



Universidad Michoacana de  
San Nicolás de Hidalgo

---

Facultad de Ciencias Físico  
Matemáticas

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

Análisis de un Sistema Dinámico en  
Relatividad

T E S I S

que para obtener el título de:  
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

P r e s e n t a :

Ulises Uriostegui Legorreta

Asesor:

Dr. Joaquin Estevez Delgado

*Morelia Michoacán, Agosto 2013*

*A mis padres*

# Agradecimientos

Nada hubiera sido posible sin mis padres, a ustedes más que a nadie agradezco este momento y con quienes quiero compartir mi alegría ya que son la base de mi persona y el apoyo con el cual espero siempre contar. A mi mamá, por darme la vida y educarme en mis primeros años, te deseo siempre lo mejor y espero estar ahí cuando lo necesites. A mi papá, eres la persona a quien más admiro y en verdad te agradezco todo el apoyo.

Durante mi estancia en Morelia conocí a muchas personas que estuvieron ahí cuando las necesitaba, a mis amigos de la facultad sólo por mencionar a los más cercanos; Eduardo, Yesenia, Augusto, Gabino, David, Gabriela, Rogelio, José de Jesús, Jennifer, Bere, Tero..., vaya que sin ustedes estos casi 5 años hubiesen sido muy aburridos. A mi novia Mirna; gracias por todas las cosas que hemos compartido juntos, los cuidados cuando andaba enfermo y tu paciencia.

A mi asesor de tesis; Dr. Joaquin Estevez, quien además de haber sido excelente profesor durante la carrera, haya confiado en mí para realizar esta tesis, gracias por tu paciencia, consejos, correcciones, explicaciones, en fin. Gracias por todo.

Finalmente, quiero agradecer al Dr. Víctor Yépez, Dr. Alberto Mendoza, M.C. Gabriel Arroyo, L.C.F.M. José Vega por el haber aceptado ser sinodales para el examen recepcional, así también por haberse tomado el tiempo necesario para la lectura de la tesis y por sus valiosos comentarios y consejos.

## CAPÍTULO 0. AGRADECIMIENTOS

---

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Sistemas Dinámicos</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias . . . . .	2
1.2.1. Ecuaciones Separables . . . . .	4
1.2.2. Ecuaciones Lineales . . . . .	4
1.2.3. Ecuaciones Exactas . . . . .	5
1.2.4. Ecuaciones Homogéneas . . . . .	6
1.3. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales . . . . .	7
1.4. Solución de sistemas lineales . . . . .	9
1.5. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales No Lineales . . . . .	12
<b>2. Espacios Fase</b>	<b>17</b>
2.1. Introducción . . . . .	17
2.2. Sistemas Autónomos y No Autónomos . . . . .	17
2.3. Estabilidad del Sistema . . . . .	18
2.4. Caracterización del Espacio Fase . . . . .	19
2.4.1. Ejemplos . . . . .	23
2.5. Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	27
2.6. Lema de Gronwall . . . . .	28
<b>3. Homologías y Sistemas de Ecuaciones</b>	<b>31</b>
3.1. Introducción . . . . .	31
3.2. Homologías . . . . .	32
3.3. El Sistema Anisotrópico . . . . .	32
<b>4. Sistema Dinámico en Relatividad</b>	<b>37</b>
4.1. Análisis de un sistema anisotrópico . . . . .	37

## ÍNDICE GENERAL

---

4.2. Materia Ordinaria . . . . .	39
4.3. Materia No Ordinaria . . . . .	42
4.4. Comparación con un Sistema Isotrópico . . . . .	50
4.5. Criterio de Estabilidad . . . . .	51
4.5.1. Casos Especiales . . . . .	52
4.6. Clasificación de Dinámicas . . . . .	53
<b>5. Conclusiones</b>	<b>55</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>

# Introducción

Cada día sabemos más y entendemos menos...  
Albert Einstein

El análisis de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales es una tarea que ha interesado tanto a matemáticos como investigadores de otras áreas, particularmente a físicos y biólogos. En lo que respecta al área de física podemos mencionar que estos sistemas se hayan presente en relatividad general cuando queremos entender el comportamiento de la estructura estelar de diferentes objetos astrofísicos como objetos compactos, estrellas, agujeros negros, gravastar. Para el caso que consideramos un espacio tiempo estático y esféricamente simétrico con un fluido que manifiesta presión anisotrópica existe una amplia libertad en la elección del tipo de ecuación de estado que pudiera asignarse para los diferentes casos de los objetos compactos a estudiar. Por ejemplo para estrellas con materia ordinaria uno podría suponer  $P_r = \lambda\rho^k$  y  $P_t = \mu\rho^l$ ,  $\mu, \lambda$  constantes positivas, en este caso la condición a imponer únicamente es que se satisfagan las condiciones de energía débil, energía fuerte, condición de energía nula y que la velocidad de propagación de la luz en el medio sea menor que la de la luz.

Por otro lado si deseamos analizar materia oscura, agujeros de gusano o gravastar, las condiciones de energía no se satisfacen e incluso la densidad o presión podrían ser tales que  $P < 0$  y  $\rho < 0$ . Dado el abanico de posibilidades y sobre todo la importancia que tienen sistemas anisotrópicos en relatividad general, la propuesta de este trabajo es enfocada a realizar un análisis desde la perspectiva de sistemas dinámicos. Además de dar respuesta a la pregunta del tipo de ecuaciones de estado que son compatibles con las homologías.

Es por eso que en esta tesis realizamos una extensión del trabajo de Collins considerando que el sistema estelar de TOV es reemplazado por su equivalente con presiones anisotrópicas. Hasta donde conocemos este análisis no ha sido realizado. En el capítulo 1 nos enfocaremos a una revisión de los conceptos básicos requeridos para el desarrollo de los temas centrales de esta tesis como son algunos temas importantes de ecuaciones diferenciales ordinarias y sus soluciones, para posteriormente abordar sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. El capítulo 2 sera enfocado a la técnica para poder calcular el tipo de estabilidad y dinámica de los sistemas de ecuaciones. El propósito del capítulo 3 es determinar el tipo de ecuaciones de estado que son

## CAPÍTULO 0. INTRODUCCIÓN

---

compatibles para sistemas anisotrópicos en relatividad general con las homologías. En el capítulo 4 nos enfocaremos a determinar la estabilidad y dinámica del sistema anisotrópico y posteriormente lo compararemos con un sistema isotrópico. Finalmente en el capítulo 5, concluimos con un breve recuento de lo que se expone en esta tesis, y las contribuciones para trabajos futuros a cerca de poder hacer una clasificación de las dinámicas encontradas para materia ordinaria y extraña de un sistema anisotrópico.

# Capítulo 1

## Sistemas Dinámicos

### 1.1. Introducción

El estudio de las Ecuaciones Diferenciales es tan viejo como el del Cálculo mismo. En 1671 Newton (1643-1729) trabajó sobre la teoría de “Fluxiones” (Una fluxión viene a ser la derivada de una “fluyente”, el cual es el nombre que Newton daba a una variable dependiente). Su investigación se relacionó con “Ecuaciones Fluxionales” que ahora llamaríamos ecuaciones diferenciales. Él dividió a las ecuaciones diferenciales en tres categorías. En la primera, estas tendrían la forma  $\frac{dy}{dx} = f(x)$  o  $\frac{dy}{dx} = f(y)$ . En la segunda, tendrían la forma  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ . Y en la tercera categoría están las ecuaciones diferenciales parciales. El método de solución desarrollado por él fue el de series de potencias el cual consideró un método “universalmente válido”.

El matemático y filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) también trabajó en ecuaciones diferenciales; encontró el método para las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. En 1690, Jakob Bernoulli (1654-1705) mostró que el problema de determinar la isócrona (curva vertical plana en la cual una partícula que se deslice sobre ella hasta el fondo tardará un tiempo fijo que no depende del punto inicial) es equivalente a resolver una ecuación diferencial de primer orden no lineal; él la resolvió por el método de variables separables (el método general sería enunciado por Leibniz) [1].

La segunda etapa (1728) de la historia de las ED's (Ecuaciones Diferenciales) estuvo dominada por Leonard Euler: Él introdujo varios métodos para ecuaciones de orden inferior, el concepto de factor integrante, la teoría de las ecuaciones lineales de orden arbitrario, el desarrollo del uso del método de series de potencias entre otras cosas. La etapa siguiente (1820) fue una etapa de formalización y en ella hay dos personajes importantes Niels Henrik Abel (1802-1829) y Augustin-Louis Cauchy (1789-1857); los problemas de existencia y unicidad de las solución cobraron importancia.

Con el objetivo de desarrollar un fondo matemático previo al análisis de los sistemas

dinámicos, este capítulo lo enfocaremos a las ecuaciones diferenciales de una sola variable y hacia el final del capítulo abordaremos algunas ecuaciones para las cuales no es posible construir una solución analítica; se mostrará la necesidad de un enfoque alternativo para que al menos nos permita analizar de manera cualitativa las soluciones de una ecuación.

### 1.2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Se llama ecuación diferencial una ecuación en la que interviene una función incógnita y una o varias de sus derivadas. Este tipo de ecuaciones aparece en el estudio de numerosos fenómenos físicos, químicos y biológicos: desintegración radiactiva, crecimiento de poblaciones, reacciones químicas, problemas gravitatorios, etc.

En general una ecuación diferencial es una ecuación que contiene diferenciales o derivadas, es decir, una ecuación de la forma [2]

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

Si en la expresión aparece despejada la derivada de orden máximo

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}}\right)$$

Se dice que la ecuación diferencial está en forma normal o explícita. En caso contrario se dice que está en forma general o implícita.

Si la función incógnita depende de una variable independiente, la ecuación diferencial se conoce como ecuación diferencial ordinaria. Por ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x = \cos x$$

$$(x^2 + y^2)dx - 3ydy = 0$$

Si las funciones y sus derivadas dependen de más de una variable independiente a la ecuación se le conoce como ecuación diferencial parcial. Por ejemplo:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = xy \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

El orden de una ecuación diferencial es la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación. Por ejemplo:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

la ecuación diferencial es de tercer orden.

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

Se le considera solución a cualquier función  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ , que tenga derivadas continuas hasta el orden  $n$  en  $(a, b)$ , y que verifique la ecuación:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

Así que diremos que una función  $y = \varphi(x)$  es una solución de la ecuación diferencial, determinada en el intervalo  $(a, b)$  si la ecuación se satisface al sustituir en ella  $y$  y sus derivadas por  $\varphi(x)$  y sus derivadas respectivas.

Puesto que cuando realizamos la integración de una función tendremos una constante de integración, entonces la solución general de una ecuación diferencial ordinaria es una función  $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots)$  dependiente de una o varias constantes tal que cualquier solución de la ecuación diferencial se obtiene dando valores específicos a una o más de las constantes. Cuando damos valores concretos a todas las constantes de la solución general, surge una solución particular. Geométricamente, la solución general de una ecuación diferencial de primer orden representa una familia de curvas, denominadas curvas solución, una para cada valor concreto asignado a las constantes arbitrarias.

La determinación de las constantes que aparecen en la solución general se realiza a partir de las condiciones iniciales del problema. Las condiciones iniciales del problema son los valores que adquiere la función solución o sus derivadas en determinados puntos.

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una ecuación de la forma  $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ , donde  $F$  es una función que depende de las variables  $x$  e  $y$ . Esta clase de ecuaciones diferenciales son de las más sencillas (en estructura), y su resolución se puede realizar utilizando diversas técnicas. Por ejemplo, para una ecuación diferencial de primer orden.

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

Una condición inicial se expresará en la forma

$$y(x_0) = y_0$$

en consecuencia,  $y = \varphi(x)$  es solución si  $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$  para todo valor de  $x \in (a, b)$  con  $x_0 \in (a, b)$ , y  $\varphi(x_0) = y_0$ .

### 1.2.1. Ecuaciones Separables

Una ecuación diferencial  $y' = f(x, y)$  de primer orden (donde  $y' = \frac{dy}{dx}$ ), se dice que es separable si puede escribirse en la forma

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

donde  $M(x)$  es una función continua que sólo depende de  $x$  y  $N(y)$  es una función continua que sólo depende de  $y$ . Para resolver este tipo de ecuaciones se utiliza el procedimiento de separación de variables, que consiste en situar todos los términos que contienen  $x$  a la izquierda (o la derecha) del signo de igualdad, y todos los términos que contienen  $y$  en el lado contrario. A continuación se integran ambos miembros de la igualdad, cada uno respecto de la variable correspondiente. En consecuencia, la solución viene dada por [3]

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

en la que  $C$  es una constante arbitraria.

### 1.2.2. Ecuaciones Lineales

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es toda ecuación que se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

donde  $P$  y  $Q$  son funciones continuas de  $x$ .

La resolución de este tipo de ecuaciones se consigue utilizando la técnica de los factores integrantes. Donde se multiplica la ecuación diferencial por un factor integrante adecuado para así llevarla a una forma integrable [4]. Un factor integrante es una función  $\mu(x)$  tal que al multiplicarla por el lado izquierdo de la ecuación se obtiene la derivada del producto  $\mu(x)y$ , es decir

$$\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \frac{d[\mu(x)y]}{dx}$$

El factor integrante es una función  $\mu$  de la forma:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Una vez encontrada la función  $\mu$ , al integrar ambos miembros de la ecuación se obtiene

$$y = \frac{\int \mu(x)Q(x)dx + C}{\mu(x)}$$

en consecuencia la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$$

Hay ecuaciones no lineales que se transforman, mediante una sustitución adecuada, en una ecuación lineal. Entre estas ecuaciones debemos destacar la ecuación diferencial de Bernoulli, que puede escribirse como [5]

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

Esta ecuación es lineal si  $n = 0$  y de variables separables si  $n = 1$ . Para otros valores de  $n$ , el cambio de variable  $z = y^{1-n}$  transforma la ecuación anterior en la siguiente ecuación lineal:

$$z' + (1 - n)P(x)z = (1 - n)Q(x)$$

### 1.2.3. Ecuaciones Exactas

Dentro de las ecuaciones diferenciales de primer orden se encuentran las ecuaciones diferenciales de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.1}$$

Se dice que es una ecuación diferencial exacta si existe una función  $f$  de dos variables  $x$  e  $y$ , con derivadas parciales continuas, tal que [3]

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

la solución general de la ecuación es  $f(x, y) = C$ .

No toda ecuación diferencial es exacta. Si  $M$  y  $N$  tienen derivadas parciales continuas en un disco abierto entonces la ecuación diferencial  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  es exacta si y solamente si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Debemos hacer notar que la exactitud es una condición extremadamente frágil, ya que pequeñas alteraciones en una ecuación exacta pueden hacer que se pierda dicha propiedad. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$(xy^2 + x)dx + yx^2dy = 0$$

es exacta, pero si dividimos por  $x$ , entonces la ecuación resultante

$$(y^2 + 1)dx + xydy = 0$$

## CAPÍTULO 1. SISTEMAS DINÁMICOS

---

ya no es exacta. Lo que indica que en algunos casos podemos, mediante una multiplicación convertir una ecuación diferencial de la forma (1.1) en una ecuación exacta.

Por ejemplo:

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = 0 \quad (1.2)$$

en este caso tenemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y$$

dado que  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$  la ecuación no es exacta. Para ver que no es posible resolverla por el procedimiento antes descrito, trátase de encontrar una función  $\psi$  tal que [4]

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 3xy + y^2 \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = x^2 + xy \quad (1.3)$$

Al integrar la primera ecuación (1.3) da

$$\psi(x, y) = \frac{3}{2}x^2y + xy^2 + h(y) \quad (1.4)$$

en donde  $h$  es una función arbitraria sólo de  $y$ . Para poder satisfacer la segunda de las ecuaciones (1.3), a partir de la (1.4) se calcula  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$  y se iguala a  $N(x, y)$ , con lo que se obtiene

$$\frac{3}{2}x^2 + 2xy + h'(y) = x^2 + xy$$

o bien

$$h'(y) = -\frac{1}{2}x^2 - xy \quad (1.5)$$

Dado que el segundo miembro de la ecuación (1.5) depende de  $x$  y de  $y$ , es imposible despejar a  $h(y)$ . Por lo tanto, no existe  $\psi(x, y)$  que satisfaga las dos ecuaciones (1.3).

### 1.2.4. Ecuaciones Homogéneas

Una función  $z = f(x, y)$  se dice que es homogénea de grado  $n$  si

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

donde  $n$  es un número real.

Una ecuación diferencial homogénea es cualquier ecuación diferencial que se puede escribir en la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

donde  $M$  y  $N$  son funciones homogéneas del mismo grado. La ecuación anterior puede escribirse como

$$y' = F(x, y)$$

donde la función  $F$  satisface  $F(tx, ty) = F(x, y)$ . Este tipo de ecuaciones diferenciales se convierten en ecuaciones separables tras un cambio de variables [3]. Concretamente si  $y' = F(x, y)$  es una ecuación homogénea, entonces el cambio de variable  $y = vx$ , donde  $v$  es una función derivable de  $x$ , transforma la ecuación anterior en una nueva ecuación diferencial en las variables  $x$  y  $v$  que es separable [5].

### 1.3. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Además de las ecuaciones diferenciales de una variable existen los sistemas de ecuaciones diferenciales donde se resuelven dos o más ecuaciones diferenciales. Los sistemas de ecuaciones diferenciales también pueden clasificarse en lineales y no lineales y de primer orden o de orden superior. Pero en esta situación merece hacerse una consideración ya que *“todo sistema de orden superior a dos puede transformarse en uno de orden uno mediante la simple redefinición y agregado de variables”* [6].

Por ejemplo:

El movimiento de una masa puntual acoplada a un resorte ideal que sigue la ley de Hooke y que oscila sobre su eje  $x$ . De la segunda ley de Newton y la ley de Hooke tenemos

$$F_x = \ddot{x} = -kx \tag{1.6}$$

con

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \tag{1.7}$$

la dinámica del sistema se puede expresar como ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\frac{k}{m}x \\ \dot{x} &= v \end{aligned} \tag{1.8}$$

donde nuestras variables de estado son  $x$  y  $v$ , donde  $x = u$  y  $v = w$ . Las ecuaciones (1.6) y (1.7) se reducen a

$$\dot{u} = f(u, w)$$

$$\dot{w} = g(u, w)$$

En consecuencia, parte del tratamiento de sistemas de ecuaciones diferenciales puede enfocarse en los sistemas de primer orden sin pérdida de generalidad. Un sistema de ecuaciones diferenciales, sujetas a condiciones iniciales, adquiere la forma [2]

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Así, si cada una de las funciones  $f_1, f_2, \dots, f_n$  es lineal en las variables dependientes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  entonces el sistema es lineal de primer orden. Su estructura general es:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned}$$

El cual se puede expresar en forma matricial como

$$X' = AX + F \tag{1.9}$$

donde:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{bmatrix}$$

La solución general de este sistema no homogéneo se puede expresar como:

$$X = X_p + X_c$$

donde  $X_p$  es una solución particular de  $X' = AX + F$  y  $X_c$  es la solución del sistema homogéneo formado por  $X' = AX$ , cuando las funciones  $f_i(t)$  no son tomadas en cuenta ( $F = 0$ ). Esta es una generalización del caso de una ecuación diferencial individual. En primer lugar se obtendrá  $X_c$ , la solución complementaria, para luego tratar el caso más general, cuando el sistema no es homogéneo.

## 1.4. Solución de sistemas lineales

Por similitud al caso de ecuaciones diferenciales ordinarias  $y' = ay$ , la solución para el sistema  $\vec{y}' = A\vec{x}$  es  $\vec{y} = e^{At}\vec{x}_0$  donde  $\vec{x}_0 = \vec{x}(0)$ , recordemos que [5]

$$e^{At} = I + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots + A^n \frac{t^n}{n!} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i$$

En el caso de una ecuación diferencial lineal de primer orden  $x' = ax + f(t)$  (donde  $a$  es una constante) la solución general está dada por:

$$x = x_c + x_p = ce^{at} + e^{at} \int_{t_0}^t e^{-as} f(s) ds$$

Para un sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, se puede demostrar que la solución general de  $X' = AX + F$  (donde  $A$  es una matriz de constantes) es:

$$X = X_c + X_p = e^{At}C + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As} F(s) ds$$

La construcción de soluciones de sistemas se pueden generalizar en algunos de los casos partiendo de las conocidas en EDO's (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias). Continuando por ejemplo  $\dot{y} = ay + b$  o su equivalente  $\vec{y}' = A\vec{x} + \vec{b}$ .

Otra forma de construir la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo, es resolviendo directamente el sistema  $X' = AX$  con ayuda de la información que brindan los valores propios de la matriz y sus correspondientes vectores propios.

Por analogía del sistema, sabemos que la solución del sistema es de la forma:

$$\vec{x} = e^{\lambda t} \cdot \vec{v}$$

donde tenemos que

$$\vec{x}' = \lambda e^{\lambda t} \cdot \vec{v} \quad A e^{\lambda t} \cdot \vec{v} - \lambda e^{\lambda t} \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - I\lambda) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

La construcción de la solución para (1.2) con  $F = 0$  se reduce a un problema de eigenvalores y eigenvectores.

Se sabe que los valores propios de la matriz cuadrada  $A$  son los ceros del polinomio característico. Es decir, del polinomio:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

En este análisis jugará un papel fundamental, tanto el signo de los valores propios, como el hecho de que sean diferentes o repetidos.

**Teorema 1.4.1** Sean  $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{bmatrix}$ , ...,  $\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$

*solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo. Entonces los vectores son linealmente independientes en un intervalo  $I$  si y sólo si el wronskiano*

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \neq 0$$

Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son un conjunto linealmente independiente de soluciones (llamado también conjunto fundamental de soluciones). Entonces la solución general del sistema es:

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n$$

Si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son valores propios reales y distintos de la matriz  $A$ , y  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  los vectores propios correspondientes. Entonces la solución general del sistema lineal homogéneo  $X' = AX$  es

$$X = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n v_n e^{\lambda_n t}$$

O en forma matricial la solución general del sistema homogéneo la podemos expresar como:

$$\vec{X}(t) = M(t) \cdot \vec{C}$$

donde  $M$  se llama Matriz Fundamental (no singular); y  $\det M \neq 0$

$$\vec{X}'(t) = M'(t) \cdot \vec{C}(t) = A \cdot \vec{x}(t) = A \cdot M \cdot \vec{C}$$

$$M'(t) = A \cdot M(t)$$

Para la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo, con condiciones iniciales

$$\vec{X}(t_o) = \vec{X}_o$$

A partir de las condiciones iniciales tendremos que

$$\vec{X}(t_o) = M(t_o) \cdot \vec{C} \quad \vec{C} = M^{-1}(t_o) \cdot \vec{X}_o$$

La solución general del sistema homogéneo a partir de las condiciones iniciales es

$$\vec{X}(t) = M \cdot M^{-1}(t_o) \cdot \vec{X}_o$$

Ahora analizaremos la solución de un sistema no homogéneo de la forma  $X' = AX + F$ , la solución del sistema es  $X = X_c + X_p$ , donde  $X_p$  es una solución particular de  $X' = AX + F$  y  $X_c$  es la solución del sistema homogéneo asociado formado por  $X' = AX$ .

Para encontrar la solución de un sistema no homogéneo se tiene que calcular la  $\vec{X}_c(t)$  que corresponde al sistema homogéneo y después encontrar una solución particular  $\vec{X}_p(t)$  del sistema no homogéneo, de modo que ahora la tarea es encontrar  $X_p$ .

Tenemos que

$$M'(t) = A \cdot M(t) \quad \vec{X}_p' = A \cdot X_p(t) + F(t)$$

$$\vec{X}_c(t) = M(t) \cdot \vec{C} \quad \vec{X}_p(t) = M(t) \cdot \vec{U}(t)$$

$$\vec{X}_p'(t) = M'(t) \cdot \vec{U}(t) + M(t) \cdot \vec{U}'(t)$$

Calculando  $U(t)$  obtenemos que es

$$\vec{U}(t) = \int_{t_o}^t M^{-1}F(t) dt$$

La solución particular  $X_p$  para el sistema no homogéneo es

$$X_p(t) = M(t) \int_{t_o}^t M'(t)F(t) dt$$

La solución general de nuestro sistema no homogéneo es:

$$\vec{X}(t) = M \cdot M^{-1}(t_o) \cdot \vec{X}_o + M(t) \int_{t_o}^t M'(t)F(t) dt$$

### 1.5. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales No Lineales

En distintas ramas de la ciencia como en física, en la ingeniería y biología se utilizan los sistemas no lineales para modelar por ejemplo circuitos eléctricos, sistemas mecánicos, procesos químicos, etc. La mayoría de los problemas físicos son implícitamente no lineales en su naturaleza, ejemplos en física de sistemas lineales son relativamente raros. Las ecuaciones no lineales son difíciles de resolver y dan origen a interesantes fenómenos como la teoría del caos [7].

Los sistemas no lineales son sistemas cuyas ecuaciones de evolución en el tiempo no son lineales y no satisfacen el principio de superposición lineal de las soluciones.

Las variables dinámicas (velocidad, posición, aceleración, presión, razón de crecimiento, etc) aparecen en forma no lineal

$$y^n = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$f$ : función no lineal de las variables involucradas

Empezaremos por mostrar un ejemplo no lineal, la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$(y'')^2 - y^2 = 0$$

tiene como soluciones

$$y_1 = e^x$$

$$y_3 = \cos x$$

$$y_2 = e^{-x}$$

$$y_4 = \sin x$$

La combinación lineal no es solución de la ecuación diferencial.

$$y = c_1 e^x + c_3 \cos x + c_2 e^{-x} + c_4 \sin x$$

Los sistemas no lineales son mucho más difíciles de analizar y a menudo exhiben un fenómeno conocido como caos, con comportamientos totalmente impredecibles. Las soluciones analíticas para sistemas no lineales son muy raras, por lo que se usan métodos numéricos, teoría de perturbaciones, análisis cualitativos (geométrico) para entender las soluciones de estos sistemas. Por la complejidad de varios de estos sistemas, se analizan sistemas lineales como una aproximación de los sistemas no lineales [8].

Un sistema dinámico es un sistema cuyo estado evoluciona con el tiempo. El comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones; de esta forma se puede elaborar modelos que buscan

representar la estructura del mismo sistema.

El sistema dinámico se dice discreto si el tiempo no es continuo; éstos son modelados como relaciones recursivas, tal como la ecuación logística:

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t)$$

donde  $t$  denota los pasos discretos del tiempo y  $x$  es la variable que cambia con éste.

Si el tiempo es medido en forma continua, el sistema dinámico continuo resultante es expresado como una ecuación diferencial ordinaria; por ejemplo:

$$\frac{dx}{dt} = ax(1 - x)$$

donde  $x$  es la variable que cambia con el tiempo  $t$ . La variable cambiante  $x$  es normalmente un número real, aunque también puede ser un vector en  $R^n$ .

Para describir al sistema en un tiempo  $t$  se necesitan  $N$  variables  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ . Al arreglo de  $N$  variables  $\{x_i; i = 1, \dots, N\}$ , se le conoce como vector de estado:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

La colección de vectores EDO's forman un espacio de EDO's de  $n$ -dimensional. La regla de evolución puede representarse por medio de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1[X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \dots, X^{(n)}(t)] \\ &\vdots \\ \dot{x}_N &= F_N[X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \dots, X^{(n)}(t)] \end{aligned}$$

Dependiendo de la forma que tenga la regla de evolución puede ser un mapa o flujo.

$$X_{t+1} = F(X_t) \Rightarrow \text{Mapa, } t \text{ discreto}$$

$$\dot{X}(t) = F(X(t)) \Rightarrow \text{Flujo, } t \text{ continuo}$$

Existen diferentes sistemas lineales y no lineales, de los cuales es muy difícil poder encontrar soluciones. Por los que se recurren a métodos geométricos y cualitativos ya que es mucho más fácil entender el comportamiento del sistema que hallar su solución general. Algunos sistemas conocidos son el oscilador de Van der Pol, la ecuación de

## CAPÍTULO 1. SISTEMAS DINÁMICOS

---

Duffing, el sistema de Lorenz, el sistema de Tirón, etc.

En 1963 Edward Lorenz trabajaba en unas ecuaciones, las ecuaciones mundialmente conocidas como ecuaciones de Lorenz, que esperaba predijeran el tiempo en la atmósfera, y trató mediante los ordenadores ver gráficamente el comportamiento de sus ecuaciones. Los ordenadores de aquella época eran muy lentos, por lo que se dice que mientras Lorenz fue a tomar un té mientras el ordenador hacía los cálculos, y cuando volvió se encontró con una figura que ahora se conoce como atractor de Lorenz, donde se observó caos por primera vez [9].

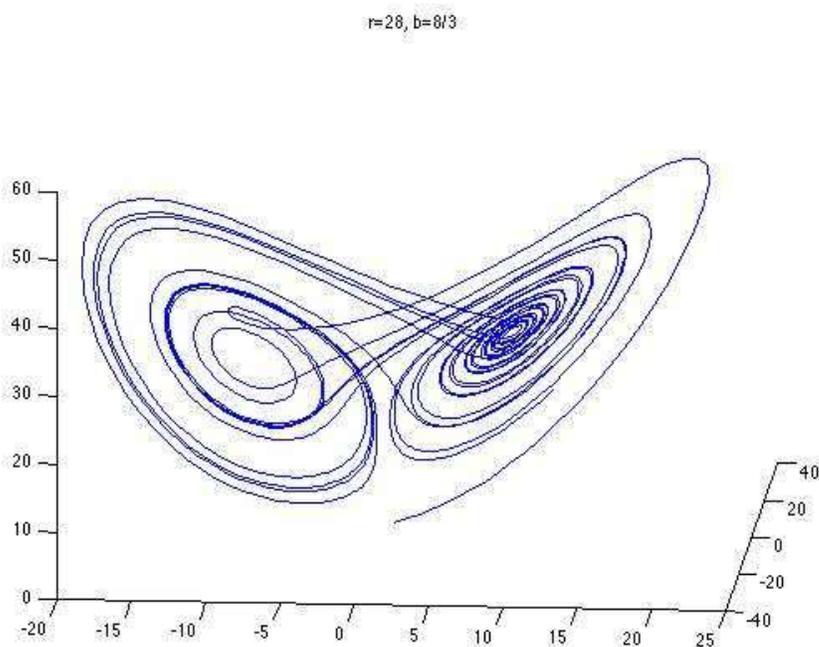


Figura 1.1: Atractor de Lorenz.

El primer sistema de ecuaciones bien caracterizado que exhibía comportamiento caótico fue el sistema de ecuaciones propuesto por Lorenz:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{1.10}$$

donde  $\sigma$  es el número de Prandtl (viscosidad/conductividad térmica),  $r$  es el número de Rayleigh (John Strutt) (diferencia de temperatura entre base y tope) y  $b$  es la razón entre la longitud y altura del sistema.

Lorenz observó dos cosas fundamentales que ocurrían en su ecuación:

- Cualquier diferencia en las condiciones iniciales antes de los cálculos, incluso infinitesimal, cambiaba de forma dramática los resultados. Tan sólo se podía predecir el sistema por cortos períodos. Llevando eso a la meteorología, suponía lo que se llamó efecto mariposa, hipersensibilidad a las condiciones iniciales.
- A pesar de lo anterior, la impredecibilidad del sistema, lejos de ser un comportamiento al azar, tenía una curiosa tendencia a evolucionar dentro de una zona muy concreta del espacio fase, situando una especie de pseudocentro de gravedad de los comportamientos posibles.

Lorenz descubrió que su sistema contenía una dinámica extremadamente errática. Las soluciones oscilaban irregularmente sin llegar a repetirse, aunque lo hacían en una región acotada del espacio de fases. Vio que las trayectorias rondaban siempre alrededor de lo que ahora se define como atractor extraño.

La década de 1970 fue el boom de la Teoría del Caos. En 1971 David Ruelle y Floris Takens propusieron una nueva teoría para la turbulencia de fluidos basada en un atractor extraño. Años después el ecólogo teórico Robert May en 1976 encontró ejemplos de caos en dinámica de poblaciones usando la ecuación logística discreta. A continuación llegó el más sorprendente descubrimiento de todos de la mano de Feigenbaum. Él descubrió que hay un conjunto de leyes universales concretas que diferencian la transición entre el comportamiento regular y el caos, por tanto, es posible que dos sistemas evolucionen hacia un comportamiento caótico igual [10].



# Capítulo 2

## Espacios Fase

### 2.1. Introducción

Como vimos en la primera parte de la sección anterior una manera de entender el comportamiento de una ecuación, la planteamos partiendo de la variable y su derivada. En este capítulo veremos cómo analizar sistemas de ecuaciones a partir de métodos de álgebra lineal para tener un problema de eigenvalores y vectores propios, a partir de esto tenemos información para poder determinar el tipo de dinámica y estabilidad que representa nuestro sistema. Los diferentes tipos de dinámicas que podemos encontrar nos la definen el tipo de eigenvalores que tenga el sistema; resulta natural interesarse por la geometría de sus órbitas y el bosquejo del diagrama de cada trayectoria. Por lo que es de gran importancia analizar estos sistemas con su espacio fase.

### 2.2. Sistemas Autónomos y No Autónomos

Los sistemas dinámicos son sistemas cuyos parámetros internos (variables de estado) siguen una serie de reglas temporales. Se llaman sistemas porque están descritos por un conjunto de ecuaciones (sistema) y dinámicos porque sus parámetros varían con respecto a alguna variable que generalmente es el tiempo [11].

Un sistema dinámico es autónomo si está representado por una ecuación diferencial ordinaria autónoma o no forzada de la forma

$$\dot{X} = F(x) \tag{2.1}$$

mientras que si al sistema dinámico lo modela la EDO no-autónoma o forzada

$$\dot{X} = F(x, t) \tag{2.2}$$

el sistema dinámico es no autónomo. La diferencia entre sistema autónomo y no autónomo radica en que, el sistema autónomo no contiene ningún estímulo externo

## CAPÍTULO 2. ESPACIOS FASE

---

que force el comportamiento natural de la dinámica del sistema, mientras que el sistema no autónomo sí (aparece explícitamente  $t$ ).

Un sistema es invariante en el tiempo si éste no depende explícitamente del tiempo, se puede concluir que todo sistema autónomo es invariante en el tiempo. En general, un sistema dinámico es invariante en el tiempo si

$$x(0) = x(\delta) = x_0 \Rightarrow x(t) = x(t + \delta) \quad \forall t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$$

es decir, para que el sistema sea invariante en tiempo dos trayectorias que pasen por el mismo punto en diferentes tiempos tendrán la misma evolución con un desplazamiento en el tiempo.

### 2.3. Estabilidad del Sistema

En principio queremos calcular explícitamente todas las soluciones para cada ecuación diferencial o sistema de ecuaciones diferenciales, pero no es posible para la gran mayoría de ellas, por lo que buscamos un comportamiento cualitativo en lugar de resolver las ecuaciones diferenciales explícitamente. Un fenómeno cualitativo de gran interés es la noción de estabilidad de cierto estado o solución de un sistema de ecuaciones diferenciales [12].

La forma de visualizar el comportamiento de las variables de estado de un sistema dinámico puede ser en forma de serie de tiempo (gráfica de una variable de estado contra tiempo), o en forma de espacio fase. El **espacio fase** de un sistema  $n$ -dimensional  $\dot{X} = F(x)$  es el espacio donde todos los posibles estados de un sistema son representados, cada parámetro del sistema se representa como un eje de un espacio multidimensional y cada punto del espacio representa cada posible estado de las variables de sistema. En este tipo de representación el tiempo se vuelve un parámetro implícito; como ejemplo se muestra la dinámica del péndulo simple amortiguado Figura 2.1 una serie de tiempo (izquierda) y un plano fase (derecha) de un sistema dinámico.

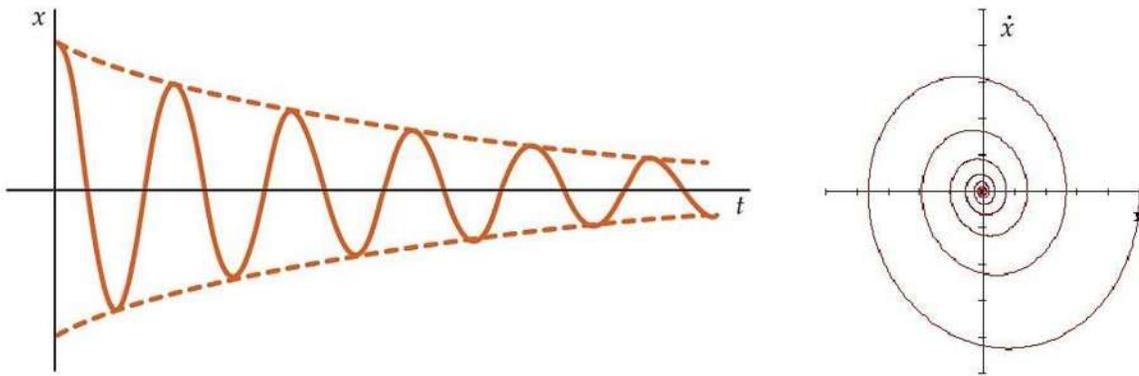


Figura 2.1: Serie de tiempo (izquierda) y plano fase (derecha) de un sistema dinámico.

El espacio fase está descrito por un campo vectorial  $F$  que rige el recorrido de las variables del sistema  $x(t)$  en el tiempo, el recorrido de estas variables recibe el nombre de trayectoria.

Se dice que una singularidad del espacio fase es *estable*, *sumidero* o *atractor* si toda trayectoria que comienza cerca de ella se aproxima a ella conforme el tiempo transcurre, todas las trayectorias se acercan al punto fijo [13].

La importancia de la estabilidad de las singularidades radica en que ésta determina la estabilidad del sistema en el que se presenten las singularidades. En sistemas lineales las singularidades sólo pueden ser puntos, los cuales se conocen como puntos fijos; en cambio los sistemas no lineales pueden presentar puntos fijos, ciclos límite y regiones llamadas atractores extraños.

## 2.4. Caracterización del Espacio Fase

Los puntos  $x^*$  para las cuales  $x^* = F(x^*) = 0$  son llamadas puntos fijos o críticos; en estos puntos el campo vectorial que determina la dirección de las trayectorias en el espacio fase es nulo. Los eigenvalores  $\lambda$  del sistema guardan una estrecha relación con los puntos fijos ya que determinan la forma en que las trayectorias interactúan con el punto fijo [14]. En base al comportamiento de las trayectorias alrededor de los puntos fijos, éstos pueden ser:

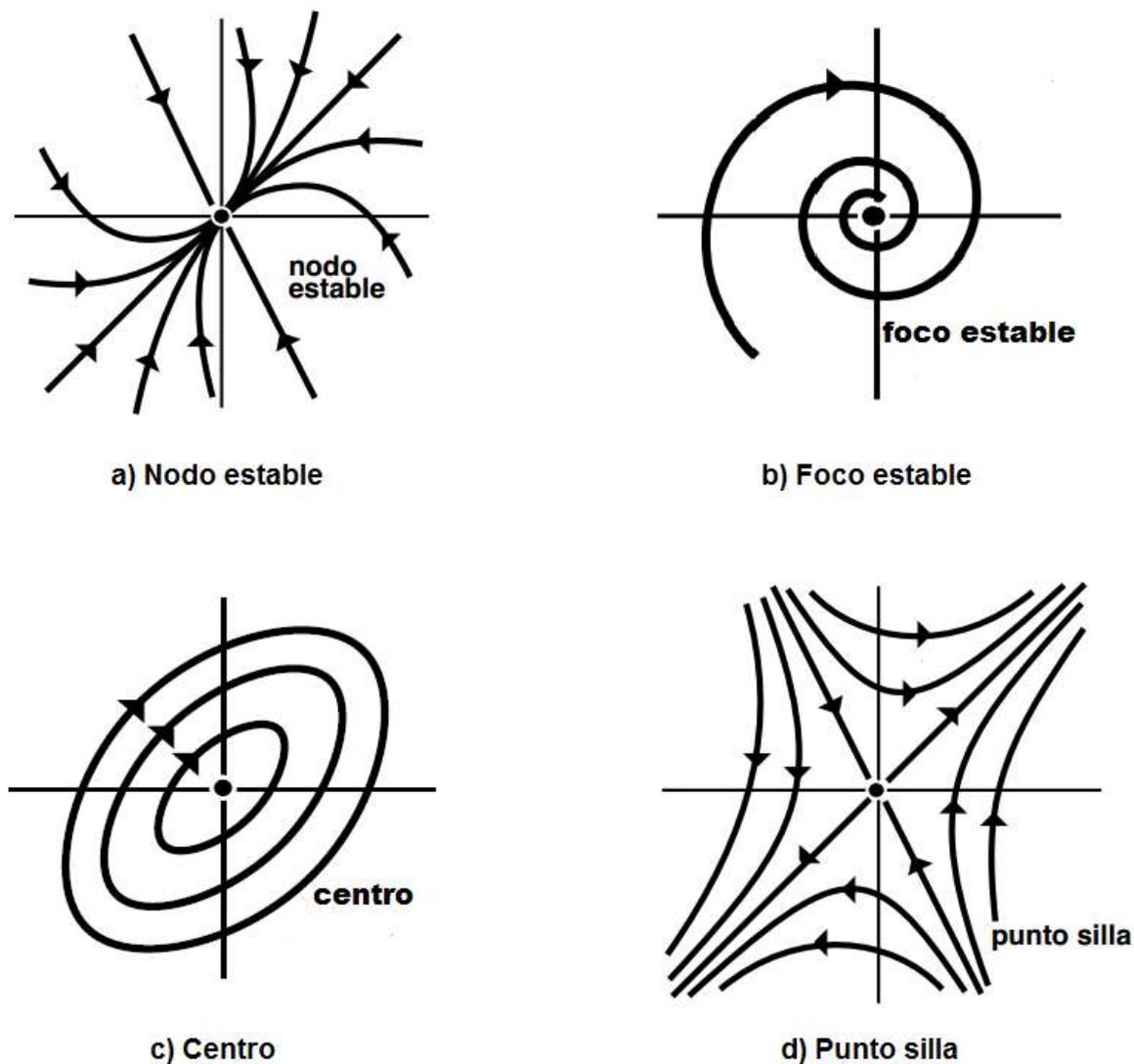


Figura 2.2: Tipos de dinámica asociadas a los diferentes puntos fijos.

- **Nodo:** es un punto tal que en sus proximidades todas las órbitas entran a él. Es asintóticamente estable si las órbitas están direccionadas al punto lo que sucede si los eigenvalores del sistema son reales, negativos y distintos entre sí, ver Figura 2.2 a) En cambio, si las trayectorias se alejan del nodo, éste es inestable y los eigenvalores del sistema son reales, positivos y diferentes entre ellos.
- **Foco:** Este punto es asintóticamente estable cuando todas las órbitas en sus proximidades tienden a él pero no entran en él; para que esto suceda los eigenvalores del sistema son complejos conjugados con parte real negativa. Los focos inestables se producen cuando las trayectorias tienden a él en  $t \rightarrow -\infty$  y corresponden a

sistemas con eigenvalores complejos conjugados con parte real positiva, ver Figura 2.2 b).

- Centro: Es tal que en sus proximidades todas sus órbitas son cerradas. Ninguna órbita entra y ninguna sale. Este punto es neutralmente estable y se presenta cuando los eigenvalores del sistema son imaginarios puros, ver Figura 2.2 c).
- Punto Silla: Las trayectorias inicialmente tienden al punto pero después divergen de él. Este tipo de punto es inestable y se da cuando existen eigenvalores de un sistema que son distintos y de signo opuesto, ver Figura 2.2 d).

Si se tiene un sistema dinámico lineal  $\dot{X} = AX$ , es fácil conocer qué tipo de punto fijo presenta dicho sistema; simplemente se calculan los eigenvalores  $\lambda$  a partir de la ecuación característica del sistema  $\det(A - \lambda I) = 0$  y se analiza la relación que hay entre los eigenvalores.

Los eigenvalores de una matriz están dados por su ecuación característica  $\det(A - \lambda I) = 0$  que para 2 dimensiones es

$$\lambda^2 + \lambda \text{Tr}(A) + \det(A) = 0 \tag{2.3}$$

entonces:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr}(A) \pm \sqrt{[\text{Tr}(A)]^2 - 4\det(A)}}{2} \tag{2.4}$$

por lo que los eigenvalores dependen de la traza y del determinante de la matriz  $A$ .

Podemos hacer un diagrama general por medio del discriminante de las soluciones de la ecuación característica, graficando  $\text{Tr}(A)$  vs  $\det(A)$ , donde tenemos las relaciones  $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$  y  $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$

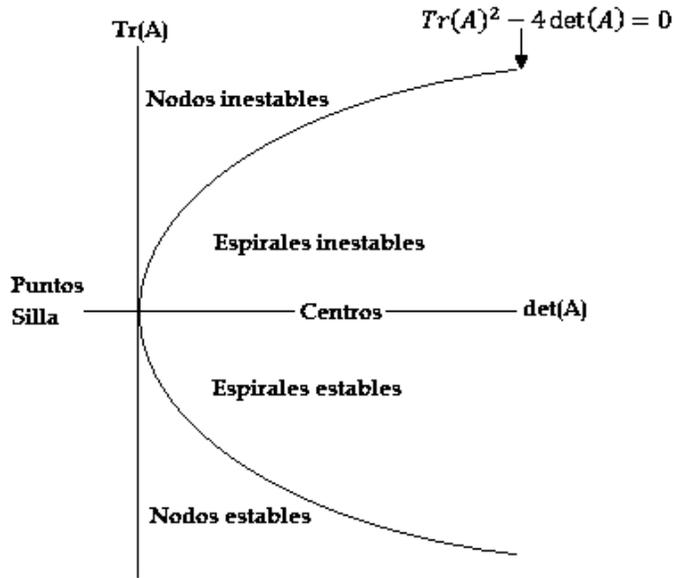


Figura 2.3: Clasificación de puntos fijos.

de la figura 2.3 podemos observar que

- Si el  $\det(A) < 0$ , los eigenvalores son reales y con signo opuesto tenemos un punto silla.
- Si el  $\det(A) > 0$ , y los eigenvalores son reales con el mismo signo tenemos nodos estables o inestables.
- Si el  $\det(A) > 0$ , y los eigenvalores son complejos conjugados tenemos centros o espirales estables o inestables.
- Si el  $\det(A) = 0$ , al menos uno de los eigenvalores es cero y el origen no es un punto fijo aislado, es toda una línea de puntos fijos o un plano de puntos fijos si  $A = 0$ .

Los nodos satisfacen  $Tr(A)^2 - 4\det(A) > 0$  y las espirales satisfacen  $Tr(A)^2 - 4\det(A) < 0$ . La parábola  $Tr(A)^2 - 4\det(A) = 0$  es el borde entre nodos y espirales, los nodos y nodos degenerados viven en esta parábola. La estabilidad de los nodos y las espirales son determinadas por la  $Tr(A)$ , cuando  $Tr(A) < 0$ , ambos eigenvalores son negativos y el punto fijo es estable es mayor que cero para puntos inestables. Los centros estables viven en la línea  $Tr(A) = 0$ , donde los eigenvalores son puramente imaginarios [15].

Un ciclo límite es una trayectoria aislada cerrada, es decir, no existen otras trayectorias cerradas en la vecindad de ésta y por lo tanto las trayectorias vecinas a ésta se mueven en espiral acercándose o alejándose del ciclo límite.

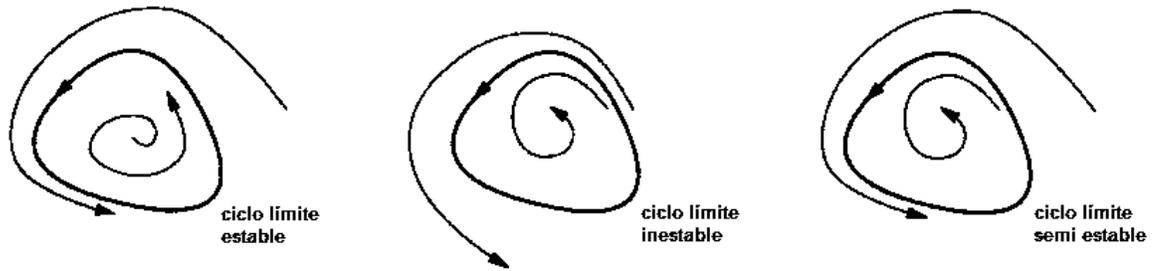


Figura 2.4: Ciclos límite.

Si todas las trayectorias vecinas se acercan al ciclo, entonces éste es estable. El ciclo es inestable si las trayectorias vecinas se alejan del ciclo; existen casos extraños donde se dice que el ciclo es semi estable y se da cuando algunas trayectorias se alejan del ciclo y otras tienden a él [16].

Los ciclos límite sólo pueden ocurrir en sistemas no lineales; es imposible que sucedan en sistemas lineales. Aunque un sistema lineal puede tener orbitas cerradas, éstas no son aisladas y corresponden a la dinámica causada por un punto fijo tipo centro.

### 2.4.1. Ejemplos

Veremos algunos ejemplos de la estabilidad que tienen algunos sistemas.

#### 1. Problema de Volterra $x$ =conejos, $y$ =zorros

Pretende describir la evolución de la población  $x$  de una especie (presas) que es cazada por otra especie (predadores) cuya población es  $y$ .

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - xy \\ \dot{y} &= -y + xy\end{aligned}$$

- Puntos fijos

$$x_1 = (0, 0) \qquad x_2 = (1, 1)$$

- Estabilidad en  $x_1$

La matriz es:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicando la teoría de solución de sistemas lineales vista en el capítulo 1, calculando su polinomio característico y sus eigenvalores son:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$$

Luego es un silla, las direcciones principales son los ejes  $x$  e  $y$  del plano.

- Estabilidad en  $x_2$

La matriz es:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico y sus eigenvalores son:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Luego es un centro cuando  $\delta\lambda > 0 \Rightarrow \delta j$ . La curva gira en sentido contrario a las manecillas del reloj.

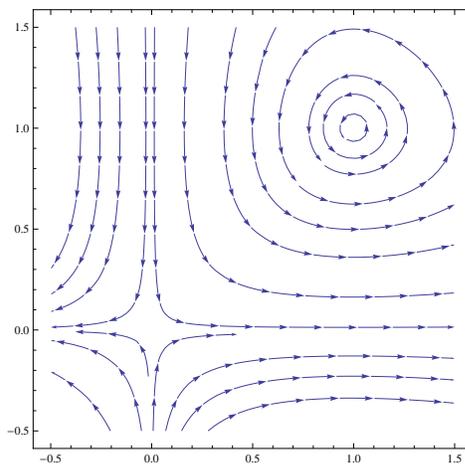


Figura 2.5: Dinámica Silla y Centro.

Veremos algunos sistemas que físicamente no representan nada, pero veremos la dinámica que tienen cada uno de ellos.

2. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - 5y \\ \dot{y} &= x + 3y\end{aligned}$$

- Punto fijo

$$x_0 = (0, 0)$$

- Estabilidad en  $x_0$

La matriz es:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico y sus eigenvalores son:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm i$$

luego es un espiral inestable

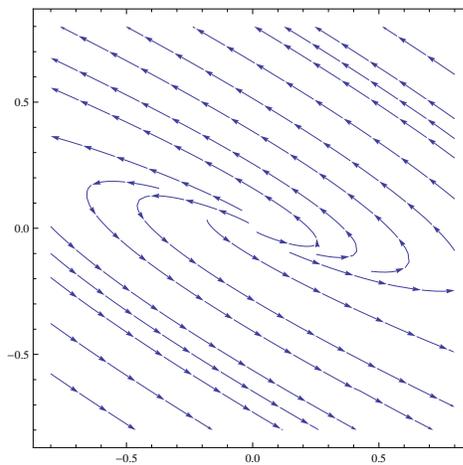


Figura 2.6: Dinámica Espiral Inestable.

3. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x + 2y \\ \dot{y} &= -2x - 2y\end{aligned}$$

- Punto fijo

$$x_0 = (0, 0)$$

- Estabilidad en  $x_0$

La matriz es:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico y sus eigenvalores son:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$$

es un punto silla

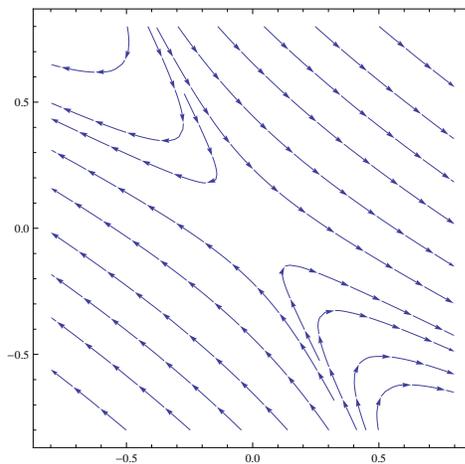


Figura 2.7: Dinámica Silla.

4. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y \\ \dot{y} &= 3x - 4y \end{aligned}$$

- Punto fijo

$$x_0 = (0, 0)$$

- Estabilidad en  $x_0$

La matriz es:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico y sus eigenvalores son:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$$

es un punto nodo estable

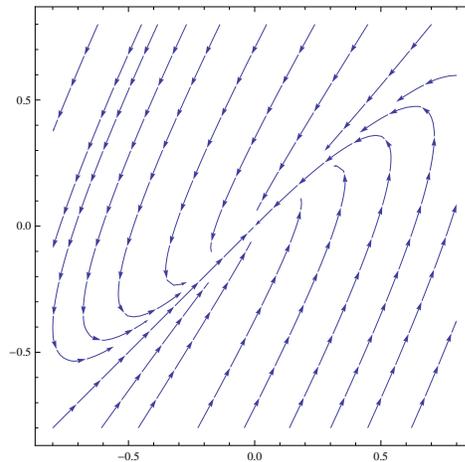


Figura 2.8: Dinámica Nodo Estable.

## 2.5. Teorema de Poincaré-Bendixson

El teorema de Poincaré-Bendixson es uno de los resultados más importantes que ha surgido en el análisis de sistemas no lineales. En resumidas cuentas este teorema dice que las posibilidades en el plano fase (espacio fase de un sistema bidimensional) son muy limitadas: si una trayectoria está confinada a una región cerrada y limitada que no contiene puntos fijos, entonces la trayectoria debe aproximarse a una órbita cerrada eventualmente (ciclo límite) [17].

**Teorema 2.5.1 (Poincaré-Bendixson)** *Supongamos que,*

- $R$  es un conjunto compacto del plano.
- $\dot{x} = f(x)$  es un sistema planar cuyo campo  $f$  es continuamente diferenciable y está definido sobre un conjunto abierto contenido en  $R$ .

- $R$  no contiene puntos de equilibrio del sistema.
- Existe una trayectoria  $C$  que está confinada en  $R$ , es decir que comienza en  $R$  ya permanece en  $R$  para todo tiempo futuro.

Entonces o bien  $C$  es una órbita cerrada, o bien tiende a una órbita cerrada cuando  $t \rightarrow \infty$ . En cualquier caso,  $R$  contiene una órbita cerrada.

Este teorema no aplica para sistemas tridimensionales o de mayor dimensión, cuyas órbitas pueden vagar sin patrón fijo por siempre dentro de una región limitada sin converger a un punto fijo u órbita cerrada, por lo que el teorema de Poincaré-Bendixson nos dice cuando puede aparecer un ciclo límite en el espacio de fase en 2 dimensiones. En algunos casos, las trayectorias son atraídas a un atractor extraño: un conjunto fractal cuyo movimiento es aperiódico y sensible a las condiciones iniciales del sistema. A este tipo de comportamiento se le conoce como caos, y se presenta para sistemas de orden  $n \geq 3$ .

Por ejemplo: Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -x + y(1 - x^2 - 2y^2)\end{aligned}$$

obsérvese que el origen es el único punto fijo del sistema. Para ello debemos construir una región anular en la cual podamos aplicar el teorema de Poincaré-Bendixson, Para ello calculamos la derivada de la función

$$V(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)}{2}$$

a lo largo de las soluciones del sistema, así

$$V'(x, y) = y^2(1 - x^2 - 2y^2)$$

Por lo tanto  $V(x, y) \geq 0$  para  $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$ , y  $V'(x, y) \leq 0$  para  $x^2 + y^2 > 1$ , cualquier solución que inicie en la región anular  $\frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 1$  permanecer en esta región anular para  $t \geq 0$ . Ya que el origen no está contenido en la cerradura de la región anular entonces es posible aplicar el teorema de Poincaré-Bendixson. Por lo tanto existe al menos una órbita periódica en la región anular.

## 2.6. Lema de Gronwall

Esta sección está dedicada a una notable desigualdad conocida como desigualdad de Gronwall que es de gran utilidad en muchas aplicaciones, de manera particular nos permite entender el comportamiento acotado de las soluciones, cuando estas tienen

determinadas características. La idea está basada en la integración de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden mediante un factor integrante.

El lema de Gronwall establece una cota superior para las funciones no negativas que puedan acotarse por una función lineal de su integral. Este lema es de gran utilidad para probar la continuidad y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias [18].

**Lema 2.6.1 (Lema de Gronwall)** Sean  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_0 \in I$  tales que:

$$0 \leq f(x) \leq A + B \int_{x_0}^x f(s) ds \quad \forall x \in I.$$

con  $A$  y  $B \geq 0$  constantes.

Entonces:

$$f(x) \leq A e^{B(x-x_0)}$$

**Demostración**

Sea  $G(x) = \int_{x_0}^x f(s) ds$ . Por la hipótesis se tiene que:

$$G'(x) - BG(x) \leq A$$

Luego, multiplicando ambos miembros por  $e^{-B(x-x_0)}$  se obtiene:

$$e^{-B(x-x_0)} G'(x) - B e^{-B(x-x_0)} G(x) \leq e^{-B(x-x_0)} A$$

que equivale a:

$$(e^{-B(x-x_0)} G(x))' \leq A e^{-B(x-x_0)}$$

Integrando entre  $x_0$  y  $x$ :

$$\int_{x_0}^x (e^{-B(s-x_0)} G(s))' ds \leq A \int_{x_0}^x e^{-B(s-x_0)} ds$$

$$e^{-B(x-x_0)} G(x) - G(x_0) \leq -\frac{A}{B} (e^{-B(x-x_0)} - 1)$$

Por como fue definida,  $G(x_0) = 0$ . Multiplicando ahora por  $e^{B(x-x_0)}$ :

$$G(x) \leq \frac{A}{B} (e^{B(x-x_0)} - 1)$$

Si reemplazamos la integral por  $G$  en la ecuación original:

$$f(x) \leq A + B \frac{A}{B} (e^{B(x-x_0)} - 1)$$

De donde se deduce que:

$$f(x) \leq A e^{B(x-x_0)}$$



# Capítulo 3

## Homologías y Sistemas de Ecuaciones

### 3.1. Introducción

El interés sobre la estructura y las consecuencias de las soluciones a las ecuaciones que describen soluciones interiores de estrellas estáticas y esféricamente simétricas ha sido una cuestión que ha estado presente hace siglos. Desde la época de Newton soluciones y su estudio para estos objetos astrofísicos se ha realizado. En el caso Relativista apenas unos meses después de la propuesta la teoría de la relatividad general de Einstein, Karl Schwarzschild [19] presenta una solución para una estrella de densidad constante, misma que es una de las soluciones a las ecuaciones de Einstein más conocidas. Las ecuaciones estelares y sus soluciones para el caso estático y esféricamente simétrico asociado a un fluido con presión isotrópica han sido abordadas por diferentes autores entre los que figuran Tolman, Oppenheimer y Volkoff, por quienes se conocen como ecuaciones de TOV [20,21]. Construir soluciones analíticas y físicamente aceptables para el sistema de TOV no es una tarea sencilla. Diferentes direcciones para lograr entender el sistema de TOV se han seguido entre las que figuran la desarrollada por Collins [20], en donde se analiza desde un punto de vista matemático, empleado teoría de grupos de Lie, Collins da respuesta y analiza cuales son los tipo de ecuaciones de estado que pueden admitir las ecuaciones de estructura estelar estáticas y esféricamente simétricas para el caso Newtoniano y relativista. Concluyendo que las ecuaciones de estado en cada caso coinciden con algunas de las empleadas por otros autores y cuya justificación está basada en argumentos físicos, es interesante notar cómo se manifiesta la compatibilidad entre ambos puntos de vista. Aquí realizamos una extensión del trabajo de Collins considerando que el sistema estelar de TOV es reemplazado por su equivalente con presiones anisotrópicas. Hasta donde conocemos este análisis no ha sido realizado.

### 3.2. Homologías

La determinación de homologías para los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias es equivalente a preguntarse bajo que transformación:  $P_\lambda : (x, y) \rightarrow (X, Y)$ , conocida como simetría, una ecuación diferencial puede tener la misma forma, es decir si tenemos la ecuación:

$$\frac{dx}{dy} = G(x, y) \quad (3.1)$$

y  $P_\lambda : (x, y) \rightarrow (X, Y)$  es una simetría, entonces el grupo de simetrías mapea soluciones del sistema (3.1) en otra solución de la ecuación que surge después del mapeo  $P_\lambda$  de la ecuación (3.1) y cuya ecuación adquiere la misma forma que (3.1), esto es  $\frac{dx}{dy} = G(x, y)$ .

Para el caso de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias la existencia de este tipo de simetrías es equivalente a construir soluciones del sistema [22].

$$\frac{du^k}{dx} = f^k(x, \mathbf{u}) \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

donde  $\mathbf{u} = (u^1, u^2, \dots, u^m)$ , es invariante bajo la acción del generador infinitesimal  $\mathbf{X} = \xi(x, \mathbf{u})(\partial/\partial x) + \eta^k(x, \mathbf{u})(\partial/\partial u^k)$ , si y sólo si las siguientes ecuaciones se satisfacen:

$$\frac{\partial \eta^k}{\partial x} + f^j \frac{\partial \eta^k}{\partial u^j} - f^k \frac{\partial \xi}{\partial x} - f^k f^j \frac{\partial \xi}{\partial u^j} = \xi \frac{\partial f^k}{\partial x} + \eta^j \frac{\partial f^k}{\partial u^j} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (3.2)$$

### 3.3. El Sistema Anisotrópico

El sistema estelar relativista que surge de las ecuaciones de Einstein al imponer las condiciones geométricas de estaticidad y simetría esférica para un fluido con presiones anisotrópicas es descrito por [23].

$$\frac{d}{dr} m = 4\pi r^2 \rho \quad (3.3)$$

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{(P_r + c^2 \rho)G(mc^2 + 4\pi P_r r^3)}{rc^2(rc^2 - 2Gm)} + \frac{2(P_t - P_r)}{r} \quad (3.4)$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{G(mc^2 + 4\pi r^3 P_r)}{r(rc^2 - 2Gm)} \quad (3.5)$$

donde  $P_r = P_r(r)$  denota la presión radial,  $P_t = P_t(r)$  la presión tangencial,  $\rho = \rho(r)$  la densidad y  $m = m(r)$  es la masa gravitacional dentro de la esfera de radio  $r$  y  $\Phi$

---

### CAPÍTULO 3. HOMOLOGÍAS Y SISTEMAS DE ECUACIONES

---

está relacionada con la función de corrimiento y también se puede interpretar como el potencial gravitacional newtoniano.

Para el análisis de la existencia de simetrías es conveniente reescribir la ecuación (3.3) mediante la regla de la cadena, en la forma

$$\frac{d}{dr}\rho(r) = \frac{-\frac{(P_r+c^2\rho)G(mc^2+4\pi P_r r^3)}{rc^2(rc^2-2Gm)} + \frac{2(P_t-P_r)}{r}}{\frac{dP_r}{d\rho}} \quad (3.6)$$

Aplicando las ecuaciones (3.2) para (3.3) y (3.6) tenemos

$$\left(\frac{d}{dm}\eta^2(m)\right) - \left(\frac{d}{dr}\xi(r)\right) = \frac{2\xi(r)}{r} + \frac{\eta^1(\rho)}{\rho} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\rho}\eta^1(\rho)\right)\rho - \left(\frac{d}{dr}\xi(r)\right)r &= \xi(r) \left(\frac{\partial}{\partial r}\ln\left(\frac{-\frac{(P_r+c^2\rho)G(mc^2+4\pi P_r r^3)}{rc^2(rc^2-2Gm)} + \frac{2(P_t-P_r)}{r}}{\frac{dP_r}{d\rho}}\right)\right) \\ &+ \eta^1(\rho) \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\ln\left(\frac{-\frac{(P_r+c^2\rho)G(mc^2+4\pi P_r r^3)}{rc^2(rc^2-2Gm)} + \frac{2(P_t-P_r)}{r}}{\frac{dP_r}{d\rho}}\right)\right) \\ &+ \eta^2(m) \left(\frac{\partial}{\partial m}\ln\left(\frac{-\frac{(P_r+c^2\rho)G(mc^2+4\pi P_r r^3)}{rc^2(rc^2-2Gm)} + \frac{2(P_t-P_r)}{r}}{\frac{dP_r}{d\rho}}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Un análisis de la primera de estas ecuaciones, notando que en la expresión a la derecha no tenemos ningún término que contenga  $m$  y además en el lado a la izquierda no hay término que dependan de  $\rho$ , entonces concluimos que

$$\eta^2(m) = am + \alpha \quad (3.9)$$

$$\eta^1(\rho) = b\rho \quad (3.10)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $\alpha$  son constantes de integración. Reemplazando (3.9) y (3.10) en la ecuación (3.7) obtenemos la forma para  $\xi(r)$  dada por

$$\xi(r) = \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{3}\right)r + \frac{C_1}{r^2} \quad (3.11)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones que satisface  $m(r)$  y  $P_r$  y luego de sustituir en la última de estas ecuaciones, agrupando todos los términos de un solo lado y ordenar

### CAPÍTULO 3. HOMOLOGÍAS Y SISTEMAS DE ECUACIONES

---

por términos que sean potencias de  $r$ , tenemos un polinomio de séptimo orden cuyos coeficiente están dados en orden decreciente por:

$$a_7 r^7 + a_6 r^6 + a_5 r^5 + a_4 r^4 + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

donde

$$a_i = a_i(\rho, m)$$

$$\begin{aligned} a_7 = & 3bPr_\rho^2\rho(\rho + 2Pr(\rho)) - 3Pr(\rho)b\rho(Pr(\rho) + \rho)Pr_{\rho,\rho} \\ & + Pr(\rho)Pr_\rho(2a\rho + 2Pr(\rho)a - 2b\rho - 5bPr(\rho)) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} a_6 = & b(-\rho(\rho + 2Pr(\rho))Pr_\rho^2 + Pr(\rho)(\rho + 2Pr(\rho))Pr_\rho \\ & + Pr(\rho)\rho(Pr(\rho) + \rho)Pr_{\rho,\rho})m + Pr(\rho)Pr_\rho\alpha(Pr(\rho) + \rho) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} a_5 = & -\rho Pr_\rho^2 + \rho(Pr(\rho) - Pt(\rho))Pr_{\rho,\rho} + \rho Pr_\rho Pt_\rho \\ & + Pr_\rho(Pr(\rho) - Pt(\rho)) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} a_4 = & -(b\rho Pr_\rho - 3b\rho^2 Pr_{\rho,\rho} + 2aPr_\rho\rho + 22bPr_\rho)Pr(\rho) - 21\rho Pr_\rho^2 \\ & - 24bPr_\rho Pt(\rho) - 24b\rho Pr_{\rho,\rho} Pt(\rho) + 24b\rho Pt_\rho + 21b_{\rho,\rho} Pr(\rho) \\ & + 2aPr_\rho Pr(\rho))m + 3Pr_\rho(Pr(\rho) + \rho)(4C_1\pi Pr(\rho) - \alpha) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} a_3 = & -3\rho Pr_\rho^2 + \rho(-\rho + 3Pr(\rho) - 4Pt(\rho))Pr_{\rho,\rho} \\ & + 4\rho Pr_\rho Pt_\rho + Pr_\rho(-4Pt(\rho) + 3Pr(\rho)) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$a_2 = 18C_1 Pr_\rho(Pr(\rho) - Pt(\rho)) \quad (3.17)$$

$$a_1 = 12C_1 Pr_\rho m(-\rho - 6Pt(\rho) + 5Pr(\rho)) \quad (3.18)$$

$$a_0 = 18C_1 Pr_\rho m^2(-\rho + 3Pr(\rho) - 4Pt(\rho)) \quad (3.19)$$

Los subíndices nos representan las derivadas parciales son respecto a  $\rho$  (i.e.,  $x_\rho = \frac{\partial x}{\partial \rho}$ ,  $x_{\rho,\rho} = \frac{\partial^2 x}{\partial \rho^2}$ ).

De los dos últimos términos concluimos que

$$C_1 = 0 \quad (3.20)$$

---

### CAPÍTULO 3. HOMOLOGÍAS Y SISTEMAS DE ECUACIONES

---

Mientras que del coeficiente de  $r^6$  concluimos que  $\alpha = 0$ , y formando la suma de la primera expresión mas 3 veces la segunda expresión obtenemos

$$b = -2a \tag{3.21}$$

Generando la expresión  $(a_5 - 4a_3)(c^2\rho + 2Pr(\rho)) + a_2$  resulta

$$-\rho(Pr(\rho) + c^2\rho)^2 \left( \frac{d^2}{d\rho^2} Pr(\rho) \right) \tag{3.22}$$

Lo cual implica  $P_r(\rho) = C_2\rho + C_3$ , siguiendo un procedimiento análogo, luego de lograr satisfacer el resto de la ecuaciones llegamos a la conclusión de que

$$P_t(\rho) = C_4\rho \tag{3.23}$$

$$P_r(\rho) = C_5\rho \tag{3.24}$$

$$\eta^2(m) = am \tag{3.25}$$

$$\eta^1(\rho) = -2a\rho \tag{3.26}$$

$$\xi(r) = ar \tag{3.27}$$

Con lo cual podemos enunciar el siguiente Teorema

**Teorema 3.3.1** *Para un gas relativista en equilibrio isotérmico, si  $\rho(r)$  es una solución del sistema (3.3)(3.4) y (3.5) entonces  $a^2\rho(ar)$ , también es una solución donde  $a$  es una constante arbitraria.*

De lo anterior concluimos que además del teorema antes enunciado tenemos que las únicas ecuaciones de estado que permiten que el sistema tenga homologías invariante corresponde a  $P_t = \mu\rho$  y radial  $P_r = k\rho$ .

Estas son las ecuaciones de estado que son compatibles con la física y también con las homologías, lo que da respuesta a una de las preguntas planteadas como parte del proyecto de investigación. Es importante notar que los valores de  $\mu$  y  $k$  desde el punto de vista matemático no tienen restricción alguna. Tomando en cuenta la física involucrada, para sistemas estelares de materia ordinaria  $0 < \mu, k < 1$ , para materia no ordinaria estas pueden ser negativos o mayores a la unidad.



# Capítulo 4

## Sistema Dinámico en Relatividad

### 4.1. Análisis de un sistema anisotrópico

En esta sección, analizaremos la estructura de las ecuaciones (3.3) y (3.4) para una estrella estática y esféricamente simétrica en relatividad general, en el caso donde una homología tiene una familia de soluciones, el sistema anisotrópico tiene como ecuaciones de estado  $P_r = (s - 1)\rho$  y  $P_t = \lambda\rho$ , donde  $s$  y  $\lambda$  son constantes.

Es conveniente expresar las ecuaciones (3.3) y (3.4) en términos de homologías invariantes,  $M = \frac{m}{r}$  y  $\mu = 4\pi r^2\rho$ .

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu \left[ \frac{2 - \frac{(5s-4)M}{s-1} - s\mu}{1 - 2M} - \frac{2(s-1-\lambda)}{s-1} \right] \quad (4.1)$$

$$\frac{dM}{dt} = \mu - M \quad (4.2)$$

donde  $t = \ln r$

Las ecuaciones (4.1) y (4.2) forman un sistema autónomo de ecuación diferencial y la naturaleza de las soluciones se puede representar en un diagrama  $\mu - M$ . Las soluciones para  $M > 1/2$  no son admitidas.

Calculando los puntos fijos del sistema autónomo tenemos

$$\mu \left[ \frac{2 - \frac{(5s-4)M}{s-1} - s\mu}{1 - 2M} - \frac{2(s-1-\lambda)}{s-1} \right] = 0$$

$$\mu - M = 0$$

Tenemos el punto fijo  $p_0$  en  $\mu$  y  $M$

$$\mu = M = \frac{2\lambda}{s^2 + 4\lambda} \quad (4.3)$$

Describiremos la estabilidad y dinámica que implican el sistema de ecuaciones diferenciales, por los que se aplicarán los criterios vistos en el capítulo 2 para poder determinarlos.

Veamos ahora como determinar la estabilidad, es decir, que es lo que ocurre cuando perturbamos alrededor de un punto fijo, la matriz de estabilidad definida como

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mu} f_1(p_0) & \frac{\partial}{\partial M} f_1(p_0) \\ \frac{\partial}{\partial \mu} f_2(p_0) & \frac{\partial}{\partial M} f_2(p_0) \end{bmatrix}$$

Para nuestro caso las funciones son

$$f_1(\mu, M) = \mu \left[ \frac{2 - \frac{(5s-4)M}{s-1} - s\mu}{1 - 2M} - \frac{2(s-1-\lambda)}{s-1} \right] \quad (4.4)$$

$$f_2(\mu, M) = \mu - M \quad (4.5)$$

mientras que  $M$  se obtiene de manera directa dando

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\frac{2\lambda}{s} & -\frac{2(s+4\lambda)\lambda}{s^2(s-1)} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A partir de la matriz de estabilidad, calculamos el polinomio característico

$$\chi^2 - \left( \frac{\partial f_1(p_0)}{\partial \mu} + \frac{\partial f_2(p_0)}{\partial M} \right) \chi + \left( \frac{\partial f_1(p_0)}{\partial \mu} \frac{\partial f_2(p_0)}{\partial M} - \frac{\partial f_1(p_0)}{\partial M} \frac{\partial f_2(p_0)}{\partial \mu} \right) = 0$$

$$\chi^2 + \left( \frac{2\lambda}{s} + 1 \right) \chi + \left( \frac{2\lambda}{s} + \frac{2(s+4\lambda)\lambda}{s^2(s-1)} \right) = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos los valores propios  $\chi_i$  de la matriz  $M$

$$\chi_1 = \frac{1 - s^2 + s - 2\lambda s + 2\lambda + \sqrt{(s-1)(s^3 - s^2 - 4\lambda s^2 + 4\lambda^2 s - 4\lambda s - 36\lambda^2)}}{2s(s-1)}$$

$$\chi_2 = -\frac{1 - s^2 + s + 2\lambda s - 2\lambda + \sqrt{(s-1)(s^3 - s^2 - 4\lambda s^2 + 4\lambda^2 s - 4\lambda s - 36\lambda^2)}}{2s(s-1)}$$

$$Tr(M) = - \left( \frac{2\lambda}{s} + 1 \right) \quad (4.6)$$

$$\Delta = \frac{2\lambda}{s} + \frac{2(s+4\lambda)\lambda}{s^2(s-1)} = \frac{2\lambda(s^2+4\lambda)}{s^2(s-1)} \quad (4.7)$$

$$Dis = Tr(M)^2 - 4\Delta$$

$$Dis = \frac{4(s-9) \left( \lambda - \frac{(s+1+2\sqrt{3s-2})s}{2(s-9)} \right) \left( \lambda + \frac{(-s-1+2\sqrt{3s-2})s}{2(s-9)} \right)}{s^2(s-1)} \quad (4.8)$$

## 4.2. Materia Ordinaria

Como hemos mencionado en el capítulo anterior existe una variedad de posibilidades empezando con el caso de materia ordinaria. De las ecuaciones de estado  $P_r = (s-1)\rho$  y  $P_t = \lambda\rho$ , analizaremos el caso donde la presión radial y la presión tangencial son ambas positivas,  $P_r > 0$  y  $P_t > 0$ , tomando en cuenta las condiciones de aceptabilidad de la materia anisotrópica:

- La densidad  $\rho$ , la presión radial  $P_r$  y la presión tangencial  $P_t$  debe ser positiva en todas partes.
- Dentro de la configuración estática, la velocidad del sonido debe ser inferior a la velocidad de la luz.

$$\frac{\partial P_r}{\partial \rho} \leq 1 \quad \frac{\partial P_t}{\partial \rho} \leq 1$$

- La condición de energía fuerte:

$$\rho + P_r + 2P_t \geq 0, \quad \rho + P_r \geq 0, \quad \rho + P_t \geq 0$$

- La condición de energía dominante:

$$\rho \geq P_r \quad \rho \geq P_t$$

## CAPÍTULO 4. SISTEMA DINÁMICO EN RELATIVIDAD

---

Materia	Condición 1	Condición 2	Condición 3
Materia Ordinaria	$\rho + P_r + 2P_t \geq 0$	$\rho + P_r \geq 0$	$\rho + P_t \geq 0$
Energía Oscura	$\rho + P_r + 2P_t < 0$	$\rho + P_r \geq 0$	$\rho + P_t \geq 0$
Energía Fantasma Repulsiva	$\rho + P_r + 2P_t < 0$	$\rho + P_r < 0$ $\rho + P_r \geq 0$ $\rho + P_r < 0$	$\rho + P_t \geq 0$ $\rho + P_t < 0$ $\rho + P_t < 0$
Energía Fantasma Atractiva	$\rho + P_r + 2P_t \geq 0$	$\rho + P_r < 0$ $\rho + P_r \geq 0$ $\rho + P_r < 0$	$\rho + P_t \geq 0$ $\rho + P_t < 0$ $\rho + P_t < 0$

Cuadro 4.1: Clasificación en base a la condición de energía fuerte para  $\rho > 0$ .

Materia	Condición 1	Condición 2	Condición 3
Materia Ordinaria	$\rho(s + 2\lambda) \geq 0$	$\rho s \geq 0$	$\rho(\lambda + 1) \geq 0$
Energía Oscura	$\rho(s + 2\lambda) < 0$	$\rho s \geq 0$	$\rho(\lambda + 1) \geq 0$
Energía Fantasma Repulsiva	$\rho(s + 2\lambda) < 0$	$\rho s < 0$ $\rho s \geq 0$ $\rho s < 0$	$\rho(\lambda + 1) \geq 0$ $\rho(\lambda + 1) < 0$ $\rho(\lambda + 1) < 0$
Energía Fantasma Atractiva	$\rho(s + 2\lambda) \geq 0$	$\rho s < 0$ $\rho s \geq 0$ $\rho s < 0$	$\rho(\lambda + 1) \geq 0$ $\rho(\lambda + 1) < 0$ $\rho(\lambda + 1) < 0$

Cuadro 4.2: Clasificación en base a la condición de energía fuerte para  $\rho > 0$ .

Los valores de  $\lambda$  y  $s$  para los cuales se cumplen las condiciones de aceptabilidad de la materia anisotrópico son:

$$0 < \lambda \leq 1 \qquad 1 < s \leq 2$$

Por otra parte analizaremos las funciones  $Dis$  y  $Tr(M)$ , para determinar la dinámica del sistema, en el rango de valores de  $\lambda$  y  $s$ .

De la figura (4.1) se observa que la función  $Dis$  cumple la siguiente relación

$$\Delta > \frac{(Tr(M))^2}{4} \tag{4.9}$$

Mientras que la figura (4.2) nos da otra condición para determinar la estabilidad de nuestro sistema.

$$Tr(M) < 0 \tag{4.10}$$

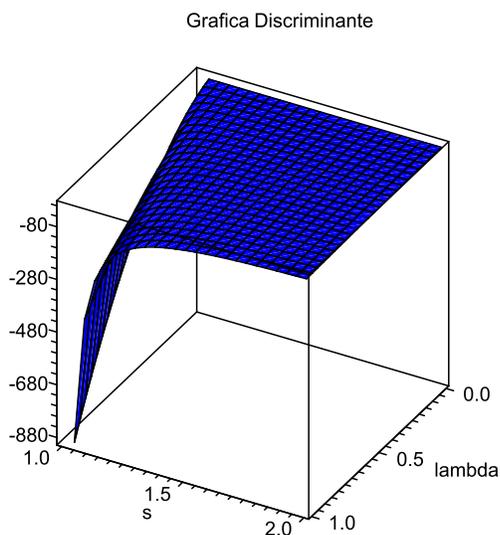


Figura 4.1: Para todo valor de  $0 < \lambda \leq 1$  y  $1 < s \leq 2$ , la función  $Dis < 0$ .

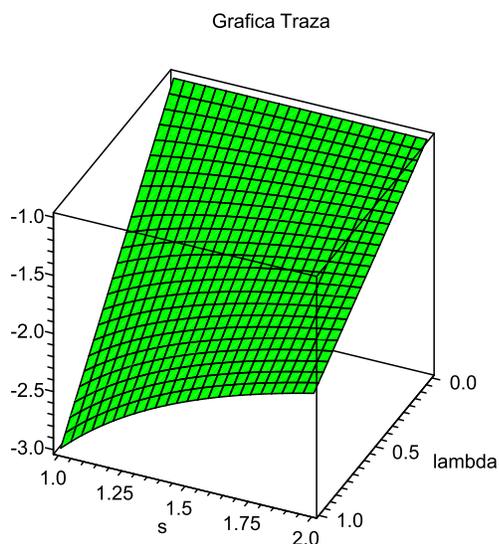


Figura 4.2: Para todo valor de  $0 < \lambda \leq 1$  y  $1 < s \leq 2$ , la función  $Tr(M) < 0$ .

Desde el punto de vista del análisis realizado mediante las técnicas para sistemas autónomos en dos dimensiones, las ecuaciones (4.9) y (4.10) describen una dinámica **espiral estable** en el punto fijo  $p_0$ , para valores de  $0 < \lambda \leq 1$  y  $1 < s \leq 2$ .

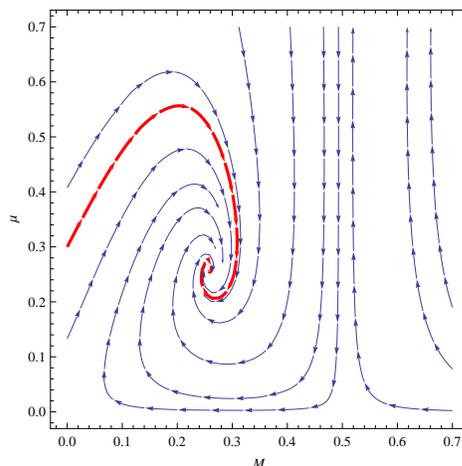


Figura 4.3: Dinámica Espiral para  $\lambda = 3/5$  y  $s = 3/2$ .

### 4.3. Materia No Ordinaria

Para el caso donde  $P_r < 0$  y  $P_t > 0$  no hay condiciones que nos restringen nuestras ecuaciones de estado  $P_r = (s - 1)\rho$  y  $P_t = \lambda\rho$ , como en el caso donde la presión radial y la presión tangencial ambas eran positivas. Por lo que se analizará la dinámica que hay del sistema para ciertos valores de  $\lambda$  y  $s$ .

$$0 < \lambda \leq 1 \qquad 0 \leq s < 1$$

Analizando las funciones  $\Delta$  y  $Tr(M)$ , en el rango de valores de  $\lambda$  y  $s$ .

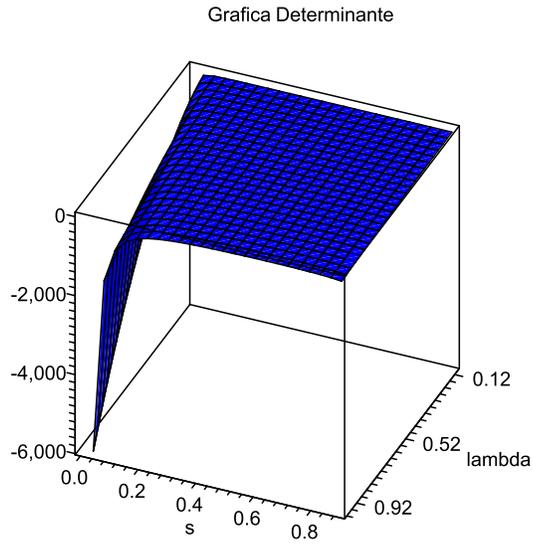


Figura 4.4: Para todo valor de  $0 < \lambda \leq 1$  y  $0 \leq s < 1$ , la función  $\Delta < 0$ .

De la figura (4.4) se observa que la función  $\Delta$  cumple la siguiente relación

$$\Delta < 0 \tag{4.11}$$

Y de la figura (4.5) obtenemos la otra condición para determinar la estabilidad de nuestro sistema.

$$Tr(M) < 0 \tag{4.12}$$

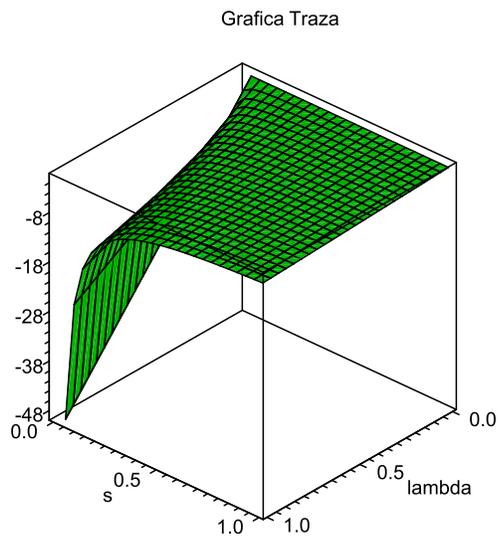


Figura 4.5: Para todo valor de  $0 < \lambda \leq 1$  y  $0 \leq s < 1$ , la función  $Tr(M) < 0$ .

Las ecuaciones (4.11) y (4.12) describen una dinámica **silla** en el punto fijo  $p_0$ , para valores de  $0 < \lambda \leq 1$  y  $0 \leq s < 1$ .

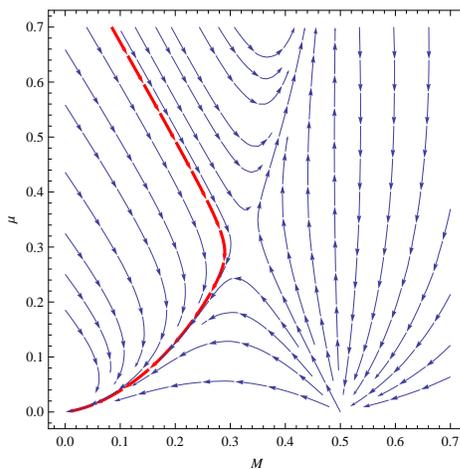


Figura 4.6: Dinámica Silla para  $\lambda = 1/5$  y  $s = 2/3$ .

El caso donde  $P_r < 0$  y  $P_t < 0$  analizaremos la dinámica que hay del sistema para ciertos valores de  $\lambda$  y  $s$ .

$$-1 \leq \lambda < 0 \qquad 0 \leq s < 1$$

Analizando las funciones  $\Delta$  y  $Tr(M)$ , en el rango de valores de  $\lambda$  y  $s$ .

De la figura (4.7) se observa que la función  $\Delta$  cumple la siguiente relación

$$\Delta < 0 \tag{4.13}$$

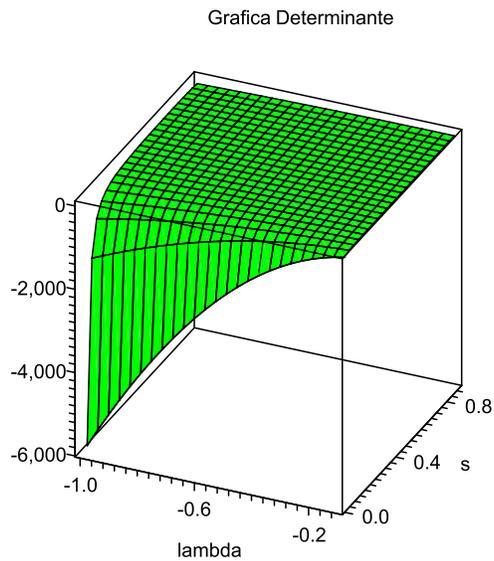


Figura 4.7: Para todo valor de  $-1 \leq \lambda < 0$  y  $0 \leq s < 1$ , la función  $\Delta < 0$ .

Y de la figura (4.8) obtenemos la otra condición para determinar la estabilidad de nuestro sistema.

$$Tr(M) < 0 \tag{4.14}$$

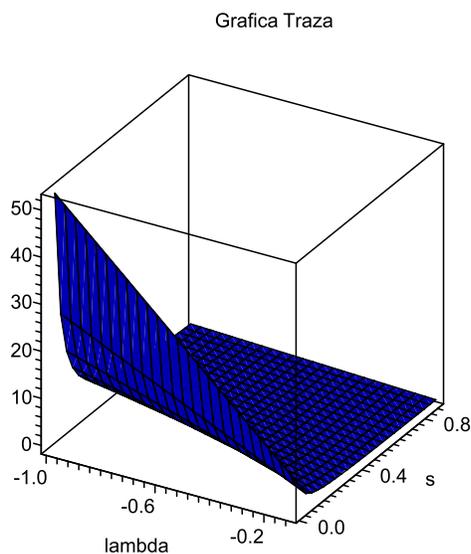


Figura 4.8: Para todo valor de  $-1 \leq \lambda < 0$  y  $0 \leq s < 1$ , la función  $Tr(M) > 0$ .

Las ecuaciones (4.13) y (4.14) describen una dinámica **silla** en el punto fijo  $p_0$ , para valores de  $-1 \leq \lambda < 0$  y  $0 \leq s < 1$ .

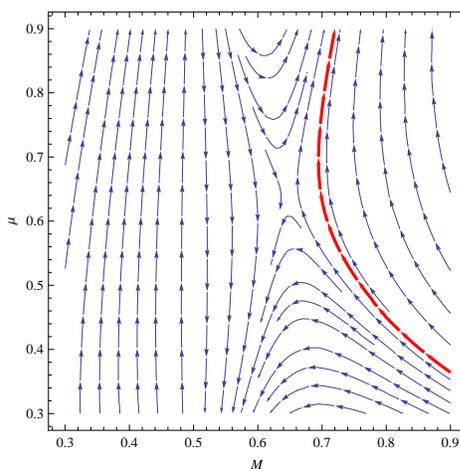


Figura 4.9: Dinámica Silla para  $\lambda = -1/2$  y  $s = 2/3$ .

El caso donde  $P_r > 0$  y  $P_t < 0$ , se analizará con cuidado este rango de valores para  $\lambda$  y  $s$ , ya que ocurre algo extraño, se presenta más de un tipo de dinámica en el sistema para ciertos valores de  $\lambda$  y  $s$ .

$$-1 \leq \lambda < 0 \qquad 1 < s \leq 2$$

Analizando las funciones  $Dis$  y  $Tr(M)$ , en el rango de valores de  $\lambda$  y  $s$ .

De la figura (4.10) se observa que la función  $Dis$ , cumple dos relaciones, ya que dependiendo de los valores de  $\lambda$  y  $s$ , el Discriminante puede tomar valores positivos y negativos, esto implicaría tener más de un tipo de dinámica.

$$Dis < 0 \qquad Dis > 0 \qquad (4.15)$$

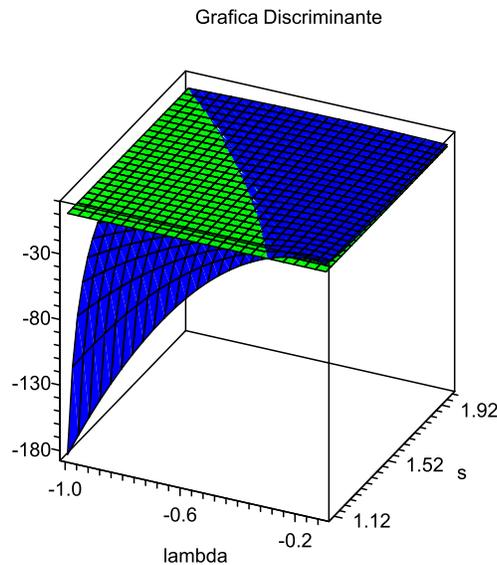


Figura 4.10: Para valores de  $-1 \leq \lambda < 0$  y  $1 < s \leq 2$ .

Un criterio para poder determinar con más precisión la dinámica, es analizando la función  $Tr(M)$ , y ver qué valores toma esta función para los valores de  $\lambda$  y  $s$ .

En la figura (4.11) se observa que la función  $Tr(M)$ , cumple también dos relaciones como la función  $Dis$ , ya que dependiendo de los valores de  $\lambda$  y  $s$ , la traza puede tomar valores positivos y negativos. En este rango de valores de  $\lambda$  y  $s$ , hay una rica diversidad de dinámica, viéndolo como un sistema matemático, pero tendremos que ver cuales soluciones son físicamente aceptables para el propósito de relatividad.

$$Tr(M) < 0 \qquad Tr(M) > 0 \qquad (4.16)$$

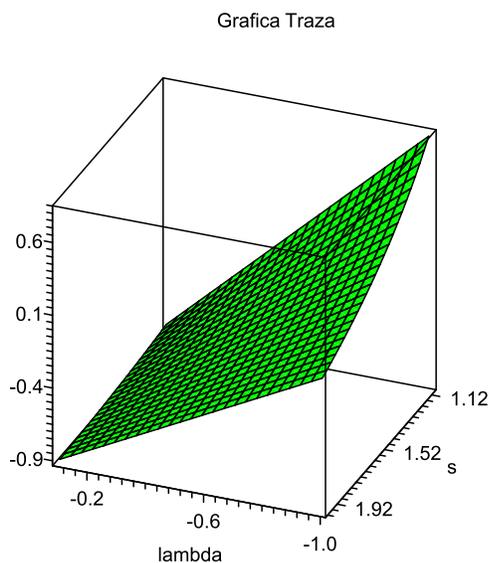


Figura 4.11: Función  $Tr(M)$ , para valores de  $-1 \leq \lambda < 0$  y  $1 < s \leq 2$ .

Analizaremos la dinámica que existe para ciertos valores específicos de  $\lambda$  y  $s$

Tomando como valores de  $\lambda = -3/5$  y  $s = 6/5$ , tenemos una dinámica **centro** que era lo que deberíamos esperar, la función determinante para estos valores es positiva y la función traza es cero.

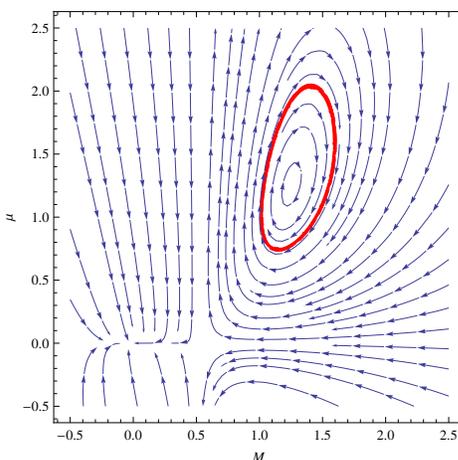


Figura 4.12: Dinámica Centro para  $\lambda = -3/5$  y  $s = 6/5$ .

Para valores de  $\lambda = -1/3$  y  $s = 3/2$  tenemos una dinámica silla, la función traza es negativa y la función determinante también es negativa que esto implica una dinámica **silla**.

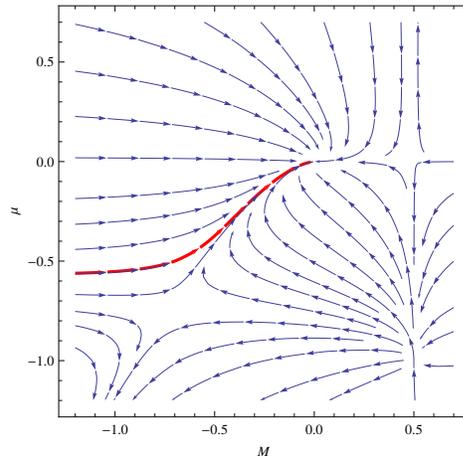


Figura 4.13: Dinámica Silla para  $\lambda = -1/3$  y  $s = 3/2$ .

Para valores de  $\lambda = -4/5$  y  $s = 6/5$ , tenemos una dinámica **espiral repelente**, la función discriminante para estos valores es negativa y la función traza es positiva.

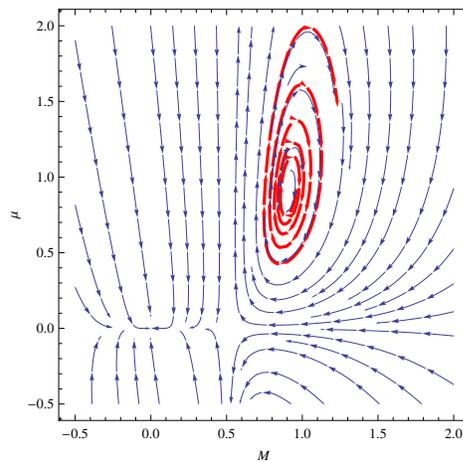


Figura 4.14: Dinámica Espiral Repelente para  $\lambda = -4/5$  y  $s = 6/5$ .

Por último analizaremos para valores de  $\lambda = -11/20$  y  $s = 6/5$ , tenemos una dinámica **nodo espiral**, la función discriminante para estos valores es negativa y la función traza es negativa.

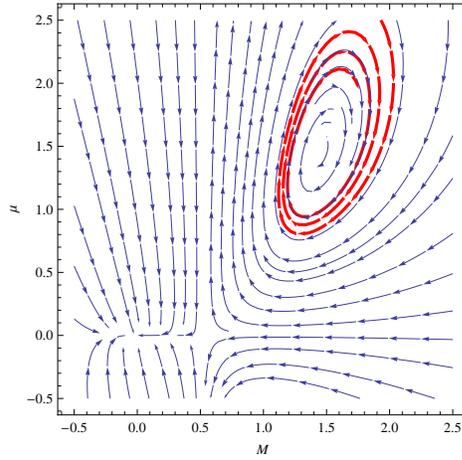


Figura 4.15: Dinámica Nodo Espiral para  $\lambda = -11/20$  y  $s = 6/5$ .

#### 4.4. Comparación con un Sistema Isotrópico

En 1976 Collins analizó el sistema isotrópico, teniendo como ecuación de estado  $P = (\gamma - 1)\rho$ , en este sistema la presión radial y tangencial son iguales  $P_r = P_t$ , donde  $\gamma$  es una constante [24].

Es conveniente expresar las ecuaciones (3.3) y (3.4) en términos de homologías invariantes,  $M = \frac{m}{r}$  y  $\mu = 4\pi r^2 \rho$ .

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu \left[ \frac{2 - \frac{(5\gamma-4)M}{\gamma-1} - \gamma\mu}{1 - 2M} \right] \quad (4.17)$$

$$\frac{dM}{dt} = \mu - M \quad (4.18)$$

donde  $t = \ln r$

Veremos la relación que hay entre la dinámica del sistema anisotrópico e isotrópico.

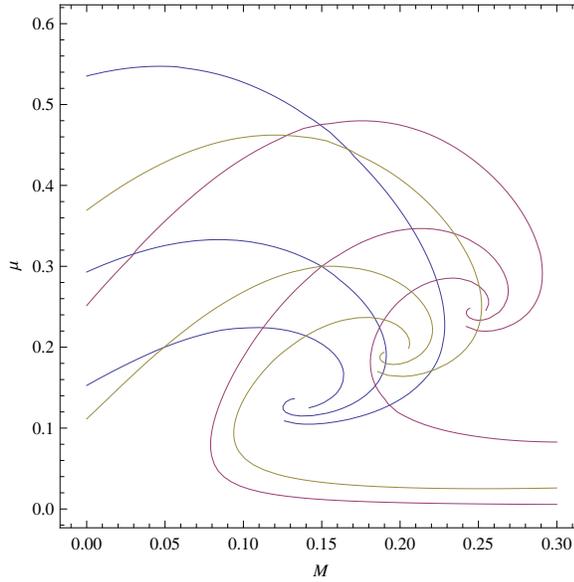


Figura 4.16: Comparación del sistema anisotrópico e isotrópico.

En la figura 4.16, se observa que el sistema isotrópico  $P > 0$  y el sistema anisotrópico  $P_r > 0$  y  $P_t > 0$ , se tiene la misma dinámica espiral; las dinámicas se van desplazando sobre una recta a  $45^\circ$ . La espiral (ambar) central de la figura 4.16 representa al sistema isotrópico  $P_r = P_t$  ( $\lambda = 2/3$ ,  $s = 3/2$ ), la espiral (rosa) de la derecha representa al sistema anisotrópico cuando  $P_t > P_r$  ( $\lambda = 1/2$ ,  $s = 3/2$ ) y la espiral (azul) de la izquierda cuando  $P_r > P_t$  ( $\lambda = 1/3$ ,  $s = 3/2$ ).

## 4.5. Criterio de Estabilidad

Como ya vimos anteriormente encontramos una gran variedad de dinámicas, pero analizar y ver que representan físicamente es un gran reto que hasta el momento no se tiene reporte de ello, debido a que nadamas se tienen criterios para materia ordinaria. Ahora analizaremos que tipo de estabilidad tenemos para materia ordinaria.

Tenemos que

$$\frac{\partial P_r}{\partial \rho} = v_{sr}^2 \qquad \frac{\partial P_t}{\partial \rho} = v_{st}^2$$

donde  $v_{sr}^2$  y  $v_{st}^2$  representan las velocidades de sonido radial y tangencial, respectivamente.

Este será el concepto clave para identificar configuraciones de materia anisotrópicas potencialmente estables o inestables [25].

## CAPÍTULO 4. SISTEMA DINÁMICO EN RELATIVIDAD

Es evidente que, debido a  $0 \leq v_{sr}^2 \leq 1$  y  $0 \leq v_{st}^2 \leq 1$ , tenemos  $|v_{st}^2 - v_{sr}^2| \leq 1$ , por lo tanto,

$$-1 \leq v_{st}^2 - v_{sr}^2 \leq 1 = \begin{cases} -1 \leq v_{st}^2 - v_{sr}^2 \leq 0 & \text{Potencialmente estable} \\ 0 < v_{st}^2 - v_{sr}^2 \leq 1 & \text{Potencialmente inestable} \end{cases}$$

Para nuestras ecuaciones de estado tenemos que

$$-1 \leq v_{st}^2 - v_{sr}^2 \leq 1 = -1 \leq \lambda - s + 1 \leq 1$$

Ahora podemos evaluar zonas potencialmente estables y inestables dentro de los modelos anisotrópicos basado en la diferencia de la propagación del sonido dentro de la configuración de la materia.

Para el caso de materia ordinaria con presiones  $P_r > 0$  y  $P_t > 0$ , tenemos que la dinámica nodo espiral, bajo este criterio es potencialmente estable.

### 4.5.1. Casos Especiales

Veremos unos casos especiales donde se cumple la condición de energía fuerte del cuadro 4.1, para ver el tipo de dinámica que presentan.

En base al cuadro 4.2 para la condición de energía fuerte, en el caso donde se tiene energía fantasma repulsiva veremos la dinámica que se tienen para algunos valores de  $s$  y  $\lambda$ .

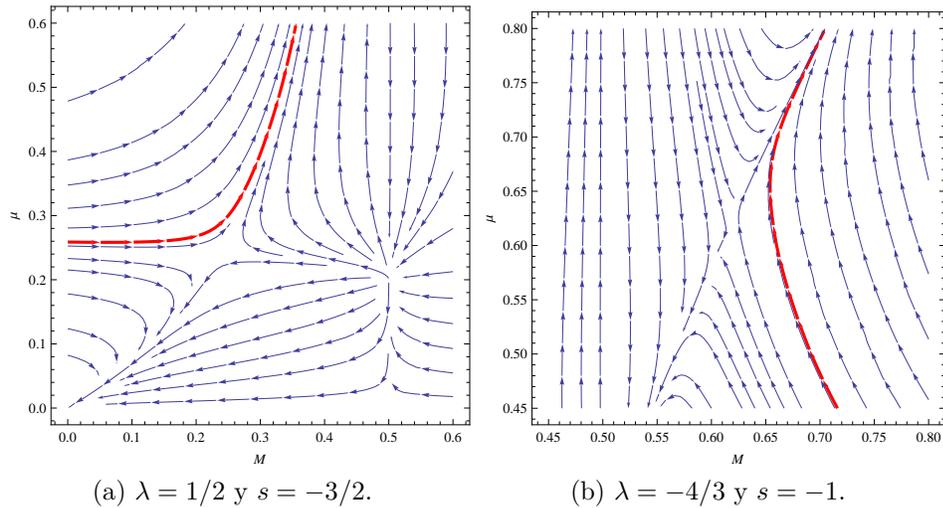


Figura 4.17: Dinámica Silla

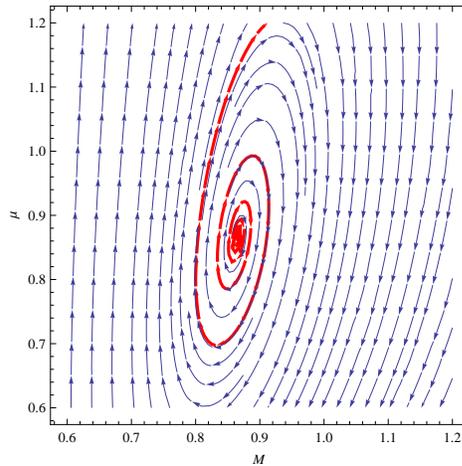


Figura 4.18: Dinámica Espiral Repelente para  $\lambda = -4/3$  y  $s = 3/2$ .

Las dinámicas de las figuras 4.17 y 4.18 corresponden a **dinámica silla** y **dinámica espiral repelente**, este es el tipo de dinámica encontrada para la energía fantasma repulsiva.

Para el caso de energía fantasma atractiva figura 4.19 se encontro **dinámica silla**.

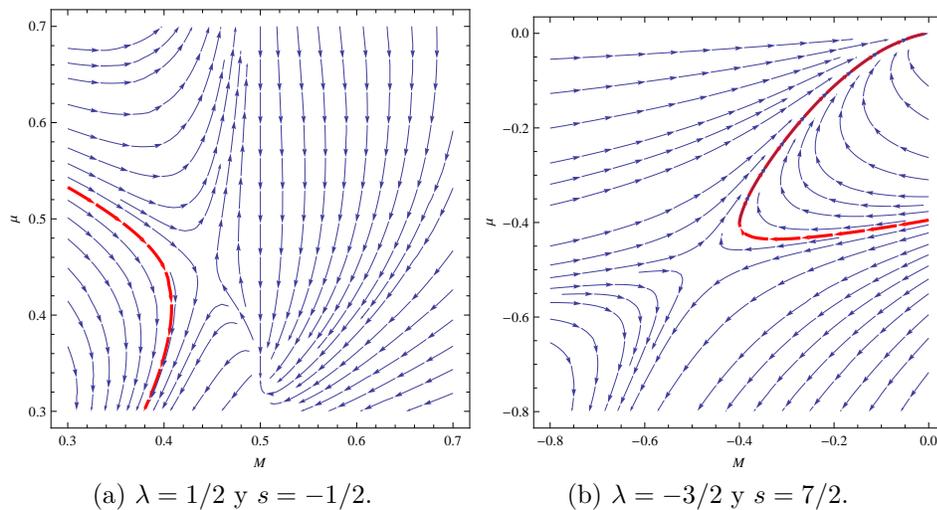


Figura 4.19: Dinámica Silla.

## 4.6. Clasificación de Dinámicas

En esta sección está dedicada a la clasificación de todas las dinámicas encontradas, en base a la condición de energía fuerte.

## CAPÍTULO 4. SISTEMA DINÁMICO EN RELATIVIDAD

---

En el cuadro 4.3 vemos la clasificación en base a la condición de energía fuerte para determinar el tipo de materia en base a los valores de  $s$  y  $\lambda$ , describe las dinámicas que presentan los diferentes casos para valores diversos de proporcionalidad de las presiones y la densidad. Muestra tanto la región de interés como las regiones que se encuentran fuera de ellas y se nota que solo la dinámica ciclo límite no esta presente en este sistema de ecuaciones.

Materia	Dinámica	Valor de $\lambda$	Valor de $s$	Región
Materia Ordinaria	Nodo Espiral	$1/2$	$3/2$	$0 < M < 1/2$
	Silla	$1/5$	$2/3$	$0 < M < 1/2$
	Centro	$-3/5$	$6/5$	$M > 1/2$
	Silla	$-1/3$	$3/2$	$M < 0$
	Nodo Espiral	$-11/20$	$6/5$	$M > 1/2$
Energía Oscura	Silla	$-1/2$	$2/3$	$M > 1/2$
	Espiral Repelente	$-4/5$	$6/5$	$M > 1/2$
Energía Fantasma Repulsiva	Silla	$1/2$	$-3/2$	$0 < M < 1/2$
	Silla	$-4/3$	$3/2$	$M > 1/2$
	Espiral Repelente	$-4/3$	$-1$	$M > 1/2$
Energía Fantasma Atractiva	Silla	$1/2$	$-1/2$	$0 < M < 1/2$
	Silla	$-3/2$	$7/2$	$M < 0$

Cuadro 4.3: Clasificación del tipo de dinámica.

# Capítulo 5

## Conclusiones

La dinámica de sistemas anisotrópicos en el contexto de la relatividad general para el espacio tiempo estático y esféricamente simétrico fue analizado; algunas consecuencias de resaltar del análisis realizado son:

En el capítulo 3 encontramos que las únicas ecuaciones de estado compatible con la existencia de homologías y compatibles con las condiciones físicas (de materia ordinaria y extraña) en el caso de estructuras anisotrópicas son del tipo  $P_t = \mu\rho$  y  $P_r = k\rho$ . La dinámica presentada en el caso de materia ordinaria corresponde a soluciones que describen espirales estables al igual que en el caso isotrópico.

Para materia que viola las condiciones de energía tenemos los otros tipos de dinámicas que fueron analizados en el capítulo 4 (salvo los ciclos límites). Hemos estudiado el sistema resultante para determinar la estructura de las soluciones en el espacio fase y el tipo de dinámica que está presente para los casos en los que las condiciones de energía dominante y fuerte se satisfacen, así como los casos en los que estas no se satisfacen. Por propósitos de interés astrofísico solo se considero la región para la que la materia se encuentra dentro del radio de Schwarzschild ( $r_s = \frac{2mG}{c^2}$ ), aunque las graficas se realizaron para una región mayor, ver cuadro 4.3. Este contraste entre materia ordinaria y el de materia extraña nos permite justificar el por qué de la existencia de una mayoría de objetos estelares asociados a materia ordinaria dada la estabilidad. Dada la dinámica encontrada para trabajos futuros seria un reto hacer una clasificación de los objetos estelares que nos pueden representar estas dinámicas y su estabilidad.

Considerado únicamente como sistema dinámico la región mayor al radio de Schwarzschild presenta algunas otras dinámicas como la centro y nodo espiral para materia ordinaria o silla y espiral repelente para materia oscura y energia fantasma repulsiva sin embargo por consideraciones físicas estas dejan de ser de interés. Por lo que la unica dinámica relevante físicamente es la nodo espiral. Otra importante conclusión es que la trayectoria que describen los puntos espiral es una línea recta a 45 que representa físicamente que estas corresponden a una solución de Zapolski, al igual que en el ca-

## CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

---

so isotrópico. La estabilidad del sistema también fue analizado y se concluye que es estable desde el punto de vista hidodinámico.

# Bibliografía

- [1] M. Kline. *El pensamiento matemático: de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Editorial.
- [2] A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko. *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. (Ed. Mir 1979).
- [3] R.E. Larson, R.P. Hosteeler y B.H. Edwards. *Cálculo y Geometría Analítica*, 5a ed., vol. 1. McGraw-Hill, Madrid, 1995. Capítulo 18.
- [4] Boyce, Diprima. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*. 4a ed., Limusa Wiley, México, DF, 2001.
- [5] J. Stewart. *Cálculo*, 2a ed., Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1994. Capítulo 15.
- [6] Robert L. Borreci, Courtney S. Coleman. *Ecuaciones Diferenciales Una Perspectiva de Modelación*. Alfaomega, México, DF, 2002.
- [7] Dennis G. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. 7a ed., Thomson, México, DF, 2002.
- [8] M. W. Hirsch y S. Smale. *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*, Alianza Editorial, 1983.
- [9] D. Ruelle. *Deterministic chaos: the science and the fiction*, Proceedings of the Royal Society London A 427 (1990), 241-248
- [10] Robert May. *Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics*, Nature, Vol. 261, p. 459, June 10, 1976
- [11] Hassan Khalil. *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 1996.
- [12] Shankar Sastry. *Nonlinear Systems, Analysis, Stability, and Control*, Springer, 1999.
- [13] Robert C. Hilborn. *Chaos and Nolinear Dynamics*. 2a ed., Oxford, 2000.
- [14] J.M.T Thompson, H.B Stewart. *Nolinear Dynamics and Chaos*. 2a ed., Wiley, 2002.

## CAPÍTULO 5. BIBLIOGRAFÍA

---

- [15] A. Sanchez. Tesis: *El problema del Hamiltoniano inverso*. FCFM-UMSNH, Septiembre 2010.
- [16] Edward Ott. *Chaos and Dynamics Systems*. 2a ed., Cambridge, 2002.
- [17] Strogatz, Steven. *Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley, 1994.
- [18] H. Amann. *Ordinary Differential Equations: an introduction to Nonlinear Analysis*, Walter de Gruyter, New York, 1990
- [19] Schwarzschild, k. (1916a). Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen RTheorie. Sitz. Preuss. Akad. Wiss., 189. See 15.4.
- [20] R.C. Tolman. *Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid*. Physical Review Vol 55 (1939). Pp 364–373.
- [21] Oppenheimer, J. R., Volkoff, G. M. *On Massive Neutron Cores*. Phys. Rev., Vol 55, 1939, pp 374 - 381
- [22] G. W. Blumen and G. D. Cole. “*Symmetries and Differential Equations*”, (NY: Springer- Verlag, 1969).
- [23] R. Sharma and S. D. Maharaj. “*On Surface Tension for Compact Stars*” J. Astrophys. Astr. Vol 28, 2007 pp 133–138.
- [24] C. B. Collins. *Static stars: Some mathematical curiosities*, J.Math. Phys., Vol. 18, No.7, July 1977.
- [25] H. Abreu, H. Hernández, L. A. Nuñez. *Sound Speeds, Cracking and Stability of Self-Gravitating Anisotropic Compact Objects*