



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO**



**Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
“Luis Manuel Rivera Gutiérrez”**

Tesis profesional para obtener el grado de

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

**“Un ambiente de aprendizaje usando GeoGebra, para el
aprendizaje de conceptos geométricos básicos del
estudiante de bachillerato”**

Presenta:

Juan Carlos Proa Prado

Asesora:

Dra. en matemáticas María de Lourdes Guerrero Magaña

Morelia Michoacán, Noviembre de 2013

AGRADECIMIENTOS

Sin duda alguna ésta es una de las partes más difíciles de escribir, debido entre otras razones al poco espacio con el que cuento, para mencionar al conjunto completo de individuos que me ofrecieron su apoyo.

Mencionar los nombres como una lista, siempre trae consigo una jerarquización, en la que, el primer individuo mencionado, por lo regular es el más importante, disminuyendo de importancia a medida que nos acercamos al final de la lista.

Para el presente apartado en la medida de lo posible, voy a intentar eliminar todo tipo de listas, debido a que la ayuda que en algún momento me ofrecieron las personas para las cuales está dedicada la presente, tuvo una importancia radical sin la cual posiblemente no hubiera tenido las fuerzas para continuar adelante.

Sin más que aclarar, en este apartado quiero darles las gracias a todas las personas que de una forma u otra, me ofrecieron su ayuda directa o indirectamente, sin importar el grado de dificultad, que conllevó consigo. Tal vez alguna persona en un momento de crisis, me ofreció una palabra de aliento; otro más intervino en mi favor en algún momento de duda, alguien posiblemente me explicó un tema que no era muy claro para mí.

Posiblemente hubo personas que únicamente con su presencia me dieron las fuerzas necesarias para seguir adelante, desde luego que también hubo individuos que con su trabajo directo, me dieron alguna solución a situaciones, o tal vez simplemente una sonrisa en la mañana que me alegró el día. No hay que olvidar tampoco a la persona, que cumpliendo con su deber diario, me dio alguna ayuda de alguna manera, no hay que descartar, a todo individuo que me tuvo paciencia al realizar alguna actividad; sin descartar, claro está, a toda persona que de una u otra forma contribuyó a mi desarrollo personal.

Alguna de las estrofas de la canción popular titulada “Momentos”, está escrita de la siguiente manera: *"La vida se hace de momentos, de cosas que no sueles valorar, y luego cuando pierdes, cuando al fin te has dado cuenta el tiempo no te deja regresar, ya ves que todo pasa quien diría, ya ves qué poco queda del ayer, solo los momentos que no vuelven otra vez"*. Es por esos momentos que no volverán nunca más por lo que en este apartado quiero agradecerles.

Introducir nombres en este apartado, conllevaría consigo introducir una jerarquización, misma que como ya mencioné, no es el objetivo; por lo tanto me conformo con que todas las personas a las que va dirigida la presente, en el momento de leer el párrafo anterior, descubran que es a él o ella a quien va dirigida.

Sin más que agregar, únicamente me resta agradecer nuevamente a todas las personas a las que está dirigida la presente.

ÍNDICE

Resumen	1
Capítulo I. Planteamiento del problema	4
I.1. Introducción	5
I.2. Justificación y Planteamiento del problema	8
I.3. Objetivos	11
I.3.1. Objetivo general	11
I.3.2. Objetivos específicos	11
I.4. Preguntas de investigación	12
Capítulo II. Revisión de Literatura	14
II.1. Conceptos generales	15
II.1.1. ¿Qué es un Problema?	15
II.1.2. Instrumentos utilizados en la enseñanza de las matemáticas	15
II.1.3. La enseñanza de la geometría. El modelo de Van Hiele (Van Hiele, 1986)	17
II.1.3.1. Niveles de razonamiento de Van Hiele	19
II.2. Estrategias y métodos de solución de problemas	21
II.2.1. Métodos de solución de problemas	21
II.2.2. Estrategias de solución de problemas	24
II.2.3. Problemas y estrategias recomendados para utilizarse en el salón de clase	28
II.2.4. Otras estrategias de solución de problemas	29
II.3. Dificultades y alternativas de solución en la resolución de problemas	30
II.3.1. Identificación de las fuentes de los malentendidos	30
II.3.2. Dificultades en la enseñanza a partir de la solución de problemas	31
II.3.3. Sugerencias para hacer frente a los inconvenientes del método de enseñanza por medio de la resolución de problemas	31
II.4. Los profesores en la enseñanza de las matemáticas	32
II.4.1. El conocimiento que se requiere para la enseñanza de las matemáticas	32
II.4.2. Papel del profesor en la enseñanza basada en la solución de problemas	33
II.4.3. En la organización de los GWS, los profesores difieren notablemente en la forma en que miran los métodos utilizados por los estudiantes.	35
II.5. Comparación entre uso de problemas generales y específicos	36
II.5.1. ¿Problemas generales o específicos?	36
II.6. La tecnología en la educación matemática	39
II.6.1. La enseñanza de las matemáticas con software: un interés general	39
II.6.2. Las relaciones entre GWS y paradigmas geométricos	40
II.6.3. Una experimentación	40
II.6.4. Uso de tecnología	42
Capítulo III. Diseño de la secuencia de aprendizaje	44
III.1. Actividad: Construcción de polígonos utilizando triángulos isósceles	45
III.1.1. Primera Pregunta	46
III.1.2. Segunda Pregunta	47
III.1.3. Tercera Pregunta	49

III.1.4. Primera Pregunta	50
III.1.5. Pregunta número cinco	51
III.1.6. Pregunta número seis	53
III.1.7. Pregunta número siete	54
III.1.8. Actividades con software	54
III.2. Actividad: Polígonos	60
III.2.1. Fundamento teórico	61
III.2.2. Actividades con software	67
III.2.3. Conclusión	69
III.3. Actividad: Construyendo polígonos	71
III.3.1. Actividades con Geogebra	72
III.3.2. Llenado de tabla	74
III.3.3. Razonamiento	75
III.3.4. Establecimiento de relaciones	75
III.3.5. Simbolización de relaciones	76
III.3.6. Integración aritmético-geométrica	76
III.3.7. Generalización	77
III.4. Actividad: El problema de la caja	78
III.4.1. Iniciando la actividad con Geogebra	78
III.4.2. Llenado de tabla	79
III.4.3. Graficación	79
III.4.4. Reflexión	80
Capítulo IV. Metodología	81
IV.1. Diseño de la investigación	82
IV.2. Sujetos	83
IV.3. Organización del trabajo	85
Capítulo V. Resultados	89
V.1. Respuestas de los alumnos	90
V.1.1. Respuestas de los alumnos	
V.1.1.1. Respuestas de los alumnos de la Escuela Preparatoria Melchor Ocampo de la UMSNH	90
V.1.1.2. Respuestas de los estudiantes del Conalep II, Morelia	106
Capítulo VI. Análisis de resultados	128
VI.1. Análisis de la actividad realizadas por los alumnos de la Escuela Preparatoria Melchor Ocampo de la UMSNH	129
VI.1.1. Análisis de las respuestas dadas por los alumnos en la actividad construcción de polígonos regulares utilizando triángulos isósceles	129
VI.1.2. Ideas más relevantes que se encuentran en las respuestas de los estudiantes	132
VI.1.3. Características de los sujetos	137
VI.1.4. Ventajas que se encontraron al trabajar con el software de geometría dinámica	139
VI.1.5. Limitaciones que se encontraron al trabajar con el software de geometría dinámica	142
VI.1.6. Opinión de los estudiantes al trabajar con un software de geometría	144

dinámica.	
VI.2. Análisis de las respuestas dadas por los alumnos del Conalep II, Morelia	145
VI.2.1. Análisis de las respuestas de la actividad: Construyendo polígonos	145
VI.2.1.1. Análisis de las Respuestas dadas por los alumnos	145
VI.2.1.2. Ideas relevantes que se encuentran en las respuestas de los alumnos	148
VI.2.2. Análisis de las respuestas de la actividad el problema de la caja	151
VI.2.3. Análisis de las respuestas de la actividad: Polígonos	155
VI.2.3.1. Calificación de las respuestas de los estudiantes durante la actividad	155
VI.2.3.2. Respuestas relevantes de los alumnos en la actividad: Polígonos	163
VI.2.4. Estudiantes del grupo del Conalep II, Morelia	172
VI.2.5. Ventajas que se encontraron al trabajar con el software durante la aplicación de las actividades a los alumnos del Conalep II, Morelia	174
VI.2.6. Limitaciones que se encontraron al trabajar con el software de geometría dinámica en el Conalep II, Morelia	177
VI.2.7. Opinión de los estudiantes del Conalep II, Morelia, acerca del uso del software Geogebra	179
Capítulo VII. Conclusiones	181
VII.1. Resultados importantes revelados en el transcurso de la actividad	182
VII.2. Opinión del autor sobre las características principales que se abordaron en el trabajo	186
Bibliografía	191
Anexos	193

RESUMEN

Hoy más que nunca, estamos viendo los estragos de un mundo globalizado en el que cada día el estudiante, al salir de su preparación profesional, se encuentra en un mundo más competitivo; donde solamente teniendo buenas cartas de presentación podrá seguir adelante con su proyecto de vida. Además, en estos tiempos donde se ve un desarrollo cada vez más acelerado, tanto en lo social como en lo tecnológico, como en otras ramas del saber humano, es necesario que las nuevas generaciones, se vayan adaptando a dichos cambios y, para lograrlo, nos vemos en la necesidad de transformar los métodos de enseñanza en la escuela hacia unos más competitivos donde el estudiante se sienta involucrado en su propia educación.

Sin duda alguna, la enseñanza de las matemáticas, es la que trae consigo mayores índices de reprobación producido por muchos factores. Uno de ellos es la complejidad de las matemáticas en sí mismas, aunque también se encuentran factores de tipo didáctico, por los cuales el alumno no puede obtener el aprovechamiento deseado. Es esta otra razón por la que urge transformar los métodos de enseñanza tradicionales, por otros más dinámicos en los que el estudiante se apropie de los conocimientos de esta materia y de otras disciplinas que así lo requieran.

Para el presente trabajo aplicamos algunas actividades que titulamos de la siguiente manera: Construcción de polígonos regulares utilizando triángulos isósceles, Construyendo polígonos, Polígonos y El problema de la caja. La primera de ellas se aplicó a alumnos de la sección 03 y 24 de cuarto semestre de la escuela preparatoria Melchor Ocampo dependiente de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo; las tres restantes a alumnos de Conalep II de Morelia, Mich. En el presente trabajo se dan a conocer los resultados que obtuvimos al implementar las actividades antes mencionadas, en las cuales los estudiantes utilizaron la tecnología, a través de la implementación del software GeoGebra de manera colaborativa incitando a los estudiantes a desarrollar algunas competencias disciplinares en matemáticas y otras genéricas.

Las actividades en sí, son buenos parámetros para medir el nivel de aprendizaje de los alumnos, ya que están hechas de tal forma que necesitan de conocimientos auxiliares que posiblemente aprendieron durante sus cursos de geometría. Realizan actividades en las que a través de deducciones lógicas, obtienen nuevos conocimientos y por último, analizan los resultados obtenidos, de tal forma que en primera instancia se pueda medir, el conocimiento con el que cuenta el alumno antes de la actividad, que obtuvo durante la actividad, y con el que cuenta después de la actividad.

Para constatar los resultados, se hizo uso de tablas ilustrativas en las que calificamos cada una de las respuestas de los estudiantes, a través de un parámetro de calificación basado en las letras A a F, donde la A corresponde a una respuesta correcta y la F corresponde a una errónea. En dichas tablas el lector podrá observar, que tan buenas fueron las respuestas de los estudiantes. Posteriormente se documenta el trabajo de los estudiantes, evidenciando el análisis con la producción escrita de los alumnos.

Se adelanta que los aprendizajes no fueron muy satisfactorios, debido a situaciones que se trataran con detalle en los capítulos 6 y 7, en los que se argumentó que los grupos de estudiantes en los que se implementaron las actividades, no cuentan con las características que considerábamos propias del nivel bachillerato. Por tal motivo, al final del mencionado capítulo 7, introducimos algunas recomendaciones para tratar de hacer más eficiente el rendimiento en el aprendizaje de los alumnos.

La organización de la tesis incluye 7 capítulos: En el capítulo 1, denominado Planteamiento del problema, se presenta la descripción del tema del presente trabajo de investigación, así como la hipótesis, los objetivos, las preguntas de investigación y la justificación del mismo.

En el capítulo 2, llamado Marco teórico, se destacan los elementos teóricos que sustentan la propuesta metodológica, además se estudian conceptos tan importantes para el método de aprendizaje basado en la solución de problemas, tales como el concepto de problema, estrategias de solución de problemas, métodos de solución de problemas, ventajas del uso de software en el aula, tipos de enfoques que se le pueden dar al estudio de geometría, heurísticas, desventajas y ventajas del uso del método de aprendizaje

basado en la solución de problemas, así como los tipos de problemas, como también las situaciones en la que es más conveniente aplicar cada uno de los tipos de problemas: específicos y generales.

En el capítulo 3, que hemos llamado Diseño de la secuencia de aprendizaje, se presentan las actividades que se les aplicaron a los alumnos, así como un análisis de las respuestas que se esperaban por parte de ellos, así mismo, se evalúa el objetivo que tenía cada uno de los incisos en la comprensión de la actividad y también un análisis sobre la propuesta dada.

En el Capítulo 4, Metodología, se incluye el diseño de la investigación. Éste comprende la descripción de las etapas que fueron consideradas en el desarrollo del proyecto.

En el capítulo 5, Resultados, se incluyen los principales resultados que se obtuvieron a lo largo de la actividad y se escriben las respuestas dadas por los alumnos.

En el capítulo 6, llamado Análisis de Resultados, se incluye el análisis de las respuestas dadas por los alumnos, así como las ideas más relevantes que se encuentran en las afirmaciones de los estudiantes. Se plantea cómo se hizo la actividad en base al método de aprendizaje basado en la solución de problemas, así como las ventajas que trajo consigo el uso de tal método, como también las limitaciones que se encontraron al momento de trabajar con los alumnos, y que les impidió desarrollarse de la mejor manera. También se hace un breve recuento de las características que presentó el grupo de estudiantes que nos hicieron el favor de darnos un poco de su tiempo, finalmente analizamos las opiniones que dieron los estudiantes acerca de lo que les pareció el método de enseñanza basado en la solución de problemas con uso del software Geogebra.

En el capítulo 7, se incluyen las Conclusiones, en las que se muestran algunos resultados importantes que descubrimos en el transcurso de la actividad; también se presentan las conclusiones obtenidas a partir del análisis de los datos recabados durante las actividades, y de manera indirecta escribiremos nuestras opiniones sobre las características principales que se abordaron en este trabajo.

Después de los capítulos descritos se incorporan las referencias bibliográficas, que dan soporte al presente estudio, seguidas de éstas se incluyen los anexos.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo presento la descripción del tema del estudio realizado así como la justificación del trabajo, los objetivos, las preguntas de investigación y las tareas realizadas.

“Es posible que el obrero nunca se convierta en el dueño de la fábrica, pero sin educación, siempre trabajará para el burgués”

I.1. INTRODUCCIÓN

De entre las consecuencias de un mundo globalizado, que si bien tiene muchas ventajas, está el aumento en la competencia a la que tiene que enfrentarse el alumno; es por ello que para hacer frente a esta situación, el joven estudiante necesita de una formación integral basada en una actualización constante y dinámica del plan de estudios, que se adapte a los distintos cambios de la sociedad. Con este planteamiento se puede ver claramente, que el método de enseñanza tradicional basado en el conductismo, no es que el que el alumno de hoy y de mañana requieren, y por lo tanto debe de ser sustituido.

En el mismo contexto, nos vemos cada día más bombardeados por las tecnologías de la información y la comunicación (TIC); cada día nos presentan nueva información transmitida a través de las TIC, por lo tanto se ve una necesidad cada vez más renovada hacia la innovación de los métodos de aprendizaje basados en las TIC, en donde los planteles de educación se vean envueltos, al igual que los padres de familia, pero sobre todo el profesor (que es el primero en turno), en encaminar la educación del estudiante hacia un aprendizaje basado en el uso de las TIC.

Cognitivamente, el uso de la tecnología ha permitido el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación de los objetos matemáticos, la gran capacidad que tienen las computadoras, en principio para hacer cuentas, y en segunda instancia para representar objetos geométricos, que a un nivel más avanzado conlleva a la representación dinámica de los mismos, ha permitido tener un mayor control y comprensión de los problemas tratados, como también ha sido una herramienta importante para la representación de las leyes matemáticas.

Si hacemos caso a Raymonnd Duval (1993), los sistemas de representación juegan un papel importante en la comprensión del estudiante acerca de los objetos matemáticos. Los sistemas de representación en matemáticas son de cuatro tipos: registro algebraico, registro gráfico, registro tabular y registro de la lengua natural; cada uno con sus propias reglas y significación. También se señala que la articulación entre ellos se debe de dar en

la coordinación de al menos dos registros de representación. Por tanto, es dicha articulación de las diferentes representaciones de un concepto matemático lo que nos permite su construcción.

En un principio la utilización de software en los salones de clase era una tarea ardua, que traía consigo más desventajas que beneficios, debido entre otras cosas al gran costo que representaba comprarse una computadora, lo cual no lo hacía un instrumento de acceso general. También el software desarrollado entonces era impreciso y difícil de comprender; así mismo, los tiempos de ejecución eran muy prolongados. Pero con el paso del tiempo, cada día más, las leyes de la oferta y la demanda, además de la producción en serie y la continua actualización de equipos, ha hecho que disminuyan los precios de las computadoras, acercando este producto cada vez más al bolsillo de más individuos. Las necesidades actuales en la ciencia y en la tecnología, han encontrado un aliado en el uso de software, el cual ha necesitado de especialistas que lo adapten a la ciencia, lo que a la vez conlleva consigo un software cada vez más eficiente y dedicado a usos muy específicos en diversas ramas como la enseñanza de las matemáticas.

Uno de los beneficios que se vislumbran con el uso de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es la posibilidad de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples registros de representación dentro de esquemas interactivos, difíciles de lograr con los medios tradicionales, como el lápiz y el papel, en los que no se puede manipular directamente y explorar estos objetos. Así, el conocimiento matemático obtenido a través de la exploración de los objetos asume características no tradicionales. Gracias a esto se han ido salvando algunas dificultades que habitualmente surgen en el estudio de la geometría clásica, como por ejemplo la falta de dinamismo, la dificultad de la construcción y la falta de visión del problema en su conjunto. Además, el tener programas de geometría dinámica favorece el desarrollo de los conceptos matemáticos, permitiendo visualizar, experimentar, examinar propiedades, simular, descubrir regularidades e irregularidades, etc.

Hoy en día, contamos con una gran gama de opciones de software en los ámbitos de la matemática educativa, donde cada uno de ellos nos ofrece distintas alternativas y

distintos enfoques para el entendimiento de los temas tratados. También es frecuente encontrar distintos paquetes computacionales especializados en las distintas ramas de las matemáticas: geometría, cálculo, trigonometría, álgebra, entre otras, en las que la utilización de la computadora le da herramientas al estudiante para resolver los distintos problemas que se le presentan. Desgraciadamente, por otro lado, al no incluir el manejo de software dentro de los planes de estudio, los alumnos se pueden encontrar en desventaja ante otros estudiantes, debido entre otras cosas a que estarán menos capacitados por no haber sido beneficiados por las bondades que ofrece el uso del software, entre las que destacan: el estudio exhaustivo de casos particulares, la representación dinámica de figuras geométricas, la posibilidad de graficar para observar el comportamiento de las funciones, entre otras que posteriormente, en los capítulos 2, 6 y 7 discutiremos con más detalle. En la misma línea, el alumno no desarrollará un pensamiento de reflexión, mismo que únicamente puede encontrar a partir del estudio constante de situaciones generales y particulares de los problemas, lo cual se vuelve una tarea ardua sin el uso de la computadora, debido a que utilizando lápiz y papel, el tiempo necesario para graficar o dibujar es muy prolongado, lo que disminuye en gran medida el número de casos particulares o generales a estudiar. Tampoco contará con una idea clara del papel que desempeñan cada una de las variables con las que está trabajando, conocimiento que únicamente se consigue después de un prolongado análisis de las mismas, para el cual debe de utilizar un tiempo prolongado de estudio, superior al que el alumno invierte, pero con la ayuda del software, el tiempo necesario se reduce debido a las representaciones que nos presenta la computadora.

Así, la interrogante del desafío para la educación matemática está en la introducción y manejo de estas nuevas utilidades, las cuales no son simples herramientas sino nuevos sistemas de trabajo (Hivon, 2008). Esto plantea a los docentes nuevos retos respecto de su rol. Si aceptan el desafío e incorporan a sus clases las computadoras, deberán determinar cuáles serán las cuestiones o problemas que propondrán en las clases para que den sentido al conocimiento que están construyendo los alumnos.

I.2. JUSTIFICACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Hoy en día las materias que más problemas le producen a los estudiantes son sin lugar a duda las de matemáticas; situación que no es particular de un sólo nivel educativo sino que la encontramos en muchos de ellos, pasando principalmente por la educación secundaria, el bachillerato y la universidad: Generalmente en dichas materias se encuentran los índices más altos de reprobación, sin importar el nombre de la institución que ofrezca el plan de estudios.

Ante la problemática descrita en el párrafo anterior, nos vemos en la necesidad de, en primer lugar, plantear las causas por las cuales el nivel de reprobación, y en consecuencia de bajo aprendizaje, que se encuentra en los salones de clase es producido, en principio tenemos dos posibles tipos principales de causas: la primera tiene que ver con la dificultad que tienen en sí mismas las matemáticas; la segunda tiene que ver con los métodos de enseñanza, entre otras. Para el primer tipo no tenemos mucho qué hacer; las matemáticas si bien es una ciencia dinámica en cambio continuo, los conceptos que se estudian en el nivel básico y medio superior ya forman parte de un conjunto de hechos establecidos que es poco probable que podamos llegar a cambiar. Sin embargo, en los métodos de enseñanza hay todavía muchas oportunidades para mejorar el aprendizaje.

Los métodos de aprendizaje tradicionales están basados en la memorización de reglas y su aplicación a través de una serie de algoritmos; es común que el profesor en turno llene pizarrones con una serie de recetas y simbolismos sin sentido y significado para el alumno, terminando por no comprender los temas ni siquiera de manera teórica. Ante esta falta de comprensión, donde claramente los métodos de enseñanza tradicionales fracasan, es necesario realizar investigación, para encontrar otros métodos con los que el alumno se sienta más involucrado y claro está, mejore su aprovechamiento.

El método de enseñanza basado en la resolución de problemas es un fuerte candidato para realizar esta innovación, debido a que nos da un mayor horizonte de trabajo. En él, podemos pasar por cuatro etapas básicas: comprensión del problema, metodología para

resolver el problema, implementación de dicha metodología y comprobación. Cada una de éstas comprende sus respectivas heurísticas, que nos permiten en cierto sentido tener distintas estrategias de solución, además de que nos dan la posibilidad de elegir en algún momento programas generales y problemas específicos dependiendo del nivel de dificultad en que se aborden.

Aunque también hemos encontrado que el método de enseñanza propuesto en el párrafo anterior, no ha obtenido los resultados que se esperaban de él y el estudio de las causas por las que no se desenvuelve de manera correcta, es una preocupación importante, debido entre otras razones, a que es un paso obligado conocer el problema por el que se enfrenta, para tener siquiera algún indicio de cómo poder atacarlo.

Pero no basta con únicamente conocer las causas por las cuales el método de enseñanza basado en la resolución de problemas no produce los resultados esperados, también hay que proponer alternativas en las cuales se conserven las propiedades fundamentales del método y además se incluyan otras para contrarrestar los efectos negativos que llegara a tener tal método.

Hoy en día, cada vez es más común encontrar objetos en nuestro entorno que ocupan de la tecnología; basta observar utensilios básicos como la lavadora, televisión, computadora entre otros. Estos utensilios en el transcurso del tiempo han ido optimizándose. Basta con recordar las primeras computadoras de un tamaño enorme y un procesador muy lento, y compararlas con las actuales de tamaño diminuto y con un procesador muy eficiente. Así mismo, si comparamos las computadoras actuales con las que hace un tiempo relativamente corto, digamos unos 5 años, encontramos que el procesador ha aumentado su capacidad en algunos megahertz, además de que relativamente su precio se ha disminuido de forma considerable. No es ninguna predicción de adivinos que este comportamiento seguirá en el futuro, donde habrá computadoras cada vez más veloces, a un menor precio y con aplicaciones cada vez más avanzadas; si seguimos el mismo patrón entonces dichos cambios se verán realizados a corto y mediano plazo.

Aunque hoy en día, la mayoría de las escuelas todavía no introduce el software de manera directa en sus planes de estudios, sí prevalece la tendencia explicada en el párrafo anterior, de que llegará un momento a corto plazo en que las instituciones educativas se verán rebasadas y en consecuencia tendrán que implementar la utilización del software en sus programas educativos.

Ante esta situación, las escuelas deben de estar preparadas ante los diversos cambios que se presenten en el uso del software como herramienta educativa, debido a que cada día, los programas computacionales se están modernizando, siendo estos cada vez más eficientes, y de acuerdo con la ley de oferta y la demanda, más económico, lo que permitirá que estén al alcance de un número mayor de individuos, además de que cada vez realizarán de mejor forma las funciones que anteriormente mencionamos y otras; que posteriormente se llegaran a encontrar, lo que redundará en varios beneficios que posteriormente discutiremos.

Por lo anteriormente señalado, la presente investigación se sustenta en la necesidad de buscar formas en que los estudiantes de bachillerato puedan utilizar las herramientas tecnológicas, particularmente la computadora y el software de geometría dinámica denominado Geogebra, a través de actividades de aprendizaje de geometría básica enmarcadas en las nuevas tendencias propuestas por la reforma educativa (RIEMS, 2013). Como ya se ha mencionado, existe la necesidad de utilizar nuevas estrategias así como la generación de metodologías y la creación de ambientes de enseñanza propios para el salón de clase del nivel medio, que logren introducir al alumno en el uso de las TIC como sistemas de trabajo genuinos para el aprendizaje. Partimos de la realidad que tenemos en la escuela para adecuar propuestas metodológicas teóricas, que nos ayuden en el desarrollo del aprendizaje de la geometría básica.

I.3. OBJETIVOS

I.3.1. Objetivo General

El objetivo general de este trabajo fue el de tener un mejor entendimiento de los procesos que siguen los estudiantes y los recursos matemáticos que utilizan cuando trabajan con la computadora y el software educativo Geogebra en actividades de geometría básica. Particularmente analizando relaciones entre objetos geométricos involucrados en los polígonos regulares y en actividades de aproximación numérica.

I.3.2. Objetivos Específicos

En este trabajo fue importante que a partir de la realización de las actividades se haya obtenido un beneficio para la investigación educativa con el uso de las TIC, pero no fue menos importante que el alumno nos haya ayudado en la realización de las mismas y que haya obtenido también algún beneficio personal. Aquello que podemos ofrecerles se transforma entonces en la serie de objetivos específicos que quisiéramos lograr para ellos; entonces nos gustaría que los alumnos:

- Comprendan las ventajas que trae consigo el uso del software en el aula.
- Aprendan a visualizar reglas matemáticas en figuras geométricas.
- Aprendan que a partir de deducciones lógicas, es posible obtener reglas generales teniendo como base unas más simples.
- Aprendan a utilizar el software de geometría dinámica Geogebra.
- Consideren al software, como un instrumento para obtener datos, en aquellos problemas cuya solución no sea inmediata analíticamente.
- Tomen al software como una herramienta para visualizar el comportamiento de manera dinámica de alguna figura.

I.4. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Para lograr estos objetivos señalados en el apartado anterior, se plantean las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Qué características del software Geogebra permiten generar un ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes logren desarrollar competencias genéricas y disciplinares en el área de matemáticas como el aprendizaje colaborativo, el razonamiento geométrico y la generalización, entre otros?
2. ¿Aumentará el interés y la motivación del estudiante para el estudio de las matemáticas en los temas abordados?
3. ¿Qué importancia aporta el estudiante al uso del software Geogebra para el aprendizaje de las matemáticas?
4. ¿Qué estrategias y recursos matemáticos utilizaron los estudiantes para enfrentarse a las situaciones planteadas en las actividades?

Para dar respuesta a estas preguntas, se efectuaron las siguientes actividades:

- A. Se realizó un estudio documental con el fin de indagar sobre la didáctica de nociones asociadas a los polígonos regulares a lo largo de la enseñanza de la geometría en el nivel básico, ubicando las dificultades implícitas a las que se pueden enfrentar los estudiantes durante su estudio.
- B. Se diseñaron actividades con el fin de que los estudiantes pudiesen reflexionar sobre la imposibilidad de la construcción geométrica de algunos polígonos regulares y del porqué de dicha imposibilidad.
- C. Se realizaron varias experimentaciones de dichas actividades, con estudiantes de bachillerato en diferentes condiciones: grupos de estudiantes que decidieron participar por voluntad propia y un grupo de estudiantes al que se le requirió participar en la resolución de las actividades, como parte de sus actividades cotidianas en el aula.

- D. Se realizaron algunas entrevistas no estructuradas, haciendo cuestionamientos a los estudiantes por parte del investigador, acerca de sus intereses y motivación hacia el estudio de las matemáticas.
- E. La información obtenida a través del trabajo escrito y notas de observación de las entrevistas, se organizó y se analizó para reportar los resultados.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LA LITERATURA

En este apartado se hace un revisión de de diversos trabajos relacionados con la enseñanza matemática basada en la resolución de problemas, haciendo un énfasis principal en la parte correspondiente al uso de nuevas tecnologías tales como la computadora y el software educativo.

"El individuo es el espejo de la sociedad, entre más eficiente sea la educación, mejor se refleja"

II.1. CONCEPTOS GENERALES

II.1.1. ¿Qué es un Problema?

Problema es un análisis, donde el individuo tiene interés en conocer una solución y ésta no se encuentra de forma inmediata (Santos, 1997).

Con relación a la definición de lo que es un problema se hizo una clasificación de ellos (Fredericksen, 1984):

1. *Problemas bien planteados*, en ellos la solución se basa principalmente en la aplicación directa de un algoritmo y el problema da a entender claramente lo que se pide (no son de una manera formal problemas; sin embargo se consideran como tales).
2. Aquellos problemas bien planteados en los que se necesita que el estudiante realice alguna construcción que no sea inmediata.
3. Situaciones problema; es decir, aquellas situaciones que se localizan en la vida cotidiana donde el estudiante tiene que plantear y buscar la solución para dicho problema.

Schoenfeld (1983) afirma que los problemas que se estudian en el salón de clases son bien planteados, donde el profesor introduce una serie de recetas prefabricadas que le permiten al estudiante encontrar una solución.

II.1.2. Instrumentos utilizados en la enseñanza de las matemáticas

Robardel (2010) define un instrumento como una construcción personal que los seres humanos pueden desarrollar cuando se utiliza un artefacto. Drijvers y Trouche (2008)

argumentan que un instrumento ha sido desarrollado “si existe una relación significativa entre el artefacto y el usuario para un tipo específico de tarea”.

En el contexto de la enseñanza de las matemáticas, cuando los estudiantes utilizan un Sistema de Geometría Dinámica (DGS), se trabaja con representaciones de objetos matemáticos tales como: paralelas, perpendiculares, ángulos y figuras geométricas. A través de su trabajo, los estudiantes consideran gradualmente a DGS como una fuente de aprendizaje matemático convirtiéndose así en un instrumento para cada estudiante. Según Rabardel (2010), tal instrumento en general consiste de un material o aparato simbólico producido por el sujeto.

Los esquemas mentales son formas de hacer frente a las tareas y situaciones. La utilización de esquemas se define como una actividad multifuncional que engloba: pragmatismo, heurística y funciones epistémicas. La función pragmática implica una transformación de una situación y la obtención de resultados; la función heurística tiene que ver con el control y la planificación de la acción, mientras que la función epistémica implica la comprensión. Por su parte, Trouche (2004) define el “gesto” como la parte observable de los esquemas de utilización, argumenta que los gestos están relacionados con la actividad, mientras que la parte obscura esta relacionada con el pensamiento.

Rabardel (2010) divide a los sistemas de utilización de un artefacto en: “esquemas de uso” y “planes de acción”. Los esquemas de uso están orientados hacia acciones específicas con el artefacto, mientras que los planes de acción se orientan por la actividad para llevar a cabo una tarea específica.

Drijvers, et al. (2010) denominan “orquestración instrumental” a los distintos dispositivos que el maestro organiza. Trouche (2004) usa el termino “elabora” para incluir tales instrumentos, como una pantalla con proyector, dando la posibilidad de mostrar el uso de la herramienta a los estudiantes. Trouche se refiere a “orquestración instrumental de maestros” a la manera de envolver a los estudiantes en sus logros de enseñanza y en la organización del ambiente de aprendizaje en el cual el software computacional es usado.

Trouche (2004) identifica dos métodos elementales de uso de las herramientas tecnológicas: una configuración didáctica y un modo de exploración. En la configuración didáctica él incluye opciones concernientes a la organización del salón de clase, como por ejemplo, si los estudiantes trabajan solos o en equipo, los tipos de recursos que son usados, tales como hojas de cálculo, etc. El modo de exploración concierne a cómo los profesores deciden su configuración preferida; por ejemplo el uso de las hojas de trabajo y las características principales en el logro del alumno. En particular, el término organización engloba decisiones tales como: elegir si los estudiantes realizan el trabajo en parejas o individualmente, el tipo de tareas a realizar, así como el tipo de DGS a utilizar.

II.1.3. La enseñanza de la geometría. El modelo de Van Hiele (Van Hiele, 1986)

El modelo abarca dos aspectos:

I. Descriptivo: mediante el cual se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar el progreso de estos.

II. Instructivo: que marca unas pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento geométrico.

La idea central de la componente descriptiva, es que a lo largo del proceso de aprendizaje, los estudiantes pasan por una serie de niveles de razonamiento, que son secuenciales, ordenados y tales que no se pueden saltar ninguno.

Cada nivel supone la comprensión y utilización de los conceptos geométricos de una manera distinta, lo cual se refleja en una manera diferente de interpretarlos, definirlos, clasificarlos y hacer demostraciones.

La componente instructiva del modelo, se basa en las fases de aprendizaje, éstas constituyen unas directrices para fomentar el desarrollo de la capacidad de razonamiento matemático de los estudiantes y su paso de un nivel de razonamiento al siguiente, mediante actividades y problemas particulares para cada fase.

Como veremos, el carácter visual de los conceptos geométricos, apoyado con el software GeoGebra, facilita la comprensión de los mismos, a partir del reconocimiento manipulativo, el análisis y la clasificación. En virtud de la dificultad que el estudiante del nivel bachillerato presenta al abordar el estudio de las matemáticas, y la geometría en particular, con esta investigación se pretende, con base en este modelo, apoyado con el software GeoGebra, describir el nivel de razonamiento en que se encuentra un estudiante al momento de enfrentarse a las actividades que se les proponen así, una propuesta metodológica que le permita avanzar en la comprensión de los conceptos. El modelo es constituido por tres etapas fundamentales: la percepción denominada *"Insight"*, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje. Cuando una persona actúa en una situación que no le es familiar, de forma competente logra lo que el modelo denomina la percepción, utilizando consciente y deliberadamente las acciones requeridas para resolverla.

Se logra la percepción cuando los estudiantes comprenden lo que hacen, por qué lo hacen y cuándo lo hacen; además, pueden aplicar su conocimiento a la resolución de nuevos problemas no rutinarios. La etapa descriptiva la cubren los niveles de razonamiento, los que identifican una estratificación del razonamiento humano en forma jerárquica, en la que se indica cómo *"progresan la capacidad de razonamiento matemático de los individuos desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en este campo"*. La etapa prescriptiva, correspondiente a las fases de aprendizaje, proporciona al docente directrices para orientar a sus alumnos a subir en niveles de razonamiento.

De la propuesta de Van Hiele, nos interesan especialmente los niveles de razonamiento que ha establecido, con el fin de tener un marco clasificatorio del trabajo de los estudiantes.

II.1.3.1. Niveles de razonamiento de Van Hiele

Nivel 1. Reconocimiento visual

El alumno percibe las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades, pudiendo incluir atributos irrelevantes en la descripción que hacen. Además, perciben las figuras como objetos individuales, es decir que no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase. Las descripciones de los estudiantes están basadas en sus semejanzas con otros objetos (no necesariamente geométricos); suelen usar frases como: ...se parece a..., ...tiene forma de..., etc. Los estudiantes no suelen reconocer explícitamente las partes de que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas.

Nivel 2. Análisis

El estudiante se da cuenta de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y que están dotadas de propiedades matemáticas; pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal. Además de reconocer las propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos, los estudiantes pueden deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación. Sin embargo, no son capaces de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades.

Nivel 3. Clasificación

En este nivel comienza la capacidad de razonamiento formal (matemático) del estudiante. Ya es capaz de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de descubrir esas implicaciones; en particular puede clasificar lógicamente, las diferentes familias de figuras a partir de sus propiedades o relaciones ya conocidas. No obstante, sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación.

Los estudiantes pueden describir una figura de manera formal, es decir pueden dar definiciones matemáticamente correctas, comprenden el papel de las definiciones y los

requisitos de una definición correcta. Si bien los estudiantes comprenden los sucesivos pasos individuales de un razonamiento lógico formal, lo ven de forma aislada, no entienden la necesidad de encadenamiento de estos pasos, ni entienden la estructura de la demostración. Al no ser capaces de realizar razonamientos lógicos formales ni sentir su necesidad, los alumnos no comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.

Nivel 4. Deducción formal

Alcanzando este nivel, los estudiantes pueden entender y realizar razonamientos lógico-formales; las demostraciones (de varios pasos), ya tienen sentido para ellos y sienten su necesidad como medio para verificar la verdad de una afirmación; comprenden la estructura axiomática de las matemáticas, es decir el sentido de la utilidad de términos no definidos, axiomas, teoremas, etc. Los estudiantes aceptan la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas, la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto.

Nivel 5. Rigor

En este estado el alumno puede trabajar en una variedad de sistemas axiomáticos, esto es, se pueden estudiar diferentes geometrías, y se pueden comparar sistemas diferentes. Se ve la geometría en abstracto.

II.2. ESTRATEGIAS Y MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

II.2.1. Métodos de solución de problemas

Polya (1965) consideró que la solución de un problema se podría dividir en tres etapas bien marcadas:

1. *Planteamiento del problema.* En él, la persona plantea o entiende la dificultad, utilizando como técnica el realizarse preguntas tales como: ¿Qué es lo que sé?, ¿qué es lo que quiero saber?, ¿qué dificultades podría tener?, ¿qué es lo que no entiendo del problema?, ¿qué otras cosas tengo que aprender para solucionar el problema?, entre otros muchos cuestionamientos no menos importantes.
2. *Búsqueda de una solución:* Aquí, el sujeto debe de trabajar con situaciones análogas que son más manejables para el individuo, buscar la solución de problemas más específicos, entre muchas otras estrategias a seguir.
3. *Comprobación de la estrategia:* En esta tercera etapa, el examinador comprueba que su resultado sea el correcto, aplicando los casos límite, buscando otras alternativas de solución, comparando los resultados encontrados, evaluando casos particulares, etc.

Por otro lado, Schoenfeld (1987) encontró cuatro etapas principales:

1. El estudiante en su afán de aprender matemáticas debe observar de manera detallada los conocimientos con los que cuenta, es decir debe realizar un inventario sobre lo que pide el problema, realizar un análisis de la meta a la cual se quiere llegar, buscar todos los posibles métodos que se tienen que ayuden a su solución, y finalmente buscar una posible solución.

Schoenfeld(1985) anuncia que hay cuatro características en esta etapa, que influyen considerablemente a que el individuo encuentre una solución factible o que simplemente se desvíe de su objetivo:

- 1) A partir de los conocimientos adquiridos, el alumno podría hacer especulaciones acerca de la solución que podría encontrar.

- 2) El alumno puede desarrollar conocimientos que no sean válidos.
 - 3) El alumno puede encontrar procesos rutinarios.
 - 4) Puede no tener conocimiento acerca de una ley que sea esencial para la solución del problema.
2. La segunda de las etapas que propone Schoenfeld (1987) tiene que ver con los métodos desarrollados por los alumnos para plantear sus soluciones. En esta etapa entran de manera inmediata las ideas de Polya sobre las heurísticas de solución, en las cuales este último plantea estrategias como: El desarrollo de submetas, es decir, en lugar de resolver el problema general, se resuelven de manera independiente partes de él. Además Polya (1965) señala que es necesario observar la situación especial donde se está inmerso, para plantear la submetas que sea más adecuada. Por ejemplo, para calcular la suma de los números del 1 al 1000, excepto los múltiplos del 4 y del 10, es necesario introducir como submetas: realizar la suma del 1 al 1000, la suma de 1 al 240 y multiplicarla por 4 y por supuesto la suma del 1 al 100 y multiplicarla por 10. En cambio, para la solución del problema de encontrar triángulos inscritos en la circunferencia de radio r , es necesario como submeta encontrar el incentro del triángulo. Otra de las propuestas que plantea Polya es la solución de problemas específicos.
3. La tercera etapa importante en el método de Schoenfeld (1987) tiene que ver con la metacognición la cual se refiere a un análisis acerca de las características individuales que el objeto tiene, desarrollar una constante autocrítica sobre el proceso seguido, etc. Polya a su vez también propone dos estrategias:
- 1) que el maestro también presente sus dificultades;
 - 2) realizar un análisis sobre las creencias que tenemos acerca de lo que son las matemáticas y con base en eso desarrollar estrategias de aprendizaje.

Otro método importante es el método de desvío. En dicho método se intenta de que el sujeto cambie de sistema de referencia utilizando una operación t , posteriormente resuelva el problema r , que es equivalente al problema inicial solo que en otro sistema, para finalmente transformar la solución de r al sistema original mediante la

operación inversa de t (es decir se trata de cambiar al problema por otro equivalente en un entorno donde el problema equivalente sea más manejable). Por ejemplo, si consideramos la multiplicación de dos números en el sistema romano, observamos que en éste se carece de un algoritmo; no obstante, en el sistema arábigo es posible encontrar un método sencillo en el que se puede realizar la operación de manera eficiente y con poco esfuerzo. De tal forma que una alternativa eficaz de solución es transformar los números que están dados en el sistema romano por sus equivalentes, posteriormente se operan por medio del algoritmo preestablecido, y finalmente se transforma el número arábigo obtenido, por su correspondiente interpretación en el sistema romano.

Otro método importante en la solución de problemas es el método de linealidad; en él, el sujeto puede encontrar soluciones de problemas geométricos, donde se busquen relaciones mínimas entre segmentos, que a su vez conlleven al problema de encontrar relaciones mínimas entre números, ocupando la igualdad de varias expresiones, y resolviendo su sistema.

Este método consiste en que el individuo a partir de varios segmentos de recta, busque alinear la mayor cantidad de segmentos, encontrando de esta manera la solución del problema, debido a que una línea recta es la distancia mas corta entre dos puntos en el espacio euclidiano. Por ejemplo, en el problema, encuentre el punto P sobre una recta dada l , en el que la distancia de ese punto P a dos puntos dados sobre la misma región sea mínima (entendiendo que la línea recta divide al plano en dos regiones). Para encontrar la respuesta usando el método de linealidad, lo que se podría hacer es realizar la proyección de uno de los puntos sobre la otra región, y posteriormente trazar la línea recta que une el otro punto de los dados y el punto proyectado, como la línea recta es la distancia más corta entre dos puntos en el espacio euclidiano, encontramos que esa distancia es mínima, de donde se deduce que el punto X donde intercepta dicho segmento con la recta l , es aquel que produce un mínimo en la distancia, y como la distancia el punto proyectado a X , es la misma

que la distancia de X al punto no proyectado, entonces se ve claramente que esta distancia es mínima, siendo este punto X la solución del problema planteado.

Si observamos los métodos planteados anteriormente y los métodos propuestos por Polya, vemos una semejanza importante; ambos buscan obtener las soluciones a los problemas a partir de estrategias para solucionar problemas más simples.

II.2.2. Estrategias de solución de problemas

Una parte crucial en la resolución de problemas es tener una serie de estrategias que permitan, si no solucionar toda la gama de problemas, sí tener una forma de plantear la solución a una buena cantidad de ellos. Para lograr esta estrategia hay que tener en mente que por sí sola no basta, sino que también hay que tener en cuenta el contexto donde se vaya a aplicar y con base en ello, poder aplicar la estrategia de la mejor forma posible. En matemáticas existe un sinnúmero de problemas distintos, cada uno con una solución específica que hace de la tarea de buscar un patrón de soluciones algo larga, tediosa y muchas veces improductiva. Sin embargo, varios matemáticos, entre ellos Polya, han intentado dar distintos métodos de solución a problemas comunes, obteniendo de ello estrategias que aunque no engloban la solución de todo el universo de problemas, sí una buena parte son manejables con dichas estrategias. Entre éstas se encuentran las siguientes (Santos, 2007), planteadas a través de ejemplos específicos:

1. La sustitución del problema; en muchas ocasiones un problema complejo se puede intercambiar en un problema más sencillo, simplemente realizando un cambio de variable. Por ejemplo, en el problema de encontrar las raíces del polinomio:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} + x^2\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \quad (1)$$

Una alternativa para encontrar los valores buscados es realizar el cambio de variable

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Para obtener la expresión:

$$\frac{1}{2}(y^2 - 2) + 2y$$

siendo esta ultima una ecuación cuadrática que se puede resolver por medio de la formula general:

$$y = -4 \pm \sqrt{6}$$

Si posteriormente sustituimos y por su respectivo valor, y resolvemos la ecuación cuadrática encontrada es posible llegar a la solución.

2. Leer atentamente el problema y realizar un análisis de posibles estrategias de solución, que no involucren resolver la solución más característica del problema. En muchas ocasiones observamos que la solución general del problema, conlleva una serie de algoritmos o pasos complicados, que hacen que la solución no pueda ser obtenida de una manera sencilla. Para hacer frente a esta situación se puede, en base al resultado pedido por el problema, no realizar el problema general, si no más bien alguna sub estrategia que permita encontrar la solución al problema dado, sin necesidad de buscar todas las soluciones posibles. Por ejemplo en el problema: encuentra la suma de los números cuya suma de cuadrados es 36 y que multiplicados den -10. Una alternativa de solución, sería resolver el sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 36 \quad (1);$$

$$x * y = 10 \quad (2)$$

Sin embargo este sistema nos puede llevar a realizar varias operaciones que harían que el tiempo de solución fuera muy alto. En lugar de eso, una alternativa más eficaz se podría encontrar al aplicar la propiedad:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (3)$$

en vista de que si a la relación (1) le sumamos 2 veces la ecuación (2) obtenemos el lado derecho de la ecuación (3), que es igual al lado izquierdo de la expresión (3), y si posteriormente realizamos las operaciones algebraicas correspondientes: a 36 restarle 2 veces 10, se deduce la expresión: $(x + y)^2 = 16$ (4), y si finalmente a

ambos lados de la expresión 4 se aplica la función raíz cuadrada se descubre que el resultado es:

$$x + y = \pm 4.$$

3. Construir alguna figura auxiliar que nos permita visualizar de manera óptima la información dada en el problema. Por ejemplo, en el planteamiento: encuentra los valores de a y b para los cuales las expresiones:

$$y = ax^2 \quad (1)$$

$$y = bx \quad (2)$$

tienen un punto, 2 puntos, o ningún punto en común. En primera instancia, no es posible adivinar una posible solución que justifique las hipótesis planteadas, no obstante si realizamos varias gráficas, variando los parámetros a y b , por ejemplo de -5 a 5, podríamos visualizar en las gráficas las diversas raíces para cada valor de a y b .

4. Igualar expresiones que sean equivalentes pero que tengan distinta estructura. Por ejemplo, para demostrar el teorema de Pitágoras, nos valemos de una figura donde se ponga se manifestó la expresión:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$$

desarrollamos el primer término y cancelamos los datos en común de los dos lados de la igualdad para obtener que

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

5. Otro método común es sumar un cero conveniente, o multiplicar una expresión por un uno adecuado; esto se realiza en demostraciones donde únicamente tenemos de inicio expresiones tales como

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) \quad (1)$$

y necesitamos relaciones de la forma

$$f(x) - f(x_0).$$

Para tal fin, le sumamos a la expresión (1) el término

$$f(x)g(x_0) - f(x)g(x_0),$$

factorizamos posteriormente los términos relacionados y finalmente obtenemos la relación

$$f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x) - f(x_0)).$$

Otro ejemplo donde es posible aplicar este método es aquel donde se pide encontrar el centro y el origen de una circunferencia. Por ejemplo, para la ecuación

$$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0 \quad (1).$$

Se pueden encontrar el centro y el radio, si completamos los cuadrados; en y es claramente obtenible la expresión

$$y^2 - 8y + 16$$

ó equivalente

$$(y - 4)^2$$

que si la sustituimos en la ecuación (1) se tiene:

$$(y - 4)^2 + x^2 - 10x = 0 \quad (2)$$

sumándole a la relación anterior, un 0 conveniente dado por $25 - 25$, y realizando un rearrreglo de los términos, la expresión (2) se transforma en

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

en la que es fácil visualizar que el centro está en la coordenada (5, 4) y que el radio es 5.

6. Si el problema como tal no es muy específico o es muy general, se puede pensar en un caso especial, donde se mantenga el mismo cuestionamiento pero con una o varias relaciones adicionales. Por ejemplo; si se nos pide encontrar el triángulo inscrito en una circunferencia que tenga un área máxima, una buena estrategia de solución puede estar encaminada hacia considerar a un diámetro como uno de los lados del triángulo. De esta manera el problema se transforma en encontrar el triángulo de mayor área inscrito en una circunferencia que tiene como lado un diámetro. Como el área de un triángulo es proporcional al producto de su base por su altura, y si tomamos el diámetro como la base, entonces el problema se reduce a encontrar el triángulo con mayor altura, siendo éste el isósceles. Posteriormente regresamos al problema original, pero ya con la intuición de que el triángulo pedido puede ser el equilátero.

II.2.3. Problemas y estrategias recomendados para utilizarse en el salón de clase

Sobre la forma de enseñar matemáticas, a través de la solución de problemas, existen muchos puntos de vista sobre las estrategias y problemas que se deben de enseñar en el salón de clase; enseguida enunciaremos las principales opiniones:

1. Se sugiere el desarrollo de la teoría, y al final de ésta, enunciar una lista de problemas relacionados con los temas estudiados.
2. También se propone el desarrollo de la teoría y en el transcurso de ésta, introducir diversos problemas que permitan ejemplificar y dar una visualización del alcance del material aprendido.
3. Santos (2007) considera que la mejor alternativa, es introducir en el salón de clases, los cuatro pasos planteados por Polya para resolver un problema. Recomienda una clase dinámica donde el alumno aprenda los fundamentos matemáticos desarrollando sus ideas a partir de la solución de los problemas que el realice.

Aunque estas cuatro estrategias son muy alentadoras, observamos que en la práctica éstas no obtienen los resultados pedidos, debido tal vez a que son incompletas. Es por ello que además se da una alternativa distinta (aunque en gran parte siguiendo los pasos de Polya) que está dividida en tres etapas(Santos, 1997):

- 1) **Análisis:** en esta parte se plantea el problema, se buscan alternativas de solución y se entienden las diversas hipótesis y conclusiones.
- 2) **Planteamiento o desarrollo:** en él, el estudiante debe de ser capaz de buscar estrategias de solución que le permitan resolver el problema, debe de usar sub estrategias como las planteadas por Polya, así como buscar patrones entre los datos, realizar algún caso específico, ejemplificar el problema con algún ejemplo, buscar analogías con problemas parecidos, entre otras muchas actividades.
- 3) **Conclusión:** el alumno pone a prueba su resultado , sustituyéndolo en casos extremos, comprobándolo con casos limite, relacionándolo con soluciones del problema obtenidas por medio de otro método, sustituyendo el caso base, etc.

II.2.4. Otras estrategias de solución de problemas

Durante mucho tiempo se planteó, como la mejor estrategia para aprender matemáticas, aquella en la cual el estudiante memorizaba algoritmos, y métodos para resolver problemas aritméticos ó cosas por el estilo. Durante muchos años se consideró que una persona que dominara de manera pulcra los algoritmos tales como las tablas ó operaciones aritméticas prolongadas, era una persona buena en matemáticas.

Con el tiempo, la sociedad se ha dado cuenta, de que en ese tipo de enseñanza, no se encuentran las herramientas que el estudiante necesita desarrollar para la comprensión y aplicación de las matemáticas. Es por ello que hay que desarrollar una educación donde el aprendiz interactúe con las matemáticas de una manera dinámica, cuestionándose sobre las posibles soluciones, considerando varias soluciones, buscando la mejor solución etc.

Los de problemas más acordes con la enseñanza matemática son aquellos en los que se pone a trabajar la creatividad del alumno, permitiéndole desarrollar diversas estrategias de solución igualmente validas.

Por ejemplo, un típico ejercicio rutinario en que el alumno tenga que trazar la bisectriz de un ángulo dado, se podría intercambiar por aquel en el que el alumno tenga que construir la bisectriz de un ángulo hipotético, donde únicamente se tienen 2 rectas no paralelas, sin conocer formalmente el punto de congruencia.

En este problema existen diversas estrategias de solución por ejemplo:

- 1) Poner una hoja debajo de la hoja donde está el dibujo y con una regla prolongar las líneas hasta el punto de congruencia.
- 2) Trazar un par de líneas rectas paralelas a cada uno de los dos segmentos de recta, llamémoslas a y b para el primer segmento, y c y d para el segundo, que además cumplan la condición que la distancia de la primera recta a a , sea igual que la distancia de la segunda recta a c , como también la distancia de la primera recta a b , sea igual a la distancia de la segunda recta a d , posteriormente se trazan las rectas a, b, c y d hasta el punto de congruencia de a con c , y de b con d , encontrando finalmente que la recta que pasa por esos puntos de congruencia es la bisectriz.

- 3) Trazamos una línea que una las dos rectas, formándose dos ángulos, construimos la bisectriz de cada una de ellos, y buscamos su punto de congruencia, este punto pertenece a la bisectriz pedida, debido a que las bisectrices de un triángulo concurren; posteriormente repetimos los pasos con otra recta que una las rectas originales, teniendo así dos punto de la bisectriz.

En el problema anterior el estudiante, tiene varias alternativas de solución, todas ellas igualmente válidas que le permiten desarrollar su creatividad al momento de escoger una solución particular.

Pero no solamente se pueden construir problemas como el anterior, también es posible construir problemas como: ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador x gane el juego?, ó problemas de misterio como por ejemplo: ¿de qué figura es este fragmento? Etc. Lo importante es que el alumno tenga varias soluciones y que utilice su creatividad para encontrarlas.

II.3. DIFICULTADES Y ALTERNATIVAS DE SOLUCIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

II.3.1. Identificación de las fuentes de los malentendidos

Brousseau (1997) propuso que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas podrían ser obstaculizados por tres tipos de factores que se distinguen por su origen: ontogénicos, epistemológicos y didácticos. Los dos primeros se refieren a la capacidad del alumno o a la comprensión. Y la última se refiere a las dinámicas seguidas en el salón de clases. Los obstáculos que producen las primeras dos opciones no se pueden eliminar. Sin embargo, el tercer tipo es producido más bien por las capacidades del método del docente o a las

limitaciones del conocimiento del alumno, o a que los alumnos no hacen exactamente lo que el profesor les pide que hagan.

II.3.2. Dificultades en la enseñanza a partir de la solución de problemas

Vemos que no importa qué estrategia ocupemos para enseñar los fundamentos de las matemáticas a partir de la solución de problemas, los niveles de aprendizaje siguen un patrón más o menos homogéneo, muy abajo de los niveles óptimos, es por ello que se ha pensado que dicho sistema tiene las siguientes deficiencias:

- 1) Actualmente los salones de clase son muy numerosos, y al ser tan numerosos el maestro no tiene tiempo de interactuar con todos sus alumnos, ni de conocer el aprendizaje que cada uno vaya teniendo sobre la materia, de modo que no puede conocer la capacidad del alumno para afrontar los problemas.
- 2) El tiempo que el maestro tendría que dedicar a cubrir un programa estándar es muy elevado siguiendo esta técnica, de modo que el profesor tendría que dejar los programas vistos a medias.

II.3.3. Sugerencias para hacer frente a los inconvenientes del método de enseñanza por medio de la resolución de problemas

1. Introducir al estudiante en un ambiente, donde vaya por el camino del autoaprendizaje o autosuficiencia (es decir, enseñarle diversas estrategias o situaciones que se encuentran al estudiar sin maestro).

2. Que el programa académico, más que ser un programa laborioso, sea más bien un programa resumido donde el estudiante tenga que aprender únicamente las ideas principales de los fundamentos matemáticos.
3. Encaminar al alumno hacia una dinámica de las matemáticas, donde éste pueda manipular los distintos conceptos de esta disciplina, y con base en ello, logre ser capaz de conjeturar alguna solución plausible.

Es necesario además observar que el mejor ambiente para el desarrollo de estas estrategias es precisamente en grupos pequeños, debido a que en ellos el estudiante:

1. Intercambia información con sus compañeros y desarrolla conjeturas que posteriormente el grupo completo pueda inferir si son verdaderas o falsas.
2. Se puede desarrollar un debate entre los alumnos donde el profesor desempeñe el papel de modulador.
3. El alumno se introduce en un contexto donde todos sus compañeros tienen los mismos problemas que él, de forma que no se siente desvalorado cuando no encuentre la solución a un problema.

II.4. LOS PROFESORES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

II.4.1. El conocimiento que se requiere para la enseñanza de las matemáticas

En muchas ocasiones se ha pensado que aquella persona que tiene muchos conocimientos, es la mejor preparada para dar clase. Desgraciadamente hay muy pocos estudios que hablen de ello y los que existen en muchas ocasiones se contradicen.

Inclusive Begre (1979) llegó a la conclusión de que un mayor conocimiento de la materia de matemáticas, podría estar asociada con un efecto negativo en el rendimiento de los estudiantes.

Posteriormente se realizaron estudios que se centraron en buscar lo que realmente necesita un profesor para enseñar matemáticas. De manera de Shulman (1986) introdujo la noción de conocimiento pedagógico de contenido (PCK), correspondiente al conocimiento complementario para enseñar matemáticas que no viene en los programas. En otro enfoque, Sternberg (1995) insistió en la necesidad de trabajar en el conocimiento epistemológico para mejorar la enseñanza y propone transformar las prácticas actuales mediante el cambio de las actitudes de los profesores y la mejor comprensión de las matemáticas. Este es el enfoque que se ha utilizado en el presente trabajo, haciendo uso de la noción de paradigmas geométricos, en un esfuerzo para explicar algunas de las dificultades encontradas en la enseñanza y en el aprendizaje de la geometría.

II.4.2. Papel del profesor en la enseñanza basada en la solución de problemas

El papel del profesor en la solución de problemas, lo describe un prestigiado matemático introduciendo (Santos, 1997) dos etapas:

- 1) Desarrollo de conceptos y definiciones: normalmente en el salón de clases el maestro o profesor le da al estudiante las definiciones o conceptos sacados de un libro, para que él, se los aprenda de memoria como si fueran una oración, sin conocer de manera adecuada el contenido envuelto en ellas, y claro, sin evaluar la certeza o el alcance del enunciado. El por eso, que en el salón de clases, es necesario que el alumno con ayuda de su profesor tenga actividades para desarrollar sus propias ideas o teoremas, que en un contexto grupal pueda defender, con argumentos validos y claros. Por ejemplo; a un grupo de alumnos se les puede pedir que construyan una medida para saber cuándo un rectángulo es más cuadrado que otro, a lo que los alumnos pueden dar varias respuestas como las siguientes:

- i) Dados el largo y ancho del rectángulo, consideremos que un rectángulo es más cuadrado que otro sí, el valor absoluto de la diferencia de estos números es menor.
- ii) El rectángulo A es más cuadrado que el rectángulo B, si la magnitud del cociente entre el largo y ancho del rectángulo A, es más cercano a 1 que el cociente del ancho entre el alto del rectángulo 2.
- iii) El rectángulo A se parece mucho a un cuadrado si su área, es aproximadamente igual a su ancho al cuadrado.
- iv) La relación entre la cuadratura de un rectángulo es directamente proporcional a la semejanza de la medida de dos ángulos interiores opuestos, teniendo ésta un máximo en 90 grados.

Posteriormente, el maestro puede, pedirle a los alumnos que desarrollen un debate, donde el puede participar de modulator, en el cual, se plantee cuál de las medidas es la mejor alternativa para encontrar la cuadratura de un rectángulo, así como discutir las diversas ventajas y desventajas de cada una.

- 2) Métodos heurísticos: Anteriormente explicamos que el profesor podía encaminar a los estudiantes hacia un método heurístico específico, que le permitiera solucionar un problema particular. Además de eso, el maestro puede murmurarle al alumno, una posible forma de cómo ocupar la heurística. Por ejemplo, para resolver el problema del cuadrado mágico (trata de encontrar el arreglo de los números del 1 al 9, introducidos en un cuadrado de nueve casillas, que cumple con las propiedades de que la suma de los elementos de una fila, una columna o una diagonal tienen el mismo valor), el profesor le puede preguntar a sus alumnos sobre los datos principales encontrados en el texto, a lo que los alumnos podrían contestar, que el valor de la suma permanece constante; posteriormente el maestro cuestionaría a sus alumnos acerca del lugar que deberían tomar los números principales como el 1, 9, o 5.

Muchas veces en la educación media superior no se hace uso de la construcción de figuras, para ejemplificar situaciones particulares de un problema dado; incluso observamos que en la educación superior hay alumnos que no han hecho una gráfica de

alguna función en su trayectoria educativa. También es común que el estudiante en matemáticas considere a las figuras y demostraciones como dos cosas completamente ajenas. Sin embargo construir figuras en el salón de clases es una actividad importante que se debe practicar continuamente, debido a que ello le permite tener al alumno un contexto más claro de lo que pide el problema.

Un sistema básico que el maestro puede ocupar en el aula es presentarle al alumno, una figura específica y éste trate de encontrar todas las propiedades matemáticas representadas en el dibujo.

Arcavi (2000) lista cuatro características de los roles de los maestros en las clases con el uso de DGS: una de ellas es “dirijir la discusión, plantear nuevas preguntas y promover la discusión entre diferentes representaciones”.

II.4.3. En la organización de los GWS, los profesores difieren notablemente en la forma en que miran los métodos utilizados por los estudiantes

Con el fin de describir la complejidad geométrica de trabajo, la noción de espacio de trabajo geométrico (GWS) fue introducido. El GWS (Kuzniak, 2006) es un lugar que está organizado para asegurar el trabajo de la gente para resolver problemas de geometría (por ejemplo, geómetras). Establece la referencia al complejo entorno en el que se actúa al solucionar problemas. Se compone de dos planos que se encuentran en el material mismo tiempo e intelectual: el plano de los componentes y el plano cognitivo.

Algunos maestros no intentaron distinguir, entre los elementos de la geometría I y II en las soluciones propuestas por los estudiantes. Estos profesores esperaban soluciones solo dentro de la geometría II y hacen hincapié en la obligación de presentar una demostración rigurosa. En consonancia con este enfoque, destaco la importancia de las definiciones estándar y propiedades matemáticas que se espera que los estudiantes conozcan y utilicen.

Sin embargo, en contraste con este punto de vista estricto de las obligaciones de los alumnos, otros profesores se refirieron al marco dentro del marco geométrico de geometría II mientras se trata de razonar en los objetos familiares de geometría I. un profesor contestó a la segunda pregunta con este razonamiento: “es cierto que puede verse fácilmente verse en la figura. Pero ¿Por qué y como puede justificarse? ¿Como podemos definir un romo a diferencia de un cuadrado?”. Por otro Gerar, un profesor de secundaria subrayo que su problema era dejar en claro a los estudiantes que la figura no es plaza a pesar de la evidencia visual. Otro profesor que trabaja en una escuela secundaria, reitero solo las reglas del razonamiento formal: “recuerde que tenemos que demostrar los que afirmamos. No se ha demostrado que las diagonales tienen el mismo punto medio”. Arthur, un importante profesor de secundaria su esta respuesta a la pregunta de cómo ejecutar la clase “el trabajo hay que enfocarlo en lo que sea necesario y asegurarse de que la explicación es suficiente para dibujar diagramas que verifiquen ciertas proporciones”. Comenta que en el ejemplo dado puede ver lo que puede ser verdad, pero después de hacer esta deducción tiene que seguir escribiendo una prueba simple que afirme que esta correcto.

II.5. COMPARACIÓN ENTRE EL USO DE PROBLEMAS GENERALES Y ESPECÍFICOS

II.5.1. ¿Problemas generales o específicos?

Un cuestionamiento importante, que vale la pena realizar, al momento de buscar una estrategia para enseñar matemáticas, es: ¿qué tipo de problemas son los más apropiados

para aprender: aquellos que son de carácter general, o los que responden a una área específica del saber?

Para dar solución a dicha pregunta existen tres diferentes corrientes del pensamiento:

- 1) (Polya, 1945; Begle, 1979) propone a los métodos generales como la principal herramienta en la enseñanza matemática.
- 2) (Perkins y Salomon, 1987) plantea la utilización de métodos específicos de cada área, como la construcción de figuras en geometría, realizar operación en aritmética, etc.
- 3) (Rabinowittz y Glaser, 1985; Larkin, 1982; Schoenfeld 1985) propone la utilización de métodos específicos para algunas situaciones y en otras el uso de métodos generales.

La primera de las tres corrientes del pensamiento, tuvo un gran auge sobre todo en los años 70's y 80's siendo en estos últimos, donde se llevara a la práctica con mayor rigor.

A pesar del gran auge que tuvieron estas ideas sobre todo durante los años 80's, se encontró que el rendimiento académico de los estudiantes de matemáticas no mejoró considerablemente.

Producto de ello, se empezaron a realizar pruebas sobre la manera en que los expertos y los alumnos resolvían problemas, encontrando los siguientes resultados:

- 1) los grandes expertos en las diversas ramas del saber, tales como los matemáticos, los físicos, o los maestros de ajedrez, han visto y entendido una gran cantidad de situaciones específicas que le permiten, al momento de encontrarse en una situación particular, recordar aquellas configuraciones parecidas que le sean útiles. Como ejemplo, el maestro de ajedrez reconoce varias alternativas de juego. En cambio se ha visto a estudiantes que al enfrentarse a un problema no intentan alguna alternativa de solución, debido a que no conocen las herramientas indispensables para la solución.
- 2) Desarrollando los métodos generales, es posible que el alumno conozca estrategias aplicables a muchas situaciones, sin embargo se ha visto que muchas veces el alumno no sabe cómo concretar dichas estrategias a situaciones más simples.

También tenemos el caso análogo, en el que el conocimiento se enseña de manera tan específica, que cuando el alumno intenta extenderlo hacia otro dominio, no encuentra la forma de hacerlo.

En otro experimento se observó que es posible que un individuo que haya manejado diversas situaciones en distintas formas, pueda manejar situaciones muy parecidas; por ejemplo una persona que ha manejado diversos vehículos en distintos caminos, es posible que sepa manejar una camioneta.

Aunque pareciera a estas alturas que los métodos específicos son más efectivos que los métodos generales, se reconoce que hay situaciones en donde los métodos generales juegan un papel más importante que los específicos. Éstas son aquellas en donde el estudiante o el profesional se encuentra ante una situación nueva, en la que no ha trabajado rutinariamente. En este caso, la persona debe de utilizar algunas alternativas de solución generales, tales como las planteadas por Polya (1965): desarrollar casos específicos, plantear sub metas, relacionar el problema con algún problema análogo en el que ya se haya trabajado anteriormente, entre otras muchas actividades.

Un matemático alguna vez declaró: “los métodos generales son como una mano, necesita de todo en cuerpo para funcionar, y funciona de manera distinta en cada caso” (Perkins y Salomon). En dicha frase es posible observar que aunque los métodos generales son de gran aplicación, al utilizarlos hay que considerar el enfoque del problema que se está resolviendo.

Por otro lado, Schoenfeld (2010) plantea la hipótesis de que la mejor manera en que un estudiante puede aprender matemáticas, es aquella en donde trabaja de manera similar a como lo hace un matemático, el cual desarrolla estrategias tales como discutir hipótesis, desarrollar resultados de manera intuitiva, etc.

II.6. LA TECNOLOGÍA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

II.6.1. La enseñanza de las matemáticas con software: un interés general

En muchos países hay un creciente interés en la aplicación y uso de software en la enseñanza de las matemáticas. En Noruega por ejemplo, se considera como una de las cinco habilidades básicas en el aprendizaje escolar; desafortunadamente varios estudios (Crisan et al. 2007; Kastan and Sinclair, 2009; Managhan 2004) describen numerosos obstáculos y cuestiones que se deben abordar para que los maestros puedan implementar programas de cómputo en el proceso de enseñanza aprendizaje. Para contrarrestar sus efectos es necesario capacitar a los maestros de diferentes maneras y ayudar a sus estudiantes a tener éxito en su trabajo con los sistemas de cómputo, particularmente con los Sistemas de Geometría Dinámica (DGS, por sus siglas en inglés).

En Noruega, los estudiantes empiezan a utilizar los DGS en octavo grado, generalmente el software Cabri Géomètre, para posteriormente cambiar paulatinamente a Geogebra. En dicho país su plan de estudios para el octavo grado comprende un tratado de geometría ocupando como herramienta auxiliar a Cabri. En dicho programa se evalúan seis características; dos de ellas son las siguientes:

- Examinar, hacer, dibujar, y construir figuras utilizando diversas herramientas, y clasificarlas en función de sus propiedades.
- Trabajar sobre el paralelismo y la medición de ángulos. Construir ángulos y perpendiculares.

II.6.2. Las relaciones entre GWS y paradigmas geométricos

La constitución del GWS depende de la forma y componentes para la solución de problemas geométricos o también depende de las capacidades cognitivas de un usuario en particular, experto o principiante.

La composición de un GWS variará con el sistema educativo, las circunstancias particulares y los participantes. En la práctica, la construcción de un GWS no se basa en un paradigma único, sino más bien en la interacción entre los distintos paradigmas: vamos a estudiar cada tipo de GWS de acuerdo con su idioma.

Geometría I (Kuzniak Alain, 2012); el estudio de las configuraciones del mundo real son su objetivo, donde se permite tomar medidas de una figura para resolver un problema.

Geometría establecido II (Kuzniak Alain, 2012). ; además del horizonte de la geometría I, se encuentra un horizonte axiomático que la acerca a la geometría euclidiana.

Fragmentado geometría II (Kuzniak Alain, 2012). ; esta geometría se caracteriza por bloques discretos de razonamiento hipotético deductivos organizados en torno a las propiedades y algunas configuraciones geométricas básicas.

II.6.3. Una experimentación

En el trabajo de Ingvald Erfjord (2011) se examinan las clases con DGS en dos escuelas que incluían cuatro grupos de octavo grado, que comenzaron a utilizar DGS casi al mismo tiempo. Una de las escuelas, Fjellet, es una escuela pequeña con solo una clase por grado. La Otra escuela, Austpark, tenía cuatro clases en cada grado, donde un profesor enseña dos clases y dos profesores enseñan una clase cada uno. Se obtuvieron datos de la maestra (una mujer) de Fjellet y de dos de los tres profesores (los tres hombres) de Austpaark, un maestro que imparte una clase y el otro con las dos clases. En ambas escuelas, el tamaño de las clases fue de aproximadamente 25 estudiantes. Uno de los maestros de Austpark, había tenido preparación previa del uso del software DGS (Cabrí). A Los otros dos maestros únicamente se les había presentado Cabri en alguno de alguno

de sus cursos. Los pseudónimos para las escuelas son (F y A para Fjellet y Austpaerk, respectivamente al referirse a los profesores de las dos escuelas se escribe: maestros F y A profesores, respectivamente).

Los maestros A realizaron diez lecciones de 45 minutos con DGS, mientras que la maestra F, realizó doce sesiones de 45 minutos cada una; pero dividió a la clase en dos grupos, con solo 12 o 14 estudiantes cada uno, de tal manera que cada estudiante recibió solo 6 clases de 45 minutos con DGS. Los maestros A implantaron el uso de DGS en dos pruebas de matemáticas, incluyendo la anual, mientras que la maestra F, no valoró dicha alternativa.

Al mismo tiempo, que la mitad de la clase de la maestra F trabajó con DGS, la otra mitad de la clase trabajó con tareas del libro de texto, para posteriormente cambiar de actividades después de 45 minutos.

Los alumnos de los maestros A, veían contenidos geométricos que habían sido tratados previamente o serían tratados en la siguiente lección sin el DGS. Un ejemplo de ello fue la siguiente actividad.

- En una lección, el profesor utilizó regla y compás para realizar diferentes construcciones de perpendiculares.
- En otra lección, el profesor se refirió a la forma en que podría construir dichas perpendiculares con DGS. Ello únicamente lo ilustró y construyó en el pizarrón.
- En la siguiente lección, el profesor ya con el DGS a la mano, llevó a cabo construcciones similares a las hechas anteriormente con compás en el DGS.

Se observó el deseo de un docente para establecer conexiones entre el uso de DGS y las actividades del libro de texto.

Se vio una clara diferencia entre los profesores A y F con respecto a cuándo consideraron conveniente iniciar el uso de DGS en sus clases, ya que mientras que los profesores trabajaban de manera simultánea con regla, compás y DGS, la profesora F empezó a utilizar DGS varias semanas después.

A la hora de exponer a los alumnos las actividades a realizar, el maestro F, presentó las tareas en un pizarrón, pasando posteriormente unos minutos en una lectura plenaria. Las

tareas eran presentadas de una manera abierta. En contraparte, los maestros A, utilizaron descripciones bastante detalladas.

En resumen, en las lecciones con DGS maestro el F dirigió su atención al autoaprendizaje de los alumnos, a menos que fuera necesaria su ayuda, en cuyo caso les ofrecía su atención. Sin embargo, su objetivo principal era observar que sus alumnos compartieran sus logros con algún otro alumno. En contraparte, los maestros A asistieron a sus estudiantes con mucha más rigidez, proporcionándoles material de instrucción para guiar su desarrollo en la construcción de figuras con DGS.

Los resultados de este estudio muestran que una combinación de los enfoques de la orquestación de los profesores y un mayor énfasis en las relaciones matemáticas sería la mejor opción.

II.6.4. Uso de tecnología

Las capacidades cognoscitivas del ser humano son tan reducidas como manejar únicamente siete o quizás ocho dígitos en una operación aritmética (Miller, 1956), inclusive si se hace uso de lápiz y papel, las capacidades están muy lejos de las necesidades básicas necesarias del hombre moderno. Es por eso que el hombre necesita de herramientas que le permitan realizar un sinnúmero de operaciones en poco tiempo.

Muchos maestros y educadores piensan que el uso de la calculadora y de la computadora no es recomendable en el salón de clases debido a que el alumno desecha los fundamentos matemáticos. Hinsley (1977) argumenta: “en las aulas los maestros están simplemente usando la tecnología para hacer lo que han hecho siempre, aunque ha menudo afirman haber cambiado sus practicas”. Por otro lado Ingvald Erfjord (2011) afirma: la similitud entre las lecciones con regla y compás y aquellas con DGS, puede ser explotada por los profesores en sus análisis sobre construcciones posteriores hechas con DGS, después de las realizadas con lápiz y papel.

Para nuestro sistema de enseñanza de las matemáticas a partir de la solución de problemas, la computadora es una fuente de actividades auxiliares como las siguientes:

- 1) Permite al alumno realizar muchos ejemplos, donde se tomen en cuenta casos particulares de la situación general del problema planteado, con los cuales el estudiante puede encontrar conjeturas que le permitan solucionar el problema.
- 2) En muchas ocasiones, examinando los distintos ejemplos, se pueden encontrar patrones de solución a diversos problemas.
- 3) Hay software donde se permite manipular objetos geométricos o funciones, dándole oportunidad así al estudiante de cambiar sus parámetros.
- 4) Existe software interactivo donde el estudiante manipula varios datos.
- 5) Se pueden crear programas cuya función consista en hacer demostraciones.

CAPÍTULO III

DISEÑO DE LA SECUENCIA DE APRENDIZAJE

En este capítulo se presentan las actividades que se aplicaron a los alumnos, así como un análisis de las respuestas que se esperaban por parte de ellos. Se evalúa también el objetivo que tenía cada uno de los incisos en la comprensión de la actividad, y un análisis sobre la propuesta dada.

"Nacimos sin conocer al mundo, sin educación vivimos sin haber estado en él"

III.1. ACTIVIDAD: CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS

REGULARES UTILIZANDO TRIÁNGULOS ISÓSCELES

Esta actividad se puede dividir en tres partes claramente definidas. La primera de ellas corresponde a un fundamento teórico, donde se espera que el alumno, a través de contestar una serie de preguntas, sea capaz de recordar algunos conocimientos previos, que podrían haber sido perdidos con el paso del tiempo. Por ejemplo, la noción de polígono, de polígono regular, de tipos de triángulos según sus lados, etc.

La segunda parte de la actividad corresponde a algunas actividades con el software Gegebra, en donde el estudiante tiene que construir algunas figuras básicas así como manipular otras que le fueron proporcionadas en un archivo adicional. El objetivo de esta parte es que el alumno construya figuras poligonales utilizando diferentes triángulos con medidas específicas de tres parámetros: el ángulo α , la longitud L del lado y el número n de triángulos que se tenían que utilizar para poder “cerrar” exactamente un polígono (véase la figura 1).

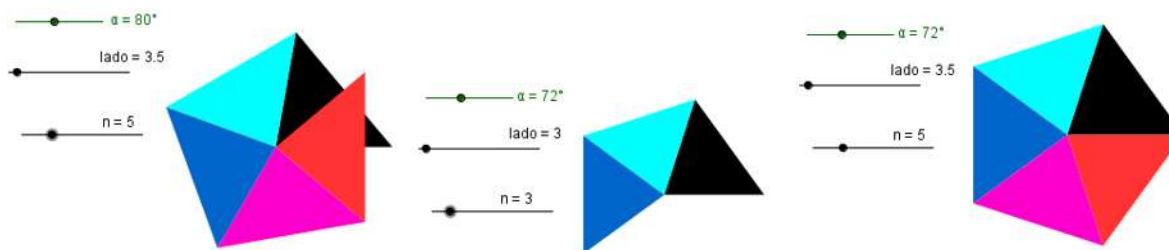


Figura 1. Parámetros a variar en la actividad

Era importante que el alumno se diera cuenta de que la longitud L , no afectaba el cierre exacto del polígono; que son α y n los parámetros de los que depende esta situación. Así mismo, era importante que el alumno descubriera alguna relación entre n y α .

La tercera etapa corresponde a las conclusiones; en ésta se espera que el alumno plasmara algunos de los resultados que se habían encontrado anteriormente, como la imposibilidad de construir un polígono regular de siete lados, o que mencionaran algunos valores de n para los que el polígono no cerraba de manera exacta. Con base en esos

resultados, se les pide por último que mencionaran para cuáles valores de n con los que habían trabajado previamente, es imposible construir un polígono regular.

III.1.1. Primera Pregunta

La primera pregunta en la actividad es: ¿Qué es un polígono? Antes de plantearla se le pide al alumno que observe dos figuras que se encuentran en la parte superior de la hoja de trabajo y con base en ellas, conteste las preguntas.

RESPUESTA ESPERADA: Para esta primera pregunta, esperábamos que si bien, el alumno no supiera a ciencia cierta lo que es un polígono, sí pudiera expresar sus ideas mediante dibujos o, en su defecto, se apoyara de las figuras presentadas (véase la figura 2), para poder intuir una definición de dicho objeto.

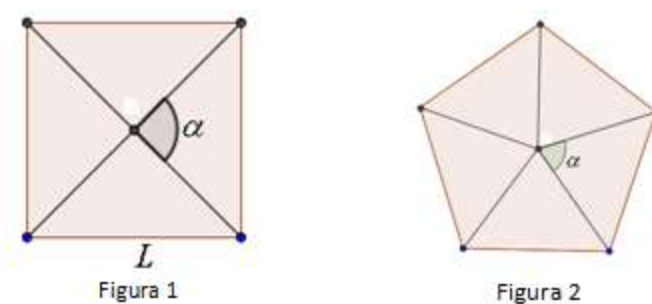


Figura 2. Ejemplos de polígonos mostrados en la actividad

Si el alumno basara su respuesta en sus conocimientos previos, esperábamos una respuesta del tipo: “Figura cerrada, formada por segmentos que se interceptan de dos en dos en sus extremos”, o una respuesta semejante a ésta.

Si, en su caso, el alumno basara su respuesta en la imagen mostrada en la figura 2, esperaríamos una respuesta como la siguiente: Figura geométrica formada por varios triángulos aparentemente todos iguales además de tener cierta simetría. Éstos podrían ser isósceles o equiláteros. Cada triángulo comparte un lado con el adyacente a él, y parece que están acomodados de tal forma que el ángulo α queda en el centro de la figura”. Si bien ésta no sería una definición formal de polígono, correspondería a aquella que surge de la visualización de las figuras mostradas.

PROPÓSITO: Que el alumno desarrolle habilidades para analizar una figura geométrica con base en sus propiedades. Así mismo que sea capaz de reconfigurar figuras a partir de otras con características particulares. Se espera que dicho análisis le permita dar una definición propia de la figura. Esta actividad nos permitió también medir el conocimiento previo que tiene el alumno y detectar si los estudiantes tienen problemas al momento de tratar de plantear una definición.

JUSTIFICACIÓN: Dado que en primera instancia nuestra actividad se llama "Construcción de polígonos regulares utilizando triángulos isósceles", se puede inferir que uno de los objetos geométricos que se utilizará, además del concepto de triángulo, es el de polígono y es a partir de ello de donde nace la necesidad de que el alumno no solamente recuerde una definición abstracta memorizada en algún momento de su vida estudiantil, sino más bien como un objeto familiar al que pueda identificar como una figura definida por él mismo, habiendo analizado las características de este objeto que posteriormente se estudian.

III.1.2. Segunda pregunta

La segunda pregunta hecha a los estudiantes fue: ¿Cuándo decimos que un polígono es un polígono regular?

RESPUESTA ESPERADA: Como ya se mencionó, esperábamos de los alumnos dos tipos de respuestas: una basada en las figuras mostradas y otra basada en sus conocimientos previos. En el primer tipo de respuesta, se esperaba que pudiesen reconocer que lo planteado en la pregunta anterior correspondía a un polígono regular, de forma que esperábamos de los estudiantes, más que dar una respuesta, hicieran alguna observación en este sentido: De que las figuras mostradas correspondían a polígonos regulares y en consecuencia, ellos nos interrogaran sobre lo que es un polígono.

En el segundo punto de vista, donde suponíamos que los estudiantes ya habían aprendido a construir polígonos, considerábamos que debían solamente completar la idea con base a la definición de polígono dada en la pregunta anterior, completando simplemente con la frase: "Polígono donde la longitud de los segmentos es siempre la misma".

La tercera respuesta esperada se deriva de la segunda opción, y corresponde a una respuesta de tipo diccionario, en la que se hace énfasis en el lado L y el ángulo α , diciendo que un “polígono regular es un polígono en el que la longitud de los lados es la misma (L), y la suma de los ángulos α es en total 360° ”.

PROPÓSITO: Esperábamos que los estudiantes pudieran introducir un objeto más sofisticado que el polígono, como es el caso del polígono regular; además buscábamos que los estudiantes observaran las principales diferencias entre un polígono y un polígono regular. Ello conlleva el buscar que el alumno se familiarice con el objeto estudiado en el momento; es decir, el polígono regular construido con triángulos isósceles.

JUSTIFICACIÓN: Es un hecho que el alumno, después de haber estudiado un tema con su profesor en el salón de clase, posteriormente a la evaluación del mismo, lo va perdiendo en el transcurso del tiempo si éste fue aprendido memorísticamente. Este olvido dependerá de la forma en que se dio el aprendizaje, así como de la experiencia o de la interacción que el estudiante tenga con el objeto a lo largo del tiempo, a tal grado que en algunas ocasiones aquel conocimiento que en principio parecía estar acabado, se va convirtiendo en un recuerdo aislado en el que alguna vez se trabajó.

El estudio del polígono es un tema tratado por los estudiantes a lo largo de su educación primaria (formas, perímetros, áreas), secundaria (deducción de la fórmula del perímetro y área) y se retoma en el bachillerato en el curso de Geometría plana como un objeto geométrico ampliamente estudiado. Después de estudiarlo y analizar sus propiedades desde diferentes perspectivas (Van Hiele, 1986) se esperaría que alumno de bachillerato sea capaz de manejar dicha noción de manera adecuada. Desgraciadamente esto no siempre ocurre, como posteriormente veremos a lo largo del reporte de resultados de esta actividad.

Si bien podemos suponer que el alumno no cuenta aún con una noción de polígono construida completamente, sí podemos suponer que ha desarrollado algunas capacidades que le permiten trabajar de manera intuitiva con un él. Es de todo ello que nace la necesidad de esta pregunta, al afirmar que posiblemente que el alumno únicamente necesite de una pequeña ayuda para recordar las nociones de polígono y polígono regular

que en algún momento estudiaron. Y si no tuvieron esta oportunidad, éste sea un buen momento para que a través del análisis y descomposición de figuras geométricas, puedan ir desarrollando este conocimiento.

III.1.3. Tercera pregunta

La tercera pregunta hecha a los alumnos fue: En la figura 1 (véase la figura 2), ¿cuánto crees que mida el ángulo α ?, discute tu respuesta.

RESPUESTA ESPERADA: Para responder a esta pregunta, los estudiantes tenían que usar sus conocimientos base en geometría para encontrar alguna de las varias alternativas de solución. Los alumnos tenían que utilizar un argumento basado en la figura; por ejemplo, alguien podía argumentar que entre los cuatro ángulos α , correspondientes a los cuatro triángulos, se formaba un ángulo de 360° . Al ser todos los ángulos α iguales, entonces α sería igual a $\frac{360}{4} = 90$; es decir $\alpha = 90^\circ$.

Otra alternativa de solución estaría dada en términos de la observación de que la figura dada es un cuadrado y como tal, cumple muchas propiedades. Por ejemplo, que en un cuadrado, las diagonales son perpendiculares, obteniendo de ello el resultado pedido.

Otra manera de llegar al resultado es aplicando la propiedad de que la suma de los ángulos interiores en un triángulo es 180° .

Para uno de los triángulos de la figura (véase la figura 3), consideremos que ω es el ángulo en la base del triángulo isósceles, entonces: $\alpha + 2\omega = 180$; pero en cualquiera de las esquinas del cuadrado se tiene que $2\omega = 90$, entonces $\alpha = 90^\circ$.

También se tiene como alternativa demostrar que el triángulo al que pertenece el ángulo α , es un triángulo rectángulo a partir de la ecuación, dado que todas las magnitudes las podemos expresar en términos de la longitud de un lado del cuadrado, debido a que los otros lados de los triángulos son la mitad de la longitud de la diagonal.

Éstas son algunas, entre otras respuestas que posiblemente se puedan encontrar.

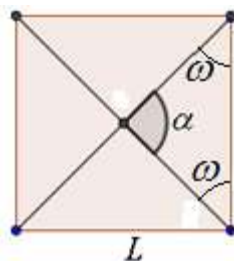


Figura 3. Obtención de α a partir de la suma de ángulos interiores en un triángulo isósceles

PROPÓSITO: Como acabamos de mencionar, esta actividad es básicamente de observación y de aplicar algunos de los conocimientos con los que el alumno contaba previamente. Es también una pregunta de análisis, en la que el estudiante tenía que ocupar de manera activa sus conocimientos previos, considerando las características que tenía esta pregunta podemos observar que el principal propósito es medir el nivel crítico de los estudiantes además como su conocimiento en los temas relacionados con el cuadrado, tema principal en el estudio de los polígonos en los diversos niveles educativos.

JUSTIFICACIÓN: Sin duda alguna, el cuadrado es la figura geométrica que tiene un mayor número de propiedades producto de sus diversas simetrías; es de ésta propiedad de donde nace la gran gama de respuestas que el alumno podía dar en este ejercicio; desde unas muy simples hasta las más sofisticadas que necesitan de resultados más sofisticados. Sin embargo, a partir de casi cualquier propiedad del cuadrado se podía llegar a una respuesta correcta después de realizar un análisis, en muchos casos no muy sofisticado. También el cuadrado es una de las figuras geométricas que aparecen más frecuentemente en nuestro entorno junto con el círculo; conocer bien sus propiedades nos ayudaría a ocuparlas de manera eficiente ya que la solución de algunos problemas se facilitaría.

III.1.4. Cuarta pregunta

La cuarta pregunta está relacionada con el tipo de triángulos que fueron utilizados para formar los polígonos regulares: rectángulo, equilátero, isósceles, escaleno, etc.

RESPUESTA ESPERADA: Esperábamos por parte de los alumnos una respuesta que mostrara por un lado, coherencia con respecto a la pregunta anterior; es decir, si el ángulo α en la figura 3, mide 90° , entonces el triángulo es rectángulo. También se esperaba que

ellos se acordaran de que en un triángulo equilátero sus ángulos interiores miden 60° , de manera que como el ángulo α de la figura 3 no tiene esa medida, entonces el triángulo en dicha figura no es equilátero.

Como otra alternativa, los estudiantes utilizaran el teorema de la suma de los ángulos interiores en un triángulo (igual a 180°). Así, como los ángulos interiores en un triángulo equilátero son todos iguales, entonces cada uno mide $\frac{180}{3} = 60$ grados.

PROPÓSITO: El propósito de esta pregunta es que el estudiante reflexione sobre las características de los triángulos que conforman un polígono regular, de acuerdo a la figura proporcionada; esto es, se trata de triángulos isósceles que, en el caso del cuadrado, resultan también rectángulos.

JUSTIFICACIÓN: La clasificación de triángulos según sus lados y sus ángulos, así como el establecimiento de relaciones entre ángulos y lados, son actividades importantes en el estudio de la geometría para estar en mejores condiciones de analizar figuras en términos de sus propiedades y no solamente en términos de sus características métricas o perceptivas. Por ejemplo, cuando la medida del lado desigual en un triángulo isósceles es muy cercana a la de los lados iguales, la tarea de identificación perceptual de esta diferencia se vuelve muy difícil, a tal grado que esta pequeña diferencia podría considerarse como un error de medición y entonces considerar al triángulo como equilátero. Si perceptualmente existe duda sobre las medidas de los lados, es necesario reflexionar sobre las propiedades de la figura. En las figuras proporcionadas en la hoja de trabajo (véase la figura 2), la reflexión y el análisis de sus propiedades deberían encaminar al estudiante a la conclusión de que el triángulo no es equilátero. Estos análisis representan una fuente de conocimientos y el tener que recurrir a ellos o saber en qué momento ocuparlos, es una actividad necesaria para minimizar sus errores.

III.1.5. Pregunta número cinco

La pregunta cinco, es una pregunta que necesita de un conocimiento fundamentado en temas referentes a triángulos isósceles, que no se puede obtener directamente de la figura 2 (véase la figura 2), a menos que se construya la bisectriz del ángulo α ,

correspondiente a alguno de los triángulos formados. La pregunta planteada a los alumnos es la siguiente: ¿Qué relación hay entre el ángulo α , el lado L , y los lados adyacentes al ángulo α ?

RESPUESTA ESPERADA:

Si bien no se espera una respuesta precisa a esta pregunta, sí se espera que los estudiantes puedan darse cuenta que la variación de alguno de los elementos mencionados, provoca cambios en los otros si siempre tratamos con un polígono. Estas variaciones pueden surgir de la manipulación de los parámetros de las figuras.

La relación matemática entre el ángulo α , el lado L , y los lados adyacentes al ángulo α , puede obtenerse como sigue. Primeramente es necesario recordar que en un triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo α (véase la figura 4) también es mediana, mediatriz y altura. Esto es, tanto divide al ángulo α por la mitad, como divide al lado opuesto perpendicularmente en partes iguales.

Posteriormente podemos observar que a partir del triángulo original, generamos dos triángulos rectángulos congruentes uno de cuyos ángulos es $\alpha/2$. Si la base del triángulo original mide L , entonces los lados laterales del triángulo medirán $W = L/2 \operatorname{sen}(\alpha/2)$. Con lo que obtenemos una relación entre W, L y α .

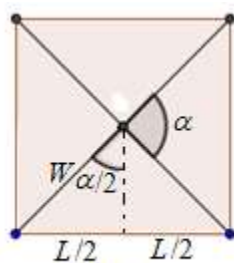


Figura 1

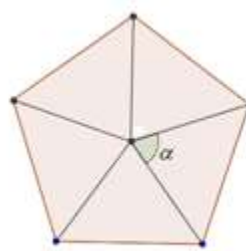


Figura 2

Figura 4. Separación de un triángulo en otros dos, utilizando la bisectriz

PROPÓSITO: Medir la capacidad de los alumnos al presentarle situaciones en las que tengan que utilizar algún tipo de construcción auxiliar, así como medir sus conocimientos base, cuando se les presenta un problema que no es trivial.

JUSTIFICACIÓN: Conocer la potencialidad de los estudiantes para buscar estrategias que le permitan resolver problemas complejos. Así mismo, se espera que los estudiantes utilicen sus conocimientos en otras áreas de las matemáticas para resolver problemas. Además,

este tipo de preguntas puede reflejar el nivel de cuestionamientos que se les puede presentar a los estudiantes para que él mismo no se sienta frustrado al no poder contestar la pregunta, sino que más bien se sienta motivado al obtener en el transcurso de una actividad un conocimiento base que le permita desarrollarse de mejor manera.

III.1.6. Pregunta número seis

La siguiente pregunta es equivalente a la pregunta 2 y está expresada en los siguientes términos: En la figura 2, ¿Cuánto crees que mida el ángulo α ?, discute tu respuesta.

RESPUESTA ESPERADA: Para esta pregunta, el estudiante tiene que explorar con el software para dar una respuesta inductiva a esa pregunta. Es decir, si bien consideramos que el estudiante de bachillerato puede contestar con precisión a esta pregunta haciendo cálculos exactos, se espera que dicho resultado sea obtenido de la manipulación de parámetros en el software (véase la figura 5).

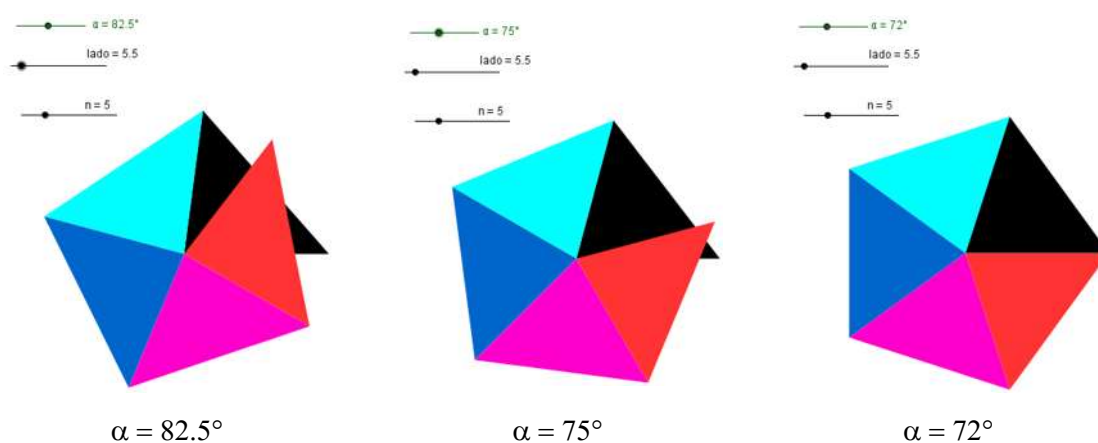


Figura 5. Diferentes valores para α , en el caso de una figura de 5 lados

El cálculo del ángulo α puede darse observando que, al ser congruentes los cinco triángulos que forman el pentágono, la suma de los cinco ángulos α tendrá que ser igual a una vuelta completa, es decir 360° ; por lo tanto, al dividirse 360° entre 5 nos da un valor para cada uno de ellos de 72° .

PROPÓSITO: Visualizar una figura es una buena estrategia, para que el alumno se dé cuenta de la validez de un resultado o de sus aplicaciones; que el alumno desarrolle esta capacidad es el principal objetivo que tiene esta pregunta.

JUSTIFICACIÓN: El triángulo base para el polígono de la figura 2 es un ejemplo claro de un triángulo isósceles que a primera vista pareciera tener forma de triángulo equilátero, y por tanto, para validar la respuesta es necesario realizar un estudio analítico. Conocer la diferencia entre un triángulo isósceles y un equilátero es importante para no aplicar al triángulo isósceles las diversas propiedades que tiene el triángulo equilátero.

III.1.7. Pregunta número siete

La última pregunta de esta sección es: ¿Puedes predecir, cuánto mediría el ángulo α , correspondiente al triángulo isósceles base para un polígono regular de ocho lados?, discute tu respuesta.

REPUESTA ESPERADA: Esperábamos que los alumnos contestaran esta pregunta con un argumento parecido al de la pregunta 6; esto es, diciendo que sí se puede construir un polígono regular de ocho lados, ya que el número 8 es un divisor de 360; esto es $45 \times 8 = 360$, así que el ángulo α tendría una medida de 45° en este caso.

PROPÓSITO: Que el alumno se diera cuenta de que a partir de deducciones y resultados previos es posible formular otros, generalizando los razonamientos previamente contruidos.

JUSTIFICACIÓN: Las matemáticas son una ciencia que se construye a partir de la identificación, experimentación y comprobación de regularidades; deducir resultados más generales a partir de otros particulares, es una habilidad que se debe aprender acompañándola de procesos de comprobación y validación.

III.1.8. Actividades con software

En este apartado se pide a los estudiantes que respondan seis preguntas:

1. ¿Existe otro triángulo, aparte del isósceles, que se pueda utilizar como base para construir un polígono regular? Discute tu respuesta.
2. Si usas como base un triángulo equilátero, ¿qué polígono te resulta?
3. Abre el software GeoGebra.
4. Construye un triángulo base con la herramienta “Polígono”.
5. Trata de construir un polígono regular con dicho triángulo base, ayudándote de la herramienta “Refleja objeto en recta”.
6. ¿Pudiste construirlo?, ¿a qué crees que se deba tu resultado?

RESPUESTA ESPERADA: Aunque el triángulo isósceles, es el principal instrumento para construir un polígono regular como los mostrados en las anteriores, nos hubiera gustado que los alumnos se hubieran referido al triángulo equilátero y al triángulo rectángulo, como casos particulares del isósceles.

En la parte 4, esperábamos que los alumnos en primera instancia construyeran un triángulo arbitrario, suponemos que la mayoría de los alumnos tendrían que construir un triángulo escaleno, o algún otro que no tuviera mucha simetría, para que posteriormente intentaran construir el polígono regular con él, hasta que se dieran cuenta de que no era posible y, finalmente llegaran a la conclusión de que no lo pueden construir porque no es un triángulo isósceles.

PROPÓSITO: Que el alumno se diera cuenta, de que no con cualquier tipo de triángulo es posible construir un polígono regular como los mostrados en la figura 2; que es necesario que dicho triángulo tenga las propiedades de los triángulos isósceles.

También nos interesa que el alumno se dé cuenta, que muchas veces cuando se establecen relaciones generales a partir de casos particulares, los resultados generales encontrados pueden no ser válidos.

JUSTIFICACIÓN: En algunos de los ejercicios anteriores, marcamos la necesidad de que el alumno aprenda a través de procesos inductivos, obtenidas a través de varios ejemplos particulares, pero como mencionamos también, algunas de las reglas propuestas pueden llegar a ser erróneas, Que el alumno se dé cuenta de esto es muy importante en

matemáticas y que es una de las razones por las que es necesario validar los resultados utilizando otros procesos (lógico deductivos).

III.1.8.1. Primera parte.

Este inciso esta dado de la siguiente manera:

Realiza las siguientes actividades:

1. Abre el archivo de Geogebra titulado “Polígonos”.
2. Manipula la barra de desplazamiento correspondiente a n , hasta que obtengas un valor de n igual a 4.
3. Manipula la barra de desplazamiento de α pasando por todos sus valores posibles.
4. Registra el valor de α donde se forma un polígono regular de 4 lados y un polígono regular de 3 lados. $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$
5. Nuevamente manipula la barra de desplazamiento de n , hasta llegar a un valor de 8.
6. Manipula la barra de desplazamiento de α pasando por todos los valores posibles y registra aquel valor de α con el que se formó un polígono regular. $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$

RESPUESTA ESPERADA: Como en esta actividad, el alumno básicamente todo lo que tenía que hacer era seguir una serie de instrucciones, con las que esperábamos que fuera capaz de obtener para α los valores de 120° y 90° .

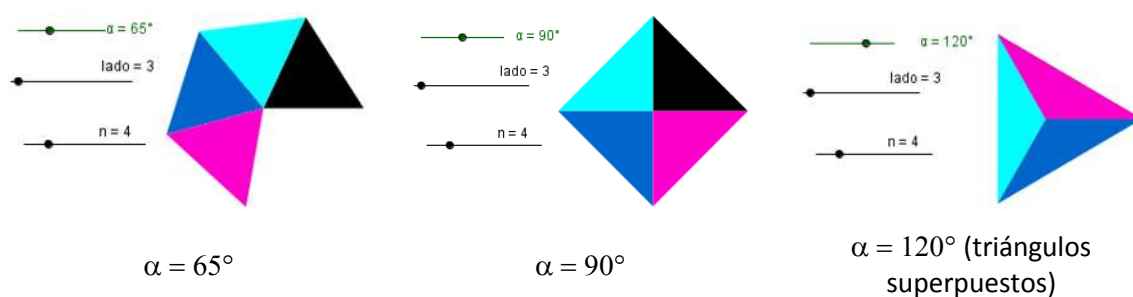


Figura 6. Diferentes valores de α , en el caso de una figura de 4 lados

Para el polígono regular de ocho lados esperábamos que los alumnos indicaran un ángulo de 45° grados (véase la figura 7).

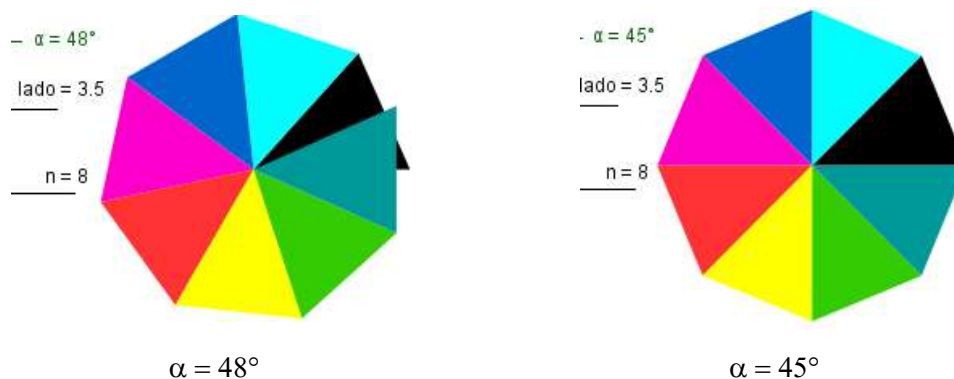


Figura 7. Diferentes valores de α , en el caso de un polígono regular de 8 lados

PROPÓSITO: Que el alumno analice el comportamiento de la figura para diferentes valores del ángulo central; así mismo, que comience a utilizar algunas de las características del software Geogebra para generar habilidades con el uso de los sistemas de geometría dinámica.

JUSTIFICACIÓN: Sobre todo en los países industrializados, el manejo de software, se convierte en una de las capacidades que el alumno debe manejar de manera fruida. Desgraciadamente en nuestro país todavía no ocurre así, algunos estudiantes afirman que en toda su vida estudiantil aún no han manejado en ningún momento algún tipo de software de geometría dinámica; sin embargo, el saber manejar algún tipo de software les genera capacidades que les ayudan en el manejo de otros sistemas computacionales. Algo necesario para explotar el gran potencial que trae consigo la tecnología, es primeramente saber cómo hacer un uso óptimo de ella.

III.1.8.2. Segunda parte.

Este inciso está compuesto de una serie de tareas que en seguida mostramos:

Realiza las siguientes actividades.

- Manipula la barra de desplazamiento de n , hasta que obtengas un valor de 7.
- Manipula la barra de desplazamiento de α , hasta que obtengas un heptágono.
- Aumenta el valor de L hasta 500.

- Da clic derecho sobre el botón que tiene este símbolo .

- e) Pon el puntero del ratón sobre cualquier parte de la zona gráfica, y con el botón derecho del ratón apretado, arrástralo de derecha a izquierda.
- f) Regresa el puntero del ratón, lo más a la izquierda que te sea posible.
- g) Repite los dos pasos anteriores hasta que observes el fin del polígono.
- h) ¿Tu construcción resultó ser un polígono?, discute tu respuesta.

RESPUESTA ESPERADA: Esperábamos que los estudiantes se dieran cuenta que la figura de siete lados, sin importar qué valor de α tomen, en ningún momento se cierra totalmente (véase la figura 8).



Figura 8. Un polígono de 7 lados en el zoom, con $L = 45.5$ y $\alpha = 51.4^\circ$

PROPÓSITO: Mediante la experimentación con Geogebra, descubrir la imposibilidad de construir de manera exacta un polígono regular de siete lados, y tratar de justificar este resultado.

JUSTIFICACIÓN: Hay muchas construcciones de los números reales, una de ellas introduce sucesiones de Cauchy que nos induce, debido a que el campo de los números reales es completo, a hablar de convergencia. Esto implica que existen números reales para los cuales no importa qué tanto nos acerquemos a él a través de un racional, siempre existirá una pequeña distancia entre ese número racional y nuestro “número límite”. Si bien el tratamiento de este tema a nivel bachillerato no puede tomar la formalidad dada en el análisis de Cauchy, con el uso de las herramientas tecnológicas es posible generar en él ideas intuitivas poderosas que le acerquen paulatinamente a dicho resultado. La importancia de este tipo de temas en el bachillerato, radica en que el alumno se dé cuenta de que a pesar de que existen algunos puntos (números) que podemos considerar como prohibidos, si nos acercamos lo suficientemente a ellos encontramos un comportamiento aceptable.

III.1.8.3. Tercera parte.

Este inciso consiste en repetir la actividad anterior solo que ahora para $n = 11$ y $n = 13$.

RESPUESTA ESPERADA: No se pide respuesta alguna; basta con que se dé cuenta que el 7 no es el único número para el que no se puede construir un polígono regular.

PROPÓSITO: Que el alumno se dé cuenta que hay algunos valores de n , para los cuales el polígono regular de n lados no existe.

JUSTIFICACIÓN: El estudiante podría considerar que para $n = 7$ es un caso aislado, de tal forma que para que se dé cuenta que no es el caso, es necesario que trabaje con algunos casos más donde no se cumple la regla general.

III.1.8.4. Conclusión

El inciso 12 está dado de la siguiente manera:

Contesta las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué número es $360/7$?
- b) ¿Encuentras alguna relación entre el número obtenido en la actividad anterior y el problema de no poder construir un polígono regular de 7 lados?
- c) ¿Para qué valores de n , no es posible construir un polígono regular de n lados?

RESPUESTA ESPERADA: El número $360/7$, es un número racional que al ser escrito como decimal presenta una sucesión infinita de decimales; entonces, para expresarlo como decimal el alumno tenía dos posibles caminos. El primero de ellos consistía en que hiciera uso de su calculadora, en cuyo caso este dispositivo truncaría el valor a una sucesión finita de decimales. La segunda opción es que el alumno hiciera un cálculo con lápiz y papel, en cuyo caso, también va escribir como respuesta un número entero con una sucesión finita de decimales; pero se va a dar cuenta de que su resultado aún tiene un cierto residuo.

Si la actividad de cálculo del estudiante en el inciso a) fue usando una calculadora, el inciso b) será algo confuso para él ya que no podrá identificar la inexactitud de su resultado: En este caso, el alumno únicamente debería ocupar la hipótesis de que no es un número exacto y señalar tal vez que el ángulo α debería ser igual a 360° dividido entre 7; esto es, el número indicado en a). Si los alumnos realizaron los cálculos de a través de lápiz y papel, su respuesta debería ser parecida. Finalmente consideramos como necesario

que el alumno escribiera en la última parte, valores tales como 7, 11, 13 y aquella n para los cuales $360/n$ no es un número decimal exacto.

PROPÓSITO: Que el alumno se dé cuenta que existen números n para los cuales no es posible construir un polígono regular de n lados.

JUSTIFICACIÓN: Un tema central, en la literatura de matemáticas, es el referente a las sucesiones y su límite, aprender su comportamiento en muchas situaciones nos ayuda a entender qué número es el límite o a compararlo con números racionales que son fácilmente construibles.

III.2. ACTIVIDAD: POLÍGONOS

Al igual que la actividad “Construyendo polígonos”, la actividad “Polígonos” la dividimos en tres bloques claramente definidos. El primero de ellos es un fundamento teórico, donde el alumno a través del análisis de figuras, en muchas ocasiones construidas por él, debe ser capaz de recordar y/o construir algún resultado que posiblemente vio en sus cursos de geometría euclidiana, pero que lo ha ido olvidando con el tiempo. El segundo bloque de actividades es un apartado con actividades hechas con software, donde el alumno debe de visualizar en una actividad prediseñada en Geogebra, los polígonos regulares de n lados; en particular para n igual a 4, 3, 7, 11, y 13 lados. A partir de dichas manipulaciones, se espera que el estudiante se dé cuenta que existen algunos n , para los cuales, el polígono de n lados jamás va a “cerrar”. En la tercera parte se pide al alumno que haga un estudio sobre las causas por las cuales, para algunos valores de n , el polígono de n lados no cierra. Esto debe hacerlo con base en que el número $360/7$ es un número decimal no exacto.

III.2.1. Fundamento teórico

III.2.1.1. Primera parte.

Esta pregunta pide al alumno dibujar y construir un polígono.

RESPUESTA ESPERADA: El dibujo de cualquier polígono es suficiente.

OBJETIVO: Que el estudiante empiece a recordar, a través de un dibujo hecho por él, la definición de lo que es un polígono.

JUSTIFICACIÓN: En muchas ocasiones sucede que al tratar de recordar alguna definición, esto se vuelve muy complicado, porque no encontramos las palabras propicias para decir lo que pensamos. Como mencionamos anteriormente, el objeto polígono, es un tema de estudio en la educación primaria, secundaria, media superior e inclusive en el jardín de niños, después de tantas veces de repetir su estudio, lo esperado es que el alumno tenga construido un concepto acerca de dicho objeto, si bien a lo mejor no formal, si una idea intuitiva. Con todo esto, para ayudarle al alumno en su ejercicio de recordar la definición de polígono, nos hemos visto en la necesidad de dividirla en dos partes, donde en primera instancia únicamente se le pide que dibuje un polígono, es decir, que defina un polígono sin escribir ninguna de las propiedades que tiene.

III.2.1.2. Segunda parte.

En este inciso se le pide al alumno que con base en su construcción, intente dar una definición de polígono.

RESPUESTA ESPERADA: Ya anteriormente habíamos dado una respuesta esperada, acerca de lo que es un polígono en los siguientes términos:

Es una figura geométrica compuesta por una cantidad n de segmentos y que además cuenta con las siguientes propiedades:

1. Cada uno de los segmentos con los que está hecha la figura debe interceptarse con otros 2 segmentos.
2. Cada segmento a lo más se puede interceptar con otro en sus puntos extremos.

3. Si un segmento ya está interceptado con otro en un punto P , entonces ningún otro segmento puede interceptarse también en el mismo punto P .

PROPÓSITO: Que el alumno se dé cuenta, que en muchas ocasiones cuando no encontramos las palabras para definir algún objeto, una figura puede ser un buen auxiliar, donde se plasmen las principales características que queremos expresar.

JUSTIFICACIÓN: Diferenciar un polígono de un objeto distinto a él, nos ayuda en nuestra actividad, debido a que su principal objetivo es estudiar algunas de sus propiedades.

III.2.1.3. Tercera parte.

Este inciso está dado en los siguientes términos:

En un polígono los puntos de unión entre dos lados se llaman:

Vértices ()

Lados ()

Hipotenusa ()

RESPUESTA ESPERADA: El alumno tenía que poner alguna señal en el paréntesis referente a los vértices.

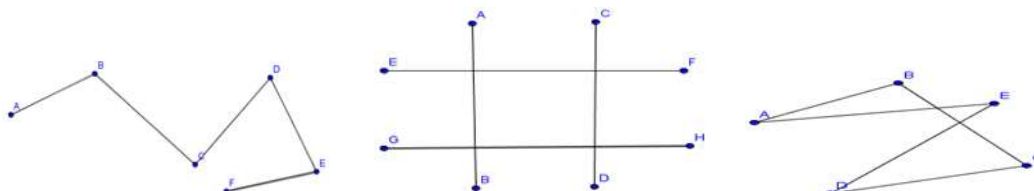
PROPÓSITO: Que el alumno recordará que una de las propiedades que tienen los polígonos es que tienen vértices.

JUSTIFICACIÓN: Una diferencia clara, entre un polígono y una figura distinta a él, es que: si el polígono tiene n lados, entonces debería de tener n vértices. Éste es un tema que se estudia de manera indirecta en el siguiente inciso, y que el alumno lo recuerde antes de estudiar, es un buen inicio para que tenga respuestas más acertadas.

III.2.1.4. Cuarta parte.

En este inciso se le pide al estudiante que:

a) Observe las siguientes figuras e indique si se trata de un polígono o no, de acuerdo con su definición del inciso 2).



b) Sin hacer caso a tu definición anterior, ¿consideras que la figura es un polígono?

c) Si conteste que no, ¿qué característica hace falta para completar tu definición de polígono?

d) En un triángulo isósceles dos ángulos son iguales y el otro desigual. Si los ángulos iguales miden 45 grados cada uno, ¿cuánto medirá el ángulo restante?

e) Un triángulo isósceles puede ser también un triángulo rectángulo? ¿por qué?

RESPUESTA ESPERADA: En el inciso a, debido a que la respuesta era un tanto subjetiva cualquier respuesta era aceptable. Sin embargo, si su definición de polígono, dada en la pregunta anterior, era correcta, consideramos que el alumno tenía que señalar que ninguna de las tres figuras era un polígono.

En el inciso b) esperábamos que el alumno, a través de la observación fuera capaz de mencionar que ninguna de las figuras era como las que había estudiado en sus cursos de geometría y, con base en ello, se empezara a cuestionar sobre las características que hacen falta para ser polígonos.

El inciso c) idealmente tendría que quedar vacío, si el alumno diera una buena respuesta en la pregunta 2; desgraciadamente lo más probable es que esto no ocurra así y tenga necesidad de escribir algunas de las características que mencionamos anteriormente en la definición que propusimos para un polígono.

En el inciso d) únicamente tenía que escribir un valor de 90° para el ángulo pedido. Finalmente en el inciso e), debía indicar que sí existe un triángulo isósceles que también es un rectángulo, debido a que en el inciso anterior ya encontró un triángulo isósceles con un ángulo de 90° , y como ésta es la principal característica del triángulo rectángulo, entonces este triángulo debería ser también rectángulo.

PROPÓSITO: Que el alumno, en base de su observación y análisis de algunas figuras, completara una definición empírica apropiada de polígono, además debería darse cuenta de la existencia de triángulos que cumplen con propiedades asociadas a diferentes clasificaciones.

JUSTIFICACIÓN: Cuando nos piden que demos alguna definición sin tener a la mano algún diccionario o libro en el cual apoyarnos, lo más probable es que nuestra definición sea incompleta e informal, donde posiblemente se nos pudo pasar alguna de las características más importantes del objeto definido. A nosotros en particular nos interesa que el alumno recuerde lo más fielmente la definición de polígono con todas sus características, reconstruyendo por sí mismo su conocimiento. Es por ello que nos vimos en la necesidad de pedirle que complete su definición de polígono a través del análisis de algunas figuras. Además nos interesa que previamente a que se lo preguntemos, el alumno se dé cuenta de que existen triángulos base para construir un polígono regular de n lados, que cumplen con la condición de que además de ser triángulos isósceles, también tienen características de otro tipo de triángulo.

III.2.1.5. Quinta parte.

Este inciso está planteado los siguientes términos:

Algún ejemplo de polígonos regulares son: un cuadrado, un triángulo equilátero, un pentágono. Construye un triángulo equilátero, un cuadrado o un pentágono y con base en tu construcción identifica qué características tiene un polígono regular. Lístalas a continuación.

RESPUESTA ESPERADA: Un polígono regular no deja de cumplir las propiedades características que tiene un polígono; por lo tanto, como esperamos que previamente el alumno ya ha escrito correctamente la definición de polígono, consideramos que únicamente le faltaría decir que un polígono regular es en primera instancia un polígono, pero que además cumple con las propiedad de que todos sus lados son iguales.

PROPÓSITO: Que el alumno encuentre las principales características que diferencian a un polígono regular de un polígono cualquiera, así como que señale las características principales de un polígono que aún le falten en sus distintas definiciones.

JUSTIFICACIÓN: Los polígonos regulares así como los no regulares, son objetos que encontramos todos los días en nuestro entorno físico, basta únicamente realizar una mirada a nuestro entorno para darnos cuenta de la veracidad de esta afirmación. Conocer sus propiedades nos ayuda a hacer un mejor uso de ellas.

III.2.1.6. Sexta parte.

Este inciso está escrito de la siguiente manera:

La figura 1 corresponde a un cuadrado y la figura 2 corresponde a un pentágono.

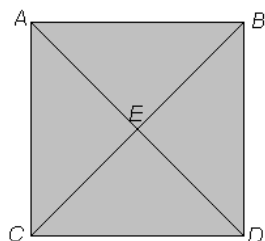


Figura 1

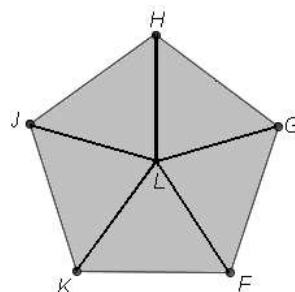


Figura 2

a) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo ABC ?

Isósceles ()

Equilátero ()

Escaleno ()

Rectángulo ()

b) ¿Y el triángulo BCD ?

Isósceles ()

Equilátero ()

Escaleno ()

Rectángulo ()

c) Si en el triángulo ABC , el lado AB mide 10 cm, ¿cuánto mide el lado AC ?

d) ¿Cuánto miden cada uno de los ángulos del triángulo ABC ?

e) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo ABE ?

f) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo BEC ?

g) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo CED ?

h) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo DEA ?

Observa la figura 2, y contesta lo que se te pide.

i) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo KLF ?

j) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo FLG ?

k) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo GLH ?

l) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo HLG ?

m) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo JKL ?

n) ¿Qué características comunes tienen todos estos triángulos?

o) En la figura 1 y 2 hemos observado que podemos construir un cuadrado y un pentágono utilizando triángulos unidos por un vértice, ¿Se podrá construir un polígono regular de ocho lados a partir de un triángulo base? ¿Por qué?

p) ¿Se podrá construir un polígono regular de siete lados a partir de un triángulo base?
¿Por qué?

q) Si tu respuesta es afirmativa señala ¿Cuál es la medida del ángulo α correspondiente al triángulo isósceles base para un polígono regular de siete lados?

RESPUESTA ESPERADA: En los incisos a) y b) esperábamos que los alumnos señalaran las opciones correspondientes a los triángulos isósceles y rectángulo. Para el inciso c), lo más conveniente es que hubieran escrito un valor de 10 cm.

En el inciso d), la medida de cada uno de ángulos interiores del triángulo ABC es 90, 45, 45°, respectivamente. Los triángulos: $ABE, CED, KLF, FLG, GLH, HLJ, JKL$ son todos isósceles, mientras que los triángulos BEC, DEA son segmentos (diagonales) y por tanto, no corresponden a triángulos propiamente dichos aun cuando éstos se expresen también mediante tres literales. Queríamos que el alumno observara que todos los triángulos marcados son isósceles y además, observaran que cada uno de los cuatro triángulos con los que está formada la figura 1 son congruentes, situación que también ocurre en la figura 2. En el inciso o), al igual que en inciso p), esperábamos que los estudiantes observaran que sí se pueden construir polígonos de ocho y siete lados como los de las figuras; sin embargo, al contestar el inciso q) podríamos provocar alguna confusión en el alumno al escribir un número decimal no exacto que lo llevara a corregir el inciso anterior, señalando que posiblemente no se pueda construir debido a que el valor de α no es un número decimal exacto.

PROPÓSITO: Que los alumnos se convenzan de que los n triángulos con los que está formado un polígono regular de 4 y 5 lados, son todos congruentes y que además todos ellos son isósceles. Además el alumno debía observar que el polígono regular de 8 lados sí se puede construir de manera análoga a como construimos el polígono de tres y cuatro lados, no así el polígono de siete lados, donde siempre va a existir una pequeña abertura que es imposible de cerrar.

JUSTIFICACIÓN: La construcción de polígonos regulares es una tarea que en nuestra educación básica y media superior, se realiza como una tarea monótona en la que los alumnos reciben conocimientos no bien cimentados sobre el por qué se pueden construir

las figuras que se presentan. El alumno vive siempre en la idea, de que es posible construir cualquier cosa, hecho que aunque tal vez no afecte, la relación del alumno con su entorno, si estropea la percepción que el alumno se hace de él mismo.

III.2.2. Actividades con software

III.2.2.1. Primera parte.

El primer inciso de esta parte está dado en los siguientes términos:

Realiza las siguientes actividades y contesta las preguntas involucradas:

¿Existe otro triángulo, aparte del isósceles, que se pueda utilizar como base para construir un polígono regular? discute tu respuesta.

RESPUESTA ESPERADA: La gran mayoría de los triángulos con los que se puede construir un polígono de n lados de manera análoga a como se hizo en las figuras 1 y 2 de esta actividad, son triángulos isósceles; sin embargo, como ya mencionamos anteriormente, existen otros triángulos que además de ser isósceles también tiene otra estructura, como es el caso del triángulo equilátero o de aquel triángulo isósceles que además es triángulo rectángulo, por parte de los alumnos esperábamos que al menos mencionaran estos dos casos adicionales. Sin embargo, si escribían que no existe ninguno, tomaríamos esa respuesta como válida debido a que los triángulos mencionados anteriormente también son isósceles.

PROPÓSITO: Que el alumno analizara la simetría que puede ser base de la construcción de un polígono regular de n lados, y que además concluya que únicamente existe una selección muy restringida de triángulos base con los que se puede hacer un polígono regular de n lados.

JUSTIFICACIÓN: Hasta este momento como iba planteada la actividad, no había ningún argumento que el alumno pudiera ocupar para desmentir que con cualquier triángulo, incluso con un triángulo escaleno, se podría construir un polígono regular de n lados, situación que no es cierta, y para que el alumno salga de dicha conclusión, nos vimos en la necesidad de introducir esta pregunta.

III.2.2.2. Segunda parte.

Este inciso dice lo siguiente:

Abre el archivo de dominado “Polígonos 2”.

- a) Manipula la barra de desplazamiento correspondiente a α hasta el valor de 60 grados.
- b) Manipula la barra de desplazamiento de n por todos los valores posibles.
- c) Fija el valor de n hasta 6.
- d) La figura formada es un polígono regular ¿cómo se llama?
- e) ¿Qué pasa con la figura si n se fija en siete?
- f) Manipula la barra de desplazamiento correspondiente a n hasta que obtengas un valor igual a 4.
- g) Manipula la barra de desplazamiento de α pasando por todos sus valores posibles.
- h) Registra los ángulos α que se necesitan para formar un polígono regular de:

4 lados $\alpha =$

3 lados $\alpha =$

- a) Nuevamente manipula la barra de desplazamiento de n hasta llegar a un valor de 7. Posteriormente manipula la barra de desplazamiento de α pasando por todos sus valores registra aquel en el que se formó un polígono regular de 7 lados $\alpha =$
- b) ¿Es exacto este valor de α ? ¿Cuál crees que debería de ser el valor exacto de α y por qué?
- c) Repite la actividad anterior para $n = 11$ y $n = 13$. Registra los datos en la siguiente tabla:

Numero de lados(n)	7	11	13
α obtenido con la máquina			
Tu valor para α			

RESPUESTA ESPERADA: En el inciso d), tendrían que señalar que la figura que se forma es un hexágono. Para el inciso e), únicamente tenían que mencionar que cambia el color de uno de los triángulos. En el inciso h) deberían introducir los valores para α de 90 y 120 grados respectivamente para los polígonos regulares de 4 y 3 lados. En el inciso a) tuvieron que escribir un valor de 51.43 o 51.44. En el inciso b) tenían que afirmar que el número escrito en el inciso anterior no es exacto; que el número exacto está dado en forma de un decimal con una sucesión infinita de decimales. En la tabla del inciso c)

esperábamos que en los valores obtenidos con la máquina, fueran valores de la forma un entero acompañado de un decimal, mientras que en tus valores de α , los números que esperábamos encontrar son de la forma $360/7$, $360/11$, $360/13$.

PROPÓSITO: Que el alumno se familiarizara con el manejo del software Geogebra, además de que observará físicamente, que no importa qué valor de α tome, el polígono regular de 7, 11, 13 lados no cierra completamente.

JUSTIFICACIÓN: En la gran mayoría de los países industrializados, el manejo de algún tipo de software dinámico, lo consideran como uno de las capacidades básicas que el alumno debe de aprender en la escuela. Desafortunadamente en México no pasa así, a tal grado que existen alumnos que afirman que en toda su vida estudiantil jamás han ocupado alguna clase de software de geometría dinámica. De ellos es de donde vemos la necesidad de darles a los estudiantes, una pequeña introducción en el uso del software, así como mostrarles las propiedades y beneficios que tiene su uso. En esta actividad era necesario que el alumno se convenciera de que el resultado que anteriormente había obtenido, de que un polígono de n lados, para algunos n no cerraba totalmente. Para ello no vimos en la necesidad de mostrárselo al alumno físicamente a través de este inciso.

III.2.3. Conclusión

III.2.3.1. Primera parte.

En este inciso se pide a los alumnos que calculen el número $360/7$

RESPUESTA ESPERADA: El alumno debería escribir un número, y posteriormente decir que ese número no es exactamente el valor de $360/7$, debido a que este último tiene un sucesión infinita de decimales que no son calculables ni fáciles de escribir, por lo que únicamente escribe una truncanían del mismo.

PROPÓSITO: Que el alumno se dé cuenta, que los números decimales “no exactos” no se pueden escribir de forma exacta si no es mediante el uso de una fracción.

JUSTIFICACIÓN: En México, la educación básica y media superior, en los temas referentes a matemáticas, está tan mecanizada que en muchas ocasiones al estudiante únicamente se le dan una serie de fórmulas e instructivos que debe seguir para aplicar reglas

matemáticas. Para un gran número de ellos un número racional es un entero con una serie finita de decimales. Para que el alumno pueda concebir una fracción, no sólo como una relación entre dos cantidades enteras, sino también como un número decimal, se ha realizado esta serie de actividades.

III.2.3.2. Segunda parte.

En este inciso se le pregunta al alumno si el resultado que encontró en el inciso anterior es un número exacto, además de que debe discutir su respuesta.

RESPUESTA ESPERADA: El alumno debería escribir que no es un resultado exacto, porque el resultado de dividir $360/7$ lleva consigo un número decimal que tiene una sucesión infinita de decimales.

PROPÓSITO: Que el alumno explique que existen números que tienen una sucesión infinita de decimales.

JUSTIFICACIÓN: Es necesario que el alumno conozca diferentes representaciones de los números racionales.

III.2.3.3. Tercera parte.

En este inciso, se le cuestiona al alumno si hay alguna relación entre la imposibilidad del cálculo exacto y la imposibilidad de construir un polígono regular preciso de 7 lados.

RESPUESTA ESPERADA: Consideramos que el alumno debería de escribir que si encuentra alguna relación, debido a que el cálculo no exacto, conlleva consigo una pequeña diferencia entre cualquier número racional y el número $360/7$, como los siete ángulos α sumados deben de medir 360° , entonces cualquier número racional por siete nos da un número distinto de 360, a esa diferencia entre el número que nos da y 360 es la que induce el hueco que se ve a la hora de construir el polígono regular.

PROPÓSITO: Qué el alumno exprese de manera clara. Las causas por las cuales el polígono regular de siete lados no cierra totalmente.

JUSTIFICACIÓN: Una situación que es importante en cualquier actividad, es reflexionar sobre los resultados obtenidos así como escribirlos de la mejor manera posible.

III.2.3.4. Cuarta parte

Se le pregunta al alumno ¿Para qué valores de n , no es posible construir un polígono regular de n lados?, además de que tiene que reflexionar su respuesta, diciendo el por qué dio tal respuesta.

RESPUESTA ESPERADA: Aquellos números que no son divisores de 360, porque siempre va a existir una pequeña diferencia, que se va a traducir en un hueco en el polígono.

PROPÓSITO: Qué el alumno generalice los resultados que anteriormente había logrado obtener, con respecto a los n para los cuales no es posible construir un polígono regular de n lados.

JUSTIFICACIÓN: Como ya mencionamos anteriormente, una actividad clave en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es que el alumno sea capaz de deducir algún resultado impórtate, a partir de una serie de ejemplos o de deducciones lógicas, como también antes ya habíamos mencionado, al hacer esto se corre el riesgo de que el alumno encuentre resultados erróneos que en el transcurso del tiempo y los tome como verídicos, aunque para nuestro inciso presente no es el caso, debido a que el alumno tuvo que haber encontrado una relación auténtica, que no se puede construir un polígono regular de n lados cuando n no es divisor de 360. En ellos radica la importancia de esta pregunta, en que el alumno se dé cuenta que a partir de una serie de ejemplos puede llegar a una conclusión verídica, que posteriormente puede utilizar para el resultado que está buscando.

III.3. ACTIVIDAD: CONSTRUYENDO POLÍGONOS

La actividad construyendo polígonos, contrario a las otras dos actividades que hemos analizado anteriormente, tiene la propiedad de que no se divide en tres partes claramente

definidas, sino que únicamente cuenta con una parte, en la cual se engloba la parte teórica, actividades con software y conclusiones. A pesar de la gran semejanza que tiene dicha actividad con la actividad polígonos y contrayendo polígonos regulares utilizando triángulos isósceles, también cuenta con una gran cantidad de diferencias que hace que podamos considerar, que aunque la actividad trata los mismos temas, los trata con otro enfoque. El principal objetivo de esta actividad es que el alumno se dé cuenta de la relación que existe, entre la medida del ángulo α del triángulo base para construir un polígono regular de n lados de manera análoga a como se construyó en la actividad polígonos en las figuras 1 y 2, y el número n , en algún momento hasta se les pide al alumno que la construya de manera analítica. Además se quiere que vean la diferencia entre un polígono regular y uno irregular, como también queremos que el alumno se dé cuenta de que se necesitan n triángulos para construir un polígono regular de n lados de forma análoga a como se hizo en la actividad polígonos. Por último buscamos que el alumno concluya que dos de los vértices de un triángulo isósceles pertenecen a la misma circunferencia.

III.3.1. Actividades con Geogebra

Este inciso esta planteado de la siguiente manera:

Abran el archivo de GeoGebra denominado Actividad_1.ggb. En él se encuentra trazado el triángulo base ABC . Además tiene la posibilidad de mostrar otros triángulos congruentes con él. El deslizador proporciona el número de casillas de verificación que pueden ser activadas. La activación de cada casilla permite la visualización de un nuevo triángulo (identificado como $AkBkCk$, para diferentes valores de k). Estos triángulos pueden manipularse, desplazándolos y girándolos; sin embargo, al ser congruentes todos al triángulo ABC , es éste último el único que permitirá modificar sus medidas (véase la figura 9). La tarea de los estudiantes será construir nuevas figuras usando esos triángulos.

Exploración y análisis de polígonos

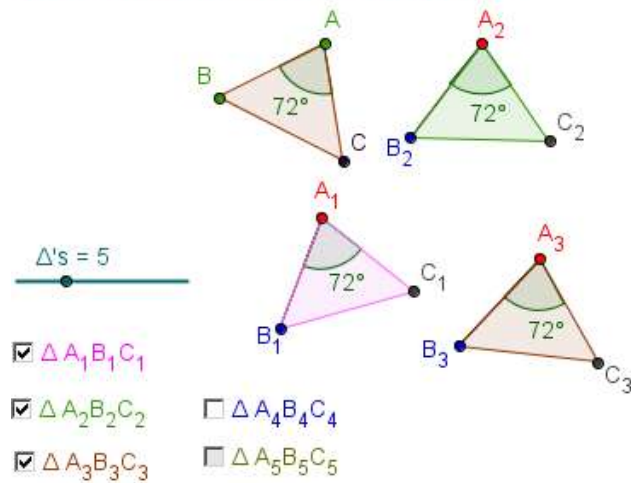


Figura 9. Despliegue de diferentes triángulos congruentes al $\triangle ABC$.

Instrucciones al estudiante, escritas en la hoja de trabajo:

Los triángulos $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots$ se pueden trasladar si los toman del vértice rojo, u pueden girarlos si los toman del vértice azul (No pasa lo mismo en el triángulo ABC). Desplácelos para que vean cómo funciona.

- A) ¿Cuántos triángulos se ocupan para formar un hexágono regular?
- B) ¿Cuánto debe de medir el ángulo $\angle BAC$ en el caso del hexágono regular?
- C) ¿Cuánto miden los otros dos ángulos del triángulo ABC en el caso del hexágono regular?

$$\angle ABC = \quad \quad \quad \angle ACB =$$

- D) ¿Cuáles son las diferencias entre un hexágono regular y uno que no es regular?
- E) ¿Cuántos triángulos se necesitan para formar un polígono regular de 13 lados?

RESPUESTA ES ESPERADA: En el inciso A) esperábamos que el alumno respondiera que se necesitan seis triángulos para formar un hexágono regular, donde cada uno de los ángulos interiores de dichos triángulos debería de medir 60° . Básicamente, como en esta ocasión no les solicitamos una definición de polígono, entonces en la respuesta del inciso D) sí tenían que dar una serie de propiedades con las que cuenta el polígono regular y que no cuenta el polígono; como por ejemplo, que en hexágono regular los lados miden lo mismo, que éste admite un punto interior que está a la misma distancia de todos sus

vértices al que se denomina centro, que cualquier eje que pase por el centro es un eje de simetría, entre muchas otras propiedades que podían escribir. Para el inciso E), la respuesta que esperamos más frecuentemente, es aquella donde el alumno escribe que se necesitan 13 triángulos para producir un polígono regular de 13 lados, aunque sí mencionaban que éste no se puede construir debido a que 13 no es un divisor de 360° , entonces la respuesta quedaría mucho mejor.

PROPÓSITO: Que el alumno encontrará las características que debe de tener un triángulo base para un hexágono regular, así como que diferencie entre un polígono regular y uno irregular, como también tiene que encontrar que si un polígono regular de n lados se puede construir uniendo todos los triángulos por un vértice, entonces necesitan n triángulos.

JUSTIFICACIÓN: Entender los fundamentos de las matemáticas es esencial para que el alumno pueda aplicarlas de la mejor manera posible.

III.3.2. Llenado de tabla

En esta parte se pide a los alumnos que llenen la tabla siguiente, indicando cuál es el valor del ángulo que te permite construir cada una de la figura indicada.

Figura	Pentágono regular	Hexágono regular	Heptágono regular	Nonágono regular	Cuadrado	Triángulo Equilátero	Octágono regular
No. De Lados (n)	5	6	7	9	4	3	8
Ángulo (θ)							

RESPUESTA ESPERADA: Esperábamos que el alumno escribiera para el ángulo θ , los valores de 72° , 60° , ____, 40° , 90° , 120° , 45° , respectivamente, para los valores de n correspondientes en la tabla.

PROPÓSITO: Que el alumno observe la relación entre el número de lados n y el valor de θ correspondiente.

JUSTIFICACIÓN: Llenar los valores producidos por una relación es necesario para que el alumno se dé cuenta del comportamiento que describe dicha relación.

III.3.3. Razonamiento

En este inciso se le pregunta al alumno qué sucede con los valores de θ , si el número n de lados aumenta.

RESPUESTA ESPERADA: El alumno debería de escribir que el ángulo θ disminuye a medida que el número de lados n aumenta.

PROPÓSITO: Que el alumno analice el comportamiento de los datos que escribió en el inciso 2.

JUSTIFICACIÓN: Una capacidad indispensable, que el alumno tiene que aprender a lo largo de su educación, es obtener relaciones a partir de algunos datos previamente establecidos, se hace más importante aun cuando vemos que para describir la naturaleza, en primera instancia tiene que encontrar valores y posteriormente, a partir del análisis de ellos, ser capaz de encontrar la relación que describa el comportamiento general.

III.3.4. Establecimiento de relaciones

Se le pide al alumno que seleccione el tipo de relación entre n y θ . Pidiéndole que considere a k distinto de cero, como una constante. Y se le dan las siguientes relaciones:

$$a) n = k * \theta$$

$$b) n = k - \theta$$

$$c) n = k/\theta$$

RESPUESTA ESPERADA: La respuesta correcta es el inciso c).

PROPÓSITO: Que el alumno complete su análisis respecto a la relación que existe entre n y θ , escribiéndola a manera de conclusión en la forma de una ecuación.

JUSTIFICACIÓN: Es importante el análisis de ciertos datos, para encontrar de forma intuitiva su comportamiento, aunque más importante aún, es plasmar dichos datos en una ecuación en la que se pueda observar de manera compacta el comportamiento general de los datos.

III.3.5. Simbolización de relaciones

Usando los datos de la tabla del ejercicio 2, obtén el valor de k y escribe la fórmula que relaciona n y θ . Comprueba que dicha fórmula funciona llenando la tabla siguiente y comparando sus valores con la tabla anterior.

Figura	Pentágono regular	Hexágono regular	Heptágono regular	Nonágono regular
No. De lados (n)	5	6	7	9
Ángulo (θ)				

REPUESTA ESPERADA: La relación entre n y θ es: $k = n * \theta$ y en la tabla tenían que dar valores para θ de 72° , 60° , ..., 40° respectivamente.

PROPÓSITO: Que el alumno comprobara la veracidad de los resultados que había obtenido en los tres incisos anteriores.

JUSTIFICACIÓN: Como hemos mencionado anteriormente, en muchas ocasiones sucede que resultados obtenidos a partir del análisis de datos son erróneos, y a partir de ellos el alumno puede llegar a tener una idea errónea acerca de una ley que es incorrecta. Para evitar esto, debemos darnos a la tarea de comprobar los resultados.

III.3.6. Integración aritmético-geométrica

En este inciso se le pregunta al alumno lo siguiente:

¿Se puede construir un polígono regular si sólo contamos con un triángulo?

Si tu respuesta es sí ¿Cuál es el polígono regular?

RESPUESTA ESPERADA: Esperábamos que el alumno pudiera decir que sí se puede construir un polígono regular si únicamente contamos con un solo triángulo y este polígono es el triángulo equilátero.

PROPÓSITO: Que el alumno, ponga a prueba su resultado en un caso particular limite.

JUSTIFICACIÓN: En muchas ocasiones, para comprobar una ley, es necesario aplicarla a los casos limites, donde por lo regular se conoce el resultado, para nuestro caso, no es específicamente un caso limite, sino más bien un caso aislado que no entra directamente

en nuestro análisis, sin embargo también es importante ver si el alumno, entendió los temas que se le fueron presentando.

III.3.7. Generalización

Este inciso se planteó en los siguientes términos:

Forma un polígono regular de 15 lados, y:

- a) Una circunferencia de radio AC y centro en A ;
- b) Una circunferencia de radio AB y centro en A ; y,
- c) una circunferencia de radio CB y centro en B .

¿Cómo son estas circunferencias? Justifique su respuesta

RESPUESTA ESPERADA: El alumno debió de observar que las circunferencias con centro en A y radio AC y AB son de hecho la misma, además tenía que ver que la circunferencia de radio CB y centro en B , es mucho más pequeña.

PROPOSITO: Que el alumno descubra en el triángulo isósceles, la propiedad de que dos vértices pertenecen a la misma circunferencia.

JUSTIFICACIÓN: El resultado de que dos de los vértices de un triángulo isósceles pertenecen a la misma circunferencia, sin duda alguna no es un gran resultado, ya que son dos puntos que están a la misma distancia del otro vértice, sin embargo, este es un resultado que en los cursos de geometría euclidiana no se encuentra, de tal forma, que si al alumno no se lo hubiéramos planteado, este quizás, nunca se hubiera dado cuenta de la existencia de tal resultado.

III.4. ACTIVIDAD: EL PROBLEMA DE LA CAJA

La última de las actividades que aplicamos corresponde a la titulada "El problema de la caja", dicha actividad consiste en que Juan, una persona hipotética, está empujando una caja en una loma en busca de un lugar para guardarla. Descubre un buen lugar para meter la caja, este lugar es un hueco que está debajo de la pared.

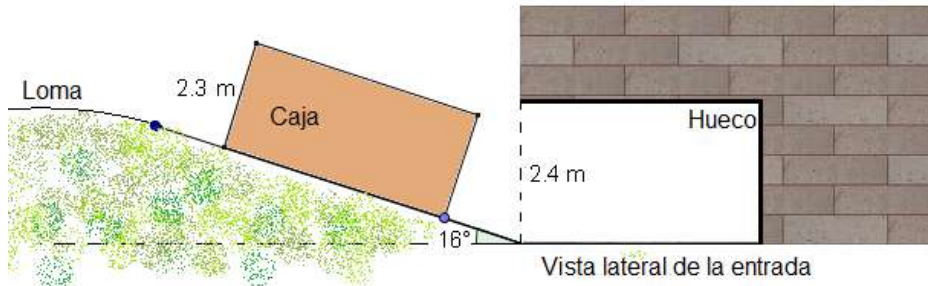


Figura 10. Esquema para El Problema de la Caja

Su problema ahora es meter la caja dentro del hueco. El hueco mide 2.4 metros de altura y la caja 2.3 m , pero la loma tiene una inclinación de 16° . ¿Podrá Juan meter la caja al hueco sin que la caja toque la pared? Esta es la pregunta básica que los alumnos deben de responder.

III.4.1. Iniciando la actividad con Geogebra

En esta parte se pide al alumno que en la construcción geométrica que aparece en la figura de más abajo, y que el alumno la tenía en el archivo Actividad_3.ggb, misma que le permitía simular el momento de la caja a través del desplazamiento del punto P , manipulara los valores de P y viera qué ocurre a su vez con la caja (Véase la figura 11).



Figura 11. La simulación del problema en el software

RESPUESTA ESPERADA: No se espera ninguna respuesta del alumno.

PROPÓSITO: Qué el alumno visualice el comportamiento de la caja.

JUSTIFICACIÓN: Para que el alumno de una respuesta acertada, es necesario que primero se convenga de la veracidad del resultado que propondrá como verdadero; para ello es necesario que haga uso del software y vea el comportamiento que en este tiene la caja, donde si bien, de ninguna manera una visualización en un programa, tiene el rigor de una demostración, si le puede ayudar a darse una idea sobre los caminos que debe de seguir para encontrar la solución.

III.4.2. Llenado de tabla

En el presente inciso se le pide al alumno que llene una tabla con valores para PR y PB , utilizando el software para obtener los datos.

Longitud de PR									
Longitud de PB									

RESPUESTA ESPERADA: Que el alumno escribiera punto igualmente distanciados para PB , y con ellos sus respectivos valores de PR .

PROPÓSITO: Que el alumno, obtuviera algunos datos de PR y PB .

JUSTIFICACIÓN: Es necesario antes de realizar una gráfica, tener los datos que vamos a graficar.

III.4.3. Graficación

Se les pide a los alumnos que construyan una gráfica utilizando los datos de la tabla anterior, esto es una gráfica que relacione la altura de la caja respecto a su posición.

RESPUESTA ESPERADA: Una gráfica donde se observará que al principio la altura de la caja crecía rápidamente, para posteriormente crecer de manera más lenta, hasta que llega

un momento en que el crecimiento de la caja se detiene, para posteriormente empezar su decrecimiento de manera paulatina aumentando cada vez más su velocidad.

PROPÓSITO: Que el alumno visualizará gráficamente el comportamiento de la caja en el transcurso de su movimiento.

JUSTIFICACIÓN: Visualizar el comportamiento de la caja en un grafica le ayuda al alumno a entender el comportamiento de la misma a lo largo de su movimiento.

III.4.4. Reflexión

En este inciso se le pide a los alumnos, que discutan sobres las ventajas y limitaciones que tiene el modelo del problema elaborado con el software de geometría dinámica y sin él.

RESPUESTA ESPERADA: En esta pregunta la respuesta es libre.

PROPÓSITO: Que el alumno de su punto de vista sobre lo que le ha parecido la actividad, así como que también escriba las situaciones interesantes que encontró a la hora de trabajar con el software.

JUSTIFICACIÓN: Englobado dentro de la estructura de la actividad, uno de los objetivos principales de la misma era observar cómo se comportaba el alumno ante en el método de enseñanza de las matemáticas que utiliza como principal herramienta la solución de problemas con software. Esta pregunta es esencial porque en ella, el alumno expresa su sentir a la hora de trabajar con software educativo.

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

En el presente capítulo se presenta el diseño de la investigación.

Comprende la descripción de las etapas que fueron consideradas en el desarrollo del proyecto.

IV.1. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Para el presente trabajo de investigación se contó con cuatro actividades: construcción de polígonos regulares utilizando triángulos isósceles, construyendo polígonos, polígonos y el problema de la caja, le aplicamos la primera de ellas a un grupo, para posteriormente aplicar las otras tres en una segunda sección de alumnos. Hay que hacer notar que las actividades: construcción de polígonos regulares a través de triángulos isósceles, construyendo polígonos y polígonos tratan el mismo tema, aunque con diferente enfoque y por supuesto con preguntas distintas, situación que nos da la oportunidad de hacer una comparación entre las respuestas de los dos grupos, así como también evaluar el aprendizaje de los alumno a lo largo de las diversas actividades, y medir el grado de retención de los temas estudiados en alguna actividad, esto se logra comparando respuestas a preguntas análogas contestadas por el mismo alumno pero en diferente actividad.

Esta comparación nos permite hacer un análisis sobre las ventajas y desventajas que tiene consigo el uso de software educativo, dado que nos permite tener un parámetro sobre la retención y comprensión de los temas tratados en las actividades. Además se lleva a cabo un análisis sobre las posibles limitaciones que tiene consigo, el método de enseñanza tradicional, donde al alumno únicamente se le pide que se aprenda de memoria algunos algoritmos y conceptos para utilizar los distintos resultados de las matemáticas, sin que el estudiante entienda lo que se le pide y las ventajas que tiene consigo el método de enseñanza basado en la solución de problemas con respecto al modelo antes descrito. El objeto de aprendizaje, es construir polígonos regulares a través de triángulo isósceles congruentes, que además están unidos todos ellos en un vértice. Como también nos interesa que el alumno visualice el comportamiento de una caja al pasar de una superficie con un plano inclinado hacia una superficie plana.

IV.2. SUJETOS

La intervención educativa para la investigación se realizó con alumnos de la escuela preparatoria Melchor Ocampo dependiente de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en concreto con alumnos de la sección 403 y 424. Además de realizar algunas otras actividades con alumnos del Conalep II, Morelia.

De la sección 403 tomamos una muestra elegida pidiéndole a los alumnos su participación de manera voluntaria que constó de 14 integrantes, que a su vez se dividieron de manera voluntaria en: 5 grupos con 2 personas, 1 grupo de 1 persona y un grupo de 3 personas. Mientras que en la sección 424 tuvimos el apoyo de 4 estudiantes que realizaron la actividad de manera individual.

En el Conalep II, Morelia, tuvimos diferente número de alumnos participantes en cada una de las actividades que realizamos: en la actividad construyendo polígonos contamos con la participación de 26 alumnos, que a su vez se dividieron en doce equipos con dos estudiantes y dos equipos con un alumno. Mientras que para la actividad el problema de la caja contamos con la participación de 13 alumnos que se dividieron de 6 equipos de 2 integrantes y uno de uno, mas aparte contamos con otras dos actividades que nos es imposible contar el número de individuos que laboraron en ella, debido a que no cuentan con los nombres de las personas que las elaboraron.

Para la actividad: polígonos únicamente se contó con la participación de 17 estudiantes que se repartirán en seis grupos de 2 alumnos y 5 grupos compuestos únicamente por un integrante. Los grupos formados en el Conalep II, Morelia, desgraciadamente no fueron los mismos para todas las actividades que aplicamos en esa institución, como posiblemente el lector ya se ha dado cuenta, tema que trataremos más a fondo en la parte correspondiente a los resultados.

Como se explicó anteriormente, a los grupos que nos hicieron el favor de darnos un poco de su tiempo en la escuela preparatoria Melchor Ocampo dependiente de la universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, únicamente le aplicamos la actividad construcción de polígonos regulares a partir de triángulos isósceles, misma que como su nombre lo indica, el problema principal que se busca resolver es la construcción de polígonos regulares a través de triángulos

congruentes que están unidos por un vértice, así como que el alumno se dé cuenta de la imposibilidad de construir el polígono regular de n lados para algunos n específicos como 7, 11 y 13 entre muchos otros. Con los alumnos del Conalep II, Morelia, como el lector ya se habrá dado cuenta previamente, se trabajaron tres actividades básicas: construcción de polígonos, el problema de la caja y polígonos, como se mencionó anteriormente las actividades de construcción de polígonos y polígonos tienen la misma finalidad que la actividad construcción de polígonos regulares a través de triángulos isósceles, por lo que aplicamos estas dos actividades para medir algunas situaciones de su aprendizaje. No así la actividad polígona, que tiene como fin que el alumno entienda que el uso del software le permite visualizar gráficamente el comportamiento de algunas funciones. La decisión de tomar a estos grupos de alumnos radica en que todos ellos ya llevaron a nivel bachillerato la materia de geometría euclidiana y por lo tanto después de haber llevado dicho curso, deberían de tener algunos conocimientos básicos referentes a los temas necesarios para contestar algunas preguntas que se les presentan a lo largo de la actividad.

El grupo de la sección 403, perteneciente a la escuela preparatoria Melchor Ocampo dependiente de la universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo trabajó con nosotros el día 3 de mayo del 2013 en un horario de 8 a 10 de la mañana impartiendo la actividad la doctora Lourdes Guerrero y un servidor. Mientras que en la sección 424 se realizó la actividad el día 6 de mayo del 2013 en un horario de 2 a 4 de la tarde, siendo el exponente un servidor.

Con los alumnos del Conalep II, Morelia, se trabajó en tres secciones de dos horas cada una los días 3, 10 y 17 de junio en un horario de 7 a 9 de la mañana, en cada una de las secciones se realizó una actividad siguiendo el siguiente orden: El día 3 de junio se aplicó la actividad construcción de polígonos, posteriormente el día 10 de junio, se realizó la actividad el problema de la caja, finalmente el día 17 de junio, los alumnos trabajaron en la actividad polígonos.

Entre las tres actividades sumaron un total de seis horas trabajadas, además de que en un principio en la primera sección se les dio a los alumnos una leve introducción del uso del software Geogebra. Las tres secciones fueron impartidas por la doctora Lourdes Guerrero y un servidor. Se impartieron las secciones siguiendo el método de aprendizaje basado en la solución de problemas ocupando como herramienta auxiliar el software GeoGebra.

IV.3. ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO

El diseño y desarrollo de la intervención, metodológicamente se vinculó con una concepción de aprendizaje y de enseñanza sustentada en el trabajo colaborativo, caracterizado éste por la aceptación compartida de responsabilidades mutuas de los miembros participantes en un equipo o en un grupo, en el que los roles del profesor y los alumnos son pieza fundamental, así también, se relacionaron al diseño y desarrollo del modelo interactivo con una reflexión individual acerca de los que se requería aprender.

Una acción importante que trabajamos para realizar esta propuesta es la utilización del software de geometría dinámica GeoGebra, mismo que los alumnos nos informaron tener desconocimiento de su uso al no haberlo ocupado jamás en su vida estudiantil. Esta situación se repite mucho en los alumnos de las instituciones de nivel básico y medio superior, a pesar de ser un buen auxiliar en el tratamiento de casos particulares y situaciones específicas del problema. Pero volviendo a nuestro tema central, vemos que a lo largo de nuestra actividad el alumno si contó con dicho software, más aun siempre contó con la siguiente tecnología:

1. Computadora de escritorio a la mano para manejo personal.
2. Software GeoGebra instalado en la computadora de uso personal.
3. Un proyector donde al alumno se le dio la introducción al manejo del Software GeoGebra, además de explicarle algunas situaciones donde había duda general.
4. Computadora de uso personal por los expositores.

Materiales convencionales:

1. Hojas de trabajo.
2. Hojas de cuadernos.
3. Pizarrón blanco.

Dado que los alumnos desconocían del uso y utilización del software GeoGebra. Se les dio una pequeña introducción sobre su manejo, haciendo principal énfasis en las herramientas utilizadas en el desarrollo de la actividad. Se les dieron a los alumnos del Conalep II, Morelia, tres sesiones de dos horas cada una, mientras en los grupos de la preparatoria Melchor Ocampo se les dio únicamente una sesión de dos horas, en cada una de las actividades se

repartieron hojas de trabajo por equipo, así como se instaló el programa de GeoGebra necesario para la realización de la misma. Para la solución de las hojas de trabajo, se hizo uso de la metodología de enseñanza basada en la solución de problema teniendo como herramienta auxiliar al software GeoGebra, la cual se base en que el alumno a travez de la solución de problemas valla deduciendo hipótesis que le permitan encontrar el conocimiento que proponemos que aprenda, con base en esto, se le pidió al alumno que siguiera las indicaciones que se le iban dando en la actividad. En principio las actividades estaban planteadas para realizarse por parejas aunque muchas veces por cantidad insuficiente de alumnos o porque estos les pareció más conveniente, ese número fue cambiando a un máximo de 3 e inclusive un mínimo de 1, aunque prevalecieron mayoritariamente los equipos formados por dos integrantes, consideramos que este número de alumnos es el ideal en que se puede trabajar una actividad debido a que cada respuesta es analizada por dos integrantes, donde la respuesta de cada uno se va complementando con la de su compañero, además tenemos casi garantizada la participación de los dos integrantes en la actividad, debido a que es más difícil que un alumno se pierda entre el bullicio general, también vemos en relación a la cantidad de alumnos que deben de formar un equipo señala que no existe un número mágico ideal, depende de la tarea; la experiencia de aplicación de aprendizaje colaborativo en el aula, aunque entre menor sea el número de integrantes mejor". Por lo que dos integrantes parece un buen número de alumnos por equipo.

Después de integrarse los equipos, los alumnos contestaban las hojas de trabajo a la vez que realizaban las actividades correspondientes en la computadora, realizando en cada uno de los incisos un análisis para decidirse que respuesta poner, o en su caso si alguna de las indicaciones en la actividad, el alumno no tenía muy claro lo que se le pedía, les explicáramos de manera más detallada, también se realizaron rondines de manera continua para preguntarles a los estudiantes sobre aquellas cuestiones que no entendieran bien y que consideraban que necesitaban ayuda, por supuesto que les dimos a los alumnos las herramientas necesarias en el software para que contestarán los diferentes incisos que se les presentaron.

Para lograr el desarrollo de las competencias de los estudiantes, las actividades contemplan: interpretar, formular, resolver, explicar, argumentar, analizar y representar problemas que se encuentra a la hora de trabajar construyendo polígonos con triángulos congruentes unidos por un vértice. Una de las categorías de las competencia genéricas es el trabajo en forma colaborativa y el uso del software como una herramienta auxiliar, por lo que trabajaremos las matemáticas en un ambiente colaborativo y de pantallas donde la visualización juega un papel primordial, es por eso que las actividades involucran las tecnologías y el trabajo colaborativo. Las técnicas didácticas usadas serán basadas en la resolución de problemas, mismo que se les proporcionan como ya se mencionó anteriormente, en una hoja de actividades, estos problemas tiene las propiedades de que siguen una secuencia lógica, de forma que la pregunta que esta contestando el alumno puede necesitar de una respuesta que esta un número n de renglones abajo, o existen también algunas con la características de que únicamente se plantean para que el alumno recuerde algunos temas que son básicos en las respuestas de las actividades.

Todo esto lo debe encaminar de dar un paso más hacia las soluciones del problema que actualmente se está estudiando, es de hacer notar que el alumno en muchas de las actividades tiene que realizar algún tipo de análisis, mismo que en muchas ocasiones les ayudamos a plantearlos, aunque en ningún momento se los hicimos completamente, para realizarlos en muchas ocasiones el alumno debía de ocupar algunos razonamientos básicos, inclusive tal vez hasta tuviera necesidad de introducir el uso del lápiz y papel para seguir algunas deducciones lógicas que necesitan, aunque por otro lado, estas deducciones lógicas en la gran mayoría de los casos eran más bien simples, salvo una donde se le pide al alumno que de la relación que existe entre el ángulo α , el lado L , y los dos lados adyacentes al ángulo α , aunque no consideramos que ninguna de las deducciones lógicas que se plantean sobrepase a lo que puede contestar un alumno que tuvo un curso de geometría euclidiana en el bachillerato.

Finalmente para terminar esta parte de la metodología se da, enseguida un cronograma de actividades.

ACTIVIDAD	FECHA	HORA
Construcción de polígonos utilizando triángulos isósceles (sección 403)	3 de mayo del 2013	de 8 a 10 de la mañana
Construcción de polígonos utilizando triángulos isósceles (sección 424)	6 de mayo del 2013	de 2 a 4 de la tarde
construyendo polígonos (alumnos de Conalep II, Morelia)	3 de junio del 2013	De 7 a 9 de la mañana
El problema de la caja (alumnos del Conalep II, Morelia)	10 de junio del 2013	De 7 a 9 de la mañana
Polígonos(Alumnos del Conalep II, Morelia)	17 de junio del 2013	De 7 a 9 de la mañana

Tabla 1. Cronograma de Actividades de la aplicación

CAPÍTULO V

RESULTADOS

En este capítulo se incluyen los principales resultados que se obtuvieron a lo largo del estudio. Éstos están estructurados de dos formas: primeramente se muestran las respuesta que dieron los alumnos en las hojas de trabajo y, posteriormente dichos resultados se estructuran en tablas y gráficas, categorizando el tipo de respuestas obtenidas.

"Aprender, es descubrir al mundo con todos sus matices"

V.1. RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS

Como hemos mencionado anteriormente, las actividades aplicadas a los alumnos en este trabajo fueron denominadas: Construcción de polígonos regulares utilizando triángulos isósceles, Construyendo polígonos, El problema de la caja y Polígonos. En esta sección del trabajo, incluimos las respuestas dadas por los alumnos clasificándolas en términos de la actividad y el grupo de alumnos que la realizó, sin hacer mayor énfasis en el análisis del tipo de respuestas dadas.

V.1.1. Respuestas de los alumnos

V.1.1.1. Respuestas de los alumnos de la Escuela

Preparatoria Melchor Ocampo de la UMSNH.

Una de las actividades aplicada a los grupos de esta institución fue la denominada Construcción de polígonos regulares utilizando triángulos isósceles.

Esta actividad se aplicó a dos grupos: secciones 24 y 03, conformados en 4 y 7 equipos, respectivamente.

La primera pregunta en la actividad es: ¿Qué es un polígono? (véase la página 46); antes de realizarla, se le hace al alumno una indicación de que observe dos figuras que se encuentran en la parte superior y con base en ellas, conteste las preguntas. Para esta primera pregunta, esperábamos que si bien, el alumno no supiera a ciencia cierta lo que es un polígono, sí supiera cómo dibujarlo o, en su defecto, se apoyara de las figuras presentadas, para intuir una definición de dicho objeto con base en los dibujos.

Tres de los cuatro equipos del grupo de la sección 24, incluyeron definiciones como la siguiente: *“figura geométrica con varios lados”* (véase la figura 12). Ésta (o muy semejante a ésta) fue la respuesta más común de los estudiantes, ya que ésta también se encuentra en tres de los equipos del grupo de la sección 03. A tal respuesta nos refiriéremos en adelante con la clave 1.1.

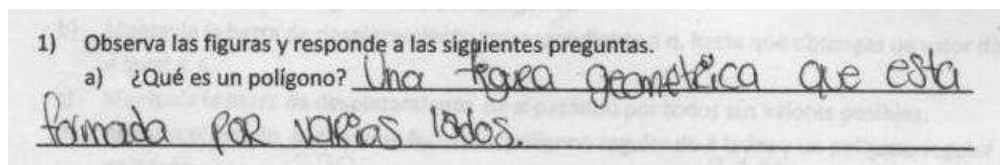


Figura 12. Respuestas típicas de la mayoría de los estudiantes. Respuesta 1.1

El otro equipo de la sección 24 expresó: “una figura construida por triángulos iguales, figura construida por varios lados” (véase la figura 12).

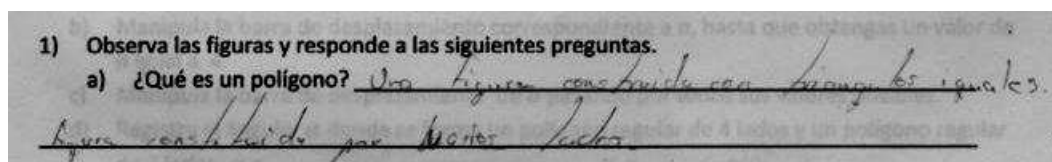


Figura 13. La respuesta 1.2

Tal respuesta será codificada como 1.2.

De los equipos restantes de la sección 03, un no respondió a la pregunta, otro expresó: “Una figura geométrica con cinco vértices, ejem. fig. 2” (respuesta codificada como 1.3).

Un tercer equipo respondió: “es una figura plana compuesta por una secuencia de lados y vértices” (codificación 1.4), y el equipo restante escribió: “es una figura plana compuesta por una secuencia de lados y vértices” (codificación 1.5).

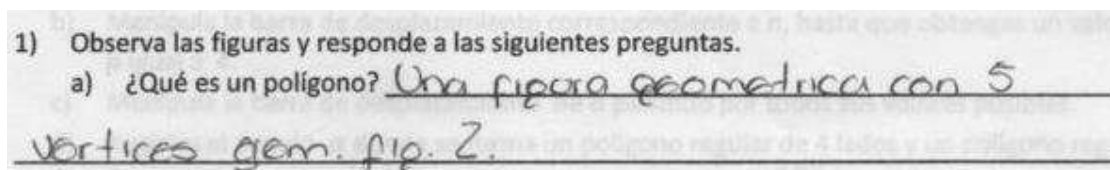


Figura 14. Respuesta 1.3

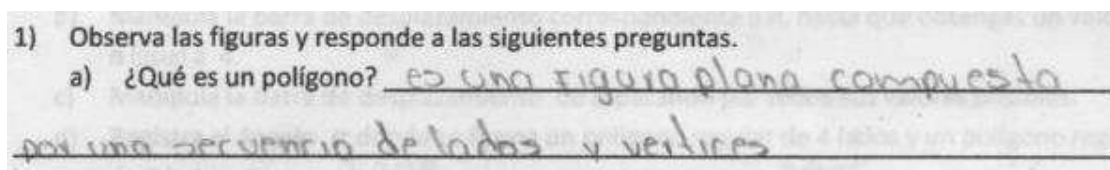


Figura 15. Respuesta 1.5

En la segunda pregunta se le cuestiona al alumno sobre cuándo decimos que un polígono es un polígono regular. Las respuestas dadas por los estudiantes de la sección 24, fueron muy divergentes, no encontrándose un patrón común entre ellas.

Algunas de las respuestas de los equipos se muestran en las figuras 16 y 17. Como puede observarse en ellas, los equipos utilizan características propias de las figuras regulares para tratar de expresar sus ideas sobre lo que es un polígono regular. Un equipo escribió: *“Cuando se tiene simetría en la figura”* (categoría 2.1):

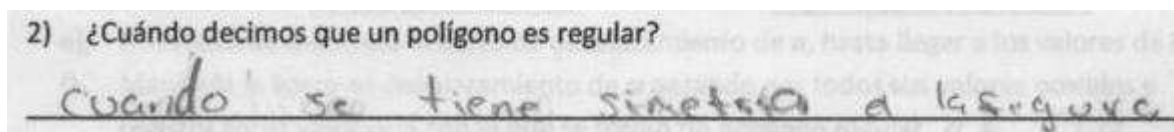


Figura 16. Respuesta basada en una propiedad de los polígonos regulares

Otro equipo argumentó: *“Cuando tiene medidas regulares”* (categoría 2.2); otro más propuso: *“Cuando sus dimensiones son todas iguales”* (categoría 2.3). Solamente un equipo de este grupo no contestó la pregunta.

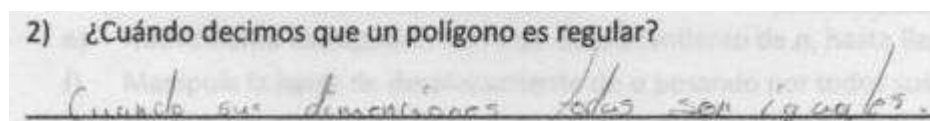


Figura 17. Respuesta basada en las medidas de los polígonos regulares

En el grupo de la sección 03, visualizamos más convergencia de las respuestas de los equipos. En este grupo, cuatro de los siete equipos propusieron que un polígono es un polígono regular cuando sus lados son iguales (categoría de respuesta 2.5), mientras que otro grupo trato de basarse en una propiedad de los mismos: *“es una figura proporcional”* (categoría 2.6) (véanse las figuras 18 y 19).

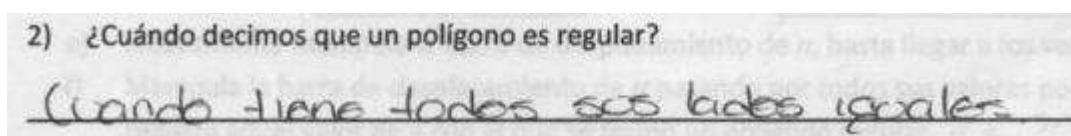


Figura 18. La respuesta más común en el grupo 03

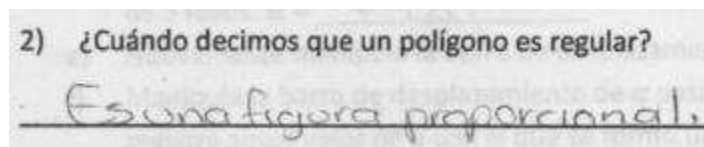


Figura 19. Respuesta basada en una propiedad de los polígonos regulares

Los dos equipos restantes de este grupo, señalaron que un polígono es regular cuando “tiene centro, ángulo central, apotema y diagonales” (Categoría de respuesta 2.7):

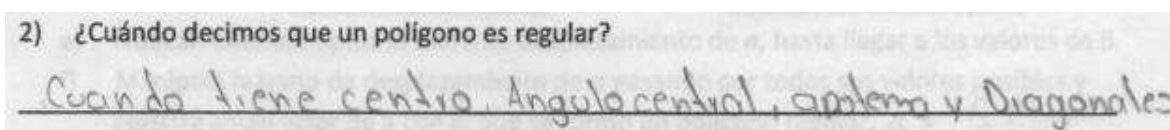


Figura 20. Respuesta basada en elementos típicos de los polígonos regulares

En la pregunta 3, se cuestiona a los alumnos sobre la medida del ángulo α en la figura 1 (véase la figura 2) y a su vez, también se les pide que discutan su respuesta; es decir, que señalen en qué basan su respuesta.

En la sección 24, tres de los cuatro equipos respondieron de manera correcta: α mide 90° (categoría de respuesta 3.1); sin embargo, ninguno de ellos expresó la base de su resultado (véase la figura 21).

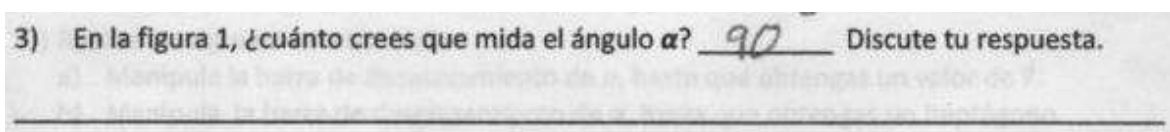


Figura 21. Respuesta típica en los equipos de la sección 24

El otro equipo de esta sección 24, intentó dar una respuesta; se distingue $\alpha = 60^\circ$, aún cuando éste fue borrado (véase la figura 21). Así mismo, este equipo también borró su opinión referente a la parte de la justificación mostrando, al parecer, que su respuesta no les satisfacía por completo (categoría de respuesta 3.2). Si bien no es claro el texto borrado, parece indicar una explicación del tipo: “*porque tiene un triángulo ... la suma de sus ángulos es 180°* ” (véase la figura 22).

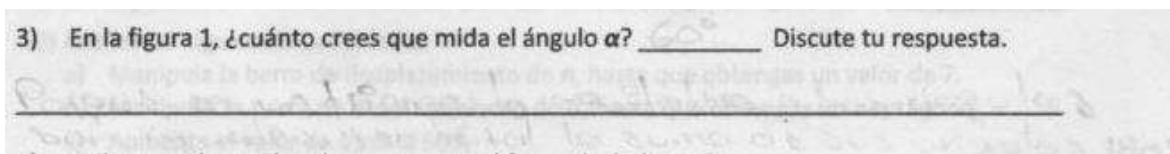


Figura 21. Respuesta borrada que muestra la inseguridad de los estudiantes ante su conocimiento

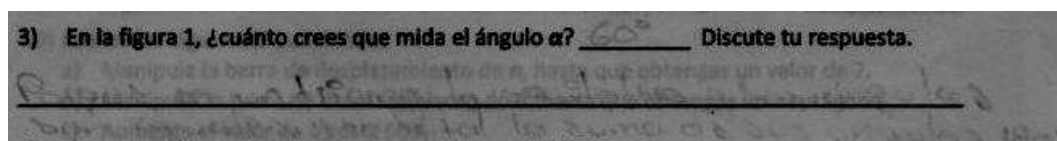


Figura 22. Respuesta categoría 3.2

Al igual que en la respuesta pasada, los alumnos de la sección 03 mostraron un patrón de respuestas más regulares, englobándose éstas en cuatro distintas.

Tres de los siete equipos respondieron que α tenía una medida de 90° y, al momento de preguntarles la razón de ello en la siguiente parte señalaron: *“porque es una vuelta completa y se está dividiendo entre 4”* (categoría de respuesta 3.3):

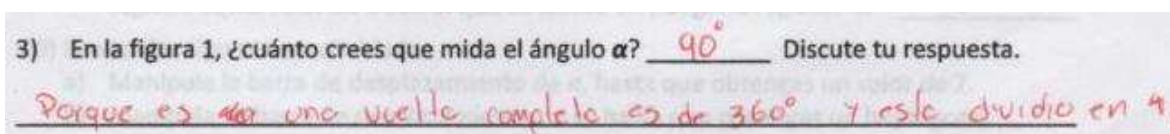


Figura 23. Respuesta en la categoría 3.3

Otros dos grupos siguieron el patrón de la sección 24, al contestar únicamente que la medida del ángulo α es de 90° , sin especificar la razón de ello (respuesta 3.1). Otro grupo más señaló que el ángulo α tenía una medida de 90° *“porque sí, solo que está semi girado”* (respuesta 3.4).

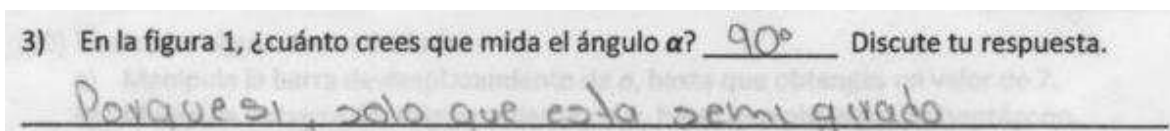


Figura 24. Respuesta en la categoría 3.4

Finalmente, el equipo restante indicó que α tiene una medida de 30° ; utilizando como argumento: *“porque es un triángulo equilátero”* (categoría 3.5).

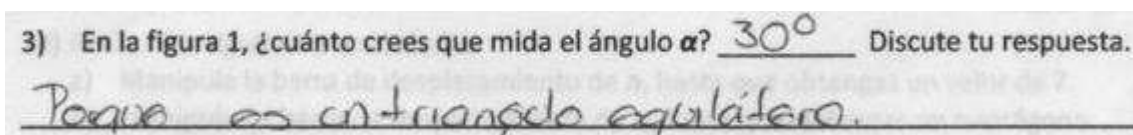


Figura 25. Respuesta en la categoría 3.5

La cuarta pregunta está relacionada con los triángulos con los que se formó la figura 1 (véase la figura 2, de la página 41), al preguntarle a los alumnos sobre el tipo de triángulos de que se trata: equilátero, isósceles o escaleno. Si bien la respuesta más común está relacionada con triángulos isósceles, hay una importante divergencia por parte de los alumnos que dicen que los triángulos o bien pueden ser isósceles y equiláteros, o que son equiláteros.

En la sección 03, cuatro de los equipos respondieron que los triángulos formados son isósceles, mientras que dos grupos señalaron que los triángulos son equiláteros, y el grupo restante encontró que eran equiláteros e isósceles.

En la sección 24, tres de los equipos señalaron que los triángulos eran isósceles, mientras que el grupo restante indicó que eran triángulos equiláteros.

La quinta pregunta trata sobre la relación entre la medida del ángulo α , el lado L y la medida de los lados adyacentes al ángulo α . Como ya se mencionó anteriormente, esta pregunta no era trivial y únicamente la pusimos para indagar sobre la comprensión de los alumnos y ver qué camino tomaban para la solución de la misma. Desgraciadamente ninguno de los estudiantes dio respuesta alguna, o si la dieron es tan trivial como la palabra sí, mismas que no consideramos conviene escribirlas.

La siguiente pregunta es equivalente a la pregunta 2 y está expresada en los siguientes términos: en la figura 2, ¿cuánto crees que mida el ángulo α ?, discute tu respuesta.

Cada uno de los equipos de la sección 24 contestó de manera diferente. Un equipo señaló que $\alpha = 60^\circ$, “porque es un triángulo equilátero también” (categoría 6.1):

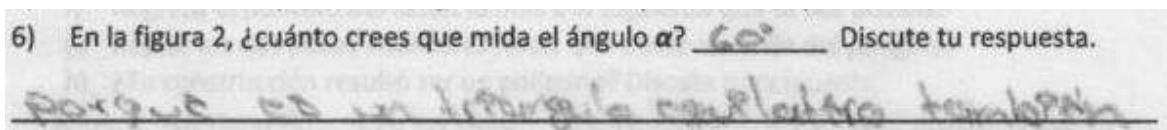


Figura 26. Respuesta en la categoría 6.1

Para otros equipos el ángulo α tiene una medida de 45° , y 75° , sin especificar el por qué (categoría 6.2). Un equipo no contestó a esta pregunta.

En la sección 03, se ve un panorama más alentador, ya que cuatro de los equipos contestaron que el ángulo α mide 72° “*porque solo se divide 360/5 y sale*” (categoría de respuesta 6.3). Dos grupos más argumentaron que el ángulo α mide 60° sin decir el por qué. Un equipo no contestó a la pregunta.

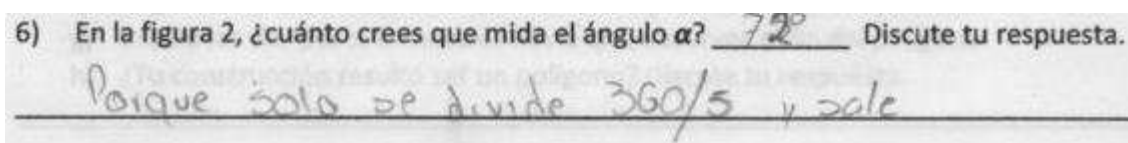


Figura 27. Respuesta en la categoría 6.3

La última pregunta de esta sección es: ¿puedes predecir cuanto mediría el ángulo α , correspondiente al triángulo isósceles base para un polígono regular de ocho lados?

Tres de los equipos de la sección 24, no contestaron a la pregunta, mientras que el cuarto únicamente mencionó que α tiene una medida de 35° sin argumentar el por qué.

Por otra parte tres de los equipos de la sección 03 mencionaron que α medía 45° , “*porque se divide 360° entre 8*” (categoría 7.1):

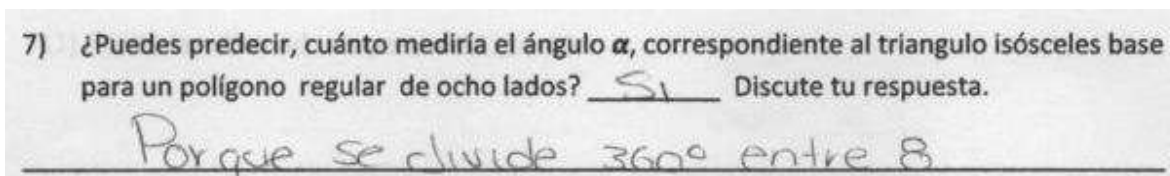


Figura 28. Respuesta en la categoría 7.1

Un equipo señaló que sí se puede saber, por el tipo de triángulos que son (respuesta 7.2).

Otro equipo dio una respuesta que parece ser “sí” (véase la figura 29), “*porque es la mitad de un triángulo equilátero*” (respuesta 7.3).

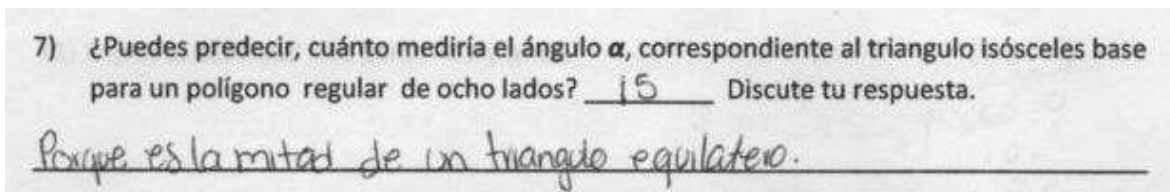


Figura 29. Respuesta en la categoría 7.3

Dos equipos más no respondieron la pregunta.

La segunda parte corresponde a las actividades con el software y comprende cuatro incisos numerados del ocho a doce. En el primero de ellos se pide a los alumnos realizar seis actividades, de las cuales las últimas cuatro corresponden a tareas de manipulación con el software.

El inciso número 8, plantea las siguientes preguntas:

a) ¿Existe otro triángulo aparte del isósceles que se pueda utilizar como base para construir un polígono regular? Discute tu respuesta

b) Si usas como base un triángulo equilátero, ¿Qué polígono te resulta?

En la sección 24, tres de los equipos afirmaron que sí se puede construir un polígono regular con un triángulo distinto del isósceles, en particular con el triángulo equilátero:

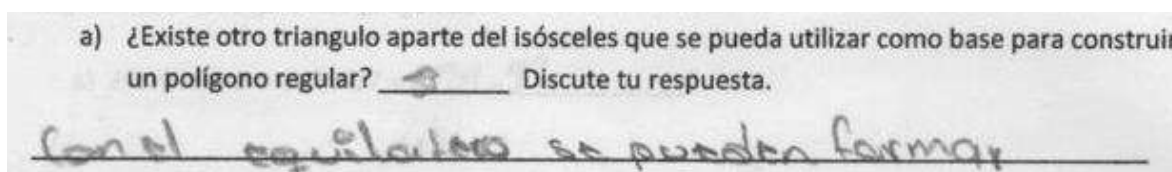


Figura 30. Respuesta en la categoría 8.1

Un equipo señaló que no sabía.

Por otro lado, sostienen que si usan como base un triángulo equilátero, entonces:

Un equipo afirma que se forma un hexágono (Categoría 8.2), otro menciona que el polígono es regular (Categoría 8.3), otro que se trata de un pentágono (Categoría 8.4) y finalmente un último equipo no responde de qué polígono se trata.

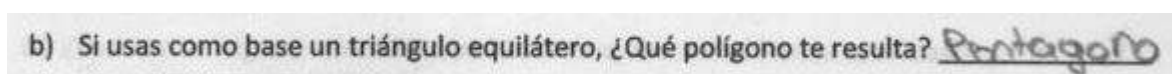


Figura 31. Respuesta en la categoría 8.4

En la sección 03, los siete equipos afirmaron que sí podía formar un polígono regular con un triángulo base distinto del isósceles; tres de ellos señalaron al equilátero (Categoría de respuesta 8.5):

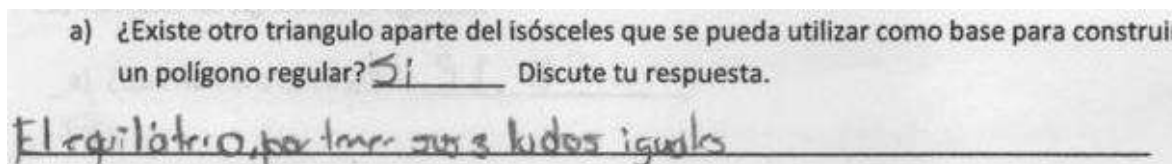


Figura 32. Respuesta en la categoría 8.5

Otro equipo se conformó con decir que no es único y otro más argumentó que "*porque al aumentar la cantidad posemos hacer más figuras de la misma*" (Categoría de respuesta 8.6).

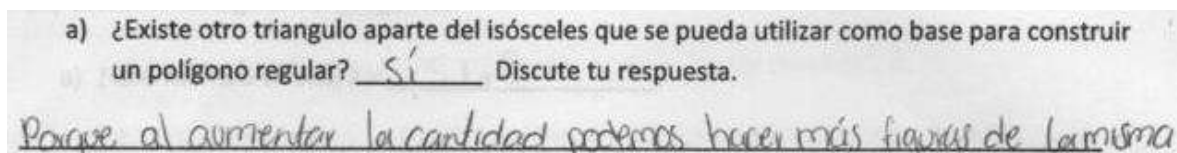


Figura 33. Respuesta en la categoría 8.5

Dos de los quipos de este grupo no respondieron a esta pregunta.

Finalmente con el triángulo equilátero base dos equipos encuentran que se puede formar un hexágono, tres equipos advierten que se formará un pentágono, un equipo más sostiene que la figura que se encontrará es un octágono. El último equipo únicamente menciona que debe de ser regular.

El inciso 9 está dado en los siguientes términos:

Realiza las siguientes actividades:

- Abre el archivo de GeoGebra titulado polígonos.
- Manipula la barra de desplazamiento correspondiente a n , hasta que obtengas un valor de n igual a 4.
- Manipula la barra de desplazamiento de α pasando por todos los valores posibles.
- Registra el ángulo α donde se formó un polígono regular de 4 lados y un polígono regular de 3 lados. $\alpha =$ $\alpha =$
- Nuevamente manipula la barra de desplazamiento de n , hasta llegar a los valores de 8.
- Manipula la barra de desplazamiento de α pasando por todos sus valores posibles y registra a que en el que se formó un polígono regular. $\alpha =$

Para el inciso f, los diferentes tipos de respuestas dadas por los equipos de la sección 03, se incluyen en la tabla 2.

Equipo	Inciso d	Inciso f
Equipo 1 y 2	$\alpha = 120^\circ$ y $\alpha = 90^\circ$	72°
Equipo 3	$\alpha = 180^\circ$ y $\alpha = 180^\circ$	No respondieron
Equipo 4	$\alpha = 45^\circ$ y $\alpha = 60^\circ$	30°

Equipo 5	$\alpha = 270^\circ$ y $\alpha = 238^\circ$	61°
Equipo 6	$\alpha = 270^\circ$ y $\alpha = 241^\circ$	61°
Equipo 7	No respondieron	No respondieron

Tabla 2. Respuestas dadas por los estudiantes de la sección 03 a los incisos d y f

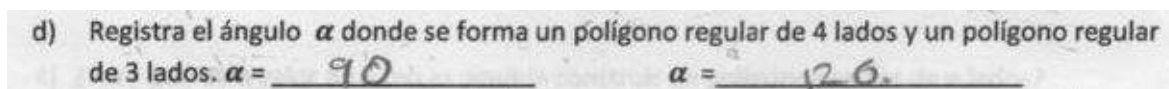


Figura 34. Respuesta al inciso f, categoría 9.1

En la sección 24, las respuestas para estos incisos están incluidas en la tabla 3.

Equipo	Inciso d	Inciso f
Equipo 1	$\alpha = 90^\circ$ y $\alpha = 120^\circ$	90°
Equipo 2	$\alpha = 270^\circ$ y $\alpha = 240^\circ$	
Equipo 3 y 4	$\alpha = 270^\circ$ y $\alpha = 240^\circ$	315°

Tabla 3. Respuestas dadas por los estudiantes de la sección 24 a los incisos d y f

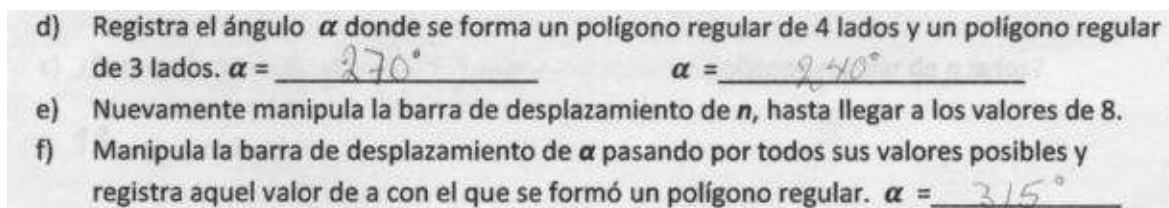


Figura 35. Un tipo de respuesta de los equipos de la sección 24 a los incisos d y f

El inciso 10 lo planteamos en los siguientes términos:

Realiza las siguientes actividades.

- Manipula la barra de desplazamiento correspondiente a n hasta que obtengas un valor de 7.
- Manipula la barra de desplazamiento de α hasta que obtengas un heptágono.
- Aumenta el valor de L hasta 500.
- Da clic derecho sobre el botón que tiene el símbolo.
- Pon el puntero del ratón sobre cualquier parte de la zona gráfica, y con el botón derecho del ratón apretado, arrástralo de derecha a izquierda.
- Regresa el puntero del ratón lo más a la izquierda que te sea posible.
- Repite los dos pasos anteriores hasta que observes el fin del polígono.
- ¿Tu construcción resultó ser un polígono? discute tu respuesta.

En la sección 24 las respuestas que encontramos se muestran en la tabla 4 y en las figuras 36 y 37.

Equipo 1	No, porque le faltó cerrarse
Equipo 2	No, porque sobran partes en el polígono
Equipo 3	No, tenía siete lados aunque uno era de menor tamaño
Equipo 4	No, porque no es exacto

Tabla 4. Respuestas de los equipos de la sección 24 al inciso 10.

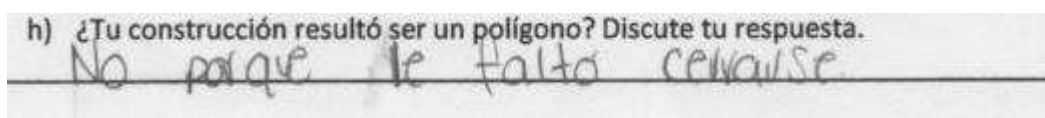


Figura 36. Un tipo de respuesta de los equipos de la sección 24 al inciso h-10

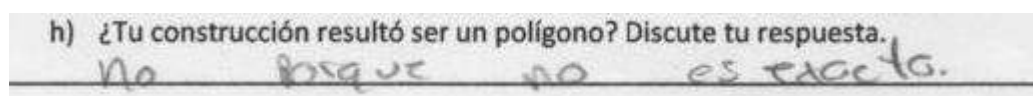


Figura 37. Un tipo de respuesta de los equipos de la sección 24 al inciso h-10

Mientras que la sección 03, las respuestas son las siguientes.

Equipo 1	Sí, pues cuando vamos cambiando las medidas, cambias los ángulos y salen diferentes figuras, polígonos regulares e irregulares
Equipo 2	No, porque tiene 7 lados iguales y no es proporcional
Equipo 3	Sí, por los lados que obtuvimos.
Equipo 4 y 5	Sí
Equipo 6 y 7	No respondieron

Tabla 4. Respuestas de los equipos de la sección 24 al inciso 10

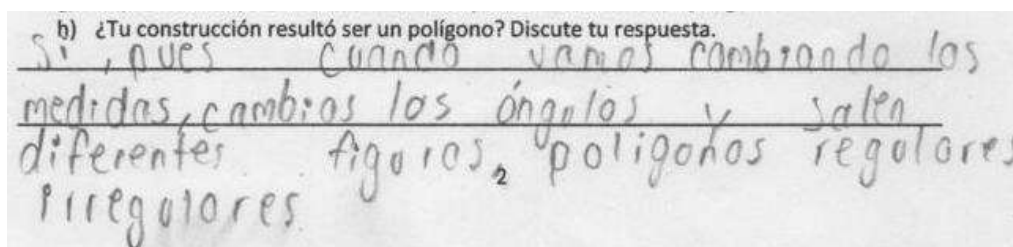


Figura 38. Un tipo de respuesta de los equipos de la sección 03 al inciso h-10

En la cuarta actividad, en la parte de las actividades con software, únicamente se instruye a los alumnos para que repitan la actividad anterior solo que para $n = 11$ y $n = 13$, sin pedirles ningún tipo respuesta, situación por la que este inciso no tiene respuestas.

La tercera parte de la actividad, la titulamos conclusiones, y está planteada únicamente en un inciso, el cual se expresa en los siguientes términos:

Contesta las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué número es $360/7 =$?
- b) ¿Encuentras alguna relación entre el número encontrado en la actividad anterior y el problema de no poder construir un polígono regular de siete lados?
- c) ¿Para qué valores de n , no es posible construir un polígono regular de n lados?

En la sección 03 se encuentran respuestas como las mostradas en la tabla 5:

Equipo	Respuestas a los incisos		
	a	b	c
Equipo 1	51.4	Porque el de 7, su ángulo no es exacto	13
Equipo 2	51.5	Sus ángulos no son exactos	Para el de 13 lados
Equipo 3	51.5	No	Para 8
Equipo 4	51.42	No	Para números impares
Equipo 5	51.42	No	Para los impares
Equipo 6	51.42	Su valor no es exacto y por lo tanto no se puede construir	9 u 11. Todos los números noes porque no son exactos
Equipo 7	51.42	Si, mientras que manipulas las medidas de esa cantidad no te llega a salir un polígono regular	13

Tabla 5. Respuestas de los equipos de la sección 03 a la etapa de conclusión

En la sección 24, las respuestas fueron las siguientes:

Equipo	Respuestas a los incisos		
	a	B	C
Equipo 1	51.42	Si tiene relación debido a que los números no son exactos.	
Equipo 2	51.4285	No	Para 11
Equipo 3	51.42	Sí, porque no son exactos	13 y 11
Equipo 4	51.4185	Que tal vez no salga el polígono porque no es un número entero	11

Tabla 5. Respuestas de los equipos de la sección 24 a la etapa de conclusión

Enseguida presentaremos otro acomodo de las respuestas de los estudiantes, donde escribimos el nombre de los alumnos que percataron con sus respectivas respuestas.

El equipo de alumnos de la sección 03, compuesto por Mariana Nayelli Villafañá Gtz, Ma. Guadalupe Liera Jaimez, Karina Tovar del Toro, respondieron entre otras cosas que el ángulo α para el triángulo base de la figura 1 y 2, tenían una medida de 30° , para ellas, el triángulo de la figura 1, es un triángulo equilátero, y el triángulo base para el polígono regular de ocho lados según ellas mide 15° , porque es la mitad de un triángulo equilátero. A la hora de preguntarles que polígono se forma con un triángulo equilátero, argumentaron que un pentágono, al momento de preguntales el ángulo correspondiente al polígono regular de 4,3, y ocho lados, respondieron que sus ángulos α correspondientes son $45^\circ, 60^\circ, 30^\circ$, al momento de preguntarles si encuentran una relación entre el numero obtenido de dividir $360/7$ y la imposibilidad de construir un polígono regular de ocho lados respondieron que no. Y en la pregunta final respondieron que no se puede construir un polígono regular de ocho lados.

Otro equipo de la sección 03, estuvo integrado por los alumnos Ángel Su riel García Calderón y Jaime Escobedo Farfán. Casi no contestaron nada de la actividad y realizaron muy pocos argumentos. Dentro de sus respuesta más relevantes se encuentra decir que en la figura 1, el ángulo α mide 90° , los triángulos con los que está formada son equiláteros e isósceles, que en la figura 2 el ángulo α mide 60° , mencionan que con un triángulo equilátero base se forma un hexágono, al preguntarles en la actividad 12.b contestan que los ángulos no son exactos; mientras que en la actividad 12 inciso c) encuentran que para el polígono de 13 lados.

El grupo de alumnos de la sección 03, formado por los estudiantes Carlos Alberto Alvarado y Alan Frick García, dieron respuestas de diccionario en las preguntas 1 y 2, al responder que: “un polígono es una figura plana compuesta por una secuencia de lados y vértices”, y un polígono es un polígono regular “cuanto tiene centro, ángulo central, apotema y diagonales”. En la pregunta 3 observaron directamente de la figura que el ángulo α mide 90° , “porque si, solo que esta semi girado”. Vieron de manera correcta que

los triángulos con los que están formadas las figuras, son triángulos isósceles. En la pregunta 6 argumentaron que el ángulo α , mide 72° , porque “solo se divide $360^\circ/5$ y sale”, de manera análoga en la pregunta 7, encontraron que para un polígono de ocho lados el ángulo α mide 45° “ya que se divide $360/8$ ”. En la segunda parte vieron que con un triángulo equilátero se forma un pentágono, y al momento de registrar los ángulos α en la actividad 9, encontraron el valor para α de 270 y 241 grados en el inciso d. Y en el inciso f registraron un valor para α de 61° . Para ellos la construcción hecha con el heptágono resultó ser un polígono, desgraciadamente no vieron ninguna relación entre el número encontrado en la actividad 12 parte A y el problema de no poder construir un polígono regular de 7 lados. Por otro lado mencionan que no es posible construir un polígono regular para la n impar.

El siguiente conjunto de alumnos que estudiaremos, son el equipo formado por Nayeli Leticia Silva Calderón Y José Alejandro Peña Toscano, alumnos de la sección 03 de cuarto semestre de la escuela preparatoria Melchor Ocampo, dependiente de la UMSNH. Dentro de las respuestas características que escribieron se encuentra que un polígono es “una figura geométrica con varios lados” y que un polígono es un polígono regular cuando “tiene todos sus lados iguales”. En la figura 1, observaron que el ángulo α mide 90° porque “en total son 360° y si lo divides entre 4, da 90° ”. También respondieron que los triángulos base son isósceles. Y para la figura 2, consideran que el ángulo α mide 72° porque “dividiendo entre 5 (360) da 72 ”. Consideran que con un triángulo equilátero base obtienen un octágono. En la actividad 9 incisos d dan valores para α de 120 y 90 mientras que el inciso f encuentran un valor de 72° . Al preguntarles si la construcción correspondiente al polígono de 7 lados, es un polígono regular, mencionan que “sí pues cuando vamos cambiando las medidas, cambian los ángulos y salen diferentes figuras, polígonos regulares e irregulares. En la actividad 12 incisos b contestan que “sí que mientras manipulas las medidas con esa cantidad no te llega a salir un polígono regular”, Por último afirman que no es posible construir un polígono regular de 13 lados.

El siguiente conjunto de alumnas que vamos a estudiar, está compuesta por las estudiantes de la sección 03; Adilene y Denisse Orely. Para ellas un polígono es “una figura

con muchos lados”, mientras que un polígono regular es “una figura proporcional”, en la figura 1, el ángulo α mide 90° ,” por qué el total de sus lados son 360° ”, también pueden predecir el ángulo α correspondiente al triángulo isósceles base para un polígono regular de 8 lados, “por qué se divide 360° entre 8”, mientras que al preguntarles que polígono se forma con un triángulo equilátero base, argumentan que es un polígono regular. Encontraron en el inciso d de la actividad 9, valores para α de 120° y 90° , mientras que en el inciso f, le encontraron un valor de 72° , por último, dijeron que el polígono de siete lados no es un polígono regular “por qué tiene siete lados iguales y no es proporcional”. En la actividad 12 incisos b argumentan que “su valor no es exacto y por lo tanto no se puede construir” mientras que en inciso c dieron por respuesta “9 u 11 etc. Todos los números noes por que no son exactos”.

Enseguida estudiaremos a Francisco Camarena y a Álvaro Arroyo Solario, estudiantes de la sección 403, de la preparatoria Melchor Ocampo, dependiente de la universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Para ellos un polígono: “es una figura plana compuesta por una secuencia de las dos vértices”, además dicen que un polígono es regular: “ cuando tiene ángulo central, apotema y diagonales”; en la figura 1 ven un ángulo de 90° “por qué es una vuelta completa es de 360° y este dividió en 4”, suponen que el triángulo base para la figura 1, es un triángulo isósceles, mientras que en la figura 2 creen que el ángulo α mide 72° “por qué se dividió entre 5”. Predicen que para el triángulo isósceles base de un polígono regular de 8 lados su ángulo α mide 45° ya que “se dividió $360/8$ ”. Dedujeron que otro posible triángulo base para un polígono regular es el equilátero, y mencionan que con él se forma un pentágono; en la actividad 9 inciso b pusieron valores para α de 270° y 238° , mientras que en el inciso f consideraron un valor para α de 61° . Para ellos el polígono de 7 lados es un polígono regular , no encuentran relación entre el numero encontrado en la actividad 12.a y el problema de no poder construir un polígono regular de 7 lados, finalmente dicen que no es posible construir un polígono regular de n lados para números impares.

Para terminar con la sección 03 del cuarto semestre de la preparatoria Melchor Ocampo, dependiente de la universidad Michoacana de San Nicolás De Hidalgo, nos enfocaremos

en las respuestas, que dio la alumna Dulce María Ferreyra Águilas. Para ella “un polígono es una figura con varios lados”, el cual es regular “cuando sus lados son iguales”. En la figura 1 encontró un valor para α de 90° , mientras que en la figura 2, ese ángulo fue de 60° . Los triángulos con los que está formada la figura 1 los presenta como isósceles. Con un triángulo equilátero predice que se puede formar un hexágono. Mientras que en la actividad 9 inciso d, encuentra un ángulo para α de 180° . Menciona que el polígono de 7 lados “si es polígono regular, por los lados que obtuvimos”. Al cuestionarle en la actividad 12 inciso b contexto: “por qué el de 7 su ángulo no es exacto. También menciona que no es posible construir un polígono de 13 lados.

Continuaremos nuestro estudio, con los alumnos de la sección 21, de cuarto semestre de la escuela preparatoria Melchor Ocampo, dependiente de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Nuestro primer alumno a estudiar es Juan Serrano Guido. Para él un polígono, es “una figura geométrica con muchos o varios lados”, el cual es regular cuando: “se tiene simetría a la figura”. En la figura 1, observa un ángulo α de 90° , mientras que en la figura 2 para el ángulo en cuestión introduce un valor de 75° . Ve de manera correcta que los triángulos con los que está formada la figura 1 son isósceles. En la actividad 9 incisos d, encuentra valores para α de 90° y 120° , mientras que en el inciso f, vuelve a encontrar el valor de 90° . En la actividad 10 inciso h contexto que: “no porque no es exacto”. Finalmente me menciona que no es posible construir un polígono de 11 lados.

El alumno de la sección 24, Gerardo Aguilar Merino, observo que un polígono es “una figura con varios lados”, mientras que es regular “cuando tiene medidas regulares”. Para el los triángulos con los que está formada la figura 1 son equiláteros, mientras que en la figura 2, supone que el ángulo α mide 60° , “por qué es un triángulo equilátero también”. Menciona que con el triángulo equilátero se puede formar un pentágono. Mientras que en actividad 9 incisos d dan valores para α de 270° y 240° , mientras que en el inciso f observa un valor para α de 315° . Discute que la figura formada con siete triángulos no es un polígono “por qué sobran partes en el polígono”; en la actividad 12 inciso b contesta que sí, “por qué no son exactos”, mientras que en la última parte responde que no es posible construir un polígono de 13 y 11 lados.

Para el alumno de la sección 24 de cuarto semestre de la escuela preparatoria Melchor Ocampo dependiente de la UMSNH, Abraham Ramírez Chávez, un polígono es “una figura geométrica que está formada por varios lados; en la figura 1, sospecha que el ángulo α de los triángulos con los que está formada miden 90° y que además dichos triángulos son isósceles, considera, que si se puede construir un polígono regular con un triángulo equilátero, aunque no dice cual. Para la actividad 9 incisos d, predice que el ángulo α tiene una medida de 270° y 240° , mientras que considera que la figura formada por siete triángulos no es un polígono, “porque le falta cerrarse”, finalmente en la actividad 12 inciso b contexto: “si tiene relación debido a que los números no son exactos”.

Por último, para terminar con los alumnos estudiados de la escuela preparatoria Melchor Ocampo dependiente de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, le toca el turno a Jonathan Daniel Maravillas Rodríguez, estudiante de la sección 24 de cuarto semestre. Para él un polígono es “una figura construida por triángulos iguales, figura construida por varios lados”, dice que un polígono es regular “cuando sus dimensiones son todas iguales”. En la figura 1, sospecha que el ángulo α del triángulo base mide 90° y que además este es isósceles; en la figura 2, supone que el ángulo α en cuestión tiene una medida de 45° , predice que para construir un polígono regular de ocho lados, su ángulo α correspondiente medirá 35° . También menciona que con un triángulo equilátero se forma un hexágono, mientras que en la actividad 9 incisos d, encuentra valores para α de 270° y 240° , en el inciso f el valor que escribió para α es de 315° . Al preguntarle si la construcción hecha con siete triángulos era un polígono regular menciona: “no tenía siete lados aunque uno era de menor tamaño”. En la actividad 12 inciso b contexto: “que tal vez no salga el polígono porque no es un número entero”, mientras que en la última actividad contexto que no es posible construir un polígono regular de 11 lados.

V.1.1.2. Respuestas de los estudiantes del Conalep II, Morelia.

Los alumnos del conalep Morelia 2 Karina Itzel Bedolla Chávez y Michelle Chávez Gutiérrez, trabajaron juntos en dos de las tres actividades que se aplicaron en el conalep.

En la primera de ellas titulada construyendo polígonos encontraron que para construir un hexágono, tienen la necesidad de 6 triángulos, con medidas de ángulos interiores de $72^\circ, 54^\circ, 54^\circ$. En la siguiente pregunta se les cuestiona sobre las diferencias de un polígono regular y uno irregular, a lo que responden que: “la medida de sus ángulos varia”, ellas suponen que necesitan 13 triángulos para construir un polígono regular de 13 lados. La tabla que se ubica en el inciso 2 de esta actividad, la llenaron relativamente bien al escribir $72^\circ, 60^\circ, 51.4^\circ, 40^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 45^\circ$, para los polígonos regulares de 5,6,7,9,4,3,8 lados respectivamente, observan que si el número de lados aumenta el valor de θ disminuye, encuentran la relación $n = k * \theta$, y para k escriben la formula $k = n * \theta$, la tabla del inciso siguiente la llenan con valores de 360 y abajo de esos valores escriben los valores correspondientes de $72^\circ, 60^\circ, 51.4^\circ, 40^\circ$ respectivamente para los valores de n de 5,6,7,9, consideran que no se puede construir un polígono regular si únicamente se cuenta con un triángulo, mientras que en ultimo inciso de esta actividad responden: “son iguales por que el ángulo es igual”.

Una actividad parecida y que únicamente al trabajo Michelle Chávez Gutiérrez, es la titulada polígonos. En el primer inciso Michelle construyo un pentágono y en base en su construcción escribió que un polígono: “es una figura geométrica que tiene lados mayores a 3, existen iguales con lados iguales e irregulares”. Recordó que los puntos de unión entre dos lados se llaman vértices. De las tres figuras en el inciso 4, sostiene que la primera y segunda de izquierda a derecha no son polígonos, mientras que la tercera si le encontró forma de polígono, la primera figura considera que no es polígono porque “no tiene todos sus lados juntos”, mientras que la segunda considera que “no tiene todos los lados juntos” y en la tercera observa que “todos sus lados están unidos con vértices”, considera que la principal característica que le hace falta a las figuras para que sean polígonos es: “que tengan todos los vértices”. Deduce que los ángulos interiores de un triángulo isósceles cuando dos tienen el mismo valor de 45° , el otro tiene un valor de 90° , considera que un triángulo isósceles puede llegar a ser un triángulo rectángulo, “por qué puede llegar a tener una medida de 90° ”. En el inciso 5, construyo un triángulo y con base en él dijo que “tienen todos sus lados unidos por vértices”, considera que los triángulos

$\triangle ABC$ y $\triangle CDA$ son triángulos rectángulos, y que en el triángulo $\triangle ABC$, si el lado AB mide 10cm entonces el lado AC mide también 10 cm, además deduce que los ángulos de dicho triángulo son $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$, para él los triángulos $\triangle ABE$, $\triangle BEC$, $\triangle CED$, $\triangle KLF$, $\triangle FLG$, $\triangle GLH$, $\triangle HLG$, $\triangle JLK$ son todos ellos isósceles, siendo esta la característica común que ve en todos ellos, considera que si se pueden construir un polígonos regulares de ocho lados a partir de triángulos base porque “siguen siendo polígonos”, de manera análoga también considera que se puede construir un polígono regular de siete lados porque “son polígonos”, considera que para un polígono regular de 7 lados el ángulo del triángulo base debe de medir 45° . En la parte de actividades con el software, se le pregunta si se puede utilizar, un triángulo base distinto del triángulo isósceles para construir un polígono regular, a lo que responde que no porque “los vértices no coincidirían”, observa que para un α de 60° y seis triángulos la figura que se forma es un hexágono, encuentra de manera correcta que polígono regular de cuatro lados el valor de α correspondiente es de 90° , mientras que para un polígono regular de 3 lados, la respuesta que dio fue de 120° , para el polígono regular de 7 lados encontró un valor para α de 51.5° , ve que el valor de α no es exacto y considera que un valor de 51.48 es mejor “para que dé más exacto”, posteriormente registra valores para α del triángulo base para los polígonos regulares de 7,11,13 lados obtenidos a través de la computadora de; 51.5° , 33° , 28° , mientras que considera que el valor de α es de 51.48° , 32.75° , 27.83° respectivamente, calculo el número $360/7$, dándole un valor de 51.4, número que considera que no es exacto por “hay decimal”, la relación que encuentra entre la imposibilidad del cálculo exacto y la imposibilidad de construir un polígono regular de siete lados preciso ella la encuentra en que los decimales no permiten la exactitud y considera que para los números impares no es posible construir un polígono regular porque “la división de grados siempre saldrá en decimal”.

La última actividad que se les aplico, y que contestaron Karina y Michelle como un equipo, es la que titulamos como el problema de la caja, la actividad consiste en que Juan está empujando una caja en una loma en busca de un lugar para guardarla, descubre un buen lugar para meter la caja, este lugar es un hueco que está debajo de la pared. Su problema

consiste ahora en meter la caja dentro del hueco. El hueco mide 2.4 m de altura y la caja 2.3, pero la loma tiene una inclinación de 16° . ¿Podrá Juan meter la caja al hueco sin que la caja toque la pared? en el inciso 2, se les pidió que introdujeran en una tabla algunos valores de PR y de PB ; ellos introdujeron valores de RQ y de PB , y posteriormente lo graficaron, dándoles una función constante salvo 2 puntos donde unió de ellos se dispara mucho., finalmente en la última pregunta de la actividad, se les cuestiona sobre las ventajas y limitaciones que tiene el modelo del problema elaborado con el software de geometría dinámica y sin él. A lo que respondieron que: “es más fácil comprender un problema de matemáticas ya que te permite plantear las soluciones de diferentes formas”.

Enseguida estudiaremos las respuestas dadas por los alumnos del conalep Morelia 2 Félix Cedillo Solyenitzi y Jazmín Casandra Cesar Gómez, de ellos únicamente podemos registrar las actividades construyendo polígonos y polígonos. En la actividad construyendo polígonos afirman que se necesitan seis triángulos para formar un hexágono, y consideran que los ángulos interiores de un triángulo base para un hexágono miden 60° cada uno, consideran que la diferencia entre un polígono regular y uno irregular radica en los ángulos, suponen que se necesitan 13 triángulos para formar un polígono regular de 13 lados, la tabla del inciso 2 la contestan con valores correctos, en la celda correspondiente al polígono regular de 7 lados, encuentran un valor de 51.42° , contestaron que si el número de lados aumenta entonces el valor de θ disminuye, encontraron las relaciones entre n y θ de la forma $n = k * \theta$ y $k = n * \theta$, donde k es una constante, afirman que con un triángulo se puede construir un polígono regular que es un triángulo, finalmente en el inciso siete escribieron: “las tres circunferencias son iguales, son circunferencias externas por que tocan los vértices de los triángulos.

Por otra parte, en la actividad polígonos, dibujaron un triángulo y con base en él, dicen que un polígono “tiene lados, vértices...”, recordaron que el punto de unión entre dos lados se llama vértice, de las tres figuras que se les presentan en el inciso 4, sostienen que la primera y la tercera no son polígonos, mientras que la segunda si lo es, suponen que la característica que les falta a la figura 1 y 3 para ser polígonos es “que todos sus vértices se

unan formando una figura geométrica cerrada”. Deducen de manera correcta que si dos de los ángulos interiores de un triángulo isósceles miden 45° entonces el otro debe de medir 90° , consideran que un triángulo isósceles también puede ser un triángulo rectángulo “por qué uno de sus ángulos mide 90° ”. En el inciso 5 dibujaron un cuadrado y con base en el escribieron “unión de vértices, ángulos internos igual a 180° ”, respondieron que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle BCD$ son triángulos rectángulos, supusieron que si en el triángulo $\triangle ABC$, el lado AB mide 10 entonces el lado AC mide lo mismo, encontraron que los ángulos interiores del $\triangle ABC$ son 90° , 45° , 45° . Encontraron que los triángulos $\triangle ABE$ y $\triangle CED$ son triángulos equiláteros, mientras que los triángulos: $\triangle KLF$, $\triangle FLG$, $\triangle GLH$, $\triangle GLJ$, $\triangle JKL$ los consideran a todos ellos como triángulos isósceles, consideran que la principal característica que tienen en común los triángulos anteriores “es que tienen dos de sus ángulos iguales y uno desigual”. Consideran que si se puede construir un polígono regular de ocho lados porque “es igual que los dos polígonos anteriores, su centro puede ser vértice de unión de los triángulos”, al preguntarles si se puede construir un polígono de siete lados afirman que si “por lo mismo que en la respuesta anterior”, sin embargo no pueden dar la medida del ángulo α , del triángulo isósceles base correspondiente para dicho polígono, consideraron que si se puede construir un polígono regular con otro triángulo aparte del triángulo isósceles y argumentan que “puede ser un isósceles un rectángulo, como se utiliza para formar un rectángulo y un cuadrado”. Encontraron con el software que la figura formada por seis triángulos y α con un valor de 60° es un hexágono, consideran que el valor del ángulo α , que necesita el triángulo isósceles base para formar un polígono regular de cuatro lados es de 45° , mientras que para el polígono regular de 4 lados encuentran un valor de 60° . Consideraron que el ángulo α del triángulo base del polígono regular de siete lados, obtenido a través del software tiene un valor de 51.4° valor que no consideraron exacto y consideraron que un valor exacto para α , estaría dado por “ 51.45° , porque con valor de 51.4 no cierra y 51.5 se pasa”, ellos encontraron para α valores obtenidos a través de la máquina de 51.4, 32.8, 27.7, mientras que los valores que consideraron como exacto son: 51.42, 32.727, 27.69, para los polígonos de 7, 11 y 13 lados. En la parte de conclusiones al dividir $360/7$ les dio un valor de 51.42,

consideraron que este resultado es exacto, sin embargo no especificaron porque, dijeron que si hay relación entre la imposibilidad del cálculo exacto y la imposibilidad de construir un polígono regular preciso de 7 lados, aunque no mencionaron cual era, encontraron que para n igual a 7 y 11 no se puede construir un polígono regular “por qué no es exacto el número del ángulo A para que logre cerrar el polígono”.

El siguiente conjunto de alumnas que vamos a tratar corresponde a las estudiantes del conalep Morelia 2; Melisa Chávez Vargas y María Guadalupe Piñón García.

En la actividad construyendo polígonos, sostienen que se ocupan seis triángulos para formar un polígono regular, con ángulos interiores de 144° , para ellas la diferencia entre un polígono regular y uno irregular radica en “que el regular tiene los lados iguales y el irregular no tiene los lados iguales”, consideran que se necesitan 13 triángulos para formar un polígono regular de 13 lados. En la tabla del inciso 2 dieron para α los valores de 360° , 432° , 504° , 648° , 288° , 216° , 576° , para los polígonos regulares de 5, 6, 7, 9, 4, 3, 8 respectivamente, consideran que si el número de lados aumente entonces el valor de θ también aumenta, encuentra las relaciones para n y θ de la forma $n = k * \theta$ y $k = n * \theta$, formulas con las que obtienen valores para la tabla del inciso 5 para θ de 360° , 432° , 504° , 648° , de los polígono regular de 5, 6, 7, 9 lados, contestaron que con un solo triangulo , se puede construir un triángulo equilátero que es un polígono regular. En la pregunta del inciso 7 argumentan: “que una de las circunferencias es más grande que la otra por que varían los lados del triángulo”.

En la actividad del problema de la caja, encuentran una gráfica que tiene tres mínimos y tres máximos, uno de ellos es mucho mayor, podemos considerar aproximadamente esa función como una armónica con amortiguamiento. Y en la pregunta del inciso 4 contestan “que nos ayuda a hacer más fáciles los trabajos y si no tuviéramos el programa tendríamos que dibujarlo”.

La tercera actividad que presentaron, fue la titulada polígona. En el inciso 1 dibujaron un hexágono y con base en el mencionaron que un polígono “es una figura compuesta por una secuencia finita de segmentos rectos”. Escribieron que los puntos de unión entre dos lados se llaman vértices. De las tres figuras que se les presentan en el inciso 4, suponen

que la primera y la segunda no son polígonas, mientras que la tercera si la consideran como tal. Escriben que lo que les hace falta a la figura 1 y 2 para ser polígonos es “que hace falta la unión de los lados en la primera y en la segunda figura”. Encuentran de manera correcta que en un triángulo isósceles si los ángulos que son iguales miden 45° entonces el ángulo restante debe de medir 90. Sostienen que un triángulo isósceles también puede ser un triángulo rectángulo porque “tiene un ángulo recto de 90° ”. En el inciso 5 dibujaron un cuadrado y con base en el dijeron que los polígonos regulares tienen características como: “todos sus ángulos son iguales, ángulos iguales, está compuesto por segmentos rectos”. En el inciso 6.a y 6.b mencionan que los triángulos: $\triangle ABC$ y $\triangle BCD$ ambos son isósceles. Consideran que si el lado AB mide 10 entonces el lado AC mide lo mismo. El triángulo de la figura 1 $\triangle ABE$ lo justificaron como equilátero, mientras que el triángulo $\triangle CED$ lo mencionaron como isósceles. Todos los triángulos que se muestran en la figura 2, los tomaron como equiláteros, y mencionan que la característica que tienen en común estos triángulos es “que todos tienen sus lados con la misma medida”. Argumentan que si se puede construir un polígono regular de 7 y ocho lados con un triángulo isósceles base por que “de ahí vamos sacando los demás lados uniendo”. Y afirman que la medida del ángulo α correspondiente al triángulo isósceles base para un polígono regular de 7 lados es de 90° . En las actividades con software contestaron que si se puede construir un polígono regular con un triángulo base distinta del isósceles argumentando “por que usamos el triángulo equilátero y tiene sus lados iguales y sus ángulos también y así es más fácil hacer los polígonos regulares”. La figura que encontraron al fijar n en 6 y α en 60 es un hexágono. Mientras que el ángulo α del triángulo base para construir un polígono regular de 4 y 3 lados es respectivamente de 90° y 120° . Para construir el heptágono escribieron para α un valor de 51.4, número que consideraron exacto. No encontraron mucha diferencia entre los valores obtenidos con la máquina y aquellos que consideraron como los valores originales Para el ángulo α del triángulo isósceles base para los polígonos regulares de 7, 11 y 13 lados, siendo estos en el primer caso de 51.4, 32.7, 27.7, mientras que en el otro caso son 51.4, 32.7, 27.6. El número $360/7$ lo tomaron como un valor exacto. La relación que encontraron entre la

imposibilidad del cálculo exacto y la imposibilidad de construir un polígono regular precisó radica de acuerdo con ellas en que “el valor de a no es exacto para formar el polígono de 7 lados”. Mencionaron que para toda la n es posible construir un polígono regular de n lados “por qué con todos los valores se puede”.

El siguiente conjunto de alumnas del conalep Morelia 2 que vamos a estudiar, corresponde a las alumnas Gabriela Montserrat Mora Mandujano Y Wendy Grisel Zavala Alvarado, ellas contestaron de manera conjunta las actividades construyendo polígonos y el problema de la caja, mientras que contestaron de manera independiente la actividad polígonos.

En la actividad contrayendo polígonos, afirman que se necesitan seis triángulos para formar un hexágono regular. Encuentran que los ángulos interiores de dicho triángulo tienen una medida de 144° . La diferencia entre un polígono regular y un irregular es, según ellas: “que sus lados no son iguales”. Para construir un polígono regular de 13 lados consideran que se ocupan 13 triángulos. En la fila correspondiente a los valores del ángulo θ en la tabla del inciso 2 introducen valores de: 72, 60, 51.42, 40, 90, 120, 45, para el triángulo base del polígonos regulares de 5, 6, 7, 9, 4, 3, 8 lados respectivamente. Argumentan que si el número de lados aumenta entonces el ángulo también aumenta. Las relaciones que encontraron para n y θ son $n = k/\theta$ y $k = n/\theta$, con base en la última relación llenaron la gráfica del inciso 5, introduciendo valores para θ de 72, 60, 51.42, 40 para el triángulo base del polígono regular de 5, 6, 7 y 9 lados respectivamente. Mencionan que no se puede construir un polígono regular con un triángulo base distinta del equilátero. Finalmente en la última pregunta de esta actividad contestaron que: “varían las medidas”.

En la actividad titulada el problema de la caja, en el inciso tres dibujaron una línea recta, mientras que en la pregunta del inciso 4 contestaron: “que es más fácil y nos ayuda a darnos una idea más profunda y así mismo podemos ver las medidas para saber si cabe”.

En la actividad polígonos, Gabriela dibujo un hexágono y con base en él dijo, “que el polígono tiene una unión entre dos lados”. Recordó de manera satisfactoria que la unión entre dos lados se llama vértices. Supuso que la primera de las tres figuras del inciso 4

era un polígono, mientras que las otras dos no, argumentando que lo que les faltaba es “que los puntos se puedan unir”. Encontró que si en un triángulo isósceles los dos ángulos iguales miden 45° , entonces el restante debería de medir 30° . Justifica que un triángulo rectángulo, no puede ser un triángulo isósceles,” por qué son muy diferentes “. Los triángulos cuestionados en el inciso 6.a y 6.b, los considero como equiláteros. Mientras que si AB del triángulo ABC mide 10, entonces supuso que el lado AC mide 5. Los triángulos tratados desde el inciso e hasta el inciso m, los justifico como triángulos equiláteros y mencionó que la característica que tienen en común es “que miden 60° ”. Argumenta que si se pueden construir polígonos regulares de 7 y 8 lados de manera análoga a como lo hicimos en las figuras 1 y 2 por que “la base es igual y los triángulos están unidos”. En las actividades con software ve factible construir un polígono regular con otro triángulo distinto del isósceles argumentando que “porque sus lados son iguales”. En el inciso 2.h de las actividades con software registra valores para α de 45° y 65° , mientras que para el polígono regular de 7 lados el valor de α que escribió fue de 51.43, observa que este valor es exacto. En las conclusiones no encuentra ninguna relación entre la imposibilidad del cálculo exacto y la imposibilidad de construir un polígono regular preciso de 7 lados. Al preguntarle sobre los valores de n para los cuales no es posible construir un polígono exacto, únicamente contesto si, y al cuestionarle sobre el por qué, argumenta que “son iguales”.

Wendy por otro lado, también dibujo un hexágono, y con base en el contexto que un polígono es una “figura geométrica de un plano que está establecida por líneas rectas”. Menciona de manera satisfactoria que los puntos de unión entre dos lados se llaman vértices. Para ella de las tres figuras que se le presentan en el inciso 4, considera que la primera y la tercera si son polígonos, mientras que la segunda no lo es “porque tiene más lados de un polígono y esa figura no parece”. Encontró de manera correcta que si dos ángulos de un triángulo isósceles miden 45° , entonces el otro debería de medir 90° . Respondió que un triángulo isósceles también puede ser un triángulo rectángulo “porque son casi las mismas dimensiones”. En el inciso 5 dibujo un cuadrado y con base en el escribió “sus lados miden lo mismo, tiene cuatro lados iguales”. Los triángulos $\triangle ABC$ y

$\triangle ABCD$ los trato como triángulos equiláteros. Mientras que en el $\triangle ABC$, si el lado AB mide 10cm, encontró para el lado AC , una medida de 15 cm, mientras que la medida de los ángulos interiores de dicho triángulo supuso que median 45° . Los triángulos del inciso e hasta el m, los considero todos ellos como equiláteros, siendo su principal característica que miden 60° . Observa que si es posible construir un polígono regular de 7 y 8 lados de manera análoga a como se hizo en la figura 1 y 2, para ello argumenta que “si porque la base a triángulos unidos, porque los triángulos están unidos”. Para el polígono regular de 7 lados encuentra que la medida del ángulo base debería de ser de 25° y 71° . Dice que con un triángulo escaleno base se puede construir un decágono, también menciona que este triángulo tiene lados diferentes. En la parte donde se utiliza el software, al manipular n hasta 6 y dejar el ángulo α en 60° , menciona que se obtiene un hexágono. El ángulo α que encontró correspondiente a un polígono regular de 4 lados es de 45° , mientras que para 3 lados escribe un valor de 60° . Argumenta que el polígono regular de 7 lados se formó en un ángulo α de 51.43° , valor que considera que es exacto. Los valores de α que obtuvo con la maquina fueron de 51.43, 32.73, 28.70, mientras que los valores que cree que son los reales de α son de 51.48, 51.48, 51.44 para los polígonos regulares de 7, 11 y 13 lados. No encuentra ninguna relación entre la imposibilidad del cálculo exacto, y la imposibilidad de construir un polígono precisó de 7 lados. Al preguntarle sobre los valores para los cuales no se puede construir un polígono regular de 7 lados únicamente responde que si, justificando su respuesta diciendo que “son iguales sus lados”.

Enseguida estudiaremos las respuestas dadas por las alumnas del conalep Morelia 2: Cristina Rubí Huerta Sánchez, Juana Karina Calderón Morón y María Fernanda Gutiérrez Corona. Juana Karina y María Fernanda trabajaron juntas las actividades del problema de la caja y polígonos, mientras que Juana Karina trabajo con Cristina Rubí la actividad de construyendo polígonos, en contra parte Cristina Rubí trabajo sola la actividad polígonos, mientras que María Fernanda trabajo de manera individual la actividad construyendo polígonos.

María Fernanda en la actividad construyendo polígonos, menciona que se necesitan 6 triángulos para formar un hexágono regular, donde según ella los ángulos interiores de

dichos triángulos tienen una medida de 144 cada uno, la principal diferencia que encuentra entre un polígono regular y un polígono irregular es que “sus ángulos no miden lo mismo”. Considera que se necesitan 13 triángulos para formar un polígono regular de 13 lados. Mientras que en el inciso 2 escribe valores para θ de 72° , 60° , 51° , 40° , 90° , 45° , 45° , para los polígonos regulares de 5, 6, 7, 9, 4, 3 y 8 lados respectivamente. Sostiene que si el número de lados aumenta entonces el valor de θ disminuye. La relación que encuentra entre n y θ es $n = k/\theta$, relación en la que se basa para escribir valores para θ de 72, 60, 51, 40, para los polígonos regulares de 5, 6, 7, 9 lados respectivamente. Escribe que no se puede construir un polígono si solamente contamos con un solo triángulo. En la última pregunta de la actividad contesta que: “varía en su tamaño”.

La actividad contrayendo polígonos hecha por las alumnas Juana Karina y Cristina Rubí, es una copia casi exacta de la actividad hecha por María Fernanda de manera que no consideramos conveniente volver a repetir cada una de las respuestas.

Por otra parte en la actividad el problema de la caja, Juana Karina y María Fernanda registraron valores para RQ de .32, .24, .2, .19, .2, .24, .29, .32, .39, haciéndolos coincidir respectivamente con los valores de PB siguiendo el mismo orden: .02, .4, .81, 1.21, 1.59, 1.88, 2.22, 2.33, 2.63. Dibujaron una gráfica que no me es posible entender. Al preguntares sobre las ventajas y desventajas que trae consigo el modelo del problema elaborado con el software de geometría y sin él, justifican que: “es muy útil y muy rápido ya que es más fácil de realizar este tipo de actividades”.

En la actividad polígonos, Cristina Rubí dibujo un hexágono y en base en el argumento, que un polígono “es una figura plana con lados rectos”, escribió que las tres figuras que se le presentaron en el inciso 4 son polígonos. Mientras que dedujo que si en un triángulo isósceles los dos ángulos que miden lo mismo tienen una medida de 45° entonces el ángulo restante debe de medir 30. Menciona que un triángulo rectángulo jamás puede llegar a ser un triángulo isósceles. En el inciso 5 dibujo un cuadrado y con base en el contesto: “lado, vértice, centro, radio, apotema, diagonal, perímetro, semiperímetro, sagita. Mencionó que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle BCD$ son isósceles. Predijo que si el lado AB del $\triangle ABC$ mide 10 cm, entonces el lado AC tiene una longitud de 13 cm. Los triángulos del

inciso 6.e, 6.f, 6.g los encontraron todos ellos como isósceles, mientras que los triángulos de los incisos 6.i, 6.j, 6.k, 6.L, los mencionó como equiláteros. Argumento que la característica que tienen en común todos estos triángulos es que tiene tres lados. Supone que si se pueden construir de manera análoga a como se hizo en las figuras 1 y 2 polígonos regulares de ocho y siete lados, argumentando que: “igual que el cuadrado se unen de los vértices”. Para el ángulo α correspondiente al triángulo base para un polígono regular de siete lados dio la medida de 51.43. Considera que se puede construir un polígono regular con un triángulo equilátero base. En las actividades con software encuentra de manera correcta que para un valor de α igual a 60° y un valor de n igual a seis se forma un hexágono. Registra para el ángulo α del triángulo base de un polígono regular de 3 y de 4 lados un valor de 120 y 90 respectivamente. El valor del ángulo α que encontró donde se forma un polígono regular de 7 lados es de 52.5, valor que no considero exacto argumentando que el valor exacto debería de ser “52.42, para que dé ya que 52.5 se pasa”. La tabla que se encuentra en las actividades con software inciso 2.c la lleno con valores para α obtenidos a través de la máquina de 52.5, 32.5, 27.5, mientras que los valores que considera como los exactos para α son 51.43, 32.72, 27.69. En las conclusiones en el inciso 2 observa que si es exacto el número $360/7$. En el inciso tres, al cuestionarle sobre si hay alguna relación entre la imposibilidad del cálculo exacto y la imposibilidad de construir un polígono regular preciso de siete lados, afirma que “si por que el ángulo no es exacto no queda bien cerrado”. Los valores de n que escribió en lo que piensa que no se puede construir un polígono regular de n lados son 7, 5, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, deduce que no se pueden construir polígonos en las anteriores n “por qué los triángulos se enciman o no alcanzan a tocar”.

En contraparte las alumnas Juana Karina y María Fernanda en la actividad polígonos, dibujaron un hexágono y con base en él, observan que un polígono es “una figura plana con lados rectos”. Recuerdan que los puntos de unión entre dos lados se llaman vértices. De las tres figuras mostradas en el inciso 4, la primera y la tercera la consideran como polígonos mientras que la segunda no la observan como tal, argumentando que “por qué no hay una unión de vértices”. Escribieron de manera satisfactoria que si los ángulos

iguales de un triángulo isósceles miden 45° entonces el otro ángulo debería de medir 90° . Argumentan que un triángulo isósceles no puede ser un triángulo rectángulo “porque sus lados (isósceles) 2 son desiguales”. En el inciso 5, dibujaron un cuadrado y con base en el escribieron: “todos sus lados deben de ser iguales, los ángulos internos son iguales, tiene vértice, centro, radio, perímetro, apotema, diagonal”. Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle BCD$ los tomaron como triángulos equiláteros. Mientras que encontraron que en el triángulo $\triangle ABC$, si el lado AB mide 10 cm. Entonces el lado AC también mide lo mismo. Para ellas cada uno de los ángulos interiores del triángulo $\triangle ABC$, tienen una medida de 60° . Los triángulos referidos en los incisos 6.e, 6.f, 6.g, 6.h, 6.i, 6.j, 6.k, 6.l, 6.m, los observaron todos ellos como equiláteros. Escribieron que la principal característica que comparten todos ellos es que sus ángulos miden 60° . Deducen que si se pueden construir polígonos regulares de siete y ocho lados de manera análoga a como lo hicimos en la figuras 1 y 2 por que “si se puede formar en base a triángulos unidos”. En la parte de las actividades con software, afirman que se puede construir un polígono regular con el triángulo escaleno debido a que este “tiene sus lados diferentes y se pueden construir decágonos etc.”. Observan de manera correcta que si manipulamos el valor de n hasta 6 y el valor de α hasta los 60° , entonces se forma un hexágono. El ángulo α del triángulo base para un polígono regular de cuatro, tres y siete lados que escribieron fueron respectivamente 45° , 60° , 51.43° , este último número lo consideraron como exacto. Los valores de α que obtuvieron con la máquina fueron de 51.43, 32.73, 28.70, mientras que los valores que tomaron como los reales de α son 51.4, 32.7, 28, para los polígonos regulares de 7, 11 y 13 lados. Dedujeron que el número 51.43 es un número exacto. No encontraron ninguna relación entre la imposibilidad del cálculo exacto y la imposibilidad de construir un polígono regular precisó de 7 lados. Al cuestionarles sobre los valores de n para los cuales no es posible construir polígonos regulares únicamente responden que “para los polígonos irregulares, porque son irregulares.”

Los alumnos del conalep Morelia 2 Brian Bethzemani Ruiz Mora, Felipe Flores Guerra, Rafael Sánchez Izquierdo, y Filiberto Guillen Sacristán, trabajaron las actividades construyendo polígonos y polígonos de la siguiente manera: Felipe y Rafael trabajaron

juntos la actividad construyendo polígonos, mientras que por otro lado la misma actividad la trabajaron juntos los alumnos Brian y Filiberto. La actividad polígona la realizaron de manera conjunta Felipe y Filiberto, mientras que la realizó de manera individual Brian.

Brian y Filiberto en la actividad construyendo polígonos, sostienen que se ocupan seis triángulos para formar un hexágono, en el cual el ángulo $\angle ABC$ tiene una medida de 72° . En la tabla del inciso 2 escribieron para el ángulo θ valores de 72° , 60° , 52° , 40° , 90° , 120° , 45° , para los polígonos regulares de 5, 6, 7, 9, 4, 3, 8 lados respectivamente. Afirman que si el número de lados aumenta entonces: “reduce el valor del ángulo y cambia”. La relación entre n y θ que encontraron fue $n = k/\theta$, donde k es una constante, con base en dicha relación, escribieron que el ángulo α vale 72° , 40° , 52° , 40° para los polígonos regulares de 5, 6, 7, y 9 lados respectivamente. Si únicamente contamos que un único triángulo ven que se puede construir un polígono regular que es un triángulo equilátero.

Las respuestas dadas por Felipe y Rafael, en la misma actividad de construyendo polígonos, son las mismas que las que acabamos de considerar dadas por Brian y Filiberto, de tal forma que no consideramos conveniente volver a repetirlas.

En la actividad polígonos Felipe y Filiberto afirman que un polígono “es una figura plana compuesta por una secuencia finita de segmentos rectos. Llamaron a la unión de dos lados como vértices. Mientras que de las tres figuras que se les presentan en el inciso 4, a la segunda la toman como un polígono, mientras que a la primera y a la tercera no las consideran como tal. Sostienen que la característica que les falta a las dos figuras que no son polígonos para serlo es “que la figura tenga segmentos rectos”. Encuentran de manera correcta que si en un triángulo isósceles sus dos ángulos iguales miden 45° , entonces el restante debería de medir 90° . Afirman que un triángulo isósceles si puede ser un triángulo rectángulo “por qué tienes dos lados iguales y el otro mide 90° lo que lo hace rectángulo.

En contraparte, Brian en la actividad polígonos realiza la figura de un hexágono y con base en el escribe que un polígono “es una figura geométrica y tiene sus lados rectos”. Llamo como vértices a los puntos de unión entre dos lados, mientras que escribió que las tres figuras del inciso 4 eran polígonas. En el inciso 5 dibujo un polígono y con base en el

escribió algunas propiedades de un polígono como las siguientes: “lado, vértice, centro, radio, apotema, diagonal, perímetro, semiperímetro, sagito. Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle BCD$ los tomo isósceles. Contexto de manera satisfactoria que si el lado AB del triángulo ABC mide 10 cm. Entonces el lado AB debe de medir lo mismo. La medida de los ángulos interiores de triángulo $\triangle ABC$ son según Brian de 180° , 90° , 90° . Los triángulos cuestionados del inciso 6.e al inciso 6.h los considero todos ellos como isósceles, mientras que los triángulos del inciso 6.i al 6.m los justifico todos ellos como equiláteros. La característica en común que encontré entre todos los triángulos anteriores es que todos son iguales. Menciona que de forma análoga a como se construyó la figura 1 y 2. Es posible construir un polígono regular de ocho lados porque “por qué el triángulo sería la forma perfecta para formarlo, sería colocar cada uno a su lado hasta ver los 8”. Mientras que observa que no se puede construir un polígono regular de siete lados “por qué no da un polígono”. En las actividades con software responde de manera correcta que la figura formada para un ángulo α de 60° y un valor de n igual 6 es un hexágono. Sostiene que el ángulo α del triángulo isósceles base, para construir un polígono regular de 4, 3, 7 lados son 90° , 120° , 52.5° respectivamente. Este último número no lo considera como exacto ya que un valor exacto debería de ser 51.43. Los valores del ángulo α correspondiente al triángulo base para construir un polígono regular de 7, 11, 13 lados obtenidos por el alumno a través de la computadora son respectivamente: 52.5, 32.8, 27.5, mientras que los valores de α que considera como exactos son 51.43, 32.72, 27.69. Justifico que el número $360/7$ si es un número exacto. Sostiene que si encontró una relación entre la imposibilidad del cálculo exacto y la imposibilidad de construir un polígono regular de 7 lados y esta es que si el ángulo no es exacto entonces no queda bien cerrado. Los n que escribió en los que no se puede construir un polígono exacto son 7, 5, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 20 según el “por qué se enciman y no alcanzan a tocar”.

El alumno del conalep Morelia 2 Ángel Saúl Ávila Santos únicamente contexto la actividad polígonos. En el inciso 1, dibujo un hexágono, y con base en él, escribió que un polígono es una “figura geométrica de un plano que está establecida por líneas rectas”. Recordó de manera satisfactoria que el punto de unión entre dos lados se llama vértice. Observa que

las tres figuras del inciso 4 son polígonas. Ve que un triángulo isósceles puede ser un triángulo rectángulo, porque tienen las mismas dimensiones. En el inciso 5 dibujo un cuadrado y con base en el menciono que algunas de las propiedades que tienen los polígonos regulares son: “sus lados miden lo mismo, tiene sus cuatro lados iguales”. Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle BCD$, los tomo con triángulos equiláteros. Mientras que obtuve que si el lado AB del $\triangle ABC$ mide 10 cm. Entonces el lado AC mide 15. Para el los ángulos interiores del triángulo $\triangle ABC$ tienen una medida de 45° . Los triángulos que se tratan del inciso 6.e hasta el 6.m los tomo como equiláteros, escribiendo que una de las propiedades que comparten todos ellos es que miden 60° . Considera que se pueden construir polígonos de 7 y 8 lados de manera análoga a como se hizo en la figura 1 y 2 por que “si por la base a triángulos unidos”. Menciona que si utilizamos como base un triángulo escaleno se puede construir un hexágono, además menciona la propiedad de que este triángulo tiene todos sus lados diferentes. Para un valor de n igual a 6 y un ángulo α igual a 60° , ve que se puede construir un hexágono. Mientras que los ángulos α de los triángulo base para construir polígonos regulares de 3, 4 y 7 lados los asocia con los valores 45° , 60° , 51.45° . Los valores que encontró para el ángulo α del triángulo base para construir un polígono de 7, 11, 13 lados a través de la computadora son 51.43, 32.73, 28.7 respectivamente, mientras que los valores que considero como los exacto para α son de 51.48, 51.48, 51.48. El número $360/7$ lo tomo como exacto y no encontró ninguna relación entre la imposibilidad del cálculo exacto y la imposibilidad de construir un polígono regular preciso de 7 lados.

Enseguida estudiaremos las respuestas dadas por los alumnos del conalep Morelia 2 José Carlos Ledesma Rodríguez, Giovanni Arturo Moreno Calderón, Donovan Yair Tapia González y Rafael Hernández Espinosa. La actividad construyendo polígonos la trabajaron juntos José Carlos y Donovan, mientras que en otro equipo la misma actividad la realizaron Rafael y Giovanni. Por otro lado en la actividad titulada el problema de la caja hicieron equipo Giovanni y Donovan, mientras que la trabajo de manera individual José Carlos. Por último la actividad polígonos únicamente la realizaron José Carlos y Giovanni de manera conjunta.

En la actividad titulada, construyendo polígonos, los alumnos Rafael y Giovanni, encuentran que se necesitan 6 triángulos para formar un hexágono regular, donde los ángulos interiores de esos triángulo según ellos deben de tener una medida de 180° , 180° , 72° . La diferencia que encontraron entre un polígono regular y uno irregular es que “el valor de sus ángulos no son iguales”. Sostienen que se necesitan 15 triángulos para formar un polígono regular de 13 lados. Mientras que en la tabla del inciso 2, escribieron valores para θ de 72, 60, 51, 40, 90, 45, 45, para los polígonos regulares de 6, 7, 9, 4, 3, 8 lados respectivamente. Sostuvieron que si el número de lados aumenta entonces el valor de θ cambia. Encontraron para n y θ las relaciones $n = k/\theta$ y $k = n/\theta$, relaciones con las que llenaron la tabla del inciso 5 donde basándose en la anterior relación de k , pusieron valores para θ de 72, 60, 51, 40 para los polígonos regulares de 5, 6, 7, 9 lados respectivamente. Sostienen que se puede construir un polígono regular si únicamente contamos con un único triángulo, argumentando que “toda figura lleva triángulos”. En la última pregunta de la actividad contestan “pues sus tamaños varían, diámetro y perímetro”.

Las respuestas dadas en la actividad construyendo polígonos por parte de Donovan y José Carlos, son las mismas que anteriormente ya analizamos y que dieron los alumnos Rafael y Giovanni, por consiguiente no consideramos como necesario volverlas a estudiar. En la actividad el problema de la caja, José Carlos da valores para PR de 0, 0.01, 0.03, 0.04, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1 y los relaciona respectivamente con los siguientes valores de PB : 0.65, 0.05, 0.13, 0.21, 0.29, 0.37, 0.45, 0.53, 0.6. Como es de esperarse para los valores que dan, encuentran una gráfica que es lineal, y al discutir las ventajas y limitaciones que tiene el modelo elaborado con el software de geometría dinámica y sin él, afirman que “solo es cuestión de aprenderlo a manejar”.

Por otro lado Giovanni y Donovan, en la actividad el problema de la caja, escriben una nota en la que sostiene que no se puede meter la caja dentro del hueco sin que toque la pared. Para PR escriben los siguientes valores: .01, .03, 0.12, .5, .6, .78, .82, 1, 1.2 mismo que relacionan con los siguiente valores de PB : .1, .1, 0.1, 1.33, 1.42, 1.46, 1.76, 2, 2.7. Con esos valores construyen una gráfica que tiene una leve curvatura. Y al discutir sobre

las ventajas y limitaciones que tiene el modelo del problema elaborado con el software de geometría dinámica y sin el afirman lo siguiente: “pues su ventaja es que es muy dinámico y práctico para elaborar problemas, su limitación es que hay que tener conocimientos de su forma de uso.”

En la actividad polígonos José Carlos y Giovanni Arturo, recordaron de manera satisfactoria que el punto de unión entre dos lados se llama vértice. De las tres figuras del inciso 4, a la primera y a la segunda no las toman como polígonos, mientras que a la tercera si la consideran como tal. Mencionan que la característica que le hace falta a la figura 1 y 2 para ser un polígono es “que tiene que tener dos puntos de unión”. Encontraron de manera satisfactoria que si en un triángulo isósceles los dos ángulos que miden lo mismo tienen una medida de 45° , entonces el restante debe de medir 90° . Sostiene que un triángulo isósceles también puede llegar a ser un triángulo rectángulo, porque “forma un ángulo de 90° ”. En el inciso 5 construyen un triángulo y con base en el escribe que un polígono regular debe de cumplir con: “todos sus lados son iguales, tiene que tener dos puntos de unión”. Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle BCD$ los tomo a ambos como triángulos equiláteros. Escribe que si en el $\triangle ABC$, el lado AB mide 10cm. Entonces el lado AC también debe de medir 10cm. Las medidas para los ángulos interiores del $\triangle ABC$ que da son: 45° , 45° , 45° . El triángulo $\triangle ABE$ lo tomo como isósceles mientras que el $\triangle BEC$ lo observo como equilátero, vio al triángulo $\triangle CED$ como isósceles, mientras que al $\triangle DEA$ le vio forma de triángulo equilátero. En la figura 2 observo que los triángulos cuestionados desde el inciso 6.i hasta 6.m eran triángulos isósceles, cuya principal característica que tiene en común es “que dos de sus lados son iguales”. Ven factible construir un polígono regular de 7 y 8 lados de manera análoga a como lo hicimos en las figuras 1 y 2 “porque está en el ejercicio anterior, la idea es la misma en cualquier polígono regular”. Dan para el ángulo α del triángulo isósceles base de un polígono regular de 7 lados un valor de 60° . Afirman que si existe otro triángulo aparte del isósceles que se puede ocupar como base para construir un polígono regular: “porque es un polígono regular, puede ser el triángulo equilátero”. Encuentran de manera correcta que la figura que se forma con n igual a 6 y con un ángulo α de 60° es un hexágono. Escribe que los ángulos α del triángulo base para

construir un polígono regular de 4, 3 y 7 lados deben de medir 45° , 60° , 51.4° , este último número, si lo consideran como un valor exacto. En la tabla del inciso 2.c de las actividades con software, escribe valores para α obtenidos a través de la computadora para los polígonos regulares de 7, 11, 13 lados de 51.4° , 32.7° , 27.7° respectivamente, mientras que los valores que considera como los exactos son: 51.4° , 32.7° , 27.7° . El número $360/7$ lo toman como un valor exacto, mencionan que si hay una relación entre la imposibilidad del cálculo exacto y la imposibilidad de construir un polígono regular precisó 7 lados, sin embargo no menciona cual. Consideran que para todos los valores de n , es posible construir un polígono regular, "porque depende del valor de α ".

El siguiente conjunto de personas que estudiaremos, corresponde a las alumnas de conalep Morelia 2, Verónica León Pacheco y María Victoria Hernández Cruz, ellas contestaron por equipo las actividades construyendo polígonos y el problema de la caja.

En la actividad construyendo polígonos encontraron que se necesitan seis triángulos base, para construir un hexágono regular, donde las medidas de los ángulos interiores de este triángulo base las expresan como 60, 72, 72 grados. La diferencia que encuentran entre un hexágono regular y uno irregular es "en sus lados que solo los regulares las tienen iguales". Al cuestionarles sobre cuantos triángulos se necesitan para formar un polígono regular de 13 lados, afirman "no se puede realizar un polígono regular de 13 lados, se puede uno irregular". La tabla del inciso 2, la llenan con valores para teta de 72, 60, -, 40, 90, 120, 45 grados, para el ángulo teta correspondiente al triángulo base para construir polígonos regulares de 5, 6, 7, 9, 4, 3, 8 lados respectivamente. Si en un polígono el número de lados aumenta entonces predicen que el ángulo teta del triángulo isósceles base para construir un polígono regular de n lados, "se queda en el mismo valor". Entre n y k encuentran la relación $n = k/\theta$, con base en dicha relación llenaron la tabla del inciso 5, con los valores para teta de 72, 60, -, 40 grados para los triángulo base de los polígonos regulares de 5, 6, 7, 9 lados respectivamente. Mencionan que si únicamente contamos con un único triángulo si se puede construir un polígono regular que vendría siendo el triángulo equilátero. En la última pregunta después de construir el polígono regular de 15 lados y de haber trazado las tres circunferencias que se les piden, las alumnas contestan

que esas circunferencias son. "la de AC y AB son igual de tamaño y la de CB es más grande, esto se debe a que las circunferencias se realizan en un triángulo isósceles".

Por otra parte, en la actividad el problema de la caja, las alumnas hacen mención que no se puede introducir la caja dentro del hueco, aunque no justifican el por qué, y como tal únicamente lo escriben como si fuera una nota. la tabla del inciso 2, donde se les pide que introduzcan valores para PR y PB , escriben para PB los valores de 0.26, 0.29, 0.17, 0.46, 0.19, 0.36 y los relacionan respectivamente con los siguientes valores de PB 2.29, 2.35, 2.32, 2.37, 2.33, 2.36, la gráfica que introducen en el inciso 3, es únicamente una nube de puntos, sin ningún patrón mostrado en primera instancia. En la pregunta correspondiente a sus opiniones sobre las ventajas y desventajas que llevan consigo el modelo del problema elaborado con el software de geometría dinámica y sin él, no emiten ninguna respuesta.

La siguiente actividad que vamos a estudiar, corresponde a la titulada contrayendo polígonos y realizada por Susana Berenice Guzmán torres. En ella, Berenice afirma que se necesitan 6 triángulos para formar un hexágono regular. Cada uno de los ángulos interiores del triángulos base para el hexágono regular considera que miden 60° . La diferencia que encuentra entre un hexágono regular y uno irregular es: "Regular: que todos sus ángulos son iguales. Irregular: sus ángulos son de diferente medida". Sostiene que se necesitan 13 triángulos para formar un polígono regular de 13 lados. La tabla del inciso 2 la llena con valores para teta de 72, 60, 51, 40, 90, 120, 45 grados, y los hace corresponder con los valores de n de 5, 6, 7, 9, 4, 3, 8 lados. Observa que si el número de lados n aumenta entonces: "el valor del ángulo θ disminuye". Entre n y θ encontró la relación $n = k * \theta$, donde k es una constante. En base a dicha relación se le pidió que llenara la tabla del inciso 5, donde tenía que introducir los valores de θ cuando el valor de n es igual a 5, 6, 7, 9 siendo los valores de teta que escribió: 72, 60, 51, 40 grados respectivamente. Sostiene que no se puede construir un polígono regular si únicamente contamos con un único triángulo porque "no es un polígono".

Enseguida mencionaremos las respuestas dadas por María Guadalupe Cuello Panuco en la misma actividad construyendo Polígonos. Para ella se necesitan seis triángulos para

formar un polígono regular de seis lados. La medida de los ángulos interiores que tiene un triángulo base para construir un hexágono, considera que son: 72, 30 y 54 grados. La diferencia que encuentra entre un hexágono regular y uno irregular, radica en "el ángulo de los triángulos". Sospecha que se necesitan 13 triángulos para formar un polígono regular de 13 lados. En la tabla del inciso 2, introduce valores para θ de: 72, 60, 51.4, 40, 90, 120, 45 grados, mismos datos que hace corresponder con valores para n de: 5, 6, 7, 9, 4, 3, 8. Afirma que si el número n aumenta entonces "cambia el valor de los ángulos". La relación que encontró entre n y θ es $n = k * \theta$, donde k es una constante. Con base en dicha relación llenó la tabla del inciso 5, dándole a θ valores de 72, 60, 51.42, 40 grados para n igual a 5, 6, 7 y 9 respectivamente. Sostiene que si se puede construir un polígono regular si únicamente contamos con un triángulo, dicho polígono considera que es el triángulo equilátero. En el inciso 7, después de haber construido el polígono regular de 15 lados y las circunferencias que se le piden, afirma que estas tres circunferencias son: "iguales, la circunferencia c es diferente, de menor tamaño".

Por último dentro de la actividad construyendo polígonos, pasemos a estudiar las respuestas dadas por los alumnos del conalep Morelia 2, Diana Laura Villalpando Vázquez y Cristopher Ochoa Cazares.

Diana y Christopher argumentan que se necesitan 6 triángulos para construir un hexágono regular. Sostienen que la medida de los ángulos interiores del triángulo base para construir un polígono regular de seis lados son: 216, 216 y 216 grados. Las diferencias que encuentran entre un polígono regular y uno irregular son "que el regular tiene lados iguales y no el no regular no los tiene". Sospechan que se necesitan 13 triángulos para formar un polígono regular de 13 lados. La tabla del inciso 2 la llenan con valores para θ de: 360, 432, 504, 648, 288, 216, 576 y los relacionan con valores de n de: 5, 6, 7, 9, 4, 3, 8. Sostienen que si el número n aumenta entonces el ángulo θ también aumenta. Las relaciones que encontraron entre n y θ son $n = k * \theta$ y $k = n * \theta$, relación esta última con la llenaron la tabla del inciso 5, en la cual escribieron resultados para θ de 360, 432, 504, 648, que los relacionaron con valores para n de: 5, 6, 7, 9 respectivamente. Escriben que no se puede construir un polígono regular si únicamente contamos con un solo

triángulo. Después de haber construido el polígono de 15 lados que se les pide en el último inciso, y en segunda de haber hecho las tres circunferencias que se les piden, observan que esas circunferencias son: "una de las circunferencias es más grande que la otra, por que varían los lados del triángulo".

Contamos con dos actividades del problema de la caja que son de autores desconocidos. En la primera de ellas (nos refiramos como equipo desconocido 1), escribieron valores para RQ de 0.01, 0.01, 0.01, .01, .01, .01, .05, .06, .07 que los relacionaron directamente con valores para PB de 0.65, 0.54, .42, .2, .05, .1, .34, .46, 1.78. La grafica que presentaron es una línea casi vertical al principio, posteriormente dibujan una recta con pendiente negativa y finalmente dibujan una recta casi horizontal con pendiente positiva. En la pregunta donde se les cuestiona sobre las ventajas y limitaciones que encuentran en el modelo del problema elaborado con el software de geometría dinámica y sin él escriben que "sirve para confirmar la teoría de que con el espacio designado del hueco, es imposible lograr que entre tal caja en el hueco designado, en pocas palabras: ¡no cabe la caja!".

Por último mencionaremos las respuestas dada en la actividad el problema de la caja, por el equipo que nosotros denominaremos el equipo desconocido 2, mismas que no analizaremos dado que se parecen mucho a algunas otras ya mencionadas anteriormente. La tabla del inciso 2 la llenan con valores para PR de 2.24, 2.1, 2.1, 2.14, 2.08, 2.68, 2.56, 2.5, 2.63 que los relacionan respectivamente con los siguientes valores de PB : 0.24, 0.48, 0.48, 1.24, 0.39, 1.42, 2.1, 2.4, 0.58. la gráfica que nos presentan es casi constante al inicio para casi al final tener un pico más o menos prolongado. Únicamente responden no se al momento de cuestionarles sobre las ventajas y limitaciones que tiene el modelo del problema elaborado con el software de geometría dinámica y sin él.

CAPÍTULO VI

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este apartado se analizarán las respuestas dadas por los alumnos, así como las ideas más relevantes que se encuentren en las afirmaciones de los estudiantes. Se planteará como se hizo la actividad en base al método de aprendizaje basado en la solución de problemas así como las ventajas que trajo consigo el uso de tal método como también las limitaciones que encontró al momento de trabajar con los alumnos, y que le impidió desarrollarse de la mejor manera. Haremos un breve recuento de las características que presentó el espacio muestra, que en este caso vendrían siendo los estudiantes que nos hicieron el favor de darnos un poco de su tiempo, finalmente analizaremos las opiniones que dieron los estudiantes acerca de lo que les pareció el método de enseñanza basado en la solución de problemas.

VI.1. Análisis de la actividad realizada a los alumnos de la Escuela Preparatoria Melchor Ocampo de la UMSNH

La actividad Construcción de polígonos regulares utilizando triángulos isósceles, como ya se mencionó anteriormente, fue aplicada a los alumnos de la preparatoria Melchor Ocampo de la UMSNH y, en consecuencia, es la única referencia que tenemos de esos grupos, es de ello donde radica la importancia del estudio de dicha actividad en términos de los resultados mostrados por los alumnos que nos hicieron el favor de darnos un poco de su tiempo en dicha preparatoria.

VI.1.1. Análisis de las respuestas dadas por los alumnos en la actividad construcción de polígonos regulares utilizando triángulos isósceles.

Anteriormente presentamos la estructura de esta actividad, así como las respuestas que dieron los equipos a lo largo de la misma (es conveniente que el lector se familiarice con dichas respuestas, que se encuentran en el capítulo titulado Resultados). Enseguida presentaremos dos tablas donde se examinan las respuestas de los alumnos de manera individual, de acuerdo a los criterios siguientes:

- A = excelente respuesta.
- B = respuesta aceptable.
- C = respuesta parcialmente completa (50% - 99%).
- D = respuesta parcialmente completa (20% - 50%).
- E = respuesta errónea con algunos puntos parcialmente aceptables.
- F = respuesta totalmente errónea.

Es de hacer notar que esta actividad, para organizarla la hemos dividido en incisos del 1 al 12, mismos que el lector fácilmente podrá identificar; además, en muchas ocasiones, como es el caso de los incisos 8, 9, 10, 11, 12, éstos se subdividieron en sub incisos. El

nivel de la escala para esta actividad ha sido asignado al inciso completo, y no a cada sub-inciso por separado. Además en cada una de las celdas de la tabla hemos introducido cuatro incisos, en las que la evaluación respectiva está representada por la letra que está a un lado del inciso. Las ultimas celdas de la tercera columna tiene la cantidad de letras A, B, C, D, E,. F que cada uno de los alumnos obtuvo, sin más que añadir es todo lo que podemos decir para el estudio de las tablas.

La tabla obtenida con los datos de la sección 424 es la siguiente:

Tabla de criterios de las respuestas de la actividad "construcción de polígonos regulares utilizando triángulos isósceles" aplicada a los alumnos de la escuela Preparatoria Melchor Ocampo dependiente de la UMSNH.

	Inciso						
Alumno	1	2	3	4	5	6	7
Abraham Ramírez Chávez	D	F	D	A	F	F	F
Abraham Ramírez Chávez	A	D	B	-	E	A: 2 B: 1 C:0	D:3 E:1 F:4
	Inciso						
Alumno	8	9	10	11	12	totales	totales
Gerardo Aguilar Merino	D	E	F	F	F	F	F
Gerardo Aguilar Merino	B	A	B	-	D	A: 1 B:2 C: 0	D: 2 E: 1 F:5
Jonathan Daniel Maravillas Rodríguez	B	E	D	A	F	F	F
Jonathan Daniel Maravillas Rodríguez	A	A	E	-	E	A: 3 B: 1 c: 0	D: 1 E: 3 F: 3
Juan Serrano Guido	D	E	D	A	F	F	F
Juan Serrano Guido	E	C	B	-	E	A: 1 B:1 C:0	D:2 E:3 F:3

Tabla 2: escala de calificaciones para las respuestas de los estudiantes.

La tabla obtenida con los datos de la sección 403 es la siguiente:

Tabla de criterios de las respuestas de la actividad "construcción de polígonos regulares utilizando triángulos isósceles" aplicada a los alumnos de la escuela Preparatoria Melchor Ocampo dependiente de la UMSNH.							
Alumno	inciso 1	inciso 2	inciso 3	inciso 4	inciso 5	inciso 6	inciso 7
Gerardo Aguilar Merino	D	E	F	F	F	F	F
Abraham Ramírez Chávez	D	F	D	A	F	F	F
Juan Serrano Guido	D	E	D	A	F	F	F
Jonathan Daniel Maravillas Rodríguez	B	E	D	A	F	F	F
Alumno	inciso 8	inciso 9	inciso 10	inciso 11	inciso 12	totales	totales
Gerardo Aguilar Merino	B	A	B	-	D	A: 1 B:2 C: 0	D: 2 E: 1 F:5
Abraham Ramírez Chávez	A	D	B	-	E	A: 2 B: 1 C:0	D:3 E:1 F:4
Juan Serrano Guido	E	C	B	-	E	A: 1 B:1 C:0	D:2 E:3 F:3
Jonathan Daniel Maravillas Rodríguez	A	A	E	-	E	A: 3 B: 1 c: 0	D: 1 E: 3 F: 3

Tabla 3: calificaciones de los estudiantes de la sección 403 de la escuela preparatoria Melchor Ocampo, en la actividad construyendo polígonos utilizando triángulos isósceles.

VI.1.2. Ideas más relevantes que se encuentran en las respuestas de los estudiantes.

En el inciso 1, una afirmación recurrente es: *“un polígono es una figura geométrica que está formada por muchos lados”*. Esta afirmación es errónea, basta con observar que figuras tales como el tablero del juego del gato, o incluso una línea quebrada cumplen tal definición, por lo tanto consideramos que si bien el tener lados es una de las propiedades que cumplen un polígonos, a los alumnos les faltó introducir algunas propiedades más.

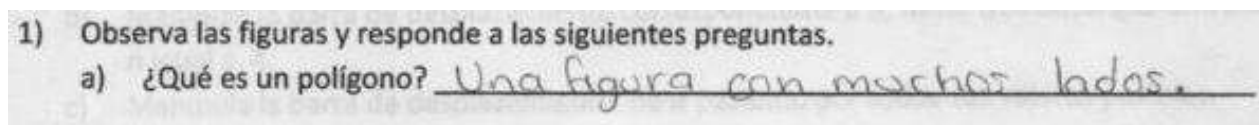
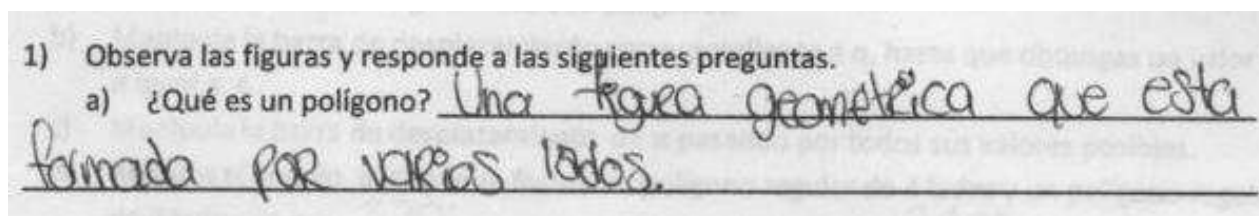


Figura 1: Parte de la primera página de la actividad construyendo polígonos utilizando triángulos isósceles realizada por los alumnos: arriba: Abraham Ramírez Chávez, abajo: Adilene y Denisse Orely.

También en el mismo inciso, otra afirmación recurrente es que: un polígono "es una figura plana compuesta por una secuencia de lados y vértices". Aunque está más completa esta nueva afirmación que la anterior, también tiene el inconveniente de no introducir todas las propiedades de los polígonos, como ejemplo no misiona que en cada uno de los vértices únicamente se pueden unir dos lados.

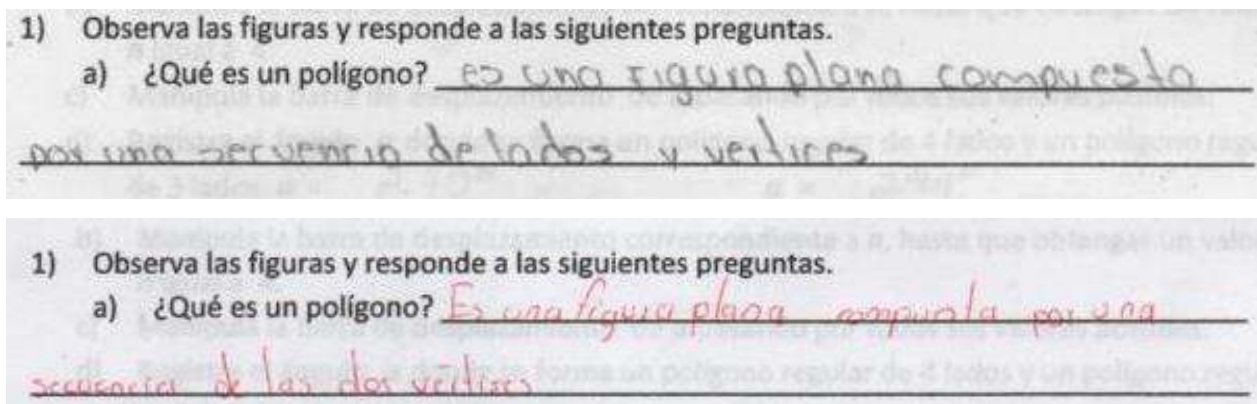


Figura 2: Parte de la primera página de la actividad construyendo polígonos utilizando triángulos isósceles realiza por los equipos formados por los alumnos: arriba Carlos Alberto Alvarado, Alan Frick García, abajo: Francisco Camarena y Álvaro Arroyo Solorio.

Para el inciso dos, una de las afirmaciones que más se repite entre las respuestas de los estudiantes es: que un polígono es regular cuando sus lados son iguales. Si el alumno que da esta respuesta, en el inciso 1 hubiera dado también una excelente respuesta, nos consideraríamos como satisfechos, desgraciadamente esto no fue así, por lo tanto aumentar esta condición no nos parece suficiente para aceptar esta respuesta.

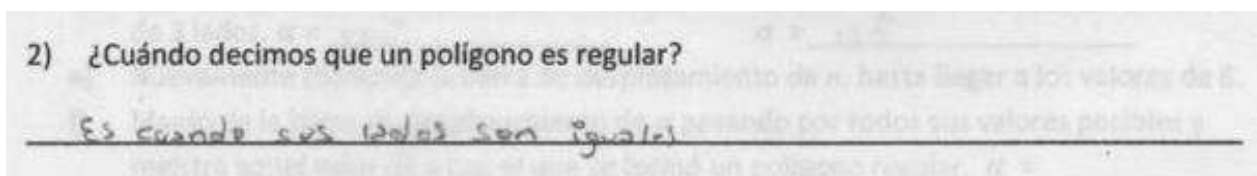


Figura 3: Parte de la primera página de la actividad construyendo polígonos utilizando triángulos isósceles realizada por Dulce María Ferreyra Águilas.

Otro argumento para el inciso 2, que también se repite con mucha frecuencia es aquel donde mencionan que un polígono es regular "cuando tiene centro, ángulo central, apotema y diagonales". Esta es una respuesta que sin mucha dificultad la podemos encontrar en un diccionario o tal vez en un libro de texto, en la que el alumno únicamente repitió, la definición que le dio su profesor durante su curso de geometría de manera automática.

Muchas propiedades que encontraron los alumnos para pseudodefinir un polígono regular, están encaminadas hacia situaciones que el estudiante vio, pero que sin embargo no

encontró la manera de expresarlas. Dentro de estas propiedades se encuentran las siguientes respuestas: "es una figura proporcional", "cuando tiene medidas regulares", "cuando se tiene simetría a la figura", "cuando sus dimensiones son todas iguales". En ellas se observa por parte del alumno una clara idea de que existe cierta simetría en las figuras, aunque no saben a qué atribuirla.

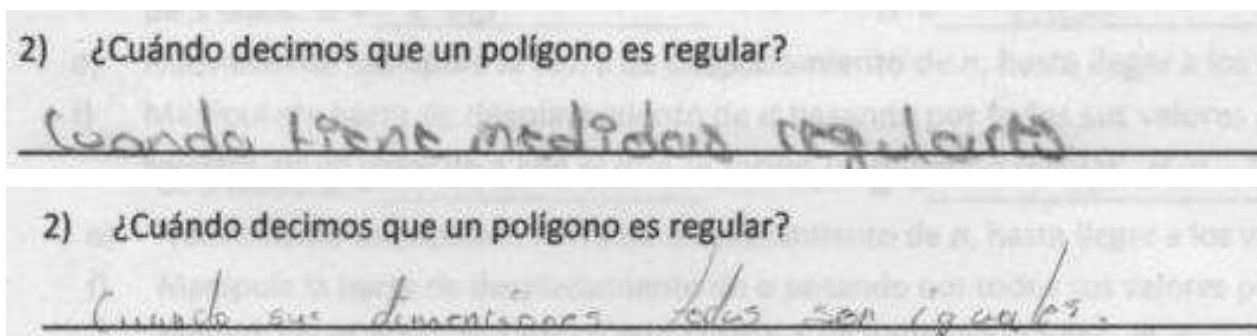


Figura 4: Parte de la primera página de la actividad construyendo polígonos utilizando triángulos isósceles realizada por los equipos formados por los alumnos: izquierda Jonathan Daniel Maravillas Rodríguez, derecha: Gerardo Aguilar Merino.

En el inciso 3, la gran mayoría de los estudiantes afirma que el ángulo α de la figura 1 mide 90° . Sin embargo al cuestionarles sobre el motivo pocos alumnos respondieron, la respuesta más relevante está dada en los siguientes términos: "porque es una vuelta completa y se está dividiendo entre 4". Poco hay que decir sobre este argumento, es una de las tantas respuestas que nosotros catalogamos como correctas.

Otro argumento para la misma cuestión es el siguiente: el ángulo α mide 30° "por qué es un triángulo equilátero". Como el lector se habrá dado cuenta, esta es una respuesta totalmente errónea, ninguno de los ángulos interiores del triángulo equilátero mide 30° , además que ninguno de los triángulos interiores que se forman en la figura 1 es equilátero.

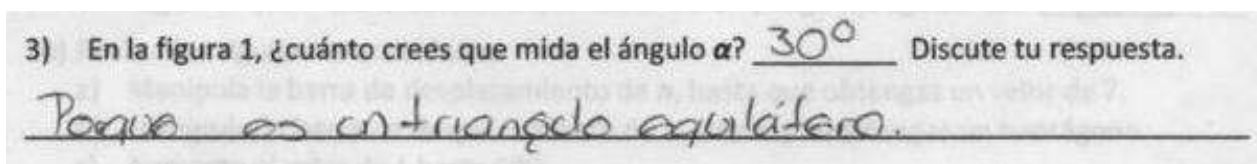


Figura 5: Parte de la primera página de la actividad construyendo polígonos utilizando triángulos isósceles realizada por el equipo formado por Mariana Nayhelli Villafañá Gtz, Ma. Guadalupe Liera Jaimez, Karina Tovar del Toro.

En el inciso 4 hay poco que decir, únicamente me llama la atención la siguiente respuesta: los triángulos con los que está formada la figura 5 son equiláteros e isósceles. Si nosotros vemos las relaciones entre un triángulo equilátero y uno isósceles, nos damos cuenta de que todo triángulo equilátero es isósceles, mas su recíproco no es cierto, de esto encontramos que en realidad la respuesta de los alumnos implica que los triángulos son equiláteros, situación que el alumno no se dio cuenta debido a que basó su respuesta, en una observación empírica.

Para el inciso 6, una respuesta preponderante está dada en los siguientes términos: la medida del ángulo α de la figura 2 es de 72° por que en total son 360° y se dividen entre 5. Esta respuesta es una de las que escribimos como aceptadas.

No así los argumentos en los que escriben alguna cantidad para el ángulo α de la figura 2, y posteriormente afirman que los triángulos que se forman en dicha figura son equiláteros. De manera análoga a como pasa en la figura 1, ninguno de los triángulos con los que se forma la figura 2 es isósceles, aunque para esta figura particular, a primera vista los triángulos sí parecen equiláteros.

Una de las afirmaciones relevantes para el inciso 7 es la siguiente: La medida del ángulo α del triángulo isósceles base para el polígono regular de ocho lados es 45° , porque se dividió $360/8$. Esta respuesta es válida y acertada, encontraron una relación que era importante que obtuvieran.

Otro argumento que escribieron es el siguiente: la medida del ángulo α correspondiente al triángulo isósceles base para un polígono regular de ocho lados es de 15° , porque es la mitad de un triángulo equilátero. El argumento es totalmente falso y no es posible saber a ciencia cierta a que se refieren con que es la mitad de un triángulo equilátero, si se refieren al triángulo equilátero cuyos ángulos interiores miden 30, 60, 90 grados o alguna otra construcción.

En el inciso 8, la gran mayoría de los alumnos contesto que si se podía formar un polígono regular con un triángulo base distinto del isósceles, una buena parte de ellos supuso que este triángulo debería de ser el equilátero, y argumentaron algunos que con este triángulo se debería de formar un pentágono, mientras que otros observaron que dicho

triángulo debería de formar un hexágono. La respuesta es verdadera a medias, tal vez no se pueda construir un polígono regular con un triángulo base distinto del isósceles debido a que el triángulo equilátero es en particular un triángulo isósceles, aunque es medio aceptable que escriban que con un triángulo equilátero base se forma un pentágono, ya que anteriormente para la figura 2 habían dicho que su triángulo base es un equilátero.

En el inciso 10 tenemos dos afirmaciones relevantes, la primera de ellas está dada en los siguientes términos: el polígono de 7 lados no era un polígono regular por que le faltaba cerrarse. Esta respuesta es acertada.

La segunda afirmación es la siguiente: El polígono de 7 lados que construimos no es un polígono regular, porque tenía 7 lados aunque uno de ellos era de menor tamaño. Respuesta falsa. En realidad los siete lados con los que se formó el polígono si tenían la misma medida, solo que en primera instancia sin fijarse mucho en que no cerraba, si parecía que algunos de los lados del heptágono median más, aunque eso era nomas a primera vista.

Buena parte de los alumnos afirmaron que si existe una relación entre la imposibilidad de calcular $360/7$ y la imposibilidad de construir un polígono regular preciso de siete lados, debido a que los ángulos no son exactos. Es cierto que los ángulos no son exactos, pero no son exactos en el sentido de que tienen una sucesión infinita de decimales y como ellos suponen que no son exactos porque tienen uno o dos decimales.

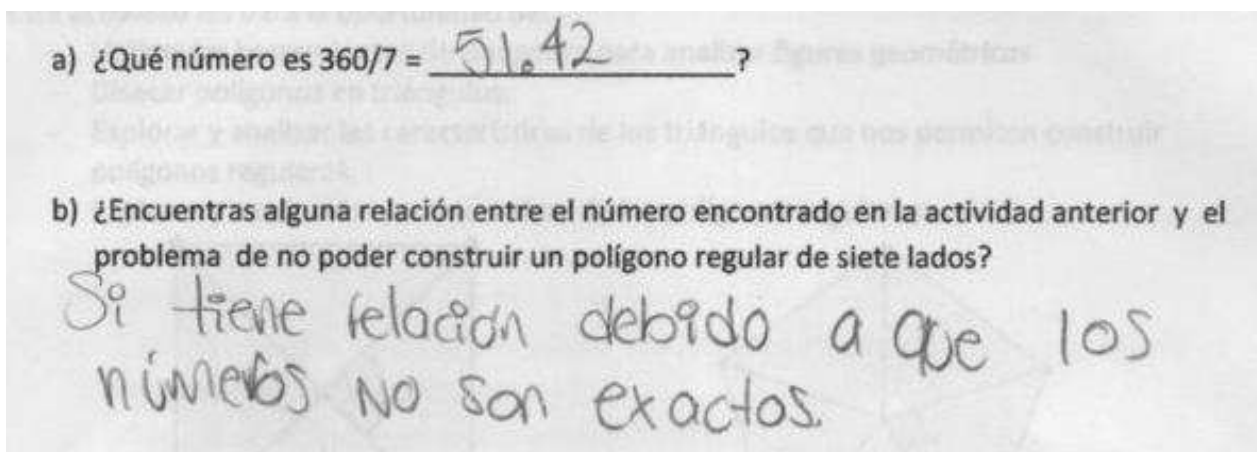


Figura 6: Parte de la tercera página de la actividad construyendo polígonos, realizada por los equipo formados por: Abraham Ramírez Chávez.

Por último la decisión sobre para para que valores de n , no es posible construir un polígono regular está dividida, algunos escriben que para n igual a 11, otros para n igual a 13, y algunos más para los enteros nones. Es curioso que ninguno del alumno haya mencionado el número 7, cuando de antemano les informamos que no se puede construir un polígono regular con tal cantidad de lados, también es interesante su esfuerzo de generalizar la ley, lástima que encontraron una proposición errónea.

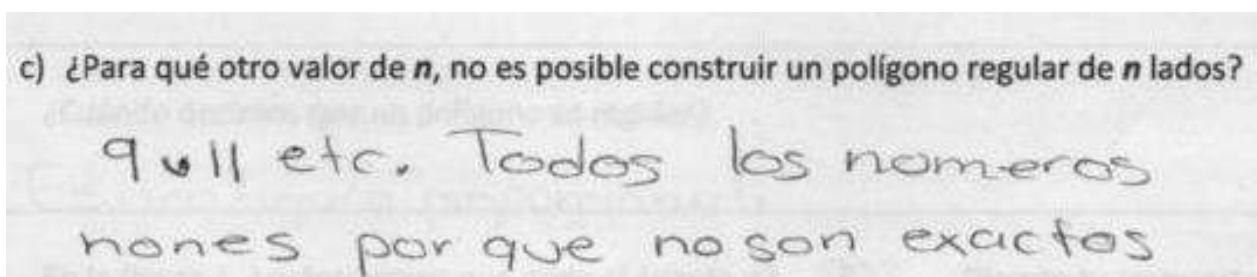


Figura 7: Parte de la tercera página de la actividad construyendo polígonos, realizada por los equipo formados por: Adilene y Denisse Orely.

V11. 1.3 Características de los sujetos.

El espacio muestra estuvo integrado por alumnos del cuarto semestre de la escuela preparatoria Melchor Ocampo dependiente de la universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, de las secciones 03 y 24. La muestra de los alumnos de la sección 03 se eligió dándoles a los estudiantes la opción de quedarse o de abandonar el aula, quedándonos únicamente con los alumnos que decidieron permanecer en el salón de clase. Para la

sección 24 ocurrió algo diferente, en dicho salón anteriormente su profesor titular les había informado que para la siguiente clase un servidor iba a trabajar con ellos y que por lo tanto él no iba a estar presente durante la realización de la actividad, situación por la cual los alumnos no consideraron necesario presentarse a excepción de los cuatro alumnos antes descritos.

Hay que tomar en cuenta que aunque los dos grupos pertenecen a la misma institución, esto no quiere decir que sean análogos, tienen características diferentes, son distintos individuos, además de que sus profesores a lo largo de su educación preparatoria han sido diferentes, también dentro de la escuela se viven entornos diferentes en la mañana y en la tarde (La sección 03 asiste a sus clases normalmente en la mañana, mientras que la 24 lo hace por las tardes), además de que los grupos tienen distinta densidad de población.

Los alumnos de la sección 24 demuestran una educación en los temas referentes a la geometría euclidiana deficiente, muchos resultados importantes como que la suma de los ángulos interiores en un triángulo cualquiera miden 180 grados, o las características principales que tiene un polígono, en ningún momento las utilizan, únicamente escriben una definición que la catalogo como la más frecuente entre las respuestas que puede dar un individuo que no ha llevado un curso formal en geometría. Desconocen las propiedades principales que tiene un triángulo equilátero al igual que desconocen los atributos de un triángulo isósceles, entre muchos otros resultados no menos importantes. Las respuestas dadas por los alumnos nos inducen a pensar que sus métodos de aprendizaje están basados en simples algoritmos o instructivos prefabricados, en los que la labor del estudiante únicamente radica en seguir una serie de instrucciones o pasos que disponen de una solución. Además los estudiantes aprenden los principios de las matemáticas a través de la memorización de los axiomas, definiciones, proposiciones y teoremas.

Las proposiciones y teoremas los tiene muy arraigados, a tal grado que los toman como dogma de fe y en muchas ocasiones no conocen el campo de aplicación de dichos resultados.

No están acostumbrados o tal vez no saben seguir deducciones lógicas, en muchas ocasiones consideran que la pregunta o actividad que están contestando en el momento es independiente de toda la actividad.

Aun cuando haya dos respuestas posibles, el alumno únicamente tomará 1, a menos que se le indique lo contrario.

La gran mayoría de las deducciones las hacen independientes de sus conocimientos previos.

Se nota una cierta divergencia entre las respuestas de cada uno de los alumnos, aun cuando debería de existir un poco más de convergencia debido a que todos tomaron el mismo curso de geometría euclidiana.

Los alumnos de la sección 403 comparten muchas de las propiedades que acabamos de mencionar para la sección 424, de hecho las cumplen todas a excepción de que en este grupo si se encuentra un poco más de convergencia entre las respuestas de los estudiantes, además de que hacen mayor uso de sus conocimientos previos, a tal grado que algunas respuestas las basan únicamente en dichos conocimientos, También se observa(sin que ello signifique que mucho), una cierta capacidad por parte de los alumnos de encontrar ciertos resultados a partir de deducciones u observación de las figuras, desgraciadamente su capacidad para seguir instrucciones a manera de destructivo, tienen ciertas deficiencias, al encontrar alumnos con resultados que no son compatibles con las respuestas reales.

VI.1.3. Ventajas que se encontraron al trabajar con el software de geometría dinámica.

Anteriormente en el fundamento teórico se plantaron varias hipótesis referentes al método de aprendizaje basado en la solución de problemas, a su vez que se mencionó que existen tres tipos de problemas: el bien planteado, aquellos bien planteados que necesitan de alguna construcción auxiliar y los mal planteados. Considero que los alumnos de las dos secciones hasta este punto únicamente habían realizado problemas bien

planteados, en los que su solución es inmediata. Gracias al software pudimos plantearles a los alumnos problemas de aquellos bien planteados que necesitan de alguna construcción auxiliar, como es el caso de nuestro problema base "construcción de polígonos regulares utilizando un triángulo base". Nosotros de manera inmediata no podemos saber si se puede construir un polígono regular por ejemplo de siete lados, nuestra primera intuición nos diría que sí, sin embargo después de un detallado análisis nos podemos dar cuenta que el problema radica en que la construcción del polígono regular se basa, en unir los triángulos en un vértice cuyo ángulo lo denotamos como α , de tal forma que encontramos que los triángulos necesitan ser isósceles y que además el ángulo α es aquel de los tres ángulos interiores del triángulo isósceles que es diferente, entonces encontramos que 7 ángulos α deben de ser igual a un ángulo llano, de modo que el ángulo α debe de medir $360/7$ grados, este número es irregular por lo tanto no se puede construir. Este análisis se le planteó al estudiante, para que lo pudiera encontrar a lo largo de la actividad, donde se estructuró de forma de cada una de las actividades dependiera de cierto sentido de las anteriores, además de que vimos necesario aplicar la estructura de un instructivo en la que el alumno debía seguir una secuencia de instrucciones, en las cuales en muchas ocasiones no bastaba con únicamente observar la figura sino que además era indispensable que el alumno hiciera algún tipo de análisis analítico, como en la pregunta donde se les cuestiona sobre el tipo de triángulos con los que está formada la figura 2, o el ángulo α correspondiente al triángulo base para un polígono regular de ocho lados.

También anteriormente vimos que existían tres enfoques que le podíamos dar al estudio de la geometría, inclusive introducimos el caso de Charlotte y Marie, en el cual no sabíamos cuál de las dos tenía la respuesta correcta, e inclusive llegamos a la conclusión de que cada una de ellas tenía la razón dependiendo de cuál geometría se ocupaba para medir. Nuestro trabajo radica principalmente en la geometría 1, en la que el alumno tiene que deducir sus respuestas a través de analogías, construcciones y ejemplos dejando un poco de lado la demostración formal. El software nos permitió adentrarnos de una manera más fácil en el estudio de las construcciones y ejemplos que les mostramos a los

estudiantes, a tal grado que inclusive podían interactuar con las mismas, realizando algunas construcciones de los polígonos, así como manejar el ángulo α , para ver la parte que no cierra en el polígono si es el caso.

Una situación importante que hay que discutir es el tipo de problemas con los que hay que trabajar frente al salón de clases, si con aquellos que tratan temas específicos o los que tratan temas generales, ya anteriormente mencionamos las ventajas y desventajas que tiene cada uno de ellos. Como nuestro trabajo se basa mucho en el análisis de figuras y manipulación de ellas al grado de trabajar con ellas dinámicamente, entonces es claro que el software nos permitió trabajar de una manera más simple con dichos problemas a través de temas específicos, aunque a lo largo de la actividad sobre todo en la parte conclusiones encontramos actividades de tipo general.

Los métodos de solución de problemas así como las soluciones, en muchas ocasiones son muchas para un solo problema, lo cual hace más sencilla la tarea de encontrar soluciones para los distintos problemas que se han planteado. Para nuestro caso el software representó una herramienta cargada de ejemplos de cómo construir un polígono regular a través de un triángulo isósceles base, esto hizo más sencilla la tarea de buscar una solución, dado que nos ejemplifico la situación, mostrándonos de manera gráfica algunas de las propiedades que deben de tener los triángulos base con los que se puede construir un polígono regular de n lados, así como también nos muestra que para algunos n el polígono no cierra, y que además entre mayor número de decimales le introduzcamos al ángulo α entonces menos será la abertura que quede en el polígono, situación que nos induce a pensar que el ángulo α es un número irracional y prácticamente este es el camino a seguir para la demostración formal.

Las heurísticas para la solución de problemas son muy variadas, Poyla menciona algunas que se desarrollan a lo largo del entendimiento del problema, desarrollo de la solución del problema y comprobación del mismo. Nuestro trabajo estuvo encaminado más así al desarrollo del problema, en ella según Poyla si el problema es muy general se deben de utilizar situaciones análogas o mas especificas del problema original que nos lleven a

tener idea de cómo resolverlo. Este paso claramente en la actividad lo hicimos con el software.

Una de las necesidades que se ha encontrado últimamente en los métodos de aprendizaje, es que el alumno se dé cuenta que puede y debe de ser autosuficiente, que aprenda a sacar sus propias conclusiones, así como a discutir con sus compañeros el rango de alcance de los teoremas y proposiciones. En este contexto, esperábamos que los alumnos encuentren el resultado de que no se puede construir un polígono regular para alguna n específicos, porque esa n no eran divisores del 360. Como se observa el alumno tenía que encontrar el resultado siguiendo la actividad así como clasificarlo para la n que si sea válido.

Una de las características que se manejan en contra del uso del método de aprendizaje basado en la solución de problemas radica en que los grupos con los que se trabaja son muy numerosos además de que el tiempo necesario para ver un tema con este método se vuelve mayor del que si se ocupa en la forma tradicional. En nuestro caso el software nos permitió subdividir el grupo en equipo de dos compañeros por lo general, de forma que aunque era numeroso, se trabajó también como si tuviéramos varias veces dos personas, haciendo nuestro punto de referencia los equipos de 2 personas y no el grupo entero.

VI.1.4. Limitaciones que se encontraron al trabajar con el software de geometría dinámica.

Como hemos visto anteriormente, el método de aprendizaje basado en la solución de problemas utilizando como herramienta auxiliar el software, tiene muchas ventajas que ya anteriormente hemos discutido, desgraciadamente para nuestro caso no fue suficiente, si observamos la tabla que anteriormente introdujimos donde calificamos las respuestas de los alumnos, nos daremos cuenta que estas son muy bajas, llevándonos a pensar que

existen algunas deficiencias en el método de aprendizaje basado en la solución de problemas.

Hay que resaltar que el grupo base tiene muchas deficiencias en su preparación en geometría euclidiana, a tal grado que si le introducimos alguna actividad en la que tenga necesidad del uso de algún resultado aprendido durante su curso de geometría euclidiana, entonces hay una gran probabilidad de que no lo sepa, y al no saberlo no lo va ocupar y en consecuencia no va a contestar la actividad o lo va a ser de manera errónea.

La interdependencia entre los distintos incisos de una actividad, tiene el inconveniente de que si no se contesta alguno, puede llevar a problemas al contestar una serie de incisos más, debido a que el estudiante va a desconocer o no se va acordar de un resultado que es fundamental y en consecuencia no va a tener las herramientas necesarias para llegar a las soluciones acertadas.

El método de aprendizaje más utilizado por los grupos es el convencional, donde aprenden las leyes matemáticas a través de la memorización de algunos resultados, de manera que para ambos grupos aunque para la sección 03 un poco menos, este método de aprendizaje basado en la solución de problemas utilizando como herramienta auxiliar el software, les resultó algo nuevo y un cambio, y como pasa por lo regular cuando hay un cambio, este produce ciertas inquietudes que hacen más larga la adaptación del individuo hacia el cambio, y como en nuestro caso el estudiante únicamente tubo una sección de 2 horas, entonces no se adaptó totalmente a dicho cambio.

En algunas ocasiones se observa que el alumno no aprendió totalmente a utilizar el software, situación que se debió a que trabajó muy poco tiempo con él.

El alumno tiene la costumbre de no revisar sus resultados, situación que provoca que no se cuente cuando algún resultado está mal.

Es común también que el alumno tenga previstos como resultados verídicos, algunos teoremas y proposiciones que son erróneos. o que los ocupe los resultados veredictos fuera de su alcance de utilización, y ello conlleve a que el estudiante encuentren resultados erróneos, que si además es ocupado por otro o varios incisos más, puede llevarlo a una serie de errores.

Las observaciones hechas por los alumnos no son detalladas ni muy profundas, sino más bien superficiales, situación que hace que el estudiante no obtenga buenos resultados, a partir de la observación de las figuras.

Cuando se le hace mención al estudiante de que tiene que encontrar la respuesta correcta, únicamente busca una solución, aun cuando el problema descrito pueda llegar a tener varias soluciones.

En algunas ocasiones el estudiante no entiende lo que se le pide en el problema, y tampoco tiene la confianza de preguntarle a los expositores sobre el significado de la pregunta, situación que hace que muchas veces el alumno cometa un error debido a que en realidad no conoce el contenido de la pregunta.

En otras ocasiones, el alumno si está seguro de lo que el expositor le cuestionó, sin embargo su interpretación es errónea, y por lo tanto aunque tenga una respuesta coherente, esta va a ser errónea para el tema que se trata en el momento.

VI.1.5. Opinión de los estudiantes al trabajar con un software de geometría dinámica.

Para las secciones 424 y 403 de la escuela preparatoria Melchor Ocampo dependiente de la Universidad Michoacana De San Nicolás De Hidalgo, teníamos previsto aplicarles además las actividades construyendo polígonos y el problema de la caja, mismas en las que les pensábamos cuestionar sobre su opinión al trabajar con el software de geometría dinámica. Desgraciadamente por factores ajenos a nosotros, este proyecto no se logró concluir, situación que trajo consigo que no tuviéramos una idea clara acerca de lo que los estudiantes pensaban con respecto a dicho tema, además de que su práctica en el uso del software fue muy limitada, únicamente tuvieron una sección de dos horas, de forma que no aprendieron a dominarlo de manera fluida y en consecuencia no observaron todas las bondades que trae consigo el uso del software, trayendo con ello una impresión de ser más difícil trabajar con el software, aunque en realidad esto es únicamente aparente por las situaciones antes descritas.

VI.2. ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES REALIZADAS POR LOS ALUMNOS DEL CONALEP II, MORELIA

Ya en varias ocasiones hemos dicho, que con los alumnos que nos hicieron el favor de darnos un poco de su tiempo en el canales Morelia 2, hicimos tres actividades: el problema de la caja, polígonos, y construyendo polígonos, cada una de ellas tuvo su propio enfoque para tratar los mismos temas, adaptándose los alumnos en forma distinta en cada una de las actividades e inclusive, dan respuestas diferentes para la misma propiedad tratada de distintas formas en distintas actividades. Temas como estos se van a tratar en este apartado, siguiendo una estructura similar a la expuesta en la parte 6.1.

VI.2.1. Actividad: Construyendo polígonos.

VI.2.1.1. Análisis de las Respuestas dadas por los alumnos.

Enseguida se presenta la tabla con las evaluaciones que hicimos a las respuestas dadas por los alumnos en la actividad construyendo polígonos, la tabla se hizo siguiendo el formato de la tabla anterior correspondiente al tema de evaluación de las respuestas de los alumnos en la actividad construcción de polígonos regulares utilizando triángulos isósceles, en cada una de las celdas se escribe más de un inciso, y para hacer referencia a ellos hacemos uso de escribir su número y a un lado su calificación, las calificaciones son las mismas que utilizamos en la actividad construcción de polígonos regulares utilizando triángulos isósceles, que están dadas por las letras: A, B, F, D, E y F. Al final en las ultimas celdas de la tercera columna introducimos el total de letras A, B, C, D, E y F que obtuvo cada uno de los alumnos. Sin más aclaraciones en seguida les presentaremos la tabla que tiene las calificaciones de los alumnos en la actividad construyendo polígonos.

<u>Tabla de evaluación de las respuestas de la actividad construyendo polígonos hecha por los estudiantes del conalep Morelia 2</u>		
Alumnos	Inciso 1	inciso 2, 3 y 4

Karina Itzel Bedolla Chávez	1.a: A	1.b: F	1.c: F	inciso 2: A	inciso 3: A
Michelle Chávez Gutiérrez	1.d: D	1.e: F		inciso 4: A	
Kassandra Cesar Gomez	1.a: A	1.b: A	1.c: A	inciso 2: A	inciso 3: A
Felix Cedillo Solyenitzi	1.d: D	1.e: F		inciso 4: F	
Melissa Chávez Vargas	1.a: A	1.b: F	1.c: F	inciso 2: F	inciso 3: F
María Guadalupe Piñón García	1.d: B	1.e: F		inciso 4: F	
María Fernanda Gutiérrez Corona	1.a: A	1.b: F	1.c: F	inciso 2: A	inciso 3: A
	1.d: D	1.e: F		inciso 4: A	
Cristina Rubí Huerta Sánchez	1.a: A	1.b: F	1.c: F	inciso 2: A	inciso 3: C
Juana Karina Calderón Morón	1.d: D	1.e: F		inciso 4: A	
Filiberto Guillen Sacristán	1.a: A	1.b: A	1.c: F	inciso 2: A	inciso 3: A
Brian G. Ruiz Mora	1.d: F	1.e: F		inciso 4: A	
Felipe Flores Guerra	1.a: A	1.b: A	1.c: F	inciso 2: A	inciso 3: A
Rafael Sánchez Izquierdo	1.d: F	1.e: F		inciso 4: A	
Donnovan Tapia González	1.a: A	1.b: A	1.c: F	inciso 2: A	inciso 3: D
José Carlos Ledesma Gutiérrez	1.d: D	1.e: F		inciso 4: A	
Rafael Hernández Espinosa	1.a: A	1.b: A	1.c: F	inciso 2: A	inciso 3: D
Giovanni Arturo Moreno Calderón	1.d: D	1.e: F		inciso 4: A	
Verónica León Pacheco	1.a: A	1.b: A	1.c: F	inciso 2: A	inciso 3: F

María Victoria Hernández Cruz	1.d: B 1.e: A	inciso 4: A
Susana Berenice Guzmán Torres	1.a: A 1.b: A 1.c: A 1.d: D 1.e: F	inciso 2: A inciso 3:A inciso 4: F
Nayeli Guadalupe Cuello Panuco	1.a: A 1.b: A 1.c: F 1.d: D 1.e: F	inciso 2: A inciso 3: C inciso 4: F
Diana Laura Villalpando Vázquez	1.a: A 1.b: F 1.c: F	inciso 2: F inciso 3: F
Christopher Ocho Cazares	1.d: B 1.e:F	inciso 4: F
Alumnos	inciso 5, 6 y 7	Totales
Karina Itzel Bedolla Chávez Michelle Chávez Gutiérrez	inciso 5: E inciso 6: F inciso 7: F	A: 4 B: 0 C: 0 D:1 E: 1 F:5
Kassandra Cesar Gómez Félix Cedillo Solyenitzi	inciso 5: A inciso 6: A inciso 7:F	A: 7 B: 0 C: 0 D: 1 E: 0 F: 3
Melissa Chávez Vargas María Guadalupe Piñon Garcia	inciso 5: D inciso 6: A inciso 7: B	A: 2 B:2 C: 0 D: 1 E: 0 F: 6
María Fernanda Gutiérrez Corona	inciso 5: C inciso 6: F inciso 7: D	A: 4 B: 0 C: 1 D: 2 E: 0 F: 4
Cristina Rubí Huerta Sánchez Juana Karina Calderón Morón	inciso 5: C inciso 5: F inciso 7: D	A: 4 B: 0 C:1 D: 2 E: 0 F:4
Filiberto Guillen Sacristán Brian G. Ruiz Mora	inciso 5: C inciso 6: A inciso 7: F	A: 6 B: 0 C:1 D: 0 E: 0 F:4
Felipe Flores Guerra Rafael Sánchez Izquierdo	inciso 5: C inciso 6: A inciso 7: F	A: 6 B: 0 C:1 D: 0 E: 0 F: 4

Donnovan Tapia González	inciso 5: C inciso 6: E	A: 4 B:0 C:2
José Carlos Ledesma Gutiérrez	inciso 7: C	D: 2 E: 1
Rafael Hernández Espinosa	inciso 5: C inciso 6: E	A: 4 B: 0 C: 1
Giovanni Arturo Moreno Calderón	inciso 7: D	D: 3 E:1 F:2
Verónica León Pacheco	inciso 5: A inciso 6: A	A: 7 B:1 C: 0
María Victoria Hernández Cruz	inciso 7:B	D: 1 E:0 F:2
Susana Berenice Guzmán Torres	inciso 5: C inciso 6: F	A: 5 B: 0 C: 1
	inciso 7: F	D: 1 E: 0 F:4
Nayeli Guadalupe Cuello Panuco	inciso 5: C inciso 6: A	A: 4 B: 0 C: 3
	inciso 7: C	D: 1 E: 0 F: 3
Diana Laura Villalpando Vázquez	inciso 5: C inciso 6: F	A: 1 B: 1 C: 2
Christopher Ocho Cazares	inciso 7: C	D: 0 E: 0 F: 7

Tabla 5: Calificaciones de los estudiantes del conalep en la actividad construyendo polígonos.

VI.2.1.2. Ideas relevantes que se encuentran en las respuestas de los alumnos.

Algunos equipos afirman que la diferencia entre un polígono regular y otro irregular radica en que: "Regular: que todos sus ángulos son iguales, Irregular: sus ángulos son de diferente medida". En esta respuesta una situación que no está clara es a que ángulos se refieren, si a los ángulos que se forman en cada uno de los vértices o al ángulo α del triángulo base para construir un polígono regular de n lados, la intuición me dice que se refieren a la primera opción, si consideramos que esto es cierto, entonces me parece que la respuesta de los estudiantes fue aceptada, escribieron una propiedad suficiente para diferenciar un polígono regular de uno que no lo es.

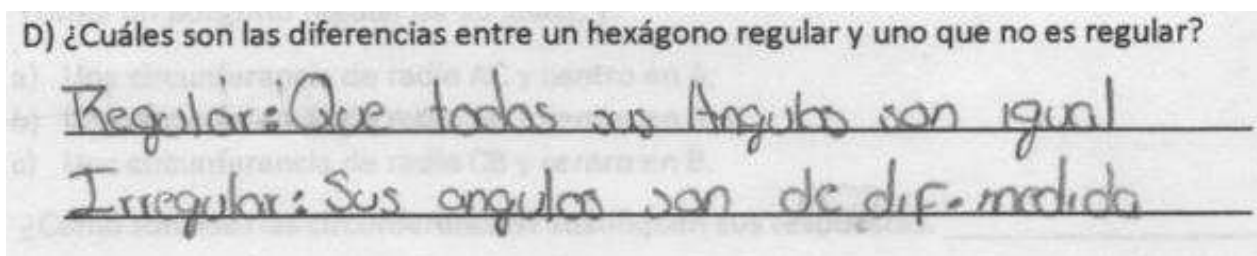


Figura 8: Parte de la primera página de la actividad construyendo polígonos, realizada por el equipo formado por: Susana Berenice Guzmán Torres.

Otra respuesta que es muy común, es aquella donde hacen mención de los lados y que además esta expresada en los siguientes términos: "que el regular tiene lados iguales y que el irregular no los tiene". Esta respuesta ya la hemos abordado mucho anteriormente, de tal forma que no consideramos necesario volver a estudiarla.

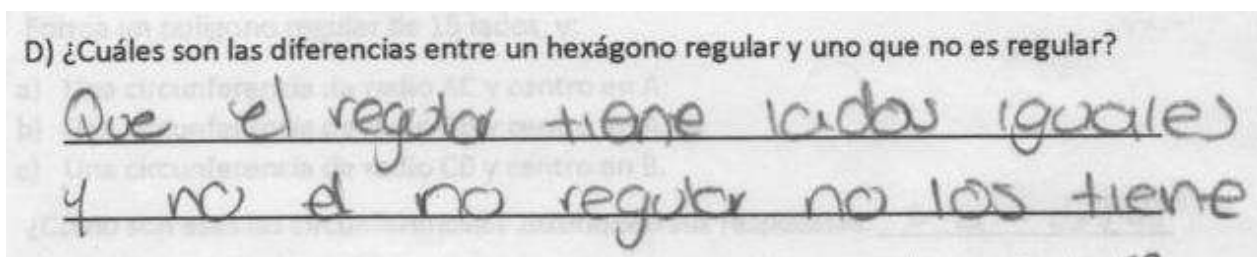


Figura 9: Parte de la primera página de la actividad construyendo polígonos, realizada el equipo formado por: Diana Laura Villapando Vázquez y Christopher Ochoa Cazares.

Si en un polígono regular, el número n de lados aumenta, entonces muchos alumnos afirman que el ángulo α del triángulo isósceles base, para construir un polígono regular de n lados disminuye. La afirmación es correcta, en realidad ese es el comportamiento del ángulo α al aumentar el valor de n .

Pero la pasada respuesta no fue general, la mayoría de los alumnos respondió con argumentos diferentes, algunos alumnos únicamente mencionaron que el ángulo α cambia. La afirmación actual tiene la propiedad de estar incompleta al no mencionar en qué forma cambia el ángulo, si disminuye o aumenta.

Por su parte algunos estudiantes más, supusieron que el ángulo α también aumentaba al aumentar el número de lados n . Desde luego que esta respuesta es incorrecta y es exactamente el comportamiento opuesto del que realmente ocurre.

Por último, un equipo más supuso que el ángulo α no sufría ningún cambio al variar el valor de n . Situación que como ya mencionamos en realidad no ocurre, sino que más bien si disminuye el ángulo.

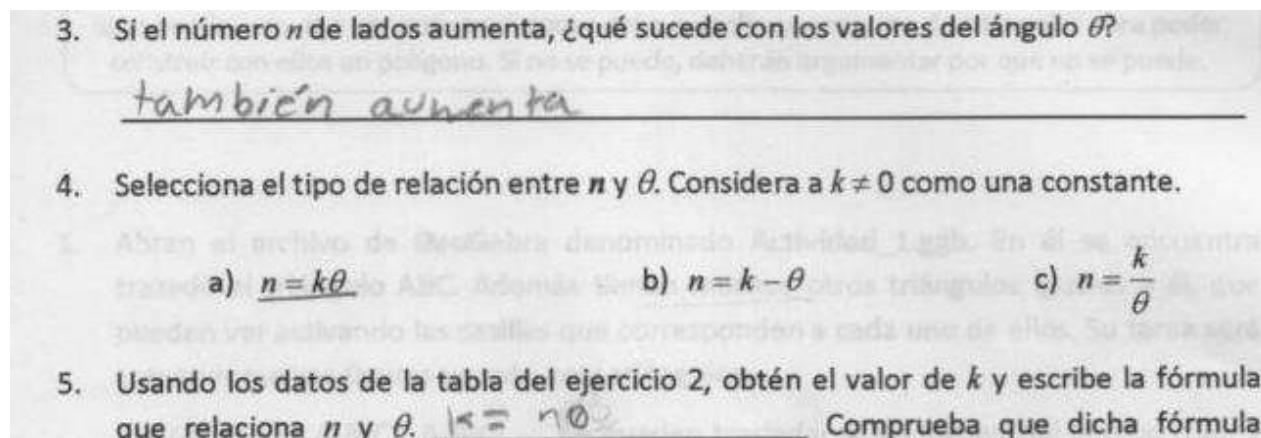


Figura 10: Parte de la segunda página de la actividad construyendo polígonos, realizada por el equipo formado por:

Diana Laura Villalpando Vázquez y Christopher Ochoa Cazares.

Muchos de los equipos, si no es que todos, escribieron las relaciones entre n y α : $k = n * \theta$ y $n = k * \theta$. Una de las dos relaciones está bien, sin embargo la otra está mal, además de que es contradictoria con la que está bien, por lo tanto un individuo no puede pensar que las dos relaciones estén bien, a menos que las considere como independientes, es decir que el individuo primero pensó en una, y olvidándose de ella en algún otro momento pensó la segunda, aunque lo más raro de esto, es que los estudiantes escribieron estas dos relaciones después de haber contestado bien la tabla del inciso 2, en la cual se deslumbra la relación correcta. Lo más posible es que los alumnos no hicieron ningún tipo de cálculo analítico, sino que únicamente basaron sus respuestas en sus intuiciones, que por otro lado no fueron muy buenas al introducir dos datos contradictorios, además de que no saben realizar un despeje los alumnos, debido a que de la relación que encontraron en el inciso 4 a la que se les pide en el inciso 5, únicamente había que realizar un despeje.

En el inciso 7, al alumno se le pide que construya un polígono regular de 15 lados, y posteriormente que construya tres círculos cuyos radios son los tres lados de triángulo

base para el polígono regular de 15 lados. Para este inciso hubo dos respuestas principales: la primera de ellas nos dice que son iguales, argumento que es erróneo ya que únicamente dos de las circunferencias son iguales, la otra tiene un tamaño mucho menor. Que los alumnos no hayan visto esta diferencia, nos informa que posiblemente no ocuparon el triángulo base del polígono regular de 15 lados, sino que ocuparon uno de dimensiones parecidas a las de un triángulo equilátero. También nos informa que los alumnos no siguieron las indicaciones dadas.

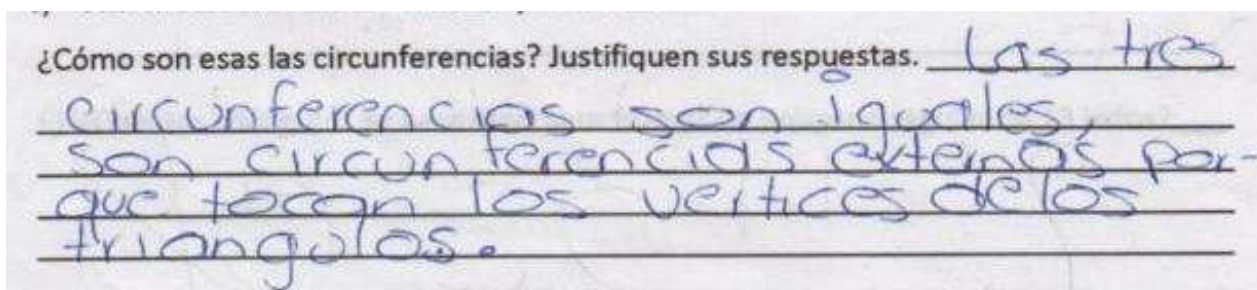


Figura 11: Parte de la segunda página de la actividad construyendo polígonos, realizada por el equipo formado por: Kassandra Cesar Gómez y Félix Cedillo Solyenitzi.

La otra respuesta nos informa que el tamaño de una de las circunferencias es diferente, e inclusive mencionan que es de menor tamaño, mientras que las otras dos son la misma. Esta es la respuesta que esperábamos por parte de los estudiantes.

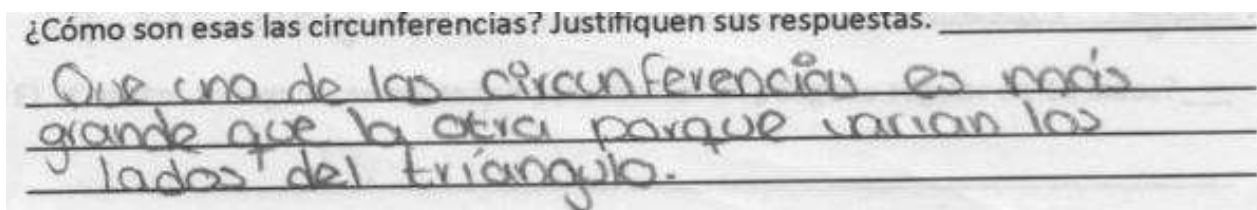


Figura 12: Parte de la segunda página de la actividad construyendo polígonos, realizada por el equipo formado por: Melissa Chávez Vargas y María Guadalupe Piñón García.

VI.2.2. Análisis de las respuestas de la actividad el problema de la caja.

Para la actividad el problema de la caja, no se hizo ningún tipo de tabla de calificaciones de las respuestas, debido a que la naturaleza de los datos nos lo impidió, por lo tanto pasaremos directamente al estudio de las respuestas relevantes.

Por lo regular en PB , que es nuestra variable independiente, los alumnos tomaron valores arbitrarios que no están bien esparcidos ni en orden, ni siquiera hay una distancia de diferencia constante entre un punto y el siguiente. Como ya anteriormente mencionamos, el comportamiento del carro tiene la propiedad de relacionar a PR con PB de la siguiente manera: para los primeros valores de PR , PB crece de manera rápida, posteriormente empieza a crecer PR de manera más lenta, hasta que llega un punto en el que se detiene, posteriormente decrece de manera lenta, para finalmente decrecer de manera más rápida. Si el estudiante no tiene los puntos igualmente espaciados, entonces el comportamiento de la velocidad de crecimiento y decrecimiento de PR , se vuelve un dato perdido al no tener distancias de referencia.

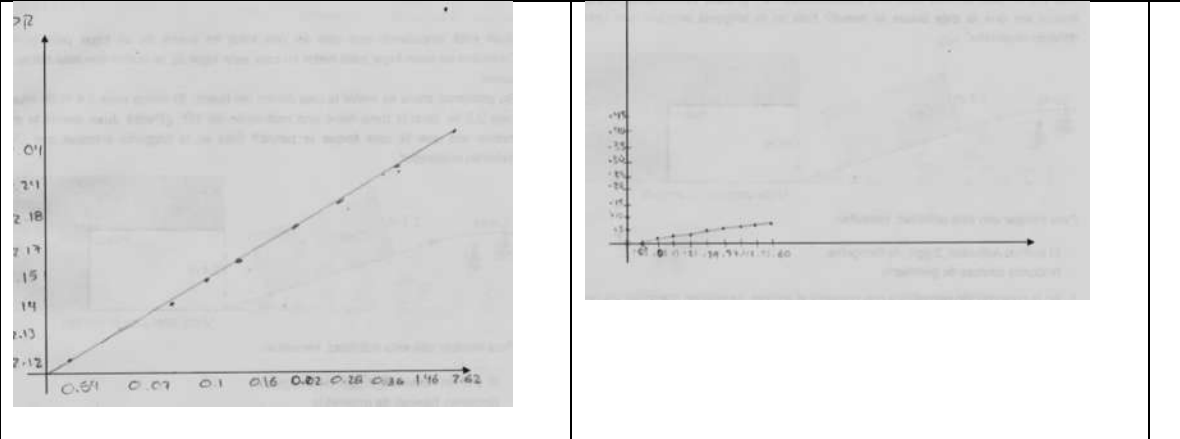


Tabla 6: Segunda página de la actividad el problema de la caja contestada por algunos alumnos del conalep 2.

Como se observa en la distintas graficas mostradas anteriormente, en muchas de ellas no se encuentran etiquetas en cada uno de los ejes, que nos informen a que variable corresponden los datos mostrados en cada uno de ellas, además de que ninguna de ellas se sigue el comportamiento esperado, que ya anteriormente discutimos.

Una de las gráficas que más se repite, está dada como una línea recta. Para que los estudiantes obtengan una línea recta únicamente puede ser por dos razones, la primera de ellas es que los alumnos hayan tomado los datos en un intervalo muy pequeño, de tal forma que el crecimiento entre ellos no varié mucho. La segunda opción es que como en

PB no se tiene una escala establecida, graficando en las mismas áreas intervalos distintos de PB , entonces esta situación puede disfrazar el crecimiento de PR en las distintas regiones de PB . Aunque los alumnos también cometieron el error de no ordenar los valores de PB , de manera creciente, sino que los escribieron de la manera aleatoria como los habían encontrado, situación que le quita toda línea de tendencia a la gráfica, no mostrando lo que en realidad pasa.

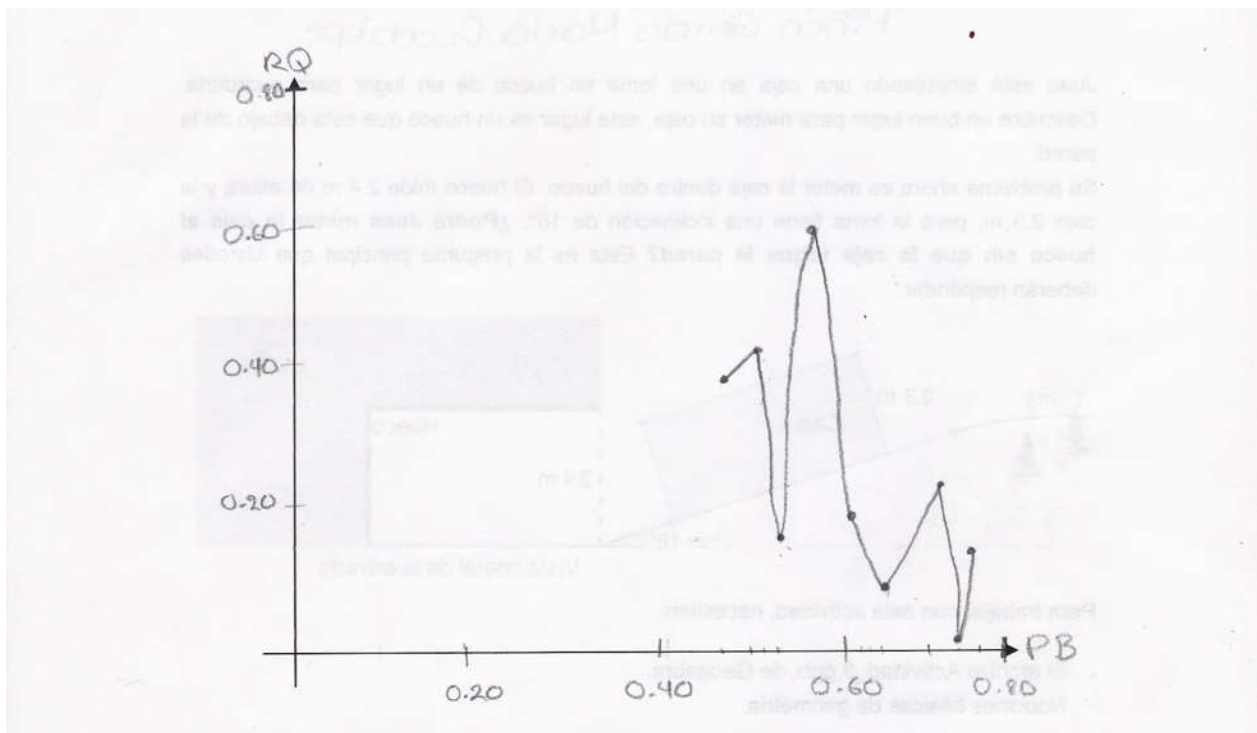


Figura 13: Parte de la segunda página de la actividad el problema de la caja contestada por las alumnas María Guadalupe Piñón García y Melissa Chávez Vargas.

Otra de las gráficas, tiene la propiedad de contar con tres mínimos y con tres máximos locales. Para la construcción de esta gráfica, hacen mención de que lo que grafican son los valores de PB y RQ , desgraciadamente para un valor de PB de 0.47 lo relacionan los valores de 0.39 y 0.46 en RQ . También para valores en PB de 0.51 y 0.52 escriben valores para RQ respectivamente de 0.46 y 0.15. Valores de que no están descritos según el comportamiento que predijimos anteriormente. No sé cuántos de los datos de esta grafica estén mal, aunque con lo expuesto anteriormente nos podemos dar cuenta de que si hay algunos, lo cual hace muy poco verosímil la gráfica dada.

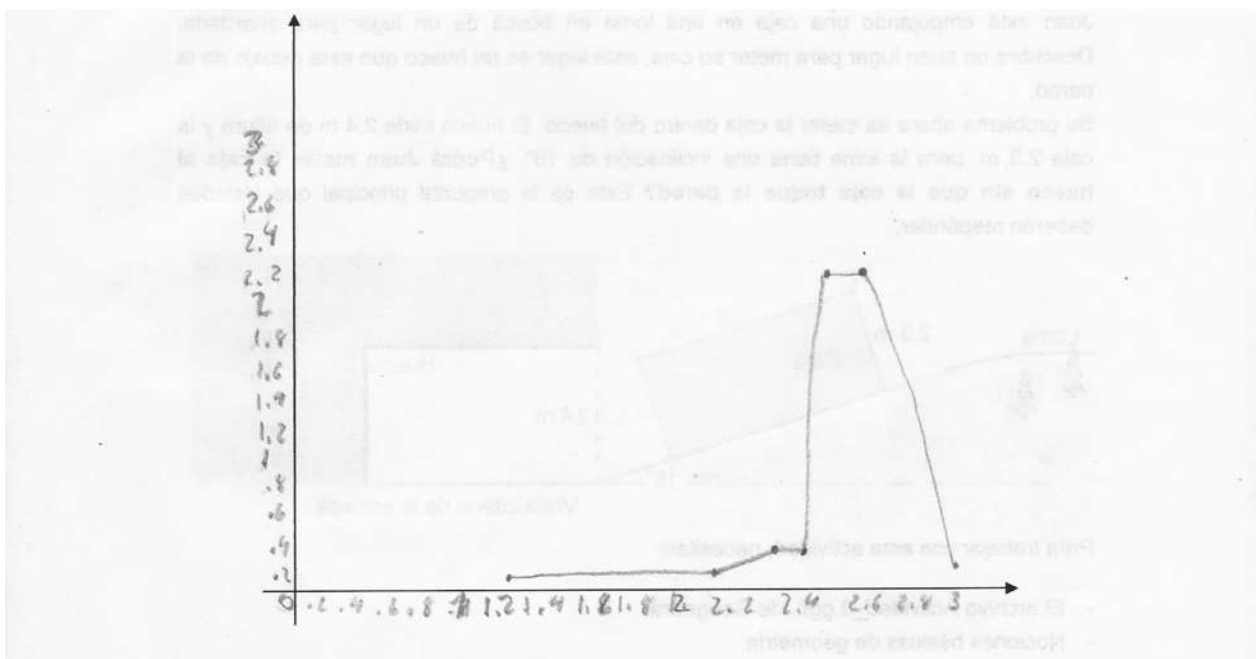


Figura 14. Parte de la segunda página de la actividad el problema de la caja, cuyo autor se desconoce

Otra gráfica que mostramos tiene la propiedad de en un principio cuenta con valores constantes, para posteriormente tener una pequeña elevación, y enseguida tienen una elevación más pronunciada y además la función cuenta con dos máximos. En los valores de PR , ninguno de ellos es inferior al 2.1, sin embargo tanto en el eje de las abscisas como en el de las ordenadas, ninguno de los datos empieza en 2.1, situación que nos impide ubicar los valores de PR y en consecuencia no nos es posible leer la gráfica.

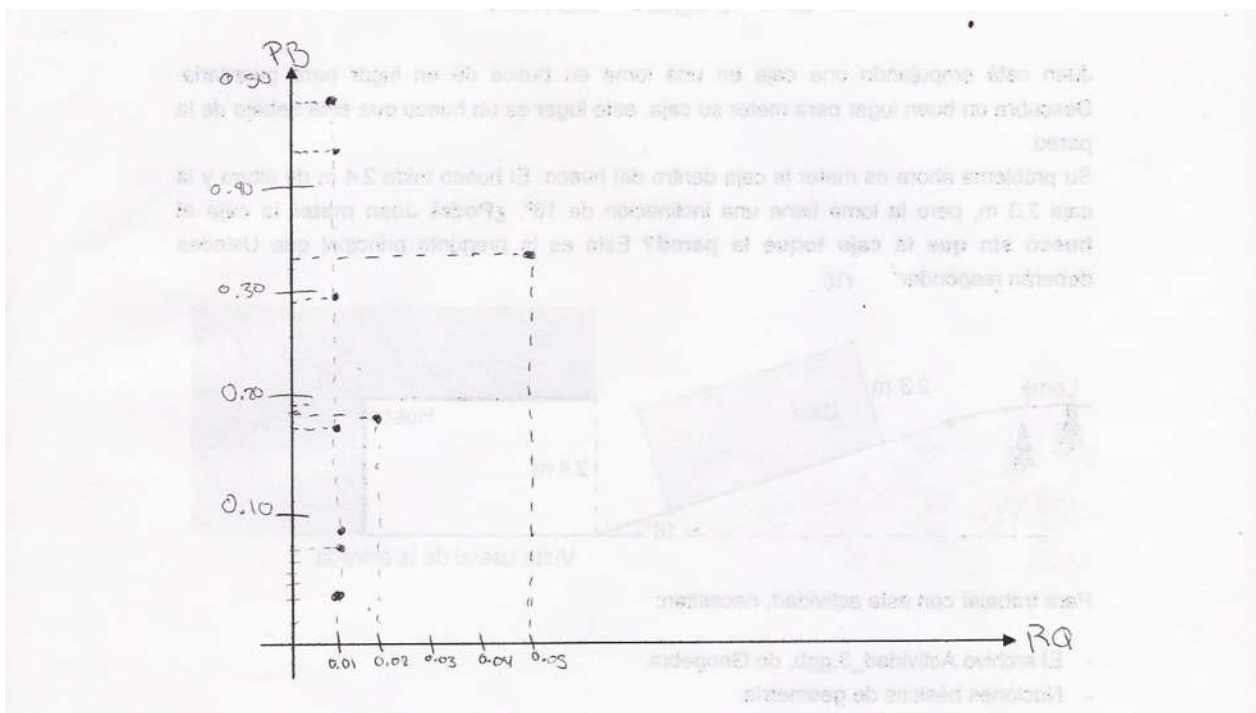


Figura 15. Parte de la segunda página de la actividad el problema de la caja contestada por los alumnos: Karina Itzel Bedolla Chávez y Michelle Chávez Gutiérrez.

Finalmente la última grafica que vamos a estudiar, tiene valores para RQ constantes salvo por dos puntos, uno de ellos es mucho más pronunciado que todos los demás. En esta gráfica no se simboliza el comportamiento real que tiene RQ con relación a PB .

VI.2.3. Análisis de las respuestas de la actividad: Polígonos.

VI.2.3.1. Calificación de las respuestas de los estudiantes durante la actividad.

Para calificar las respuestas de los estudiantes en esta actividad, ocupamos el mismo criterio que en las actividades anteriores, dándole a cada respuesta una calificación de acuerdo con las letras: A, B, C, D, E y F, donde A es la calificación máxima y F es la calificación de una respuesta errónea. Para esta actividad debido a la gran cantidad de respuestas que hay, nos vimos en la necesidad de introducir una tabla por cada uno de los equipos que la contestaron. Para cada una de las tablas, en la primera fila se introducen el número del inciso, primero escribimos todos los incisos que tiene que ver con el fundamento teórico, posteriormente después del inciso 6.q, pasamos a la parte de actividades con el software, dentro de la tabla no hacemos mención en ningún lugar del

cambio y únicamente escribimos el número 1, después de terminar con todos los incisos de las actividades con el software pasamos a la parte de conclusiones, nuevamente no introducimos en la tabla ninguna información de cuando realizamos el cambio, únicamente escribimos el 2.c y enseguida repetimos el uno. Como en las otras actividades, en la última celda escribimos el total de letras A, B, C, D, E y F que obtuvo el alumno. La calificación de un inciso está dada por la celda que tiene el signo de pesos en la columna que tiene como encabezado al inciso.

Sin más aclaraciones las tablas son las siguientes:

Michelle Chavéz Gutiérrez																			
	calificación e incisos																		
	1	2	3	4.a	4.b	4.c	4.d	4.e	5	6.a	6.b	6.c	6.d	6.e	6.f	6.g	6.h	6.i	6.j
A	\$		\$				\$	\$				\$	\$	\$		\$	\$	\$	
B																			
C				\$	\$					\$	\$								
D						\$			\$										
E		\$																	
F															\$				

	6.k	6.l	6.m	6.n	6.o	6.p	6.q	1	2.d	2.h	a	b	c	1	2	3	4	
A	\$	\$	\$	\$	\$				\$	\$								
B											\$		\$	\$				
C																		
D												\$			\$			
E																		
F						\$	\$	\$								\$	\$	

Tabla 7: Calificaciones de las respuestas de Michelle Chávez Gutiérrez en la actividad polígonos.

Melissa Chávez Vargas y Maria Guadalupe Piñón García																			
calificación e incisos																			
	1	2	3	4.a	4.b	4.c	4.d	4.e	5	6.a	6.b	6.c	6.d	6.e	6.f	6.g	6.h	6.i	6.j
A	\$		\$				\$	\$				\$	\$			\$			
B																			
C				\$	\$				\$	\$	\$								
D		\$				\$													
E																			
F														\$	\$		\$	\$	\$
	6.k	6.l	6.m	6.n	6.o	6.p	6.q	1	2.d	2.h	a	b	c	1	2	3	4		
A									\$	\$									
B											\$		\$	\$		\$			
C																			
D								\$											
E																			
F	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$					\$			\$		\$		

Jazmín Kassandra Cesar Gomez y Felix Cedillo Solyenitzi																			
calificación e incisos																			
	1	2	3	4.a	4.b	4.c	4.d	4.e	5	6.a	6.b	6.c	6.d	6.e	6.f	6.g	6.h	6.i	6.j
A	\$		\$				\$	\$				\$	\$		\$		\$	\$	
B																			
C				\$	\$					\$	\$								
D		\$				\$													
E								\$											
F														\$		\$			
	6.k	6.l	6.m	6.n	6.o	6.p	6.q	1	2.d	2.h	a	b	c	1	2	3	4		
A	\$	\$	\$						\$			\$							
B					\$						\$		\$	\$		\$			
C				\$															
D																			
E								\$											
F						\$	\$			\$					\$		\$		

calificación e incisos

	1	2	3	4.a	4.b	4.c	4.d	4.e	5	6.a	6.b	6.c	6.d	6.e	6.f	6.g	6.h	6.i	6.j
A	\$		\$				\$					\$							
B									\$										
C																			
D		\$		\$	\$	\$													
E																			
F								\$		\$	\$		\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$

	6.k	6.l	6.m	6.n	6.o	6.p	6.q	1	2.d	2.h	a	b	c	1	2	3	4		
A									\$										
B											\$		\$	\$					
C																			
D					\$														
E																			
F	\$	\$	\$	\$		\$	\$	\$		\$		\$			\$	\$	\$		

Melissa Chávez Vargas y Maria Guadalupe Piñón García																			
calificación e incisos																			
	1	2	3	4.a	4.b	4.c	4.d	4.e	5	6.a	6.b	6.c	6.d	6.e	6.f	6.g	6.h	6.i	6.j
A	\$		\$																
B																			
C				\$	\$														
D						\$													
E		\$																	
F							\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$
	6.k	6.l	6.m	6.n	6.o	6.p	6.q	1	2.d	2.h	a	b	c	1	2	3	4		
A																			
B																			
C																			
D					\$			\$			\$		\$						
E																			
F	\$	\$	\$	\$		\$	\$		\$	\$		\$		\$	\$	\$	\$		

Tabla 8: Calificaciones de las respuestas de Melisa Chávez Vargas y María Guadalupe Piñón García en la actividad polígonos.

Felipe Flores Guerra y Filiberto Guillén Sacristán																			
calificación e incisos																			
	1	2	3	4.a	4.b	4.c	4.d	4.e	5	6.a	6.b	6.c	6.d	6.e	6.f	6.g	6.h	6.i	6.j
A			\$				\$	\$											
B																			
C				\$	\$														
D		\$																	
E																			
F	\$					\$			\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$
A									\$		\$								
B														\$					
C													\$						
D																			
E																			
F	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$		\$		\$			\$	\$	\$		

Tabla 9: Calificaciones de las respuestas de Felipe Flores Guerra y Filiberto Guillén Sacristán en la actividad polígonos.

Cristina Rubi H. S.

calificación e incisos

	1	2	3	4.a	4.b	4.c	4.d	4.e	5	6.a	6.b	6.c	6.d	6.e	6.f	6.g	6.h	6.i	6.j
A	\$													\$		\$			
B									\$										
C										\$	\$								
D		\$																	
E																			
F			\$	\$	\$	\$	\$	\$				\$	\$		\$		\$	\$	\$
	6.k	6.l	6.m	6.n	6.o	6.p	6.q	1	2.d	2.h	a	b	c	1	2	3	4		
A									\$	\$									
B							\$				\$		\$	\$					
C												\$				\$	\$		
D					\$			\$											
E				\$															
F	\$	\$	\$			\$									\$				

Tabla 10: Calificaciones de las respuestas de Cristina Rubí H. S en la actividad polígonos.

Brian Bethzemaní Ruiz Mora																			
calificación e incisos																			
	1	2	3	4.a	4.b	4.c	4.d	4.e	5	6.a	6.b	6.c	6.d	6.e	6.f	6.g	6.h	6.i	6.j
A	\$		\$											\$		\$			
B									\$										
C										\$		\$							
D		\$																	
E																			
F				\$	\$	\$	\$	\$			\$		\$		\$		\$	\$	\$
	6.k	6.l	6.m	6.n	6.o	6.p	6.q	1	2.d	2.h	a	b	c	1	2	3	4		
A						\$			\$	\$									
B				B							\$		\$	\$		\$			
C					\$							\$					\$		
D																			
E																			
F	\$	\$	\$				\$	\$							\$				

Tabla 11: Calificaciones de las respuestas de Brian Bethzemaní Ruiz Mora en la actividad polígonos.

VI.2.3.2. Respuestas relevantes de los alumnos en la actividad: Polígonos.

La primera figura de polígono que se les vino a la mente a los alumnos, cuando se les insistió que construyeran un polígono, fue un hexágono regular. Durante su vida estudiantil lo más posible es que con el polígono con el que han trabajado más sea el triángulo, junto con el cuadrado y el rectángulo, y por lo tanto esperaría que alguna de

estas figuras fuera la más repetida, situación que no ocurrió así. Tal vez no las repitieron tanto, debido a que el número necesario de lados para fórmulas es muy reducido, y por lo tanto consideró que para dar un buen ejemplo de un polígono necesitan una figura que cuente con una cantidad mayor de lados.

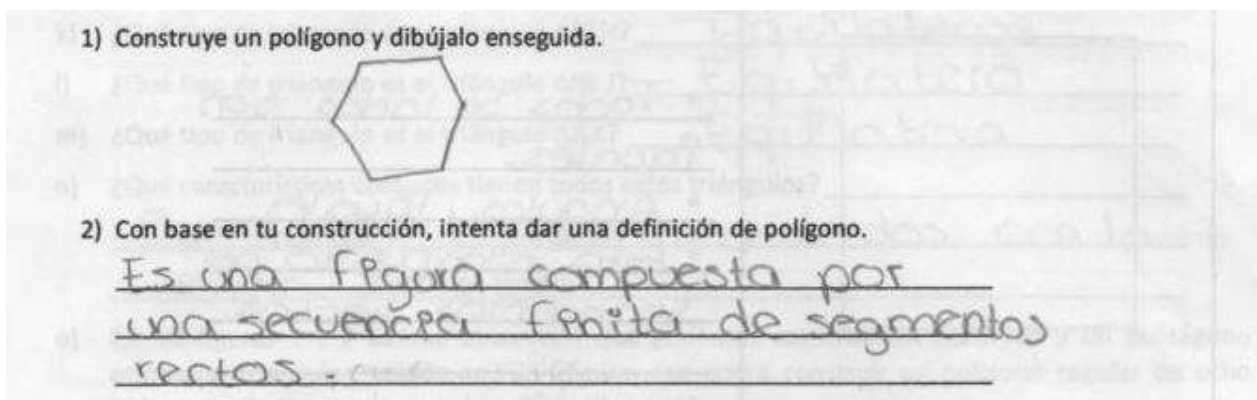


Tabla 12. Primera página de la actividad polígonos contestada por los equipos formados por: Melissa Chávez Vargas y María Guadalupe Piñón García

La gran mayoría de los estudiantes que contestaron la actividad polígonos, afirman que un polígono es: "una figura plana compuesta por una secuencia finita de segmentos rectos". Esta es una respuesta análoga a otras que ya hemos tratado anteriormente y por lo tanto no la volveremos a estudiar.

En el inciso 4, a los estudiantes les presentamos tres figuras, (como el lector se podrá dar cuenta si nuevamente repasa la actividad,) a nuestra opinión ninguna de ellas es un polígono, aunque la tercera de ellas de izquierda a derecha, algunos lectores la podrían tomar de manera correcta como un polígono cruzado. Sorprendentemente casi la mitad de los estudiantes afirmaron que la primera de las figuras es un polígono, patrón que nuevamente se repite en la figura de en medio y casi todos consideraron a la tercera figura como un polígono. Las situaciones anteriores nos habrán que el alumno realmente considera al polígono como una secuencia finita de segmentos rectos, hecho que muy posiblemente sus profesores de geometría euclidiana en ningún momento se dieron cuenta y dejaron que el estudiante siguiera con su idea falsa, esto quiera decir que su profesor, en su clase de geometría euclidiana, les dio a los estudiantes una definición parecida a la que ellos no expusieron y enseguida pasaron a temas del triángulo o del

cuadrado, sin hacerle al alumno nunca mención de que el polígono debía de cumplir con más propiedades.

Pero no todo está perdido, muchos de los alumnos sostienen que lo que les falta a las figuras para ser polígonos es: "que todos sus vértices se unan formando una figura cerrada". Esta es una muy buena intuición obtenida a partir del estudio de las figuras, es uno de los resultados a los que queríamos que el estudiante llegue, aunque todavía les faltan varias características para definir de manera formal lo que es un polígono.

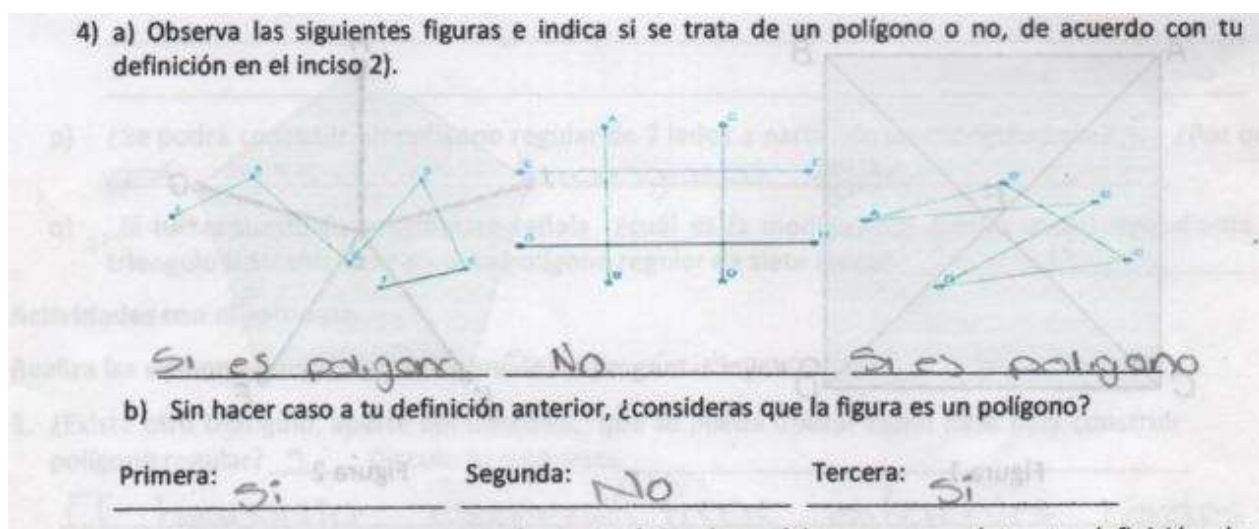


Figura 16: Parte de la primera página de la actividad polígonos contestada por Wendy Griselda Zavala Alvarado.

Un estudiante más, al cuestionarle sobre las características que les falta a las figuras para ser polígonos regulares nos dice textualmente: "porque tiene más lados de un polígono y esa figura no parece". Hay que recordar que para esta persona, la única figura que no es un polígono, es la que se encuentra en la parte de en medio, que nosotros la podemos relacionar con el tablero del juego del gato. Un polígono puede tener cualquier cantidad de lados, esa no es una restricción para que una figura deje de ser un polígono, la alumna baso su respuesta en su impresión del dibujo, al mencionar que esa figura no parece, supongo que a la estudiante le ocurrió como suele pasarnos al escribir un acento, cuando nos acordamos que alguna palabra tiene un acento, pero que desafortunadamente no sabemos en qué sílaba va, de manera análoga, la estudiante se dio cuenta de que la figura no es un polígono, desgraciadamente no contaba con los conocimientos necesarios para decir cuál es la característica que le hace falta para poder considerarlo como un polígono regular. Cuando menciona que la figura tiene más lados que un polígono quizá, a

lo que se quiso referir es a que la parte central de la figura, que tiene como frontera los segmentos de recta, hasta las cuatro intercesiones en su parte más cercana al centro de la figura, es lo que tomó como lo que podría ser el polígono, y las parte de los segmentos que se encuentran exteriores a dicha construcción los pudo haber tomado como los lados sobrantes.

Una respuesta errónea para el mismo inciso esta dado en los siguientes términos: "que la figura tenga segmentos rectos". Para esta persona la única figura que no es un polígono es la que se encuentra en medio. Si comparamos la figura de en medio con cualquiera de las otras dos figuras, nos podemos dar cuenta de que la figura de en medio tiene segmento horizontales y verticales, mientras que los segmentos de las otras figuras tienen cualquier inclinación, tal vez a esto se referían los alumnos al mencionar que la figura debe de tener segmentos rectos, nos querían informar que tenían que acomodarse con alguna inclinación específica, aunque no mencionan cuál es esa, o tal vez querían mencionar que dentro de la figura tenían que existir ángulos de 90° , lo cierto es que aunque esta propiedad abstracta si tiene cierta relación con la definición de lo que es un polígono según ellos, se me hace hasta cierto grado sorprendente que en ningún momento hayan mencionado ninguna característica más de lo que es un polígono, a pesar de que en las figuras se ven claramente algunas propiedades más, tal vez esto ocurrió debido a que el alumno tiene ya muy enraizada su definición de polígono, de tal forma que únicamente acepta esta definición y sus consecuencia que implica, sin importarle si está bien o mal, y cerrándose hacia alguna definición más.

Al interrogarles a los alumnos si un triángulo isósceles puede llegar a ser un triángulo rectángulo, la gran mayoría de los alumnos respondió que si, por que "tiene un ángulo recto y dos de sus lados son iguales", antes de cuestionarles sobre este asunto, se les cuestionó sobre la medida que tiene el ángulo distinto en un triángulo isósceles cuya medida de los ángulos iguales es de 45° , es de hacer notar que los alumnos que respondieron de manera correcta que el ángulo restante tiene una medida de 90° , son precisamente los alumnos que si encontraron un triángulo rectángulo que además es

isósceles, esto nos dice que la actividad si la planteamos bien, para que el alumno se diera cuenta de que un triángulo isósceles también puede llegar a ser un triángulo rectángulo, como también lo comprobamos con los alumnos que contestaron mal el ángulo faltante, y posteriormente respondieron con argumentos como el siguiente: "porque son muy diferentes", donde claramente se ve que los estudiantes no encontraron ninguna relación entre un triángulo isósceles y uno que es rectángulo.

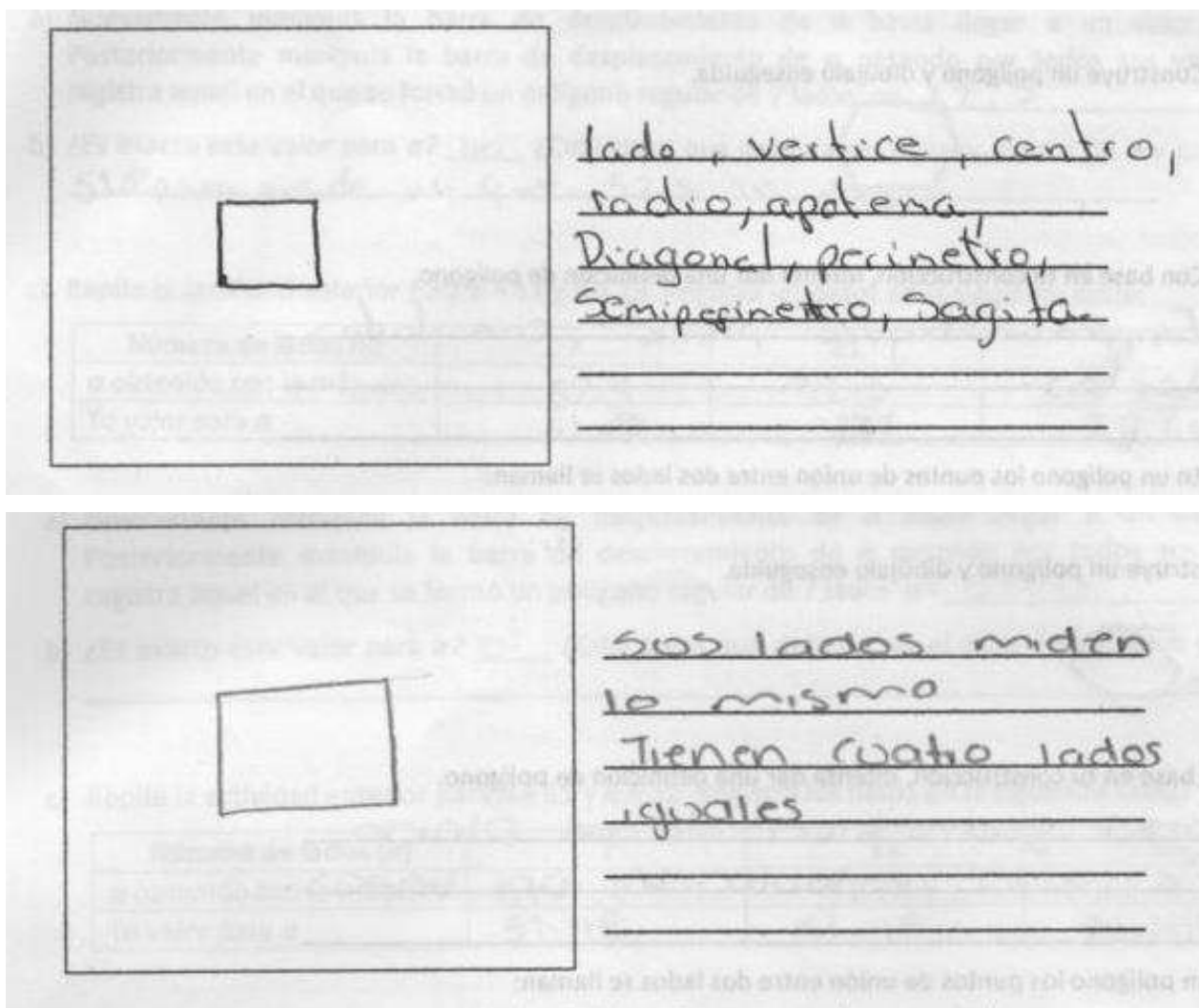


Tabla 13. Parte de la segunda página de la actividad polígonos realizada por los equipos formados por: arriba: Cristina Rubí H.S. abajo: Wendy Grisela Zavala Alvarado.

Anteriormente ya mencionamos que con los polígonos con los que mayoritariamente trabaja el alumno durante su educación básica y media superior, son precisamente el cuadrado, el triángulo y el rectángulo, no es de extrañarnos que al pedirle a los

estudiantes que dibujen un polígono regular, la gran mayoría de ellos se hayan inclinado por dibujar un cuadrado seguido de un triángulo equilátero, aunque por mucha distancia. Al alumno se le pide que de una lista de las propiedades de un polígono regular, por lo tanto escriben una serie de propiedades como que un polígono regular tiene: "lado, vértice, centro, radio, apotema, diagonal, perímetro, semi perímetro, sagito". Es de hacer notar que en las preguntas libres o aquellas que tienen una serie de soluciones y que al alumno no se le pide de manera formal que de más de una respuesta, este tenderá a dar respuestas cortas. Muchas de las respuestas que dieron para este inciso también fueron respuestas de diccionario, donde se ve claramente que el estudiante tiene muy arraigadas las definiciones de aprendió de manera metodológica en sus cursos de geometría euclidiana, y sí tienen la certeza, al menos aparente de que están bien, no realizarán ningún tipo de análisis para desmentirlas o colaborarlas. Los estudiantes que no ocuparon respuestas de diccionario se conformaron con escribir una o dos propiedades que dedujeron directamente de los dibujos, que en la mayoría de los casos eran respuestas correctas salvo algunos que se inventaban propiedades erróneas.

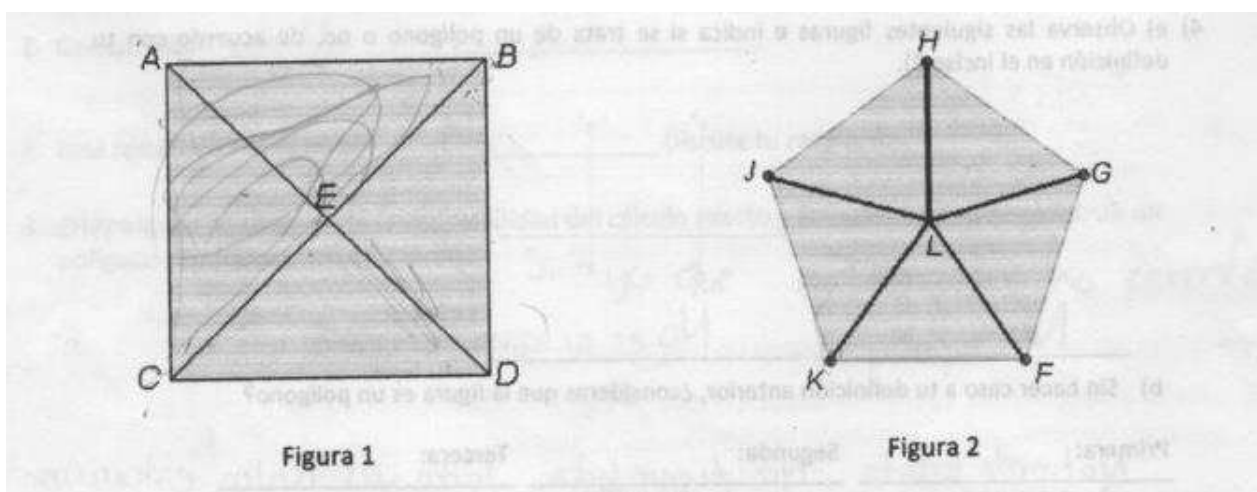


Figura 17. Figuras 1 y 2 de la actividad polígonos.

El lector se podrá dar cuenta revisando la actividad, que la figura 1 de la misma corresponde a un cuadrado, en esta figura también se dibujaron las diagonales del cuadrado, y en opción múltiple les cuestionamos a los estudiantes sobre el tipo de

triángulos que se forman en el cuadrado después de haber construido una diagonal. No era muy difícil observar que los triángulos que se forman son isósceles y rectángulos, basta con recordar un poco las propiedades del cuadrado, no obstante todos los alumnos escribieron a lo más una respuesta, esto se debió posiblemente a que la pregunta fue de opción múltiple, y como al estudiante por lo regular, en un cuestionamiento de opción múltiple únicamente tiene que dar una respuesta, entonces supuso que con ponerle marca a solamente una de la opciones bastaba. Por otro lado la respuesta más común es que los triángulos son equiláteros, respuesta errónea que posiblemente la obtuvieron del hecho de realizar una observación superficial.

En la siguiente serie de incisos, al alumno se le cuestiona acerca del tipo de triángulos con los que está formada la figura 1 y la figura 2. Aunque muchos alumnos sí se dieron cuenta de que estos triángulos eran isósceles, también se contó con la mayoría de los individuos estudiados que pensaron que dichos triángulos eran equiláteros, anteriormente ya habían contestado la actividad construyendo polígonos, en la que se observa que al menos uno de los ángulos interiores de cada triángulo tiene una medida distinta a 60° , resultado suficiente para afirmar que dichos triángulos no eran triángulos equiláteros, hay que recordar también que esta actividad, se aplicó 2 semanas después de la actividad contrayendo polígonos, de forma que algunos resultados de la misma se les pudieron olvidar a los estudiantes en el transcurso de tal tiempo, aunque si estos mismos estudiantes anteriormente encontraron la respuesta correcta, lo más probable era que la volvieran a encontrar, y sin embargo no fue así debido a que se planteó de diferente manera el problema.

Aunque no es un buen sistema de referencia, anteriormente en la actividad construyendo polígonos, ya nos habíamos dado cuenta que existe una relación, entre el número de lados del polígono y el ángulo α del triángulo base para construir un polígono regular de n lados, además en dicha actividad se llenó una tabla con los respectivos valores del ángulo α para cada uno de los n , e inclusive algunos alumnos encontraron irregularidades, al trabajar con algunos valores de n tales como el siete. Para esta actividad la gran mayoría de los alumnos predicen que sí se puede construir el polígono regular de siete y ocho

lados de manera análoga a como se construyó la figura 1 y figura 2, aunque no mencionan los ángulos α correspondientes de los triángulos base, para el polígono regular de siete lados. Posiblemente lo que los estudiantes observaron fue que si ya se pudieron construir, el polígono regular de cuatro y de cinco lados, entonces no debería de haber ningún inconveniente al trazar el polígono de siete u ocho lados, dado que son figuras que comparten muchas propiedades con el polígono regular de 5 lados, aunque en realidad si existe un inconveniente al construir el polígono regular de siete lados.

Algunos alumnos consideran que con un triángulo escaleno base se puede construir un decágono textualmente escriben "El triángulo escaleno tiene diferentes lados y de puede construir un decágono". De ninguna manera con un triángulo escaleno se puede construir un decágono, hay que acordarse que se necesitan triángulos isósceles congruentes, para que el lado de los tres del triángulo que no es igual, se comporte como el lado del polígono, e isósceles para poder formar los vértices del polígono, hablar de un triángulo escaleno quiere decir que los estudiantes en alguna momento introducen irregularidad en el decágono.

Para formar el polígono regular de 3 y 4 lados, muchos alumnos consideran que los ángulos α correspondientes al triángulo base, tiene una medida de 90° y de 120° respectivamente. Esta Respuesta que es atinada.

Sin embargo hay otros alumnos que dieron valores distintos, tomaron para el ángulo α del triángulo base, para construir un polígono regular de 3 y 4 lados, valores de 60° y 45° respectivamente. Con estos valores y con esos n , únicamente se forma la mitad del polígono regular y por lo tanto, podemos decir que en esos valores si se forman polígonos, aunque no los que les estábamos preguntando a los alumnos, y por lo tanto la respuesta dada es incorrecta.

La gran mayoría de los estudiantes tomaron al número $360/7$ como un número exacto, a excepción de una alumna, aunque ella no lo consideró como exacto, debido a que tiene un número decimal, y no como realmente pasa, que no es exacto porque tiene una sucesión infinita de decimales. Este hecho nos hizo imposible que los estudiantes entendieran el principal objeto de la actividad, que no se puede construir un polígono

regular para algunos n , porque el número $360/7$ es un número irracional. Esto a su vez nos informa que los alumnos, en toda su vida estudiantil, en ningún momento han utilizado a los números racionales como tales, más bien siempre han entendido a todos los números reales, como un entero que se acompaña de una cantidad finita de decimales.

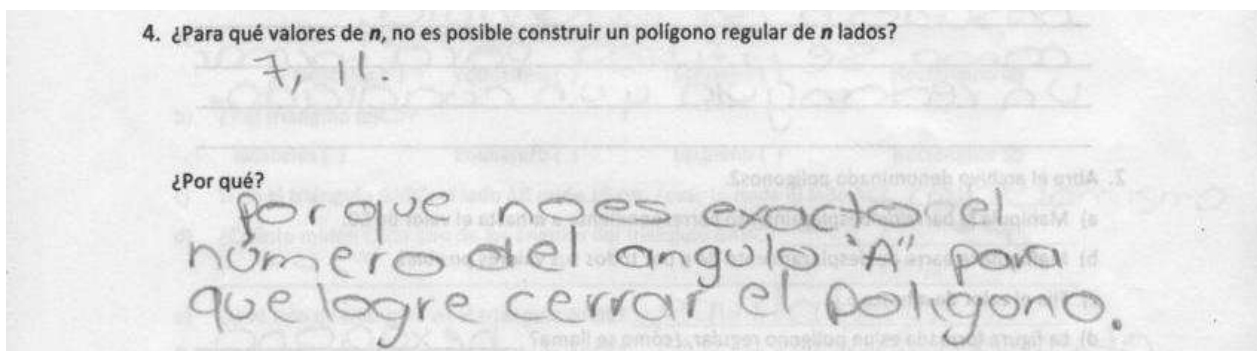


Figura 18. Parte de la cuarta página de la actividad polígonos, contestada por el equipo formado por : Félix Cedillo Solyenitzi y Jazmín Cassandra Cesar Gómez.

Casi la mitad de los alumnos supuso que no existe ninguna relación entre la imposibilidad del cálculo exacto y la imposibilidad de construir un polígono regular preciso de 7 lados, aunque la otra mitad si encontró que existe una relación "si, por que el valor de α no es exacto para formar el polígono de 7 lados". Esta es la respuesta correcta que queríamos que entendieran los alumnos a lo largo de la actividad, no en el sentido que la escriben, de que el número $360/7$ tiene una cantidad finita de decimales, sino más bien porque tiene una cantidad infinita, pero por todo lo demás está bien la respuesta.

Ninguno de los estudiantes obtuvo una respuesta acertada, cuando se le preguntó por los valores de los n para los cuales es imposible construir un polígono regular de n lados. Posiblemente esto se debió a que los estudiantes hasta estas alturas todavía no dominan el concepto de número irracional, ni sus principales características.

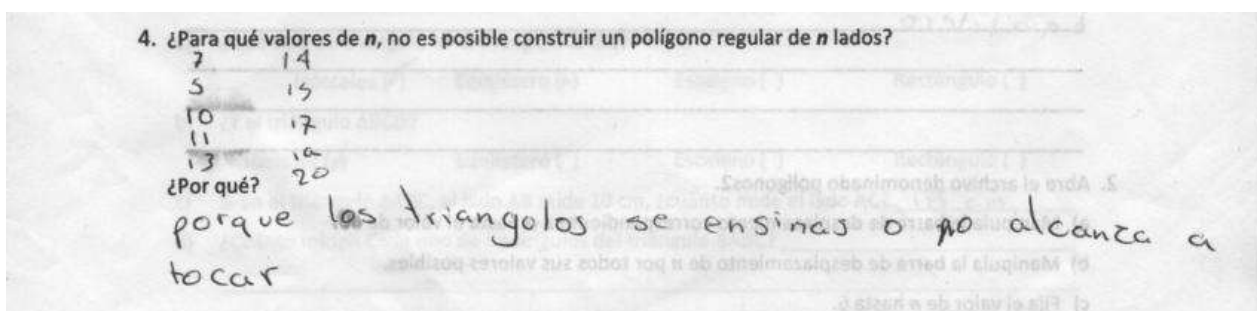


Figura 19. Parte de la cuarta página de la actividad polígonos, contestada por el equipo formado por: Cristina Rubí H. S

Después de haber dado respuesta erróneas sobre los valores de n , para los cuales no es posible construir un polígono regular de n lados, en la justificación de por qué dan esas respuestas, algunos de los estudiantes dan argumentos más o menos acertados como los siguientes; "porque no es exacto el valor de α para que logre cerrar el polígono", "por qué los triángulos se enciman o no alcanzan a tocar", "la división de grados siempre saldrá en decimal". Esto quiere decir que aunque las repuestas de los estudiantes fueron en la mayoría de los casos erróneas, también hubo otras que intentaron seguir el camino que les estábamos planteado, desafortunadamente no tomamos el camino indicado, debido a que no predijimos de manera correcta el espacio muestra con el i vamos a trabajar.

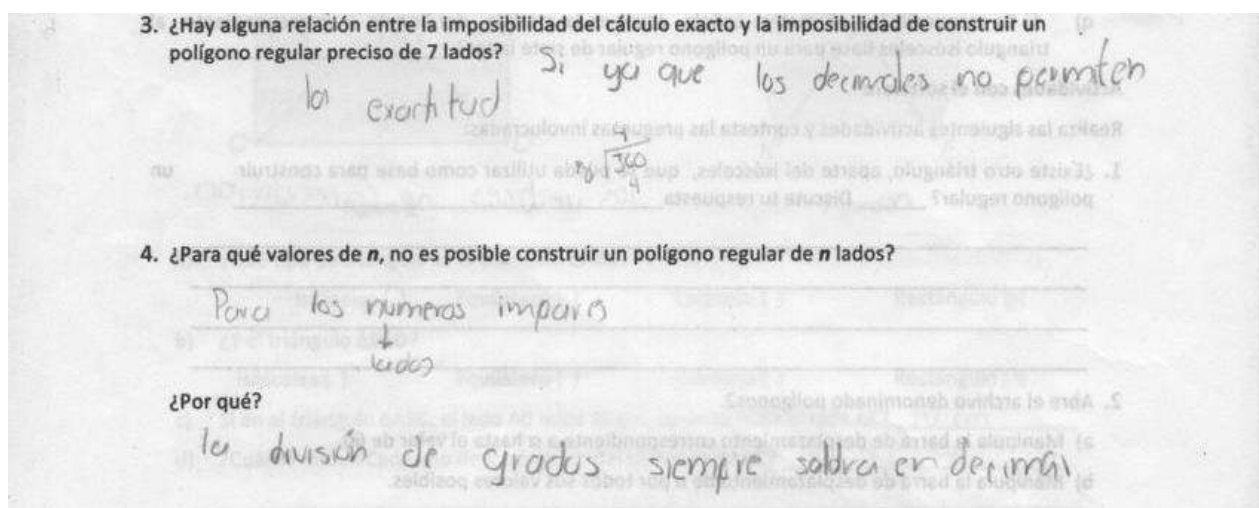


Figura 20. Parte de la cuarta página de la actividad polígonos, contestada por el equipo formado por: Michelle Chávez Gutiérrez

VI.2.4. Estudiantes del grupo del Conalep II, Morelia.

En el Conalep II, Morelia, nos fue imposible mantener al mismo grupo y con los mismos equipos, durante las tres actividades que les aplicamos, variando inclusive el número de estudiantes en cada una de las actividades. Para la actividad polígonos contamos con el apoyo de 16 alumnos que se dividieron en 5 equipos de 2 personas y 6 equipos de únicamente una persona, mientras que para la actividad el problema de la caja, no

sabemos de manera exacta con cuántos alumnos contamos, debido a que algunos de ellos no les pusieron nombre a sus hojas de respuestas, lo que si podemos contar es el número de equipos con los que contamos: eran 6 equipos de 2 personas, 1 equipo de una persona y dos más que no les pusieron sus nombres a la actividad. Para la actividad construyendo polígonos nos encontramos con el grupo más numeroso, contando con el apoyo de 24 estudiantes que los dividimos en 11 equipos de 2 alumnos y dos equipos más de un solo alumno.

Como ya hemos mencionado, en el Conalep II se imparten clases de nivel medio superior, por lo tanto los estudiantes ya pasaron por toda su educación básica y también tomaron su curso de geometría euclidiana en su educación media superior, lo que implicaría de manera aparente, que los mismos ya tienen buenas bases en los temas referentes a los polígonos, aunque esto en realidad no ocurre así.

Se puede observar que los alumnos tomaron algunos cursos de geometría euclidiana, debido a que dan algunas respuestas de diccionario, aunque sus cursos no fueron muy eficientes, algunas respuestas que nos dan son muy simples, mientras que otras tienen la característica de ser erróneas, o cuando ocupaban algún resultado clave en alguna inciso, en la mayoría de las veces no lo saben utilizar.

El alumno carece de los conocimientos básicos que lleva consigo el uso del número irracional, así como de sus propiedades básicas.

Cuando se le pide que den una respuesta, la gran mayoría de los alumnos tenderá a dar una respuesta simple, a menos que formalmente se le pida lo contrario, en tal caso buscará dar una solución un poco más compleja.

No sigue las deducciones lógicas y considera como independientes cada uno de los incisos. Al momento de graficar la gran mayoría de los estudiantes lo hizo mal, situación que en principio fue resultado de la naturaleza de los datos que recogieron, en muchas ocasiones erróneos y también aleatorios, intentando ellos por su parte introducir los datos de manera aleatoria en la gráfica, sin seguir ninguna escala específica en los ejes, ni siguiendo un orden creciente en los puntos de la variable PB, situación que nos informa que los

estudiantes únicamente siguieron las instrucciones al azar, sin observar si lo que estaban haciendo era correcto o erróneo.

Los estudiantes no realizan ningún tipo de comprobación a sus respuestas.

Para encontrar alguna relación hacen uso de su intuición, sin introducir ningún tipo de análisis analítico y muchas veces obteniendo respuestas contradictorias en situaciones análogas.

Sus observaciones hacia a figuras son meramente observaciones intuitivas, en las que el estudiante busca las respuestas meramente de observar las figuras, sin realizar ningún tipo de análisis analítico o de cualquier otra índole.

Consideran como dogma de fe, sus conocimientos que aprendieron durante sus cursos de geometría euclidiana sin cuestionarse en ningún momento sobre sus límites de aplicación o sus limitaciones.

Para ellos el estudio de algunos casos particulares puede ser suficiente para formular una ley general.

Los conocimientos que han aprendido en un inciso, no siempre los ocupan en algún otro inciso que haga uso de él.

VI.2.5. Ventajas que se encontraron al trabajar con el software durante la aplicación de las actividades a los alumnos del Conalep II, Morelia.

Anteriormente al tratar el mismo tema con respecto a las respuestas que nos dieron los alumnos de la escuela preparatoria Melchor Ocampo dependiente de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, ya habíamos visto algunas de las ventajas que trae consigo el uso del software en la enseñanza matemática, así como la forma en que las introducimos al trabajar con los alumnos de dicha dependencia. Pero no todos los grupos son iguales, cada uno de ellos cuenta con sus propias características que hace que los resultados que se encuentran sean diferentes, de allí procede la importancia de volver a introducir esta sección con el afán de estudiar a los alumnos del Conalep II, Morelia.

Pero entrando de lleno en el tema que nos concierne, ya anteriormente mencionamos que existen tres tipos de problemas: el bien planteado, los bien planteados que necesitan de algún tipo de construcción auxiliar y los mal planteados. Como los estudiantes no son capaces de seguir deducciones lógicas, además de que son incapaces de ocupar algún conocimiento sofisticado para resolver un problema complejo, entonces consideró que los problemas con los que normalmente se enfrentan son aquellos que son bien planteados. Para nuestro caso; en las actividades pudimos aplicarles a los alumnos, gracias al uso del software, distintos tipos de problemas, del tipo de los bien planteados, y de aquellos bien planteados que necesitan de una construcción auxiliar. Ejemplo de ello lo encontramos en la actividad "el problema de la caja", en la cual para observar el comportamiento del objeto en primera instancia debe de construir una tabla con valores de dos variables, para posteriormente observar los datos, y realizar una gráfica en la que podrá leer la información, y así finalmente estar en condiciones de dar una respuesta a la pregunta. En la actividad construyendo polígonos el software también nos permite introducir al alumno en problemas bien planteados que necesitan ser una construcción auxiliar. En primera instancia se busca que el estudiante se dé cuenta, de que no se puede construir un polígono regular de n lados, para algunos n específicos, por lo tanto primero se le pide que haga construcciones de 7, 11, 13 lados entre otras con triángulos congruentes. para que encuentre algunos valores con los que no se puede formar un polígono regular de n lados, sin el software se nos hubiera hecho imposible construir tales figuras, lo que a su vez hubiera implicado que el alumno no encontrara un contraejemplo a la proposición: "todo polígono regular se puede construir de manera exacta". En la actividad polígonos el software debería de ser una herramienta básica, para que el alumno pudiera construir polígono con 7, 11 y 13 triángulos, y se diera cuenta que por más que intente cerrar el polígono, este siempre va a contar con una pequeña abertura, además de que a partir de ello tenía que darse cuenta que el número $360/7$ es un número irracional. También anteriormente vimos que existían tres enfoque que le podemos dar al estudio de la geometría, inclusive introducimos el caso de Charlotte y Marie, en el cual no sabíamos cuál de las dos tenía la respuesta correcta, e inclusive llegamos a la conclusión de que

cada una de ellas tenía la razón dependiendo de cuál geometría se ocupaba para medir. Nuestro trabajo radica principalmente en la geometría 1, en la que el alumno tiene que deducir sus respuestas a través de analogías, construcciones y ejemplos dejando un poco de lado la demostración formal. El software nos permitió adentrarnos de una manera más fácil en el estudio de las construcciones y ejemplos que les mostramos a los estudiantes, a tal grado que inclusive podían interactuar con las mismas, realizando algunas construcciones de los polígonos, así como manejar el ángulo α , para ver la parte que no cierra en el polígono si es el caso.

En nuestro trabajo, la gran mayoría de los problemas que se hicieren fueron de temas específicos, de los cuales esperábamos que los alumnos fueran capaces de encontrar los resultados más generales. En los problemas de temas específicos, es donde el software tiene una gran aplicación, al mostrarnos de manera gráfica las situaciones que se presentan en los problemas; como por ejemplo en la actividad construyendo polígonos, nos ayudó a que el estudiante encuentre los datos necesarios para graficar, sin la necesidad de dárselos personalmente. En la actividad construyendo polígonos le permitió al estudiante construir figuras geométricas a partir de una serie de triángulos congruentes, mientras que en la actividad construyendo polígonos, El software le dio al estudiante la posibilidad de ver y acomodar triángulos congruentes para la formación de un polígono regular.

Los métodos de solución de problemas así como las soluciones, en muchas ocasiones son muchas para un solo problema, lo cual hace más sencilla la tarea de encontrar soluciones para los distintos problemas que se han planteado. Para nuestro caso el software representó una herramienta cargada de ejemplos de cómo construir un polígono regular a través de un triángulo isósceles base, esto hizo más sencilla la tarea de buscar una solución, dado que nos ejemplifico la situación, mostrándonos de manera gráfica algunas de las propiedades que deben de tener los triángulos base con los que se puede construir un polígono regular de n lados, así como también nos muestra que para algunos n el polígono no cierra, y que además entre mayor número de decimales le introduzcamos al ángulo α entonces menos será la abertura que quede en el polígono, situación que nos

induce a pensar que el ángulo α es un número irracional y prácticamente este es el camino a seguir para la demostración formal.

En la educación basada en la solución de problemas, una de las habilidades que se espera que el alumno desarrolle, es la capacidad de ser autosuficiente sin necesidad de contar con un profesor de cabecera. Nuestras actividades en general, están hechas para que el alumno valla siguiendo una secuencia lógica, en la que se plantea claramente lo que se espera que el alumno haga, y así esta valla tomando la sucesión de problemas, y con base en ellos se encamine hacia el aprendizaje de algunos conocimientos necesarios, sin necesidad de que sus expositores intervengan. Y como tal, el software es una buena herramienta para que atrevas de las figuras que se le presentan, el estudiante se responda así mismo, sobre si alguna de las propiedades que está pensando se cumple.

Una de las características que se manejan en contra del uso del método de aprendizaje basado en la solución de problemas radica en que los grupos con los que se trabaja son muy numerosos, además de que el tiempo necesario para ver un tema con este método se vuelve mayor del que si se ocupa en la forma tradicional. En nuestro caso el software nos permitió subdividir el grupo en equipo de dos compañeros por lo general, de forma que aunque era numeroso, se trabajó también como si tuviéramos varias veces dos personas, haciendo nuestro punto de referencia los equipos de 2 personas y no el grupo entero.

VI.2.6. Limitaciones que se encontraron al trabajar con el software de geometría dinámica en el Conalep II, Morelia.

Aun con todas las ventajas que trajo con sigo el uso del software de geometría dinámica, encontramos que la mayoría de las respuestas de los estudiantes, no son las que esperábamos, incluso muchos de ellos, si pusiéramos una calificación normal, hubieran reprobado, de esto deducimos que el método de aprendizaje basado en la solución de

problemas, no se desarrolló de la mejor manera en nuestro espacio muestra, sino que tuvo algunas deficiencias, por las cuales el estudiante no obtuvo resultados favorables.

Ya anteriormente observamos, las principales características de nuestro espacio muestra, así como también sus limitaciones, en alguna ocasión mencionamos que el alumno realmente considera al polígono como una sucesión de lados, este conocimiento erróneo fue culpable de que el estudiante no siguiera a la perfección las metodologías en la actividad polígonos, donde se le plantearon entre otras cosas, tres figuras en las que tenía que descubrir algunas de las propiedades de los polígonos.

En la actividad el problema de la caja, una situación importante es que el alumno no pudo realizar una gráfica, que representará el comportamiento del movimiento de la caja, esto se debió como ya anteriormente escribimos, a que el estudiante en primera instancia no sabe tomar datos partir de una figura dinámica, en segunda instancia tampoco recordó en ese momento, que una característica importante aunque no necesaria, es que cualesquiera dos puntos adyacentes de la variable independiente deben de estar a la misma distancia, tampoco tomaron una escala fija en la variable independiente, graficando distintos intervalos en diferente áreas y por si fuera poco, no acomodaron los puntos de la variable independiente de manera creciente, sino más bien aleatoriamente. Todo lo anterior impidió que el alumno obtuviera una gráfica que fuera consistente con el movimiento de la caja, y en consecuencia, en este apartado el software falló, aunque se debió meramente a factores externos a él.

En muchas de las partes, como en el fundamento teórica de la actividad polígonos, se tiene planeado que el estudiante ocupe algunos conocimientos básicos que de seguro aprendía durante su curso de geometría euclidiana, desgraciadamente vemos que en muchas ocasiones esto no ocurre así, y al no aplicar ese conocimiento básico corre el riesgo de no poder contestar la pregunta, situación que lo lleva a una respuesta en blanco o con argumentos falsos.

En las preguntas cuya solución de la respuesta se basa en una figura, ya sea hecha con el software o presentada con anticipación, se esperaba que el estudiante fuera capaz de tomar de la figura las propiedades principales de la misma, para realizar un análisis

analítico de las mismas, del cual obtuviera la respuesta correcta, esta situación no ocurrió así, los alumnos únicamente intentaron dar su respuesta a partir de la observación directa de la figura, y por lo tanto en la mayoría de los casos sus respuestas eran erróneas. Un prejuicio frecuente radicó en que los estudiantes tomaron como un valor exacto, el número $360/7$, y como además no conocen las propiedades de los números irracionales, entonces era imposible que tomen al número $360/7$ como un irracional. Este resultado se esperaba que el alumno lo obtuviera a partir de la manipulación del software, de forma que aunque la conclusión que encontraron algunos alumnos fue cierta a medias, ya que vieron que el polígono no cerraba, aun consideraron que esto era producido, porque el número $360/7$ tenía una calidad finita de decimales, y no por ser irracional, de donde finalmente observamos que aunque el software sí cumplió lo que esperábamos de él, no fue suficiente para dar una respuesta correcta, debido a los prejuicios del alumno.

Finalmente una situación básica en la actividad construyendo polígonos, era que el estudiante pudiera observar la relación entre n y θ , para esto debía de llenar una tabla, con los valores de θ para distintos valores de n , y aunque la gran mayoría de los alumnos llenó satisfactoriamente la tabla, con ayuda del software, la relación entre n y θ no la obtuvieron bien, esto se debió posiblemente, a que los alumnos no hicieron caso de la tabla, e intentaron dar su respuesta a través de intuiciones a modo de adivinanza.

VI.2.7. Opinión de los estudiantes del Conalep II, Morelia, acerca del uso del software Geogebra.

En la última pregunta de la actividad el problema de la caja, al estudiante se le cuestiona sobre este hecho de la siguiente manera: "Discutir sobre las ventajas y limitaciones que tiene el modelo del problema elaborado con el software de geometría dinámica y sin él". Por el contenido de esta pregunta, la tomaremos como nuestra principal fuente para este apartado.

Las limitaciones que encontraron los alumnos fueron muy superficiales, hay un equipo que escribía: "su limitación es que hay que tener conocimiento de su forma de uso". En

esta opinión se resume el sentir general, todos vieron que si bien es necesario invertir un poco de tiempo para aprender a manejar el software, después hay muchos beneficios.

Un alumno únicamente escribió: "solo es cuestión de aprenderlo a manejar". En esta respuesta se ve claramente que el alumno no encontró ningún inconveniente, salvo el tratado anteriormente, y sin embargo encontró muchos beneficios, a tal grado de se contuvo de mencionarlos a todos. Yo creo que este es el sentir general, aunque no lo expresaron abiertamente.

Desde luego que para este tipo de preguntas existen respuestas muy variadas, pero todas mencionan de manera directa o indirecta las palabras: "es más fácil". De manera que aunque consideren que se pierde un poco de tiempo al aprender a manejar el software, de todos modos las ventajas que se encuentran son muchos mayores, así como también encuentran en él, un auxiliar que les ayuda a realizar parte del trabajo.

Algunas respuestas características que nos dieron los estudiantes son las siguientes: "pues su ventaja es que es muy dinámico y práctico para elaborar problemas", "sirve para confirmar la teoría de que con el espacio designado del hueco, es imposible lograr que entre tal caja en el hueco designado en pocas palabras: no cabe la caja", "es más fácil comprender un problema de matemáticas ya que te permite planear las soluciones de diferentes maneras", "que nos ayuda a hacer más fáciles los trabajos y si tuviéramos el problema tendríamos que dibujarlo", "que es más fácil y nos ayuda a darnos una idea más profunda y así mismo podemos ver las medidas para saber si cabe".

En las pasadas respuestas vemos las siguientes características:

- Los estudiantes consideran que es más fácil trabajar con la ayuda del software que sin él.
- Es una herramienta que les permite ver de manera intuitiva el comportamiento de una figura geométrica.
- Excelente auxiliar al momento de dibujar una figura.
- Un gran apoyo para observar de manera dinámica propiedades de las figuras geométricas.

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES

En el presente capítulo mostramos algunos resultados importantes que revelados en las actividades en el transcurso del estudio. También se presentan las conclusiones generales obtenidas a partir del análisis de los datos recabados durante las actividades y, desde nuestro punto de vista, las características principales de la actividad realizada en el presente trabajo.

"Podremos alzarnos sobre nuestra ignorancia, descubriéndonos como criaturas de perfección"

VII.1. RESULTADOS IMPORTANTES REVELADOS EN EL TRANSCURSO DE LA ACTIVIDAD

Las actividades que les aplicamos a los alumnos, tanto del Conalep como de la preparatoria Melchor Ocampo, estuvieron realizadas conforme al método de enseñanza basado en la solución de problemas, y utilizando como herramienta auxiliar el software de geometría dinámica (GeoGebra), en ellas como ya muchas veces lo hemos mencionado anteriormente, buscábamos que el alumno, a través de la solución de algunos problemas, logran formular ciertas leyes matemáticas, para posteriormente buscar su comprobación a partir de una serie de ejercicios más, desafortunadamente en muchos de los casos esto no pudo ocurrir de la manera prevista, debido a situaciones como las siguientes:

- El alumno no contaba o no se acordaba en ese momento, de algún resultado básico de su curso de geometría euclidiana, mismo que necesitaba de manera urgente para completar alguna deducción lógica.
- Es muy raro que un estudiante siga una deducción lógica completa, perdiéndose en algún paso intermedio de la misma, que a su vez ocasiona que no encuentre un resultado básico, y en consecuencia que escriba una serie de respuestas erróneas.
- Se esperaba por parte del alumno que ocupara las figuras como una herramienta gráfica, en la cual observara de manera intuitiva algunas propiedades básicas del objeto representado, y que las ocupará para realizar un análisis analítico, situación que no ocurrió de esa manera, conformándose con únicamente intentar buscar las propiedades de la observación intuitiva de las figuras, sin realizar ningún tipo de razonamiento lógico.
- El estudiante contaba con conocimientos erróneos que entorpecían el buen funcionamiento de sus deducciones, (al basar su respuesta en un resultado falso es obvio que su respuesta va a estar mal).
- También todos sus conocimientos aprendidos durante sus cursos de geometría euclidiana, con sus diversas interpretaciones que hacen, los consideran como dogmas de fe, que toman como válidos en muchos casos que se salen de su rango de aplicación y al

considerarlos validos en situaciones erróneas, es casi imposible que el alumno se despeje de ellos.

- En la actividad el problema de la caja, durante la metodología que se desarrolla para que el alumno logre realizar una gráfica, encontramos una muy clara deficiencia de los estudiantes para encontrar datos en figuras dinámicas, además de que no acomodaron los valores de la variable independiente, sino que los dejaron aleatorios, y graficaron distintos intervalos en distintas áreas de la gráfica.
- La mayoría de las respuesta(a menos que al estudiante se le pida lo contrario) son simples, que no abarcan más de una idea, que además por lo regular es la más fácil de encontrar.
- Desafortunadamente hay ocasiones en las que el alumno no entiende el problema ni siquiera las instrucciones a seguir, pero por algún motivo ajeno a nuestras posibilidades, no le da confianza preguntarle a los expositores sobre el tema que se está tratando.
- También hubo estudiantes que ante preguntas en las que debían de escribir su opinó, no lo hacía así, esto debido posiblemente a que no sabían como expresarse.
- Aunque esto fue para la minoría de los estudiantes, algunos de ellos necesitaban un poco más de tiempo, para pensar en algunas soluciones.
- En la actividad polígonos, se cometió un error al redactar algunas preguntas, en las se les cuestiona a los alumnos, sobre los tipos de triángulos con los que se forma la figura 1, dos de los que escribimos son líneas rectas, y sin embargo hubo alumnos que los tomaron como triángulos equiláteros e isósceles. Este es claramente un error de observación.
- También existen personas dentro de nuestro espacio muestra, que llegan a conclusiones erróneas, debido a que no entendieron los argumentos básicos que se les presentan a lo largo de la actividad.
- Los pupillos no hacen ningún tipo de comprobación a sus respuestas.
- Para evitar contestar preguntas que llevan consigo algún tipo de análisis, los estudiantes contestan de manera errónea la pregunta antecesora de falso o verdadero.
- Se contradicen en respuestas parecidas en situaciones parecidas, lo cual es producto de que abordan el problema de distinta manera.
- No siguen las instrucciones al pie de la letra.

También existieron algunas ventajas, que sin el software se nos fuera hecho, una tarea más ardua la actividad, entre ellas destacan las siguientes:

- Nos permitió construir las figuras que les mostramos a los estudiantes para su análisis.
- Fue posible estudiar la abertura que queda en algunos polígonos formado por una cantidad n de triángulos congruentes (para algunos n específicos como el 7), así como el comportamiento de la abertura al aumentar la cantidad de decimales del ángulo alfa.
- El alumno pudo interactuar con el software, para elegir la orientación correcta que debe de mostrar cada uno de los triángulos congruentes, para la formación del polígono.
- Atraves de la manipulación del parámetro alfa, el estudiante pudo encontrar de manera casi exacta, el valor del ángulo alfa del triángulo base para construir un polígono regular de n lados.
- Los integrantes de nuestro espacio muestra observaron la forma de los distintos polígonos, que se forman con una cantidad n de triángulos congruentes, manipulando el valor de los ángulos alfa.
- A partir de la manipulación de las figuras, fue posible que el estudiante observará, las características del polígono que hacen que únicamente sea posible construirlo a partir de un triángulo isósceles base.
- Durante la actividad el problema de la caja, fue un importante auxiliar que nos ayudó a obtener datos de manera intuitiva, sin necesidad de antes solucionar el problema.
- Nos ayudó a comprender de manera no formal el comportamiento que sigue la caja, al bajar de la superficie que tiene cierta inclinación.
- Manipulando las barras de desplazamiento, el software dibuja una serie de polígonos tanto regulares como irregulares.

También el método de aprendizaje basado en la solución de problemas ofrece algunas ventajas como las siguientes:

- Qué el alumno valla construyendo su propio conocimiento a partir de la solución de problemas.
- Realice una serie de heurísticas, en las cuales analiza el problema, plantee soluciones, y compruebe sus respuestas.

- Introduzca el estudio de casos particulares, para obtener propiedades que después utilice en la solución del problema general.
- Aunque no necesariamente para todo problema, puede meter metodologías o métodos de solución de problemas, con los cuales resuelva una gran gama en el universo general.
- Se puede desfragmentar el grupo, de forma que trabaje por parejas o en equipos de tres personas.
- Se hace factible pasar por la geometría 1 y geometría 2 en la misma actividad.
- Un conocimiento complejo, se puede obtener por deducción lógica partir de una serie de conocimientos más sencillos.
- Se da la posibilidad de que el alumno autocritique sus respuestas, al realizar problemas de comprobación.
- El estudiante se ve más cómodo, al ver los problemas a los enfrenta su compañero, que posiblemente también sean los propios.
- Se desarrolla el razonamiento analítico por parte del alumno, debido a que tiene que responder con base a deducciones lógicas.

Aunque también se encuentran algunas deficiencias que ya anteriormente discutimos y son las siguientes:

- El plan de estudios de la educación básica es muy largo, y como el método de aprendizaje basado en la solución de problemas es muy tardado, está latente la posibilidad de tener programas inconclusos.
- Los salones de clases por lo regular tienen una cantidad exagerada de individuos, terreno no propicio para el presente método de aprendizaje.

Otras características que se salen de todos los contextos anteriores son las siguientes:

- La educación básica en nuestro país, esta monopolizada por un grupo de individuos.
- Normalmente el profesor sigue métodos de aprendizaje basados en la memorización de leyes y algoritmos de las leyes matemáticas.
- Aunque los profesores si cuentan con cierta preparación para estar frente al salón de clases, muchos de ellos en realidad aprenden el manejo al grupo a prueba y error en el salón de clases.

VII.2. OPINIÓN DEL AUTOR SOBRE LAS CARACTERÍSTICAS

PRINCIPALES QUE SE ABORDARON EN EL TRABAJO

La realización del presente trabajo fue una tarea ardua, cargada de muchas dificultades, tanto en la realización del mismo, como en la aplicación de las actividades, que sin embargo al final se lograron aplicar. Es muy triste encontrar algunas escuelas que no cuentan con aula de computación disponible en algún horario fuera de clases, o en el peor de los casos ni siquiera cuentan con ella, además de que encontrar un grupo que no cuente con sobrepoblación de alumnos, también es muy difícil de encontrar, en este nivel la demanda excede a la oferta. También situaciones ajenas a dicha actividad, como la cantidad reducida de horas de clase, frente al gran tamaño de los programas de estudio, hace que el profesor titular se perturbe un momento ante la solicitud de cuatro horas para realizar actividades ajenas a su plan de estudio. Todos estos problemas a los que nos enfrentamos se pudieron haber evitado con acciones sencillas como las siguientes.

- Que todos los alumnos que cuenten con una computadora personal propia la pueden ocupar durante sus clases.
- Si bien el número de horas que contempla el plan de estudio de educación básica, es hasta excesivo, encontramos que el número real de horas trabajadas se encuentra muy por debajo. Ante este problema desde luego que la mejor alternativa de solución sería aumentar el total de horas trabajadas, situación que es complicado que ocurra, otro camino estaría dado en regularizar tales horas, así por ejemplo, el calendario escolar está formado por 200 días, por mencionar alguna cifra, los primeros 120 los tomen como días laborables sin suspensión, y en los restantes ochenta se hagan las demás actividades, de modo que el maestro tenga en cuenta de antemano que únicamente cuenta con un determinado tiempo inferior, y por lo tanto lleve otro ritmo en sus clases, para que al final si todavía queda algún día laborable, en los ochenta días de las diversas actividades, el profesor únicamente los ocupe para repasar algún tema que no quedo claro.

- La solución más general ante la sobrepoblación de estudiantes, sería disminuir el número de alumnos con los que cuenta cada salón, desafortunadamente las escuelas no cuentan con suficiente material humano ni de estructura, para hacer frente a una mayor cantidad de grupos. Aunque el profesor si les puede pedir a sus alumnos en principio, que preparen el tema a estudiar antes de entrar al aula (Para revisar esto, les puede dejar tarea de uno o dos problemas, y calificarlos según la coherencia de sus argumentos), en segunda instancia puede dividir el grupo en varios subgrupos, en los que se dialoguen, las respuestas a los programas que cada uno de los alumnos encontró, así como la verdad o falsedad de las mismas. En una tercera instancia aparece el profesor como un vehículo en el que los alumnos despejan dudas, prejuicios erróneos, buque la solución correcta del problema, así como también les dé una explicación, en todos los temas que no hayan quedado claros.

Una característica básica de los alumnos con los que se hicieron las actividades, es la falta de conocimientos que nosotros consideramos como indispensables para que el alumno pase su curso de geometría euclidiana, además de ser muy sencillos y muy útiles, en esta categoría de resultados encontramos algunos tales como los siguientes: los triángulos isósceles tienen dos lados iguales y uno desigual, , la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo miden 180 grados, el triángulo equilátero tiene sus tres ángulos interiores con la misma medida, un polígono regular de n lados tiene exactamente n vértices, entre otros muchos conocimientos no menos importantes. Para esta situación el expositor y el profesor en general se encuentra en una situación crítica, por un lado, no puede regresarse a explicarle al alumno cada conocimiento que no domine, debido a que el tiempo que pasa frente a él es muy corto. En segunda instancia tampoco puede dejarlo con la duda del conocimiento que no domina, debido a que esto puede acarrear una respuesta errónea por parte de él. En esta disyuntiva el profesor puede ocupar alguna de las siguientes opciones.

- Darle al alumno una serie de material extra, en el que siga el método de aprendizaje basado en la solución de problemas, con los temas que vaya a ocupar durante la actividad, para que este lo estudie en su casa

- En la actividad que se le va aplicar al estudiante, puede escribir como notas los resultados importantes que valla aplicar y pseudo explicarle como se utilizan.
- En lugar de aplicarle la actividad basada únicamente en el tema a estudiar, puede introducir incisos en los que el alumno valla recordando los conocimientos auxiliares.
- Dividir la actividad en secciones, cada uno de ellas con sus respectivos temas: fundamento teórico, actividades con software, conclusiones, en la que si el alumno tiene necesidad de algún resultado que encontró anteriormente decirle de manera clara donde está el resultado.

Otra situación importante que encontramos al trabajar con los alumnos, fue que estos en la mayoría de las situaciones responden con respuestas sencillas en las que únicamente engloban una idea. Esto se puede corregir si al alumno le pedimos de manera abierta que dé respuestas completas cambiando frases como: ¿qué es un polígono?, ¿por qué esta figura no es polígono?, ¿de qué tipo de triángulo es el siguiente?, por estas otras: menciona todas las propiedades con las cuenta un polígono, cuales propiedades no cumple la figura anterior para ser un polígono, el siguiente triángulo cumple las propiedades para ser llamado de dos formas ¿cuáles son esas?.

La habilidad de seguir deducciones se va aprendiendo con el tiempo atreves de la práctica, por lo tanto para conseguirla no existe ninguna estrategia, únicamente utilizarlas frecuentemente.

En el transcurso de las actividades nos dimos cuenta, que no importa el número de integrantes con los que se formen los equipos, la calidad de sus respuesta permanece constante, hecho que se me hizo hasta cierto sentido raro, dado que esperaba que entre más alumnos conformarán el equipo, mas ideas surgían y en consecuencia una mejor respuesta optenian al juntarse las ideas de varios integrantes. Pero si las respuestas no mejoraron, esto quiere decir dos cosas:

- Que aunque el salón es inhomogenio donde cada quien puede dar respuestas independientes, si promediáramos las calificación promedio del salón contestando las actividades individualmente, en equipos de dos personas, de tres y de cuatro, entonces estas permanecerían casi constantes. Tal vez una condición necesaria para que se cumpla esta ley es que cada alumno elija a su pareja.

- A mayor cantidad de alumnos menor tiempo dedicado a la resolución del problema. Tal vez una condición necesaria para que se cumpla esta ley es que cada uno de los alumnos elija a sus compañeros.

Con base en estas propiedades el profesor, puede elegir equipos de 2, 3, 4 personas de manera indistinta, aunque con equipos más grandes puede perder el control de la misma.

Por último algunas recomendaciones más son las siguientes:

- Realizar la actividad de tal forma que el alumno más que aprender, socialice con las leyes de las matemáticas a través de juegos o adivinanzas, en los que si bien realice un esfuerzo mental, también debe de perder por un momento la noción de que está aprendiendo algo nuevo.
- Manejarle al alumno los conocimientos y leyes matemáticas en el lenguaje más sencillo posible, a través de cuentos, para posteriormente manejárselo con todo el rigor que traen consigo las matemáticas, pero ya las va a tomar como viejas conocidas, incluso es necesario hacerle ver las similitudes entre las ideas intuitivas que les practicamos y las formales.
- Motivar al alumno con premios y reconocimientos cuando haga las cosas bien, a su vez tutorarlo cuando se desvíe del buen camino.
- Elevar su autoestima, mostrándole que si algún problema no le sale, es porque en realidad el problema es difícil, o que no tiene los conocimientos necesarios, pero con el transcurso del tiempo los ira aprendiendo.
- Desarrollar los conocimientos complejos a través del análisis de varios sencillos, que finalmente concluyan con el conocimiento complejo (Aunque esta estrategia no nos ayudó en la práctica hecha, debido a las características de nuestro espacio muestra).
- Permitirle al alumno que este plantee algunos de los problemas a resolver, con las condiciones de que le interese encontrar la solución, sea posible encontrarlo de manera palpable en el ambiente, sea capaz de resolverlo y entre mayor nivel de dificultad cuente también sea mayor la calificación que obtenga.
- Que los problemas con los que se trabaje en el aula,, para este nivel, sean fácilmente palpables por el estudiante, para una mejor comprensión del mismo, para posteriormente

pasar a la parte formal de las matemáticas pero el alumno ya ha entendido antes el problema.

BIBLIOGRAFÍA

- Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 25-45.
- Begle, E. G. (1979). *Critical variables in mathematical education: Findings from a survey on the empirical literature*. Washintong, D.C.: Mathematical Association of America.
- Crisan, C., Lerman, S., & Winbourne, P. (2007). Mathematics and ICT: A Framework for conceptualising *Secondary School mathematics teachers` classroom practice technology*, Pedagogy and Education. 16, 21-39.
- Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of development of Geometric thought *N.T.C.M.: Learning and teaching geometry, K12*, N.T.C.M., Reston, pp. 1-16.
- Drivers, P., Doorman, M., Boon, P, Reed, H. 7 & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich Mathematics class room: *Educational studies in Mathematics*, 75, 213-234.
- Duval, Raymond, (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- Fredericksen, N. (1984). Implications of cognitive theory for instruction in problem solving. *Review of Educational Research*, 54, pp. 363-407.
- Hinsley, D., Hayes, J., y Simon, H. (1977). From words to equations. Meaning and representation in algebra word problems. En P. A. Carpenter y M. A. Just(Eds.), *Cognitive Processes in Comprehesion*. Hillsdale, NJ: Erbaum.
- Kasten. S. E., & Sinclair N. (2009). Using dynamic geometry software in the mathematics classroom. A study of teachers choices and rationales. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 16, 133-143.
- Kuzniak Alain, (2012). Understanding the nature on the geometric work through its development and its transformations . *International Congress on Mathematical Education*.
- Larkin, J. H. (1982). The cognition of learning physics. *American Journal of Physics*, 49, 534-541.

- Miller, G. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, 63, pp. 81-97.
- Monaghan, J. (2004). Teachers' activities in technology-based mathematics lessons. *International Journal of Computers for Mathematics learning*. 9, 327-357.
- Perkins, D. N. y Salomon G. (1987). Transfer and teaching thinking, En D.N. Perkins, J. Lochhead, y J Bishop (Eds.), *Thinking: The second international conference* (pp 285-303). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Polya, G. (1965). Let us teach guessing, videotape, *The Mathematical Association of America*. Washington, D. C.
- Rabinowitz, M. & Glaser, R. (1985). Cognitive structure and process in highly competent performance. In F. D. Horowitz & M. O'Brien (Eds), *The gifted and talented: Developmental perspectives* (pp. 75-98). Washington, DC: American Psychological Association.
- Santos T. L.M., (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. 2ª edición. Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- Schoenfeld, A. (1983). *Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendation, and an annotated bibliography*. Washington, D. C.: Mathematical Association of America.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Trouche, L., & Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education: flash back into the future. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 42, 667-681.
- Usiskin. (1982). Van Hiele levels and achievement in secondary school Geometry. Department of Education, University of Chicago.
- Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight*. Academic Press, New York, 1986.

ANEXO. Actividades aplicadas

NOMBRES: _____

FECHA: _____

CONSTRUYENDO POLÍGONOS

La pregunta que tratamos de responder en esta actividad es:

¿Se podrá construir un polígono con triángulos congruentes?

Si se puede, vamos a ver qué condiciones debe cumplir un conjunto de triángulos para poder construir con ellos un polígono. Si no se puede, deberán argumentar por qué no se puede.

1. Abran el archivo de GeoGebra denominado **Actividad_1.ggb**. En él se encuentra trazado el triángulo ABC. Además tienen muchos otros triángulos iguales a él, que pueden ver activando las casillas que corresponden a cada uno de ellos. Su tarea será construir nuevas figuras usando esos triángulos.

Los triángulos $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... se pueden trasladar si los toman del vértice rojo, y pueden girarlos si los toman del vértice azul (No pasa lo mismo en el triángulo ABC). Desplácenlos para que vean cómo funciona.

A) ¿Cuántos triángulos se ocupan para formar un hexágono regular? _____

B) ¿Cuánto debe medir el ángulo $\angle BAC$ en el caso del hexágono regular? _____

C) ¿Cuánto miden los otros dos ángulos del triángulo ABC en el caso del hexágono regular?

$\angle ABC =$ _____

$\angle ACB =$ _____

D) ¿Cuáles son las diferencias entre un hexágono regular y uno que no es regular?

E) ¿Cuántos triángulos se necesitan para formar un polígono regular de 13 lados? _____

2. Llena la tabla siguiente, indicando cuál es el valor del ángulo que te permite construir cada una de las figuras indicadas.

Figura	Pentágono regular	Hexágono regular	Heptágono regular	Nonágono regular	Cuadrado	Triángulo equilátero	Octágono regular
No. De lados (n)	5	6	7	9	4	3	8
Ángulo (θ)							

3. Si el número n de lados aumenta, ¿qué sucede con los valores del ángulo θ ?

4. Selecciona el tipo de relación entre n y θ . Considera a $k \neq 0$ como una constante.

a) $n=k\theta$

b) $n=k-\theta$

c) $n=\frac{k}{\theta}$

5. Usando los datos de la tabla del ejercicio 2, obtén el valor de k y escribe la fórmula que relaciona n y θ . _____ Comprueba que dicha fórmula funciona llenando la tabla siguiente y comparando sus valores con los de la tabla anterior.

Figura	Pentágono regular	Hexágono regular	Heptágono regular	Nonágono regular
No. De lados (n)	5	6	7	9
Ángulo (θ)				

6. ¿Se puede construir un polígono regular si sólo contamos con un triángulo? _____. Si la respuesta fue sí, ¿cuál es el polígono regular? _____

7. Forma un polígono regular de 15 lados, y:

- a) Una circunferencia de radio AC y centro en A;
- b) Una circunferencia de radio AB y centro en A; y,
- c) Una circunferencia de radio CB y centro en B.

¿Cómo son esas las circunferencias? Justifiquen sus respuestas. _____

POLÍGONOS

NOMBRES:

FECHA:

1) Construye un polígono y dibújalo enseguida.

2) Con base en tu construcción, intenta dar una definición de polígono.

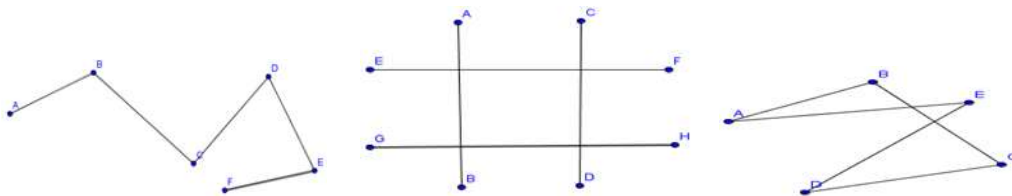
3) En un polígono los puntos de unión entre dos lados se llaman:

Vértices ()

Lados ()

Hipotenusa ()

4) a) Observa las siguientes figuras e indica si se trata de un polígono o no, de acuerdo con tu definición en el inciso 2).



b) Sin hacer caso a tu definición anterior, ¿consideras que la figura es un polígono?

Primera:

Segunda:

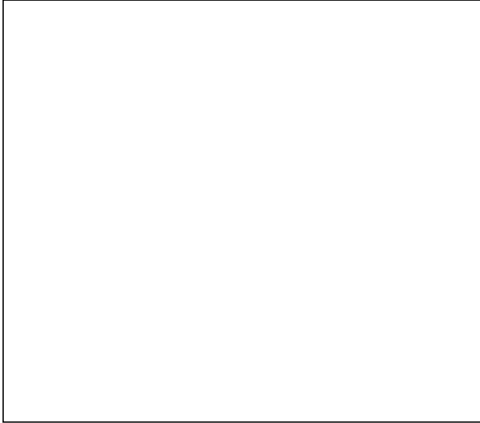
Tercera:

c) Si contestaste que no, ¿qué característica hace falta para completar tu definición de polígono?

d) En un triángulo isósceles dos ángulos son iguales y el otro desigual. Si los ángulos iguales miden 45° cada uno, ¿Cuánto medirá el ángulo restante? _____

e) ¿Un triángulo isósceles puede ser también un triángulo rectángulo? ____ ¿Por qué?

- 5) Algunos ejemplos de polígonos regulares son: un cuadrado, un triángulo equilátero, un pentágono. Construye un triángulo equilátero, un cuadrado o un pentágono y con base en tu construcción identifica qué características tiene un polígono regular. Lístalas a continuación:



- 6) La figura 1 corresponde a un cuadrado y la figura 2 corresponde a un pentágono.

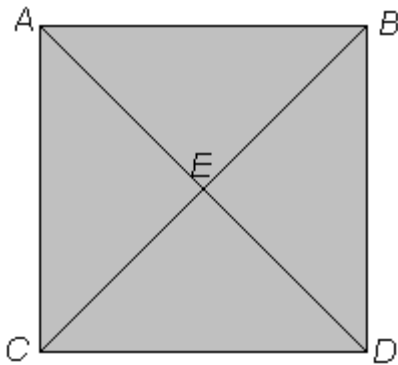


Figura 1

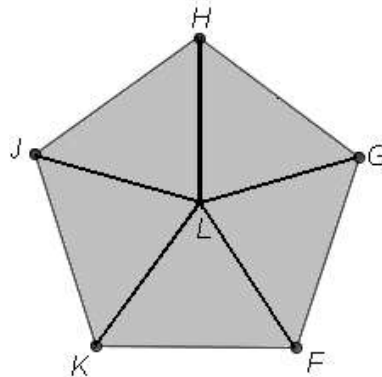


Figura 2

- a) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo $\triangle ABC$?
 Isósceles () Equilátero () Escaleno () Rectángulo ()
- b) ¿Y el triángulo $\triangle BCD$?
 Isósceles () Equilátero () Escaleno () Rectángulo ()
- c) Si en el triángulo $\triangle ABC$, el lado AB mide 10 cm, ¿cuánto mide el lado AC? _____
- d) ¿Cuánto miden Cada uno de los ángulos del triángulo $\triangle ABC$? _____
-
- e) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo $\triangle ABE$? _____
- f) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo $\triangle BEC$? _____
- g) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo $\triangle CED$? _____

h) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo $\triangle DEA$? _____

Observa la figura 2, y contesta lo que se te pide:

i) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo $\triangle KLF$? _____

j) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo $\triangle FLG$? _____

k) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo $\triangle GLH$? _____

l) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo $\triangle HLJ$? _____

m) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo $\triangle JLK$? _____

n) ¿Qué características comunes tienen todos estos triángulos? _____

o) En las figuras 1 y 2 hemos observado que podemos construir un cuadrado y un pentágono utilizando triángulos unidos por un vértice, ¿se podrá construir un polígono regular de ocho lados a partir de un triángulo base? ____ ¿Por qué? _____

p) ¿Se podrá construir un polígono regular de 7 lados a partir de un triángulo base? ____ ¿Por qué? _____

q) Si tu respuesta fue afirmativa señala ¿cuál es la medida del ángulo α correspondiente al triángulo isósceles base para un polígono regular de siete lados? _____

Actividades con el software

Realiza las siguientes actividades y contesta las preguntas involucradas:

1. ¿Existe otro triángulo, aparte del isósceles, que se pueda utilizar como base para construir un polígono regular? _____ Discute tu respuesta _____

2. Abre el archivo denominado polígonos2.

a) Manipula la barra de desplazamiento correspondiente a α hasta el valor de 60.

b) Manipula la barra de desplazamiento de n por todos sus valores posibles.

c) Fija el valor de n hasta 6.

d) La figura formada es un polígono regular, ¿cómo se llama? _____

e) ¿Qué pasa con la figura si n se fija en 7? _____

f) Manipula la barra de desplazamiento correspondiente a n hasta que obtengas un valor igual a 4.

g) Manipula la barra de desplazamiento de α pasando por todos sus valores posibles.

h) Registra el ángulo α que se necesita para formar un polígono regular de:

4 lados: $\alpha =$ _____ 3 lados: $\alpha =$ _____

a) Nuevamente manipula la barra de desplazamiento de n hasta llegar a un valor de 7. Posteriormente manipula la barra de desplazamiento de α pasando por todos sus valores y registra aquel en el que se formó un polígono regular de 7 lados $\alpha =$ _____.

b) ¿Es exacto este valor para α ? _____ ¿Cuál crees que debería ser el valor exacto de α y por qué?

c) Repite la actividad anterior para $n = 11$ y $n = 13$. Registra los datos en la siguiente tabla:

Número de lados (n)	7	11	13
α obtenido con la máquina			
Tu valor para α			

Conclusiones

1. Calcula $360/7$ _____

2. Este resultado ¿es exacto? _____ Discute tu respuesta.

3. ¿Hay alguna relación entre la imposibilidad del cálculo exacto y la imposibilidad de construir un polígono regular preciso de 7 lados?

4. ¿Para qué valores de n , no es posible construir un polígono regular de n lados?

¿Por qué?

NOMBRES: _____

FECHA: _____

GRUPO: _____

Construcción de polígonos regulares utilizando triángulos isósceles

INSTRUCCIONES: Lee con atención y responde lo que se pide

Esta actividad les dará la oportunidad de:

- Utilizar las herramientas de Geogebra para analizar figuras geométricas
- Disecar polígonos en triángulos.
- Explorar y analizar las características de los triángulos que nos permiten construir polígonos regulares.
- Explorar y analizar las características de los polígonos regulares.

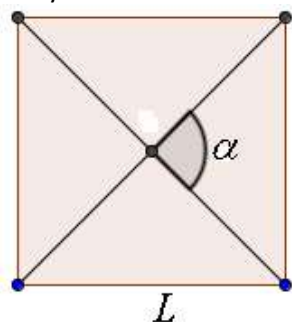


Figura 1

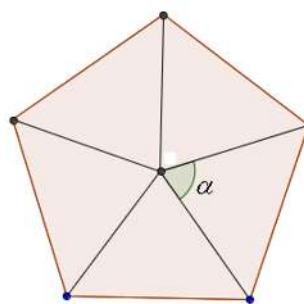


Figura 2

1) Observa las figuras y responde a las siguientes preguntas.

a) ¿Qué es un polígono? _____

2) ¿Cuándo decimos que un polígono es regular?

3) En la figura 1, ¿cuánto crees que mida el ángulo α ? _____ Discute tu respuesta.

4) ¿Cómo son los triángulos con que está formada la figura?

Equilátero ()

Isósceles ()

Escaleno ()

5) ¿Qué relación hay entre el ángulo α , el lado L , y los lados adyacentes a α ?

6) En la figura 2, ¿cuánto crees que mida el ángulo α ? _____ Discute tu respuesta.

- 7) ¿Puedes predecir, cuánto mediría el ángulo α , correspondiente al triángulo isósceles base para un polígono regular de ocho lados? _____ Discute tu respuesta.
-

Parte 2. Actividades con el software

- 8) Contesta las siguientes preguntas.
- a) ¿Existe otro triángulo aparte del isósceles que se pueda utilizar como base para construir un polígono regular? _____ Discute tu respuesta.
-

- b) Si usas como base un triángulo equilátero, ¿Qué polígono te resulta? _____
- c) Abre el software Geogebra.
- d) Construye un triángulo base con la herramienta polígono.
- e) Trata de construir un polígono regular con dicho triángulo base, ayudándote de la herramienta refleja objeto en recta.
- f) ¿Pudiste construirlo?, ¿a qué crees que se deba? _____
-

- 9) Realiza las siguientes actividades.
- a) Abre el archivo de Geogebra titulado “polígonos”.
- b) Manipula la barra de desplazamiento correspondiente a n , hasta que obtengas un valor de n igual a 4.
- c) Manipula la barra de desplazamiento de α pasando por todos sus valores posibles.
- d) Registra el ángulo α donde se forma un polígono regular de 4 lados y un polígono regular de 3 lados. $\alpha =$ _____ $\alpha =$ _____
- e) Nuevamente manipula la barra de desplazamiento de n , hasta llegar a los valores de 8.
- f) Manipula la barra de desplazamiento de α pasando por todos sus valores posibles y registra aquel valor de α con el que se formó un polígono regular. $\alpha =$ _____

- 10) Realiza las siguientes actividades

- a) Manipula la barra de desplazamiento de n , hasta que obtengas un valor de 7.
- b) Manipula la barra de desplazamiento de α , hasta que obtengas un heptágono.
- c) Aumenta el valor de L hasta 500.
- d) Da clic derecho sobre el botón que tiene este símbolo 
- e) Pon el puntero del ratón sobre cualquier parte de la zona gráfica, y con el botón derecho del ratón apretado, arrástralo de derecha a izquierda.
- f) Regresa el puntero del ratón lo más a la izquierda que te sea posible.
- g) Repite los dos pasos anteriores hasta que observes el fin del polígono
- h) ¿Tu construcción resultó ser un polígono? Discute tu respuesta.
-

11) Repite la actividad tres para $n=11$ y $n=13$.

Parte 3: Conclusiones

12) Contesta las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué número es $360/7 =$ _____?
- b) ¿Encuentras alguna relación entre el número encontrado en la actividad anterior y el problema de no poder construir un polígono regular de siete lados?
- c) ¿Para qué otro valor de n , no es posible construir un polígono regular de n lados?

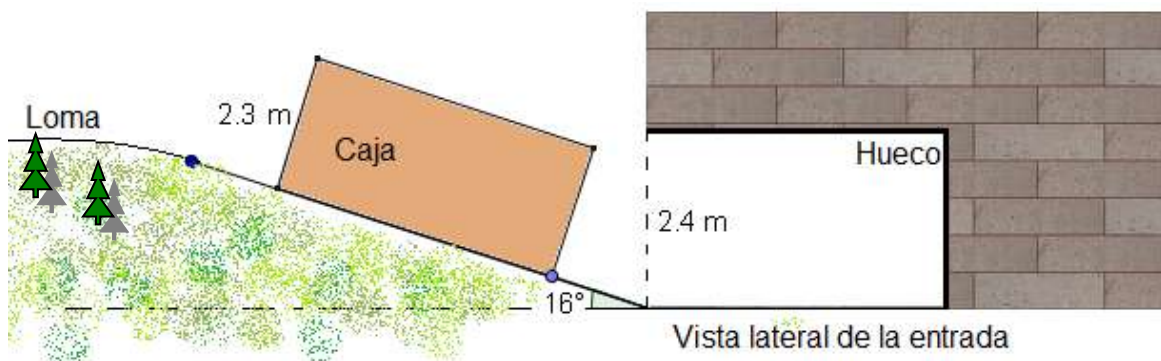
EL PROBLEMA DE LA CAJA

NOMBRES:

FECHA:

Juan está empujando una caja en una loma en busca de un lugar para guardarla. Descubre un buen lugar para meter su caja, este lugar es un hueco que esta debajo de la pared.

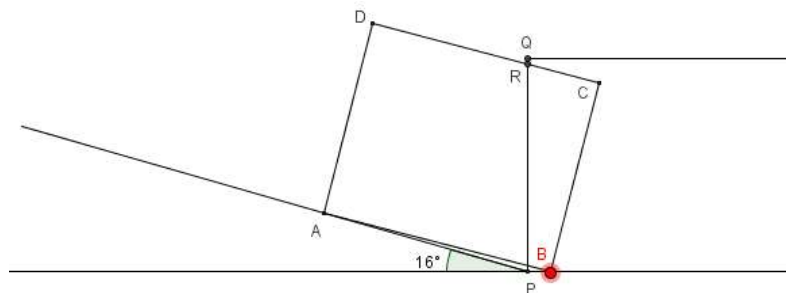
Su problema ahora es meter la caja dentro del hueco. El hueco mide 2.4 m de altura y la caja 2.3 m, pero la loma tiene una inclinación de 16° . **¿Podrá Juan meter la caja al hueco sin que la caja toque la pared?** Esta es la pregunta principal que Ustedes deberán responder.



Para trabajar con esta actividad, necesitan:

- El archivo Actividad_3.ggb, de Geogebra.
- Nociones básicas de geometría.

1. En la construcción geométrica que presenta el archivo, se pueden manipular los puntos de color rojo. Manipúlenlos para que vean qué acciones realiza cada uno de ellos.



2. Llenen la siguiente tabla con algunos valores para PR y PB. Utilicen el software para obtener los datos.

Longitud de PR									
Longitud de PB									

3. Construyan una gráfica utilizando los datos de la tabla anterior; esto es una gráfica que relacione la altura de la caja respecto a su posición.



4. Discutir sobre las ventajas y limitaciones que tiene el modelo del problema elaborado con el software de geometría dinámica y sin él.
