ es una función}] \wedge [dom(x) = 5] \wedge [x(0) = 0] \\ \wedge [Vbl(x(1)) \vee Const(x(1))] \wedge [x(1) = 4 \vee x(2) = 5] \\ \wedge [Vbl(x(3)) \vee Const(x(3))] \wedge [x(4) = 1].$$

$Vbl(x)$ dice que x es una variable, $Const(x)$ dice que x es una constante y $PFml(x)$ dice que x es una fórmula primitiva. En la construcción de estas fórmulas se nota que se usa fórmulas del teorema 1.6.4 y cada uno de los bloques separados por el conectivo $\wedge$ son Δ_0 entonces el siguiente resultado es inmediato.

Corolario 2.1.1. *Las LST-fórmulas $Vbl(x)$, $Const(x)$ y $PFml(x)$ son fórmulas Δ_0 .*

El resto de los esquemas lógicos son construidos a partir de las fórmulas primitivas, entonces las demás fórmulas serían de la siguiente forma:

- $(\varphi \wedge \psi) = \langle 0 \rangle \frown \varphi \frown \langle 6 \rangle \frown \psi \frown \langle 1 \rangle$.
- $(\neg \psi) = \langle 0, 7 \rangle \frown \psi \frown \langle 1 \rangle$.
- $(\exists u \psi) = \langle 0, 8, 2 \rangle \frown \psi \frown \langle 1 \rangle$.

Se crearán algunas fórmulas que dirán si una cadena de caracteres es una sucesión finita.

Lema 2.1.2. *La LST-fórmula $Finseq(x)$ que dice “ x es una sucesión finita” es Δ_0 .*

Demostración. La siguiente fórmula es Δ_0 y dice que x es una sucesión finita
 $[x \text{ es una sucesión}] \quad \wedge [(\forall u \in \text{dom}(x))(u \text{ es un número natural})]$
 $\quad \wedge [(\exists u \in \text{dom}(x))(\forall v \in \text{dom}(x))(u \in v \vee u = v)].$

La cual por lema 1.6.4 es Δ_0 . $\square$

Las siguientes son LST -fórmulas que describen la construcción de las fórmulas de $\mathcal{L}_V$.

Lema 2.1.3. *Suponga x, y son variables o constantes, si φ, ψ son fórmulas entonces hay Δ_0 fórmulas $F_{\in}(\Theta, x, y)$, $F_{=}(\Theta, x, y)$, $F_{\wedge}(\Theta, \varphi, \psi)$, $F_{\neg}(\Theta, \varphi)$ y $F_{\exists}(\Theta, u, \varphi)$ tales que:*

- i) $F_{\in}(\Theta, x, y) \leftrightarrow \Theta$ es la $\mathcal{L}_V$ fórmula $(x \in y)$.
- ii) $F_{=}(\Theta, x, y) \leftrightarrow \Theta$ es la $\mathcal{L}_V$ fórmula $(x = y)$.
- iii) $F_{\wedge}(\Theta, \varphi, \psi) \leftrightarrow \Theta$ es la $\mathcal{L}_V$ fórmula $\varphi \wedge \psi$.
- iv) $F_{\neg}(\Theta, \varphi) \leftrightarrow \Theta$ es la $\mathcal{L}_V$ fórmula $\neg\varphi$.
- v) $F_{\exists}(\Theta, u, \varphi) \leftrightarrow \Theta$ es la $\mathcal{L}_V$ fórmula $\exists u\varphi$.

Demostración. Sea $\|s\| = \text{dom}(\Theta - 1)$, para cada caso crearemos una fórmula Δ_0 .

- i) Sea $F_{\in}(\Theta, x, y)$ la siguiente LST -fórmula.
 $[Finseq(\Theta)] \quad \wedge [\text{dom}(\Theta) = 5] \wedge [\Theta(0) = 0] \wedge [\Theta(1) = 4] \wedge [\Theta(2) = x]$
 $\quad \wedge [\Theta(3) = y] \wedge [\Theta(4) = 1].$
- ii) Sea $F_{=}(\Theta, x, y)$ la siguiente LST -fórmula.
 $[Finseq(\Theta)] \quad \wedge [\text{dom}(\Theta) = 5] \wedge [\Theta(0) = 0] \wedge [\Theta(1) = 5] \wedge [\Theta(2) = x]$
 $\quad \wedge [\Theta(3) = y] \wedge [\Theta(4) = 1].$
- iii) Sea $F_{\wedge}(\Theta, \varphi, \psi)$ la siguiente LST -fórmula.
 $[Finseq(\Theta)] \quad \wedge [Finseq(\varphi)] \wedge [Finseq(\psi)]$
 $\quad \wedge [\text{dom}(\Theta) = \text{dom}(\varphi) + \text{dom}(\psi) + 3] \wedge [\Theta(0) = 0]$
 $\quad \wedge [\Theta(\text{dom}(\varphi)) = 6] \wedge [\Theta(\|\Theta\|) = 1]$
 $\quad \wedge (\forall i \in \text{dom}(\varphi))[\varphi(i) = \Theta(i + 1)]$
 $\quad \wedge (\forall i \in \text{dom}(\psi))[\psi(i) = \Theta(\text{dom}(\varphi) + i + 2)].$
- iv) Sea $F_{\neg}(\Theta, \varphi)$ la siguiente LST -fórmula.
 $[Finseq(\Theta)] \quad \wedge [Finseq(\varphi)] \wedge [\text{dom}(\Theta) = \text{dom}(\varphi) + 3]$
 $\quad \wedge [\Theta(0) = 0] \wedge [\Theta(1) = 7] \wedge [\Theta(\|\Theta\|) = 1]$
 $\quad \wedge (\forall i \in \text{dom}(\varphi))[\varphi(i) = \Theta(i + 2)].$
- v) Sea $F_{\exists}(\Theta, u, \varphi)$ la siguiente LST -fórmula.
 $[Finseq(\Theta)] \quad \wedge [Finseq(\varphi)] \wedge [\text{dom}(\Theta) = \text{dom}(\varphi) + 4]$
 $\quad \wedge [\Theta(0) = 0] \wedge [\Theta(1) = 8] \wedge [\Theta(2) = u] \wedge [\Theta(\|\Theta\|) = 1]$
 $\quad \wedge (\forall i \in \text{dom}(\varphi))[\varphi(i) = \Theta(i + 3)].$

Por la construcción cada una de las fórmulas anteriores están formadas por subfórmulas que son Δ_0 y por el lema 1.6.6 y el lema anterior las fórmulas son Δ_0 . $\square$

El objetivo de crear las fórmulas anteriores es tomar una fórmula φ de $\mathcal{L}_V$ notando que hay una sucesión finita de fórmulas $\psi_0, \dots, \psi_n$ de $\mathcal{L}_V$ donde $\psi_n = \varphi$ y para cada ψ_i es una fórmula primitiva o obtenida por una o dos fórmulas de la lista $\psi_0, \dots, \psi_{i-1}$ es una aplicación de las fórmulas del lema anterior. La sucesión $\psi_0, \dots, \psi_n$ describe cómo es construida la fórmula φ a partir de esta sucesión. para ello crearemos una *LST*-fórmula conocida como $Build(\varphi, \psi)$ dice que ψ es tal sucesión $\psi_0, \dots, \psi_n$, entonces la fórmula $Build(\varphi, \psi)$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} [Finseq(\psi)] \quad & \wedge [\psi_{\|\psi\|} = \varphi] \wedge (\forall i \in dom(\psi)) [PFml(\psi_i) \\ & \vee (\exists j, k \in i) F_{\wedge}(\psi_i, \psi_j, \psi_k) \vee (\exists j \in i) F_{\neg}(\psi_i, \psi_j) \\ & \vee (\exists j \in i) (\exists u \in ran(\varphi)) (Vbl(u) \wedge F_{\exists}(\psi_i, u, \psi_j))]. \end{aligned}$$

Corolario 2.1.4. *La *LST*-fórmula $Build(\varphi, \psi)$ es Δ_0 .*

Con esta fórmula $Build(\varphi, f)$ es posible decir lo siguiente:

$$\varphi \text{ es una fórmula de } \mathcal{L}_V \leftrightarrow (\exists f) Build(\varphi, f).$$

Claramente esta fórmula es Σ_1 , nuestro propósito en las secciones siguientes es analizar la complejidad lógica de las nociones sintácticas de $\mathcal{L}_V$ y probar resultados de absolutez, en el caso de las fórmulas Δ_0 es fácil pues por el lema 1.6.3 son una noción absoluta para clases transitivas. Para desarrollar estas nociones en la siguiente sección se va a abordar una teoría que es conocida como la teoría básica de conjuntos (*BS*).

2.2 La Teoría *BS*

BS es la *LST*-teoría que tiene los siguientes axiomas:

- (1) Extensionalidad: $\forall x \forall y [\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow (x = y)]$.
- (2) Esquema de inducción: $\forall \vec{a} [\forall x ((\forall y \in x) \Phi(y, \vec{a}) \rightarrow \Phi(x, \vec{a})) \rightarrow \forall x \Phi(x, \vec{a})]$, donde Φ es cualquier *LST*-fórmula con variables libres entre x y $\vec{a}$.
- (3) Par: $\forall x \forall y \exists z \forall w [(w \in z) \leftrightarrow (w = x \vee w = y)]$.
- (4) Unión: $\forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow (\forall u \in x) (z \in u)]$.
- (5) Infinito: $\exists x [On(x) \wedge (x \neq 0) \wedge (\forall y \in x) (\exists z \in x) (y \in z)]$.
- (6) Producto cartesiano: $\forall x \forall y \exists z \forall u [(u \in z) \leftrightarrow (\exists a \in x) (\exists b \in y) (u = (a, b))]$.
- (7) Δ_0 Esquema de Comprensión: $\forall \vec{a} \forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \Phi(z, \vec{a}))]$, donde $\Phi(z, \vec{a})$ es una Δ_0 *LST*-fórmula.

BS es una subteoría de ZF , pues los axiomas (1), (4) y (5) son axiomas de ZF . El Axioma de Infinito ahora da como resultado una ordinal infinito. Los axiomas (3) y (6) son un teorema de ZF y (7) es una consecuencia del Esquema de Comprensión de ZF , el axioma (2) de BS es consecuencia de el Axioma de Fundación y del Esquema de Comprensión. Con esta teoría BS demostraremos la absolutez de varias fórmulas. Con la teoría BS es posible construir todos los conjuntos finitos, es decir para cada n ,

$$BS \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \forall z [(z \in y) \leftrightarrow (z = x_1 \vee \dots \vee z = x_n)].$$

Escribiremos una LST -fórmula $Seq(u, a, n)$, que dice que u es el conjunto de todas las m -sucesiones de miembros de a para cada $m < n$. Entonces $Seq(u, a, n)$ es la siguiente fórmula:

$$(\forall x \in u)(\exists m \in n)(x \text{ es una } m\text{-sucesión de miembros de } a \\ \wedge (\forall x)(\forall m \in n)(x \text{ es una } m\text{-sucesión de miembros de } a \rightarrow x \in u)).$$

Esta fórmula es Π_1 , para poder concluir que $Seq(u, a, n)$ es una fórmula Δ_1 vamos a cambiar la definición de $Seq(u, a, n)$ para hacer una fórmula Σ_1 que más adelante podremos concluir que puede ser equivalente a una Π_1 . En la siguiente fórmula los miembros del conjunto u serán contruidos por la longitud de las sucesiones, es decir primero las sucesiones de tamaño 1, después las sucesiones de tamaño 2 y así sucesivamente, la función f enumera estos conjuntos de sucesiones finitas, entonces $Seq(u, a, n)$ es la siguiente fórmula:

$$(\exists f) [Finseq(f) \wedge (n \text{ es un número natural}) \wedge (dom(f) = n) \\ \wedge (u = \bigcup ran(f)) \wedge (\forall i \in dom(f))(\forall x \in f(i))(Finseq(x) \\ \wedge (dom(x) = i) \wedge (\forall j \in i)(x(j) \in a)) \wedge (\forall i \in dom(f)) \\ (\forall j \in i)(\forall x \in f(j))(\forall p \in a)(i = j + 1 \rightarrow x \cup \{(p, i)\} \in f(i))].$$

Lema 2.2.1. *La LST -fórmula $Seq(u, a, n)$ es Δ_1^{BS} .*

Demostración. El único cuantificador no acotado en la fórmula $Seq(u, a, n)$ es $\exists f$. De la teoría BS tenemos

$$BS \vdash (\forall a)(\forall n \in \omega)(\exists u)Seq(u, a, n).$$

Entonces

$$BS \vdash \forall a \forall n \forall u \forall v [Seq(u, a, n) \wedge Seq(v, a, n) \rightarrow u = v].$$

Por lo tanto

$$BS \vdash Seq(u, a, n) \leftrightarrow [(n \text{ es un número natural}) \wedge \forall z [Seq(z, a, n) \rightarrow z = u]].$$

Esta última fórmula dice que $Seq(u, a, n)$ es equivalente a una fórmula Π_1 ¿Cómo es esto? En la parte derecha de la doble implicación, “*nes un número natural*” es Δ_0 y $\forall z[Seq(z, a, n) \rightarrow z = u]$ es realmente $\forall z[\neg Seq(z, a, n) \vee z = u]$, entonces por *ii*) y *v*) del lema 1.6.6 es Π_1 . Este “truco” será utilizado un par de veces más adelante. $\square$

La fórmula $Fml(x)$ es la siguiente fórmula:

$$Fml(x) \leftrightarrow x \text{ es una fórmula de } \mathcal{L}_V \leftrightarrow (\exists f)Build(x, f)$$

Esta fórmula Σ_1 , pero el siguiente lema nos ayuda a crear un mejor resultado acerca de esta fórmula.

Lema 2.2.2. *La LST-fórmula $Fml(x)$ es Δ_1^{BS} .*

Demostración. Vamos a trabajar primero sobre el cuantificador $\exists f$, este elemento f , sin importar que sea, queda dentro del siguiente conjunto:

$$A(x) = \bigcup_{n \in dom(x)}^{n+1} \left[\bigcup_{m \in dom(x)}^{m+1} ran(x) \right].$$

Ya que $(\exists f)Build(x, f) \rightarrow (\exists f \in A(x))Build(x, f)$; más aún,

$$BS \vdash \forall x \exists y [y = A(x)]$$

y por lo tanto:

$$BS \vdash Fml(x) \leftrightarrow Finseq(x) \wedge \forall u \forall v [Seq(u, ran(x), dom(x) + 2) \wedge Seq(v, u, dom(x) + 2) (\exists f \in v) Build(x, f)].$$

Por la fórmula anterior hay una Π_1^{BS} -fórmula equivalente a $Fml(x)$. $\square$

Como se menciono antes dada una clase X , $\mathcal{L}_X$ es el sublenguaje de $\mathcal{L}_V$ que omite todas las constantes individuales $\dot{z}$ que cumplen que $\dot{z} \notin X$, tomando en cuenta que por convención $\mathcal{L}_\emptyset = \mathcal{L}_V$, en particular trabajaremos con sublenguajes $\mathcal{L}_u$ donde u es un conjunto, hasta ahora algunas de las fórmulas que hemos creado las modificaremos para este lenguaje $\mathcal{L}_u$. Sea $Const(x, u)$ la siguiente LST-fórmula:

$$Const(x) \wedge (x)_1 \in u.$$

Las fórmulas $PFml(x, u)$ y $Fml(x, u)$ se definen a partir de $PFml(x)$ y $Fml(x)$ respectivamente al sustituir $Const(x)$ por $Const(x, u)$ en todas las apariciones de esta fórmula. Entonces se cumple

$$Fml(x, u) \leftrightarrow x \text{ es una fórmula de } \mathcal{L}_u.$$

También es claro el siguiente resultado:

Corolario 2.2.3.

- i) Las LST-fórmulas $Const(x, u)$ y $PFml(x, u)$ son Δ_0 .
- ii) La LST-fórmula $Fml(x, u)$ es Δ_1 .

Dada una fórmula φ , vamos a comprobar si un conjunto x es el conjunto de las variables libres de φ . Una forma es concentrarse en la sucesión ψ de la fórmula $Build(\varphi, \psi)$, y continuar a través de miembros de ψ y dando seguimiento a las variables libres en cada etapa. Este enfoque lleva a la siguiente fórmula, tomamos la siguiente LST-fórmula $Fr(\varphi, x)$ que dice:

$$\begin{aligned} \exists \psi \exists f [& Build(\varphi, \psi) \wedge Finseq(f) \wedge (dom(f) = dom(\psi)) \wedge (x = f(\|f\|)) \\ & \wedge (\forall i \in dom(f)) [\exists j, k \in i] [F_{\wedge}(\psi_i, \psi_j, \psi_k) \wedge (f(i) = f(j) \cup f(k))] \\ & \vee (\exists j \in i) [F_{\neg}(\psi_i, \psi_j) \wedge (f(i) = f(j))] \\ & \vee (\exists j \in i) (\exists u \in ran(\varphi)) [Vbl(u) \wedge F_{\exists}(\psi_i, \exists, \psi_j) \wedge (f(i) = f(j) - u)] \\ & \vee [PFml(\psi_i) \wedge [[Vbl((\psi_i)_2) \wedge Vbl((\psi_i)_3) \wedge f(i) = \{(\psi_i)_2, (\psi_i)_3\}] \\ & \vee [Vbl((\psi_i)_2) \wedge Const((\psi_i)_3) \wedge f(i) = \{(\psi_i)_2\}] \\ & \vee [Const((\psi_i)_2) \wedge Vbl((\psi_i)_3) \wedge f(i) = \{(\psi_i)_3\}] \\ & \vee [Const((\psi_i)_2) \wedge Const((\psi_i)_3) \wedge f(i) = \emptyset]]]]. \end{aligned}$$

Esta fórmula, si se observa con detenimiento va pasando a través de las instancias de $Build(\varphi, \psi)$ y verifica en cada caso que es lo que pasa, si se mantiene libre o en algún momento cambia este estado.

Lema 2.2.4. La LST-fórmula $Fr(\varphi, x)$ es Δ_1^{BS} .

Demostración. La fórmula dentro de los cuantificadores $\exists \psi \exists f$ es Δ_0 , por lo tanto por definición $Fr(\varphi, x)$ es Σ_1^{BS} .

Siguiendo la forma de demostrar del lema 2.2.2 claramente:

$$BS \vdash Fr(\varphi, x) \leftrightarrow [Fml(\varphi) \wedge \forall z (Fr(\varphi, z) \rightarrow z = x)].$$

Esto nos da una equivalencia Π_1^{BS} de $Fr(\varphi, x)$. □

Ahora crearemos una LST-fórmula $Sub(\varphi', \varphi, v, t)$, que dice que φ' y φ son fórmulas de $\mathcal{L}_V$, v es una variable y φ' resulta de sustituir esta variable por t en cada aparición libre de v en φ . Para crear esta fórmula usaremos el método con el que fue construido la fórmula $Fr(\varphi, x)$ tomando la sucesión ψ que aparece en la fórmula $Build(\varphi, \psi)$, para ello vamos a sustituir en cada aparición de v la cambiaremos por t , pero al momento de que se encuentre un cuantificador con la variable v deshaga la modificación antes realizada, para poder dar una fórmula más entendible comenzaremos debilitando el objetivo y creamos la fórmula $S(\varphi', \varphi, v, t)$ que es la restricción de $Sub(\varphi', \varphi, v, t)$ a fórmulas primitivas φ . Entonces $S(\varphi', \varphi, v, t)$ es la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}
& PFml(\varphi') \wedge PFml(\varphi) \wedge Vbl(v) \wedge Const(t) \\
& \wedge [[F_=(\varphi, \varphi_2, \varphi_3) \wedge [[\varphi_2 \neq v \wedge \varphi_3 \neq v \wedge (\varphi = \varphi')] \\
& \quad [\varphi_2 = v \wedge \varphi_3 \neq v \wedge F_=(\varphi', t, \varphi_3)] \\
& \quad [\varphi_2 \neq v \wedge \varphi_3 = v \wedge F_=(\varphi', \varphi_2, t)] \\
& \quad [\varphi_2 = v \wedge \varphi_3 = v \wedge F_=(\varphi', t, t)]]] \\
& \quad \vee \\
& [F_\in(\varphi, \varphi_2, \varphi_3) \wedge [[\varphi_2 \neq v \wedge \varphi_3 \neq v \wedge (\varphi = \varphi')] \\
& \quad [\varphi_2 = v \wedge \varphi_3 \neq v \wedge F_\in(\varphi', t, \varphi_3)] \\
& \quad [\varphi_2 \neq v \wedge \varphi_3 = v \wedge F_\in(\varphi', \varphi_2, t)] \\
& \quad [\varphi_2 = v \wedge \varphi_3 = v \wedge F_\in(\varphi', t, t)]]].
\end{aligned}$$

$S(\varphi', \varphi, v, t)$ es Δ_0 y ahora usando esta fórmula podemos crear la fórmula $Sub(\varphi', \varphi, v, t)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
& Fml(\varphi') \wedge Fml(\varphi) \wedge Vbl(v) \wedge Const(t) \wedge \exists \psi \exists \theta [Build(\varphi, \psi) \\
& \wedge Finseq(\theta) \wedge (dom(\theta) = dom(\psi)) \wedge (\theta_{\parallel \theta \parallel} = \varphi') \\
& \wedge (\forall i \in dom(\psi))[(\exists j, k \in i)(F_\wedge(\psi_i, \psi_j, \psi_k) \wedge F_\wedge(\theta_i, \theta_j, \theta_k)) \\
& \vee (\exists j \in i)(F_\neg(\psi_i, \psi_j) \wedge F_\neg(\theta_i, \theta_j)) \\
& \vee (\exists j \in i)(\exists u \in ran(\varphi))(Vbl(u) \wedge (u \neq v) \\
& \wedge F_\in(\psi_i, u, \psi_j) \wedge F_\exists(\theta_i, u, \theta_j)) \\
& \vee (\exists j \in i)(F_\exists(\psi_i, u, \psi_j) \wedge (\theta_i = \psi_i)) \\
& \vee S(\theta_i, \psi_i, v, t)]]].
\end{aligned}$$

Esta es una fórmula Σ_1 , más aún podemos tener el siguiente resultado.

Lema 2.2.5. *La LST-fórmula $Sub(\theta_i, \psi_i, v, t)$ es Δ_1^{BS} .*

Demostración. Una vez más como en el lema 2.2.2 claramente:

$$BS \vdash Sub(\varphi', \varphi, v, t) \leftrightarrow Fml(\varphi) \wedge Vbl(v) \wedge Const(t) \wedge \forall \psi [Sub(\psi, \varphi, v, t) \rightarrow \psi = \varphi'],$$

entonces hay una equivalencia Π_1^{BS} de $Sub(\varphi', \varphi, v, t)$. $\square$

Estas fórmulas son de utilidad para simplificar las fórmulas que se verán en el siguiente capítulo.

2.3 Satisfacción

Hasta la sección anterior se prepararon las fórmulas necesarias para definir la noción de satisfacción para lenguajes $\mathcal{L}_u$, crearemos la LST-fórmula $Sat(u, \varphi)$ cuya definición debe decir:

$Sat(u, \varphi) \leftrightarrow \varphi$ es una fórmula de $\mathcal{L}_u$ la cual es cierta en la estructura $\langle u, \in \rangle$ bajo la interpretación $\dot{x}$ para cada x en u .

Para ver si una función es o no satisfacible vamos a crear dos funciones f y g de dominio ω , $f(0)$ serán todas las fórmulas primitivas de $\mathcal{L}_u$ (es decir $\dot{x} \in \dot{y}$ o $\dot{x} = \dot{y}$) y $f(i+1)$ es el conjunto de todas las fórmulas de $\mathcal{L}_u$ que son obtenidas de las fórmulas de $f(i)$ por una sola aplicación de uno de los 3 esquemas de construcción de fórmulas (las fórmulas $F_{\in}$, $F_{\wedge}$ y $F_{\neg}$). La segunda función, la función $g(i)$ es el conjunto de todas las fórmulas en $f(i)$ que no tienen variables libres y que además son verdaderas en $\langle u, \in \rangle$ esta segunda función g se usa para manejar la negación de una fórmula al pasar de $g(i)$ a $g(i+1)$. La fórmula $Sat(u, \varphi)$ será obtenida considerando el proceso anterior y para un paso suficientemente lejano ver si φ está o no en $g(i)$, cuando i es de tal forma que $\varphi \in f(i)$.

Primero como en el caso de $Sub(\varphi', \varphi, v, t)$ crearemos una fórmula que es como $Sat(u, \varphi)$ pero para fórmulas primitivas, esta LST -fórmula es $St(\varphi, u)$ que dice:

$$(\exists x, y \in u)[(x \in y) \wedge F_{\in}(\varphi, \dot{x}, \dot{y})] \vee (\exists x \in u)(\exists x \in ran(\varphi))(y = \dot{x} \wedge F_{=}(\varphi, y, y)).$$

$St(\varphi, u)$ es Δ_0 , ahora antes de la fórmula $Sat(u, \varphi)$ crearemos otra que básicamente es $Sat(u, \varphi)$, entonces sea $S(u, \varphi)$ la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} & (u \neq \emptyset) \wedge Fml(\varphi, u) \wedge \exists f \exists g [Finseq(f) \wedge Finseq(g) \wedge (dom(f) = dom(g)) \\ & \wedge (\varphi \in g(\|g\|)) \wedge \forall \psi (\psi \in f(0) \leftrightarrow PFml(\psi, u)) \wedge \forall \psi (\psi \in g(0) \leftrightarrow St(\psi, u)) \\ & \wedge (\forall j \in dom(f)) (\forall i \in j) (\forall \psi) [\psi \in f(i+1) \leftrightarrow (\psi \in f(i)) \\ & \vee (\exists \theta, \theta' \in f(i)) F_{\wedge}(\varphi, \theta, \theta') \vee (\exists \theta \in f(i)) F_{\neg}(\psi, \theta) \\ & \vee (\exists \theta \in f(i)) (\exists v \in ran(\psi)) (Vbl(v) \wedge F_{\in}(\psi, v, \theta))] \\ & \vee (\forall j \in dom(g)) (\forall i \in j) (\forall \psi) [\psi \in g(i+1) \leftrightarrow (\psi \in g(i)) \\ & \vee (\exists \theta, \theta' \in g(i)) F_{\wedge}(\psi, \theta, \theta') \vee (\exists \theta \in f(i)) (\theta \notin g(i) \wedge F_{\neg}(\psi, \theta)) \\ & \vee (\exists \theta \in f(i)) (\exists u \in ran(\psi)) (\exists x \in u) (\exists \theta' \in g(i)) [Vbl(v) \\ & \wedge F_{\exists}(\psi, v, \theta) \wedge Sub(\theta', \theta, v, \dot{x})]]]. \end{aligned}$$

La fórmula anterior es la fórmula para comprobar la satisfacción de una fórmula φ en la estructura $\langle u, \in \rangle$, sin embargo esta fórmula es mayor a Σ_1 . Ahora vamos a acotar los cuantificadores, para ello es necesario considerar el conjunto:

$$\begin{aligned} w(u, \varphi) = & (\bigcup_{m \in dom(\varphi)}^{m+1} [9 \cup \{v_i : i \in \omega\} \cup \{\dot{x} : x \in u\}]) \\ & \cup (\bigcup_{m \in dom(\varphi)}^{m+1} [\bigcup_{m \in dom(\varphi)}^{m+1} [9 \cup v_i : i \in \omega] \cup \{\dot{x} : x \in u\}])). \end{aligned}$$

En el primer conjunto incluye todas las fórmulas de longitud a lo más la longitud de φ y la segunda parte del conjunto incluye todas las sucesiones finitas cuyo dominio es a lo más $dom(\varphi)$. La fórmula $S'(u, \varphi, w)$ es la fórmula obtenida de acotar con w

a todos los cuantificadores no acotados de la fórmula $S(u, \varphi)$ (es decir, que en la fórmula $S(u, \varphi)$, por ejemplo, hay un cuantificador de la forma $\exists f$, entonces este se cambia por $\exists f \in w$). Entonces la fórmula $Sat(u, \varphi)$ es la siguiente LST -fórmula:

$$\begin{aligned} \exists w \exists x \exists y \exists a \exists b \exists t [& (a = \{\dot{x} : x \in u\}) \wedge ("t = \omega") \wedge (b = \{v_i : i \in t\}) \\ & \wedge Seq(x, 9 \cup a \cup b, dom(\varphi) + 1) \wedge Seq(y, x, dom(\varphi) + 1) \\ & \wedge (w = x \cup y) \wedge S'(u, \varphi, w)]. \end{aligned}$$

Aquí la parte de la fórmula que dice " $t = \omega$ " puede ser escrito por la siguiente fórmula Δ_0 :

$$On(t) \wedge Lim(t) \forall (i \in t) [(\exists j \in i)(i = j + 1) \vee (\forall j \in i)(i \neq j)].$$

Entonces la fórmula $Sat(u, \varphi)$ es la fórmula que dice que una fórmula φ es satisfacible en la estructura $\langle u \in \rangle$. Los únicos cuantificadores no acotados en $Sat(u, \varphi)$ son los que aparecen al principio de la fórmula, y dentro del paréntesis es una fórmula Δ_0 , entonces es claramente Σ_1 . Este método es muy utilizado para disminuir la complejidad de las fórmulas.

Lema 2.3.1. *La LST -fórmula $Sat(u, \varphi)$ es Δ_1^{BS} .*

Demostración.

$$[\neg[Fml(\varphi, u) \wedge Fr(\varphi, \emptyset)] \vee \exists \theta [F_{\neg}(\theta, \varphi) \wedge Sat(u, \theta)]] \rightarrow \neg Sat(u, \varphi).$$

Entonces $\neg Sat(u, \varphi)$ es Σ_1^{BS} , por lo tanto por el lema 1.6.6 $Sat(u, \varphi)$ es Δ_1^{BS} . $\square$

Usualmente denotamos $\models_u \varphi$ para expresar la fórmula $Sat(u, \varphi)$. Los siguientes resultados son para contrastar las nociones de LST y $\mathcal{L}_u$, también para dar una noción genuina de satisfacción. De esta manera el lenguaje $\mathcal{L}_u$ tiene como constantes individuales a los elementos del conjunto u (o más general una clase) y el lenguaje LST consta de las fórmulas que pueden escribirse teniendo en el lenguaje la relación $\in$. Entonces el siguiente resultado nos da una prueba de que nuestra noción $Sat(u, \varphi)$ es en realidad una noción real de satisfacción.

Lema 2.3.2. *Sea $\Phi(v_0, \dots, v_n)$ cualquier LST -fórmula y sea $\varphi(v_0, \dots, v_n)$ su contraparte en $\mathcal{L}_V$, entonces:*

$$ZF \vdash \forall u (\forall x_0 \in u) \dots (\forall x_n \in u) [\Phi^u(x_0, \dots, x_n) \leftrightarrow Sat(u, \varphi(\dot{x}_0 \dots \dot{x}_n))].$$

Demostración. Antes de comenzar es muy importante recordar algunas cosas, se denota por φ a las fórmulas de $\mathcal{L}$ y Φ a la fórmula que es la contraparte de φ en LST . $Sat(u, \varphi)$ es la fórmula que se obtiene al acotar $S(u, \varphi)$ para que pueda ser

Δ_1 , sin embargo $S(u, \varphi)$ es la fórmula que analiza si φ es verdadera en la estructura $\langle u, \in \rangle$. La fórmula $S(u, \varphi)$ concluye si φ es satisfacible, o no en casos. El primer caso es $St(u, \varphi)$, que es cuando la fórmula es primitiva. Los demás casos los va tomando a través de la construcción de las fórmulas. Para esto, la fórmula utiliza dos funciones f y g , $f(n+1)$ son las fórmulas que se obtienen de $f(n)$ por construcción a partir de los esquemas lógicos, y $g(n)$ son las fórmulas que son satisfacibles en $\langle u, \in \rangle$. Si hay un n tal que $\varphi \in g(n)$ entonces para todo m tal que $n \leq m$ $\varphi \in g(m)$.

Para la demostración de este teorema se va a tratar de localizar φ en $g(n)$, para algún n . La demostración es por inducción en la formación de Φ^u (o en su contraparte φ).

Caso *I*, Φ^u es atómica. En este caso Φ^u es de la forma $(x \in y)^u$ o $(x = y)^u$, ambos casos son casi idénticos. Entonces dado $x, y \in u$ probaremos

$$[x \in y]^u \leftrightarrow Sat(u, \dot{x} \in \dot{y}),$$

suponga $[x \in y]^u$, por lo tanto $x, y \in u$ son tal que $x \in y$, así $\dot{x} \in \dot{y}$ y entonces $St(u, \varphi)$, por lo tanto $Sat(u, \varphi)$.

Ahora suponga $Sat(u, \varphi)$, entonces $\dot{x} \in \dot{y}$ y $x, y \in u$ cumplen $x \in y$ pero esto quiere decir $[x \in y]^u$.

Caso *II*, Suponga que $\Phi_1^u(x_0, \dots, x_n)$ y $\Phi_2^u(x_0, \dots, x_m)$ cumplen el lema, para simplificar omitiremos las variables de $\Phi_1^u(x_0, \dots, x_n)$ y $\Phi_2^u(x_0, \dots, x_m)$ y sus contrapartes en $\mathcal{L}$. Para $x_0, \dots, x_n, x_0, \dots, x_m \in u$ por demostrar

$$[\Phi_1 \wedge \Phi_2]^u \leftrightarrow Sat(u, \varphi_1 \wedge \varphi_2).$$

$[\Phi_1 \wedge \Phi_2]^u$ sucede si y sólo si Φ_1^u y Φ_2^u suceden, por hipótesis de inducción Φ_1^u y Φ_2^u suceden, si y sólo $Sat(u, \varphi_1)$ y $Sat(u, \varphi_2)$ suceden, por lo tanto existen m_1 y m_2 tal que $\varphi_1 \in g(m_1)$ y $\varphi_2 \in g(m_2)$, entonces $\varphi_1, \varphi_2 \in f(\max(m_1, m_2))$ y en consecuencia $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in f(\max(m_1, m_2) + 1)$ y con $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ tenemos que

$$\varphi \in g(\max(m_1, m_2) + 1) \leftrightarrow (\exists \theta, \theta' \in g(\max(m_1, m_2))) F_\wedge(\varphi, \theta, \theta'),$$

y es claro que $\theta = \varphi_1$ y $\theta' = \varphi_2$ cumplen, por lo tanto $Sat(u, \varphi_1)$ y $Sat(u, \varphi_2)$ son ciertas si y sólo si $Sat(u, \varphi)$.

Caso *III*, $\Phi = \neg \Phi_1$ y Φ_1 cumple el lema.

$$\Phi^u \leftrightarrow \neg \Phi_1^u \leftrightarrow \neg Sat(u, \varphi_1);$$

$\neg Sat(u, \varphi_1)$ si y sólo si existe n tal que $\varphi_1 \in f(n)$ y $\varphi_1 \notin g(n)$ y $F_{\neg}(\varphi, \varphi_1)$, así entonces $Sat(u, \neg\varphi_1) = Sat(u, \varphi)$, por lo tanto

$$\Phi^u \rightarrow Sat(u, \varphi).$$

En el otro sentido suponga $Sat(u, \varphi) = Sat(u, \neg\varphi_1)$, entonces hay un n tal que $\varphi_1 \in f(n)$ y $\varphi_1 \notin g(n)$ por lo tanto $\neg Sat(u, \varphi_1)$, y $\neg Sat(u, \varphi_1) \leftrightarrow \Phi^u$ y

$$Sat(u, \varphi) \rightarrow \Phi^u.$$

Caso IV $\Phi = \exists x \Phi_1(x)$ y $\Phi_1(x)$ cumple el lema.

$\Phi^u(x, x_0, \dots, x_n) = [\exists x \Phi_1(x, x_0, \dots, x_n)]^u = (\exists x \in u) \Phi_1^u(x, x_0, \dots, x_n)$, por hipótesis de inducción

$$\Phi_1^u(x, x_0, \dots, x_n) \leftrightarrow Sat(u, \varphi_1(x, x_0, \dots, x_n)).$$

Suponga Φ^u , entonces para $x_0, \dots, x_n$ hay un $x \in u$ tal que $\Phi_1^u(x, x_0, \dots, x_n)$ y por hipótesis de inducción es equivalente con $Sat(u, \varphi_1)$; $Sat(u, \varphi_1)$ si y sólo si hay un $n \in \omega$ tal que $\varphi_1 \in g(n)$, por consiguiente, dada la variable v $F_{\exists}(\varphi, v, \varphi_1)$ y $Sub(\varphi_1, \varphi, u, \dot{x})$ entonces $Sat(u, \varphi)$ y

$$\Phi^u \rightarrow Sat(u, \varphi).$$

Ahora suponga $Sat(u, \varphi)$, por lo tanto hay un n tal que $\varphi \in g(n+1)$ (como $\varphi = \exists x \varphi_1(x)$, φ no puede ser primitiva) y $\varphi_1 \in g(n)$ es tal que $\varphi = \exists v \varphi_1(v)$ cumple que $Sub(\varphi_1, \varphi, v, \dot{x})$, así entonces para $\dot{x}$ $Sat(u, \varphi_1)$ y esto si y sólo si para x , $\Phi_1^u(x)$; entonces $(\exists v \in u) \Phi^u(v) = \Phi^u$, con esto se concluye:

$$Sat(u, \varphi) \rightarrow \Phi^u.$$

□

En $\mathcal{L}_V$ vamos a crear una fórmula tal que prueba si una fórmula es Δ_0 . Cómo es la idea, si un cuantificador aparece en la fórmula, entonces tiene que obedecer alguno de los siguientes dos esquemas:

$$\exists v_n (v_n \in x \wedge \dots, \text{ o es de la forma } \neg \exists v_n (v_n \in x \wedge \dots,$$

donde x es una variable o una constante, la siguiente fórmula que se denota $Fml^{\Delta_0}(\varphi)$ es la fórmula requerida.

$$\begin{aligned}
& Fml(\varphi) \wedge (\forall i \in dom(\varphi))[(\psi_i = 0 \wedge \varphi_{i+1} = 8 \wedge Vbl(\varphi_{i+2})) \\
& \quad \rightarrow (\varphi_{i+3} = 0 \wedge \varphi_{i+4} = 6 \wedge \varphi_{i+5} = 0 \wedge \varphi_{i+6} = 4 \\
& \quad \wedge \varphi_{i+7} = \varphi_{i+2} \wedge (Const(\varphi_{i+8}) \vee Vbl(\varphi_{i+8})) \wedge \varphi_{i+9} = 1 \\
& \vee (\forall i \in dom(\varphi))[(\psi_i = 7 \wedge \varphi_{i+1} = 0 \wedge \varphi_{i+2} = 8 \wedge Vbl(\varphi_{i+3})) \\
& \quad \rightarrow (\varphi_{i+4} = 0 \wedge \varphi_{i+5} = 6 \wedge \varphi_{i+6} = 0 \wedge \varphi_{i+7} = 4 \\
& \quad \wedge \varphi_{i+8} = \varphi_{i+3} \wedge (Const(\varphi_{i+9}) \vee Vbl(\varphi_{i+9})) \wedge \varphi_{i+10} = 1.
\end{aligned}$$

Es claro que sólo la parte $Fml(\varphi)$ no es Δ_0 , para el caso de un lenguaje $\mathcal{L}_u$ al igual de como se hizo anteriormente se toma la fórmula $Fml^{\Delta_0}(\varphi, u)$ que diga que φ es una Δ_0 fórmula en el lenguaje $\mathcal{L}_u$. Ahora el siguiente resultado es inmediato:

Corolario 2.3.3. *Las LST-fórmulas $Fml^{\Delta_0}(\varphi)$ y $Fml^{\Delta_0}(\varphi, u)$ son Δ_1^{BS} .*

Continuando con la jerarquía de Lévy, una fórmula es Σ_1 si es de la forma $\exists v_n \psi$ y ψ es Δ_0 , una fórmula es Π_1 , si es de la forma $\neg \exists v_n \psi$ donde ψ es Δ_0 . En general una fórmula es Σ_{n+1} si es de la forma $\exists v_n \psi$, y ψ es Π_n , una fórmula es Π_{n+1} si es de la forma $\neg \psi$ donde ψ es Σ_{n+1} . Así que podemos tener el siguiente resultado:

Lema 2.3.4. *Sea $n \geq 1$ fijo. Entonces las siguientes fórmulas son Δ_1^{BS} :*

- i) $Fml^{\Sigma_n}(\varphi) \leftrightarrow$ es una fórmula Σ_n en $\mathcal{L}_V$.
- ii) $Fml^{\Pi_n}(\varphi) \leftrightarrow$ es una fórmula Π_n en $\mathcal{L}_V$.
- iii) $Fml^{\Sigma_n}(\varphi, u) \leftrightarrow$ es una fórmula Σ_n en $\mathcal{L}_u$.
- iv) $Fml^{\Pi_n}(\varphi, u) \leftrightarrow$ es una fórmula Π_n en $\mathcal{L}_u$.

Demostración. Estos cuatro incisos son más o menos con la misma fórmula, salvo pequeñas diferencias, sólo explicaré la fórmula $Fml^{\Sigma_n}(\varphi)$. La creación de esta fórmula será de forma inductiva. La base de la inducción es $Fml^{\Delta_0}(\varphi)$, y la forma en que funciona esta fórmula es usando contracción de cuantificadores, es decir, con la teoría BS es posible dada una fórmula φ que es Σ_n decir que

$$\varphi \leftrightarrow \exists v_0 \forall v_1 \dots - v_n \psi,$$

donde ψ es Δ_0 . Separando en dos partes, para una fórmula que es de la forma Σ_{2n} se usa la primera parte de la fórmula antes de la primera aparición de $\vee$ en la fórmula, para el caso de las fórmulas de la forma Σ_{2n+1} se usa la hipótesis de inducción al bajar un nivel en la jerarquía y trabajar con una subfórmula de φ con el caso anterior que es par. Así entonces, para $n > 0$ fijo, $Fml^{\Sigma_n}(\varphi)$ es la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}
& Fml(\varphi) \wedge [(\exists m = n)[(2m < n \rightarrow (\forall k < m)(\varphi(0) = 0 \\
& \wedge \varphi(5k + 1) = \varphi(5k + 4) = 8 \wedge Vbl(\varphi(5k + 2)) \wedge \varphi(5k + 3) = 7 \\
& \wedge Vbl(\varphi(5k + 5)) \wedge (\forall i < \|\varphi\| - (5m + 1))(\psi(0) = 0) \\
& \wedge \psi(i + 1) = \varphi(5m + 1 + i)) \wedge Fml^{\Delta_0}(\psi)] \vee [\varphi(0) = 0 \wedge \varphi(1) = 8 \\
& \wedge Vbl(\varphi(2)) \wedge [(\forall i < \|\varphi\| - 3)(\psi(0) = 0 \wedge \psi(i + 1) = \varphi(i + 3) \\
& \wedge Fml^{\Delta_0}(\psi)) \vee Fml^{\Sigma_{n-1}}(\psi)]]].
\end{aligned}$$

Es claro que $Fml^{\Sigma_{n-1}}(\psi)$ y $Fml^{\Sigma_{n-1}}(\varphi)$ son las únicas partes de la fórmula que son Δ_1^{BS} . Por lo tanto, $Fml^{\Sigma_n}(\psi)$ es Δ_1^{BS} . $\square$

Es muy común dado un lenguaje $\mathcal{L}_u$ agregar un número finito de letras predicativas; es decir dado algún número finito k y $A_1 \subseteq u^{n(1)}, \dots, A_k \subseteq u^{n(k)}$. El lenguaje $\mathcal{L}_u(\dot{A}_1, \dots, \dot{A}_k)$ es básicamente en todos los aspectos el lenguaje $\mathcal{L}_u$ excepto que ahora estas nuevas letras predicativas primero se les relaciona una aridad, entonces para cada $i = 1, \dots, k$ la aridad de $\dot{A}_i$ es $n(i)$, entonces además de las fórmulas que ya teníamos (las sucesiones de caracteres que se pueden hacer con los símbolos numerados del 1 al 9) ahora tenemos k esquemas nuevos de fórmulas

$$\langle 0, 8 + i, x_1, \dots, x_{n(i)} \rangle$$

donde $x_1, \dots, x_{n(i)} \in Vbl \cup Const_u$. Por simpleza las relaciones $=$ y $\in$ se tratan diferente, ya que la manera estrictamente más correcta sería $= (x, y)$ para ser congruentes con la notación anterior, o por ejemplo $\in (x, y)$ que diría $x \in y$ pero al ser muy utilizadas la cadena de estas dos relaciones es distinta a las demás letras predicativas que se agregan al lenguaje. Ahora esta modificación de agregar al lenguaje estas letras no hace sino más que agregar k fórmulas primitivas (entendiendo que $\in$ y $=$ son relaciones agregadas de forma automática) que dicen $A_i(x_1, \dots, x_{n(i)})$ entonces todos los resultados hasta ahora son válidos en esta modificación de $\mathcal{L}_u$.

Para finalizar esta sección se va a dar un análogo al lema 1.6.3 pero con la modificación siguiente:

Sea $\varphi(\vec{x})$ cualquier $\mathcal{L}_u(\dot{A}_1, \dots, \dot{A}_k)$ fórmula, sean $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ estructuras para este lenguaje de tal forma que $\mathbf{M}$ sea subestructura de $\mathbf{N}$. Decimos que una fórmula es U-absoluta para $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ si y sólo si:

$$(\forall \vec{x} \in M)(\models_{\mathbf{M}} \varphi(\vec{x}) \text{ implica } \models_{\mathbf{N}} \varphi(\vec{x})).$$

Decimos que una fórmula es D-absoluta para $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ si y sólo si:

$$(\forall \vec{x} \in M)(\models_{\mathbf{N}} \varphi(\vec{x}) \text{ implica } \models_{\mathbf{M}} \varphi(\vec{x})).$$

Para finalizar φ es absoluta para $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ si y sólo si es U-absoluta y D-absoluta.

Lema 2.3.5. Sean $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ $\mathcal{L}_u(\dot{A}_1, \dots, \dot{A}_k)$ -estructuras, $\mathbf{N}$ subestructura de $\mathbf{M}$ y suponga M, N conjuntos transitivos. Sea $\varphi(\vec{x})$ una $\mathcal{L}_u(\dot{A}_1, \dots, \dot{A}_k)$ -fórmula, entonces:

- i) Si φ es Δ_0 , entonces es absoluta para $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$.
- ii) Si φ es Σ_1 , entonces es U-absoluta para $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$.
- iii) Si φ es Φ_1 , entonces es D-absoluta para $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$.
- iv) Si φ es Δ_1 , entonces es absoluta para $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$.

Demostración. Los argumentos de este lema son los mismos que del lema 1.6.3. $\square$

Lema 2.3.6. *Sea $\Phi(\vec{x})$ una Δ_0 LST-fórmula y $\varphi(\vec{x})$ la contraparte en $\mathcal{L}$, entonces*

$$ZF \vdash \text{“Para cualquier conjunto transitivo } M, (\forall \vec{x} \in M)(\Phi(\vec{x}) \leftrightarrow \models_M \varphi(\vec{x}))\text{”}.$$

Demostración. La demostración de este lema es por inducción en la formación de φ . Por definición si Φ^M es primitiva, entonces $\Phi^M = \Phi$, así, si Φ es primitiva la demostración es la misma que en el lema 2.3.2. Si Φ es de la forma $\Phi_1 \wedge \Phi_2$, o es el caso que $\Phi = \neg\Phi_1$ también es la misma idea que el lema 2.3.2. Por lo tanto, sólo falta cuando $\Phi = (\exists x \in y)\Phi_1$ y Φ_1 cumple el teorema.

$$\Phi = (\exists x \in y)\Phi_1 = \exists x(x \in y \wedge \Phi(x)),$$

sin embargo $x \in M$ y entonces

$$\exists x(x \in y \wedge \Phi(x)) = (\exists x \in M)(x \in y \wedge \Phi(x)) = \Phi^M,$$

una vez más por el lema 2.3.2

$$\Phi^M \leftrightarrow \models_M \varphi(x),$$

por lo tanto

$$\Phi(x) \leftrightarrow \models_M \varphi(x).$$

$\square$

2.4 Definibilidad

Definición 2.4.1. Sea $\mathbf{M} = \langle M, \in, A_1, \dots, A_k \rangle$ una estructura, donde M es un conjunto no vacío, $A_i \subseteq M^{n(i)}$ para cada $i = 1, \dots, k$ y $N \subseteq M$. Un conjunto $R \subseteq M^m$ es llamado $\Sigma_n^M(N)$ si y sólo hay una fórmula $\varphi(v_0, \dots, v_{m-1})$ que sea Σ_n en el Lenguaje de $\mathbf{M}$ cuyas constantes son todas miembros del conjunto $\{\dot{a} : a \in N\}$ de tal forma que:

$$(\forall x_0, \dots, x_{m-1} \in M)[(x_0, \dots, x_{m-1}) \in R \leftrightarrow \models_{\mathbf{M}} \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{m-1})].$$

Similarmente se define cuándo un conjunto es $\Pi_n^M(N)$, y si un conjunto R es $\Sigma_n^M(N)$ y $\Pi_n^M(N)$ entonces es $\Delta_n^M(N)$. También es común denotar Σ_n^M a $\Sigma_n^M(\emptyset)$ y $\Sigma_n^M(M)$ a $\Sigma_n^M(\mathbf{M})$.

Definición 2.4.2. Un conjunto $R \subseteq M^m$ es **M**-definible si y sólo si hay algún n de tal forma que R sea $\Sigma_n(M)$.

Definición 2.4.3. Sea A una clase de tal forma que cada elemento de A sea de la forma $(a_1, \dots, a_m)$, dada una estructura **M** decimos que una clase A es $\Sigma_n^{\mathbf{M}}(N)$ si y sólo si $A \cap M^m$ es un conjunto $\Sigma_n^{\mathbf{M}}(N)$.

Una noción muy parecida es la siguiente definición:

Definición 2.4.4. Sea A una clase de m -tuplas y $\mathcal{F}$ la clase de las estructuras de la forma $\mathbf{M} = \langle M, \in, A_1, \dots, A_k \rangle$, donde k es fijo, entonces decimos que A es uniforme $\Sigma_n^{\mathbf{M}}$ para $\mathbf{M} \subseteq \mathcal{F}$ si y sólo si hay una fórmula $\varphi(v_0, \dots, v_{m-1})$ de $\mathcal{L}_u(\dot{A}_1, \dots, \dot{A}_k)$ de tal forma que para cada $\mathbf{M} \subseteq \mathcal{F}$,

$$A \cap M^m = \{(x_0, \dots, x_{m-1}) : \models_{\mathbf{M}} \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{m-1})\}$$

Para definir si una clase es $\Pi_n^{\mathbf{M}}$, $\Delta_n^{\mathbf{M}}$, uniformemente $\Pi_n^{\mathbf{M}}$ o uniformemente $\Delta_n^{\mathbf{M}}$ se hace de la misma forma a las dos definiciones anteriores.

Definición 2.4.5. Un conjunto se llama **ameno** si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

- i) $(\forall x, y \in M)(\{x, y\} \in M)$.
- ii) $(\forall x \in M)(\bigcup x \in M)$.
- iii) $\omega \in M$.
- iv) $(\forall x, y \in M)(x \times y \in M)$.
- v) Si $R \subseteq M$ es $\Sigma_0(M)$, entonces $(\forall x \in M)(R \cap x \in M)$.

Un conjunto que es ameno de forma intuitiva puede ser pensado como un conjunto que cumple ser un modelo de BS .

Corolario 2.4.6. Sea $x \subseteq M$ finito, entonces $x \in M$.

Demostración. La demostración es por inducción sobre la cardinalidad de x , si x es vacío, se cumple trivialmente, suponga que para n el resultado es válido, entonces $x = \{x_0, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ y por hipótesis de inducción $\{x_0, \dots, x_{n-1}\} \in M$ y $\{x_n\} \in M$, entonces por i) $\{\{x_0, \dots, x_{n-1}\}, \{x_n\}\} \in M$ entonces por ii) $x = \bigcup \{\{x_0, \dots, x_{n-1}\}, \{x_n\}\} \in M$. $\square$

Lema 2.4.7. El predicado “ x es finito” es uniformemente Σ_1^M par un conjunto ameno M .

Demostración. Sea $\Phi(x, n, f)$ la siguiente Σ_0 LST-fórmula:

$$(n \text{ es un número natural}) \wedge (f : n \longleftrightarrow x).$$

Si x es cualquier conjunto, entonces

$$x \text{ es finito} \leftrightarrow \exists n \exists f \Phi(x, n, f).$$

Sea φ el análogo de Φ en $\mathcal{L}$. Probaremos que para cualquier conjunto ameno M ,

$$(\forall x \in M)[\exists n \exists f \Phi(x, n, f) \leftrightarrow \models_M \exists n \exists f \varphi(\dot{x}, n, f)],$$

lo cual probaría el lema.

Sea M un conjunto ameno, $x \in M$. Suponga primero que

$$\models_M \exists n \exists f \varphi(\dot{x}, n, f).$$

Por el lema 2.3.2,

$$[\exists n \exists f \Phi(x, n, f)]^M.$$

Como las fórmulas Σ_1 son U -absolutas para clases transitivas $\exists n \exists f \Phi(x, n, f)$.

Ahora suponga $\exists n \exists f \Phi(x, n, f)$. Tome x, f tal que $\Phi(x, n, f)$. Como M es transitivo y $\omega \in M \Rightarrow \omega \subseteq M$, entonces $n \in M$, por lo tanto $x \times n \in M$, pero $f \subseteq x \times n$ y f es finita, entonces $f \in M$. Por D -absolutez de las Σ_0 fórmulas LST

$$[\Phi(x, n, f)]^M,$$

entonces

$$[\exists n \exists f \Phi(x, n, f)]^M,$$

y una vez más por el lema 2.3.2

$$\models_M \exists n \exists f \varphi(\dot{x}, n, f).$$

□

Definición 2.4.8. Sean $R(x_0, \dots, x_m)$ y $S(x_0, \dots, x_m)$ relaciones en M , entonces se definen las siguientes relaciones:

- $(R \wedge S)(x_0, \dots, x_m)$ si y sólo si $(x_0, \dots, x_m) \in R \cap S$.
- $(R \vee S)(x_0, \dots, x_m)$ si y sólo si $(x_0, \dots, x_m) \in R \cup S$.
- $(\neg R)(x_0, \dots, x_m)$ si y sólo si $(x_0, \dots, x_m) \in M^{m+1} \setminus S$.
- $(\exists x_0 R)(x_0, \dots, x_m)$ si y sólo si $(\exists x_0 \in M)((x_0, \dots, x_m) \in R)$.

- $((\exists x_0 \in z)R)(x_0, \dots, x_m)$ si y sólo si $(\exists x_0 \in z)((x_0, \dots, x_m) \in R)$.
- $(\forall x_0 R)(x_0, \dots, x_m)$ si y sólo si $(\forall x_0 \in M)((x_0, \dots, x_m) \in R)$.
- $((\forall x_0 \in z)R)(x_0, \dots, x_m)$ si y sólo si $(\forall x_0 \in z)((x_0, \dots, x_m) \in R)$.

De estas definiciones se tiene el siguiente resultado:

Lema 2.4.9. *Sea M un conjunto ameno y $\mathbf{M} = \langle M, A_1, \dots, A_k \rangle$, sean R, S relaciones de aridad m , entonces:*

- i) Si R, S son $\Delta_0^{\mathbf{M}}(N)$, entonces también lo son $R \wedge S$, $R \vee S$ y $\neg R$.*
- ii) Si R es $\Sigma_n^{\mathbf{M}}(N)$, entonces $\neg R$ es $\Pi_n^{\mathbf{M}}(N)$.*
- iii) Si R es $\Pi_n^{\mathbf{M}}(N)$, entonces $\neg R$ es $\Sigma_n^{\mathbf{M}}(N)$.*
- iv) Si R es $\Delta_n^{\mathbf{M}}(N)$, si y sólo si R y $\neg R$ son $\Sigma_n^{\mathbf{M}}(N)$ (o $\Pi_n^{\mathbf{M}}(N)$).*
- v) Si R, S son $\Sigma_{n+1}^{\mathbf{M}}(N)$, entonces también lo son $R \wedge S$, $R \vee S$, $\neg R$, $\exists R$ y $(\exists x \in z)R$.*
- vi) Si R, S son $\Pi_{n+1}^{\mathbf{M}}(N)$, entonces también lo son $R \wedge S$, $R \vee S$, $\neg R$, $\forall R$ y $(\forall x \in z)R$.*
- vii) Si R, S son $\Delta_{n+1}^{\mathbf{M}}(N)$, entonces también lo son $R \wedge S$, $R \vee S$ y $\neg R$.*

Demostración. Como para todos los casos el conjunto en el que están las constantes es N , entonces queremos ver que, por ejemplo, en el caso *i)* si $R(x_0, \dots, x_n)$ y $S(x_0, \dots, x_n)$ son Δ_0 y además $\vec{x} \in R \leftrightarrow \varphi(x_0, \dots, x_n)$, y $\vec{x} \in S \leftrightarrow \psi(x_0, \dots, x_n)$

$$\vec{x} \in R \wedge S \leftrightarrow \varphi(x_0, \dots, x_n) \wedge \psi(x_0, \dots, x_n),$$

es decir basta mostrar que $\varphi \wedge \psi$ es Δ_0 , lo cual es cierto por el lema 1.6.6. Para las demás partes del inciso y el resto del teorema sólo hay que probar que la disyunción, conjunción, negación y agregar algunos cuantificadores a fórmulas tiene cierta complejidad en la jerarquía de Lévy, lo cual es cierto por los lemas 1.6.6 y 1.6.10. $\square$

Lema 2.4.10. *Sea M un conjunto ameno y $\mathbf{M} = \langle M, A_1, \dots, A_k \rangle$, sea $f \subseteq M \times M \times \dots \times M$ una función, si f es $\Sigma_n^{\mathbf{M}}(N)$ y $\text{dom}(f)$ es $\Pi_n^{\mathbf{M}}(N)$, entonces f y $\text{dom}(f)$ son $\Delta_n^{\mathbf{M}}(N)$.*

Demostración. Como $x \in \text{dom}(f) \leftrightarrow \exists y[y = f(x)]$, podemos ver que $\text{dom}(f)$ es $\Sigma_n^{\mathbf{M}}$. Ahora, para ver que f es $\Pi_n^{\mathbf{M}}$,

$$y = f(x) \leftrightarrow [x \in \text{dom}(f)] \wedge \forall z[z = f(x) \rightarrow y = z].$$

$\square$

Corolario 2.4.11. *Sea $\mathbf{M} = \langle M, A_1, \dots, A_k \rangle$, si $f : M \rightarrow M$ es $\Sigma_n^{\mathbf{M}}(N)$, entonces f es $\Delta_n^{\mathbf{M}}(N)$.*

Demostración. $z = \text{dom}(f) \leftrightarrow [y = f(x) \rightarrow x \in z]$, así $\text{dom}(f)$ es $\Pi_n^{\mathbf{M}}$ y por lema anterior f es Δ_n^M . □

Lema 2.4.12. *Sea M un conjunto ameno y $\mathbf{M} = \langle M, A_1, \dots, A_k \rangle$, si $R(x)$ es una relación de aridad 1, $\Sigma_n^{\mathbf{M}}(N)$, entonces también lo es $Q(x)$ que dice:*

$$Q(x) \leftrightarrow [x \text{ es un par ordenado} \wedge R((x)_0)].$$

Similarmente para $(x)_1$, por comodidad $Q(x)$ se denota como $R((x)_i)$ para $i \in 2$.

Demostración.

$$Q(x) \leftrightarrow x \text{ es un par ordenado} \wedge (\exists u \in x)(\exists y \in u)(y = (x)_0 \wedge R(y)).$$

□

Más adelante también se va a utilizar un debilitamiento de ser subestructura elemental, esto es en el caso de un lenguaje $\mathcal{L}(\dot{A}_0, \dots, \dot{A}_k)$, una estructura $\mathbf{M}$ y una subestructura $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}$ es una estructura elemental si y sólo si cualquier fórmula de $\mathcal{L}_N(\dot{A}_0, \dots, \dot{A}_k) \models_{\mathbf{N}} \varphi$ si y sólo si $\models_{\mathbf{M}} \varphi$. Entonces la restricción que se tiene es la siguiente definición:

Definición 2.4.13. $\mathbf{N}$ es una Σ_n subestructura elemental si y sólo si para cualquier fórmula de $\mathcal{L}_N(\dot{A}_0, \dots, \dot{A}_k)$ que sea Σ_n sucede que $\models_{\mathbf{N}} \varphi$ si y sólo si $\models_{\mathbf{M}} \varphi$.

2.5 La Teoría KP

KP (Kripke-Platek) es una subteoría más fuerte que BS ; con esta teoría, al igual que con BS , se van a crear herramientas que nos serán muy útiles para mostrar la existencia de algunas formas más débiles de los axiomas de ZF en algunos modelos que crearemos. Los axiomas de KP son los mismos de BS más el Δ_0 Esquema de Colección:

$$\forall \vec{a} [\forall x \exists y \Phi(y, x, \vec{a}) \rightarrow \forall u \exists v (\forall x \in u) (\exists y \in v) \Phi(y, x, \vec{a})],$$

donde Φ es una Δ_0 LST -fórmula.

Junto con esta teoría KP al igual que en la sección anterior se agrega la definición de un conjunto que es:

Definición 2.5.1. Un conjunto M es **admisibile** si es ameno y para cada relación $R \subseteq M \times M$ que sea $\Delta_0(M)$ sucede que

$$(\forall x \in M)(\exists y \in M)R(y, x)$$

entonces para cada $u \in M$ hay un $v \in M$ de tal forma que

$$(\forall x \in u)(\exists y \in v)R(y, x).$$

Como en el caso de un conjunto ameno, un conjunto es admisible si es un modelo de la teoría KP . Sin embargo nosotros nos enfocaremos más en demostrar que con esta teoría KP es posible tener los Axiomas de Comprensión y de Colección para fórmulas que no sólo sean Δ_0 .

Lema 2.5.2. (Σ_1 -Esquema de Colección) Sea $\Phi(y, x, \vec{a})$ una LST-fórmula Σ_1 , entonces:

$$KP \vdash \forall \vec{a} [\forall x \exists y \Phi(y, x, \vec{a}) \rightarrow \forall u \exists v (\forall x \in u)(\exists y \in v) \Phi(y, x, \vec{a})].$$

Demostración. Sea $\Psi(z, y, x, \vec{a})$ una Δ_0 fórmula tal que

$$KP \vdash \Phi \leftrightarrow \exists z \Psi(z, x, y, \vec{a}).$$

Sea $\vec{a}$ dado, y suponga $\forall x \exists y \Phi(y, x, \vec{a})$, entonces

$$\forall x \exists y \exists z \Psi(z, y, x, \vec{a}),$$

por lo tanto

$$\forall x \exists w \Psi((w)_0, (w)_1, x, \vec{a}).$$

Para u debemos encontrar v tal que

$$(\forall x \in u)(\exists y \in v) \Phi(y, x, \vec{a}),$$

pero por el corolario 1.6.8

$$\Psi((w)_0, (w)_1, x, \vec{a})$$

es Δ_0 y por Δ_0 -Colección, hay un t tal que

$$(\forall x \in u)(\exists w \in t) \Psi((w)_0, (w)_1, x, \vec{a}).$$

Sea $v = \bigcup \bigcup t$. Entonces

$$(\forall x \in u)(\exists y \in v)(\exists z) \Psi(z, y, x, \vec{a}),$$

por lo tanto

$$(\forall x \in u)(\exists y \in v) \Phi(y, x, \vec{a}).$$

□

Lema 2.5.3. (Δ_1 -principio de Comprensión) Sea $\Phi(z, \vec{a})$ una Δ_1^{KP} LST-fórmula, entonces:

$$KP \vdash \forall \vec{a} \forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \Phi(z, \vec{a})].$$

Demostración. Como $\Phi(z, \vec{a})$ es Δ_1^{KP} por el lema 1.6.9 hay Σ_0 fórmulas tal que:

$$\begin{aligned} KP \vdash \Phi(z, \vec{a}) &\leftrightarrow \forall v \Theta(v, z, \vec{a}), \\ KP \vdash \Phi(z, \vec{a}) &\leftrightarrow \exists v \Psi(v, z, \vec{a}). \end{aligned}$$

Sean $\vec{a}, x$ dados; mostraremos que $\forall z [z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \Phi(z, \vec{a})]$. Ahora,

$$\forall z [\Phi(z, \vec{a}) \vee \neg \Phi(z, \vec{a})].$$

entonces

$$\forall z \exists v [\Psi(v, z, \vec{a}) \wedge \Theta(v, z, \vec{a})].$$

Por Δ_0 -Colección, hay un conjunto u tal que

$$(*) \quad (\forall z \in x)(\exists v)[\Psi(v, z, \vec{a}) \wedge \neg \Theta(v, z, \vec{a})].$$

Por Δ_0 -Comprensión, sea

$$y = \{z \in x : (\exists v \in u) \Psi(v, z, \vec{a})\}.$$

Para terminar mostraremos que

$$y = \{z \in x : \Phi(z, \vec{a})\}.$$

Para cada $z \in x$

$$\begin{aligned} (\exists v \in u) \Psi(v, z, \vec{a}) &\rightarrow \exists v \Psi(v, z, \vec{a}) \\ &\leftrightarrow \Phi(z, \vec{a}), \end{aligned}$$

por lo tanto sólo basta probar que

$$\Phi(z, \vec{a}) \rightarrow (\exists v \in u) \Psi(v, z, \vec{a}).$$

Por $(*)$ sabemos que hay un $v \in u$ tal que

$$\Psi(v, z, \vec{a}) \vee \neg \Theta(v, z, \vec{a}).$$

Pero

$$\Phi(z, \vec{a}) \leftrightarrow \forall v \Theta(v, z, \vec{a}).$$

Así, para $v \in u$ tenemos que $\Psi(v, z, \vec{a})$. □

El siguiente lema es una práctica alternativa al Σ_1 -Esquema de Colección.

Lema 2.5.4. (Σ_1 -Esquema de Colección localizado) Sea Φ una LST-fórmula Σ_1 , entonces:

$$KP \vdash \forall \vec{a} [(\forall x \in u) \exists y \Phi(y, x, \vec{a}) \rightarrow \exists v (\forall x \in u) (\exists y \in v) \Phi(y, x, \vec{a})].$$

Demostración. Suponga

$$(\forall x \in u) \exists y \Phi(y, x, \vec{a}),$$

entonces

$$\forall x \exists y (x \notin u \vee \Phi(y, x, \vec{a})).$$

Por Σ_1 Colección hay un v tal que

$$(\forall x \in u) (\exists y \in v) (x \notin u \vee \Phi(y, x, \vec{a})).$$

Pero esto es lógicamente equivalente con

$$(\forall x \in u) (\exists y \in v) \Phi(y, x, \vec{a})$$

ya que $x \in u$. □

Lema 2.5.5.

- i) Si $\Phi(y, \vec{x})$ es una Σ_1 LST-fórmula, entonces $(\forall x \in y) \Phi(y, \vec{x})$ es Σ_1^{KP} .
- ii) Si $\Phi(y, \vec{x})$ es una Π_1 LST-fórmula, entonces $(\exists x \in y) \Phi(y, \vec{x})$ es Π_n^{KP} .

Demostración. Probaremos i), ii) sería cierto por ser la negación de i). Sea $\Psi(w, x, \vec{y})$ una Σ_0 fórmula tal que

$$KP \vdash \Phi(y, \vec{x}) \leftrightarrow \exists w \Psi(w, y, \vec{x}).$$

Por el lema 1.6.6 esto es posible. Ahora, en KP tenemos:

$$\begin{aligned} (\forall z \in y) \Phi(z, \vec{x}) &\leftrightarrow (\forall x \in y) (\exists w) \Psi(w, y, \vec{x}) \\ &\rightarrow (\exists v) (\forall z \in y) (\exists w \in v) \Psi(w, z, \vec{x}) \quad \text{por el lema 2.5.5} \\ &\rightarrow (\forall z \in y) (\exists w) \Psi(w, z, \vec{x}) \\ &\leftrightarrow (\forall z \in y) \Phi(z, \vec{x}). \end{aligned}$$

Esto nos es Σ_1 -equivalente.

$$(\exists v) (\forall z \in y) (\exists w \in v) \Psi(w, z, \vec{x}).$$

Entonces $(\forall z \in y) \Phi(z, \vec{x})$. □

Lema 2.5.6. Sea M un conjunto admisible, sea F una $\Sigma_1(M)$ función sobre M . Si $u \in M$ y $u \in \text{dom}(F)$, entonces $F \upharpoonright u, F''u \in M$.

Demostración. Por el lema 2.4.10, $f \restriction u$ es $\Delta_1(M)$. Por Δ_1 -Comprensión (lema 2.5.3),

$$w \in M \rightarrow w \cap (F \restriction u) \in M.$$

Ahora,

$$(\forall x \in u) \exists y [y = F(x)],$$

y por el lema 2.5.4 hay un $v \in M$ tal que

$$(\forall x \in u) (\exists y \in v) [y = F(x)].$$

Entonces $F \restriction u \subseteq v \times u$. Pero $w = v \times u \in M$, por el Axioma del Producto Cartesiano. Por lo tanto

$$F \restriction u = w(F \restriction u) \in M.$$

Por Δ_0 -Comprensión

$$f''u = v \cap \{y : (\exists x \in u) [(y, x) \in F \restriction u]\} \in M.$$

□

2.6 Principio de recursión y clausura transitiva

En esta sección se tratarán teoremas que van sobre clases, entonces una Σ_1^{KP} clase es una clase de la forma

$$\{x : \Phi(x)\}$$

donde Φ es una Σ_1^{KP} *LST*-fórmula, una Σ_1^{KP} función sobre V es una clase de la forma

$$\{(y, \vec{x}) : \Phi(y, \vec{x})\}$$

y Φ es Σ_1 de tal forma que

$$KP \vdash \forall \vec{x} [\exists y \Phi(y, \vec{x}) \rightarrow \exists ! y \Phi(y, \vec{x})].$$

Lema 2.6.1. (*Teorema de Recursión*) Sea G una función total (es decir, $\text{dom}(G) = V$) de aridad $(n+2)$ y Σ_1^{KP} , entonces hay una función F definida sobre todo V de aridad $(n+1)$ y Σ_1^{KP} de tal forma que:

$$KP \vdash F(y, \vec{x}) = G(y, \vec{x}, (F(z, \vec{x}) : z \in y)).$$

Demostración. Sea $\Phi(\sigma, \vec{x})$ la siguiente fórmula:

$$[\text{"}\sigma \text{ es una funci3n"}] \wedge [\text{"}dom(\sigma) \text{ es transitivo"}] \\ \wedge [(\forall y \in dom(\sigma))(\sigma(y) = G(y, x, \sigma \upharpoonright y))].$$

Como G es una funci3n total por el lema 2.4.10, G es una clase Δ_1^{KP} . Por lo tanto existe $\Psi(z, y, \vec{x})$ una f3rmula Σ_1^{KP} tal que

$$\Psi(z, y, \vec{x}) = (\exists \sigma)[\Phi(\sigma, \vec{x}) \wedge \sigma(y) = z].$$

Afirmaci3n 1. $KP \vdash (\forall \vec{x}, y)(\exists z)\Psi(z, y, \vec{x})$.

Demostraci3n de la afirmaci3n: Argumentando dentro de KP , utilizaremos el esquema de inducci3n de la teor3a BS , con la f3rmula

$$\exists z \Psi(z, y, \vec{x}).$$

Entonces queremos ver que

$$KP \vdash \forall \vec{x}[(\forall y(\forall y' \in y)(\exists z)\Psi(z, y', \vec{x}) \rightarrow (\exists z)\Psi(z, y, \vec{x})) \rightarrow \forall y \exists x \Psi(z, y, \vec{x})].$$

Sea y tal que $(\forall y' \in y)(\exists z)\Psi(z, y', \vec{x})$, entonces

$$(\forall y' \in y)(\exists z)(\exists \sigma)[\Phi(\sigma, \vec{x}) \wedge \sigma(y') = z].$$

y esta f3rmula es la misma que

$$(\forall y' \in y)(\exists z)(\exists \sigma)[[\text{"}\sigma \text{ es una funci3n"}] \wedge [\text{"}dom(\sigma) \text{ es transitivo"}] \\ \wedge [(\forall y' \in dom(\sigma))(\sigma(y') = G(y', x, \sigma \upharpoonright y'))] \wedge \sigma(y') = z]$$

implica

$$(\forall y' \in y)(\exists z)(\exists \sigma)[[y' \in dom(\sigma)] \wedge [\text{"}\sigma \text{ es una funci3n"}] \wedge [\text{"}dom(\sigma) \text{ es transitivo"}] \\ \wedge [(\forall y' \in dom(\sigma))(\sigma(y') = G(y', x, \sigma \upharpoonright y'))] \wedge \sigma(y') = z]$$

por lo tanto

$$(\forall y' \in y)(\exists z)(\exists \sigma)[[y' \in dom(\sigma)] \wedge \Phi(\sigma, \vec{x}) \wedge \sigma(y') = z].$$

As3, entonces

$$(\forall y' \in y)(\exists z)(\exists \sigma)[[y' \in dom(\sigma)] \wedge \Phi(\sigma, \vec{x})]$$

en esta f3rmula ya no est3 la variable z , y por lo tanto el cuantificador $\exists z$ ya no cuantifica ninguna variable, por lo tanto

$$(\forall y' \in y)(\exists \sigma)[[y' \in dom(\sigma)] \wedge \Phi(\sigma, \vec{x})],$$

por el lema 2.5.4 es posible encontrar un conjunto v tal que

$$(\forall y' \in y)(\forall \sigma \in v)(y' \in \text{dom}(\sigma) \wedge \Phi(\sigma, \vec{x})).$$

Por Δ_1 -Comprensión sea

$$w = v \cap \{\sigma : \Phi(\sigma, \vec{x})\}.$$

Sea $\varrho = \bigcup w$. Entonces hay que probar que ϱ es una función. Para ver esto, note que si probamos que para $z \in \text{dom}(\sigma_1) \cap \text{dom}(\sigma_2)$, tal que $\Phi(\sigma_1, \vec{x})$ y $\Phi(\sigma_2, \vec{x})$ para $\sigma_1, \sigma_2 \in v$ implica $\sigma_1(z) = \sigma_2(z)$. Por $\in$ -inducción, si $\sigma_1(z') = \sigma_2(z')$ para toda $z' \in z$ entonces $\sigma_1 \upharpoonright z = \sigma_2 \upharpoonright z$ y

$$\sigma_1(z) = G(z, x, \sigma_1 \upharpoonright z) = G(z, x, \sigma_2 \upharpoonright z) = \sigma_2(z).$$

Por lo tanto ϱ es función. $\text{dom}(\varrho)$ es transitivo ya que si $s \in \text{dom}(\varrho)$, $s \in \text{dom}(\sigma)$ para algún $\sigma \in v$, como para todo $\sigma \in v$ $\Phi(\sigma, \vec{x})$ $s \subseteq \text{dom}(\sigma) \subseteq \sigma(\varrho)$. Por lo tanto $\Phi(\varrho, \vec{x})$. Sea

$$\tau = \varrho \cup \{(g(y, \vec{x}, \varrho \upharpoonright y), y)\}$$

entonces $\Phi(\tau, \vec{x})$, pero como $\tau(y) = G(y, \vec{x}, \varrho \upharpoonright y)$ entonces $\Psi(\tau(y), y, \vec{x})$ y esto implica $\exists \Psi(z, y, \vec{x})$. Por el Esquema de inducción se concluye

$$(\forall \vec{x}, y)(\exists z)\Psi(z, y, \vec{x}).$$

Así queda demostrada la afirmación 1.

Sea F la siguiente clase

$$\{(z, y, \vec{x}) : \Psi(z, y, \vec{x})\}.$$

Afirmación 2. $KP \vdash F$ es función. Suponga $\Psi(z, y, \vec{x})$ y $\Psi(z', y, \vec{x})$, por demostrar $z = z'$. Como $\Psi(z, y, \vec{x})$ entonces $\exists \sigma[\Phi(\sigma, \vec{x}) \wedge \sigma(y) = z]$ y también $\exists \sigma'[\Phi(\sigma', \vec{x}) \wedge \sigma'(y) = z']$ y por lo tanto $z = \sigma(y) = \sigma'(y) = z'$. y por lo tanto F es función.

Por su construcción $F(y, \vec{x}) = z = \sigma(y) = G(y, \vec{x}, (F(t, \vec{x}) : t \in y))$. □

Corolario 2.6.2. La función TC (clausura transitiva) es Δ_1^{KP} .

Demostración. La definición de la clausura transitiva de un conjunto x es el menor conjunto transitivo que contiene a x . Es equivalente definir la clausura transitiva (TC) como

$$TC(x) = x \cup \bigcup \{TC(y) : y \in x\}.$$

Es claro que esto está definido por recursión, pero ahora veremos que KP conoce la clausura transitiva de un conjunto.

Como $y = TC(x) \leftrightarrow \varphi(y, x) \leftrightarrow$

$$(\exists f)(\text{dom}(f) = \omega \wedge f(0) = x \wedge f(n+1) = \bigcup_{n \in \omega} f(n) \wedge y = \bigcup_{n \in \omega} f(n))$$

Es claro que esta función es Σ_1^{KP} . Entonces para ir de acuerdo con la notación del lema anterior,

$$T(y, x, (TC(y, z) : z \in x))$$

dice “ y es la clausura transitiva de x ” sería la función G y $TC(y, x) = x \cup \bigcup \{TC(z) : z \in x\}$. Así TC es una función total, y por el corolario 2.4.10 $TC(y, x)$ es Δ_1^{KP} . $\square$

Capítulo 3

El universo construible

En la Teoría de conjuntos los axiomas de *ZFC* describen las propiedades de los conjuntos. Por ejemplo, si X es un conjunto infinito, el Axioma del Conjunto Potencia nos dice que hay un conjunto $\mathcal{P}(X)$, que se compone de *todos* los subconjuntos de X . Pero los otros axiomas no nos dicen mucho acerca de los miembros de $\mathcal{P}(X)$, ni tampoco indican qué tan grande es este conjunto. El Axioma de Comprensión dice que $\mathcal{P}(X)$ contendrá todos los conjuntos que pueden ser descritos, en cierto sentido, bien definidos. Por otra parte *AC* proporciona diversos conjuntos de elección y buenos ordenes. Pero la palabra “todos” en la frase “todos los subconjuntos de X ” no es realmente explicado. La Teoría de conjuntos de *ZFC* puede ser tomada como una teoría perfectamente razonable. Pero, como sabemos, la Teoría de conjuntos *ZFC* tiene varias preguntas formuladas que no pueden ser contestadas a partir de los axiomas de *ZFC*. Un ejemplo clásico la Hipótesis del Continuo $2^\omega = \omega_1$.

Una manera de superar la dificultad de las cuestiones indecidibles es extender la teoría *ZFC*, para obtener una teoría más rica que proporcione más información acerca de los conjuntos. Una extensión de *ZFC* es la Teoría de conjuntos construible de Gödel. En esta teoría el concepto de “conjunto” se hace preciso.

La imagen del universo de los conjuntos es visto en la jerarquía acumulativa de conjuntos como ya se vio en el capítulo 1. Entonces, esta jerarquía acumulativa se obtiene a partir del Axioma del Conjunto Potencia.

En la Teoría de conjuntos construible no tomamos como base al conjunto potencia, más bien, decimos que un conjunto sólo puede decirse que existe, si es definible sobre los conjuntos existentes más o menos de la misma manera que se obtienen las clases. Recordar de la sección 2.4 un subconjunto y de un conjunto X se dice que es

x -definible si y sólo si existe una fórmula $\varphi(v_0)$ de $\mathcal{L}$ tal que

$$y = \{a \in X : \models_X \varphi(\overset{\circ}{a})\}.$$

Para obtener el universo construible de conjuntos, empezamos con el conjunto vacío e iteramos la operación de tomar todos los subconjuntos definibles en cada etapa. Esto nos proporciona con un universo de conjuntos en los que la noción de lo que constituye un conjunto es muy precisamente definido.

Ahora, aunque podemos considerar la Teoría de conjuntos construible como una alternativa a la teoría ZFC , de hecho la Teoría de conjuntos construibles es ZF junto con uno adicional **el Axioma de Constructibilidad**.

[3] afirma que muchos matemáticos consideran que la Teoría de conjuntos construible no es fundamental en la Teoría de conjuntos en el sentido de ZFC ; es decir, no es básico para la teoría de conjuntos y que la constructibilidad debe sólo ser estudiado como un concepto adicional a ZFC . En cualquier caso esta es la parte central de esta tesis, además de que a partir de esta idea es posible deducir muchos enunciados de la Teoría de conjuntos que ZF no puede demostrar. En este capítulo se define el universo construible y varias de sus propiedades.

3.1 Definición de los conjuntos construibles

Definición 3.1.1. Sea x un conjunto, definimos la función $Def : V \rightarrow V$ tal que $a \in Def(x)$ si y sólo si:

$$a = \{y \in x : \models_x \varphi(\overset{\circ}{y})\}$$

Donde donde $\varphi(y)$ es un elemento del lenguaje $\mathcal{L}_x$.

$Def(x)$ es una función bien definida.

$$\begin{aligned} v = Def(u) \quad \leftrightarrow \quad & (\forall x \in v)(\exists \varphi)[Fml(\varphi, u) \wedge Fr(\varphi, \{v_0\}) \wedge \\ & (x = \{z \in u : \exists \psi(Sub(\psi, \varphi, v_0, \overset{\circ}{z}) \wedge Sat(u, \psi))\})] \wedge \\ & (\forall \varphi)[Fml(\varphi, u) \wedge Fr(\varphi, \{v_0\}) \rightarrow \\ & (\exists x \in v)(x = \{z \in u : \exists \psi(Sub(\psi, \varphi, v_0, \overset{\circ}{z}) \\ & \wedge Sat(u, \psi))\})]. \end{aligned}$$

Por recursión definimos la siguiente jerarquía acumulativa de conjuntos:

$$L_0 = \emptyset \quad L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$$

$$L_\alpha = \bigcup_{\gamma < \alpha} L_\gamma, \text{ si } \alpha \text{ es límite}$$

$\{L_\alpha : \alpha \in On\}$ es la jerarquía acumulativa construible de conjuntos, y se tiene que

$$L = \bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha$$

Donde se conoce a L como el **universo construible**. Un conjunto x es llamado construible si y sólo si $x \in L$.

3.2 Propiedades del modelo L

Lema 3.2.1.

- i) $\alpha < \beta$ implica $L_\alpha \subseteq L_\beta$.
- ii) Cada L_α es transitivo (Así también L es transitivo).
- iii) $L_\alpha \subseteq V_\alpha$ para todo α .
- iv) $\alpha < \beta$ implica $\alpha, L_\alpha \in L_\beta$ (Así $On \subseteq L$).
- v) Para todo α , $L \cap \alpha = L_\alpha \cap On = \alpha$.
- vi) Para $\alpha \leq \omega$, $L_\alpha = V_\alpha$.
- vii) Para $\alpha \geq \omega$, $|L_\alpha| = |\alpha|$.

Demostración. Vamos a mostrar i) y ii) de forma simultánea por inducción en α . Las hipótesis de inducción son:

- a) $\gamma < \alpha \rightarrow L_\gamma \subseteq L_\alpha$;
- b) L_α es transitivo.

Si $\alpha = 0$ el resultado es inmediato. Si α es límite $L_\alpha = \bigcup_{\gamma < \alpha} L_\gamma$, entonces a) y b) también son inmediatos. Para el caso sucesor probaremos en orden a) y b) para $\alpha + 1$, suponiendo α . Por hipótesis de inducción es suficiente probar que $L_\alpha \subseteq L_{\alpha+1}$, pues si $\gamma < \alpha$ entonces $L_\gamma \subseteq L_\alpha$. Sea $x \in L_\alpha$, entonces por b) $x \subseteq L_\alpha$ y por Δ_0 -absolutez:

$$x = \{y \in L_\alpha : \models_{L_\alpha} "y \in \dot{x}"\} \in Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1}.$$

Para probar b) para $\alpha + 1$, sea $x \in y \in L_{\alpha+1}$. Como $y \in L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha) \subseteq \mathcal{P}(L_\alpha)$, $y \subseteq L_\alpha$, $x \in L_\alpha$ y por a) $x \in L_{\alpha+1}$.

iii) Por inducción en α . Si $\alpha = 0$ tenemos $L_0 = V_0 = \emptyset$. En los casos límites

$$L_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} L_\alpha \quad \text{y} \quad V_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} V_\alpha,$$

entonces, si para todo $\alpha < \lambda$ $L_\alpha \subseteq V_\alpha$, entonces $L_\lambda \subseteq V_\lambda$. Así, sólo falta probar el caso sucesor:

$$L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha) \subseteq \mathcal{P}(L_\alpha) \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}.$$

iv) por i) sólo es necesario probar que $\alpha, L_\alpha \in L_{\alpha+1}$ para cada α .
Para cada α :

$$L_\alpha = \{x \in L_\alpha : \models_{L_\alpha} "x = \dot{x}"\} \in Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1}.$$

Para probar que $\alpha \in L_{\alpha+1}$ procederemos por inducción sobre α , suponga $\gamma \in L_{\gamma+1}$. Para cada $\gamma < \alpha$, por i) $\gamma \in L_\alpha$ para todo $\gamma < \alpha$ y entonces $\alpha \subseteq L_\alpha$. Por ii) $\alpha = L_\alpha \cap On$, pero como $On(x)$ es una fórmula Δ_0 y esta es absoluta para L_α , entonces:

$$\alpha = \{x \in L_\alpha : \models_{L_\alpha} On(\dot{x})\} \in Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1}.$$

En esta parte se utiliza de forma sutil los lemas 2.3.2 y 2.3.6, en la fórmula $On(x)$ se utiliza la *LST*-fórmula definida en la sección 1.4, sin embargo usamos el equivalente en $\mathcal{L}$ de $On(x)$ y usando los lemas 2.3.2 y 2.3.6 sabemos que ambas fórmulas son equivalentes para cualquier conjunto transitivo M , en este caso L_α es el conjunto transitivo. Para cada x y para $x \subseteq L_\alpha$

$$x \text{ es un ordinal} \leftrightarrow \models_{L_\alpha} On(\dot{x}).$$

Más adelante también se usarán estos lemas aplicados a L_α , el argumento de su validez es similar al anterior y por este motivo se tratará de forma indistinta las *LST*-fórmulas y sus contraparte en $\mathcal{L}$ en conjuntos transitivos.

v) Durante la prueba de iv) se demostró que para toda α , $\alpha = L_\alpha \cap On$ y $\alpha = L_\alpha \cap On \subseteq L \cap \alpha \subseteq \alpha$.

vi) Para $\alpha = 0$, $L_0 = \emptyset = V_0$. Sea $\alpha < \omega$ y suponga $L_\alpha = V_\alpha$, por ii) es suficiente probar $V_{\alpha+1} \subseteq L_{\alpha+1}$. Sea $x \in V_{\alpha+1}$, entonces $x \subseteq V_\alpha = L_\alpha$ y hay $a_1 \text{ dots}, a_n \in L_\alpha$ tal que $x = \{a_1, \dots, a_n\}$ (por que para todo $\alpha < \omega$ V_α es finito), así

$$x = \{z \in L_\alpha : \models_{L_\alpha} (\dot{z} = \dot{a}_1 \vee \dots \vee \dot{z} = \dot{a}_n)\} \in Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1}.$$

Por la inducción anterior para todo $\alpha < \omega$ $V_\alpha = L_\alpha$ por lo tanto:

$$L_\omega = \bigcup_{\alpha < \omega} L_\alpha = \bigcup_{\alpha < \omega} V_\alpha = V_\omega.$$

vii) Por v) $|\alpha| \leq |L_\alpha|$ para toda α . Por inducción en $\alpha \geq \omega$ probaremos $|L_\alpha| \leq |\alpha|$. Para $\alpha = \omega$ por vi) $|L_\omega| = |V_\omega| = \omega$.

Ahora el caso límite, sea λ un ordinal límite y suponga que para todo $\alpha < \lambda$ $|L_\alpha| \leq |\alpha|$, entonces:

$$|L_\lambda| = \left| \bigcup_{\alpha < \lambda} L_\alpha \right| \leq \sum_{\alpha < \lambda} |L_\alpha| \leq \sum_{\alpha < \lambda} |\alpha| = |\lambda|.$$

Finalmente suponga que $|L_\alpha| \leq |\alpha|$. Sólo falta $|L_{\alpha+1}| \leq |\alpha| = |\alpha+1|$. Nótese que $\mathcal{L}$ es numerable (las fórmulas son sucesiones finitas de $9 \cup \{v_n : n \in \omega\}$), entonces la cardinalidad de todas las posibles fórmulas de $\mathcal{L}_{L_\alpha}$ es $|L_\alpha| \cdot \omega = |L_\alpha|$, por lo tanto:

$$|L_{\alpha+1}| = |Def(L_\alpha)| \leq |L_\alpha| \leq \alpha|.$$

□

Teorema 3.2.2. *La clase L es un modelo de ZF , es decir para cada axioma Φ de ZF :*

$$ZF \vdash \Phi^L.$$

Demostración. Para cada axioma Φ de ZF se va a dar un argumento desde ZF para probar Φ^L .

i) Extensionalidad. Lo que se desea probar es

$$[(\forall x, y)[(\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow (x = y)]]^L,$$

es decir para $x, y \in L$

$$[(\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow (x = y)]^L,$$

lo cual significa:

$$(\forall z \in L)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow (x = y).$$

Como L es transitivo, $x, y \subseteq L$, entonces

$$(\forall z)(z \in y \leftrightarrow z \in x) \rightarrow (x = y).$$

Lo cual es cierto por el Axioma de Extensionalidad de ZF .

ii) Unión. Queremos probar

$$[\forall x \forall y \forall z (z \in y \leftrightarrow (\exists u \in x)(z \in u))]^L.$$

Dado $x \in L$ vamos a mostrar un $y \in L$ tal que:

$$[\forall z (z \in y \leftrightarrow (\exists u \in x)(z \in u))]^L,$$

es decir: $(\forall z \in L)(z \in y \leftrightarrow (\exists u \in x)(z \in u))$. Por el ZF -Axioma de Unión, sea $y = \bigcup x$ como $x \in L$ hay un α tal que $x \in L_\alpha$ y como L_α es transitivo, $y \subseteq L_\alpha$. Más aún,

$$y = \{z \in L_\alpha : \models_{L_\alpha} (\exists v_1 \in \dot{x})(\dot{z} \in v_1)\},$$

y entonces $y \in Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subseteq L$.

Como $y = \bigcup x$,

$$(\forall z)(z \in y) \leftrightarrow (\exists u \in x)(z \in u),$$

en caso particular

$$(\forall z \in L)(z \in y) \leftrightarrow (\exists u \in x)(z \in u).$$

iii) Infinito. Por iv) del teorema 3.2.1 $\omega \in L$.

iv) Conjunto Potencia.

$$[\forall x \forall y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)]^L.$$

Dado $x \in L$ vamos a mostrar un $y \in L$ tal que

$$(\forall z \in L)(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

Por el Axioma de Esquema de Comprensión y del conjunto Potencia sea

$$y = \{z \in \mathcal{P}(x) : z \in L\}.$$

Probaremos que y es el conjunto requerido. Para cada $z \in y$ sea $f(z)$ el mínimo ordinal β tal que $z \in L_\beta$. Por el Axioma de Colección, sea α el menor ordinal tal que para todo $z \in y$ $f(z) < \alpha$, entonces $y \subseteq L_\alpha$. Pero

$$y = \{z \in L_\alpha : \models_{L_\alpha} (\dot{z} \subseteq \dot{x})\} \in Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1}.$$

Así $y \in L$.

v) Fundación.

$$[\forall x[\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge (\forall z \in y)(z \notin x))]]^L.$$

Sea $x \in L$ y $x \neq \emptyset$, por el Axioma de Fundación de ZF hay un $y \in x$ tal que $(\forall z \in y)(z \notin x)$, como L es transitivo y $y \in L$. Por lo tanto y es tal que $[(\forall z \in y)(z \notin x)]^L$.

vii) Esquema de Comprensión. Sea $\Psi(v_0, \dots, v_n)$ una LST -fórmula. Queremos mostrar:

$$[\forall x \forall v_0, \dots, \forall v_n \exists y \forall z [(z \in y) \leftrightarrow (z \in x) \wedge \Psi(z, v_0, \dots, v_n)]]^L.$$

Sea $x, a_1, \dots, a_n \in L$. Vamos a encontrar un $y \in L$ tal que

$$(\forall z \in L)[(z \in y) \leftrightarrow (z \in x) \Psi^L(z, a_1, \dots, a_n)].$$

Tome α de tal forma que $x, a_1, \dots, a_n \in L_\alpha$. Aplicamos el principio de reflexión generalizado (teorema 1.6.1) podemos encontrar un $\beta > \alpha$ tal que

$$(\forall \vec{z} \in L_\beta)[\Psi^{L_\beta}(\vec{z}) \leftrightarrow \Psi^L(\vec{z})].$$

Sea $\psi(v_0, \dots, v_n)$ la $\mathcal{L}$ fórmula correspondiente a Ψ , y fijemos

$$y = \{z \in L_\beta : \models_{L_\beta} [\psi(\check{z}, \check{a}_1, \dots, \check{a}_n) \wedge (\check{z} \in \check{x})]\}.$$

Entonces $y \in L_{\beta+1} \subseteq L$. Pero por el lema 2.3.2

$$y = \{z \in x : \Psi^{L_\beta}(z, a_1, \dots, a_n)\},$$

pero por la elección de β

$$y = \{z \in x : \Psi^L(z, a_1, \dots, a_n)\},$$

por lo tanto $y \in L$.

viii) Esquema de Colección. Se quiere mostrar que si $\Psi(v_0, \dots, v_n)$ es cualquier LST -fórmula, entonces:

$$\begin{aligned} & [\forall v_2 \dots \forall v_n [\forall x \exists y \Psi(y, x, v_2, \dots, v_n) \\ & \rightarrow \forall u \exists v (\forall x \in u) (\exists y \in v) \Psi(y, x, v_2, \dots, v_n)]]^L. \end{aligned}$$

Sean $a_2, \dots, a_n \in L$ dados, supóngase

$$(\forall x \in L)(\exists y \in L)\Psi^L(y, x, v_2, \dots, v_n).$$

Se va a mostrar que para $u \in L$ existe $v \in L$ tal que

$$(\forall x \in u)(\exists y \in v)\Psi^L(y, x, v_2, \dots, v_n).$$

Como $u, v \subseteq L$ y L es transitivo $x, y \in L$. Para cada $x \in u$ sea $f(x)$ el menor ordinal γ tal que

$$(\exists y \in L_\gamma)\Psi^L(y, x, v_2, \dots, v_n).$$

Sea α tal que para todo $x \in u$ $f(x) < \alpha$ y sea $v = L_\alpha$, por el lema 3.2.1 $L_\alpha \in L$ y claramente

$$(\forall x \in u)(\exists y \in v)\Psi^L(y, x, v_2, \dots, v_n).$$

□

Teorema 3.2.3. *Para cada ordinal límite $\alpha > \omega$ L_α es ameno.*

Demostración. Para que un conjunto M sea ameno debe cumplir:

- i) $(\forall x, y \in M)(\{x, y\} \in M)$.
- ii) $(\forall x \in M)(\bigcup x \in M)$.
- iii) $\omega \in M$.
- iv) $(\forall x, y \in M)(x \times y \in M)$.
- v) Si $R \subseteq M$ es $\Sigma_0(M)$, entonces $(\forall x \in M)(R \cap x \in M)$.

i) Sean $x, y \in L_\alpha$, como

$$L_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta,$$

Hay un $\beta < \alpha$ tal que $x, y \in L_\beta$. Entonces:

$$\{x, y\} = \{z \in L_\beta : \models_{L_\beta} (\dot{z} = \dot{x} \vee \dot{z} = \dot{y})\} \in L_{\beta+1} \subseteq L_\alpha.$$

ii) Sea $x \in L_\alpha$, para algún $\beta < \alpha$, $x \in L_\beta$. Como L_β es transitivo $\bigcup x \subseteq L_\beta$, y tenemos que

$$\bigcup x = \{z \in L_\beta : \models_{L_\beta} (\exists u \in \dot{x})(\dot{z} \in u)\} \in L_{\beta+1} \subseteq L_\alpha.$$

iii) Como $\omega \leq \alpha$ entonces por el lema 3.2.1 $\omega \in L_\alpha$.

iv) Sean $x, y \in L_\alpha$. Para algun $\beta < \alpha$ $x, y \in L_\beta$. Como L_β es transitivo $x, y \subseteq L_\beta$. Sean $a \in x$, $b \in y$, entonces $a, b \in L_\beta$. Por i) de este mismo teorema $\{a\}, \{a, b\} \in L_{\beta+1}$, entonces $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \in L_{\beta+2}$, por tanto $x \times y \subseteq L_{\beta+2}$ y

$$x \times y = \{z \in L_{\beta+2} : \models_{L_{\beta+2}} (\exists a \in \dot{x})(\exists b \in \dot{y})[\dot{z} = (a, b)]\} \in L_{\beta+3} \subseteq L_\alpha.$$

v) Sea $R \subseteq L_\alpha$ tal que R es $\Delta_0(L_\alpha)$, $u \in L_\alpha$. Mostraremos que $R \cap u \in L_\alpha$. Sea $\varphi(v_0, \dots, v_n)$ una Δ_0 fórmula de $\mathcal{L}$ y $a_1, \dots, a_n \in L_\alpha$ tal que

$$(\forall x \in L_\alpha)[x \in R \leftrightarrow \models_{L_\alpha} \varphi(\dot{x}, \dot{a}_1, \dots, \dot{a}_n)].$$

Sea $\beta < \alpha$ tal que $u, a_1, \dots, a_n \in L_\beta$. Como L_β es transitivo, $u \subseteq L_\beta$, entonces:

$$R \cap u = \{x : x \in u \wedge x \in R\} = \{x \in L_\beta : x \in u \wedge x \in R\}.$$

Como φ es Δ_0 , φ es absoluta entre L_α y L_β y para algún $x \in L_\beta$

$$\models_{L_\beta} \varphi(\dot{x}, \dot{a}_1, \dots, \dot{a}_n) \leftrightarrow \models_{L_\alpha} \varphi(\dot{x}, \dot{a}_1, \dots, \dot{a}_n).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} R \cap u &= \{x \in L_\beta : x \in u \wedge \models_{L_\alpha} \varphi(\dot{x}, \dot{a}_1, \dots, \dot{a}_n)\} \\ &= \{x \in L_\beta : x \in u \wedge \models_{L_\beta} \varphi(\dot{x}, \dot{a}_1, \dots, \dot{a}_n)\} \\ &= \{x \in L_\beta : \models_{L_\beta} [\dot{x} \in \dot{u} \wedge \varphi(\dot{x}, \dot{a}_1, \dots, \dot{a}_n)]\} \in L_{\beta+1} \subseteq L_\alpha. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.4. Para cada ordinal límite $\alpha > \omega$, L_α es admisible.

Demostración. Por el teorema 3.2.3 y la definición de admisible, sólo es necesario mostrar que:

$$\forall \vec{a}[\forall x \exists y \varphi(y, x, \vec{a}) \rightarrow \forall u \exists v(\forall x \in u)(\exists y \in v) \varphi(y, x, \vec{a})].$$

Sea $\vec{a} \in L_\alpha$, $\varphi(y, x, \vec{a})$ de tal forma que para cada constante individual y símbolo sea elemento de L_β es decir que sea posible escribir $\varphi(y, x, \vec{a})$ con elementos de L_β . Suponga que $\forall x \exists y \varphi(y, x, \vec{a})$ y sea $u \in L_\alpha$, entonces $u \in L_\delta$, para $\delta < \alpha$; considere $\gamma = \max\{\beta, \delta\}$, entonces definimos

$$v = \{t : \dot{x} \in \dot{u} \wedge \varphi(t, \dot{x}, \vec{a})\} \in L_{\gamma+1} \subseteq L_\alpha.$$

por lo tanto

$$\forall u \exists v(\forall x \in u)(\exists y \in v) \varphi(y, x, \vec{a})$$

y así L_α es admisible. □

3.3 Fórmulas en L

En esta sección se van a estudiar algunas funciones y fórmulas definidas sobre subconjuntos de L de tal forma que se va establecer si son Σ_n , Π_n , o Δ_n , de tal forma que pueda utilizar el lema 1.6.3, estas fórmulas serán útiles en la siguiente sección.

Definición 3.3.1. Se define la fórmula $Seq(y, x)$ la LST -fórmula tal que y es el conjunto de todas las sucesiones finitas de x , $Seq(y, x)$ es la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} (\exists f)[(f \text{ es una función}) \wedge (dom(f) = \omega) \wedge (f(0) = \emptyset) \wedge (y = \bigcup ran(f)) \\ \wedge (\forall n \in \omega)(\forall s \in f(n+1))(\exists t \in f(n))(\exists a \in x)(s = t \cup \{(a, n)\}) \\ \wedge (\forall n \in \omega)(\forall s \in f(n))(\exists a \in x)(\exists t \in f(n+1))(t = s \cup \{(a, n)\})]. \end{aligned}$$

Teorema 3.3.2.

- i) La LST -fórmula $Seq(y, x)$ es Δ_1^{KP} .
- ii) la clase Seq es uniforme $\Delta_1^{L_\alpha}$ para $\alpha > \omega$ límite.

Demostración. i) $Seq(y, x)$ es Σ_1 , sustituyendo ω por la fórmula que antes se menciono para crear ω . Usando KP , más precisamente el teorema de recursión (lema 2.6.1) para cada x podemos construir una función f tal que $y = f(x) \leftrightarrow Seq(y, x)$, entonces

$$KP \vdash \forall x \exists y Seq(y, x).$$

Más aún, y es único y por lo tanto

$$KP \vdash Seq(y, x) \leftrightarrow \forall z [Seq(z, x) \rightarrow z = y].$$

Así entonces $Seq(y, x)$ es Δ_1^{KP} .

ii) Para esta parte se van a usar varios argumentos que serán usados algún par de veces en otras demostraciones más adelante. Por lo cual se debe en primer lugar, tener en cuenta en general la forma en que se puede obtener de Σ_1^{KP} definibilidad un resultado de $\Sigma_1^{L_\alpha}$ definibilidad.

Suponga $\Phi(f, x)$ una Σ_0 LST -fórmula, consideramos la siguiente clase $A = \{x : \exists f \Phi(f, x)\}$. Queremos probar que la clase A es $\Sigma_1^{L_\alpha}$ para algún ordinal límite $\alpha > \omega$. Considere el $\mathcal{L}$ análogo de la fórmula $\exists f \Phi(f, x)$, la cual será de la forma $\exists f \varphi(f, x)$, donde $\Phi(f, x)$ es una fórmula Σ_0 de $\mathcal{L}$.

Queremos mostrar que para cada $x \in L_\alpha$,

$$x \in A \quad \text{si y sólo si} \quad \models_{L_\alpha} \exists f \varphi(f, \dot{x}).$$

Por el lema 2.3.6 si $x, f \in L_\alpha$, tenemos que

$$\Phi(f, x) \leftrightarrow \models_{L_\alpha} \varphi(\overset{\circ}{f}, \overset{\circ}{x}).$$

Con esto se concluye que

$$\exists f \Phi(f, x) \quad \text{implica} \quad \models_{L_\alpha} \exists f \varphi(f, \overset{\circ}{x}).$$

En la práctica debemos probar que si hay un f tal que $\Phi(f, x)$, entonces hay un f en L_α . Ahora veamos cómo funciona esto en el caso de esta demostración.

Sea $\varphi(y, x)$ es $\mathcal{L}$ análogo de la LST -fórmula $Seq(y, x)$. Sea $\alpha > \omega$ tal que $lim(\alpha)$. Probaremos que para cada $x, y \in L_\alpha$,

$$Seq(y, x) \leftrightarrow \models_{L_\alpha} \varphi(\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x}).$$

Por lo tanto se concluirá que $Seq(\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x})$ es uniformemente $\Sigma_1^{L_\alpha}$ si $\alpha > \omega$ y $lim(\alpha)$. También probaremos que para cada $x \in L_\alpha$ hay un (único) $y \in L_\alpha$ tal que $Seq(y, x)$, de hecho se sigue como en la parte *i*) que $Seq(y, x)$ es también uniformemente $\Pi_1^{L_\alpha}$ si $\alpha > \omega$ y $lim(\alpha)$.

Sea $x \in L_\alpha$. Tome $\omega < \gamma < \alpha$ tal que $x \in L_\gamma$. Si $a \in x$ entonces

$$(a, n) = \{\{a\}, \{a, n\}\} \in L_{\gamma+1}$$

para cada $n \in \omega$. Si s es cualquier sucesión finita de elementos de x , $s \in L_{\gamma+2}$, y por lo tanto $Seq(y, x)$, donde

$$y = \{s \in L_{\gamma+2} : \models_{L_{\alpha+2}} \text{"}\overset{\circ}{s} \text{ es una sucesión finita de } \overset{\circ}{x}\text{"}\}.$$

Pero $y \in L_{\gamma+3} \subseteq L_\alpha$. Ahora veamos la función f que aparece en la fórmula $Seq(y, x)$. Si tal f existe (es decir ocurre $Seq(y, x)$),

$$f = \{(s, n) : s = {}^n x \wedge n \in \omega\}.$$

Para cada $n \in \omega$, ${}^n x \in L_{\gamma+3}$, entonces $({}^n x, n) \in L_{\gamma+5}$, así $f \in L_{\gamma+6}$. Por lo tanto $f \in L_\alpha$, lo cual quiere decir que

$$Seq(y, x) \leftrightarrow \models_{L_\alpha} \varphi(\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x}).$$

Hasta aquí termina la demostración, observe que nunca sustituimos ω por una fórmula, esto se debe a que $\omega \in L_\alpha$. $\square$

Definición 3.3.3. Se define la fórmula $Pow(y, x)$ la LST -fórmula tal que y es el conjunto de todos los subconjuntos finitos de x , $Pow(y, x)$ es la siguiente fórmula:

$$\exists z[Seq(z, x) \wedge y = \{ran(u) : u \in z\}]$$

Teorema 3.3.4.

- i) La LST -fórmula $Pow(y, x)$ es Δ_1^{KP} .
- ii) la clase Seq es uniforme $\Delta_1^{L_\alpha}$ para $\alpha > \omega$ límite.

Demostración. i) $Pow(y, x)$ es Σ_1 , al igual que en el lema 3.3.2

$$KP \vdash \forall x \exists! y Pow(y, x),$$

así $Pow(y, x)$ es Δ_1^{KP} .

ii) Sea $\varphi(\mathring{y}, \mathring{x})$ la contraparte de $Pow(y, x)$ en $\mathcal{L}$, la demostración es básicamente la misma que en el lema 3.3.2, es decir, si $x \in L_\alpha$, entonces existe $\gamma < \alpha$ tal que $x \in L_\gamma$ y queremos mostrar que los elementos a los cuales se hace referencia en $Pow(y, x)$ están en L_β , tal que $\beta < \alpha$. si $x \in L_\gamma$ la f a la cual hace referencia $Seq(z, y)$ está en $L_{\gamma+6}$ y $y = \{ran(u) : u \in z\}$ sabemos también por lema anterior $z \in L_{\gamma+3}$, y por lo tanto $y \in Def(L_{\gamma+3}) = L_{\gamma+4}$. De esta forma

$$Pow(y, x) \leftrightarrow \models_{L_\alpha} \varphi(\mathring{y}, \mathring{x}).$$

□

Definición 3.3.5. La LST -fórmula $A(v, u)$ tal que

$$A(v, u) \leftrightarrow v = Def(u)$$

que es:

$$\begin{aligned} & (\forall x \in v)(\exists \varphi)[Fml(\varphi, u) \wedge Fr(\varphi, \{v_0\}) \wedge (x \subseteq u) \\ & \wedge (\forall z \in u)(z \in x \leftrightarrow \exists \psi(Sub(\psi, \varphi, v_0, \mathring{z}) \wedge Sat(u, \psi)))] \\ & \wedge (\forall \varphi)[(Fml(\varphi, u) \wedge Fr(\varphi, \{v_0\})) \rightarrow (\forall x \in v)[(x \subseteq u) \\ & \wedge (\forall z \in u)(z \in x \leftrightarrow \exists \psi(Sub(\psi, \varphi, v_0, \mathring{z}) \wedge Sat(u, \psi)))]]. \end{aligned}$$

La fórmula $A(v, u)$ es la forma natural de definir $v = Def(u)$, acotaremos cuantificadores de forma análoga a como lo hicimos en el caso de la fórmula $S(u, \varphi)$, es decir modificarla hasta obtener una fórmula Σ_1 de tal forma que sea equivalente a la definición de $A(v, u)$. Primero definimos $B(v, u)$ como $A(v, u)$ al sustituir todas las apariciones de $Sat(u, \psi)$ por $S(u, \psi)$, ahora sea $C(w, v, u)$ la fórmula que se obtiene

de $B(v, u)$ al acotar todos los cuantificadores con w (es decir si aparece un cuantificador por ejemplo de la forma $\forall x$ lo sustituye por $(\forall x \in w)$), ahora $C(w, v, u)$ es una fórmula Δ_0 ahora lo que hace falta es decir quién es este w , crearemos un w de tal forma que nos sea útil. Los cuantificadores que acotamos en $B(v, u)$ son de tres tipos, $(\forall\varphi, \exists\varphi$ que se refieren a fórmulas que dan un objeto, y el tercer tipo que son variables) por lo tanto sin perder generalidad los cuantificadores se pueden acotar en el siguiente conjunto:

$$\begin{aligned} K(U) = & [\text{El conjunto de todas las sucesiones finitas de } 9 \\ & \cup \{v_i : i \in \omega\} \cup \{\dot{x} : x \in u\}] \\ & \cup [\text{El conjunto de todas las sucesiones finitas de las sucesiones} \\ & \text{finitas de } 9 \cup \{v_i : i \in \omega\} \cup \{\dot{x} : x \in u\}] \\ & \cup [\text{El conjunto de todas las sucesiones finitas de} \\ & \cup \text{subconjuntos de } \{v_i : i \in \omega\}]. \end{aligned}$$

Recordando que el conjunto 9 se refiere a los símbolos lógicos y demás antes definidos.

Sea $K(w, u)$ la siguiente LST -fórmula:

$$\begin{aligned} (\exists a, b, c, d, e, f) \quad & [(\forall z \in d) Vbl(z) \wedge (\forall i \in \omega)(v_i \in d)] \\ & \wedge [(\forall z \in e) Const(z, u) \wedge (\forall z \in u)(\dot{z} \in e)] \\ & \wedge [Seq(a, 9 \cup d, d \cup e)] \\ & \wedge [seq(b, a)] \\ & \wedge [Pow(f, d) \wedge Seq(c, f)] \\ & \wedge [w = a \cup b \cup c]. \end{aligned}$$

Al igual que en el teorema 3.3.2 puede uno reemplazar la definición de ω con una fórmula, como $Pow(y, x)$ y $Seq(y, x)$ son fórmulas Δ_1 en particular son Σ_1 y entonces $K(w, u)$ es Σ_1 . Sea ahora $D(v, u)$ la siguiente fórmula:

$$\exists w[K(w, u) \wedge C(w, v, u)],$$

entonces, como sólo se acotaron cuantificadores, sucede que $D(v, u) \leftrightarrow v = Def(u)$. Por la construcción de $D(v, u)$ es Σ_1 , sin embargo una vez más por los argumentos mencionados en el lema 3.3.2 podemos concluir lo siguiente:

Corolario 3.3.6.

- i) La LST -fórmula $D(v, u)$ es Σ_1 y Δ_1^{KP}
- ii) La clase D es uniformemente $\Delta_1^{L_\alpha}$ si Límite y $\alpha > \omega$.

El corolario anterior ya nos dice bastante acerca de L_α , cuando $\alpha > \omega$ y $lim(\alpha)$, este corolario nos dice que es cerrado bajo la noción de definibilidad, también que con KP ser definible ya es una noción absoluta.

Corolario 3.3.7. La función Def es uniforme $\Delta_1^{L_\alpha}$ para $\alpha > \omega$ límite.

Definición 3.3.8. La LST -fórmula $E(f, \alpha)$, de tal forma que $E(f, \alpha)$ dice $E(f, \alpha) \leftrightarrow f = (L_\gamma : \gamma \leq \alpha)$, la fórmula es:

$$\begin{aligned} On(\alpha) \quad & \wedge \quad (f \text{ es una función}) \wedge (dom(f) = \alpha + 1) \wedge (f(0) = \emptyset) \\ & \wedge \quad (\forall \gamma \in dom(f)) [((lim(\gamma) \wedge \gamma > 0) \rightarrow (f(\gamma) = \bigcup_{\delta < \gamma} f(\delta))) \\ & \wedge \quad (succ(\gamma) \rightarrow D(f(\gamma), f(\gamma - 1)))]. \end{aligned}$$

La fórmula $E(f, \alpha)$ da como resultado la sucesión $\{L_\beta : \beta < \alpha\}$ para $\beta \leq \alpha$, ahora modificaremos esta fórmula hasta obtener un equivalente Σ_1 , justo como se hizo en la fórmula $D(v, u)$. Sea $F(w, f, \alpha)$ la Δ_0 fórmula obtenida de $E(w, \alpha)$ al reemplazar $D(f(\gamma), f(\gamma - 1))$ con $C(w, f(\gamma), f(\gamma - 1))$, también cambiaremos $f(\gamma) = \bigcup_{\delta < \gamma} f(\delta)$ por una fórmula Δ_0 que es $(\forall x \in f(\gamma))(\exists \delta \in \gamma)(x \in f(\delta)) \wedge (\forall \delta \in \gamma)(f(\delta) \subseteq f(\gamma))$. Ahora en la definición de $F(w, f, \alpha)$ acotaremos con $K(\bigcup ran(f))$, ahora sea $G(f, \alpha)$ la siguiente Σ_1 fórmula:

$$\exists w[K(w, \bigcup ran(f)) \wedge F(w, f, \alpha)],$$

entonces tenemos que $G(f, \alpha) \leftrightarrow f = (L_\gamma : \gamma \leq \alpha)$ por la construcción de $G(f, \alpha)$.

Lema 3.3.9.

- i) La LST -fórmula $G(f, \alpha)$ es Δ_1^{KP}
- ii) La clase G es uniformemente $\Delta_1^{L_\alpha}$ si Límite y $\alpha > \omega$.

Demostración. i) Como se vio en el corolario 3.3.10 y el lema 2.6.1 nos permite construir, dentro de KP , la función $(L_\gamma : \gamma \leq \alpha)$ para cada ordinal α , entonces.

$$KP \vdash \forall \alpha \exists f G(f, \alpha).$$

Y al igual que antes se puede concluir que $G(f, \alpha)$ es Δ_1^{KP} .

ii) Aquí se reduce a demostrar que para cualquier ordinal límite $\alpha > \omega$ $(L_\gamma : \gamma \leq \delta) \in L_\alpha$, si $\delta < \alpha$, entonces $L_\gamma \in L_{\delta+1}$, por el lema 3.2.1, por tanto $\{L_\gamma : \gamma \leq \delta\} \in Def(L_{\delta+1}) = L_{\delta+2}$. Como se vio en el lema 3.3.2 $(L_\gamma : \gamma \leq \delta) \in L_{\alpha+4}$. $\square$

Definición 3.3.10. La LST -fórmula $H(x, \alpha)$, de tal forma que $E(f, \alpha)$ dice, $x = L_\alpha$ la fórmula es:

$$\exists f[G(f, \alpha) \wedge (x = f(\alpha))]$$

De la definición de $H(x, \alpha)$ se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.3.11.

- i) La LST-fórmula $H(x, \alpha)$ es Δ_1^{KP}
- ii) La clase H es uniformemente $\Delta_1^{L_\alpha}$ si Límite y $\alpha > \omega$.

Todos estos lemas son importantes para establecer que si α es un ordinal, entonces L_α por el teorema 3.2.1 y $(\beta < \alpha)$ resulta que también es cerrado bajo la función $\gamma \mapsto L_\gamma$.

Corolario 3.3.12. La función $\gamma \mapsto L_\gamma$ es uniformemente $\Delta_1^{L_\alpha}$, si α es Límite y $\alpha > \omega$.

Todas estas fórmulas dan una idea de la cantidad de información que tienen los L_α , si α es límite. Además las fórmulas anteriores tienen la característica de ser Δ_1^{KP} , entonces son nociones absolutas entre modelos de KP .

3.4 El Axioma de Constructibilidad

En esta sección se habla de el Axioma de Constructibilidad, la forma de enunciarlo como fórmula y las propiedades que posee.

Lema 3.4.1. Sea M un modelo interno de KP . Para cada $\alpha \in On$, $L_\alpha \in M$ y $(L_\alpha)^M = L_\alpha$ (esto significa que $[H(x, \alpha)]^M$, entonces $x = L_\alpha$, es decir que $(L)^M = L$).

Demostración. Como se observó anteriormente, por KP -recursión nos permite construir $(L_\gamma : \gamma \leq \alpha)$, para cada ordinal α . Por lo tanto si $\alpha \in On$, tenemos que $(L_\gamma^M : \gamma \leq \alpha) \in M$, en particular $L_\alpha^M \in M$. Pero por el lema 1.6.3 y el corolario 3.3.11, $L_\alpha^M = L_\alpha$. $\square$

Lema 3.4.2. Sea M un conjunto admisible, sea $\lambda = \sup(M \cap On)$. Para cada $\alpha \in \lambda$, $(L_\alpha)^M = L_\alpha$ por lo tanto $(L)^M = L_\lambda$.

Demostración. Para cada ordinal $\alpha < \lambda$ por el corolario 3.4.1 $L_\alpha \in M$. Y por el lema 1.6.3 y el corolario 3.3.11, $L_\alpha^M = L_\alpha$. Para ver que $(L)^M = L_\lambda$

$$[L = \bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha]^M,$$

entonces

$$(L)^M = (\bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha)^M = (\bigcup_{\alpha \in \lambda} L_\alpha) = L_\lambda.$$

$\square$

Corolario 3.4.3. Para cada α , $(L_\alpha)^L = L_\alpha$, por lo tanto $(L)^L = L$.

Demostración. Por lema 3.4.1. □

Lema 3.4.4. *Sea $\alpha > \omega$ un ordinal límite. Para cada $\gamma < \alpha$, $(L_\gamma)^{L_\alpha} = L_\gamma$, por lo tanto $(L)^{L_\alpha} = L_\alpha$.*

Demostración. Por el teorema 3.2.4 L_α es admisible y por el lema 3.4.2 queda demostrado. □

Lema 3.4.5. *La LST-fórmula “ x es construible” es Σ_1^{KP} .*

Demostración.

$$\begin{aligned} x \text{ es construible} &\leftrightarrow x \in L \\ &\leftrightarrow \exists \alpha (x \in L_\alpha) \\ &\leftrightarrow \exists \alpha \exists u (u = L_\alpha \wedge x \in u). \end{aligned}$$

□

El **Axioma de Constructibilidad** es la afirmación de que todos los conjuntos son construibles, su fórmula es:

$$\forall x (x \in L)$$

y es usualmente abreviada $V = L$.

Como refiere [3], $V = L$ es una interesante afirmación de la Teoría de conjuntos pero no es visto como un axioma fundamental de la Teoría de conjuntos en el sentido de los axiomas de *ZFC*. Así, el uso de la palabra “axioma” en esta conexión es algo diferente que en su uso más común. Desde el punto de vista, al menos [3], tal vez sería más adecuado referirse a $V = L$ como la **Hipótesis de Constructibilidad**. Sin embargo, la forma más común de referirse a esta afirmación es la frase **Axioma de Constructibilidad**, también en otros textos se agregan al autor de esta afirmación refiriéndose a el cómo **Axioma de Constructibilidad de Gödel**.

Lema 3.4.6. *La LST-fórmula $V = L$ es Π_2^{KP} .*

Demostración. $V = L \leftrightarrow \forall x (x \in L)$, lo cual por lema anterior es Π_2^{KP} . □

Teorema 3.4.7. $ZF \vdash (V = L)^L$. *Por lo tanto L es un modelo interno de la teoría $ZF + (V = L)$.*

Demostración. Por el corolario 3.4.3 $(L)^L = L$, pero $(V)^L = L$, entonces

$$(V)^L = (L)^L.$$

Es decir

$$(V = L)^L.$$

□

3.5 Axioma de Elección en L

El Axioma de Elección ha generado controversia desde que se axiomatizó la Teoría de conjuntos, muchos matemáticos consideraron poco natural este axioma y sus resultados paradójicos agregaron fuerza a esta postura. Sin embargo, este axioma es muy utilizado, suponiendo su validez. Es decir que se trabaja con la teoría ZF más el Axioma de Elección. En esta sección vamos a concluir que al menos en el universo L , podemos concluir que:

$$ZF \models_L AC.$$

Para ello primero argumentaremos como se crea un buen orden (recodando que AC es equivalente a que todo conjunto es bien ordenado [5]) sobre L , y después se analizará su complejidad lógica y varias características de AC en L .

Teorema 3.5.1. *Sea $x \in L_{\alpha+1}$, entonces hay una fórmula $\varphi(v_0, \dots, v_n)$ en el lenguaje de la Teoría de conjuntos, y ordinales $\gamma_1, \dots, \gamma_n < \alpha$ tales que:*

$$x = \{z \in L_\alpha : \models_{L_\alpha} \varphi(\check{z}, \check{L}_{\gamma_1}, \dots, \check{L}_{\gamma_n})\}.$$

Demostración. Probaremos por inducción sobre α . Para $\alpha = 0$ el único conjunto posible es el conjunto $\emptyset$. Ahora sea $\alpha > 0$, si α es un ordinal límite entonces si $x \in L_\alpha$ entonces $x \in \bigcup_{\delta < \alpha} L_\delta$ y por lo tanto $x \in L_\gamma$ para $\gamma < \alpha$ y γ ordinal sucesor, por lo tanto sólo bastará con demostrar el caso sucesor. Suponga que para todos los ordinales $\delta < \alpha$ el teorema es válido, como $x \in L_{\alpha+1}$ entonces existen una fórmula $\psi(v_0, \dots, v_n)$ y $p_1, \dots, p_n \in L_\alpha$ tal que:

$$x = \{z \in L_\alpha : \models_{L_\alpha} \psi(\check{z}, \check{p}_1, \dots, \check{p}_n)\}.$$

Sea $\gamma < \alpha$ tal que $p_1, \dots, p_n \in L_{\gamma+1}$. Por hipótesis de inducción p_i cumple la hipótesis:

$$p_i = \{z \in L_\gamma : \models_{L_\gamma} \psi_i(\check{z}, \check{L}_{\gamma_1^i}, \dots, \check{L}_{\gamma_{k(n)}^i})\}.$$

Sea $\psi'_i(v_0, \dots, v_{k(i)}, v_{k(i)+1})$ La fórmula que se obtiene al acotar $\psi_i(v_0, \dots, v_{k(i)})$ por $v_{k(i)+1}$, entonces:

$$\begin{aligned} p_i &= \{z \in L_\alpha : \models_{L_\alpha} [(\check{z} \in \check{L}_\gamma) \wedge \psi'_i(\check{z}, \check{L}_{\gamma_1^i}, \dots, \check{L}_{\gamma_{k(n)}^i}, \check{L}_\gamma)]\} \\ x &= \{z \in L_\alpha : \models_{L_\alpha} (\exists p_1) \dots (\exists p_n) [\psi(\check{z}, \check{p}_1, \dots, \check{p}_n) \\ &\wedge (\forall v)[(v \in p_1) \leftrightarrow (\check{v} \in \check{L}_\gamma) \wedge \psi'_1(\check{v}, \check{L}_{\gamma_1^1}, \dots, \check{L}_{\gamma_{k(n)}^1}, \check{L}_\gamma)] \dots \\ &\wedge (\forall v)[(v \in p_n) \leftrightarrow (\check{v} \in \check{L}_\gamma) \wedge \psi'_n(\check{v}, \check{L}_{\gamma_1^n}, \dots, \check{L}_{\gamma_{k(n)}^n}, \check{L}_\gamma)]]\} \end{aligned}$$

y el teorema queda demostrado. $\square$

Recordando que antes se definió una relación de los símbolos lógicos y variables con la siguiente tabla:

(	)	v_n	$\dot{x}$	$\in$	$=$	$\wedge$	$\neg$	$\exists$
0	1	(2,n)	3	4	5	6	7	8

Donde v_n son las variables, $\dot{x}$ son las constantes individuales del lenguaje y la forma de tomar las fórmulas como cadenas finitas de caracteres es de acuerdo al capítulo 2, sin embargo se colapsan las constantes al número 3, así por ejemplo $10 \in 21$ es la misma fórmula que $11 \in 31$ según esta identificación.

Ahora se va a crear un buen orden a las fórmulas del lenguaje de Teoría de conjuntos:

Sea $A = 9 \cup \{v_n : n \in \omega\}$, $k(x) : A \longrightarrow \omega$ se define como:

$$k(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in 9, \\ x + 9, & \text{si } x = v_n (v_n = (2, n)). \end{cases}$$

Sean φ y ψ dos fórmulas, decimos que $\varphi \preceq \psi$ si y sólo si:

- φ es un segmento inicial de ψ .
- $k(\varphi(i)) < k(\psi(i))$.

Ahora un buen orden sobre sucesiones finitas de ordinales:

Sean s, t dos sucesiones finitas de ordinales entonces $s <^* t$ si y sólo si:

- $\text{dom}(s) < \text{dom}(t)$ ó
- $\text{dom}(s) = \text{dom}(t)$ y $s(i) < t(i)$, donde i es el mínimo número tal que $s(i) \neq t(i)$.

Ahora el buen orden para L . Sean $x, y \in L$, decimos que $x <_L y$ en cualquiera de los siguientes casos:

1. α es el mínimo ordinal tal que $x \in L_{\alpha+1}$ y α es menor que β , donde β es el mínimo ordinal tal que $y \in L_{\beta+1}$.
2. Existe un ordinal α tal que x y y ambos se encuentran en $L_{\alpha+1} \setminus L_\alpha$, entonces:
 - (a) $\varphi \preceq \psi$, donde φ y ψ cumplen que son las $\preceq$ -fórmulas tales que existen ordinales $\gamma_1, \dots, \gamma_n < \alpha$ y $\delta_1, \dots, \delta_m < \alpha$ respectivamente y x, y son:

$$x = \{z \in L_\alpha : \models_{L_\alpha} \varphi(\dot{z}, \dot{L}_{\gamma_1}, \dots, \dot{L}_{\gamma_n})\}$$

$$y = \{z \in L_\alpha : \models_{L_\alpha} \psi(\dot{z}, \dot{L}_{\delta_1}, \dots, \dot{L}_{\delta_m})\}$$

(b) Las fórmulas de 2a son iguales pero $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle <^* \langle \delta_1, \dots, \delta_m \rangle$, donde $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ y $\langle \delta_1, \dots, \delta_m \rangle$ son los $<^*$ ordinales que cumplen.
 $<_L$ es un buen orden. Sea $X \subseteq L$ (X subconjunto o subclase)

- Sea α el mínimo ordinal tal que $L_\alpha \cap X \neq \emptyset$ y Sea $X_0 = X \cap L_\alpha$, Si $|X_0| = 1$ ya terminamos, si no note que si $y, x \in X_0$ entonces existe $x, y \in L_{\alpha+1} \setminus L_\alpha$.
- Sea $X_1 = \{y \in X_0 : (\forall z \in X_0)(\varphi_y \lesssim \varphi_z)\}$, donde φ_y y φ_z cumplen (2a), sí $|X_1| = 1$ ya terminamos, si no,
- Sea $X_2 = \{y \in X_1 : (\forall z \in X_1)(s_y <^* s_z)\}$, donde s_y y s_z cumplen (2b).

Note que en este punto $|X_2| = 1$. Ya que si se llega a la última condición del orden entonces sí $x, y \in X_2$ implica que $y = x$. Así $x \in X_2$ es el primer elemento de X , y $<_L$ es un buen orden.

Ahora lo que se va a realizar es dar una fórmula que refiera a este buen orden, además de que se va a concluir que tal fórmula será Δ_1 .

La siguiente LST -fórmula, $N(\alpha, x, \varphi, t)$ que dice φ es una fórmula de $\mathcal{L}$, t es una sucesión finita de ordinales menores que α , las variables libres de φ son $v_0, \dots, v_n$, donde $n = \text{dom}(t)$, y

$$x = \{z \in L_\alpha : \models_{L_\alpha} \varphi(\dot{z}, \dot{L}_{t(0)}, \dots, \dot{L}_{t(n-1)})\}$$

que es:

$$\begin{aligned} \exists u \exists f \exists n \exists \psi \quad & [Fml(\varphi, \emptyset) \wedge Finseq(t) \wedge (\text{dom}(t) = n) \wedge (\forall i \in n)(t(i) \in \alpha) \\ & \wedge Fr(\varphi, u) \wedge (f : n+1 \leftrightarrow u) \wedge (\forall i \in n+1)(f(i) = v_i) \\ & \wedge Finseq(\psi) \wedge (\text{dom}(\psi) = n+1) \wedge (\psi(0) = \varphi) \\ & \wedge (\forall i \in n) Sub(\psi(i+1), \psi(i), v_{i+1}, \dot{L}_{t(i)}) \wedge (x \subseteq L_\alpha) \\ & \wedge (\forall z \in L_\alpha)(z \in x \leftrightarrow \exists \theta (Sub(\theta, \psi(n), v_0, \dot{z}) \wedge Sat(L_\alpha, \theta)))]]. \end{aligned}$$

La siguiente LST -fórmula dice:

$$\begin{aligned} \varphi \lesssim \varphi' \leftrightarrow & [(A = 9 \cup \{v_n : n \in \omega\})] \wedge [(x \in 9 \wedge k(x) = x) \vee \\ & (x = v_n \wedge k(x) = n+9)] \wedge [(\exists m \in \omega)(k(\varphi(m)) \in k(\varphi'(m))) \vee \\ & ((\forall m \in \min\{\|\varphi\|, \|\varphi'\|\})(k(\varphi(m)) = k(\varphi'(m))) \wedge \|\varphi\| \in \|\varphi'\|)]. \end{aligned}$$

La fórmula anterior compara dos fórmulas en nuestro caso, pero es más general, por simplicidad compara dos cadenas de caracteres y no necesariamente dos fórmulas, teniendo en cuenta $N(\alpha, x, \varphi, t)$ ya considera cuando es una fórmula y más aún que funcione para el criterio de comparación de elementos en L antes mencionado. La

siguiente *LST*-fórmula, $M(\alpha, x, \varphi)$ dice que φ es la $\prec$ -fórmula $\mathcal{L}$ tal que $N(\alpha, x, \varphi, t)$ para algún t :

$$(\exists t)N(\alpha, x, \varphi, t) \wedge (\forall \varphi')[(\exists t')N(\alpha, x, \varphi', t') \rightarrow (\varphi \prec \varphi' \vee \varphi = \varphi')].$$

La siguiente fórmula dice que la sucesión finita de ordinales es la $<^*$ -mínima sucesión que cumple que es menor que α y además sucede que $N(\alpha, x, \varphi, t)$:

$$N(\alpha, x, \varphi, t) \wedge (\forall t')[N(\alpha, x, \varphi, t') \rightarrow (t \leq^* t')].$$

Hasta ahora hemos creado fórmulas que van diciendo las partes necesarias para definir a partir de una fórmula la relación $x <_L y$, ahora crearemos tal fórmula, $X(x, y)$ la *LST*-fórmula que expresa $x <_L y$:

$$(\exists \alpha)[(x \in L_\alpha) \wedge (y \notin L_\alpha)] \vee (\exists \alpha)Q(x, y, \alpha),$$

donde $Q(x, y, \alpha)$ es la *LST*-fórmula:

$$\begin{aligned} &[(x \in L_{\alpha+1}) \wedge (y \in L_{\alpha+1}) \wedge (x \notin L_\alpha) \wedge (y \notin L_\alpha)] \\ &\wedge [(\exists \varphi \exists \psi)[M(\alpha, x, \varphi) \wedge M(\alpha, y, \psi) \wedge (\varphi \prec \psi)] \\ &\vee (\exists \varphi)[M(\alpha, x, \varphi) \wedge M(\alpha, y, \varphi) \\ &\wedge (\exists s \exists t)[P(\alpha, c, \varphi, s) \wedge P(\alpha, y, \varphi, t) \wedge (s <^* t)]]]. \end{aligned}$$

Como ya se notó, $(s <^* t)$ no se ha definido, sin embargo veamos que si los ordinales usados para crear las variables que utiliza esta relación son menores que α entonces $<^* \in L_{\alpha+5}$. Primero supongase $\alpha > \omega$, la expresión $(s <^* t)$ toma dos n -adas de ordinales y las compara, por ejemplo suponga que $t_1 <^* t_2$, y $t_1 = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ y $t_2 = (\gamma'_0, \dots, \gamma'_m)$, los ordinales implicados son menores que α entonces, los conjuntos $\{\gamma_0\}, \dots, \{\gamma_0, \dots, \gamma_n\}$ están en $L_{\alpha+1}$, entonces t_1 y $t_2 \in L_{\alpha+2}$, ahora con las mismas condiciones se puede argumentar que $(t_1, t_2) \in L_{\alpha+4}$ y el orden $<^*$ es un elemento de $L_{\alpha+5}$ pues

$$\begin{aligned} <^* = \{ (t_1, t_2) : (t_1 = (\gamma_0, \dots, \gamma_n) \wedge t_2 = (\gamma'_0, \dots, \gamma'_m)) \\ &\wedge (\exists \delta \in \alpha)(k \in \omega)(\gamma_k = \delta \wedge \delta \in \gamma'_k) \}. \end{aligned}$$

Ahora sea $R(x, y, \alpha, w)$ de tal forma que todos los cuantificadores libres que aparecen en $Q(x, y, \alpha)$ son acotados por w , entonces $x <_L y$ está expresado por la siguiente fórmula:

$$(\exists \alpha)[(x \in L_\alpha) \wedge (y \notin L_\alpha)] \vee (\exists \alpha)(\exists w)[w = L_{\max(\omega, \alpha+5)} \wedge R(x, y, \alpha, w)].$$

Esta fórmula está denotada por $WO(x, y)$. Es importante notar que como se vio antes $<^*$ es un elemento de $L_{\alpha+5}$, de igual manera se concluye que todas las herramientas usadas pueden ser acotados en $L_{\alpha+5}$. También es claro que es una fórmula

Σ_1 (pues está formado por dos subfórmulas Σ_1). El siguiente teorema muestra que este buen orden es una noción absoluta.

Lema 3.5.2.

- i) $KP \vdash \{ (x, y) : WO(x, y) \}$ es un buen orden de L .
- ii) La LST-fórmula $WO(x, y)$ es $\Delta_1^{KP+(V=L)}$.

Demostración. i) Por la definición de $WO(x, y)$, si $x \neq y$ $WO(x, y)$ o $WO(y, x)$, pero si $x \neq y$ $x <_L y$ o $y <_L x$, suponga $x <_L y$, entonces si $x, y \in L_\alpha$

$$\models_{L_{\max\{\omega, \alpha+6\}}} WO(x, y).$$

Por como antes se mostró la construcción de la fórmula $WO(x, y)$ todos los elementos de esta fórmula (incluido ω) son elementos de $L_{\alpha+5}$, es decir $WO(x, y)$ es una fórmula definible desde $L_{\alpha+5}$.

- ii) $WO(x, y)$ es Σ_1 por i) tenemos

$$KP \vdash (\forall x, y \in L)[WO(x, y) \leftrightarrow \neg[x = y \vee WO(y, x)]].$$

así $WO(x, y)$ es $\Pi_1^{KP+(V=L)}$. □

Corolario 3.5.3. Sea $wo(x, y)$ el análogo de $WO(x, y)$ en $\mathcal{L}$, entonces:

- i) Si $x, y \in L_\alpha$, entonces $WO(x, y) \leftrightarrow \models_{L_\gamma} wo(\dot{x}, \dot{y})$, donde $\gamma = \max(\omega, \alpha + 6)$.
- ii) La relación $x <_L y$ es uniformemente $\Delta_1^{L_\alpha}$ para $\alpha > \omega$.
- iii) Si $\alpha > \omega$ un ordinal límite, entonces: $\{(x, y) : \models_{L_\alpha} wo(\dot{x}, \dot{y})\}$ es un buen orden de L_α .

Demostración. Por i) del lema anterior i) queda demostrado. ii) es consecuencia de i) y iii) es cierto por i) y KP-teorema de recursión. □

Corolario 3.5.4.

- i) $x <_L y, y \in L_\alpha$ implica $x \in L_\alpha$.
- ii) $x \in L_\alpha, y \notin L_\alpha$ implica $x <_L y$.
- iii) $x \in y \in L$ implica $x <_L y$.

Demostración. iii) $x \in y \in L$ entonces sea $\alpha + 1$ tal que $y \in L_{\alpha+1}$ y $y \notin L_\alpha$, $x \in y \subseteq Def(L_\alpha) \subseteq \mathcal{P}(L_\alpha)$ y $x \in L_\alpha$, así $x <_L y$. □

Definición 3.5.5. Sea $pr(x)$ la función predecesor definida en L por:

$$pr(x) = \{z : z <_L x\}.$$

Lema 3.5.6.

- i) $x \in L \rightarrow pr(x) \in L$.
- ii) Si $\alpha > \omega$ es un ordinal límite, entonces $x \in L_\alpha \rightarrow pr(x) \in L_\alpha$.
- iii) pr es uniformemente $\Delta_1^{L_\alpha}$ para $\alpha > \omega$ y α límite.

Demostración. i) Directamente de ii).

ii) Sea $x \in L_\alpha$, Sea $\beta < \alpha$ tal que $x \in L_\beta$. Como $z <_L x \rightarrow z \in L_\beta$. Por el corolario 3.5.3 i),

$$(\forall a, b \in L_\beta)[WO(x, y) \leftrightarrow \models_{L_\gamma} wo(\overset{\circ}{a}, \overset{\circ}{b})],$$

donde $\gamma = \max\{\omega, \beta + 6\}$. Entonces

$$pr(x) = \{z \in L_\gamma : \models_{L_\gamma} wo(\overset{\circ}{z}, \overset{\circ}{x})\} \in L_{\gamma+1} \subseteq L_\alpha.$$

iii) Sea $w(z, x, t)$ la $\mathcal{L}$ obtenida al acotar todos los cuantificadores de $wo(z, x)$ por t . Por el corolario 3.5.3 i),

$$y = pr(x) \leftrightarrow \models_{L_\alpha} (\exists \beta)[(\overset{\circ}{x} \in L_\beta) \wedge (\overset{\circ}{y} \subseteq L_\beta) \wedge (\forall z \in L_\beta)(z \in \overset{\circ}{y} \leftrightarrow wo(z, \overset{\circ}{x}, L_{\max\{\omega, \beta+6\}}))].$$

Entonces pr es uniformemente $\Sigma_1^{L_\alpha}$ si $\alpha > \omega$ y es límite. Por el corolario 2.4.11 pr es $\Delta_1^{L_\alpha}$. $\square$

Ahora crearemos una función que enumera a los elementos del modelo L , $Enum(\alpha, x)$ dice que x es el α -ésimo miembro de L bajo el buen orden $<_L$, entonces $Enum(\alpha, x)$ es la siguiente fórmula:

$$(\exists f) [(f \text{ es una función}) \wedge (dom(f) = \alpha + 1) \wedge (\forall \xi \in \alpha + 1)(\forall \zeta \in \alpha + 1)(\xi < \zeta \rightarrow f(\xi) <_L f(\zeta)) \wedge (\exists z)[(z = pr(x)) \wedge (\forall y \in z)(\exists \beta \in \alpha)(y = f(\beta))] \wedge (f(\alpha) = x)].$$

La fórmula $Enum(\alpha, x)$ es Σ_1 , entonces:

Corolario 3.5.7. La fórmula $Enum(\alpha, x)$ es Σ_1 , para L absoluta y es tal que:

$$KP \vdash \text{“Si } F = \{(x, \alpha) : Enum(\alpha, x)\}, \text{ entonces } F : On \longleftrightarrow L\text{”}.$$

Demostración. Es claro que $Enum$ es Σ_1 . Por teorema de recursión en KP $Enum$ es Δ_1^{KP} . $\square$

Este siguiente teorema da como resultado que la hipótesis $V = L$ puede ser debilitada obteniendo el mismo resultado de la siguiente manera:

Teorema 3.5.8. $KP \vdash \forall a(a \subseteq On \rightarrow a \in L) \rightarrow (V = L)$.

Demostración. (Dentro de la teoría KP .) Suponga que el conjunto de todos los ordinales es construible. Probaremos por $\in$ -inducción $\forall x(x \in L)$. Sea x dado, suponga $y \in x \rightarrow y \in L$.

Por Σ_1 -Colección, sea

$$a = \{\alpha \in On \wedge (\exists y \in x) Enum(\alpha, y)\}.$$

Por hipótesis $\alpha \in L$. Entonces usando hipótesis de inducción

$$x' = \{y : (\exists \alpha \in a) Enum(\alpha, y)^L\} \in L.$$

Y por absolutez de $Enum$, $x = x'$, por lo tanto $x \in L$. □

Teorema 3.5.9. $ZF \vdash (AC)^L$.

Demostración. Por el corolario 3.5.7. □

3.6 GCH en L

En esta sección se trabaja sobre la Hipótesis Generalizada del Continuo, tratando de llegar a conclusiones análogas a las que se llegó con AC . Entonces empezaremos con un par de lemas que son importantes por que ayudan en el trabajo de decidir GCH dentro de L , pero también en las demostraciones de la siguiente sección y en general con el uso del Axioma de Constructibilidad son muy importantes y de una utilidad trascendental.

Lema 3.6.1. Sea $\mathbf{M} = \langle M, \in, A_1, \dots, A_n \rangle$, donde M es un conjunto ameno y $\mathbf{N} = \langle N, \in, A'_1, \dots, A'_n \rangle$ una subestructura de $\mathbf{M}$. Sea $n > 0$, entonces son equivalentes:

- i) $\mathbf{N} \prec_n \mathbf{M}$.
- ii) Si A es no vacío y es $\Sigma_n^{\mathbf{M}}(\mathbf{N})$ subconjunto de M , entonces $A \cap N \neq \emptyset$.

Demostración. $i) \rightarrow ii)$. Sea A un $\Sigma_n^{\mathbf{M}}(N)$ subconjunto de M , sea $\varphi(x, y)$ una Π_{n-1} fórmula del M -lenguaje, con parámetros en N tal que:

$$A = \{a \in M : \models_M \exists y \varphi(\dot{x}, y)\}.$$

Como $A \neq \emptyset$,

$$\models_M \exists x \exists y \varphi(x, y).$$

Como M es ameno,

$$\models_M \exists z \varphi((z)_0, (z)_1).$$

Al suponer $i) N \prec_n M$ entonces

$$\models_N \exists z \varphi((z)_0, (z)_1).$$

Así, para algún $x \in N$,

$$\models_N \exists y \varphi(\dot{x}, y).$$

Pero $\models_N \exists y \varphi(\dot{x}, y)$, es una Σ_n fórmula del M -lenguaje con parámetros en N , así por $i)$

$$\models_M \exists y \varphi(\dot{x}, y).$$

Por lo tanto $x \in A$, pero $x \in N$ también. Por consiguiente

$$A \cap N \neq \emptyset.$$

$ii) \rightarrow i)$. Probaremos sobre la longitud de las fórmulas para cada fórmula φ en el M -lenguaje con parámetros en N que sean a lo más Σ_n ,

$$\models_N \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \models_M \varphi.$$

Si φ es primitiva el resultado es inmediato ($x \in y, x = y$ tienen que estar en N después de todo los parámetros están en N). Suponga que φ_1 y φ_2 cumplen el teorema, entonces $\varphi_1 \wedge \varphi_2, \neg \varphi_1$ también cumplen el teorema. Sólo es necesario considerar el caso en el que φ es de la forma $\exists x \psi(x)$. Suponga

$$\models_N \varphi.$$

Entonces

$$\models_N \exists x \psi(x).$$

Así para algún $x \in N$,

$$\models_N \psi(\dot{x}).$$

Por cómo se crea $\psi(\dot{x})$ es a lo más Π_{n-1} y también es de menor longitud que φ , entonces por hipótesis de inducción

$$\models_M \psi(\dot{x}).$$

Entonces

$$\models_M \exists x \psi(x),$$

es decir

$$\models_M \varphi.$$

Inversamente, suponga que

$$\models_M \varphi,$$

entonces

$$\models_M \exists x \psi(x).$$

Sea

$$A = \{x \in M : \models_M \psi(\dot{x})\}.$$

Entonces A es no vacío y es un $\Sigma_n^M(N)$ subconjunto de M (más exactamente es Π_{n-1}^M). Entonces por *ii*),

$$A \cap N \neq \emptyset.$$

Sea $x \in A \cap N$. Entonces

$$\models_M \psi(\dot{x}).$$

Pero $\psi(\dot{x})$ tiene parámetros en N , además de φ , y es a lo más Π_{n-1} . Así, por hipótesis de inducción

$$\models_M \psi(\dot{x}),$$

entonces

$$\models_M \exists x \psi(x),$$

es decir

$$\models_M \varphi(x).$$

□

Lema 3.6.2. (*Lema de condensación*). Sea α un ordinal límite. Si $X \prec_1 L_\alpha$, entonces existe un único π y un único $\beta \leq \alpha$ que cumplen:

- i) $\pi : \langle X, \in \rangle \cong \langle L_\beta, \in \rangle$.
- ii) Si $Y \subseteq X$ es transitivo, entonces $\pi \upharpoonright Y = id \upharpoonright Y$.
- iii) $\pi(x) \leq_L x$ para todo $x \in X$.

Demostración. Primero por inducción en m podemos mostrar que $L_m \in X$ para todo $m < \omega$. En efecto, si $x \in L_{m+1}$, entonces x es de la forma

$$x = \{a_1, \dots, a_n\},$$

para algunos $a_1, \dots, a_n \in L_m$, y

$$\models_{L_\alpha} \exists x[(\dot{a}_1 \in x) \wedge \dots \wedge (\dot{a}_k \in x) \wedge (\forall z \in x)((z = \dot{a}_1) \vee \dots \vee (z = \dot{a}_k))],$$

Entonces si $L_m \subseteq X$ esta fórmula es cierta en X . Ahora, en caso de que $\alpha = \omega$, tenemos que $X = L_\alpha$, y el teorema es trivialmente válido. Entonces suponga $\alpha > \omega$. Note primero que X es extensional. Suponga $x, y \in X$, $x \neq y$. Entonces

$$\models_{L_\alpha} \exists z(z \in \dot{x} \leftrightarrow z \notin \dot{y}),$$

entonces $X \prec_1 L_\alpha$,

$$\models_X \exists z(z \in \dot{x} \leftrightarrow z \notin \dot{y}),$$

lo que significa que para algún $z \in X$,

$$z \in x \leftrightarrow z \notin y.$$

Como X es extensional, por el lema del colapso transitivo 1.5.12 hay un único π y un único conjunto transitivo M tal que

$$\pi : X \cong M.$$

Entonces lo que hay que probar que para algún único ordinal $\beta \leq \alpha$ tal que $M = L_\beta$.

Por el lema 3.3.10 hay una Δ_0 *LST*-fórmula $\Phi(z, v, \gamma)$ tal que

$$(a) \quad \forall \gamma \forall v [v = L_\gamma \leftrightarrow \Phi(z, v, \gamma)],$$

y más aún, si $\varphi(z, v, \gamma)$ es el $\mathcal{L}$ -análogo de $\Phi(z, v, \gamma)$, entonces usando el lema 2.3.6

$$(b) \quad (\forall \gamma < \alpha)(\forall v)[v = L_\gamma \leftrightarrow v \in L_\alpha \wedge \models_{L_\alpha} \exists z \varphi(z, \dot{v}, \dot{\gamma})].$$

Ahora sea $\pi^{-1} : M \prec_1 L_\alpha$, entonces si $\models_M On(x)$, entonces $\pi^{-1}(x) \in \alpha$. Por (b) tenemos

$$(c) \quad (\forall \gamma < \alpha)[\models_{L_\alpha} \exists v \exists z \varphi(z, v, \dot{\gamma})].$$

Entonces aplicando π^{-1} , tenemos

$$(d) \quad (\forall \gamma \in M)[\models_M \exists v \exists z \varphi(z, v, \dot{\gamma})].$$

Así,

$$(e) \quad (\forall \gamma \in M)(\forall v \in M)(\exists z \in M)[\models_M \varphi(\dot{z}, \dot{v}, \dot{\gamma})].$$

Como M es transitivo por el lema 2.3.6 tenemos

$$(f) \quad (\forall \gamma \in M)(\forall v \in M)(\exists z \in M)\Phi(z, v, \gamma)$$

En consecuencia por (a)

$$(g) \quad (\forall \gamma \in M)(L_\gamma \in M).$$

Ahora, como M es transitivo, $M \cap On = \beta$ para algún ordinal β . Por consiguiente (g) se convierte en

$$(h) \quad (\forall \gamma \in \beta)(L_\gamma \in M).$$

Por consiguiente, como M es transitivo, concluimos

$$(i) \quad \bigcup_{\gamma < \beta} L_\gamma \subseteq M.$$

Nuevamente, como

$$L_\alpha = \bigcup_{\gamma < \alpha} L_\gamma,$$

tenemos

$$(j) \quad (\forall x \in L_\alpha)[\models_{L_\alpha} \exists \gamma \exists v \exists z (\varphi(z, v, \gamma) \wedge (\dot{x} \in v))].$$

Aplicando π^{-1} ,

$$(k) \quad (\forall x \in M)[\models_M \exists \gamma \exists v \exists z (\varphi(z, v, \gamma) \wedge (\dot{x} \in v))].$$

Entonces,

$$(l) \quad (\forall x \in M)(\exists \gamma \in M)(\exists v \in M)(\exists z \in M)[\models_M \varphi(\dot{z}, \dot{v}, \dot{\gamma}) \wedge (\dot{x} \in \dot{v})].$$

Entonces por 2.3.6,

$$(m) \quad (\forall x \in M)(\exists \gamma \in M)(\exists v \in M)(\exists z \in M)[\models_M \varphi(z, v, \gamma) \wedge (x \in v)].$$

Así, por (a),

$$(n) \quad (\forall x \in M)(\exists \gamma \in M)(x \in L_\gamma).$$

Entonces por definición de β ,

$$(o) \quad (\forall x \in M)(\exists \gamma \in \beta)(x \in L_\gamma).$$

En otras palabras,

$$(p) \quad M \subseteq \bigcup_{\gamma < \beta} L_\gamma.$$

Combinando (i) y (p) concluimos

$$(q) \quad M = \bigcup_{\gamma < \beta} L_\gamma.$$

Como $\lim(\alpha)$, sucede

$$(\forall \nu \in \alpha)[\models_{L_\alpha} \exists \tau (\dot{\nu} < \tau)],$$

de lo cual se concluye que

$$(\forall \nu \in M)[\models_M \exists \tau (\dot{\nu} < \tau)].$$

Así,

$$(\forall \nu \in \beta)(\exists \tau \in \beta)(\nu < \tau).$$

Por lo tanto $\lim(\beta)$, y (q) significa que

$$M = L_\beta.$$

Con esto se completa la demostración de i) del teorema.

ii) Se sigue inmediatamente del lema de condensación. Así, sólo falta iii).

Suponga que para algún $x \in X$ $\pi(x) >_L x$. Sea x_0 el $<_L$ -menor tal que cumple esta propiedad. como $x_0 \in X$, $\pi(x_0) \in L_\beta$. Pero $x_0 <_L \pi(x_0)$. Así, por el corolario 3.5.4 i), $x_0 \in L_\beta$, y $x_0 = \pi(x_1)$ para algún $x_1 \in X$. Entonces

$$\pi(x_1) = x_0 <_L \pi(x_0).$$

Pero $<_L$ es uniformemente $\Sigma_1^{L_\lambda}$, si $\lambda > \omega$ y límite.

Como $\pi^{-1} : L_\beta \prec_1 L_\alpha$, α, β límites,

$$\pi(x_1) = \pi(x_0),$$

implica $x_1 <_L x_0$ y $x_1 <_L \pi(x_1)$ lo cual contradice la minimalidad de x_0 . Con esto se concluye la demostración del lema. $\square$

Lema 3.6.3. *Seas α un ordinal límite, $X \subseteq L_\alpha$ y M el conjunto de todos los elementos de L_α que son definibles desde elementos de X , es decir que $a \in M$ si y sólo si para alguna fórmula $\varphi(v_0)$ de $\mathcal{L}_X$, hay un único elemento de L_α tal que $\models_{L_\alpha} \varphi(\dot{a})$, entonces:*

$$X \subseteq M \prec L_\alpha,$$

más aún M es la menor subestructura elemental de L_α que contiene a todos los elementos de X .

Demostración. Si $\alpha = \omega$, entonces como se vio en la demostración del lema de condensación 3.6.2, $M = L_\alpha$ y el único submodelo elemental de L_ω , es L_ω mismo. Entonces suponga $\alpha > \omega$ de aquí al final de la demostración.

Si $x \in X$, entonces x es definible en L_α con la fórmula $(v_0 = \dot{x})$, así $X \subseteq M$. Para mostrar que $M \prec L_\alpha$ probaremos que para cualquier fórmula $\varphi(v_0)$ de $\mathcal{L}_X$,

$$\models_{L_\alpha} \exists x \varphi(x) \quad \text{implica} \quad (\exists x \in M) [\models_{L_\alpha} \varphi(\dot{x})].$$

(Criterio de Tarski-Vaught) Sea $\psi(v_0)$ la siguiente $\mathcal{L}_X$ -fórmula:

$$\varphi(v_0)(\forall v_1)(v_1 <_L v_0 \rightarrow \neg \varphi(v_1)).$$

Si $\models_{L_\alpha} \exists x \varphi(x)$ entonces $\models_{L_\alpha} \exists x \psi(x)$ (ψ nos da el $<_L$ -mínimo x tal que $\varphi(x)$). Pero es claro que sólo un $x \in L_\alpha$ cumple $\models_{L_\alpha} \psi(\dot{x})$. Entonces la fórmula $\psi(v_0)$ define x desde elementos de X en L_α . Así, $x \in M$. Como $\models_{L_\alpha} \varphi(\dot{x})$, hemos terminado.

Suponga ahora que $X \subseteq N \prec L_\alpha$, mostraremos que $M \subseteq N$. Sea $x \in M$. Para alguna fórmula $\varphi(v_0)$ de $\mathcal{L}_X$, x es el único elemento de L_α tal que $\models_{L_\alpha} \varphi(\dot{x})$. Ahora, $\models_{L_\alpha} \exists v_0 \varphi(v_0)$, como $X \subseteq N \prec L_\alpha$ tenemos $\models_N \exists v_0 \varphi(v_0)$, así para algún $y \in N$, $\models_{L_\alpha} \varphi(\dot{y})$. Sin embargo $N \prec L_\alpha$, por lo tanto $\models_{L_\alpha} \varphi(\dot{y})$ y $x = y$. $\square$

Corolario 3.6.4. *Sea α un ordinal límite. Para cada $X \subseteq L_\alpha$ hay una mínima subestructura elemental $M \prec L_\alpha$ tal que $X \subseteq M$. tal que:*

$$|M| = \max\{|X|, \omega\}.$$

Demostración. Sea M como en el lema anterior. Como $\mathcal{L}_X$ tiene $\max\{|X|, \omega\}$ fórmulas y $|M| = \max\{|X|, \omega\}$. □

Hay una diferencia notable entre la jerarquía construible y la jerarquía acumulativa de conjuntos, esta diferencia es la tasa de crecimiento. Por definición, si $x \in V_\alpha$ en el nivel $V_{\alpha+1}$ aparecen todos los subconjuntos de x . Pero lo mismo no puede decirse de la jerarquía construible. Por ejemplo, $L_{\omega+2}$ contendrá algunos subconjuntos de ω , pero no todos ellos. Más aparecerán en el nivel $L_{\omega+3}$, aún más en el nivel $L_{\omega+4}$, etcétera. Sin embargo, el siguiente lema, hay un límite a este proceso de “crecimiento gradual”.

Lema 3.6.5. *Suponga $V = L$, sea κ un cardinal. Si $x \subseteq L_\alpha$ para algún $\alpha < \kappa$, entonces $x \in L_\kappa$.*

Demostración. Para $\kappa < \omega$ el resultado es inmediato ya que $V_\kappa = L_\kappa$. Entonces suponga $\kappa > \omega$. Tomemos $\alpha < \kappa$ de modo que $\alpha \geq \omega$ y $x \subseteq L_\alpha$, sea λ un ordinal límite tal que $\lambda \geq \kappa$ y $x \in L_\lambda$. Por el corolario 3.6.4 sea $M \prec L_\lambda$ tal que $L_\alpha \cup \{x\} \subseteq M$ y $|M| = |L_\alpha|$. Por el lema de condensación, sea $\pi : M \cong L_\gamma$. Como $L_\alpha \cup \{x\}$ es un subconjunto transitivo de M y

$$\pi \upharpoonright L_\alpha \cup \{x\} = id \upharpoonright L_\alpha \cup \{x\}.$$

En particular, $\pi(x) = x$, así $x \in L_\gamma$. Ahora por el teorema 3.2.1 *vii*), $|L_\alpha| = |\alpha|$ y $|L_\gamma| = |\gamma|$. Por lo tanto

$$|L_\gamma| = |\gamma| = |\pi''M| = |M| = |L_\alpha| = |\alpha| < \kappa.$$

Entonces $\gamma < \kappa$ y $L_\gamma \subseteq L_\kappa$, por lo tanto $x \in L_\kappa$. □

Teorema 3.6.6. *$V = L$ implica GCH.*

Demostración. Por el lema 3.6.5 $\mathcal{P}(\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}$ para todos los cardinales infinitos. Por el teorema 3.2.1 *vii*),

$$(\forall \kappa)(2^\kappa \leq |L_{\kappa^+}| = \kappa^+).$$

□

Corolario 3.6.7. *$ZF \vdash (GCH)^L$*

Demostración. Sabemos que

$$ZF \vdash [ZFC + (V = L)]^L.$$

Por el corolario 3.6.7

$$ZFC + (V = L) \vdash GCH.$$

□

Hasta aquí se concluye que GCH es una consecuencia de ZF en el modelo L , de aquí al final de esta sección probaremos algunos resultados que son útiles para el trabajo con el Axioma de Constructibilidad.

Lema 3.6.8. *Sea $\alpha > \omega$ un ordinal límite, $N \subseteq L_\alpha$ y $A(x)$ un predicado no vacío $\Delta_0^{L_\alpha}(N)$ de L_α . Sea x el $<_L$ elemento de L_α tal que $A(x)$. Entonces x es Σ_1 -definible de elementos de N en L_α .*

Demostración. Nosotros podemos definir $x \in L_\alpha$ por el predicado

$$A(x) \wedge (\exists u)[u = pr(x) \wedge (\forall z \in u) \neg A(z)].$$

Y por el lema 3.5.6, es Σ_1 .

□

Lema 3.6.9. *Suponga $V = L$, si $X \prec_1 L_{\omega_1}$, entonces $X = L_\alpha$ para algún $\alpha \leq \omega_1$.*

Demostración. Por lema de condensación, hay un π, α tal que $\alpha \prec \omega_1$ y $\pi : X \cong L_\alpha$. Si $Y \subseteq X$ es transitivo, entonces $\pi \upharpoonright Y = id \upharpoonright Y$. Entonces si podemos demostrar que sí X es transitivo quedará todo demostrado.

Sea $x \in X$. Entonces $x \in L_{\omega_1} = \bigcup_{\gamma < \omega_1} L_\gamma$, así $x \in L_\gamma$, para algún $\gamma < \omega_1$. Pero $|L_\gamma| \leq |\gamma| + \omega$, entonces como L_γ es transitivo, x es numerable. Hay una función suprayectiva $f : \omega \rightarrow x$. Sea f la $<_L$ -menor función. Por el lema 3.6.5 $f \in L_{\omega_1}$. Pero por lema anterior, f es Σ_1 -definible en L_{ω_1} desde x . Pero $x \in X \prec_1 L_{\omega_1}$. Así, $f \in X$. Pero claramente $\omega \subseteq X$. Entonces $f(n) \in X$ para $n < \omega$. Así $x = f''\omega \subseteq X$. Por lo tanto X es transitivo. □

Lema 3.6.10. *Suponga $V = L$, sea $\kappa > \omega_1$ un cardinal. Si $\omega_1 \in X \prec_1 L_\kappa$, entonces $X \cap L_{\omega_1} = L_\alpha$ para algún $\alpha \leq \omega_1$.*

Demostración. Como $\omega_1 \in X$ y $X \prec_1 L_\kappa$, tenemos que $L_{\omega_1} \in X$ por el corolario 3.3.12. Claramente

$$X \cap L_{\omega_1} = \{x \in X : \models_X "x \in \mathring{L}_{\omega_1}"\}.$$

Pero $X \prec_1 L_\kappa$. Entonces para cada Σ_1 fórmula de $\mathcal{L}_{X \cap L_{\omega_1}}$, tenemos

$$\models_{L_{\omega_1}} \varphi \text{ si y sólo si } \models_{L_\kappa} \varphi^{L_{\omega_1}} \text{ si y sólo si } \models_X \varphi^{L_{\omega_1}} \text{ si y sólo si } \models_{X \cap L_{\omega_1}} \varphi.$$

Entonces $X \cap L_{\omega_1} \prec_1 L_{\omega_1}$, y por lema anterior queda demostrado (Tenga en cuenta que, de hecho, el anterior argumento funciona para cualquier φ , Σ_1 o no, así que en realidad tenemos $X \cap L_{\omega_1} \prec L_{\omega_1}$). $\square$

En conexión con el lema anterior, si usamos $\kappa > \omega_1$ es un cardinal y $X \prec_2 L_\kappa$, entonces automáticamente $\omega_1, L_{\omega_1} \in X$, ya que L_{ω_1} es definible en L_κ por la Σ_2 -fórmula

$$(\exists \nu)(u = L_\nu) \wedge (\forall x \in u)(\exists f : \omega \twoheadrightarrow x) \wedge (\forall f) \neg (f : \omega \twoheadrightarrow u).$$

Donde $\twoheadrightarrow$ quiere decir que la función es suprayectiva.

3.7 Consistencia relativa

En las anteriores secciones se construyeron y se estudiaron varias propiedades del modelo L , con este modelo se va a probar un resultado parcial de consistencia. Por los teoremas de incompletud de Gödel (ver [6]) si tenemos una teoría que suponemos consistente, que contenga a la teoría AP (Aritmética de Peano) en nuestro caso ZF no es posible probar su consistencia desde sí misma. La intención en esta sección es dar una idea de cómo se argumenta una prueba de consistencia partiendo de la suposición de que ZF es consistente; es decir, si ZF fuese consistente ¿ ZFC lo sería? ¿ $ZFC + GCH$? Por el teorema 3.2.2 al suponer ZF , se obtuvo una deducción de cada axioma de ZF el modelo L , es decir

$$ZF \vdash (ZF)^L.$$

Mejorando el argumento del teorema 3.2.2 es posible establecer

$$ZF \vdash (ZF + \Phi)^L,$$

donde Φ puede ser AC , GCH , $V = L$ o varias otras afirmaciones. Es decir, si es posible tener una deducción de $ZF + \Phi$ dentro de la clase L , entonces la consistencia de tal afirmación proviene de la consistencia de ZF . Incluso se puede generalizar esta observación como

$$ZF \vdash (ZF + \Phi)^M,$$

donde M es un conjunto o una clase propia.

Una forma intuitiva de entender esta afirmación es suponer que $ZF + \Phi$ es inconsistente. Entonces hay una prueba $\Psi_0, \dots, \Psi_n$ de tal inconsistencia, en la que Ψ_i es una *LST*-fórmula, para cada $i = 0, \dots, n$, que o bien es un axioma de la teoría $ZF + \Psi$, o se sigue de algunos axiomas por medio de la aplicación de alguna regla de inferencia de la lógica de primer orden y Ψ_n es una contradicción. Ahora considere las relativizaciones $(\Psi_0)^M, \dots, (\Psi_n)^M$. Si Ψ_i es un axioma de $ZF + \Phi$, entonces $(\Psi_i)^M$ es un teorema de ZF , si lo suponemos en M . Si Ψ_i proviene de $\Psi_0, \dots, \Psi_{i-1}$ por medio de reglas de inferencia lógica, entonces $(\Psi_i)^M$ proviene de $(\Psi_0)^M, \dots, (\Psi_{i-1})^M$ por medio de las mismas reglas de inferencia. Entonces Ψ_n es un teorema de ZF ; sin embargo, como Ψ_n es una contradicción, entonces $(\Psi_n)^M$ es un teorema inconsistente ZF ; consecuentemente ZF es inconsistente, lo cual contradice nuestra hipótesis de que ZF es consistente. Por lo tanto, $(ZF + \Phi)$ es consistente si ZF lo es.

Ahora tenemos los siguientes resultados que son muy importantes pero por todas las observaciones anteriores pueden ser vistos como corolarios.

Corolario 3.7.1. $Con(ZF) \rightarrow Con(ZF + V = L)$.

Demostración. Por el corolario 3.4.5. □

Corolario 3.7.2. $Con(ZF) \rightarrow Con(ZFC)$.

Demostración. Por el teorema 3.5.9. □

Corolario 3.7.3. $Con(ZF) \rightarrow Con(ZFC + GCH)$.

Demostración. Por el corolario 3.6.7. □

Así como se hizo en los anteriores corolarios; si Φ puede ser probada en $ZFC + (V = L)$, entonces automáticamente tenemos una consistencia parcial a partir de ZF .

Esta teoría del universo construible fue en realidad construida para crear un modelo donde la Hipótesis del Continuo fuese cierta; como ya se vio en los corolarios anteriores, este modelo L también es la preba de varios enunciados de la Teoría de conjuntos. La Hipótesis del Continuo es cierta en $V = L$ desde el momento en que GCH lo es.

Para concluir este capítulo se muestra una propiedad muy importante del modelo L que lo distingue de otros modelos de ZF .

Teorema 3.7.4. (*Propiedad del modelo minimal*). L es el modelo interno más pequeño de ZF (es decir que si M es otro modelo de ZF entonces $L \subseteq M$).

Demostración. Por el lema 3.2.1, L es una clase propia. Por el teorema 3.2.2 L es un modelo interno de ZF . Sea M cualquier otro modelo interno de ZF . Por el lema 3.4.1, $(L)^M = L$, así $L \subseteq M$. $\square$

Capítulo 4

Uso del Axioma de Constructibilidad

En ese último capítulo se presentan dos ejemplos en los que se usa el Axioma de Constructibilidad. En la primera sección se expone un poco acerca de un principio combinatorio conocido como $\diamond^\#$. En la segunda sección se trata sobre cómo a partir de suponer $V = L$ se crea un sistema de escaleras y con él un ejemplo de un espacio topológico conocido como espacio de *Dowker*.

4.1 El principio combinatorio $\diamond^\#$

Uno de los principios combinatorios más poderosos es $\diamond^+$, en [3] hay una demostración de que $V = L \rightarrow \diamond^+$; sin embargo, es posible probar un resultado más fuerte de tal forma que $\diamond^+$ sería un corolario de esta afirmación. Este principio combinatorio es $\diamond^\#$ que es la siguiente afirmación:

Existe una sucesión $\langle N_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ de tal forma que cumple:

- i) N_α es un conjunto numerable primitivo recursivo cerrado (*pr*-cerrado) que contiene a α .
- ii) Si $X \subseteq \omega_1$ entonces hay un club $C \subseteq \omega_1$ de tal forma que $\alpha \in C \rightarrow X \cap \alpha, C \cap \alpha \in N_\alpha$.
- iii) $\langle N_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ es Π_2^1 -reflexiva.

Sin embargo, para poder llegar a este enunciado es necesario explicar qué son las funciones primitivas recursivas y los conjuntos *pr*-cerrados.

Definición 4.1.1. Una función $F : V^m \longrightarrow V$ es primitiva recursiva (*pr*) si es el caso que puede ser obtenida por sustitución y recursión de algunos de los siguientes esquemas:

- i) $P_{n,i} = x_i, 1 \leq i \leq n, x = (x_1, \dots, x_n).$
- ii) $Z(y) = 0.$
- iii) $M(x, y) = x \cup \{y\}.$
- iv) $C(x, y, u, v) = x, \text{ si } u \in v, y \text{ en otro caso.}$
- v) $F(x) = K(G_1(x), \dots, G_k(x)), x = (x_1, \dots, x_n), n < \omega$ (Sustitución).
- vi) $F(z, x) = H(\bigcup\{F(u, x) : u \in z\}, z, x), x = (x_1, \dots, x_n), n < \omega$ (Recursión).

Definición 4.1.2. Una relación R es primitiva recursiva si la función característica ($\chi_R(x) = (1)$, si $R(x)$ y $\chi_R(x) = (0)$ en otro caso) es una función primitiva y recursiva.

Un conjunto X es *cerrado bajo funciones primitivas recursivas*, si para cualquier función primitiva recursiva f definida a partir de elementos de X y cualquier $x \in X$ se tiene que $f(x) \in X$. En el siguiente teorema veremos algunas propiedades enunciadas en [8], sin embargo ya que la prioridad es hablar de $\diamond^\#$ sólo enunciaremos algunas propiedades básicas de las funciones primitivas recursivas.

Teorema 4.1.3.

- i) *Pr es cerrado bajo casos.*
- ii) *Pr es cerrado bajo operaciones booleanas.*
- iii) *Si H y R son Pr, entonces*

$$F(z, x) = \bigcup\{H(u, x) : u \in z \wedge R(u, x)\}$$

es pr.

- iv) *Cualquier Δ_0 -relación es pr (es decir una relación que es definida por una Δ_0 -fórmula).*
- v) *Si H y R son pr, entonces*

$$F(z, x) = \{H(u, x) : u \in z \wedge R(u, x)\}$$

es pr.

- vi) *Las funciones rango y clausura transitiva son pr, donde rango y clausura transitiva son:*

$$TC(x) = x \cup \bigcup\{TC(y) : y \in x\}, \quad \text{rank}(x) = \bigcup\{\text{rank}(y) + 1 : y \in x\}.$$

Demostración.

i) pr es cerrado bajo casos, es decir si H , K , R son pr , entonces:

$$F(x) = \begin{cases} H(x), & \text{si } R(x), \\ K(x), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

es pr .

En efecto, usando el esquema iv) y v) de funciones primitivas recursivas,

$$F(x) = C(H(x), K(x), Z(x), \chi_R(x)),$$

por lo tanto F es pr .

ii) Note que $M(Z(y), Z(y)) = 0 \cup \{0\} = 1$. Si R y S son pr , entonces hay que mostrar que

$$\neg R(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } R(x) = 0, \\ 0, & \text{si } R(x) = 1. \end{cases}$$

y

$$(R \vee S)(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } R(x) = 1 \vee S(x) = 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

son primitvas recursivas. Para demostrar que $\neg R$ y $R \vee S$ son pr

$$\chi_{\neg R}(x) = (0, 1, 0, \chi_R(x)),$$

y

$$\chi_{S \vee R}(x) = \max\{\chi_R(x), \chi_S(x)\} = C(\chi_S(x), \chi_R(x), \chi_R(x), \chi_S(x)).$$

El resto de los esquemas booleanos se obtiene a partir de combinaciones de los anteriores.

iii) Sea D pr , considere la función

$$L(z, x) = \bigcup \{D(u, x) : u \in z\}$$

y sea

$$E(y, u, z, x) = \begin{cases} D(u, x), & \text{si } u \in z, \\ y, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea

$$J(u, z, x) = E(\bigcup \{J(u, z, x) : u \in v\}, v, z, x).$$

Entonces J es *pr* por recursión. Por otra parte:

$$\begin{aligned} J(z, z, x) &= \bigcup \{J(w, z, x) : w \in z\} \\ &= \bigcup \{E(J(u, z, x) : u \in w), w, z, x) : w \in z\} \\ &= \bigcup \{D(w, x) : w \in z\}. \end{aligned}$$

Entonces L es *pr*. Así *iii*) se sigue de lo anterior ya que:

$$\begin{aligned} F(z, x) &= \bigcup \{H(w, x) : w \in z, R(w, x)\} \\ &= \bigcup \{C(H(w, x), 0, 0, \chi_R(w, x)) : w \in z\}. \end{aligned}$$

iv) $\chi_{\in}(x, y) = C(1, 0, x, y)$. Por *ii*) *pr* es cerrado bajo $\neg$ y $\vee$, así que sólo falta ver para cuantificadores acotados, ya que $x = y$ si y sólo si $[(\forall z \in x)(z \in y)] \wedge [(\forall z \in y)(z \in x)]$. Ahora la función característica de $S = (\exists u \in z)R(u, x) = \bigcup \{\chi_R(u, x) : u \in z\}$ es *pr*.

v) Sean H, R *pr*, entonces:

$$F(z, x) = \bigcup \{\{H(u, x)\} : u \in z, R(u, x)\}$$

y $\{H(u, x)\} = M(0, H(u, x))$.

vi) $TC(x) = F_{\cup}(\bigcup \{TC(y) : y \in x\}, x)$, donde $F_{\cup}(x, y) = x \cup y$. Para $rank(x)$, primero sea $rk(x) = P_{2,1}(\bigcup \{rk(y) : y \in x\}, x)$, entonces

$$rank(x) = \bigcup \{M(rk(y), rk(y)) : y \in x\}.$$

□

Para entender el punto *iii*) de $\diamond^{\#}$ veamos qué es Π_2^1 -reflexivo. La idea detrás de la formulación de $\diamond^{\#}$ es obtener una sucesión $\langle N_{\alpha} : \alpha < \omega_1 \rangle$ en la que varios de los N_{α} exhiben un comportamiento de α que tenga un gran parecido con el comportamiento ω_1 en el mundo real, mucho más fuerte que el mero hecho de que $\alpha = \omega_1^{N_{\alpha}}$. Necesitamos una definición de modo que haga presiso qué propiedades de ω_1 debiese tener α dentro de N_{α} . Entonces, esta es la intención de incluir la Π_2^1 -reflexividad.

Considérese una estructura $\langle \lambda, \in, (A)_{i < \omega} \rangle$ donde λ es un ordinal, y los A_i son una cantidad finita de letras predicativas. Una Π_2^1 -fórmula es una fórmula que es de la forma $\forall x \exists y \varphi$ donde φ es Δ_0 , donde el superíndice se refiere a que se trabaja una Lógica de primer orden. La noción de que una fórmula sea válida en una estructura

$$\langle \lambda, \in, (A)_{i < \omega} \rangle$$

para una asignación $a_1, \dots, a_n$ de valores en las variables libres es definida:

$\langle \lambda, \in, (A)_{i < \omega} \rangle \models^* \forall X \exists Y \varphi[a_1, \dots, a_n]$ si y sólo si
 $(\forall X \subseteq \lambda^m)(\exists Y \in \lambda^k)[\langle \lambda, \in, X, Y, (A_i)_{i < \omega} \rangle \models \varphi[a_1, \dots, a_n]]$,
 donde m y k están determinados por φ . Hay muchas propiedades de λ que pueden ser expresadas por Π_2^1 -fórmulas, por ejemplo que un ordinal sea ω_1 , que H es estacionario, etcétera.

Una vez visto lo anterior, decimos que una sucesión $\langle N_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ es Π_2^1 -reflexiva, si para cualquier Π_2^1 -fórmula que es verdadera en la estructura $\langle \kappa, \in, (A_i)_{i < \omega} \rangle$ hay un ordinal $\alpha < \kappa$ tal que

$$N_\alpha \models \text{“}\varphi \text{ es verdadera en } \langle \alpha, \in, (A_i \upharpoonright \alpha)_{i < \omega} \rangle\text{”},$$

donde $A_i \upharpoonright \alpha$ es usada para denotar la intersección de A_i con el α^m de tal manera que m es la aridad de A_i . En el primer caso $\kappa = \omega_1$, pero esta es la definición generalizada.

Una vez definido todo lo anterior se va a mostrar que $V = L \rightarrow \diamond^\#$.

Teorema 4.1.4. $V = L$ implica $\diamond^\#$.

Demostración. Suponga $V = L$. Para cada $\alpha < \omega_1$, sea

$$S_\alpha = \{\nu < \omega_1 : L_\nu \models ZF^- \text{ \& } \alpha = \omega_1^{L_\nu}\}.$$

Donde ZF^- son los axiomas de ZF menos el Axioma del Conjunto Potencia. Como suele suceder en este tipo de situaciones tal y como está formulada ZF^- será una teoría de LST , y no tenemos ningún concepto de un modelo de una LST -teoría para ZF^- . Podemos evitar este descuido ya sea mediante la formulación de una “copia” de la teoría ZF^- en el lenguaje, o bien definir dentro de la Teoría de conjuntos la noción de “un modelo de ZF^- ” de la misma forma como hemos definido las nociones de conjuntos amenos y admisibles. Lo que nos importa es que, trabajando dentro de L_α , podemos llevar a cabo cualquier tipo de construcción que se puede llevar a cabo en ZF sin que se haya del Axioma del Conjunto Potencia.

Sea

$$D = \{\alpha < \omega_1 : S_\alpha \neq \emptyset \text{ \& } \sup(S_\alpha) \notin S_\alpha\}.$$

Defina N_α , $\alpha < \omega_1$ como sigue. Si $\alpha \notin D$, sea $f(\alpha)$ el menor ordinal γ tal que $\alpha \in L_\gamma \prec L_{\omega_1}$. Si $\alpha \in D$, sea $f(\alpha) = \sup(S_\alpha)$. Entonces $N_\alpha = L_{f(\alpha)}$ es pr -cerrado y $\alpha \subseteq N_\alpha$. Entonces probaremos que $\langle N_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ es una $\diamond^\#$ -sucesión.

Por cómo fueron creados los N_α , es claro que son pr -cerrados. Veamos ahora $\diamond^\#(ii)$. Suponga que $\diamond^\#(ii)$ falla, sea $X \subseteq \omega_1$ el $\leq_L$ -menor contraejemplo. Note que

$\langle S_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$, D , f , $\langle N_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ son definibles en ω_2 , así también X es definible en ω_2 . Definimos los submodelos $M_\nu \prec L_{\omega_2}$, $\nu < \omega_1$, por recursión.

- i) M_0 es el menor submodelo elemental $M \prec L_{\omega_2}$ tal que $\langle S_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$, D , f , $\langle N_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle \in M_0$.
- ii) $M_{\nu+1}$ es el menor submodelo elemental $M \prec L_{\omega_2}$ tal que $M_\nu \cup \{M_\nu\} \subseteq M$.
- iii) $M_\xi = \bigcup_{\nu < \xi} M_\nu$ si ξ es límite.

Para cada $\nu < \omega_1$, sea $\alpha_\nu = M_\nu \cap \omega_1$. Por lo tanto $\langle \alpha_\nu : \nu < \omega_1 \rangle$ es una sucesión cofinal, creciente y continua y por el lema 1.7.8 $C = \{\alpha \in \omega_1 : \nu < \omega_1\}$ es club. Vamos a encontrar una contradicción mostrando que para cada $\alpha \in C$ es el caso que $C \cap \alpha$, $X \cap \alpha \in N_\alpha$.

Para cada $\nu < \omega_1$, sea $\pi : M_\nu \cong L_{\beta(\nu)}$.

Observaciones:

- $\pi_\nu \upharpoonright L_{\alpha_\nu} = id \upharpoonright L_{\alpha_\nu}$.
- $\pi_\nu(\omega_1) = \alpha_\nu$.
- $\pi_\nu(X) = X \cap \alpha_\nu$, en particular $X \cap \alpha_\nu \in L_{\beta(\nu)}$.

Si $\alpha_\nu \in D$, entonces $\beta(\nu) \in S_{\alpha_\nu}$, esto quiere decir que $\beta(\nu) < f(\alpha_\nu)$. Si $\alpha_\nu \notin D$, entonces como $\alpha_\nu = \omega_1^{L_{\beta(\nu)}}$ y $L_{f(\alpha_\nu)} \models \text{"}\alpha_\nu \text{ es numerable"}$, una vez más $\beta(\nu) < f(\alpha_\nu)$. Por consiguiente en todos los casos, $\beta(\nu) < f(\alpha_\nu)$, entonces $X \cap \alpha_\nu \in L_{f(\alpha_\nu)} = N_{\alpha_\nu}$. Por lo tanto $\alpha \in C \rightarrow X \cap \alpha \in N_\alpha$.

Falta mostrar que si $\alpha \in C$, entonces $C \cap \alpha \in N_\alpha$. Sea $\nu < \omega_1$ dado. Queremos ver que $C \cap \alpha_\nu \in N_{\alpha_\nu}$. Como para cada $\tau < \nu$, $\alpha_\tau = \omega_1^{L_{\beta(\tau)}}$,

$$C \cap \alpha_\nu = \{\alpha_\tau : \tau < \nu\} = \{\omega_1^{L_{\beta(\tau)}} : \tau < \nu\},$$

entonces es suficiente mostrar que $\{\beta(\tau) : \tau < \nu\} \in N_{\alpha_\nu}$.

Por recursion definimos los modelos $M'_\tau \prec L_{\beta(\nu)}$, $\tau < \nu$ de la misma manera que los modelos M_τ , $\tau < \omega_1$ definidos desde ω_2 . En particular como $\beta(\nu) \in S_{\alpha_\nu}$, N_{α_ν} es un modelo de ZF^- , o la unión de modelos de ZF^- ; $L_{\beta(\nu)} \in N_{\alpha_\nu}$ y $\langle M'_\tau : \tau < \nu \rangle \in N_{\alpha_\nu}$ (por el lema de condensación dentro de $L_{f(\alpha_\nu)}$). Entonces $\langle \beta'(\tau) : \tau < \nu \rangle \in N_{\alpha_\nu}$, donde $L_{\beta'(\tau)}$ es el colapso transitivo de M'_τ . Pero como $\tau < \nu$,

$$\tau < \nu \rightarrow M_\tau \prec M_\nu \prec L_{\omega_2}$$

y como $\pi_\nu : M_\nu \cong L_{\beta(\nu)}$, entonces $(\pi_\nu \upharpoonright M_\tau) : M_\tau \cong M'_\tau$. Por lo tanto $L_{\beta'(\tau)}$ es el colapso transitivo de M_τ . Pero esto quiere decir que $\beta'(\tau) = \beta(\tau)$. Por lo tanto $\langle \beta(\tau) : \tau < \nu \rangle \in N_{\alpha_\nu}$ y queda demostrado.

Entonces *ii*) de la $\diamond^\#$ es cierto. Ahora sólo falta mostrar que *iii*) es válido.

Sean A_i , $i < \omega$ predicados en ω_1 , φ una fórmula de $\langle \omega_1, \in, (A_i)_{i < \omega}, X, Y \rangle$, donde $X \subseteq \omega_1^p$, $Y \subseteq \omega_1^q$ tal que

$$\langle \omega_1, \in, (A_i)_{i < \omega} \rangle \models^* \forall X \exists Y \varphi.$$

Ahora, $\langle A_i : i < \omega \rangle \in L_{\omega_2}$ y para $\mathcal{P}(\omega_1^p) \cup \mathcal{P}(\omega_1^q) \subseteq L_{\omega_2}$,

$$L_{\omega_2} \models [\langle \omega_1, \in, (A_i)_{i < \omega} \rangle \models^* \forall X \exists Y \varphi].$$

Sea $\mu < \omega_2$ tal que la fórmula anterior sea válida en L_μ y $L_\mu \prec L_{\omega_2}$. Sea γ el menor ordinal tal que $\langle A_i : i < \omega \rangle \in L_\gamma$, y para cada $n < \omega$ sea $\kappa(n)$ el $(n+1)$ -ésimo ordinal más grande que γ tal que $L_{\kappa(n)} \models ZF^-$ y

$$L_{\kappa(n)} \models [\langle \omega_1, \in, (A_i)_{i < \omega} \rangle \models^* \forall X \exists Y \varphi].$$

Para cada $n < \omega$ definimos los submodelos $M_\nu^n \prec L_{\kappa(n)}$, $\nu < \omega_1$ como sigue:

1. M_0^n es el menor submodelo elemental $M \prec L_{\kappa(n)}$ tal que $\langle A_i : i < \omega \rangle \in M$.
2. $M_{\nu+1}^n$ es el menor submodelo elemental $M \prec L_{\kappa(n)}$ tal que $M_\nu^n \cup \{\alpha_\nu^n\} \subseteq M$.
3. $M_\lambda^n = \bigcup_{\nu < \lambda} M_\nu^n$ si λ es límite.

Para cada $\nu < \omega_1$ sea $\alpha_\nu^n = \omega_1 \cap M_\nu^n$. Al igual que en la construcción para probar *ii*) de $\diamond^\#$ $\langle \alpha_\nu^n : \nu < \omega_1 \rangle$ es creciente continua y cofinal en ω_1 .

Sean $C_n = \{\alpha_\nu^n : \nu < \omega_1 \text{ \& } \alpha_\nu^n = \nu\}$ y α el menor elemento de $\bigcap_{n < \omega} C_n$. La intención es mostrar que α es el elemento de ω_1 en el cual la sucesión $\langle N_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ es Π_2^1 -reflexiva. Para cada $n \in \omega$, $\alpha_\alpha^n = \alpha$. Entonces si hacemos $\pi_n : M_\alpha^n \cong L_{\nu(n)}$ tenemos:

1. $\pi_n \upharpoonright \alpha = id \upharpoonright \alpha$.
2. $\pi_n(\omega_1) = \alpha$.
3. $\pi_n(\langle A_i : i < \omega \rangle) = \langle A_i \upharpoonright \alpha : i < \omega \rangle$.

Note que para cada n , $\nu(n) \in S_\alpha$, más aún $\langle \nu(n) : n < \omega \rangle$ es estrictamente creciente ya que como $\kappa(n) < \kappa(n+1)$ implica que $\alpha_\alpha^n < \alpha_\alpha^{n+1}$, entonces $\nu(n) < \nu(n+1)$. Como $\pi_n(\langle A_i : i < \omega \rangle) = \langle A_i \upharpoonright \alpha : i < \omega \rangle$ para cada n , si $\bar{\gamma}$ es el menor ordinal tal que $\langle A_i \upharpoonright \alpha : i < \omega \rangle \in L_{\bar{\gamma}}$, tenemos que para todo n $\pi_n(\gamma) = \bar{\gamma}$,

$\pi_n^{-1}(\nu(0)) = \kappa(0), \dots, \pi_n^{-1}(\nu(n-1)) = \kappa(n-1)$, $\nu(n)$ es el $(n+1)$ -ésimo ordinal más grande que $\bar{\gamma}$ tal que $L_{\nu(n)} \models ZF^-$ y

$$L_{\nu(n)} \models [\langle \alpha, \in, (A_i \upharpoonright \alpha)_{i < \omega} \rangle \models^* \forall X \exists Y \varphi].$$

Sea $\nu = \sup \langle \nu(n) : n < \omega \rangle$. Entonces

$$L_\nu \models [\langle \alpha, \in, (A_i \upharpoonright \alpha)_{i < \omega} \rangle \models^* \forall X \exists Y \varphi].$$

Completaremos la prueba mostrando que $L_\nu = N_\alpha$, es decir $\nu = f(\alpha)$. Es suficiente mostrar que $\langle \nu(n) : n < \omega \rangle$ es cofinal en S_α , es decir que si $\mu \geq \nu$ entonces $\mu \notin S_\alpha$.

Como $\nu(n)$ es el $(n+1)$ -ésimo ordinal más grande que $\bar{\gamma}$ tal que $L_{\nu(n)} \models ZF^-$ y

$$L_\nu \models [\langle \alpha, \in, (A_i \upharpoonright \alpha)_{i < \omega} \rangle \models^* \forall X \exists Y \varphi],$$

la sucesión $\langle \nu(n) : n < \omega \rangle$ es L_ν -definible. Así L_ν no puede ser un modelo de ZF^- (ya que $\omega_1^{L_\nu} = \alpha$), entonces $\nu \notin S_\alpha$. Sea $\mu > \nu$, mostraremos que $\mu \notin S_\alpha$. Si α es numerable en L_μ , o si L_μ no es un modelo de ZF^- es inmediato. Suponga que L_μ es modelo de ZF^- y α no es numerable. Como $\langle \nu(n) : n < \omega \rangle \in L_\mu$, dentro de L_μ podemos definir $\bar{C}_n \subseteq \alpha = \omega_1^{L_\mu}$, $n < \omega$ de la misma forma que $C_n \subseteq \omega_1$ fueron definidos anteriormente (cambiando $\gamma, \kappa(n)$ por $\bar{\gamma}, \nu(n)$ respectivamente). Claramente para cada n , $\bar{C}_n = C_n \cap \alpha$. Por lo tanto

$$L_\mu \models \langle C_n \cap \alpha : n < \omega \rangle \text{ es una sucesión de clubs contenidos en } \alpha,$$

esto implica que

$$L_\mu \models \left\langle \bigcap_{n < \omega} (C_n \cap \alpha) \text{ es club en } \alpha \right\rangle,$$

pero α es el mínimo elemento de $\bigcap_{n < \omega} C_n$, entonces $\bigcap_{n < \omega} (C_n \cap \alpha)$ es no vacío, lo cual es absurdo. Por lo tanto o bien L_μ no es modelo de ZF^- o $\omega_1^{L_\mu} \neq \alpha$, y el teorema queda demostrado. $\square$

En [2] se demuestra que si existe una $\diamond^\#$ sucesión, entonces

$$\{\alpha : N_\alpha = \omega_1^{N_\alpha} \ \& \ \text{“}\varphi \text{ es verdadera en } \langle \alpha, \in, (A_i \upharpoonright \alpha)_{i < \omega} \rangle \text{”}\}$$

es estacionario en ω_1 , es decir que la $\diamond^\#$ sucesión es reflexiva en un conjunto estacionario.

Una vez mostrado que $V = L$ implica $\diamond^\#$, veamos que $\diamond^\# \rightarrow \diamond^+$. Primero $\diamond^+$ es la siguiente afirmación:

Existe una sucesión $\langle S_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que S_α es numerable, $S_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$ y para cualquier $X \subseteq \omega_1$ hay un conjunto club C tal que $X \cap \alpha, C \cap \alpha \in S_\alpha$.

Sea $\langle S_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que $S_\alpha = N_\alpha \cap \mathcal{P}(\alpha)$, entonces por $\diamond^\#$ para todo $X \subseteq \omega_1$ hay un club C tal que $X \cap \alpha, C \cap \alpha \in N_\alpha$, como $X \cap \alpha, C \cap \alpha \in \mathcal{P}(\alpha)$, $X \cap \alpha, C \cap \alpha \in S_\alpha$, entonces C es el club necesario para $\diamond^+$.

Una vez concluido $\diamond^\#$ la intención es generalizar, definimos $\diamond_\kappa^\#$ como el siguiente enunciado:

Existe una sucesión $\langle N_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ de tal forma que cumple:

- i) N_α es un conjunto numerable primitivo recursivo cerrado (*pr*-cerrado) que contenga a α y $|N_\alpha| \leq |\alpha| + \aleph_0$.
- ii) Si $X \subseteq \kappa$ entonces hay un club $C \subseteq \kappa$ de tal forma que $\alpha \in C \rightarrow X \cap \alpha, C \cap \alpha \in N_\alpha$.
- iii) $\langle N_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ es Π_2^1 -reflexiva.

Sin embargo, esta afirmación no puede ser generalizada si κ es inefable. Un cardinal es inefable, si para cualquier función $f : [\kappa]^2 \rightarrow 2$, hay un conjunto X estacionario tal que $|f''[X]^2| = 1$. Los cardinales inefables son de los llamados cardinales grandes. Si κ es inefable, κ es el κ -ésimo débilmente compacto. A pesar de que aquí en ningún momento se habló acerca de los cardinales grandes, si $ZFC + V = L$ es consistente, es consistente $ZFC + V = L + \text{"no existe un cardinal inefable"}$. El nombre de inefable es la traducción literal de su nombre en inglés, el significado de esta palabra es *aquello que no puede explicarse con palabras*.

Para poder demostrar $\diamond_\kappa^\#$ es necesario un resultado que es demostrado en [3] que es una caracterización de los cardinales inefables.

Teorema 4.1.5. *Un cardinal es inefable si y sólo si para cualquier sucesión $\langle A_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ tal que $A_\alpha \subseteq \alpha$ para cada $\alpha < \kappa$, hay un $A \subseteq \kappa$ tal que el conjunto $\{\alpha \in \kappa : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario.*

Teorema 4.1.6. *Suponga $V = L$, entonces si κ es regular, no numerable y no inefable $\diamond_\kappa^\#$ es válido.*

Demostración. Para cada $\alpha < \kappa$ sea

$$S_\alpha = \{\nu < \kappa : \nu > \alpha \ \& \ L_\nu \models \text{"}\alpha \text{ es regular"}\}.$$

Sea

$$D = \{\alpha \in \kappa : \alpha \text{ "es singular y } S_\alpha \text{ no tiene máximo"}\}.$$

Por el teorema 4.1.5, sea $\langle A_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ la $\leq_L$ -menor sucesión tal que $A_\alpha \subseteq \alpha$ y para todo $A \subseteq \kappa$, $\{\alpha \in \kappa : A_\alpha = A \cap \alpha\}$ es no estacionario. Si $\alpha \in D$, sea $f(\alpha) = \text{Sup}(S_\alpha)$. Si $\alpha \in \kappa \setminus D$, sea $f(\alpha)$ el menor ordinal γ tal que α , $\langle A_\alpha : \alpha < \kappa \rangle \in L_\gamma \prec L_\kappa$. Sea $N_\alpha = L_\alpha$, y mostraremos que $\langle N_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ es una $\diamond^\#_\kappa$ -sucesión.

N_α es *pr*-cerrado, continene a α . Para ver que $|N_\alpha| \leq |\alpha| + \aleph_0$, vea que para $\alpha \in \kappa \setminus D$ es inmediato ya que $|N_\alpha| = |\alpha|$. si $\alpha \in D$, entonces α es singular, entonces para algún $\gamma < |\alpha|^+$,

$$L_\gamma \models \text{"}\alpha \text{ es singular"} ,$$

por consiguiente $f(\alpha) < \gamma$ y entonces $|f(\alpha)| = |\alpha|$, por lo tanto $|N_\alpha| = |\alpha|$.

Ahora hay que verificar $\diamond^\#_\kappa(ii)$. Suponga que esta condición falla, sea X el $\leq_L$ -menor contraejemplo. Note que todos los conjuntos antes mencionados son definibles en κ^+ . Definimos submodelos $M_\nu \prec L_\kappa^+$, $\nu < \kappa$ por recursión:

1. M_0 es el menor submodelo elemental $M \prec L_{\kappa^+}$ tal que $M \cap \kappa$ es transitivo.
2. $M_{\nu+1}$ es el menor submodelo elemental $M \prec L_{\kappa^+}$ tal que $M_\nu \cup \{\alpha_\nu\} \subseteq M$ y $M \cap \kappa$ es transitivo.
3. $M_\lambda = \bigcup_{\nu < \lambda} M_\nu$ si λ es límite.

Sea $\alpha_\nu < \kappa$, entonces $\langle \alpha_\nu; \nu < \kappa \rangle$ es estrictamente creciente, continua y cofinal en κ . Sea $C = \{\alpha_\nu : \nu < \kappa\}$. Vamos a obtener la contradicción mostrando que $X \cap \alpha, C \cap \alpha \in N_\alpha$ para cada $\alpha \in C$.

Para cada $\nu < \kappa$, sea $\pi_\nu : M \cong L_{\beta(\nu)}$.

Observaciones:

- $\pi_\nu \upharpoonright L_{\alpha_\nu} = id \upharpoonright L_{\alpha_\nu}$.
- $\pi_\nu(\kappa) = \alpha_\nu$.
- $\pi_\nu(X) = X \cap \alpha_\nu$.

Al igual que en el teorema 4.1.4, si se demuestra que $\beta(\nu) < f(\alpha_\nu)$, entonces habremos terminado. Si $\alpha_\nu \in D$ no hay problema ya que

$$L_{\beta(\nu)} \models \text{"}\alpha_\nu \text{ es regular"}$$

y por lo tanto $\beta(\nu) \in S_\alpha$.

Suponga ahora que $\alpha_\nu \in \kappa \setminus D$. Como $A_{\alpha_\nu} \in L_{f(\alpha)}$ (así fue establecido para los α que estan en $\kappa \setminus D$), para mostrar que $\beta(\nu) < f(\alpha_\nu)$. Suponga lo contrario. Como $\pi^{-1} : L_{\beta(\nu)} \prec L_{\kappa^+}$ y $A_{\alpha_\nu} \subseteq \alpha_\nu$, $\pi^{-1} : L_{\beta(\nu)} \prec L_{\kappa^+}$ y $A_{\alpha_\nu} \subseteq \alpha_\nu$, $\pi^{-1}(\alpha_\nu) = \kappa$, tenemos que

$$L_{\beta(\nu)} \models \text{“Hay un conjunto club } \overline{C} \subseteq \alpha_\nu \text{ tal que } \alpha_\nu \in \overline{C} \rightarrow A_{\alpha_\nu} \cap \gamma \neq A_\gamma\text{”}.$$

Entonces tomando $\overline{C} \subseteq \alpha_\nu$, $\overline{C} \in L_\beta$, tal que

$$L_{\beta(\nu)} \models \text{“}\overline{C} \text{ es club en } \alpha_\nu \text{ y } \& \alpha_\nu \in \overline{C} \rightarrow A_{\alpha_\nu} \cap \gamma \neq A_\gamma\text{”}.$$

Sea $A = \pi^{-1}(A_{\alpha_\nu})$, $C = \pi^{-1}(\overline{C})$, entonces

$$L_{\kappa^+} \models \text{“}C \text{ es club en } \kappa \text{ y } \& \gamma \in C \rightarrow A \cap \gamma \neq A_\gamma\text{”}.$$

$\overline{C} = C \cap \alpha_\nu$, como α_ν es punto límite en C significa que $\alpha_\nu \in C$. Entonces

$$L_{\kappa^+} \models \text{“}A \cap \alpha_\nu \neq A_{\alpha_\nu}\text{”}.$$

Pero $A = \pi^{-1}(A_{\alpha_\nu})$ tenemos que $A \cap \alpha_\nu = A_{\alpha_\nu}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\diamond_\kappa^\#(ii)$ es válido.

Para ver $\diamond_\kappa^\#(iii)$ es válido, el argumento es el mismo que la correspondiente demostración de $\diamond^\#(iii)$ visto en el teorema 4.1.4. □

Como ya se notó, la parte de Π_2^1 -reflexividad no se trató mucho, sin embargo esta propiedad puede dar $\diamond^\#$ -sucesiones interesantes, que de manera estacionaria reflejen propiedades que sean necesarias en determinado caso. En [2] hay un par de ejemplos en los cuales se usa esta propiedad para reflejar estacionarios.

4.2 Sistema de escaleras

En esta última sección se va a hacer uso de una técnica de construcción de un sistema de escaleras que es posible gracias al universo L . Este objeto es conocido como espacio de Dowker de cardinalidad $\aleph_1$. Recordar que un espacio X es de Dowker, si es normal pero $X \times I$ ($I = [0, 1]$) no es normal. El primer ejemplo de un espacio de Dowker lo dio Mary Ellen Rudin en 1971 con un espacio de cardinalidad $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ (suponiendo $V = L$, se tiene que $\aleph_\omega^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+1}$) en [9].

Para comenzar a señalar cómo se crea en [4] un espacio de Dowker, empezamos con las siguientes definiciones.

Definición 4.2.1. $\vec{E} = \{E_\alpha : \alpha \in \text{Lim}(\omega_1)\}$ es un **sistema de Escaleras** si:

- i) $E_\alpha \subseteq \alpha$.
- ii) $\text{otp}(E_\alpha) = \omega$.
- iii) $\text{sup}(E_\alpha) = \alpha$.

Definición 4.2.2. $\vec{E}$ **golpea pares de estacionarios**, si para cada par de estacionarios $S, T \subseteq \omega_1$ existe un $\gamma \in \omega_1$ tal que $E_\gamma \cap S$ y $E_\gamma \cap T$ son cofinales en γ .

Definición 4.2.3. $\vec{E}$ es **fuertemente anticipante de clubs**, si para cada club $C \subseteq \omega_1$ hay un club $K \subseteq \omega_1$ tal $\alpha \in K$ implica:

$$(\exists \beta < \alpha)(E_\alpha \setminus \beta \subseteq C).$$

Ahora veamos que $V = L$ implica un sistema de escaleras.

Teorema 4.2.4. *Supongamos $V = L$. Si $\{S_n : n \in \omega\}$ es una partición de ω_1 en conjuntos estacionarios, entonces hay un sistema de escaleras $\vec{E}$ tal que cumple:*

- i) $\vec{E}$ es fuertemente anticipante de clubs.
- ii) $\alpha \in S_n \Rightarrow E_\alpha \subseteq \bigcup_{k=0}^n S_k$.
- iii) Si $A, B \subseteq \bigcup_{k=0}^n S_k$ son estacionarios entonces existe un estacionario $T \subseteq S_{n+1}$ tal que:

$$\gamma \in T \text{ implica } \text{sup}(E_\gamma \cap A) = \gamma = \text{sup}(E_\gamma \cap B).$$

Demostración. Sea $f : \omega_1 \rightarrow \omega$ tal que $f^{-1}(\{n\}) = S_n$. Para cada $\gamma \in \text{Lim}(\omega_1)$ se van a construir los conjuntos $\mathcal{A}_\gamma$, $\mathcal{G}_\gamma$ y $\mathcal{H}_\gamma$ como control en la construcción del sistema de escaleras.

$\alpha \in \mathcal{A}_\gamma$ si y sólo si:

- i) $L_\alpha \models ZF^-$; es decir, L_α es un modelo de ZF menos el conjunto potencia.
- ii) $\gamma = \omega_1^{L_\alpha}$.
- iii) $f \upharpoonright \gamma \in L_\alpha$ y
 $L_\alpha \models \text{"}f \upharpoonright \gamma \text{ codifica una partición en conjuntos estacionarios."}$

$\mathcal{A}_\gamma$ es numerable, ya que existe una función $h : \alpha \rightarrow \omega$ inyectiva y un L_β tal que $h \in L_\beta$, con $\beta < \omega_1$. Por lo tanto si $\delta > \beta$, $\delta \notin \mathcal{A}_\gamma$ y $\mathcal{A}_\gamma$ es numerable.

Definimos $\mathcal{G}_\gamma$ como:

$$\mathcal{G}_\gamma = \{C \subseteq \gamma : C \text{ es club en } \gamma \ \& \ (\exists \alpha \in \mathcal{A}_\gamma)(C \in L_\alpha)\}.$$

$\langle A^0, A^1 \rangle \in \mathcal{H}_\gamma$ si y sólo si:

- i) $(\forall i \in 2)(A^i \subseteq \gamma)$.
- ii) $(\exists \alpha \in \mathcal{A}_\gamma)(\forall i \in 2)(A^i \in L_\alpha)$.
- iii) $(\forall C \in \mathcal{G}_\gamma)(\forall i \in 2)(C \cap A^i \neq \emptyset)$.
- iv) $(\forall i \in 2)(\forall \xi \in A^i)(f(\xi) < f(\gamma))$.

Entonces empezamos la construcción de $\vec{E}$ que es por recursión sobre los ordinales $\gamma \in \text{Lim}(\omega_1)$. Supongamos que $\gamma \in S_n$, enumeramos $\mathcal{G}_\gamma = \{C_n\}_{n \in \omega}$ y $\mathcal{H}_\gamma = \{\langle A_n^0, A_n^1 \rangle : n \in \omega\}$, con la condición de que cada elemento $\langle A_n^0, A_n^1 \rangle$ se repita $\aleph_0$ veces en la enumeración. Sea $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ enumeración de $\mathcal{A}_\gamma$, así para $\sup \mathcal{A}_\gamma$ hay dos casos:

Caso I, $\mathcal{A}_\gamma$ no tiene máximo, sea $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ de $\mathcal{A}_\gamma$ sucesión cofinal tal que para todo $m \leq n$:

- i) $\{\langle A_m^0, A_m^1 \rangle\} \in L_{\alpha_n}$.
- ii) $C_m \in L_{\alpha_n}$.

Caso II, $\mathcal{A}_\gamma$ tiene máximo, entonces para todo $n \in \omega$ sea $\alpha_n = \alpha_0 = \sup \mathcal{A}_\gamma$.

Sea $\{\delta_n : n \in \omega\}$ creciente y cofinal en γ , ahora la construcción:

$\gamma_0 \in$	$(A_0^0 \cap C_0) \setminus \delta_0$	$\gamma_1 \in$	$(A_0^1 \cap C_0) \setminus \gamma_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\gamma_{2n} \in$	$(A_{2n}^0 \cap \bigcap_{m \leq n} C_m) \setminus \delta_{2n}$	$\gamma_{2n+1} \in$	$(A_{2n}^1 \cap \bigcap_{m \leq n} C_m) \setminus \gamma_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Entonces E_γ es una sucesión cofinal en γ , $\sup\{E_\gamma \cap A^i\} = \gamma$, además como $\gamma \in S_n$, $E_\gamma \subseteq \bigcup_{k=0}^n S_k$. Finalmente sea:

$$E_\gamma = \{\gamma_n : n \in \omega\}.$$

De esta forma si $\vec{E} = \{E_\gamma : \gamma \in \text{Lim}(\omega_1)\}$, ii) del teorema es válido por la construcción de la sucesión.

Afirmación 1. Si $C \subseteq \omega_1$ es club y $\langle A^0, A^1 \rangle$ es un par de estacionarios tal que $f(A^0 \cup A^1) \subseteq m+1$, entonces existe un estacionario $T \subseteq S_{m+1}$ y un club $K \subseteq \omega_1$ tal que:

- i) $\langle A^0 \cap \gamma, A^1 \cap \gamma \rangle \in \mathcal{H}_\gamma$ para todo $\gamma \in T$.
- ii) $C \cap \gamma \in \mathcal{G}_\gamma$ para todo $\gamma \in K$.

Demostración. Note que el club K es el necesario para el punto 1. del teorema, y que T es el necesario para el punto iii). Crearemos el conjunto K club que cumpla

la condición del teorema.

Sea $C \subseteq \omega_1$ club y $\langle A^0, A^1 \rangle$ estacionarios, por recursión definimos una sucesión de submodelos elementales $M_\nu \prec L_{\omega_2}$ con $\nu < \omega_1$ como sigue:

- i) M_0 es el menor submodelo elemental $M \prec L_{\omega_2}$ tal que $\langle A^0, A^1 \rangle, C \in M$.
- ii) $M_{\nu+1}$ es el menor submodelo elemental $M \prec L_{\omega_2}$ tal que $M_\nu \cup \{M_\nu\} \subseteq M$.
- iii) $M_\xi = \bigcup_{\nu < \xi} M_\nu$ si ξ es límite.

Sea $\alpha_\nu = M_\nu \cap \omega_1$ y entonces $\langle \alpha_\nu : \nu < \omega_1 \rangle$ es una función normal. Para cada $\nu < \omega_1$ sea $\pi_\nu : M_\nu \cong L_{\beta_\nu}$ donde π_ν es el isomorfismo dado por el colapso transitivo de M_ν .

Observaciones:

- $\pi_\nu \upharpoonright L_{\alpha_\nu} = id \upharpoonright L_{\alpha_\nu}$.
- $\pi_\nu(\omega_1) = \alpha_\nu$.
- $\pi_\nu(C) = C \cap \alpha_\nu$.
- $\pi_\nu(\langle A^0, A^1 \rangle) = \langle A^0 \cap \alpha_\nu, A^1 \cap \alpha_\nu \rangle$.

Sea K el conjunto de puntos límite de la sucesión $\langle \alpha_\nu : \nu < \omega_1 \rangle$, por tanto K es club. Sea $\gamma \in K$, para $\nu \in \omega_1$, $\alpha_\nu < \beta_\nu$ ya que α_ν es la intersección de $M_\nu \cap \omega_1$ y como L_{β_ν} es el colapso transitivo de M_ν , $\alpha_\nu \in \beta_\nu$. Por otra parte $M_{\nu+1}$ es submodelo elemental tal que $\{M_\nu\} \in M_{\nu+1}$ y entonces

$$M_{\nu+1} \models "L_{\beta_\nu} \cong M_\nu"$$

y $\beta_\nu \in \alpha_{\nu+1}$, entonces para un ordinal límite $\lambda < \omega_1$,

$$\gamma = \sup_{\nu < \lambda} \alpha_\nu = \sup_{\nu < \lambda} \beta_\nu.$$

Por lo tanto $\gamma = \alpha_\lambda$. Así $\beta_\lambda \in \mathcal{A}_\gamma$ pues $L_{\alpha_\lambda} = L_{\beta_\lambda} \models "\gamma = \omega_1"$, y $L_{\beta_\lambda} \models ZF^-$; además $C \cap \gamma = \pi_\lambda(C) \in L_{\beta_\lambda}$ y por el corolario 1.7.9, $L_{\beta_\lambda} \models \pi_\lambda(C)$ es club en γ . Entonces $C \cap \gamma \in \mathcal{G}_\gamma$, por lo tanto K es el club necesario para la condición 2 de la afirmación. Ahora sólo falta T .

También $\langle A^0 \cap \alpha_\nu, A^1 \cap \alpha_\nu \rangle \in L_{\beta_\lambda}$. Para $\mathcal{A}_\gamma \neq \emptyset$ y sea $\mu_\gamma = \sup \mathcal{A}_\gamma$ definimos:

$$E = \{\gamma \in S_{m+1} : (\forall i \in 2)(L_{\mu_\gamma} \models "A^i \cap \gamma \text{ es estacionario en } \gamma = \omega_1^{L_{\mu_\gamma}}")\}.$$

Ahora veremos que E es estacionario en ω_1 . Sea $F \subseteq \omega_1$ club, encontraremos un ordinal tal que este en la intersección de F y E . Sea $\xi < \omega_2$ el mínimo ordinal

tal que $\{\{S_n : n \in \omega\}, F, A^0, A^1\} \in L_\xi$. Para cada $n \in \omega$ sea κ_n el $(n+1)$ -ésimo ordinal más grande que ξ tal que $L_{\kappa_n} \models ZF^-$. Para cada $n \in \omega$ y $\nu < \omega_1$ definimos la siguiente cadena de submodelos elementales $M_\nu^n \prec L_{\kappa_n}$ como sigue:

1. M_0^n es el menor submodelo elemental $M \prec L_{\kappa_n}$ tal que $A^0, A^1, F \in M$.
2. $M_{\nu+1}^n$ es el menor submodelo elemental $M \prec L_{\kappa_n}$ tal que $M_\nu^n \cup \{M_\nu^n\} \subseteq M$.
3. $M_\zeta^n = \bigcup_{\nu < \zeta} M_\nu^n$ si ζ es límite.

Sea $\alpha_\nu^n = M_\nu^n \cap \omega_1$. Entonces la sucesión $\langle \alpha_\nu^n : \nu < \omega_1 \rangle$ es normal para cada $n \in \omega$. Sea $G_n = \{\nu < \omega_1 : \nu = \alpha_\nu^n\}$ y $G = \bigcap_{n \in \omega} G_n$. Entonces para cada $n \in \omega$, $\nu \in G$ implica $\nu = \alpha_\nu^n$.

Fijemos $\nu = \min(G \cap S_{m+1})$ (de aquí hasta el final de la demostración ν es un ordinal fijo) y consideremos los siguientes colapsos transitivos, Para cada $n \in \omega$ sea $\pi_n : M_\nu^n \cong L_{\gamma_\nu^n}$.

Observaciones:

- $\pi_n \upharpoonright \nu = id \upharpoonright \nu$.
- $\pi_n(\omega_1) = \nu$.
- $\pi_n(S_k) = S_k \cap \nu$ para todo $k \in \omega$.
- $\pi_n(F) = F \cap \nu$.
- $\pi_n(A^i) = A^i \cap \nu$.
- $\gamma_\nu^n \in \mathcal{A}_\nu$.

Sea $\gamma_\nu = \sup_{n < \omega} \gamma_\nu^n$, entonces:

- $L_{\gamma_\nu} \models \text{"}\nu = \omega_1\text{"}$.
- $L_{\gamma_\nu} \models \text{"}S_k \cap \nu \text{ es estacionario"}$ para cada $k \in \omega$.
- $L_{\gamma_\nu} \models \text{"}A^i \cap \nu \text{ es estacionario"}$ para cada $i \in 2$.
- $L_{\gamma_\nu} \models \text{"}F \cap \nu \text{ es cofinal en } \nu\text{"}$.

Para cada $\gamma_\nu \leq \mu$ vamos a probar que $\mu \notin \mathcal{A}_\nu$ para poder concluir que $\mu_\nu = \gamma_\nu$, para ello, note que $L_\mu \models \text{"}\nu = \omega_1\text{"}$ y $L_\mu \models ZF^-$. Supóngase que $L_\mu \models \text{"}\nu = \omega_1\text{"}$. Sea $\bar{\xi}_\nu$ el menor ordinal tal que $\{S_k \cap \nu\}_{k \in \omega}, \{A^i \cap \nu\}_{i \in 2}$ y $F \cap \nu \in L_{\bar{\xi}_\nu}$, entonces se tiene que $\pi_n(\xi) = \bar{\xi}_\nu$ para cada $n \in \omega$. Si $n > 0$ entonces:

$$(\pi_n)^{-1}(\gamma_\nu^0) = \kappa_0, (\pi_n)^{-1}(\gamma_\nu^1) = \kappa_1, \dots, (\pi_n)^{-1}(\gamma_\nu^{n-1}) = \kappa_{n-1}$$

y γ_ν^n es el $(n+1)$ -ésimo ordinal más grande que $\bar{\xi}_\nu$ tal que $L_{\bar{\xi}_\nu} \models ZF^-$ así que en L_{γ_ν} se define la sucesión de ordinales $\langle \gamma_\nu^n : n \in \omega \rangle \in L_{\gamma_\nu}$. Entonces L_{γ_ν} no es un modelo de ZF^- ya que tiene una sucesión cofinal numerable a γ_ν y así $\gamma_\nu \notin \mathcal{A}_\nu$. Si $\gamma_\nu < \mu$ dentro de L_μ definimos las L_μ -versiones $\bar{G}_n$ de los clubs antes definidos $G_n \subseteq \omega_1$

$(\alpha_\zeta^n = M_\zeta^n \cap \nu$ tal que $\zeta < \nu = \omega_1^{L_\mu}$, donde M_ζ^n se hace como la cadena elemental reemplazando las definiciones ξ_ν , y κ_n con $\bar{\xi}_\nu$ y $\bar{\gamma}_\nu^n$ respectivamente, entonces $\bar{G}_n = \{\zeta < \nu : \zeta = \alpha_\zeta^n\}$). $\bar{G}_n = G \cap \nu$ para cada $n \in \omega$, además $L_\mu \models “\bigcap_{n \in \omega} \bar{G}_n \text{ es club}”$, pues cada $\bar{G}_n$ es club según L_μ , si $\mu \in \mathcal{A}_\gamma$ entonces

$$L_\mu \models “(\bigcap_{n \in \omega} \bar{G}_n) \cap (S_{m+1} \cap \nu) \neq \emptyset”,$$

lo cual no es posible ya que $\nu = \min(G \cap S_{m+1})$, entonces $\mu \notin \mathcal{A}_\gamma$ y $\gamma_\nu = \mu_\nu$, entonces:

- i) $L_{\gamma_\nu} \models “\nu = \omega_1”$.
- ii) $L_{\gamma_\nu} \models “A^i \cap \nu \text{ es estacionario}”$, para cada $i \in 2$.
- iii) $L_{\gamma_\nu} \models “F \cap \nu \text{ es cofinal en } \nu”$

El punto 1 y 2 junto con la elección de ν implican que $\nu \in E$ y la tercera implica que $\nu \in F$ ya que F es cerrado. $\square$

Como E es estacionario, entonces sea $T = E \cap K$, y por lo tanto si $\gamma \in T$

1. Como $\gamma \in K$ entonces $C \cap \gamma$ es club en γ para algún $\beta \in \mathcal{A}_\gamma$.
 2. Si C es un club de γ para L_β , $\beta \in \mathcal{A}_\gamma$ entonces $L_{\mu_\gamma} \models “C \text{ es club en } \gamma = \omega_1^{L_{\mu_\gamma}}”$
 3. $L_{\mu_\gamma} \models “\gamma = \omega_1”$
 4. Como $\gamma \in E$ entonces $\gamma \in S_{m+1}$ y $L_{\mu_\gamma} \models “A^i \cap \gamma \text{ es estacionario en } \gamma = \omega_1^{L_{\mu_\gamma}}”$
 5. Entonces $L_{\mu_\gamma} \models C \cap (A^i \cap \gamma) \neq \emptyset$.
- Por lo tanto $(A^0 \cap \gamma, A^1 \cap \gamma) \in \mathcal{H}_\gamma$ y K y T quedan contruidos. $\square$

Una vez visto que en $V = L$ hay un sistema de escaleras veamos cómo crear un espacio de Dowker a partir de este sistema.

Para las siguientes demostraciones se van a usar resultados topológicos que pueden ser vistos en [10] y que sólo mencionaremos para hacer más claro los argumentos en la última demostración.

Teorema 4.2.5. *Sea X un espacio topológico regular y Lindelöf, entonces X es normal.*

Teorema 4.2.6. *$X \times I$ es normal si y sólo si X es normal y numerablemente paracompacto.*

De lo anterior, encontrar un espacio de Dowker se reduce a encontrar un espacio normal pero que no sea numerablemente paracompacto. Sin embargo con el siguiente teorema es posible mostrar de una manera más sencilla que X es numerablemente paracompacto.

Teorema 4.2.7. *X es nuemerablemente paracompacto si y sólo si toda sucesión de cerrados $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \dots$ con intersección vacía tiene una expansión a abiertos con intersección vacía (es decir $F_i \subseteq G_i$ y $\bigcap_{n \in \omega} G_n = \emptyset$).*

Finalmente veamos un ejemplo de un espacio de Dowker construido a partir del Axioma de Constructibilidad.

Teorema 4.2.8. *Si $\{S_n : n \in \omega\}$ es una partición de ω_1 en conjuntos estacionarios y $\vec{E}$ un sistema de escaleras de tal manera que cumplan:*

- i) $\vec{E}$ es fuertemente anticipante de clubs.
- ii) $\alpha \in S_n \Rightarrow E_\alpha \subseteq \bigcup_{k=0}^n S_k$.
- iii) Si $A, B \subseteq \bigcup_{k=0}^n S_k$ son estacionarios entonces existe un estacionario $T \subseteq S_{n+1}$ tal que:

$$\gamma \in T \Rightarrow \sup(E_\gamma \cap A) = \gamma = \sup(E_\gamma \cap B).$$

Entonces $X = (\omega_1, \tau)$ es un espacio de Dowker, donde τ es la topología asociada al sistema de escaleras $\vec{E}$.

Demostración. La topología asociada al sistema de escaleras $\vec{E}$ es la topología de orden, más una base de vecindades para los puntos límites de ω_1 $U \subseteq \omega_1$ es un abierto si para cada α límite que está en U ($\exists \beta < \alpha$) $(E_\alpha \setminus \beta \subseteq U)$.

Para ver que X es un espacio de Dowker es necesario ver que X es normal. Entonces sean $A, B \subseteq \omega_1$ cerrados, por demostrar que existen C, D abiertos tales que $C \cap D = \emptyset$, $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I A o B es acotado. Sin pérdida de generalidad, suponga A acotado. Sea $\beta \in \omega_1$ tal que $\beta \in A$ implica $\beta < \alpha$. En este caso, Note que (α, τ') (el subespacio α con la topología restringida) es numerable, también note que (ω, τ') es regular, y por ser numerable es Lindelöf. Por lo tanto es normal y entonces hay dos abiertos $U', V' \subseteq \alpha$ tal que $U' \cap V' = \emptyset$ y $A \subseteq U'$ y $(\alpha \cap B) \subseteq V'$. Por lo tanto $U = U'$, $V = V' \cup \omega_1 \setminus (\alpha + 1)$ son los abiertos que separan A y B .

Caso II A y B son no acotados. Note que si los dos fuesen estacionarios, como $\vec{E}$ golpea pares de estacionarios entonces existe α límite tal que $E_\alpha \cap A$ y $E_\alpha \cap B$ son cofinales en α . Entonces $\alpha \in A \cap B$ ya que es punto de acumulación bajo esta nueva topología. Una vez visto esto, construiremos U, V abiertos tales que $U \cap V = \emptyset$ y $A \subseteq U$, $B \subseteq V$.

Sin pérdida de generalidad, suponga B no estacionario; entonces existe un club C tal que $C \cap B = \emptyset$. Como $\vec{E}$ es fuertemente anticipante de clubs, hay un D club

tal que

$$(\forall \gamma \in D)(\exists \beta < \alpha)(E_\gamma \setminus \beta \subseteq C).$$

Por recursión sobre D vamos a construir abiertos ajenos U, V tales que $A \cup D \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Suponga que para $\alpha \in C$ existen abiertos tales que $(A \cup D) \cap \alpha \subseteq U_\alpha \cap \alpha$ y $B \cap \alpha \subseteq V_\alpha \cap \alpha$ y U, V ajenos hasta α , veamos que para $\alpha^+ = \min\{\beta \in D : \alpha < \beta\}$ existen $U_{\alpha^+}, V_{\alpha^+}$ que hacen ajeno a $(A \cup D) \cap \alpha^+, B \cap \alpha^+$. De esta manera hay que hacer ajenos a $(A \cup D) \cap [\alpha, \alpha^+ + 1]$ de $B \cap [\alpha, \alpha^+ + 1]$. Una vez más la topología restringida a $\alpha^+ + 1$ es Lindelöf, por lo tanto hay U', V' que separan a $(A \cup D) \cap [\alpha, \alpha^+ + 1]$ de $B \cap [\alpha, \alpha^+ + 1]$ y hacemos $U_{\alpha^+} = U_\alpha \cup U'$ y $V_{\alpha^+} = V_\alpha \cup V'$ para hacer ajenos a $A \cup D$ y B hasta α^+ .

Si $\alpha \in C$ y α es ordinal límite, entonces note que $\alpha \notin B$ ya que hay $\beta < \alpha$ tal que $E_\alpha \setminus \beta \subseteq C$. Para todo $\gamma \in D \cap \alpha$ existe una vecindad $N(\gamma)$ tal que

$$N(\gamma) \subseteq \bigcup_{\xi \in C \cap \alpha} U_\xi,$$

así

$$V_\alpha = \bigcup_{\xi \in C \cap \alpha} V_\xi, \quad U_\alpha = \bigcup_{\xi \in C \cap \alpha} U_\xi \cup \{\alpha\}$$

son los abiertos para hacer ajenos a $A \cup D$ y B .

En el caso de que A, B sean cerrados, ajenos y B considerando que B es no estacionario, acorde con lo anterior

$$A \subseteq A \cup D \subseteq U = \bigcup_{\xi \in C} U_\xi, \quad B \subseteq V = \bigcup_{\xi \in C} V_\xi$$

son abiertos tales que $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto X es normal.

Como X es normal, veamos que pasa con la propiedad de ser numerablemente paracompacto. Sea $\langle S_n : n \in \omega \rangle$ la partición asociada al sistema de escaleras, entonces:

$$\forall n [A_n = \bigcup_{k \leq n} S_k \text{ es abierto en } X].$$

Sea $\alpha \in A_n$ límite, entonces por el teorema 4.2.4 $E_\alpha \subseteq A_n$, por lo tanto A_n es abierto.

La idea es crear una sucesión de cerrados $F_n = \omega_1 \setminus A_n$. Note que para $n \in \omega$, $F_{n+1} \subseteq F_n$ y $\bigcap_{n \in \omega} F_n = \emptyset$. Suponga ahora que W_n son abiertos tales que $F_n \subseteq W_n$ y $\bigcap \{W_n : n \in \omega\} = \emptyset$; hay un $T \subseteq X \setminus W_m$ que es estacionario. Como W_m es abierto,

la cerradura de T es un subconjunto de $\omega_1 \setminus W_m$. Más aún, hay un $\delta \in S_{m+1}$ tal que $\delta \in cl_\tau(T) \subseteq \omega_1 \setminus W_m$, lo cual contradice que $S_{m+1} \subseteq F_m \subseteq W_m$. Así $X = (\omega_1, \tau)$ no es numerablemente paracompacto y por lo tanto un espacio de Dowker. $\square$

Bibliografía

- [1] Chen Chung Chang and H. Jerome Keisler. *Model Theory*. 1990.
- [2] Keith J. Devlin. The combinatorial principle $\diamond^\#$. *Symbolic Logic*, 47(4), December 1982.
- [3] Keith J. Devlin. *Constructibility*. Springer-Verlag, 1984.
- [4] Fernando Hernández Hernández and Paul J. Szeptycki. A small Dowker space from a club-guessing principle. *Topology proceedings*, 34, 2009.
- [5] Fernando Hernández Hernández. *Teoría de Conjuntos*. Aportaciones matemáticas. 3 edition, 2011.
- [6] Winfried Just and Martin Weese. *Discovering Modern Set Theory I*. American Mathematical Society, 1996.
- [7] Elliott Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Champan & Hall, 1979.
- [8] Michael Rathjen. A proof-theoretic characterization of primitive recursive set functions. *The journal of symbolic logic*, 57(3), 1992.
- [9] Mary Ellen Rudin. A normal space X for which $X \times I$ is not normal. *American mathematical society*, 77(2), March 1971.
- [10] Stephen Willard. *General Topology*. Addison-Wesley. 1970.