



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

**Algunas Propiedades de la Matriz Resolvente
del Problema de Momentos de Hamburger**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Presenta:

Sergio Fidel
AMBRIZ PENN

Asesor:

Dr. Abdon Eddy
CHOQUE RIVERO

Morelia Michoacan México, Julio 2013

Índice general

1. Resumen	VII
2. Introducción	IX
3. J-forma de la Matriz Resolvente	1
3.1. Definiciones Preliminares	1
3.2. Matriz Resolvente	7
3.3. J -forma de la Matriz Resolvente	7
3.4. Inversa de la Matriz Resolvente	10
4. De la MR a los Polinomios Ortogonales	13
4.1. Nociones básicas	13
4.2. Ortogonalidad de los polinomios $P_j(z)$	19
4.3. Polinomios de segunda especie $Q_j(z)$	25
5. Matriz Resolvente como Producto	27
5.1. Preliminares	27
5.2. Preliminares para Parámetros de Stieltjes	37
5.3. Parámetros de Stieltjes	41
5.4. J -forma de la matriz $b^{(j)}(z)$	47
6. Resultados	51
7. Conclusiones	55
A. Solución del problema de momentos	57
§ 1. Solución para el problema determinado	57
§ 2. Solución para el problema indeterminado	60

B. J-Matrices	63
§ 1. Conceptos fundamentales de las J -álgebras	63

Nomenclatura

A continuación señalamos algunas instrucciones acerca de los símbolos usados en el texto:

Descripción de símbolos	
Símbolo	Descripción
\mathbb{C}	Campo de los números complejos.
\mathbb{R}	Campo de los números reales.
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
\mathcal{J}_k	Conjunto de índices $\{0, 1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{J}_k \setminus \{0\}$	Conjunto de índices $\{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$.
$\text{Mat}_{p \times p}(\mathbb{C})$	Conjunto de las matrices de tamaño $p \times p$ con entradas en \mathbb{C}
A^*	La transpuesta conjugada de la matriz A .
A^\dagger	La transpuesta de la matriz A
◆	Termina una demostración.
$\Im z$	Parte imaginaria del número complejo z .

Capítulo 1

Resumen

En la presente tesis se estudiarán algunas propiedades de la matriz resolvente del Problema Matricial de Momentos de Hamburger la cual se representa por una matriz polinomial de dimensión $2q \times 2q$ y tiene la forma

$$U_n(z) = \begin{pmatrix} \alpha_n(z) & \beta_n(z) \\ \gamma_n(z) & \delta_n(z) \end{pmatrix}$$

donde los elementos $\alpha_n(z)$, $\beta_n(z)$, $\gamma_n(z)$ y $\delta_n(z)$ son polinomios $q \times q$ que llevan la información de los momentos. La matriz resolvente es usada para dar la solución del problema de momentos de Hamburger en términos de la función asociada

$$s(z) = \frac{\alpha_n(z)w(z) + \beta_n(z)}{\gamma_n(z)w(z) + \delta_n(z)}.$$

Para $q > 1$ mediante $\frac{A}{B}$ se denota $A \cdot B^{-1}$ asumiendo que existe la inversa de B . Otra propiedad especial de la matriz resolvente que se estudiará es la J -forma de la matriz resolvente.

Recordando brevemente que el problema clásico de momentos de Hamburger trata acerca de la relación entre una colección de números llamados momentos denotados $\{s_j\}_{j=0}^{\infty}$ y una medida de Borel positiva σ relacionados por medio de la igualdad

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k d\sigma(t), \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Aparecen preguntas acerca de: ¿ cuando ésta medida positiva σ existe ? y si existe, ¿ es única ?. Algunas de las aplicaciones del problema de momentos

es en la teoría de Probabilidad así como en la teoría de Control y el estudio de circuitos eléctricos.

Se demostrará que los polinomios $\alpha_j(z)$, $\beta_j(z)$, $\gamma_j(z)$ y $\delta_j(z)$ pueden ser escritos en términos de polinomios ortogonales $\{P_k(z)\}_{k=0}^n$ respecto a la medida correspondiente al problema de momentos de Hamburger y polinomios $\{Q_k(z)\}_{k=0}^n$ llamados polinomios de segunda especie.

También se estudiará una representación multiplicativa de la matriz resolvente de la forma $U_j(z) = b^{(0)}(z) \cdot b^{(1)}(z) \cdots b^{(j)}(z)$, mediante factores elementales $b^{(j)}(z)$ llamados factores de Blaschke-Potapov, donde cada función matricial $b^{(j)}(z)$ tiene dimensión $2q \times 2q$ y es una función lineal con respecto de z . A su vez se verá que las matrices $b^{(j)}(z)$ se representan como un producto de matrices que contienen ciertos parámetros elementales llamados parámetros de Stieltjes.

Para concluir, se verificará que las matrices $b^{(j)}(z)$ heredan las J -forma propiedades de la matriz resolvente $U_j(z)$.

Capítulo 2

Introducción

En el presente trabajo se estudiarán las propiedades principales de la matriz resolvente del problema de momentos de Hamburger truncado. Aclaremos estos dos conceptos:

Problema de Momentos de Hamburger.

El problema de momentos de Hamburger [5] (nombrado así en honor a Hans Ludwig Hamburger), consiste en lo siguiente: Dada una colección de números reales $\{s_0, s_1, s_2, \dots\}$, hallar una medida positiva de Borel $\sigma(t)$ tal que

$$s_j = \int_{-\infty}^{\infty} t^j d\sigma(t), \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Este problema se subdivide en los siguientes puntos:

1. ¿ Cuándo el problema de momentos de Hamburger tiene solución ?
2. ¿ Cuándo el problema de momentos de Hamburger tiene solución única (llamado problema determinado) y cuando tiene un número infinito de soluciones (llamado problema indeterminado) ?
3. Determinar el conjunto de soluciones del problema de momentos de Hamburger.

Los puntos 1 y 2 serán tratados en el apéndice. El conjunto de soluciones del punto 3 se discutirá mediante la función fraccionaria lineal (2.5).

Si la secuencia de momentos dados s_j es finita y contiene un número impar de momentos $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$ entonces el problema de momentos (2.1) se llama truncado (problema de Momentos de Hamburger truncado).

Denotemos el conjunto de todas las soluciones del problema de Momentos de Hamburger truncado mediante \mathcal{M}_n .

Usualmente en cada situación σ se asocia una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de la forma

$$s(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - z} \quad (2.2)$$

donde $\sigma(t)$ es una medida positiva definida en \mathbb{R} .

Tal función es denominada función asociada al problema de Momentos de Hamburger truncado. El conjunto de funciones asociadas denotado mediante \mathcal{Z}_n .

Matriz Resolvente del Problema de Momentos truncado

Sea $U_j(z)$ una función que va de los complejos a las matrices complejas de tamaño 2×2 , es decir, $U_j : \mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$, definida de la siguiente forma

$$U_j(z) := \begin{pmatrix} 1 - zu_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j & zu_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j \\ -zv_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j & 1 + zv_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Esta matriz se llama matriz resolvente del problema de momentos de Hamburger, cuyas matrices $R_j(z)$, H_j , v_j , u_j se definen en la pagina 1, con $H_j > 0$, es decir H_j es positiva definida. Definimos:

$$\begin{aligned} \alpha_j(z) &:= 1 - zu_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j, \\ \beta_j(z) &:= zu_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j, \\ \gamma_j(z) &:= -zv_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j, \\ \delta_j(z) &:= 1 + zv_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j. \end{aligned}$$

Entonces la matriz resolvente $U_j(z)$ se puede escribir en la siguiente forma

$$U_j(z) = \begin{pmatrix} \alpha_j(z) & \beta_j(z) \\ \gamma_j(z) & \delta_j(z) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Las funciones $\alpha_j(z)$, $\beta_j(z)$, $\gamma_j(z)$ y $\delta_j(z)$, son polinomios que dependen de los momentos $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$.

Con las entradas de la matriz $U_j(z)$ se describen las soluciones del punto 3. Más precisamente, sea la función $s(z)$ definida de la siguiente forma:

$$s(z) := \frac{\alpha_j(z)w(z) + \beta_j(z)}{\gamma_j(z)w(z) + \delta_j(z)}, \quad (2.5)$$

es la función asociada a la solución del problema de momentos de Hamburger truncado, aquí, la función $w(z)$ es un parámetro de la solución, el cual está determinado por la relación

$$w(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{t-z}. \quad (2.6)$$

Esta función es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, donde μ es una medida positiva arbitraria en \mathbb{R} .

Sea \mathcal{R}_0 el conjunto de parámetros w que satisface (2.6), denotemos con $\tilde{\mathcal{R}}_0 := \mathcal{R}_0 \cup \{\infty\}$. De esta manera el conjunto de todas soluciones \mathcal{Z}_n del problema de momentos de Hamburger se describe mediante el conjunto de parámetros $\tilde{\mathcal{R}}_0$, ver Akhiezer [3].

Mediante la formula de inversión de Perron-Stieltjes se obtiene σ de la función asociada s . Considerando que para cualquier $t, c \in \mathbb{R}$ y que $c < t$:

$$\frac{\sigma(t+0) + \sigma(t-0)}{2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_c^t \Im s(x+i\epsilon) dx, \quad (2.7)$$

donde se considera que las funciones que buscamos σ son continuas por la izquierda, es decir $\sigma(t) = \sigma(t-0)$. Esto se puede consultar de la página 124 de [3], así como en la página 11 de la sección 59 (volumen II) de [4].

Observación. Hasta aquí hemos considerado el caso escalar, todo lo que sigue estudiaremos el caso matricial.

***J*-forma de la Matriz Resolvente de Hamburger**

Una de las propiedades más importantes de la matriz resolvente del problema de momentos de Hamburger son las denominadas *J*-propiedades, con las cuales, junto con el Teorema de Identidad para funciones analíticas, nos permitirá encontrar la inversa de la matriz resolvente de manera explícita.

Más precisamente, sea J una matriz de dimensión $p \times p$ con las siguientes 2 propiedades: $J^* = J$ y $J^2 = I_q$, donde I_q denota la matriz identidad de tamaño $q \times q$, es decir, $I_q \in \text{Mat}_{q \times q}(\mathbb{C})$ y sea A una matriz $p \times p$, entonces las J -propiedades de A se clasifican de la siguiente forma:

- A es J -contractiva si y solo si $J - AJA^* \geq 0$.
- A es J -expansiva si y solo si $J - AJA^* \leq 0$.
- A es J -unitaria si y solo si $J - AJA^* = 0$.

Se demuestra en la página 8 que considerando la matriz

$$\tilde{J}_q = \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

donde 0_q denota la matriz 0 de tamaño $q \times q$, es decir, $0_q \in \text{Mat}_{q \times q}(\mathbb{C})$, entonces la matriz resolvente satisface

$$\tilde{J}_q - U_j(z)\tilde{J}_q U_j^*(z) = \begin{cases} \geq 0, & \Im z \in (0, \infty) \\ = 0, & z \in \mathbb{R} \\ \leq 0, & \Im z \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad (2.9)$$

es decir:

- $U_j(z)$ es \tilde{J}_q -contractiva cuando $\Im z > 0$.
- $U_j(z)$ es \tilde{J}_q -unitaria cuando $\Im z = 0$ ($z \in \mathbb{R}$).
- $U_j(z)$ es \tilde{J}_q -expansiva cuando $\Im z < 0$.

Polinomios Ortogonales y Polinomios de Segunda Especie

En la presente tesis también se estudian los polinomios $\{P_j(z)\}_{j=0}^n$ y $\{Q_j(z)\}_{j=0}^n$ que surgen al construir la matriz resolvente, los cuales son 2 familias que satisfacen lo siguiente:

- $\{P_j(z)\}_{j=0}^n$ es una familia de polinomios ortonormales respecto de la medida σ correspondiente al presente problema de momentos (teorema 4.2.1 página 21). Recordemos la definición de ortogonalidad en polinomios matriciales:

Sea σ una medida positiva de $q \times q$ en \mathbb{R} . Decimos que la matriz polinomial $P(t) = \sum_{k=0}^j A_k t^k$ con coeficientes A_k de tamaño $q \times q$ tiene grado j sí A_j es distinto de cero. Una sucesión finita de matrices polinomiales $\{P_j\}_{j=0}^n$ es llamada Matrices Ortogonales de Polinomios con respecto a σ sí:

- i) $\deg P_j(t) = j \forall j \in \{0, \dots, n\}$.
- ii) $\int_{-\infty}^{\infty} P_m(t) d\sigma(t) P_j^*(t) = \delta_{mj} C_{mj}, \forall m, j \in \{0, \dots, n\}$ donde C_{mj} es una matriz constante distinta de cero de tamaño $q \times q$.

Sí C_{mj} es la matriz identidad I_q , entonces la sucesión de polinomios matriciales $\{P_j\}_{j=0}^n$ es una familia de polinomios ortogonales matriciales.

- $\{Q_j(z)\}_{j=0}^n$ es una familia de polinomios de segunda especie, es decir, para cada j , $Q_j(z)$ surge a partir de $P_j(z)$ por medio de la relación

$$Q_j(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_j(z) - P_j(t)}{z - t} d(\sigma(t)) \quad (2.10)$$

(lema 4.3.1, página 26).

Factores de Blaschke-Potapov y Parámetros de Stieltjes

En el capítulo 3 verificaremos que la matriz resolvente se puede escribir en forma multiplicativa usando los factores de Blaschke-Potapov (ver definición 5.1.2)

$$b^{(j)}(z) = \left(\begin{array}{c|c} I_q - z\widehat{w}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j & z\widehat{w}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{w}_j \\ \hline -z\widehat{v}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j & I_q + z\widehat{v}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{w}_j \end{array} \right), \quad (2.11)$$

los cuales son funciones matriciales lineales respecto de z , $b^{(j)} : \mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}_{2q \times 2q}(\mathbb{C})$. Se demuestra en el teorema 5.1.1 que $U_j(z)$ se representa como producto de $b^{(j)}(z)$, es decir:

$$U_j(z) = \overset{\rightarrow}{\prod}_{k=0}^j b^{(k)}(z). \quad (2.12)$$

Donde la flecha \rightarrow indica que el producto se hace de izquierda a derecha.

Además demostramos que cada factor de Blaschke-Potapov hereda las \tilde{J}_q -propiedades de la matriz resolvente (ver página 49). En el teorema 5.3.1 (página 43) se demuestra que las matrices $b^{(j)}(z)$ se representan usando los parámetros de Stieltjes $\{L_j\}_{j=0}^n$ y $\{M_j\}_{j=0}^n$.

$$b^{(j)}(z) = \prod_{i=0}^{j-1} \begin{pmatrix} I_q & L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -zM_j & I_q \end{pmatrix} \prod_{i=0}^{j-1} \begin{pmatrix} I_q & -L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Observación. Señalemos que la presente tesis considerará las propiedades principales de la matriz resolvente y no así el problema de momentos de Hamburger.

Observación. En la presente tesis no se presentan resultados originales, más bien se estudia detalladamente el artículo de I.V., Kovalishina [6] donde se expone el método de la desigualdad fundamental de Potapov [8] y [9] creado a principios de los años 60 del siglo XX.

Como referencias principales en este trabajo, menciono los siguientes artículos: [2], [1] y [6].

Capítulo 3

J-forma de la Matriz Resolvente

Introducción

En éste capítulo se introducirá la definición de matriz resolvente, la cual es muy importante para el problema de momentos y constituye el tema del trabajo actual. Se darán las definiciones de las matrices que se usan para la construcción de la matriz resolvente, las cuales se usarán a lo largo del presente texto, también se darán las definiciones de matriz *J*-contractiva, *J*-unitaria y *J*-expansiva (*J*-forma o *J*-matriz), las cuales, permitirán, con la ayuda del Teorema de Identidad para Funciones Analíticas del Análisis Complejo, a encontrar la inversa de la matriz resolvente.

3.1. Definiciones Preliminares

Definición 3.1.1. Sean $z \in \mathbb{C}$, $\{s_j\}_{j=0}^{2n} \in \text{Mat}_{q \times q}(\mathbb{C})$ tal que para $j \in \mathcal{J}_n$ se cumple que $s_j = s_j^*$, sea $p \in \mathbb{N}$ entonces I_p será la matriz identidad de tamaño $p \times p$, es decir $I_p \in \text{Mat}_{p \times p}(\mathbb{C})$, sea $p, q \in \mathbb{N}$ entonces $0_{p \times q}$ será la matriz 0 de tamaño $p \times q$, es decir, $0_{p \times q} \in \text{Mat}_{p \times q}(\mathbb{C})$. A lo largo del trabajo I será la matriz identidad de tamaño $q \times q$ y 0 la matriz cero de tamaño $q \times q$ ($0, I \in \text{Mat}_{q \times q}(\mathbb{C})$), entonces las siguientes matrices quedarán definidas de la siguiente forma para $j \in \mathcal{J}_n$:

$$H_j := \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_j \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_j & s_{j+1} & \cdots & s_{2j} \end{pmatrix}, \quad u_j := \begin{pmatrix} 0_q \\ -s_0 \\ \vdots \\ -s_{j-1} \end{pmatrix}, \quad v_j := \begin{pmatrix} I_q \\ 0_q \\ \vdots \\ 0_q \end{pmatrix},$$

$$T_j := \begin{pmatrix} 0_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ I_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_q & \cdots & I_q & 0_q \end{pmatrix}, \quad R_j(z) := (I_{(j+1)q} - zT_j)^{-1}, \quad Y_j := \begin{pmatrix} s_j \\ s_{j+1} \\ \vdots \\ s_{2j-1} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_j := (0_{q \times (j-1)q}, I_q) = (0_q, 0_q, \dots, I_q)$$

$$\widehat{H}_j := s_{2j} - Y_j^* H_{j-1}^{-1} Y_j.$$

Notemos que

$$R_j(z) = \begin{pmatrix} I_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ zI_q & \ddots & 0_q & 0_q \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ z^j I_q & \cdots & zI_q & I_q \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Observación 3.1.1. Las matrices de la definición 3.1.1 se pueden escribir en bloques de la siguiente forma:

$$H_j = \begin{pmatrix} H_{j-1} & Y_j \\ Y_j^* & s_{2j} \end{pmatrix}, \quad u_j = \begin{pmatrix} u_{j-1} \\ -s_{j-1} \end{pmatrix}, \quad v_j = \begin{pmatrix} v_{j-1} \\ 0_q \end{pmatrix},$$

$$T_j = \begin{pmatrix} T_{j-1} & 0_{jq \times q} \\ \lambda_j & 0_q \end{pmatrix}, \quad R_j(z) = \begin{pmatrix} R_{j-1}(z) & 0_{jq \times q} \\ \widehat{z}_j^\dagger & I_q \end{pmatrix}, \quad \text{con } \widehat{z}_j = \begin{pmatrix} z^j I_q \\ z^{j-1} I_q \\ \vdots \\ z I_q \end{pmatrix},$$

donde $j \in \mathcal{J}_n \setminus \{0\}$.

Lema 3.1.1. Sean $j \in \mathcal{J}_n$, sea H_j y \widehat{H}_j invertibles $\forall j \in \mathcal{J}_n$, entonces se tiene que:

$$H_j^{-1} = \begin{pmatrix} H_{j-1}^{-1} & 0_{jq \times q} \\ 0_{q \times jq} & 0_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} Y_j \\ I_q \end{pmatrix} \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q). \quad (3.2)$$

Demostración. Se demostrará que $H_j \cdot H_j^{-1} = I_{2q}$, comenzando por calcular directamente $H_j \cdot H_j^{-1}$ haciendo uso de la observación 3.1.1:

$$\begin{aligned}
H_j \cdot H_j^{-1} &= \\
&= \begin{pmatrix} H_{j-1} & Y_j \\ Y_j^* & s_{2j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_{j-1}^{-1} & 0_{jq \times q} \\ 0_{q \times jq} & 0_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{j-1} & Y_j \\ Y_j^* & s_{2j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} Y_j \\ I_q \end{pmatrix} \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) = \\
&= \begin{pmatrix} H_{j-1} \cdot H_{j-1}^{-1} & 0_{jq \times q} \\ Y_j^* H_{j-1}^{-1} & 0_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -H_{j-1} H_{j-1}^{-1} Y_j + Y_j \\ -Y_j^* H_{j-1}^{-1} Y_j + s_{2j} \end{pmatrix} \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) = \\
&= \begin{pmatrix} I_q & 0_{jq \times q} \\ Y_j^* H_{j-1}^{-1} & 0_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_q \\ \widehat{H}_j \end{pmatrix} \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) = \\
&= \begin{pmatrix} I_q & 0_{jq \times q} \\ Y_j^* H_{j-1}^{-1} & 0_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_q & 0_{jq \times q} \\ -Y_j^* H_{j-1}^{-1} & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

◆

A continuación enunciamos unas observaciones que utilizaremos para demostrar la identidad fundamental (lema 3.1.2) que se utilizará en el trabajo actual.

Observación 3.1.2. Sean H_{j-1} y λ_j como en la definición 3.1.1, entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$H_{j-1} \cdot \lambda_j = \begin{pmatrix} s_j \\ s_{j+1} \\ \vdots \\ s_{2j-1} \\ s_{2j} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Demostración. La demostración es obvia ya que λ_j deja la última columna de la matriz H_{j-1} . ◆

Observación 3.1.3. Sean Y_j y T_{j-1} como en la definición 3.1.1, entonces se cumple que

$$Y_j^* \cdot T_{j-1}^* = (0_q, s_j, s_{j+1}, \dots, s_{2j-2}) \quad (3.5)$$

Demostración. Por cálculo directo tenemos

$$Y_j^* \cdot T_{j-1}^* = (s_j, s_{j+1}, s_{j+2}, \dots, s_{2j-2}, s_{2j-1}) \cdot \begin{pmatrix} 0_q & I_q & 0_q & \cdots & 0_q \\ 0_q & 0_q & I_q & \cdots & 0_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_q & 0_q & 0_q & \cdots & I_q \\ 0_q & 0_q & 0_q & \cdots & 0_q \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

denotando al vector $\tilde{y}_j = (s_j, s_{j+1}, \dots, s_{2j-2})$ de tamaño $q \times q(j-1)$, se puede reescribir lo anterior de la siguiente forma:

$$Y_j^* \cdot T_{j-1}^* = (\tilde{y}_j, s_{2j-1}) \cdot \begin{pmatrix} 0_{q(j-1) \times q} & I_{q(j-1)} \\ 0_q & 0_{q \times q(j-1)} \end{pmatrix} = (0_q, \tilde{y}_j) \quad (3.7)$$

con lo que se concluye que

$$Y_j^* \cdot T_{j-1}^* = (0_q, s_j, s_{j+1}, \dots, s_{2j-2}). \quad (3.8)$$

◆

Observación 3.1.4. Sean Y_j y λ_j como en la definición 3.1.1, entonces se cumple que:

$$Y_j^* \cdot \lambda_j = s_{2j-1} \quad (3.9)$$

Demostración. La demostración es obvia haciendo los cálculos directamente. ◆

Observación 3.1.5. Sea H_j y T_j como en la definición 3.1.1, y haciendo las particiones en bloques de las matrices como en la observación 3.1.1, se puede ver que para $j = 2, 3, \dots, 2n$, se cumple lo siguiente:

$$H_j \cdot T_j^* = \begin{pmatrix} H_{j-1} & Y_j \\ Y_j^* & s_{2j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{j-1}^* & \lambda_j^* \\ 0_{q \times jq} & 0_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{j-1} \cdot T_{j-1}^* & H_{j-1} \cdot \lambda_j^* \\ Y_j^* \cdot T_{j-1}^* & Y_j^* \cdot \lambda_j^* \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Ahora procederemos a demostrar la Identidad Fundamental .

Lema 3.1.2 (Identidad Fundamental). *Sean T_j , H_j , u_j y v_j como en la definición 3.1.1, entonces se cumple la siguiente igualdad llamada Identidad Fundamental:*

$$H_j T_j^* - T_j H_j = u_j v_j^* - v_j u_j^*. \quad (3.11)$$

Demostración. Primero, observemos que para $j = 0$, se tiene que $H_0T_0^* - T_0H_0 = u_0v_0^* - v_0u_0^* = 0$. Ahora calcularemos explícitamente $H_j \cdot T_j^*$ para $j = 1$:

$$H_1T_1^* = \begin{pmatrix} 0_q & s_0 \\ 0_q & s_1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

para $j = 2$, hacemos uso de las observaciones previas:

$$H_2 \cdot T_2^* = \begin{pmatrix} H_1 \cdot T_1^* & H_1 \cdot \lambda_2 \\ Y_2^* \cdot T_1^* & Y_2^* \cdot \lambda_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 0_q & s_0 & s_1 \\ 0_q & s_1 & s_2 \\ \hline 0_q & s_2 & s_3 \end{array} \right) \quad (3.13)$$

para $j = 3$, haciendo lo mismo que en la igualdad previa, se tiene que:

$$H_3 \cdot T_3^* = \begin{pmatrix} H_2 \cdot T_2^* & H_2 \cdot \lambda_3 \\ Y_3^* \cdot T_2^* & Y_3^* \cdot \lambda_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0_q & s_0 & s_1 & s_2 \\ 0_q & s_1 & s_2 & s_3 \\ 0_q & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 0_q & s_3 & s_4 & s_5 \end{array} \right) \quad (3.14)$$

se puede observar que para $j > 3$, haciendo directamente los cálculos de $H_j \cdot T_j^*$ se obtiene que:

$$H_j \cdot T_j^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 0_q & s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{j-1} \\ 0_q & s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_j \\ 0_q & s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{j+1} \\ 0_q & s_3 & s_4 & s_5 & \cdots & s_{j+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0_q & s_{j+1} & s_{j+2} & s_{j+3} & \cdots & s_{2j-1} \end{array} \right) \quad (3.15)$$

cambiando la asignación de bloques, se tiene:

$$H_j \cdot T_j^* = \left(\begin{array}{c|cccc} 0_q & s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{j-1} \\ \hline 0_q & s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_j \\ 0_q & s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{j+1} \\ 0_q & s_3 & s_4 & s_5 & \cdots & s_{j+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0_q & s_{j+1} & s_{j+2} & s_{j+3} & \cdots & s_{2j-1} \end{array} \right) \quad (3.16)$$

ahora definiendo la matriz \tilde{k}_j de tamaño $qj \times qj$ de la forma:

$$\tilde{k}_j = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_j \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{j+1} \\ s_3 & s_4 & s_5 & \cdots & s_{j+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_j & s_{j+1} & s_{j+2} & \cdots & s_{2j-1} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

así como el vector \tilde{x}_j de tamaño $q \times q(j-1)$ de la forma:

$$\tilde{x}_j = (s_0, s_1, s_2, s_3, \dots, s_{j-1}) \quad (3.18)$$

entonces $H_j \cdot T_j^*$ se puede reescribir como:

$$H_j \cdot T_j^* = \begin{pmatrix} 0_q & \tilde{x}_j \\ 0_{qj \times q} & \tilde{k}_j \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

ahora, calculando la diferencia $H_j \cdot T_j^* - T_j \cdot H_j$ y recordando que $(H_j \cdot T_j^*)^* = T_j \cdot H_j$ ya que H_j es simétrica, se consigue que:

$$H_j \cdot T_j^* - T_j \cdot H_j = \begin{pmatrix} 0_q & \tilde{x}_j \\ 0_{qj \times q} & \tilde{k}_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0_q & 0_{q \times qj} \\ \tilde{x}_j^* & \tilde{k}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_q & \tilde{x}_j \\ -\tilde{x}_j^* & 0_{qj \times qj} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

por otro lado, calculando directamente $u_j \cdot v_j^*$:

$$u_j \cdot v_j^* = \begin{pmatrix} 0_q \\ -s_0 \\ -s_1 \\ \vdots \\ -s_{j-1} \end{pmatrix} \cdot (I_q, 0_q, 0_q, \dots, 0_q) = \begin{pmatrix} 0_q & 0_q & 0_q & \cdots & 0_q \\ -s_0 & 0_q & 0_q & \cdots & 0_q \\ -s_1 & 0_q & 0_q & \cdots & 0_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -s_{j-1} & 0_q & 0_q & \cdots & 0_q \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

recordando la definición de \tilde{x}_j , lo anterior se puede reescribir de la forma:

$$u_j \cdot v_j^* = \begin{pmatrix} 0_q & 0_{q \times qj} \\ -\tilde{x}_j^* & 0_{qj \times qj} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

luego calculando la diferencia $u_j \cdot v_j^* - v_j \cdot u_j^*$:

$$u_j \cdot v_j^* - v_j \cdot u_j^* = \begin{pmatrix} 0_q & 0_{q \times jq} \\ -\tilde{x}_j^* & 0_{jq \times jq} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0_q & -\tilde{x}_j \\ 0_{jq \times q} & 0_{jq \times jq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_q & \tilde{x}_j \\ -\tilde{x}_j^* & 0_{jq \times jq} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

ahora, igualando (3.20) con (3.23), se concluye que:

$$H_j T_j^* - T_j H_j = u_j v_j^* - v_j u_j^*. \quad (3.24)$$

◆

3.2. Matriz Resolvente

Definición 3.2.1. Sea $U_j(z)$ una función matricial con dominio en los complejos e imagen en las matrices de $2q \times 2q$ con entradas complejas, es decir, $U_j(z) : \mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}_{2q \times 2q}(\mathbb{C})$ definida de la siguiente forma:

$$U_j(z) := \begin{pmatrix} I_q - zu_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j & zu_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j \\ -zv_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j & I_q + zv_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Donde las matrices u_j , v_j , $R_j^*(z)$ y H_j son las definidas en 3.1.1, y H_j es invertible.

Denotando:

$$\alpha_j(z) := I_q - zu_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j, \quad (3.26)$$

$$\beta_j(z) := zu_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j, \quad (3.27)$$

$$\gamma_j(z) := -zv_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j, \quad (3.28)$$

$$\delta_j(z) := I_q + zv_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j. \quad (3.29)$$

se tiene que

$$U_j(z) = \begin{pmatrix} \alpha_j(z) & \beta_j(z) \\ \gamma_j(z) & \delta_j(z) \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

3.3. J -forma de la Matriz Resolvente

Definición 3.3.1. Sea J una matriz compleja de $p \times p$, es decir, $J \in \text{Mat}_{p \times p}(\mathbb{C})$ que satisface $J^* = J$ y $J^2 = I$. Una matriz compleja A de tamaño $p \times p$ se dice que es J -contractiva (respectivamente J -expansiva) si $J - A^* J A \geq 0$ (respectivamente, $A^* J A - J \geq 0$). Si A es compleja de tamaño $p \times p$, entonces A es J -contractiva (respectivamente J -expansiva) si y solo si A^* es J -contractiva (respectivamente J -expansiva). Mas aún, si A es una matriz compleja de $p \times p$ no singular, entonces A es J -contractiva si y solo si A^{-1} es J -expansiva. Una matriz compleja $p \times p$ se dice es J -unitaria si $J - A^* J A = 0$. Si A es una matriz J -unitaria compleja de $p \times p$ entonces A es no singular y las matrices A^* y A^{-1} son J -unitarias también.

A este conjunto de propiedades (J -contractiva, J -unitaria, J -expansiva) les denotaremos como J -forma.

Para el presente texto, se usará la matriz de tamaño $2q \times 2q$

$$\tilde{J}_q := \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Observación 3.3.1. La siguiente igualdad es válida $\forall j \in \mathcal{J}_n$

$$U_j(z) = I_{2q} + iz (u_j, v_j)^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} (u_j, v_j) \tilde{J}_q. \quad (3.32)$$

Demostración.

$$I_{2q} + iz (u_j, v_j)^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} (u_j, v_j) \tilde{J}_q = \quad (3.33)$$

$$= \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} + iz \begin{pmatrix} u_j^* \\ v_j^* \end{pmatrix} R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} (u_j, v_j) \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{pmatrix} = \quad (3.34)$$

$$= \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} + iz \begin{pmatrix} u_j^* \\ v_j^* \end{pmatrix} R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} (iv_j, -iu_j) = \quad (3.35)$$

$$= \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} u_j^* \\ v_j^* \end{pmatrix} R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} (v_j, -u_j) = \quad (3.36)$$

$$= \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} u_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j & -u_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j \\ v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j & -v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j \end{pmatrix} = \quad (3.37)$$

$$= \begin{pmatrix} I_q - z u_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j & u_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j \\ -v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j & I_q + z v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j \end{pmatrix} = U_j(z). \quad (3.38)$$

◆

Observación 3.3.2. Sea $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$ una sucesión de momentos; de la Identidad fundamental se tiene que la igualdad

$$(u_j, v_j) \tilde{J}_q (u_j, v_j)^* = -i (H_j T_j^* - T_j H_j) \quad (3.39)$$

es válida $\forall j \in \mathcal{J}_n$. La demostración es obvia, ver lema 3.1.2 y (3.31)

Lema 3.3.1. *Sea $U_n(z)$ la matriz resolvente, entonces se satisface que:*

a)

$$\tilde{J}_q - U_j(z) \tilde{J}_q U_j^*(z) = i(\bar{z} - z) (u_j, v_j)^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} R_j(\bar{z}) (u_j, v_j). \quad (3.40)$$

b) *En particular, se tiene que:*

$$\tilde{J}_q - U_j(z) \tilde{J}_q U_j^*(z) = \begin{cases} \geq 0, & \Im z \in (0, \infty) \\ = 0, & z \in \mathbb{R} \\ \leq 0, & \Im z \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad (3.41)$$

Demostración: a).

Comenzando por hacer el cálculo de $\tilde{J}_q - U_j(z)\tilde{J}_q U_j^*(z)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_q - U_j(z)\tilde{J}_q U_j^*(z) &= \tilde{J}_q - \left(I_{2q} + iz(u_j, v_j)^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1}(u_j, v_j) \tilde{J}_q \right) \cdot \tilde{J}_q \\ &\quad \cdot \left(I_{2q} - i\bar{z} \tilde{J}_q(u_j, v_j)^* H_j^{-1} R_j(\bar{z})(u_j, v_j) \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Distribuyendo \tilde{J}_q por la derecha en el primer producto y recordando que $\tilde{J}_q^2 = I_{2q}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_q - U_j(z)\tilde{J}_q U_j^*(z) &= \tilde{J}_q - \left(\tilde{J}_q + iz(u_j, v_j)^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1}(u_j, v_j) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(I_{2q} - i\bar{z} \tilde{J}_q(u_j, v_j)^* H_j^{-1} R_j(\bar{z})(u_j, v_j) \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Realizando el producto en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \tilde{J}_q - U_j(z)\tilde{J}_q U_j^*(z) &= \cancel{\tilde{J}_q} - \cancel{\tilde{J}_q} + i\bar{z}(u_j, v_j)^* H_j^{-1} R_j(\bar{z})(u_j, v_j) - \\ &\quad - iz(u_j, v_j)^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1}(u_j, v_j) - \\ &\quad - z\bar{z}(u_j, v_j)^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1}(u_j, v_j) \tilde{J}_q(u_j, v_j)^* H_j^{-1} R_j(\bar{z})(u_j, v_j) \end{aligned} \quad (3.44)$$

haciendo uso de la observación 3.3.2, se puede apreciar que:

$$\begin{aligned} -z\bar{z}(u_j, v_j)^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1}(u_j, v_j) \tilde{J}_q(u_j, v_j)^* H_j^{-1} R_j(\bar{z})(u_j, v_j) &= \\ = iz\bar{z}(u_j, v_j)^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1}(H_j T_j^* - T_j H_j) H_j^{-1} R_j(\bar{z})(u_j, v_j). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ahora simplificando:

$$\begin{aligned} i(u_j, v_j)^* R_j^*(\bar{z}) \left(\bar{z} (I_{(j+1)q} - zT_j^*) H_j^{-1} - zH_j^{-1} (I_{(j+1)q} - \bar{z}T_j) \right) + \\ + z\bar{z} H_j^{-1} (H_j T_j^* - T_j H_j) H_j^{-1} R_j(\bar{z})(u_j, v_j) = \\ = i(u_j, v_j)^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} \left(\bar{z} H_j (I_{(j+1)q} - zT_j^*) - z (I_{(j+1)q} - \bar{z}T_j) H_j + \right. \\ \left. + z\bar{z} (H_j T_j^* - T_j H_j) \right) H_j^{-1} R_j(\bar{z})(u_j, v_j) \end{aligned} \quad (3.46)$$

reduciendo el término dentro del paréntesis en (3.46), tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{z} H_j (I_{(j+1)q} - zT_j^*) - z (I_{(j+1)q} - \bar{z}T_j) H_j + z\bar{z} (H_j T_j^* - T_j H_j) &= \\ = \bar{z} H_j - \bar{z} z H_j T_j^* - z H_j + z\bar{z} T_j H_j + z\bar{z} (H_j T_j^* - T_j H_j) &= \\ = \bar{z} H_j - z H_j - \cancel{z\bar{z} (H_j T_j^* - T_j H_j)} + \cancel{z\bar{z} (H_j T_j^* - T_j H_j)} &= (\bar{z} - z) H_j \end{aligned} \quad (3.47)$$

sustituyendo (3.47) en (3.46), se consigue que:

$$\begin{aligned} i(u_j, v_j)^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} (\bar{z} - z) \cancel{H_j} \cancel{H_j}^{-1} R_j(\bar{z}) (u_j, v_j) &= \\ &= i(\bar{z} - z) (u_j, v_j)^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} R_j(\bar{z}) (u_j, v_j). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Por lo tanto, se cumple que

$$\tilde{J}_q - U_j(z) \tilde{J}_q U_j^*(z) = i(\bar{z} - z) (u_j, v_j)^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} R_j(\bar{z}) (u_j, v_j). \quad (3.49)$$

La parte a) queda demostrada. \blacklozenge

Demostración: b).

Como $z \in \mathbb{C}$, se puede suponer que $z = x + iy$ para $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $i(\bar{z} - z) = -2i \cdot iy = 2y$, por lo que se puede concluir lo siguiente:

$$\tilde{J}_q - U_j(z) \tilde{J}_q U_j^*(z) = \begin{cases} \geq 0, & \Im z \in (0, \infty), \\ = 0, & z \in \mathbb{R}, \\ \leq 0, & \Im z \in (-\infty, 0). \end{cases} \quad (3.50)$$

\blacklozenge

De esta manera se tiene que

- $U_j(z)$ es \tilde{J}_q -contractiva cuando $\Im z > 0$.
- $U_j(z)$ es \tilde{J}_q -unitaria cuando $\Im z = 0$ ($z \in \mathbb{R}$).
- $U_j(z)$ es \tilde{J}_q -expansiva cuando $\Im z < 0$.

3.4. Inversa de la Matriz Resolvente

Con la ayuda del teorema de identidad para las funciones analíticas [7], podemos obtener la inversa explícita de la matriz resolvente y enunciamos 3 identidades que satisfacen $\alpha_j(z), \beta_j(z), \gamma_j(z), \delta_j(z)$ de la matriz resolvente:

Lema 3.4.1. *La inversa de la matriz resolvente $U_j(z)$ tiene la forma*

$$(U_j(z))^{-1} = \begin{pmatrix} I_q + z u_j^* H_j^{-1} R_j(\bar{z}) v_j & -z u_j^* H_j^{-1} R_j(\bar{z}) u_j \\ z v_j^* H_j^{-1} R_j(\bar{z}) v_j & I_q - z v_j^* H_j^{-1} R_j(\bar{z}) u_j \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Demostración. Sea $U_j^\sharp(z) := U_j^*(\bar{z})$ y denotando a $F(z)$ de la siguiente forma:

$$F(z) := \tilde{J}_q - U_j^\sharp(z)\tilde{J}_q U_j(z), \quad (3.52)$$

La función $F(z)$ es analítica ya que sus entradas son polinomios (ver teorema 4.1.1). Del lema 3.3.1 se tiene que $F(z) = 0_q \forall z \in \mathbb{R}$, como \mathbb{R} es denso, entonces $\exists \{z_n\}_{n=1}^\infty$ (sucesión de Cauchy) tal que $z_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ cuando $n \rightarrow \infty$, por lo tanto, del Teorema de identidad para las funciones analíticas se tiene que $F(z) \equiv 0_q$. Es decir

$$\tilde{J}_q - U_j^\sharp(z)\tilde{J}_q U_j(z) \equiv 0_q, \quad (3.53)$$

$$\Rightarrow \tilde{J}_q \equiv U_j^\sharp(z)\tilde{J}_q U_j(z), \quad (3.54)$$

multiplicando \tilde{J}_q por la izquierda se consigue

$$I_{2q} = \tilde{J}_q U_j^\sharp(z)\tilde{J}_q U_j(z) = \tilde{J}_q U_j^*(\bar{z})\tilde{J}_q U_j(z). \quad (3.55)$$

Por lo tanto se llega a que:

$$(U_j(z))^{-1} \equiv \tilde{J}_q U_j^*(\bar{z})\tilde{J}_q, \quad (3.56)$$

es decir:

$$\begin{aligned} (U_j(z))^{-1} &= \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_j^*(\bar{z}) & \gamma_j^*(\bar{z}) \\ \beta_j^*(\bar{z}) & \delta_j^*(\bar{z}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -i\beta_j^*(\bar{z}) & -i\delta_j^*(\bar{z}) \\ i\alpha_j^*(\bar{z}) & i\gamma_j^*(\bar{z}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_j^*(\bar{z}) & -\beta_j^*(\bar{z}) \\ -\gamma_j^*(\bar{z}) & \alpha_j^*(\bar{z}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

escribiendo de forma explícita:

$$(U_j(z))^{-1} = \begin{pmatrix} I_q + zu_j^* H_j^{-1} R_j(\bar{z}) v_j & -zu_j^* H_j^{-1} R_j(\bar{z}) u_j \\ zv_j^* H_j^{-1} R_j(\bar{z}) v_j & I_q - zv_j^* H_j^{-1} R_j(\bar{z}) u_j \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

De esta manera hemos encontrado la forma explícita de la inversa de la matriz resolvente $U_j(z)$. \blacklozenge

Lema 3.4.2. Sean $\alpha_j(z)$, $\beta_j(z)$, $\gamma_j(z)$ y $\delta_j(z)$ las entradas de la matriz resolvente del problema de momentos de Hamburger, entonces tienen lugar las siguientes igualdades:

$$\alpha_j(z) \cdot \delta_j^*(\bar{z}) - \delta_j(z) \cdot \alpha_j^*(\bar{z}) = I_q, \quad (3.59)$$

$$\alpha_j(z) \cdot \beta_j^*(\bar{z}) = \beta_j(z) \cdot \alpha_j^*(\bar{z}), \quad (3.60)$$

$$\gamma_j(z) \cdot \delta_j^*(\bar{z}) = \delta_j(z) \cdot \gamma_j^*(\bar{z}). \quad (3.61)$$

Demostración. Sea $U_j(z)$ la matriz resolvente del problema de momentos, entonces toma su matriz inversa (3.57) y se satisface que $U_j(z) \cdot (U_j(z))^{-1} = I_{2q}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} \alpha_j(z) & \beta_j(z) \\ \gamma_j(z) & \delta_j(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_j^*(\bar{z}) & -\beta_j^*(\bar{z}) \\ -\gamma_j^*(\bar{z}) & \alpha_j^*(\bar{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}, \quad (3.62)$$

haciendo los cálculos directamente, se consigue que:

$$\begin{pmatrix} \alpha_j(z)\delta_j^*(\bar{z}) - \beta_j(z)\gamma_j^*(\bar{z}) & -\alpha_j(z)\beta_j^*(\bar{z}) + \beta_j(z)\alpha_j^*(\bar{z}) \\ \gamma_j(z)\delta_j^*(\bar{z}) - \delta_j(z)\gamma_j^*(\bar{z}) & -\gamma_j(z)\beta_j^*(\bar{z}) + \delta_j(z)\alpha_j^*(\bar{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}, \quad (3.63)$$

es decir:

$$\alpha_j(z)\delta_j^*(\bar{z}) - \beta_j(z)\gamma_j^*(\bar{z}) = I_q, \quad (3.64)$$

$$-\alpha_j(z)\beta_j^*(\bar{z}) + \beta_j(z)\alpha_j^*(\bar{z}) = 0_q, \quad (3.65)$$

$$\gamma_j(z)\delta_j^*(\bar{z}) - \delta_j(z)\gamma_j^*(\bar{z}) = 0_q. \quad (3.66)$$

◆

Capítulo 4

De la Matriz Resolvente a los Polinomios Ortogonales

Introducción

En este capítulo veremos que los elementos $\alpha_j(z)$, $\beta_j(z)$, $\gamma_j(z)$ y $\delta_j(z)$ de la matriz resolvente se pueden expresar mediante ciertos polinomios $\{P_j(z)\}_{j=0}^n$ y $\{Q_j(z)\}_{j=0}^n$. Luego demostramos que los polinomios $\{P_j(z)\}_{j=0}^n$ son ortogonales respecto de la medida σ correspondiente al problema de momentos de Hamburger. Además verificaremos que $\{Q_j(z)\}_{j=0}^n$ son polinomios de segunda especie respecto de los polinomios $\{P_j(z)\}_{j=0}^n$.

4.1. Nociones básicas

Asumamos que H_j y \widehat{H}_j son invertibles $\forall j \in \mathcal{J}_n$ y del lema 3.1.1, la inversa de H_j puede ser escrita como:

$$H_j^{-1} = \begin{pmatrix} H_{j-1}^{-1} & 0_{jq \times q} \\ 0_{q \times jq} & 0_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} Y_j \\ I_q \end{pmatrix} \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q). \quad (4.1)$$

Ahora introducimos los polinomios siguientes:

Definición 4.1.1. Sea $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$ una colección de momentos y las matrices $R_j(z)$, u_j , v_j , Y_j , H_j y \widehat{H}_j como en la definición 3.1.1, asumamos que H_j y

\widehat{H}_j son invertibles. Definamos los siguientes polinomios para $j \in \mathcal{J}_n$:

$$P_0(z) := s_0^{-1/2}, \quad (4.2)$$

$$P_j(z) := \widehat{H}_j^{-1/2} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j, \quad (4.3)$$

$$Q_0(z) := 0_q, \quad (4.4)$$

$$Q_j(z) := -\widehat{H}_j^{-1/2} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) u_j. \quad (4.5)$$

Teorema 4.1.1. Sean $P_j(z)$ y $Q_j(z)$ polinomios como en la definición 4.1.1, entonces las siguientes relaciones son validas $\forall j \in \mathcal{J}_n$:

$$U_{11,j}(z) = \alpha_j(z) = I_q + z \sum_{i=0}^j (Q_i(\bar{z}))^* P_i(0), \quad (4.6)$$

$$U_{12,j}(z) = \beta_j(z) = z \sum_{i=0}^j (Q_i(\bar{z}))^* Q_i(0), \quad (4.7)$$

$$U_{21,j}(z) = \gamma_j(z) = -z \sum_{i=0}^j (P_i(\bar{z}))^* P_i(0), \quad (4.8)$$

$$U_{22,j}(z) = \delta_j(z) = I_q - z \sum_{i=0}^j (P_i(\bar{z}))^* Q_i(0). \quad (4.9)$$

La demostración se realizará considerando 4 pasos, cada uno comprendiendo una de las relaciones enlistadas en el teorema:

Paso 1) Demostremos que $U_{11,j}(z) = I_q + z \sum_{i=0}^j (Q_i(\bar{z}))^ P_i(0)$.*

De la definición 3.2.1 y de la observación 3.1.1 tenemos que:

$$U_{11,j}(z) = I_q - z u_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j = \quad (4.10)$$

$$I_q - z (u_{j-1}^*, -s_{j-1})^* \left(\begin{array}{c|c} R_{j-1}^*(\bar{z}) & \widehat{z}_j \\ \hline 0_{q \times jq} & I_q \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} H_{j-1}^{-1} & 0_{jq \times q} \\ \hline 0_{q \times jq} & 0_q \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} v_{j-1} \\ 0_q \end{array} \right) + \quad (4.11)$$

$$+ (-z) u_j^* R_j^*(\bar{z}) \left(\begin{array}{c} -H_{j-1}^{-1} Y_j \\ \hline I_q \end{array} \right) \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) v_j. \quad (4.12)$$

De donde:

$$\left(\begin{array}{c|c} R_{j-1}^*(\bar{z}) & \hat{\bar{z}}_j \\ \hline 0_{q \times jq} & I_q \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} H_{j-1}^{-1} & 0_{jq \times q} \\ \hline 0_{q \times jq} & 0_q \end{array} \right) \begin{pmatrix} v_{j-1} \\ 0_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{j-1}^*(\bar{z})H_{j-1}^{-1}v_{j-1} \\ 0_q \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Por lo tanto al multiplicar por $z(u_{j-1}^*, -s_{j-1})^*$ y restar de I_q se tiene que

$$I_q - z(u_{j-1}^*, -s_{j-1})^* \begin{pmatrix} R_{j-1}^*(\bar{z})H_{j-1}^{-1}v_{j-1} \\ 0_q \end{pmatrix} = \quad (4.14)$$

$$= I_q - zu_{j-1}^*R_{j-1}^*(\bar{z})H_{j-1}^{-1}v_{j-1} = U_{11,j-1}(z). \quad (4.15)$$

Por lo tanto se consigue lo siguiente:

$$U_{11,j}(z) = U_{11,j-1}(z) + (-z)u_j^*R_j^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1}Y_j \\ I_q \end{pmatrix} \hat{H}_j^{-1}(-Y_j^*H_{j-1}^{-1}, I_q)v_j. \quad (4.16)$$

Tomando ahora con el segundo sumando de la parte derecha de esta ecuación, tenemos

$$(-z)u_j^*R_j^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1}Y_j \\ I_q \end{pmatrix} \hat{H}_j^{-1}(-Y_j^*H_{j-1}^{-1}, I_q)v_j = \quad (4.17)$$

$$-z \left(-u_j^*R_j^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1}Y_j \\ I_q \end{pmatrix} \hat{H}_j^{-1/2} \right) \left(\hat{H}_j^{-1/2}(-Y_j^*H_{j-1}^{-1}, I_q)R_j(0)v_j \right). \quad (4.18)$$

Donde $R_j(0) = I_{(j+1)q}$, se puede apreciar que:

$$(Q_i(\bar{z}))^* = \left(-u_j^*R_j^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1}Y_j \\ I_q \end{pmatrix} \hat{H}_j^{-1/2} \right), \quad (4.19)$$

$$P_i(0) = \left(\hat{H}_j^{-1/2}(-Y_j^*H_{j-1}^{-1}, I_q)R_j(0)v_j \right). \quad (4.20)$$

Por lo tanto:

$$U_{11,j}(z) = U_{11,j-1}(z) + z(Q_i(\bar{z}))^*P_i(0), \quad j \in \mathcal{J}_n. \quad (4.21)$$

Ahora considerando $j = 1$, se tiene que:

$$U_{11,1}(z) = U_{11,0}(z) + z(Q_1(\bar{z}))^*P_1(0) = I_q - zu_0^*R_0^*(\bar{z})H_0^{-1}v_0 + z(Q_1(\bar{z}))^*P_1(0). \quad (4.22)$$

Donde $u_0^* = 0_q$, $H_0^{-1} = s_0^{-1}$, $R_0^*(0) = I_q$, $v_0 = I_q$, se consigue que:

$$U_{11,1}(z) = I_q - z \cdot 0_q \cdot I_q \cdot s_0^{-1} \cdot I_q + z(Q_1(\bar{z}))^* P_1(0) = I_q + z(Q_1(\bar{z}))^* P_1(0). \quad (4.23)$$

Por lo tanto, haciendo uso de la relación anterior y del hecho que $Q_0(z) = 0_q$, el índice se puede hacer correr desde $i = 0$, entonces se tiene que:

$$U_{11,1}(z) = I_q + z \sum_{i=0}^1 (Q_i(\bar{z}))^* P_i(0). \quad (4.24)$$

Ahora haciendo uso de (4.24) y (4.21) se tiene que

$$U_{11,j}(z) = I_q + z \sum_{i=0}^j (Q_i(\bar{z}))^* P_i(0). \quad (4.25)$$

◆

Paso 2) $U_{12,j}(z) = z \sum_{i=0}^j (Q_i(\bar{z}))^* Q_i(0).$

De la definición 3.2.1 se sabe que

$$U_{12,j}(z) = z u_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j. \quad (4.26)$$

Ahora haciendo una partición como en el caso anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} U_{12,j}(z) = z (u_{j-1}^*, -s_{j-1})^* & \left(\begin{array}{c|c} R_{j-1}^*(\bar{z}) & \widehat{\bar{z}}_j \\ \hline 0_{q \times jq} & I_q \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} H_{j-1}^{-1} & 0_{jq \times q} \\ \hline 0_{q \times jq} & 0_q \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_{j-1} \\ -s_{j-1} \end{pmatrix} + \\ & + z u_j^* R_j^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} Y_j \\ \hline I_q \end{pmatrix} \widehat{H}_j^{-1} (Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) R_j(0) u_j. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Haciendo el álgebra y usando la definición 4.1.1 se puede ver que:

$$U_{12,j}(z) = U_{12,j-1}(z) + z Q_j^*(\bar{z}) Q_j(0) \quad j \in \mathcal{J}_n. \quad (4.28)$$

Ahora considerando cuando $n = 1$, se tiene que para $n - 1 = 0$: $u_0^* = u_0 = 0_q$; $R_0 = R_0^* = I_q$; $H_0^{-1} = s_0^{-1}$ y además:

$$U_{12,1}(z) = U_{12,0}(z) + z Q_1^*(\bar{z}) Q_1(0) = z \cdot 0_q \cdot I_q \cdot s_0^{-1} \cdot 0 + z Q_1^*(\bar{z}) Q_1(0) = z Q_1^*(\bar{z}) Q_1(0). \quad (4.29)$$

Ahora para $j = 2$ se tiene que:

$$U_{12,2}(z) = U_{12,1}(z) + zQ_2^*(\bar{z})Q_2(0) = zQ_1^*(\bar{z})Q_1(0) + zQ_2^*(\bar{z})Q_2(0). \quad (4.30)$$

Por lo tanto, escribiendo en forma de suma, se tiene que:

$$U_{12,2}(z) = \sum_{j=1}^2 zQ_j^*(\bar{z})Q_j(0). \quad (4.31)$$

Para $j = 0$, de la definición 4.1.1 se tiene que $Q_0(z) = 0$, por lo tanto, se puede hacer correr el índice desde $j = 0$, entonces se concluye que:

$$U_{12,2}(z) = \sum_{i=0}^2 zQ_i^*(\bar{z})Q_i(0). \quad (4.32)$$

Y por construcción para j , se puede apreciar que:

$$U_{12,j}(z) = \sum_{i=0}^j zQ_i^*(\bar{z})Q_i(0). \quad (4.33)$$

◆

Paso 3) $U_{21,j}(z) = -z \sum_{i=0}^j (P_i(\bar{z}))^* P_i(0)$.

De forma similar se tiene para $U_{21,j}(z)$:

$$U_{21,j}(z) = -zv_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j = \quad (4.34)$$

$$-z (v_{j-1}^*, 0_q)^* \left(\begin{array}{c|c} R_{j-1}^*(\bar{z}) & \hat{z}_{jq \times q} \\ \hline 0_{j \times jq} & I_q \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} H_{j-1}^{-1} & 0_{jq \times q} \\ \hline 0_{q \times jq} & 0_q \end{array} \right) \begin{pmatrix} v_{j-1} \\ 0_q \end{pmatrix} + \quad (4.35)$$

$$+ (-z) v_j^* R_j^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} Y_j \\ \hline I_q \end{pmatrix} \hat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) v_j = \quad (4.36)$$

$$= -zv_{j-1}^* R_{j-1}^*(\bar{z}) H_{j-1}^{-1} v_{j-1} + \quad (4.37)$$

$$+ (-z) v_j^* R_j^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} Y_j \\ \hline I_q \end{pmatrix} \hat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) v_j = \quad (4.38)$$

$$= U_{21,j-1}(z) - zv_j^* R_j^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} Y_j \\ \hline I_q \end{pmatrix} \hat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) v_j. \quad (4.39)$$

Ahora en el otro sumando se puede reescribir un poco haciendo lo siguiente:

$$-zv_j^* R_j^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} Y_j \\ I_q \end{pmatrix} \widehat{H}_j^{-1/2} \widehat{H}_j^{-1/2} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) R_j(\bar{0}) v_j = \quad (4.40)$$

$$-z(P_i(\bar{z}))^* P_i(0). \quad (4.41)$$

Entonces se ha conseguido que:

$$U_{21,j}(z) = U_{21,j-1}(z) - z(P_i(\bar{z}))^* P_i(0) \quad j \in \mathcal{J}_n. \quad (4.42)$$

Usando (4.42) y haciendo $j = 1$

$$\begin{aligned} U_{21,1}(z) &= U_{21,0}(z) - z(P_1(\bar{z}))^* P_1(0) = \\ &= \begin{pmatrix} I_q \\ 0_q \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} I_q & zI_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0^{-1} & 0_q \\ 0_q & 0_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q \\ 0_q \end{pmatrix} - \\ &\quad -z(P_1(\bar{z}))^* P_1(0) = \\ &= -zs_0^{-1} - z(P_1(\bar{z}))^* P_1(0) = -z(P_0(\bar{z}))^* P_0(0) - z(P_1(\bar{z}))^* P_1(0). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Por lo tanto de (4.43) y (4.42) se tiene que:

$$U_{21,1}(z) = -z \sum_{i=0}^1 (P_i(\bar{z}))^* P_i(0). \quad (4.44)$$

Haciendo uso de lo conseguido y de (4.42) se puede concluir que:

$$U_{21,j}(z) = -z \sum_{i=0}^j (P_i(\bar{z}))^* P_i(0). \quad (4.45)$$

◆

Paso 4) $U_{22,j}(z) = I_q + z \sum_{i=0}^j (P_i(\bar{z}))^* Q_i(0).$

Al igual que en los casos anteriores, de la definición 3.2.1 se tiene que:

$$U_{22,j}(z) = I_q + zv_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j. \quad (4.46)$$

Ahora particionando las matrices y vectores:

$$\begin{aligned} U_{22,j}(z) &= I_q + z (v_{j-1}^*, 0_q)^* \begin{pmatrix} R_{j-1}^*(\bar{z}) & \widehat{z}_j \\ 0_{q \times jq} & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{j-1}^{-1} & 0_{jq \times q} \\ 0_{q \times jq} & 0_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{j-1} \\ -s_{j-1} \end{pmatrix} + \\ &\quad + zv_j^* R_j^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} Y_j \\ I_q \end{pmatrix} \widehat{H}_j^{-1} (Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) R_j(0) u_j. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Haciendo el álgebra y sustituyendo las expresiones por los polinomios de la definición 4.1.1:

$$U_{22,j}(z) = I_q + z v_{j-1}^* R_{j-1}^*(\bar{z}) H_{j-1}^{-1} u_{j-1} - z (P_i(\bar{z}))^* Q_i(0), \quad (4.48)$$

$$\Rightarrow U_{22,j}(z) = U_{22,j-1}(z) - z (P_i(\bar{z}))^* Q_i(0) \quad j \in \mathcal{J}_n. \quad (4.49)$$

Analizando el caso $j = 1$, se tiene para $j - 1 = 0$ del lado derecho que: $v_0^* = I_q$; $R_0^* = I_q$; $u_0 = 0_q$; $H_0^{-1} = s_0^{-1}$, por lo tanto

$$U_{22,1}(z) = I_q + z \cdot I_q \cdot I_q \cdot s_0^{-1} \cdot 0 - z (P_1(\bar{z}))^* Q_1(0) = I_q - z (P_1(\bar{z}))^* Q_1(0). \quad (4.50)$$

Ahora para $j = 2$:

$$U_{22,2}(z) = U_{22,1}(z) - z (P_2(\bar{z}))^* Q_2(0) = I_q - z (P_1(\bar{z}))^* Q_1(0) - z (P_2(\bar{z}))^* Q_2(0). \quad (4.51)$$

Por lo tanto:

$$U_{22,2}(z) = I_q - z \sum_{i=0}^2 (P_i(\bar{z}))^* Q_i(0). \quad (4.52)$$

Ya que $Q_0(z) = 0$ por definición, por lo tanto, se aprecia que:

$$U_{22,j}(z) = I_q - z \sum_{i=0}^j (P_i(\bar{z}))^* Q_i(0). \quad (4.53)$$

◆

4.2. Ortogonalidad de los polinomios $P_j(z)$

Para la demostración de la ortogonalidad de los polinomios, se enunciarán algunas observaciones y lemas

Lema 4.2.1. Sean $j, m \in \mathbb{N}$ con $m + 1 < j \leq n$ y

$$W := \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j-1} & s_j & \cdots & s_{j+m-1} \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Entonces las siguientes igualdades son válidas:

$$W = H_{j-1} \cdot \begin{pmatrix} I_{(m+1)} \\ 0_{(j-m-1) \times (m+1)} \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

$$(-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, 1) \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j-1} & s_j & \cdots & s_{j+m-1} \\ s_j & s_{j+1} & \cdots & s_{j+m} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.56)$$

Demostración. Asumiendo que $m < j$, entonces dentro de la matriz H_{j-1} hay una submatriz H_m :

$$H_{j-1} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} s_0 & s_1 & \cdots & s_m & s_{m+1} & \cdots & s_{j-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{m+1} & s_{m+2} & \cdots & s_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_m & s_{m+1} & \cdots & s_{2m} & s_{2m+1} & \cdots & s_{m+j} \\ \hline s_{m+1} & s_{m+1} & \cdots & s_{2m+1} & s_{2m+2} & \cdots & s_{m+j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j-1} & s_j & \cdots & s_{m+j-1} & s_{m+j} & \cdots & s_{2j-1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} U_1 & V_1 \\ \hline U_2 & V_2 \end{array} \right), \quad (4.57)$$

donde la dimensión de U_1 es $(m+1) \times (m+1)$, V_1 es $(m+1) \times (j-m-1)$, U_2 es $(j-m-1) \times (m+1)$ y V_2 es $(j-m-1) \times (j-m-1)$ Ahora, definiendo una partición dentro de la matriz W de la forma:

$$W = \left(\begin{array}{cccc|c} s_0 & s_1 & \cdots & s_m & \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{m+1} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ s_m & s_{m+1} & \cdots & s_{2m} & \\ \hline s_{m+1} & s_m & \cdots & s_{2m+1} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ s_{j-1} & s_j & \cdots & s_{j+m-1} & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} U_1 \\ \hline U_2 \end{array} \right). \quad (4.58)$$

Ahora haciendo los cálculos de (4.55), se consigue que:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c|c} U_1 & V_1 \\ \hline U_2 & V_2 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} I_{(m+1)} \\ 0_{(j-m-1) \times (m+1)} \end{pmatrix} = \\ & = \left(\begin{array}{c} U_1 \cdot I_{m_1} + V_1 \cdot 0_{(j-m-1) \times (m+1)} \\ \hline U_2 \cdot I_{m_1} + V_2 \cdot 0_{(j-m-1) \times (m+1)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} U_1 \\ \hline U_2 \end{array} \right) = W. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Ahora para probar (4.56):

$$\begin{aligned}
& (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, 1) \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j-1} & s_j & \cdots & s_{j+m-1} \\ s_j & s_{j+1} & \cdots & s_{j+m} \end{pmatrix} = \\
& = (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, 1) \left(\frac{W}{s_j \ s_{j+1} \ \cdots \ s_{j+m}} \right) = \\
& = -Y_j^* H_{j-1}^{-1} \cdot W + (s_j \ s_{j+1} \ \cdots \ s_{j+m}) = \\
& = -Y_j^* H_{j-1}^{-1} \cdot H_{j-1} \cdot \begin{pmatrix} I_{(m+1)} \\ 0_{(j-m-1) \times (m+1)} \end{pmatrix} + (s_j \ s_{j+1} \ \cdots \ s_{j+m}) = \\
& = -Y_j^* \cdot \begin{pmatrix} I_{(m+1)} \\ 0_{(j-m-1) \times (m+1)} \end{pmatrix} + (s_j \ s_{j+1} \ \cdots \ s_{j+m}) = \\
& = -(s_j \ s_{j+1} \ \cdots \ s_{j+m}) + (s_j \ s_{j+1} \ \cdots \ s_{j+m}) = 0. \quad (4.60)
\end{aligned}$$

Cuando $j < m$, es de forma similar. ◆

Observación 4.2.1. Para $m < j$ ($m + 1 = j$ incluido), los cálculos son los mismos.

Teorema 4.2.1. *Los polinomios $\{P_j(z)\}_{j=1}^n$ son ortogonales respecto de la medida σ , es decir:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_j(t) d(\sigma(t)) P_k^*(t) = \begin{cases} I_q, & j = k \\ 0_q, & j \neq k \end{cases} \quad (4.61)$$

Demostración. La demostración se hará por 2 casos:

Asumiendo que $j = k$ Escribiendo el producto punto y recordando la definición de $P_j(z)$, se consigue que:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} P_j(t) d(\sigma(t)) P_j^*(t) = \\
 & = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{H}_j^{-1/2} (-Y_j^* \cdot H_{j-1}^{-1}, I_q) \cdot R_j(t) \cdot v_j \cdot d(\sigma(t)) \cdot v_j^* \cdot R_j^*(t) \cdot \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} \cdot Y_j^* \\ I_q \end{pmatrix} \cdot \widehat{H}_j^{-1/2} = \\
 & = \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* \cdot H_{j-1}^{-1}, I_q) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} R_j(t) \cdot v_j \cdot d(\sigma(t)) \cdot v_j^* \cdot R_j^*(t) \cdot \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} \cdot Y_j^* \\ I_q \end{pmatrix}, \tag{4.62}
 \end{aligned}$$

Ahora, recordando la definición de $R_j(t)$

$$R_j(t) \cdot v_j = \begin{pmatrix} I_q & 0_q & 0_q & \cdots & 0_q \\ tI_q & I_q & 0_q & \cdots & 0_q \\ t^2I_q & tI_q & I_q & \cdots & 0_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^jI_q & t^{j-1}I_q & t^{j-2}I_q & \cdots & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q \\ 0_q \\ 0_q \\ \vdots \\ 0_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q \\ tI_q \\ t^2I_q \\ \vdots \\ t^jI_q \end{pmatrix}. \tag{4.63}$$

Entonces

$$v_j^* \cdot R_j^*(t) = (R_j(t) \cdot v_j)^* = (I_q, tI_q, t^2I_q, \dots, t^jI_q). \tag{4.64}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 R_j(t) \cdot v_j \cdot v_j^* \cdot R_j^*(t) & = \begin{pmatrix} I_q \\ tI_q \\ t^2I_q \\ \vdots \\ t^jI_q \end{pmatrix} \cdot (I_q, tI_q, t^2I_q, \dots, t^jI_q) = \\
 & = \begin{pmatrix} I_q & tI_q & t^2I_q & \cdots & t^jI_q \\ tI_q & t^2I_q & t^3I_q & \cdots & t^{j+1}I_q \\ t^2I_q & t^3I_q & t^4I_q & \cdots & t^{j+2}I_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^jI_q & t^{j+1}I_q & t^{j+2}I_q & \cdots & t^{2j}I_q \end{pmatrix}. \tag{4.65}
 \end{aligned}$$

Entonces calculando la integral en (4.62) usando (4.65):

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} R_j(t) \cdot v_j \cdot d(\sigma(t)) \cdot v_j^* \cdot R_j^*(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} I_q & tI_q & t^2I_q & \cdots & t^jI_q \\ tI_q & t^2I_q & t^3I_q & \cdots & t^{j+1}I_q \\ t^2I_q & t^3I_q & t^4I_q & \cdots & t^{j+2}I_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^jI_q & t^{j+1}I_q & t^{j+2}I_q & \cdots & t^{2j}I_q \end{pmatrix} d\sigma(t) = \\
&= \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(t) & \int_{-\infty}^{\infty} t d\sigma(t) & \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d\sigma(t) & \cdots & \int_{-\infty}^{\infty} t^j d\sigma(t) \\ \int_{-\infty}^{\infty} t d\sigma(t) & \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d\sigma(t) & \int_{-\infty}^{\infty} t^3 d\sigma(t) & \cdots & \int_{-\infty}^{\infty} t^{j+1} d\sigma(t) \\ \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d\sigma(t) & \int_{-\infty}^{\infty} t^3 d\sigma(t) & \int_{-\infty}^{\infty} t^4 d\sigma(t) & \cdots & \int_{-\infty}^{\infty} t^{j+2} d\sigma(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{-\infty}^{\infty} t^j d\sigma(t) & \int_{-\infty}^{\infty} t^{j+1} d\sigma(t) & \int_{-\infty}^{\infty} t^{j+2} d\sigma(t) & \cdots & \int_{-\infty}^{\infty} t^{2j} d\sigma(t) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_j \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{j+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{j+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_j & s_{j+1} & s_{j+2} & \cdots & s_{2j} \end{pmatrix} = H_j. \quad (4.66)
\end{aligned}$$

Ahora reescribiendo (4.66) en forma de bloques matriciales

$$H_j = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_j \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{j+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{j+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_j & s_{j+1} & s_{j+2} & \cdots & s_{2j} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} H_{j-1} & Y_j \\ \hline Y_j^* & s_{2j} \end{array} \right), \quad (4.67)$$

usando (4.66) y (4.67) en (4.62):

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_j(t) d(\sigma(t)) P_j^*(t) = \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* \cdot H_{j-1}^{-1}, I_q) \cdot \left(\begin{array}{c|c} H_{j-1} & Y_j \\ \hline Y_j^* & s_{2j} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} \cdot Y_j \\ I_q \end{pmatrix} = \quad (4.68)$$

$$= \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* \cdot H_{j-1}^{-1}, I_q) \cdot \begin{pmatrix} 0_q \\ -Y_j^* \cdot H_{j-1} \cdot Y_j + s_{2j} \end{pmatrix} = \quad (4.69)$$

$$= \widehat{H}_j^{-1} \cdot (-Y_j^* \cdot H_{j-1}^{-1} \cdot Y_j + s_{2j}) = \widehat{H}_j^{-1} \cdot \widehat{H}_j = I_q. \quad (4.70)$$

◆

Asumiendo que $k < j$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{H}_j^{-1/2} (-Y_j^* \cdot H_{j-1}^{-1}, I_q) \cdot R_j(t) \cdot v_j \cdot d(\sigma(t)) \cdot v_k^* \cdot R_k^*(t) \cdot \begin{pmatrix} -H_{k-1}^{-1} \cdot Y_k^* \\ I_q \end{pmatrix} \cdot \\
 & \quad \cdot \widehat{H}_k^{-1/2} = \\
 & \quad = \widehat{H}_j^{-1/2} (-Y_j^* \cdot H_{j-1}^{-1}, I_q) \cdot \\
 & \quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} R_j(t) \cdot v_j \cdot d(\sigma(t)) \cdot v_k^* \cdot R_k^*(t) \cdot \begin{pmatrix} -H_{k-1}^{-1} \cdot Y_1^{(k)} \\ I_q \end{pmatrix} \widehat{H}_k^{-1/2}, \quad (4.71)
 \end{aligned}$$

como en el caso previo:

$$R_j(t) \cdot v_j \cdot v_k^* R_k^*(t) = \begin{pmatrix} I_q & tI_q & t^2I_q & \cdots & t^kI_q & \cdots & t^jI_q \\ tI_q & t^2I_q & t^3I_q & \cdots & t^{k+1}I_q & \cdots & t^{j+1}I_q \\ t^2I_q & t^3I_q & t^4I_q & \cdots & t^{k+2}I_q & \cdots & t^{j+2}I_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^kI_q & t^{k+1}I_q & t^{k+2}I_q & \cdots & t^{2k}I_q & \cdots & t^{j+k}I_q \end{pmatrix}. \quad (4.72)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} R_j(t) \cdot v_j \cdot d(\sigma(t)) \cdot v_k^* \cdot R_k^*(t) &= \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_k & \cdots & s_j \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{k+1} & \cdots & s_{j+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{k+2} & \cdots & s_{j+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & s_{k+2} & \cdots & s_{2k} & \cdots & s_{j+k} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} & & & & & & s_j \\ & & & & & & s_{j+1} \\ & & & & & & s_{j+2} \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & s_{j+k} \end{pmatrix}. \quad (4.73)
 \end{aligned}$$

Donde W^* como W fue definido en el lema 4.2.1, entonces usando (4.73) en (4.71):

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_j(t) d(\sigma(t)) P_k^*(t) = \widehat{H}_j^{-1/2} (-Y_j^* \cdot H_{j-1}^{-1}, I_q) \cdot \left(W^* \left| \begin{array}{c} s_j \\ s_{j+1} \\ s_{j+2} \\ \vdots \\ s_{j+k} \end{array} \right. \right) \left(\begin{array}{c} -H_{k-1}^{-1} \cdot Y_k \\ I_q \end{array} \right) \widehat{H}_k^{-1/2}. \quad (4.74)$$

Pero checando la siguiente parte:

$$\left(W^* \left| \begin{array}{c} s_j \\ s_{j+1} \\ s_{j+2} \\ \vdots \\ s_{j+k} \end{array} \right. \right) \left(\begin{array}{c} -H_{k-1}^{-1} \cdot Y_k \\ I_q \end{array} \right) = \left((-Y_k^* \cdot H_{k-1}^{-1}, I_q) \cdot \left(\frac{W}{s_j \ s_{j+1} \ \cdots \ s_{j+m}} \right) \right)^* = 0_q^* = 0_q. \quad (4.75)$$

Entonces se sigue de (4.75) usando (4.56) del lema 4.2.1 que

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_j(t) d(\sigma(t)) P_k^*(t) = 0_q. \quad (4.76)$$

◆

Por lo tanto, $\{P_j(z)\}_{j=1}^n$ son polinomios ortogonales respecto de $\sigma(t)$. ◆

4.3. Polinomios de segunda especie $Q_j(z)$

Los polinomios $Q_j(z)$ también tienen una propiedad interesante, aunque estos no sean ortogonales respecto de la medida $\sigma(t)$. Existe una relación entre $P_j(z)$ y $Q_j(z)$, la cual se propondrá como un lema.

Lema 4.3.1. Sean $Q_j(z)$ y $P_j(z)$ como en la definición 4.1.1, entonces tiene lugar la siguiente igualdad:

$$Q_j(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_j(z) - P_j(t)}{z - t} d(\sigma(t)). \quad (4.77)$$

Demostración. Usando la definición de los polinomios en 4.1.1, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_j(z) - P_j(t)}{z - t} d(\sigma(t)) = \\ & = \widehat{H}_j^{-1/2} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_j(z)v_j - R_j(t)v_j}{z - t} d(\sigma(t)) = \\ & = \widehat{H}_j^{-1/2} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - t} \left(\begin{pmatrix} I_q \\ zI_q \\ z^2I_q \\ \vdots \\ z^jI_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_q \\ tI_q \\ t^2I_q \\ \vdots \\ t^jI_q \end{pmatrix} \right) d(\sigma(t)) = \\ & = \widehat{H}_j^{-1/2} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 0_q \\ I_q \\ (z+t)I_q \\ \vdots \\ z^{j-1} + z^{j-2}t + \dots + zt^{j-2} + t^{j-1} \end{pmatrix} d(\sigma(t)) = \\ & = \widehat{H}_j^{-1/2} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) \begin{pmatrix} 0_q \\ s_0 \\ zs_0 + s_1 \\ \vdots \\ z^{j-1}s_0 + z^{j-2}s_1 + \dots + zs_{j-2} + s_{j-1} \end{pmatrix} = \\ & = -\widehat{H}_j^{-1/2} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) \begin{pmatrix} I_q & 0_q & \dots & 0_q \\ zI_q & 0_q & \dots & 0_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^jI_q & z^{j-1}I_q & \dots & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_q \\ -s_0 \\ \vdots \\ -s_{j-1} \end{pmatrix} = \\ & = -\widehat{H}_j^{-1/2} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) R_j(z)u_j = Q_j(z). \quad (4.78) \end{aligned}$$

◆

Capítulo 5

Matriz Resolvente como Producto

Introducción

En este capítulo se procederá a desarrollar una forma que permitirá expresar a la matriz resolvente como un producto de matrices de la forma:

$$U_j(z) = \prod_{k=0}^{\overrightarrow{j}} b^{(j)}(z), \quad (5.1)$$

donde la flecha \rightarrow indica que el producto se hace de izquierda a derecha y $b^{(j)}(z)$ son los factores de Blaschke-Potapov. A su vez las matrices $b^{(j)}(z)$ se representan usando los parámetros de Stieltjes (ver definición 5.3.1). También se estudiará la J -forma de los factores de Blaschke-Potapov, con lo cual se podrá apreciar que dichos factores, heredan las propiedades como J -matriz de la matriz resolvente.

5.1. Preliminares

Definición 5.1.1. Sean Y_j , H_{j-1} , $R_j(z)$, u_j , λ_j y s_{2j} como en la definición 3.1.1. Asumiendo que H_j es invertible $\forall j \in \mathcal{J}_n$ entonces definiremos los

siguientes símbolos:

$$\widehat{v}_j(z) := z^j I - Y_j^* H_{j-1}^{-1} R_{j-1}(z) v_{j-1}, \quad (5.2)$$

$$\widehat{w}_j(z) := (-Y_j^* + z \lambda_j^* H_{j-1}) H_{j-1}^{-1} R_{j-1}(z) u_{j-1} - s_{j-1}. \quad (5.3)$$

Para $z = 0$:

$$\widehat{v}_j := \widehat{v}_j(z)|_{z=0} = -Y_j^* H_{j-1}^{-1} v_{j-1}, \quad (5.4)$$

$$\widehat{w}_j := \widehat{w}_j(z)|_{z=0} = -Y_j^* H_{j-1}^{-1} u_{j-1} - s_{j-1}. \quad (5.5)$$

Definición 5.1.2. Sean \widehat{H}_j^{-1} , \widehat{v}_j y \widehat{w}_j como en la definición 5.1.1, entonces procedo a definir la matriz $b^{(j)}(z)$ para $j \in \mathcal{J}_n$ de la siguiente forma:

$$b^{(j)}(z) := \left(\begin{array}{c|c} I_q - z \widehat{w}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j & z \widehat{w}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{w}_j \\ \hline -z \widehat{v}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j & I_q + z \widehat{v}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{w}_j \end{array} \right), \quad (5.6)$$

aquí, $b^{(j)}(z)$ recibe el nombre de Factor de Blaschke-Potapov.

Observación 5.1.1. Sean T_j , Y_{j+1} , H_j , λ_{j+1} y v_j como en la definición 3.1.1, entonces se satisface la igualdad:

$$T_j + Y_{j+1} - H_j \lambda_{j+1} + v_j s_j^* = 0_q. \quad (5.7)$$

Demostración. Usando las definiciones básicas del texto y sustituyendo, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 0_q & 0_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ I_q & 0_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ 0_q & I_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_q & 0_q & \cdots & I_q & 0_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{j+1} \\ s_{j+2} \\ s_{j+3} \\ \vdots \\ s_{2j+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_j \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{j+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{j+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_j & s_{j+1} & s_{j+2} & \cdots & s_{2j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_q \\ 0_q \\ 0_q \\ \vdots \\ I_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_j \\ 0_q \\ 0_q \\ \vdots \\ 0_q \end{pmatrix} = \quad (5.8)$$

$$= \begin{pmatrix} 0_q \\ s_{j+1} \\ s_{j+2} \\ \vdots \\ s_{2j} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_j \\ s_{j+1} \\ s_{j+2} \\ \vdots \\ s_{2j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_j \\ 0_q \\ 0_q \\ \vdots \\ 0_q \end{pmatrix} = 0_q. \quad \blacklozenge \quad (5.9)$$

Lema 5.1.1. Sean $H_j, T_j, Y_{j+1}, H_j, \lambda_{j+1}, v_j$ y u_j como en la definición 3.1.1 y \widehat{u}_{j+1} y \widehat{v}_{j+1} como en la definición 5.1.1, entonces se satisface lo siguiente:

$$H_j T_j^* H_j^{-1} Y_{j+1} - H_j \lambda_{j+1} = v_j \widehat{u}_{j+1}^* - u_j \widehat{v}_{j+1}^*. \quad (5.10)$$

Demostración. Usando las definiciones básicas del texto se tiene que:

$$v_j \widehat{u}_{j+1}^* - u_j \widehat{v}_{j+1}^* = v_j (-u_j^* H_j^{-1} Y_{j+1} - s_j^*) - u_j (-v_j^* H_j^{-1} Y_{j+1}), \quad (5.11)$$

$$= -v_j u_j^* H_j^{-1} Y_{j+1} - v_j s_j^* + u_j v_j^* H_j^{-1} Y_{j+1}, \quad (5.12)$$

$$= (-v_j u_j^* + u_j v_j^*) H_j^{-1} Y_{j+1} - v_j s_j^*. \quad (5.13)$$

Haciendo uso de la identidad fundamental (lema 3.1.2) en la ecuación anterior, se tiene que:

$$(-v_j u_j^* + u_j v_j^*) H_j^{-1} Y_{j+1} - v_j s_j^* = (-T_j H_j + H_j T_j^*) H_j^{-1} Y_{j+1} - v_j s_j^*. \quad (5.14)$$

Sustituyendo (5.14) en la hipótesis del Lema, se tiene que

$$H_j T_j^* H_j^{-1} Y_{j+1} - H_j \lambda_{j+1} = (-T_j H_j + H_j T_j^*) H_j^{-1} Y_{j+1} - v_j s_j^*, \quad (5.15)$$

$$\Rightarrow (T_j H_j - \cancel{H_j T_j^*} + \cancel{H_j T_j^*}) H_j^{-1} Y_{j+1} - H_j \lambda_{j+1} + v_j s_j^* = 0, \quad (5.16)$$

$$\Rightarrow T_j Y_{j+1} - H_j \lambda_{j+1} + v_j s_j^* = 0. \quad (5.17)$$

Lo cual por la observación 5.1.1 se cumple. \blacklozenge

Teorema 5.1.1. Sea U_j la matriz resolvente y $b^{(j+1)}$ como en la definición 5.1.2, entonces la siguiente igualdad es verdadera:

$$U_{j+1}(z) = U_j(z) \cdot b^{(j+1)}(z). \quad (5.18)$$

Previamente a la demostración del teorema, se harán unas observaciones: recuerda que la matriz $U_j(z)$ está compuesta por 4 componentes: $\alpha_j(z)$, $\beta_j(z)$, $\gamma_j(z)$ y $\delta_j(z)$, por lo tanto se tiene lugar a la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{j+1}(z) & \beta_{j+1}(z) \\ \gamma_{j+1}(z) & \delta_{j+1}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_j(z) & \beta_j(z) \\ \gamma_j(z) & \delta_j(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}^{(j+1)}(z) & b_{12}^{(j+1)}(z) \\ b_{21}^{(j+1)}(z) & b_{22}^{(j+1)}(z) \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

de aquí, la demostración del teorema 5.1.1 se hará por 4 casos, demostrando así que la igualdad se da, entrada por entrada haciendo uso de las siguientes

igualdades ya conocidas:

$$\alpha_{j+1}(z) = \alpha_j(z) - z\widehat{w}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}, \quad (5.20)$$

$$\beta_{j+1}(z) = \beta_j(z) + z\widehat{w}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1}, \quad (5.21)$$

$$\gamma_{j+1}(z) = \gamma_j(z) - z\widehat{v}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}, \quad (5.22)$$

$$\delta_{j+1}(z) = \delta_j(z) + z\widehat{v}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1}. \quad (5.23)$$

$$b_{11}^{(j+1)}(z) = I_q - z\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}, \quad (5.24)$$

$$b_{12}^{(j+1)}(z) = z\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1}, \quad (5.25)$$

$$b_{21}^{(j+1)}(z) = -z\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}, \quad (5.26)$$

$$b_{22}^{(j+1)}(z) = I_q + z\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1}. \quad (5.27)$$

$$\alpha_j(z) = I_q - zu_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}v_j, \quad (5.28)$$

$$\beta_j(z) = zu_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}u_j, \quad (5.29)$$

$$\gamma_j(z) = -zv_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}v_j, \quad (5.30)$$

$$\delta_j(z) = I_q + zv_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}u_j. \quad (5.31)$$

$$\widehat{w}_{j+1}^*(z) = -u_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}Y_{j+1} + zu_j^*R_j^*(\bar{z})\lambda_{j+1} - s_j, \quad (5.32)$$

$$\widehat{w}_{j+1}^* = \widehat{w}_{j+1}^*(0) = -u_j^*H_j^{-1}Y_{j+1} - s_j, \quad (5.33)$$

$$\widehat{v}_{j+1}^*(z) = z^{j+1}I_q - v_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}Y_{j+1}, \quad (5.34)$$

$$\widehat{v}_{j+1}^* = \widehat{v}_{j+1}^*(0) = -v_j^*H_j^{-1}Y_{j+1}. \quad (5.35)$$

Para la demostración del teorema 5.1.1, sin pérdida de generalidad, denotaré las funciones desde (5.20) hasta (5.31) como funciones que no dependen de z , es decir, $\alpha_j(z)$ la denotaré como α_j .

$$\text{Caso 1) } \alpha_{j+1}(z) = \alpha_j(z)b_{11}^{(j+1)}(z) + \beta_j(z)b_{21}^{(j+1)}(z).$$

Sustituyendo α_{j+1} de (5.20), así como $b_{11}^{(j+1)}$ y $b_{21}^{(j+1)}$ de (5.24) y (5.26) en la hipótesis de este caso se tiene lo siguiente:

$$\alpha_j - z\widehat{w}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = \alpha_j \left(I_q - z\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} \right) - \beta_j z\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}, \quad (5.36)$$

$$\Rightarrow \cancel{\alpha_j} - z\widehat{w}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = \cancel{\alpha_j} - z\alpha_j\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} - \beta_j z\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}, \quad (5.37)$$

$$\Rightarrow -z\widehat{w}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = -z\alpha_j\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} - \beta_j z\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}. \quad (5.38)$$

Ahora sustituyendo α_j y β_j de (5.28) y (5.29) en la igualdad anterior se consigue:

$$\begin{aligned} -z\widehat{w}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} &= -z \left(I_q - zu_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}v_j \right) \widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} - \\ &\quad - z^2u_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}u_j\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Distribuyendo en la parte derecha:

$$\begin{aligned} -z\widehat{w}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} &= -z\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} + z^2u_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}v_j\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} - \\ &\quad - z^2u_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}u_j\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Igualando a 0_q :

$$\begin{aligned} z\widehat{w}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} - z\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} + z^2u_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}v_j\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} - \\ - z^2u_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}u_j\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = 0_q. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Ahora factorizando z por la izquierda y $\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}$ por la derecha:

$$z \left(\widehat{w}_{j+1}^*(z) - \widehat{w}_{j+1}^* + z \left(u_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}v_j\widehat{w}_{j+1}^* - u_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}u_j\widehat{v}_{j+1}^* \right) \right) \widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = 0_q. \quad (5.42)$$

Factorizando $u_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}$ en la parte de adentro:

$$z \left(\widehat{w}_{j+1}^*(z) - \widehat{w}_{j+1}^* + zu_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1} \left(v_j\widehat{w}_{j+1}^* - u_j\widehat{v}_{j+1}^* \right) \right) \widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = 0_q. \quad (5.43)$$

Sabiendo que $\widehat{w}_{j+1} = \widehat{u}_{j+1}$, se puede usar la observación 5.1.1: $H_jT_j^*H_j^{-1}Y_{j+1} - H_j\lambda_{j+1} = v_j\widehat{u}_{j+1}^* - u_j\widehat{v}_{j+1}^*$

$$z \left(\widehat{w}_{j+1}^*(z) - \widehat{w}_{j+1}^* + zu_j^*R_j^*(\bar{z})\cancel{H_j^{-1}} \left(\cancel{H_j}T_j^*\cancel{H_j^{-1}}Y_{j+1} - \cancel{H_j}\lambda_{j+1} \right) \right) \widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = 0_q. \quad (5.44)$$

Distribuyendo $zu_j^*R_j^*(\bar{z})$:

$$z(\widehat{w}_{j+1}^*(z) - \widehat{w}_{j+1}^* + zu_j^*R_j^*(\bar{z})T_j^*H_j^{-1}Y_{j+1} - zu_j^*R_j^*(\bar{z})\lambda_{j+1})\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = 0_q. \quad (5.45)$$

Haciendo uso de $\widehat{w}_{j+1}^*(z)$ de (5.32) y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$z(-u_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}Y_{j+1} + \underline{zu_j^*R_j^*(\bar{z})\lambda_{j+1}} - s_j - \widehat{w}_{j+1}^* + zu_j^*R_j^*(\bar{z})T_j^*H_j^{-1}Y_{j+1} - \underline{zu_j^*R_j^*(\bar{z})\lambda_{j+1}})\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = 0_q. \quad (5.46)$$

Simplificando y factorizando $-u_j^*R_j^*(\bar{z})$ por la izquierda y $H_j^{-1}Y_{j+1}$ por la derecha dentro del paréntesis se llega a:

$$z(-s_j - \widehat{w}_{j+1}^* - \underline{u_j^*R_j^*(\bar{z})(I_q - zT_j^*)H_j^{-1}Y_{j+1}})\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = 0_q. \quad (5.47)$$

Donde al simplificar y multiplicar todo por (-1) resulta que:

$$-z(\widehat{w}_{j+1}^* + s_j + u_j^*H_j^{-1}Y_{j+1})\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = 0_q, \quad (5.48)$$

donde $\widehat{w}_{j+1}^* = -u_j^*H_j^{-1}Y_{j+1} - s_j$ de (5.33) y por lo tanto $\widehat{w}_{j+1}^* + s_j + u_j^*H_j^{-1}Y_{j+1} = 0_q$, concluyendo así la demostración. \blacklozenge

Caso 2) $\beta_{j+1}(z) = \alpha_j(z)b_{12}^{(j+1)}(z) + \beta_j(z)b_{22}^{(j+1)}(z)$.

Como en el caso anterior, sustituyendo β_{j+1} de (5.21) así como $b_{12}^{(j+1)}$ y $b_{22}^{(j+1)}$ de (5.25) y (5.27) en la hipótesis se tiene que:

$$\beta_j + z\widehat{w}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} = \alpha_j z\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} + \beta_j \left(I_q + z\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} \right), \quad (5.49)$$

$$\Rightarrow \cancel{\beta_j} + z\widehat{w}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} = \alpha_j z\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} + \cancel{\beta_j} + \beta_j z\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1}, \quad (5.50)$$

$$\Rightarrow z\widehat{w}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} = \alpha_j z\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} + \beta_j z\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1}. \quad (5.51)$$

Ahora sustituyendo α_j y β_j de (5.28) y (5.29) se tiene que:

$$z\widehat{w}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} = (I_q - zu_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}v_j)z\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} + z^2u_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}u_j\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1}. \quad (5.52)$$

Distribuyendo el producto sobre la suma:

$$\begin{aligned} z\widehat{w}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} &= z\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} - \\ &- z^2u_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}v_j\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} + z^2u_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}u_j\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Igualando a 0_q :

$$\begin{aligned} z\widehat{w}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} - z\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} + \\ + z^2u_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}v_j\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} - z^2u_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}u_j\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} &= 0_q. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Factorizando z por la izquierda y $\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1}$ por la derecha consigo lo siguiente:

$$z\left(\widehat{w}_{j+1}^*(z) - \widehat{w}_{j+1}^* + zu_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}v_j\widehat{w}_{j+1}^* - zu_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}u_j\widehat{v}_{j+1}^*\right)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} = 0_q. \quad (5.55)$$

Dentro del paréntesis, se factoriza $zu_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}$:

$$z\left(\widehat{w}_{j+1}^*(z) - \widehat{w}_{j+1}^* + zu_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}(v_j\widehat{w}_{j+1}^* - u_j\widehat{v}_{j+1}^*)\right)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} = 0_q. \quad (5.56)$$

Y por (5.43) del caso anterior, queda demostrado. \blacklozenge

Caso 3) $\gamma_{j+1} = \gamma_j(z)b_{11}^{(j+1)}(z) + \delta_j(z)b_{21}^{(j+1)}(z)$.

Como en los casos anteriores se comienza por sustituir γ_{j+1} de (5.22) así como $b_{11}^{(j+1)}$ y $b_{21}^{(j+1)}$ de (5.24) y (5.26) en la hipótesis para este caso y se tiene que:

$$\gamma_j - z\widehat{v}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = \gamma_j\left(I_q - z\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}\right) - \delta_j z\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}, \quad (5.57)$$

$$\Rightarrow \cancel{\gamma_j} - z\widehat{v}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = \cancel{\gamma_j} - \gamma_j z\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} - \delta_j z\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}, \quad (5.58)$$

$$\Rightarrow -z\widehat{v}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = -\gamma_j z\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} - \delta_j z\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}. \quad (5.59)$$

Ahora sustituyendo γ_j y δ_j de (5.30) y (5.31) en la ecuación anterior se consigue que:

$$\begin{aligned} -z\widehat{v}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} &= z^2v_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}v_jz\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} - \\ &- \left(I_q + zv_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}u_j\right)z\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Distribuyendo el producto sobre la suma:

$$\begin{aligned} -z\widehat{v}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} &= z^2v_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}v_jz\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}- \\ &-z\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}-z^2v_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}u_j\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Avanzando un poco mas rápido y de forma similar a los 2 casos anteriores. Igualo a 0 y factorizo lo siguiente: $-z$ por la izquierda y $\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}$ por la derecha ; dentro del paréntesis factorizo $zv_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}$ por la izquierda:

$$-z\left(\widehat{v}_{j+1}^*(z)-\widehat{v}_{j+1}^*+zv_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}\left(v_j\widehat{w}_{j+1}^*-u_j\widehat{v}_{j+1}^*\right)\right)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}=0_q. \quad (5.62)$$

Ahora, recordando que $\widehat{w}_{j+1} = \widehat{u}_{j+1}$ y usando la observación 5.1.1: $H_jT_j^*H_j^{-1}Y_{j+1} - H_j\lambda_{j+1} = v_j\widehat{u}_{j+1}^* - u_j\widehat{v}_{j+1}^*$, se consigue que:

$$-z\left(\widehat{v}_{j+1}^*(z)-\widehat{v}_{j+1}^*+zv_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}\left(H_jT_j^*H_j^{-1}Y_{j+1}-H_j\lambda_{j+1}\right)\right)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}=0_q. \quad (5.63)$$

Distribuyendo $zv_j^*R_j^*H_j^{-1}$ en la suma dentro del paréntesis:

$$\begin{aligned} -z\left(\widehat{v}_{j+1}^*(z)-\widehat{v}_{j+1}^*+zv_j^*R_j^*(\bar{z})\cancel{H_j^{-1}}\cancel{H_j}T_j^*H_j^{-1}Y_{j+1}-\right. \\ \left.-zv_j^*R_j^*(\bar{z})\cancel{H_j^{-1}}\cancel{H_j}\lambda_{j+1}\right)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}=0_q. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Simplificando:

$$-z\left(\widehat{v}_{j+1}^*(z)-\widehat{v}_{j+1}^*+zv_j^*R_j^*(\bar{z})T_j^*H_j^{-1}Y_{j+1}-zv_j^*R_j^*(\bar{z})\lambda_{j+1}\right)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}=0_q. \quad (5.65)$$

Sustituyendo $\widehat{v}_{j+1}^*(z)$ de (5.34) en la igualdad anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} -z\left(z^{j+1}I_q-v_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}Y_{j+1}-\widehat{v}_{j+1}^*+zv_j^*R_j^*(\bar{z})T_j^*H_j^{-1}Y_{j+1}-\right. \\ \left.-zv_j^*R_j^*(\bar{z})\lambda_{j+1}\right)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1}=0_q. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Ahora poniendo atención al sumando $zv_j^*R_j^*(\bar{z})\lambda_{j+1}$ y desarrollándolo:

$$zv_j^*R_j^*(\bar{z})\lambda_{j+1} = z(I_q, 0_q, 0_q, \dots, 0_q) \begin{pmatrix} I_q & zI_q & z^2I_q & \dots & z^jI_q \\ 0_q & I_q & zI_q & \dots & z^{j-1}I_q \\ 0_q & 0_q & I_q & \dots & z^{j-2}I_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_q & 0_q & 0_q & \dots & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_q \\ 0_q \\ 0_q \\ \vdots \\ I_q \end{pmatrix} = \quad (5.67)$$

$$z(I_q, zI_q, z^2I_q, \dots, z^jI_q) \begin{pmatrix} 0_q \\ 0_q \\ 0_q \\ \vdots \\ I_q \end{pmatrix} = z \cdot z^jI_q = z^{j+1}I_q. \quad (5.68)$$

Por lo tanto, volviendo a la demostración del caso 3), se concluye que:

$$-z \left(\cancel{z^{j+1}I_q} - v_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}Y_{j+1} - \widehat{v}_{j+1}^* + zv_j^*R_j^*(\bar{z})T_j^*H_j^{-1}Y_{j+1} - \right. \\ \left. - \cancel{zv_j^*R_j^*(\bar{z})\lambda_{j+1}} \right) \widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = 0_q. \quad (5.69)$$

Simplificando:

$$-z(-v_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}Y_{j+1} - \widehat{v}_{j+1}^* + zv_j^*R_j^*(\bar{z})T_j^*H_j^{-1}Y_{j+1}) \widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = 0_q, \quad (5.70)$$

$$\Rightarrow z(-\widehat{v}_{j+1}^* - v_j^*R_j^*(\bar{z})H_j^{-1}Y_{j+1} + zv_j^*R_j^*(\bar{z})T_j^*H_j^{-1}Y_{j+1}) \widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = 0_q, \quad (5.71)$$

$$\Rightarrow z(-\widehat{v}_{j+1}^* - \cancel{v_j^*R_j^*(\bar{z})(I - zT_j^*)}H_j^{-1}Y_{j+1}) \widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = 0_q, \quad (5.72)$$

$$\Rightarrow z(-\widehat{v}_{j+1}^* - v_j^*H_j^{-1}Y_{j+1}) \widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{v}_{j+1} = 0_q. \quad (5.73)$$

La expresión dentro del paréntesis satisface

$$-\widehat{v}_{j+1}^* - v_j^*H_j^{-1}Y_{j+1} = 0_q, \quad (5.74)$$

ya que $\widehat{v}_{j+1}^* = -v_j^*H_j^{-1}Y_{j+1}$ de (5.35), con lo cual se concluye la demostración. \blacklozenge

Caso 4) $\delta_{j+1} = \gamma_j(z)b_{12}^{(j+1)}(z) + \delta_j(z)b_{22}^{(j+1)}(z)$.

De forma análoga se comienza tomando δ_{j+1} de (5.23) junto con $b_{12}^{(j+1)}$ y $b_{22}^{(j+1)}$ de (5.25) y (5.27) y se sustituyen en la igualdad que se quiere demostrar, quedando lo siguiente:

$$\delta_j + z\widehat{v}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} = \gamma_j z\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} + \delta_j \left(I_q + z\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} \right), \quad (5.75)$$

$$\Rightarrow \delta_j + z\widehat{v}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} = \gamma_j z\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} + \delta_j + \delta_j z\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1}, \quad (5.76)$$

$$\Rightarrow z\widehat{v}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} = \gamma_j z\widehat{w}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} + \delta_j z\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1}. \quad (5.77)$$

Sustituyendo γ_j y δ_j de (5.30) y (5.31):

$$\begin{aligned} z\widehat{v}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} &= -z^2 v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j \widehat{w}_{j+1}^* \widehat{H}_{j+1}^{-1} \widehat{w}_{j+1} + \\ &\quad + (I_q + z v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j) z \widehat{v}_{j+1}^* \widehat{H}_{j+1}^{-1} \widehat{w}_{j+1}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Distribuyendo $z\widehat{v}_{j+1}^*\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} z\widehat{v}_{j+1}^*(z)\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1} &= -z^2 v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j \widehat{w}_{j+1}^* \widehat{H}_{j+1}^{-1} \widehat{w}_{j+1} + \\ &\quad + z\widehat{v}_{j+1}^* \widehat{H}_{j+1}^{-1} \widehat{w}_{j+1} + z^2 v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j \widehat{v}_{j+1}^* \widehat{H}_{j+1}^{-1} \widehat{w}_{j+1}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Igualando a 0 y factorizando $\widehat{H}_{j+1}^{-1}\widehat{w}_{j+1}$ por la derecha, z por la izquierda y reorganizando términos dentro del paréntesis:

$$z \left(\widehat{v}_{j+1}^*(z) - \widehat{v}_{j+1}^* + z v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j \widehat{w}_{j+1}^* - z v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j \widehat{v}_{j+1}^* \right) \widehat{H}_{j+1}^{-1} \widehat{w}_{j+1} = 0_q. \quad (5.80)$$

Dentro del paréntesis factorizo $z v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1}$ por la izquierda en los términos que lo poseen:

$$z \left(\widehat{v}_{j+1}^*(z) - \widehat{v}_{j+1}^* + z v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} (v_j \widehat{w}_{j+1}^* - u_j \widehat{v}_{j+1}^*) \right) \widehat{H}_{j+1}^{-1} \widehat{w}_{j+1} = 0_q. \quad (5.81)$$

Y por (5.62) del caso anterior, queda demostrada la igualdad. \blacklozenge

Consecuentemente queda demostrada la igualdad:

$$U_{j+1}(z) = U_j(z) \cdot b^{(j+1)}(z). \quad (5.82)$$

\blacklozenge

Observación 5.1.2. Para $j = 0$, la matriz resolvente tiene la forma:

$$U_0(z) = \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -zs_0^{-1} & I_q \end{pmatrix}. \quad (5.83)$$

Demostración. Para calcular $U_0(z)$, solo basta ver de las definiciones que: $R_0^*(\bar{z}) = I_q$, $v_0 = I_q$, $u_0 = 0_q$, $H_0 = s_0 \Rightarrow H_0^{-1} = s_0^{-1}$, por lo tanto se obtiene lo siguiente: $\alpha_0(z) = I_q$, $\beta_0(z) = 0_q$, $\gamma_0(z) = -zs_0^{-1}$ y $\delta_0(z) = I_q$. \blacklozenge

Denotamos mediante $b^{(0)}(z) := U_0(z)$.

Corolario. Sea $U_{j+1}(z)$ la matriz resolvente del problema de momentos de Hamburger y sea $b^{(j)}$ como en la definición 5.1.2, entonces tiene lugar la siguiente igualdad:

$$U_{j+1}(z) = \prod_{k=0}^{\rightarrow j+1} b^{(k)}(z). \quad (5.84)$$

Demostración. Por el teorema anterior, para $j = 0$ se tiene que $U_1(z) = U_0(z) \cdot b^{(1)}(z) = b^{(0)}(z) \cdot b^{(1)}(z)$, para $j = 1$ se tiene que $U_2(z) = U_1(z) \cdot b^{(2)}(z) = b^{(0)}(z) \cdot b^{(1)}(z) \cdot b^{(2)}(z)$, por inducción se puede ver que el corolario es válido. \blacklozenge

5.2. Preliminares para Parámetros de Stieltjes

Ahora procederemos a definir algunas matrices que utilizaremos en la sección posterior.

Definición 5.2.1. Sea $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$ una colección de momentos, entonces se definirá la matriz K_j de dimensión $qj \times qj$ y el vector \check{u}_j de tamaño $j + 1$ de la siguiente forma:

$$K_j := \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{j+1} \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{j+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j+1} & s_{j+2} & \cdots & s_{2j+1} \end{pmatrix}, \quad \check{u}_j := \begin{pmatrix} -s_0 \\ -s_1 \\ \vdots \\ -s_j \end{pmatrix}. \quad (5.85)$$

A continuación se harán 2 observaciones y 1 lema que ayudarán para realizar algunos cálculos mas adelante.

Observación 5.2.1. Sean $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$ una colección de momentos y v_j como en la definición 3.1.1, sea \check{u}_j como en la definición 5.2.1, entonces se satisface lo siguiente:

$$\check{u}_j v_j^* = \begin{pmatrix} -s_0 \\ -s_1 \\ \vdots \\ -s_j \end{pmatrix} \cdot (I_q, 0_q, \dots, 0_q) = \begin{pmatrix} -s_0 & 0_q & \cdots & 0_q \\ -s_1 & 0_q & \cdots & 0_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -s_j & 0_q & \cdots & 0_q \end{pmatrix}. \quad (5.86)$$

Observación 5.2.2. Sean $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$ una colección de momentos y T_j como en la definición 3.1.1, sea K_j como en la definición 5.2.1, entonces tiene lugar la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} & K_j T_j^* = \quad \quad \quad (5.87) \\ = & \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_j & s_{j+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & \cdots & s_{j+1} & s_{j+2} \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & \cdots & s_{j+2} & s_{j+3} \\ s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & \cdots & s_{j+3} & s_{j+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_j & s_{j+1} & s_{j+2} & s_{j+3} & \cdots & s_{2j-1} & s_{2j} \\ s_{j+1} & s_{j+2} & s_{j+3} & s_{j+4} & \cdots & s_{2j} & s_{2j+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0_q & I_q & 0_q & 0_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ 0_q & 0_q & I_q & 0_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ 0_q & 0_q & 0_q & I_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ 0_q & 0_q & 0_q & 0_q & \ddots & 0_q & 0_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_q & 0_q & 0_q & 0_q & \cdots & 0_q & I_q \\ 0_q & 0_q & 0_q & 0_q & \cdots & 0_q & 0_q \end{pmatrix} = \\ & \quad \quad \quad (5.88) \\ = & \begin{pmatrix} 0_q & s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{j-1} & s_j \\ 0_q & s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_j & s_{j+1} \\ 0_q & s_3 & s_4 & s_5 & \cdots & s_{j+1} & s_{j+2} \\ 0_q & s_4 & s_5 & s_6 & \cdots & s_{j+2} & s_{j+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_q & s_j & s_{j+1} & s_{j+2} & \cdots & s_{2j-2} & s_{2j-1} \\ 0_q & s_{j+1} & s_{j+2} & s_{j+3} & \cdots & s_{2j-1} & s_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_q & s_1 & \cdots & s_j \\ 0_q & s_2 & \cdots & s_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_q & s_{j+1} & \cdots & s_{2j} \end{pmatrix}. \quad (5.89) \end{aligned}$$

Lema 5.2.1. *En virtud de las observaciones 5.2.1 y 5.2.2, la siguiente igualdad es válida:*

$$K_j T_j^* - \check{u}_j v_j^* = H_j. \quad (5.90)$$

Demostración. De las observaciones 5.2.1 y 5.2.2 se puede apreciar lo siguien-

te:

$$K_j T_j^* - \check{u}_j v_j^* = \quad (5.91)$$

$$= \begin{pmatrix} 0_q & s_1 & \cdots & s_j \\ 0_q & s_2 & \cdots & s_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_q & s_{j+1} & \cdots & s_{2j} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -s_0 & 0_q & \cdots & 0_q \\ -s_1 & 0_q & \cdots & 0_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -s_j & 0_q & \cdots & 0_q \end{pmatrix} = \quad (5.92)$$

$$= \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_j \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_j & s_{j+1} & \cdots & s_{2j} \end{pmatrix} = H_j. \quad \blacklozenge \quad (5.93)$$

Enseguida se proponen otras 2 observaciones interesantes:

Observación 5.2.3. Sean $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$ una colección de momentos, u_j y T_j como en la definición 3.1.1, sea \check{u}_j definido como en 5.2.1, entonces se cumple que:

$$u_j = T_j \check{u}_j. \quad (5.94)$$

Demostración.

$$T_j \check{u}_j = \begin{pmatrix} 0_q & 0_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ I_q & 0_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ 0_q & I_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_q & 0_q & \cdots & I_q & 0_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s_0 \\ -s_1 \\ \vdots \\ -s_{j-1} \\ -s_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_q \\ -s_0 \\ \vdots \\ -s_{j-2} \\ -s_{j-1} \end{pmatrix} = u_j. \quad (5.95)$$

◆

Corolario. De la observación anterior, se puede ver que

$$u_j = T_j \check{u}_j \Leftrightarrow \boxed{u_j^* = \check{u}_j^* T_j^*}.$$

Observación 5.2.4. Sean $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$ una colección de momentos, Y_j y λ_j como en la definición 3.1.1, sea K_j como en 5.2.1, entonces la siguiente igualdad se satisface:

$$Y_{j+1} = K_j \lambda_{j+1}. \quad (5.96)$$

Demostración.

$$K_j \lambda_{j+1} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{j+1} \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{j+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j+1} & s_{j+2} & \cdots & s_{2j+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0_q \\ 0_q \\ \vdots \\ I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{j+1} \\ s_{j+2} \\ \vdots \\ s_{2j+1} \end{pmatrix} = Y_{j+1}. \quad \blacklozenge \quad (5.97)$$

Por adelante requerimos que $K_j > 0 \forall j \in \mathcal{J}_n$, es decir K_j sea positiva definida.

Corolario. *Una consecuencia inmediata del resultado anterior:*

$$Y_{j+1} = K_j \lambda_{j+1} \Leftrightarrow \boxed{K_j^{-1} Y_{j+1} = \lambda_{j+1}}. \quad (5.98)$$

Con las herramientas previas se procederá a demostrar el siguiente teorema:

Teorema 5.2.1. *Considerando que $\widehat{w}_j^* = \widehat{w}_j^*(0)$ y $\widehat{v}_j^* = \widehat{v}_j^*(0)$, entonces tiene lugar la siguiente igualdad:*

$$\widehat{w}_j^* = \check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1} \widehat{v}_j^*. \quad (5.99)$$

Demostración. Por un lado, se tiene que

$$\widehat{v}_j^* = -v_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} Y_j, \quad (5.100)$$

y por otro lado se tiene que:

$$\widehat{w}_j^* = -u_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} Y_j - s_{j-1}. \quad (5.101)$$

Sustituyendo (5.100) y (5.101) se tiene que:

$$-u_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} Y_j - s_{j-1} = -\check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1} v_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} Y_j, \quad (5.102)$$

$$\Rightarrow u_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} Y_j - \check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1} v_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} Y_j + s_{j-1} = 0_q. \quad (5.103)$$

Factorizando $H_{j-1}^{-1} Y_j$ por la derecha en los términos que lo poseen, se consigue que:

$$(u_{j-1}^* - \check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1} v_{j-1}^*) H_{j-1}^{-1} Y_j + s_{j-1} = 0_q. \quad (5.104)$$

Ahora, usando la observación 5.2.3 y su respectivo corolario ($u_j^* = \check{u}_j^* T_j^*$) en el resultado anterior, se consigue que:

$$(\check{u}_j^* T_j^* - \check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1} v_{j-1}^*) H_{j-1}^{-1} Y_j + s_{j-1} = 0_q. \quad (5.105)$$

Como siguiente paso, factoriza $\check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1}$ por la izquierda:

$$\check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} (K_{j-1} T_j^* - \check{u}_{j-1} v_{j-1}^*) H_{j-1}^{-1} Y_j + s_{j-1} = 0_q. \quad (5.106)$$

Después, usando el lema 5.2.2 ($K_{j-1} T_j^* - \check{u}_{j-1} v_{j-1}^* = H_{j-1}$), se puede ver que:

$$\check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} (\cancel{H_{j-1}}) \cancel{H_{j-1}^{-1}} Y_j + s_{j-1} = 0_q, \quad (5.107)$$

$$\Rightarrow \check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} Y_j + s_{j-1} = 0_q. \quad (5.108)$$

Ahora usando la observación 5.2.4 con su respectivo corolario ($K_j^{-1} Y_{j+1} = \lambda_{j+1}$) en la ecuación anterior, se puede apreciar que:

$$\check{u}_{j-1}^* \lambda_{j+1} + s_{j-1} = (-s_0, -s_1, \dots, -s_{j-1}) \cdot \begin{pmatrix} 0_q \\ 0_q \\ \vdots \\ I_q \end{pmatrix} + s_{j-1} = -s_{j-1} + s_{j-1} = 0_q. \quad (5.109)$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$\boxed{\hat{w}_j^* = \check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1} \hat{v}_j^*}. \quad (5.110)$$

◆

5.3. Parámetros de Stieltjes

Definición 5.3.1. Sean $\{s_j\}_{j=0}^{2n}$ una colección de momentos, la matriz H_j y el vector v_j como en 3.1.1, sean K_j y \check{u}_j como en la definición 5.2.1, y sean H_j y K_j invertibles. Entonces definimos las siguientes matrices:

$$M_0 := s_0^{-1}, \quad (5.111)$$

$$M_j := v_j^* H_j^{-1} v_j - v_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} v_{j-1}, \quad (5.112)$$

$$L_0 := s_0 s_1^{-1} s_0, \quad (5.113)$$

$$L_j := \check{u}_j^* K_j^{-1} \check{u}_j - \check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1}. \quad (5.114)$$

a los cuales, se les llamará parámetros de Stieltjes.

Ahora, observando la estructura de M_j y L_j , se puede concluir que:

Observación 5.3.1. Sean $\{L_i\}_{i=0}^j$ y $\{M_i\}_{i=0}^j$ colecciones de parámetros de Stieltjes, entonces se satisface lo siguiente:

$$\sum_{i=0}^j M_i = v_j^* H_j^{-1} v_j, \quad (5.115)$$

$$\sum_{i=0}^j L_i = \check{u}_j^* K_j^{-1} \check{u}_j. \quad (5.116)$$

Para la demostración, basta ver que son sumas telescópicas, es decir, sea $X_i = x_i - x_{i-1}$, con $x_{-1} = 0$, si tomo la suma

$$\sum_{j=0}^n X_i = x_0 - x_{-1} + x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1}, \quad (5.117)$$

donde todos los términos distintos de x_n y x_{-1} se cancelan, y como $x_{-1} = 0$, entonces

$$\sum_{j=0}^n X_i = x_n. \quad (5.118)$$

A continuación se analizará una propiedad bonita de unas matrices que procederemos a usar en instantes:

Observación 5.3.2. Sea $\{L_i\}_{i=0}^j$ una colección de parámetros de Stieltjes, entonces tiene lugar el siguiente producto:

$$\prod_{i=0}^j \begin{pmatrix} I_q & L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q & \sum_{i=0}^j L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}. \quad (5.119)$$

Demostración. La demostración se puede hacer por inducción, primero, para $j = 1$:

$$\begin{aligned} & \prod_{i=0}^1 \begin{pmatrix} I_q & L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} I_q & L_0 \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & L_1 \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q & L_2 + L_1 \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q & L_1 + L_2 \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q & \sum_{i=0}^1 L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.120)$$

$$\therefore \prod_{i=0}^1 \begin{pmatrix} I_q & L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q & \sum_{i=0}^1 L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}. \quad (5.122)$$

Suponiendo se cumple para j , ahora queda por demostrar para $j + 1$:

$$\boxed{\prod_{i=0}^{j+1} \begin{pmatrix} I_q & L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}} = \prod_{i=0}^j \begin{pmatrix} I_q & L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & L_{j+1} \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q & \sum_{i=0}^j L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & L_{j+1} \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} = \quad (5.123)$$

$$= \begin{pmatrix} I_q & L_{j+1} + \sum_{i=0}^j L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} I_q & \sum_{i=0}^{j+1} L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}}. \quad (5.124)$$

Con lo cual, queda demostrada la observación. \blacklozenge

Corolario. *Dado el resultado anterior, se aprecia inmediatamente que:*

$$\begin{pmatrix} I_q & L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & -L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q & -L_i + L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}. \quad (5.125)$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$\begin{pmatrix} I_q & L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_q & -L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}. \quad (5.126)$$

A continuación se presentará un resultado importante

Teorema 5.3.1. *Sea j fijo, entonces se satisface que:*

$$\begin{aligned} b^{(j)}(z) &= \left(\begin{array}{c|c} I_q - z\hat{w}_j^* \hat{H}_j^{-1} \hat{v}_j & z\hat{w}_j^* \hat{H}_j^{-1} \hat{w}_j \\ -z\hat{v}_j^* \hat{H}_j^{-1} \hat{v}_j & I_q + z\hat{v}_j^* \hat{H}_j^{-1} \hat{w}_j \end{array} \right) = \\ &= \prod_{i=0}^{j-1} \begin{pmatrix} I_q & L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -zM_j & I_q \end{pmatrix} \prod_{i=0}^{j-1} \begin{pmatrix} I_q & -L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.127)$$

Demostración. Haciendo uso de la observación 5.3.2, por el lado izquierdo de la igualdad se tiene que:

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{j-1} \begin{pmatrix} I_q & L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -zM_j & I_q \end{pmatrix} \prod_{i=0}^{j-1} \begin{pmatrix} I_q & -L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} I_q & \sum_{i=0}^{j-1} L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -zM_j & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & -\sum_{i=0}^{j-1} L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.128)$$

Ahora, haciendo uso de la observación 5.3.1:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I_q & \sum_{i=0}^{j-1} L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -zM_j & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & -\sum_{i=0}^{j-1} L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} I_q & \check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1} \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -zM_j & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & -\check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1} \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.129)$$

Denotaremos por $\mathcal{K}_j = \check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1}$ para simplificar las operaciones:

$$\begin{pmatrix} I_q & \mathcal{K}_j \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -zM_j & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & -\mathcal{K}_j \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q - z\mathcal{K}_j M_j & \mathcal{K}_j \\ -zM_j & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & -\mathcal{K}_j \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} = \quad (5.130)$$

$$= \begin{pmatrix} I_q - z\mathcal{K}_j M_j & (I_q - z\mathcal{K}_j M_j)(-\mathcal{K}_j) + \mathcal{K}_j \\ -zM_j & +zM_j \mathcal{K}_j + I_q \end{pmatrix} = \quad (5.131)$$

$$= \begin{pmatrix} I_q - z\mathcal{K}_j M_j & \cancel{-\mathcal{K}_j} + z\mathcal{K}_j M_j \mathcal{K}_j + \cancel{\mathcal{K}_j} \\ -zM_j & I_q + zM_j \mathcal{K}_j \end{pmatrix} = \quad (5.132)$$

$$= \begin{pmatrix} I_q - z\mathcal{K}_j M_j & z\mathcal{K}_j M_j \mathcal{K}_j \\ -zM_j & I_q + zM_j \mathcal{K}_j \end{pmatrix}. \quad (5.133)$$

El resto de la demostración se realizará en 4 casos para cada una de las entradas de las matrices.

Caso 1) $I_q - z\mathcal{K}_j M_j = I_q - z\widehat{w}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j$.

Partiendo de $\mathcal{K}_j M_j$ y de la definición de M_j , se tiene que:

$$\mathcal{K}_j M_j = \mathcal{K}_j (v_j^* H_j^{-1} v_j - v_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} v_{j-1}). \quad (5.134)$$

Haciendo las siguientes particiones para v_j , v_j^* , y H_{j-1}^{-1}

$$v_j^* = (v_{j-1}^*, 0_q), \quad (5.135)$$

$$v_j = \begin{pmatrix} v_{j-1} \\ 0_q \end{pmatrix}, \quad (5.136)$$

$$H_j^{-1} = \begin{pmatrix} H_{j-1}^{-1} & 0_{jq \times q} \\ 0_{q \times jq} & 0_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} Y_j \\ I_q \end{pmatrix} \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q). \quad (5.137)$$

y sustituyendo en el resultado anterior, se consigue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_j M_j &= \mathcal{K}_j (v_{j-1}^*, 0_q) \begin{pmatrix} H_{j-1}^{-1} & 0_{jq \times q} \\ 0_{q \times jq} & 0_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j-1} \\ 0_q \end{pmatrix} + \\ &+ \mathcal{K}_j v_j^* \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} Y_j \\ I_q \end{pmatrix} \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) v_j - \mathcal{K}_j v_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} v_{j-1}. \end{aligned} \quad (5.138)$$

Simplificando un poco el primer termino se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_j M_j &= \cancel{\mathcal{K}_j v_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} v_{j-1}} + \\ &+ \mathcal{K}_j (v_{j-1}^*, 0_q) \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} Y_j \\ I_q \end{pmatrix} \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) \begin{pmatrix} v_{j-1} \\ 0_q \end{pmatrix} - \cancel{\mathcal{K}_j v_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} v_{j-1}}. \end{aligned} \quad (5.139)$$

Eliminando los términos cancelados y haciendo las operaciones matriciales, se concluye por el momento que:

$$\mathcal{K}_j M_j = \mathcal{K}_j (-v_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} Y_j) \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1} v_{j-1}). \quad (5.140)$$

Pero recordando que $\widehat{v}_j^* = -v_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} Y_j$ y $\widehat{v}_j = -Y_j^* H_{j-1}^{-1} v_{j-1}$, entonces al sustituir en lo conseguido anteriormente, se puede apreciar que:

$$\mathcal{K}_j M_j = \mathcal{K}_j \widehat{v}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j. \quad (5.141)$$

Sustituyendo el valor de \mathcal{K}_j en la parte derecha:

$$\mathcal{K}_j M_j = \check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1} \widehat{v}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j. \quad (5.142)$$

Ahora haciendo uso del teorema 5.2.1, se sabe que $\widehat{w}_j^* = \check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1} \widehat{v}_j^*$, por lo tanto, al sustituir se consigue:

$$\mathcal{K}_j M_j = \widehat{w}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j. \quad (5.143)$$

Multiplicando por $-z$ y sumando I_q , se tiene que:

$$I_q - z \mathcal{K}_j M_j = I_q - z \widehat{w}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j. \quad (5.144)$$

Lo cual demuestra que las entradas (1, 1) son iguales. \blacklozenge

Caso 2) $z \mathcal{K}_j M_j \mathcal{K}_j = z \widehat{w}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{w}_j.$

Haciendo uso de la ecuación (5.143) del caso anterior se tiene que

$$\mathcal{K}_j M_j \mathcal{K}_j = \widehat{w}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j \mathcal{K}_j. \quad (5.145)$$

Substituyendo el valor de \mathcal{K}_j en la derecha de la igualdad y asociando, se consigue:

$$\mathcal{K}_j M_j \mathcal{K}_j = \widehat{w}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j (\check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1}) = \widehat{w}_j^* \widehat{H}_j^{-1} (\widehat{v}_j \check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1}). \quad (5.146)$$

Donde lo que está dentro del paréntesis es \widehat{w}_j , entonces:

$$\mathcal{K}_j M_j \mathcal{K}_j = \widehat{w}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{w}_j, \quad (5.147)$$

$$\Rightarrow z \mathcal{K}_j M_j \mathcal{K}_j = z \widehat{w}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{w}_j. \quad (5.148)$$

Por lo tanto, queda demostrado el caso 2). \blacklozenge

Caso 3) $-z M_j = -z \widehat{v}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j$.

Tomando la definición de M_j :

$$M_j = v_j^* H_j^{-1} v_j - v_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} v_{j-1}, \quad (5.149)$$

y particionando los elementos del termino $v_j^* H_j^{-1} v_j$ como en el caso 1), distribuyendo y organizando se consigue:

$$\begin{aligned} M_j &= (v_{j-1}^*, 0) \begin{pmatrix} H_{j-1}^{-1} & 0_{jq \times q} \\ 0_{q \times jq} & 0_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j-1} \\ 0_q \end{pmatrix} + \\ &+ v_j^* \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} Y_j \\ I_q \end{pmatrix} \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) v_j - v_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} v_{j-1}. \end{aligned} \quad (5.150)$$

Simplificando lo anterior:

$$\begin{aligned} M_j &= \cancel{v_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} v_{j-1}} + \\ &+ (v_{j-1}^*, 0_q) \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} Y_j \\ I_q \end{pmatrix} \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) \begin{pmatrix} v_{j-1} \\ 0_q \end{pmatrix} - \cancel{v_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} v_{j-1}}. \end{aligned} \quad (5.151)$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$\begin{aligned} M_j &= (v_{j-1}^*, 0_q) \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1}Y_j \\ I_q \end{pmatrix} \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q) \begin{pmatrix} v_{j-1} \\ 0_q \end{pmatrix}, \\ &\Rightarrow M_j = (-v_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} Y_j) \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1} v_{j-1}), \\ &\Rightarrow \boxed{M_j = \widehat{v}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j}. \end{aligned} \quad (5.152)$$

Ya que $-v_{j-1}^* H_{j-1}^{-1} Y_j = \widehat{v}_j^*$, por lo tanto, multiplicando lo anterior por $-z$ se concluye que:

$$-zM_j = -z\widehat{v}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j. \quad (5.153)$$

Con lo cual queda demostrado el caso. \blacklozenge

Caso 4) $I_q + zM_j \mathcal{K}_j = I_q + z\widehat{v}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{w}_j$.

Partiendo de $M_j \mathcal{K}_j$ y (5.152) del caso anterior

$$M_j \mathcal{K}_j = \widehat{v}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j \mathcal{K}_j. \quad (5.154)$$

Sustituyendo el valor de \mathcal{K}_j en lo anterior y sabiendo que $\widehat{v}_j \check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1} = \widehat{w}_j$ de 5.2.1 se consigue:

$$M_j \mathcal{K}_j = \widehat{v}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j \check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1} = \widehat{v}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{w}_j. \quad (5.155)$$

Ahora multiplicando lo anterior por z y sumando I se puede apreciar que:

$$I_q + zM_j \mathcal{K}_j = I_q + z\widehat{v}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{w}_j. \quad (5.156)$$

Con lo cual queda demostrado el caso 4). \blacklozenge

Dado que los 4 casos han sido demostrados, se concluye la demostración del teorema. \blacklozenge

5.4. J -forma de la matriz $b^{(j)}(z)$

Ya que se tiene la representación de la matriz resolvente como un producto de matrices, ahora se procederá a demostrar que las matrices $b^{(j)}$, heredan sus propiedades de J matriz (J -contractiva, J -unitaria y J -expansiva).

Observación 5.4.1. Sea $\mathcal{K}_j = \check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1}$, entonces la matriz

$$A_j^{-1} = \begin{pmatrix} I_q & -\mathcal{K}_j \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}, \quad (5.157)$$

es J -unitaria.

Demostración. La demostración se consigue fácilmente haciendo los cálculos directamente:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_q - A_j^{-1} \tilde{J}_q A_j^{-1*} &= \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_q & -\mathcal{K}_j \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -\mathcal{K}_j & I_q \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i\mathcal{K}_j & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -\mathcal{K}_j & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i\mathcal{K}_j + i\mathcal{K}_j & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{pmatrix} = \\ &= \tilde{J}_q - \tilde{J}_q = 0_{2q}. \quad (5.158) \end{aligned}$$

◆

Observación 5.4.2. La matriz

$$B_j(z) = \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -zM_j & I_q \end{pmatrix}, \quad (5.159)$$

tiene las mismas propiedades de J -contractiva, J -unitaria y J -expansiva que U_j .

Demostración. Denotando a la matriz usando la variable B :

$$B_j(z) = \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -zM_j & I_q \end{pmatrix}, \quad (5.160)$$

se procederá a demostrar que es J -contractiva, J -unitaria y J -expansiva en las mismas regiones que U_j haciendo los cálculos directamente y considerando que $z \in \mathbb{C}$ tiene la forma $z = x + iy$, para $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_q - (B_j(z)) \tilde{J}_q (B_j(z))^* &= \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -zM_j & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & -\bar{z}M_j \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & izM_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & -\bar{z}M_j \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & -izM_j + i\bar{z}M_j \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & iM_j(\bar{z} - z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & iM_j(-2iy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 2yM_j \end{pmatrix}. \quad (5.161) \end{aligned}$$

Ahora para checar el signo de (5.161), se toma un vector arbitrario (c, d) con $c, d \in \mathbb{C}$ y se procede a averiguar su signo:

$$\begin{aligned} (c, d) \cdot \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 2yM_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= (c, d) \cdot \begin{pmatrix} -idI_q \\ icI_q + 2ydM_j \end{pmatrix} = \cancel{-iedI_q} + \cancel{icdI_q} + 2yd^2 \cdot M_j = \\ &= 2yd^2 M_j \equiv \begin{cases} \geq 0, & y \in (0, \infty) \\ = 0, & y = 0 \\ \leq 0, & y \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad (5.162) \end{aligned}$$

recordando que $y = \Im z$, entonces se concluye que:

$$\tilde{J}_q - (B_j(z)) \cdot \tilde{J}_q \cdot (B_j(z))^* \equiv \begin{cases} \geq 0, & \Im z \in (0, \infty) \\ = 0, & \Im z = 0 \\ \leq 0, & \Im z \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad (5.163)$$

viendo así que B_j hereda las propiedades de J -matriz de U_j . \blacklozenge

Observación 5.4.3. Sea $\mathcal{K}_j = \check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1}$, entonces la matriz

$$A_j = \begin{pmatrix} I_q & \mathcal{K}_j \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}, \quad (5.164)$$

es J -unitaria.

Básicamente lo que dice esta observación es que la inversa de la matriz en 5.4.1 también es J -unitaria.

Ahora se procederá a demostrar que $b^{(j)}(z)$ hereda las propiedades de J -matriz de $U_j(z)$.

Lema 5.4.1. *Sea $b^{(j)}(z)$ como en la definición 5.1.2, entonces $b^{(j)}$ hereda las propiedades de J -matriz de $U_j(z)$.*

Demostración. Recordando que $b^{(j)}(z) = A_j \cdot B_j(z) \cdot A_j^{-1}$ con $A_j, B_j(z), A_j^{-1}$ como en las observaciones 5.4.1, 5.4.2, 5.4.3 y comenzando por la observación 5.4.2, se tiene que:

$$\tilde{J}_q - (B_j(z)) \cdot \tilde{J}_q \cdot (B_j(z))^* \equiv \begin{cases} \geq 0, & \Im z \in (0, \infty) \\ = 0, & \Im z = 0 \\ \leq 0, & \Im z \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad (5.165)$$

considerando la observación 5.4.3, se sabe que $\tilde{J}_q = A_j^{-1} \tilde{J}_q A_j^{-1*}$, entonces sustituyendo esto en la ecuación anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \tilde{J}_q - (B_j(z)) \cdot (\tilde{J}_q) \cdot (B_j(z))^* = \\ & = \tilde{J}_q - (B_j(z)) \cdot (A_j^{-1} \tilde{J}_q A_j^{-1*}) \cdot (B_j(z))^* \equiv \begin{cases} \geq 0, & \Im z \in (0, \infty) \\ = 0, & \Im z = 0 \\ \leq 0, & \Im z \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad (5.166) \end{aligned}$$

multiplicando la ecuación anterior por A_j por la izquierda y A_j^* por la derecha y recordando que A_j es J -unitaria, se tiene que

$$\begin{aligned} & A_j \cdot \left(\tilde{J}_q - (B_j(z)) \cdot A_j^{-1} \cdot \tilde{J}_q \cdot A_j^{-1*} \cdot (B_j(z))^* \right) \cdot A_j^* = \\ & = A_j \cdot \tilde{J}_q \cdot A_j^* - A_j \cdot (B_j(z)) \cdot A_j^{-1} \cdot \tilde{J}_q \cdot A_j^{-1*} \cdot (B_j(z))^* \cdot A_j^* = \\ & = \tilde{J}_q - A_j (B_j(z)) A_j^{-1} \cdot \tilde{J}_q \cdot A_j^{-1*} (B_j(z))^* A_j^* \equiv \begin{cases} \geq 0, & \Im z \in (0, \infty) \\ = 0, & \Im z = 0 \\ \leq 0, & \Im z \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad (5.167) \end{aligned}$$

ahora usando que $b^{(j)} = A_j B_j(z) A_j^{-1}$ con A_j, B_j, A_j^{-1} , se concluye que:

$$\tilde{J}_q - b^{(j)}(z) \cdot \tilde{J}_q \cdot (b^{(j)}(z))^* \equiv \begin{cases} \geq 0, & \Im z \in (0, \infty) \\ = 0, & \Im z = 0 \\ \leq 0, & \Im z \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad (5.168)$$

quedando demostrado el lema. ◆

Capítulo 6

Resultados

A continuación se presenta un resumen de los resultados obtenidos a lo largo del trabajo desarrollado.

- Lemas:

Lema (3.1.1). Sean $j \in \mathcal{J}_n$, sea H_j y \widehat{H}_j invertibles $\forall j \in \mathcal{J}_n$, entonces se tiene que:

$$H_j^{-1} = \begin{pmatrix} H_{j-1}^{-1} & 0_{jq \times q} \\ 0_{q \times jq} & 0_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -H_{j-1}^{-1} Y_j \\ I_q \end{pmatrix} \widehat{H}_j^{-1} (-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, I_q). \quad (6.1)$$

Lema (3.4.2). Sean $\alpha_j(z)$, $\beta_j(z)$, $\gamma_j(z)$ y $\delta_j(z)$ las entradas de la matriz resolvente del problema de momentos de Hamburger, entonces tienen lugar las siguientes igualdades:

$$\alpha_j(z) \cdot \delta_j^*(\bar{z}) - \delta_j(z) \cdot \alpha_j^*(\bar{z}) = I_q, \quad (6.2)$$

$$\alpha_j(z) \cdot \beta_j^*(\bar{z}) = \beta_j(z) \cdot \alpha_j^*(\bar{z}), \quad (6.3)$$

$$\gamma_j(z) \cdot \delta_j^*(\bar{z}) = \delta_j(z) \cdot \gamma_j^*(\bar{z}). \quad (6.4)$$

Lema (4.2.1). Sean $j, m \in \mathbb{N}$ con $m + 1 < j \leq n$ y

$$W := \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j-1} & s_j & \cdots & s_{j+m-1} \end{pmatrix}$$

Entonces las siguientes igualdades son validas:

$$W = H_{j-1} \cdot \begin{pmatrix} I_{(m+1)} \\ 0_{(j-m-1) \times (m+1)} \end{pmatrix},$$

$$\left(-Y_j^* H_{j-1}^{-1}, 1 \right) \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j-1} & s_j & \cdots & s_{j+m-1} \\ s_j & s_{j+1} & \cdots & s_{j+m} \end{pmatrix} = 0$$

Lema (5.1.1). Sean H_j , T_j , Y_{j+1} , H_j , λ_{j+1} , v_j y u_j como en la definición 3.1.1 y \widehat{u}_{j+1} y \widehat{v}_{j+1} como en la definición 5.1.1, entonces se satisface lo siguiente:

$$H_j T_j^* H_j^{-1} Y_{j+1} - H_j \lambda_{j+1} = v_j \widehat{u}_{j+1}^* - u_j \widehat{v}_{j+1}^*. \quad (6.5)$$

Lema (5.2.1). En virtud de las observaciones 5.2.1 y 5.2.2, la siguiente igualdad es válida:

$$K_j T_j^* - \check{u}_j v_j^* = H_j. \quad (6.6)$$

■ Teoremas:

Teorema (4.1.1). Sean $P_j(z)$ y $Q_j(z)$ polinomios como en la definición 4.1.1, entonces las siguientes relaciones son validas $\forall j \in \mathcal{J}_n$:

$$U_{11,j}(z) = \alpha_j(z) = I_q + z \sum_{i=0}^j (Q_i(\bar{z}))^* P_i(0), \quad (6.7)$$

$$U_{12,j}(z) = \beta_j(z) = z \sum_{i=0}^j (Q_i(\bar{z}))^* Q_i(0), \quad (6.8)$$

$$U_{21,j}(z) = \gamma_j(z) = -z \sum_{i=0}^j (P_i(\bar{z}))^* P_i(0), \quad (6.9)$$

$$U_{22,j}(z) = \delta_j(z) = I_q - z \sum_{i=0}^j (P_i(\bar{z}))^* Q_i(0). \quad (6.10)$$

Teorema (4.2.1). *Los polinomios $\{P_j(z)\}_{j=1}^n$ son ortogonales respecto de la medida σ , es decir:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_j(t) d(\sigma(t)) P_k^*(t) = \begin{cases} I_q, & j = k \\ 0_q, & j \neq k \end{cases} \quad (6.11)$$

Teorema (5.1.1). *Sea U_j la matriz resolvente y $b^{(j+1)}$ como en la definición 5.1.2, entonces la siguiente igualdad es verdadera:*

$$U_{j+1}(z) = U_j(z) \cdot b^{(j+1)}(z). \quad (6.12)$$

Teorema (5.2.1). *Considerando que $\widehat{w}_j^* = \widehat{w}_j^*(0)$ y $\widehat{v}_j^* = \widehat{v}_j^*(0)$, entonces tiene lugar la siguiente igualdad:*

$$\widehat{w}_j^* = \check{u}_{j-1}^* K_{j-1}^{-1} \check{u}_{j-1} \widehat{v}_j^*. \quad (6.13)$$

Teorema (5.3.1). *Sea j fijo, entonces se satisface que:*

$$\begin{aligned} b^{(j)}(z) &= \left(\begin{array}{c|c} I_q - z\widehat{w}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j & z\widehat{w}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{w}_j \\ \hline -z\widehat{v}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{v}_j & I_q + z\widehat{v}_j^* \widehat{H}_j^{-1} \widehat{w}_j \end{array} \right) = \\ &= \prod_{i=0}^{j-1} \begin{pmatrix} I_q & L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & 0_q \\ -zM_j & I_q \end{pmatrix} \prod_{i=0}^{j-1} \begin{pmatrix} I_q & -L_i \\ 0_q & I_q \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Capítulo 7

Conclusiones

Como se menciona en la introducción, en este trabajo no hay resultados originales sino mas bien un estudio detalladamente del artículo de I.V., Kovalishina [6], pudiendo apreciar así algunas propiedades de la matriz resolvente del problema de momentos de Hamburger.

Propiedades como son los polinomios ortogonales $\{P_j(z)\}_{j=0}^n$ respecto de la medida σ que satisface el problema de momentos y los polinomios de segunda especie $\{Q_j(z)\}_{j=0}^n$ los cuales son un componente fundamental de la matriz resolvente.

Así como el desarrollo del método de Blaschke-Potapov usado para escribir la matriz resolvente en forma de producto usando los factores de Blaschke-Potapov y los parámetros de Stieltjes, los cuales, están relacionados con la teoría de las fracciones continuas la cual puede estudiarse incluso en el caso matricial ya que el trabajo ha sido realizado para el caso matricial para matrices de tamaño $q \times q$ (el caso escalar es cuando se toma $q = 1$).

Se ha podido visualizar la inversa de la matriz resolvente cuya forma explícita es muy similar a cuando uno invierte una matriz de 2×2 con entradas reales, pero recordando que el caso estudiado es matricial, todo esto haciendo uso de la J -forma propiedad la cual contiene la matriz resolvente.

Todas estas propiedades aparecen tras estudiar las 3 preguntas que surgen a la hora de plantear el problema de momentos cuya riqueza puede apreciarse

en la forma en que naturalmente están conectadas.

Apéndice A

Solución del problema de momentos

Como referencia a este apéndice hago uso de [3].

§ 1. Solución para el problema determinado

Teorema § 1.1 (Hamburger). *La condición necesaria y suficiente que se debe satisfacer para que una función no decreciente $\sigma(u)$ ($-\infty < u < \infty$) pueda existir teniendo un número infinito de puntos de crecimiento y sea tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^k d\sigma(u) = s_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (\text{A.1})$$

la cual es que la secuencia $\{s_k\}_0^\infty$ debe ser positiva.

Demostración. Es muy simple probar que esta condición es necesaria.

Si las ecuaciones (A.1) se satisfacen, entonces para cualquier m y cualquier real x_1, x_2, \dots, x_m , tenemos

$$\sum_{i,k=0}^m s_{i+k} x_i x_k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_0^m x_k u^k \right)^2 d\sigma(u) \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

Si el signo de la ecuación se aplica a esta relación polinomial

$$A(u) = \sum_0^m x_k u^k$$

debe ser cero en todos los puntos en los cuales la función $\sigma(u)$ crece. Pero de acuerdo a nuestra condición, hay una cantidad infinita de estos puntos y por lo tanto, el polinomio $A(u)$ debe ser idénticamente cero. Entonces el signo de la ecuación es imposible en (A.2) si no todos los x_1, x_2, \dots, x_m son ceros. Esto completa la prueba de necesidad.

La prueba de que la condición es suficiente es mas complicada y por conveniencia la dividiremos en 2 partes.

a) Asumamos que la secuencia positiva $\{s_k\}_0^\infty$ es dada. Para cualquier entero n vamos a considerar el llamado problema truncado de momentos de orden $2n - 1$:

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} u^k d\sigma(u), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1), \quad (\text{A.3})$$

donde $\sigma(u)$ es buscado de entre la clase de todas las funciones no decrecientes. Es muy simple construir un conjunto continuo de soluciones a este problema. Así es, tomemos un número arbitrario t ($-\infty < t < \infty$) y escribamos la ecuación probada en la sección 4.2 del capítulo 1 de [3]

$$\frac{Q_{n+1}(z) - tQ_n(z)}{P_{n+1}(z) - tP_n(z)} = \sum_1^{n+1} \frac{\mu_i}{z - \lambda_i}, \quad (\text{A.4})$$

donde

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n+1} \quad [\lambda_i = \lambda_i^{(n+1)}(t)]$$

y

$$\mu_i = \mu_i^{(n+1)}(t) > 0$$

Como está establecido en la sección a la cual se hace cita, tenemos

$$s_k = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \lambda_i^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1). \quad (\text{A.5})$$

Ahora introducimos la función constante a trozos $\sigma_n(u)$ la cual tiene como sus puntos de crecimiento a λ_i en cuyas discontinuidades son los μ_i :

$$\mu_i = \sigma_n(\lambda_i + 0) - \sigma_n(\lambda_i - 0) \quad (i = 1, 2, \dots, n + 1);$$

entonces las ecuaciones (A.5) toman la forma

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} u^k d\sigma_n(u) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1) \quad (\text{A.6})$$

Por lo tanto la función $\sigma_n(u)$ que hemos construido es precisamente una solución del problema de momentos truncado (A.3).

Notemos que para $t < \infty$ las ecuaciones (A.5) se satisfacen así como para las ecuaciones (A.6) también se satisfacen para $k = 2n$, y si $t = 0$ también para $k = 2n + 1$.

b) Ahora tomemos cualquier secuencia de soluciones no decrecientes $\sigma_n(u)$ del truncado problema de momentos de orden $2n - 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), por ejemplo, la secuencia que fue construida anteriormente. Esta secuencia $\{\sigma_n(u)\}_{n=1}^{\infty}$ satisface las condiciones del teorema de Helly, ya que para cualquier n la total variación de la función $\sigma_n(u)$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_n(u) = s_0.$$

Por lo tanto existe una función no decreciente $\sigma(u)$ y una secuencia $\{\sigma_{n_i}(u)\}_{i=1}^{\infty}$ tal que en todos los puntos de discontinuidad de $\sigma(u)$ la ecuación

$$\sigma(u) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{n_i}(u)$$

se satisface. Hemos probado que $\sigma(u)$ es una solución de el problema completo de momentos el cual estamos discutiendo, para que se cumpla que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^k d\sigma(u) = s_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (\text{A.1})$$

Asume que $-A < 0$ y $B > 0$ son dos puntos de discontinuidad de $\sigma(u)$. En este caso tenemos por el segundo teorema de Helly que

$$\int_{-A}^B u^k d\sigma(u) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-A}^B u^k d\sigma_{n_i}(u) \quad (\text{A.7})$$

Por otro lado si $2r$ es un número positivo mayor que k , entonces para $n_i > r$ tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^k d\sigma_{n_i}(u) = \int_{-A}^B u^k d\sigma_{n_i}(u) + \int_{-\infty}^{-A} u^k d\sigma_{n_i}(u) + \int_B^{\infty} u^k d\sigma_{n_i}(u)$$

y

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{-A} + \int_B^{\infty} u^k d\sigma_{n_i}(u) \right| &= \left| \int_{-\infty}^{-A} + \int_B^{\infty} \frac{u^{2r}}{u^{2r-k}} d\sigma_{n_i}(u) \right| \\ &\leq \frac{1}{C^{2r-k}} \left\{ \int_{-\infty}^{-A} + \int_B^{\infty} u^{2r} d\sigma_{n_i}(u) \right\} \leq \frac{s_{2r}}{C^{2r-k}}, \end{aligned}$$

donde $C = \min\{A, B\}$. Por lo tanto se sigue de (A.7) que

$$\left| \int_{-A}^B u^k d\sigma(u) - s_k \right| \leq \frac{s_{2r}}{C^{2r-k}}.$$

Ahora lo que resta es incrementar A y B sin límite, pero de tal forma que $-A$ y B siempre continúen siendo puntos de discontinuidad de $\sigma(u)$. Esto prueba la ecuación (A.1).

La función $\sigma(u)$ la cual hemos encontrado evidentemente tiene una cantidad infinita de puntos de crecimiento. Así es, si $\sigma(u)$ hubiera tenido solo una finita cantidad de puntos de crecimiento (por ejemplo u_1, u_2, \dots, u_N), hubiéramos tenido para el polinomio

$$P(u) = (u - u_1)^2(u - u_2)^2 \dots (u - u_N)^2$$

la desigualdad

$$S\{P(u)\} = \int_{-\infty}^{\infty} (u - u_1)^2(u - u_2)^2 \dots (u - u_N)^2 d\sigma(u) = 0,$$

lo cual es un absurdo porque la secuencia $\{s_k\}_0^{\infty}$ es positiva.

Entonces la suficiencia en la condición del teorema § 1.1 ha sido probada.

§ 2. Solución para el problema indeterminado

Del teorema del ejemplo 8 de la página 83 de [3] se obtiene el criterio de Hamburger:

Para que un problema de momentos

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} u^k d\sigma(u) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

sea determinado, es necesario y suficiente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_4 & s_5 & \cdots & s_{n+2} \\ s_5 & s_6 & \cdots & s_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n+2} & s_{n+3} & \cdots & s_{2n} \end{vmatrix}} = 0$$



Apéndice B

J -Matrices

§ 1. Conceptos fundamentales de las J -álgebras

Sea $J = (P_{kj})$ una matriz hermitiana, en general signo indefinido de orden “ n ”, tal que $J^* = J, J^2 = I$. en el espacio lineal L complejo de dimensión m de vectores $f = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m]$, introduzcamos una metrica indefinida definiendo al producto escalar mediante la igualdad

$$[f, g] = fJg^* = \sum_{k,j=1}^m \xi_k P_{kj} \bar{\eta}_j$$

Como en el caso común la metrica $\langle f, g \rangle = fg^* = \sum_{k=1}^m \xi_k \bar{\eta}_k$ del funcional bilineal $[f, g]$ tiene las siguientes propiedades.

1. $[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g] = \lambda_1 [f_1, g] + \lambda_2 [f_2, g]$
2. $[g, f] = \overline{[f, g]}$

Sin embargo ahora no se puede afirmar que el producto escalar $[f, f]$ del vector $f \neq 0$ es el número positivo. En relación a esto los vectores $g \in L$ se dividen en “vectores mas”, “vectores menos” y “vectores neutrales” que corresponden a $[g, g] > 0, [g, g] < 0, [g, g] = 0$. En la teoría general la forma específica de la matriz J , la cual da una métrica, no es esencial. Sin embargo, en situaciones concretas con mas frecuencia se encuentran las

siguientes formas de la matriz J (matrices de Pauli):

$$J_1 = \begin{pmatrix} -I_p & 0_{p \times q} \\ 0_{q \times p} & I_q \end{pmatrix}; J_2 = \begin{pmatrix} 0_q & I_q \\ I_q & 0_q \end{pmatrix}; J_3 = \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{pmatrix},$$

donde $p + q = m$ y $2q = m$. La matriz J_2 está estrechamente relacionada con la teoría de redes eléctricas, la matriz J_3 con problemas clásicos; en estos 2 casos m necesariamente es un número par.

El producto escalar permite a cada matriz A hacer corresponder la matriz J -conjugada A^+ requiriendo se satisfaga la igualdad $[f, gA^+] = [fA, g] \forall f, g \in L$. Esta relación significa que $fJ(A^+)^*g^* = fAJg^*$ de donde en virtud a la arbitrariedad de los vectores f y g y el hecho que $J^2 = I$ obtenemos $A^+ = JA^*J$.

La matriz H se llama J -Hermitiana (J -autoadjunta), si $H = H^+$ o La igualdad equivalente $HJ = JH^*$. Esta claro que para la matriz H el producto escalar $[fH, f]$ es un número real $\forall f \in L$ si además este producto escalar a $f \in L$, además este producto escalar $\forall f \in L$ es no negativo, entonces H se llama J -Hermitiana no negativa y obviamente que se caracteriza por $HJ \geq 0$.

La matriz U se llama J -unitaria sí este mantiene al cuadrado escalar $[fU, fU] = [f, f]$ ($f \in L$). Ya que de la igualdad de formas cuadráticas en el espacio vectorial complejo se mantiene la igualdad de los bilineales, entonces $[fU, gU] = [f, g]$ y consecuentemente $UJU^* = J$.

Finalmente la matriz W se llama J -contractiva sí esta matriz no aumenta el producto escalar $[f]$ es decir, sí $WJW^* \leq J$. La expresión $J - WJW^* \geq 0$ se encuentra con frecuencia adelante y se llama J -forma, la teoría que consideramos estudia la clase de funciones \mathbb{W} , J -contractivas. Un hecho importante de esta clase es su forma multiplicativa: sí $w_1, w_2 \in \mathbb{W}$ entonces $w_1 w_2 \in \mathbb{W}^{-*}$ en efecto $J - (W_1 W_2)J(W_1 W_2)^* = J - W_1 J W_1^* + W_1 (J - W_2 J W_2^*) W_1^* \geq 0$.

El siguiente resultado es crucial:

Teorema § 1.1. *Sí W es una matriz J -contractiva (J -unitaria) entonces W^* tiene las mismas propiedades.*

Demostración: Para la demostración consideramos la transformación fraccional lineal de la clase $\mathbf{W}(W)$ y la clase de contracciones $\mathbf{X}(X)$ (tales relaciones se encuentran con frecuencia en otros temas de las matrices J). Para la realización de esta conexión introduzcamos la matrices $P = \frac{1}{2}(I + J)$; $Q = \frac{1}{2}(I - J)$. Es fácil de ver que P y Q son proyecciones ortogonales $P^2 = P = P^* \geq 0$; $Q^2 = Q = Q^* \geq 0$; $PQ = QP = 0$ y que $P + Q = I$; $P - Q = J$. Para la transformación fraccionaria lineal

$$X = (WQ - P)^{-1}(-WP + Q) \quad (\text{B.1})$$

son validas 3 afirmaciones.

- I) Esta transformación tiene validez para cualquier matriz W J -contractiva.
- II) El mismo puede ser escrito en la forma:

$$X = (PW + Q)(QW + P)^{-1} \quad (\text{B.2})$$

- III) Esta transformación traslada una matriz J -no expansiva en una contracción X , mientras una matriz J -unitaria en otra unitaria.

1. El hecho de que W es J -no expansiva es equivalente a la desigualdad $P + WQW^* \geq Q + WPW^*$. Multiplicando por la derecha al numerador en (B.1) por la expresión adjunta obtenemos $(WQ - P)(QW^* - P) = WQW^* + P$. De estas 2 ultimas relaciones se sigue que si $g(WQ - P) = 0$ entonces al mismo tiempo $gP = 0$ y $gQ = 0$ es decir $g = 0$.

2. Es fácil de comprobar la identidad

$$(WQ - P)(PW + Q) = (-WP + Q)(QW + P) \quad (\text{B.3})$$

de donde se obtiene que $QW + P$ es una matriz no degenerada. En efecto, sí $(QW + P)h^* = 0$ entonces de (B.3) y **1.** se sigue $(PW + Q)h^* = 0$. Multiplicando por la izquierda la primera el primero por P mientras que el segundo por Q y sumando tenemos que $h^* = 0$. Consecuentemente esta identidad (B.3) se puede escribir la forma $(WQ - P)^{-1}(-WP + Q) = (PW + Q)(WQ + P)^{-1}$.

3. Utilizando la primera y la segunda de las formulas de transformación calculamos $I - XX^* = (WQ - P)^{-1}\{J - WJW^*\}(QW^* - P)^{-1}$; $I - X^*X = (WQ + P)^{-1}\{J - WJW^*\}(QW^* + P)^{-1}$.

Después de esto, la afirmación del teorema se convierte en un corolario de propiedades conocidas de matrices contractivas y unitarias.

Bibliografía

- [1] Choque Rivero A.E., *The Resolvent Matrix for the Hausdorff Matrix Moment Problem Expressed in Terms of Orthogonal Matrix Polynomials*, Complex Analysis and Operator Theory (2012), DOI: 10.1007/s11785-012-0255-5.
- [2] Choque Rivero A.E. and Dyukarev Yu, *A matrix version of one Hamburger Theorem*, Mathematical Notes **91** (2012), no. 3-4, 493–499.
- [3] Naum Ilyich Akhiezer, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Translated by N. Kemmer, Hafner Publishing Co., New York, 1965.
- [4] Naum Ilyich Akhiezer and I.M. Glazman, *Theory of linear operators in hilbert space*, Dover Publications, Inc., 1993, Two Volumes Bound As One.
- [5] Hans Hamburger, *Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems*, **Volume 81**, no. Issue 2-4, pp 235–319 (German), Mathematische Annalen.
- [6] Kovalishina I.V., *Analytic theory of a class of interpolation problems*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **47** (1983), 455–497 (Russian), Engl. transl. in: Math. USSR Izvestiya 22 (1984), 419–463.
- [7] Serge Lang, *Complex analysis*, 4th ed., Springer, 1999 (english), Theorem 1.2, page 90.
- [8] Vladimir Petrovich Potapov, *The multiplicative structure of J -contractive matrix functions*, Uspekhi Mat. Nauk **10** (1955), no. 3, 185–186 (Russian).
- [9] Vladimir Petrovich Potapov and Kovalishina I.V., *Seven papers translated from the Russian*, AMS Translations **138**, 1–74.