



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

**PRINCIPIO UNIFICADOR DE LAS CÓNICAS Y OTRAS
CURVAS**

Tesis para obtener el grado de
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

PRESENTA:

VALENTÍN MERCADO ARZOLA

ASESOR:

**DR. EN MATEMÁTICA EDUCATIVA ARMANDO
SEPÚLVEDA LÓPEZ**

MORELIA, MICHOACÁN, DICIEMBRE 2013.



Agradecimientos

A toda mi familia, en especial a mis padres Araceli Arzola Gonzáles y José Luis Mercado Mercado por el incondicional apoyo que a lo largo de mi vida me han brindado.

A mis hermanos, José Luis, Camila, Enrique y Edwin por todo lo que de ellos he aprendido y por los momentos que juntos hemos vivido.

A Daisy por haberme acompañado a lo largo de mi carrera y quien ahora es la madre de mi bebé Valentín, a quien también agradezco por la felicidad que me ha traído.

A mi profesor y asesor Armando Sepúlveda López por haberme apoyado en el transcurso de la licenciatura y, sobre todo, en la elaboración de éste trabajo.

A mi sinodales el Dr. David Meza Alcántara, Dr. Francisco Domínguez Mota, Dr. Fernando Hernández Hernández y Dr. Jesús Roberto García Pérez por las correcciones y observaciones que me hicieron para mejorar el trabajo.

A todos mis amigos y profesores que me han apoyado para llegar hasta esta etapa de mi carrera.

A todos ellos, ¡MUCHAS GRACIAS!

ÍNDICE

	Página
Capítulo I.-INTRODUCCIÓN	1
Capítulo II. -LAS SECCIONES CÓNICAS	7
II.1. Historia de las secciones cónicas	7
II.2. Las secciones cónicas	15
II.2.1. Elipse	20
II.2.2. Hipérbola	34
II.2.3 Parábola	51
II.3. Principio unificador de las cónicas	55
Capítulo III.- ESTUDIO DE OTRAS CURVAS	62
III.1. Curva de la rosa o Trébol de n hojas	62
III.2. Óvalos de Cassini	66
III.3. Lemniscata de Bernoulli	68
III.4. Espiral de Arquímedes	73
III.5. Espiral hiperbólica	74
III.6. Espiral logarítmica o equiangular	75
III.7. Cardioide	77
III.8. Concoide de Nicomedes	79
III.9. Cisoide de Diocles	83
III.10. Limazón o Caracol de Pascal	86
III.11. Curva o Bruja de Agnesi	89
III.12. Cicloide	90
III.13. Hipocicloide	92
III.14. Epicloide	96
Capítulo IV.- CONCLUSIONES	99
REFERENCIAS	100
ANEXOS	102

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

El matemático y filósofo francés René Descartes presentó en su libro *Legeómetrie*(1637) un recurso para unificar el estudio simultáneo del álgebra y de la geometría, inaugurando así un método novedoso que conforma el área de las matemáticas básicas llamada geometría analítica. El método se fundamenta en el uso de sistemas de coordenadas rectangulares.

La idea esencial de la geometría analítica es establecer una correspondencia entre pares de números reales y puntos en el plano, con el fin de poder relacionar curvas en el plano con ecuaciones algebraicas de dos variables. Esto es: a) a partir de una ecuación algebraica construir su gráfica, es decir interpretarla geoméricamente; y b) dada una figura geométrica o condiciones que deben cumplir los puntos de la misma, determinar la ecuación algebraica correspondiente. Estos dos problemas son recíprocos uno del otro y juntos constituyen el problema fundamental de la geometría analítica.

El primer problema implica que:

- i. el conjunto de puntos y solamente aquellos puntos cuyas coordenadas satisfagan la ecuación, se llama gráfica de la ecuación, o bien, su lugar geométrico; y
- ii. cualquier punto cuyas coordenadas satisfagan la ecuación pertenece a la gráfica de la ecuación.

El segundo implica que:

- i. todo punto de la curva debe satisfacer la ecuación;
- ii. todo punto que satisfaga la ecuación debe estar en la curva.

En su conjunto, a esto se le conoce como problema de lugar geométrico. En la naturaleza y en muchas actividades prácticas encontramos una variedad de curvas asociadas. La trayectoria de un planeta, la curva descrita por un punto fijo de una circunferencia que rueda sobre una

recta o sobre otra circunferencia, sin deslizarse, son algunas de éstas. El Cálculo nace junto al estudio detallado de una gran variedad de curvas tales como la cicloide, las cónicas, la cardiode, entre otras.

Actualmente, la geometría analítica que se imparte en las escuelas sólo abarca las curvas más sencillas: líneas rectas, circunferencias, Parábolas y, de manera muy superficial, un acercamiento a las otras cónicas, la Elipse y la Hipérbola; sin embargo, la forma de enseñanza y los demás factores asociados a la organización curricular ha motivado, en la mayoría de los casos, un aprendizaje memorístico y rutinario donde los aprendices no logran un entendimiento matemático que les permita relacionar estas curvas y sus conceptos con la realidad, lo que seguramente conduce al olvido de los mismos contenidos.

En este trabajo se hace una revisión histórica de algunas curvas planas importantes que, además de las secciones cónicas, podrían incluirse para ser estudiadas en el nivel superior. Para cada una de estas curvas se exponen desarrollos teóricos de las propiedades de cada curva abordada.

En un plano cartesiano podemos llegar a cualquier punto por medio de segmentos rectilíneos dirigidos desde el origen, que en matemáticas se llaman vectores, los cuales son elementos matemáticos importantes tanto en el estudio de las matemáticas como de las ciencias exactas.

Pero el sistema de referencia cartesiano no es el único, hay otro sistema que facilita el trabajo e interpretación para varias curvas. En efecto, en un sistema de coordenadas polares un punto se localiza especificando su posición relativa con respecto a una recta fija (llamada eje polar) y a un punto fijo de esa recta (llamado polo).

La primera parte del trabajo está dedicada a las secciones cónicas. Primero se hace una breve descripción histórica sobre el nacimiento de las cónicas siendo Apolonio de Perga “el gran geómetra” el principal protagonista del estudio de éstas curvas. Después se abordan las secciones cónicas como lugares geométricos; es decir, se deduce su ecuación cartesiana y sus elementos a partir de una propiedad que deben cumplir los puntos de la curva, como se haría

en un curso escolarizado de geometría analítica. Después se trabajan esas curvas en un sistema de referencia polar, obteniendo como resultado una misma ecuación para las tres secciones cónicas, Elipse, Hipérbola y Parábola. A esto se le conoce como principio unificador de las cónicas.

La segunda parte se dedica a curvas como: Curva de la rosa, Óvalos de Cassini, Lemniscata de Bernoulli, algunas espirales y otras más de las llamadas curvas mecánicas. Su ecuación se presenta en coordenadas polares. En esta destaca la importancia del sistema de referencia polar ya que permite obtener, para estas curvas, resultados más simples y claros. Por último, se presentan cuatro curvas cuya representación paramétrica es más elegante que en coordenadas cartesianas o coordenadas polares.

Para la construcción de figuras y visualización de lugares geométricos se hizo uso del software de geometría dinámica llamado Geogebra, cuya característica más destacable, además de ser libre, es la doble percepción de los objetos, ya que cada objeto tiene dos representaciones, una en la Vista Gráfica (Geometría) y otra en la Vista Algebraica (Álgebra). De esta forma, se establece una permanente conexión entre los símbolos algebraicos y las gráficas geométricas. Geogebra permite abordar la geometría desde una forma dinámica e interactiva que ayuda a visualizar contenidos matemáticos que son más complicados de afrontar desde un dibujo estático construido con lápiz y papel.

Así, la orientación metodológica de la tesis es de carácter documental y de desarrollo de los problemas seleccionados, con la incorporación del software dinámico Geogebra como una herramienta que, sin duda, potencia y facilita el desarrollo de la visualización para el aprendizaje de ciertas curvas.

Esto surgió por el interés de saber si las cónicas, al igual que la recta y la circunferencia, tienen una representación en coordenadas polares y por la sorpresa de que la dicha representación es la misma para las tres curvas, Parábola, Elipse e Hipérbola. También por la curiosidad de conocer cómo es que algunas curvas complejas que aparecen en la naturaleza pueden ser representadas matemáticamente.

El software de geometría dinámica, puede denominarse "procesador de ideas matemáticas" (Goldenberg, 2000) y se clasifica dentro del grupo de software abierto, en el sentido en que los estudiantes producen ideas, las expresan, desarrollan y editan. En este tipo de ambientes computacionales, el maestro y el alumno deciden qué hacer con la herramienta, en lugar de que el propio programa de cómputo guíe de manera directa el trabajo del usuario, como ocurre con los llamados tutoriales.

El trazo de objetos geométricos que se visualizan en pantalla, permite al usuario manipular y deformar figuras, corregirlas, obtener tablas, entre otras cosas; un seguimiento de los cambios que se producen en estas transformaciones puede conducir a conjeturar propiedades invariantes de figuras. Goldenberg y Cuoco (1997) hacen una descripción del software de geometría dinámica en los siguientes términos:

Un nuevo tipo de software conocido como geometría dinámica, está generando tal interés y entusiasmo que, también, está incursionando rápidamente en las escuelas. El software proporciona ciertos objetos primitivos (puntos, líneas, círculos), herramientas básicas (por ejemplo, perpendicular a una línea L a través del punto P); agrupando todo esto en los objetos compuestos, y varias posibles transformaciones, incluyendo, por ejemplo, la reflexión a través de un punto o una línea. También le permite al usuario medir ciertas partes del dibujo, y examinar la traza que dejan los puntos, segmentos, o círculos cuando se aplica una transformación dinámica.

Así, después de hacer una construcción, o tomar una figura hecha, se pueden mover libremente ciertos elementos de un dibujo y observar cómo se van transformando otros elementos. Mientras que los elementos libres se mueven en el dominio en el cual existen, el software mantiene todas las relaciones que fueron especificadas como atributos esenciales de la construcción original.

Algunas características que tiene el software dinámico:

- a. Puede ayudar a los estudiantes a explorar y construir conjeturas.

- b. Permite hacer simulaciones de los problemas matemáticos para ayudar a encontrar relaciones.
- c. Posibilita un acercamiento gráfico a la solución de problemas de variación.
- d. Permite el empleo de diferentes registros de representación (verbal, gráfico, tabular, geométrico).

Un asunto de fundamental importancia del uso de la tecnología en el estudio de las matemáticas, tiene que ver con el fomento de la externalización de las representaciones. Al respecto, Tall (1990) sugiere que su acercamiento cognitivo al cálculo alienta la externalización de conceptos y conflictos cognitivos.

En este contexto, Santos (2004) ilustra el potencial del software dinámico en la construcción de configuraciones que permiten visualizar y establecer distintas conexiones entre diferentes conceptos. La visualización en matemáticas nos ayuda a comprender mejor los problemas geométricos y nos brinda la posibilidad de acceder a los conceptos y principios matemáticos involucrados. Las representaciones hechas manualmente, con lápiz y papel, son estáticas para los aprendices y pueden impedir el entendimiento del problema; estas limitaciones tienden a desaparecer cuando los estudiantes aprenden utilizar la computadora como un medio de visualización que puede hacer ver lo que era inadvertido, permitiendo identificar relaciones, regularidades y patrones.

Un aspecto central en el estudio y aprendizaje de las matemáticas es el desarrollo de la visualización, proceso asociado a la “formación” de imágenes y a su uso para el entendimiento y descubrimiento matemático (Zimmerman y Cunningham, 1995, p. 5). Esta formación de imágenes puede ser producida por un acto mental (imaginarla), o mediante uso de lápiz y papel o con tecnología.

En el siglo XIX las investigaciones en psicología sobre imágenes mentales y sus interconexiones eran frecuentes. Sin embargo, con el surgimiento del conductismo, en el siglo XX, tales investigaciones fueron prácticamente olvidadas por largo tiempo. Fue hasta 1973

cuando Bishop publica los primeros estudios importantes sobre visualización y habilidad espacial.

En la década de los ochenta crece el interés por el estudio y entendimiento del pensamiento visual. En 1985, Presmeg presenta una revisión histórica sobre el uso y evolución de la visualización, donde sugiere que el trabajo para la construcción de imágenes mentales en los estudiantes, puede tomar más tiempo que el requerido en los analíticos. De 1988 en adelante, se refleja el renovado interés sobre visualización en educación matemática. De esta manera, se iniciaron investigaciones sobre los procesos inaccesibles del pensamiento, asociados con el uso de imágenes mentales y otras formas asociadas de expresión. Cuando una persona crea arreglos espaciales, hay una imagen visual en la mente de la persona que guía esa creación. En este contexto, Presmeg (2006) establece que la visualización incluye procesos de construcción y transformación de imágenes mentales al hacer matemáticas, habilidad que se desarrolla lentamente en los aprendices.

CAPÍTULO II

LAS SECCIONES CÓNICAS

II.1. HISTORIA DE LAS SECCIONES CÓNICAS

Menecmo (380- 320 a.C)

Se atribuye a Menecmo, de la Academia platónica, el descubrimiento de las secciones cónicas, curvas que después recibieron el nombre de Parábola, Elipse e Hipérbola, la llamada "Triada de Menecmo". Este descubrimiento le permitió resolver el problema délico de la duplicación del cubo. Hipócrates redujo este problema a la búsqueda de dos medias proporcionales entre dos rectas a y b ; es decir, $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Menecmo descubrió las propiedades de la Parábola y de la Hipérbola que corresponden, en coordenadas cartesianas, a las relaciones que resultan de la proporción continua: $x^2 = ay, y^2 = bx$ y $xy = ab$. No se sabe cómo Menecmo, a partir del método de obtención de las secciones cónicas, obtuvo las ecuaciones $xy = ab$ para la Hipérbola e $y^2 = bx$ para la Parábola, necesarias para la resolución de la duplicación del cubo.

Menecmo descubrió que las secciones cónicas se obtienen haciendo cortes perpendiculares a la generatriz en un cono circular recto y, es una Parábola si el ángulo en el vértice del cono es recto; una Elipse si el ángulo es agudo y; una Hipérbola si el ángulo es obtuso. Menecmo no inventó los términos Parábola, Hipérbola y Elipse para referirse a las cónicas, estas fueron bautizadas con dichos nombres por Apolonio de Perga en su estudio sobre las cónicas. Menecmo las llamó con términos asociados al ángulo en el vértice del cono; esto es, cónica acutángula, rectángula y obtusángula. Probablemente encontró más propiedades de las secciones cónicas, como las asíntotas de la Hipérbola, pero no hay documento que lo atestigüe.

En el artículo El Nacimiento de las Cónicas y el Movimiento de los proyectiles Galileanos de Miguel Monsalve, escribe, "El descubrimiento de las secciones cónicas y la obtención del síntoma o propiedad geométrica fundamental de cada una de ellas se le atribuye a Menaechmus (Menecmo)-Matemático griego que floreció aproximadamente en el año 350 AC,-pues en un epígrafe de Eratóstenes se habla de las tríadas de Menecmo, al referirse a la solución propuesta por éste al problema geométrico de la duplicación del cubo" (Sánchez, p.1).

Apolonio de Perga. El gran geómetra (262-190 a. C)

“Quien comprenda a Arquímedes y Apolonio admirará menos los logros de los hombres más ilustres de tiempos posteriores.”

G. W. Leibniz

El reino de Egipto conoce una nueva prosperidad, Alejandría crece de día en día y alberga una población de casi un millón de habitantes. Los miembros de la universidad viven en la ciudad cuyas anchas y rectas calles favorecen los desplazamientos rápidos y directos. En esta ciudad se encuentran columnas de piedra blanca, estatuas griegas, obeliscos egipcios, teatros, hipódromos, parques adornados con flores, mercados, baños públicos, un foro y un inmenso gimnasio.

En la ciudad real, zona elegante de la ciudad, se encuentran los palacios de los sucesores de Tolomeo I, el mausoleo de Alejandro Magno, las tumbas de los reyes, los archivos nacionales, un teatro y un anfiteatro, muchos templos pequeños y el gran templo del Dios Poseidón. Y, cerca del puerto, unidos por una cadena de columnas, edificios de una blancura inmaculada albergan la gran biblioteca y el museo. Es aquí, en este maravilloso entorno, donde vivían los sabios de Alejandría. Comían juntos en salas especialmente preparadas para ello y, durante las comidas, los alumnos y el maestro discutían.

Apolonio de Perga (Figura 1) llegó a Alejandría cuando era joven para estudiar con los sucesores de Euclides y permaneció ahí durante mucho tiempo antes de visitar Pérgamo (ciudad de Asia menor) donde se acababan de fundar una universidad y una biblioteca como las de Alejandría, ciudad a la que regresaría luego para no abandonarla hasta su muerte. (Collet pp. 141-142)



Figura 1. Apolonio de Perga (262-190 a. C.).

Cronológicamente, es considerado el tercero de los grandes matemáticos griegos de la edad de oro; los otros dos son Euclides y Arquímedes.

No se conocen con precisión datos importantes de la vida de Apolonio, a menudo se llega a confundir con otros Apolonios de la época, ya que parece ser que este nombre era muy popular en la antigua Grecia.

Se le conoce a Apolonio principalmente por su trabajo sobre las secciones cónicas, por el cual algunos le consideran el verdadero descubridor de la geometría analítica, y se le llegó a conocer también como el “gran geómetra”.

Las secciones cónicas ya se conocían desde hacía más o de un siglo y medio cuando Apolonio escribió su famoso tratado sobre estas curvas; con anterioridad, Menecmo (350 aprox.), Aristeo el viejo (aprox. 330), Euclides (aprox. 320), Conón (aprox. 240) y Arquímedes (aprox. 240), trabajaron sobre las secciones cónicas, pero de la misma manera que *Los Elementos de Euclides* había eclipsado a todos los textos elementales anteriores, también el trabajo de Apolonio hizo olvidar los trabajos de los primeros y, con respecto a Arquímedes, el trabajo de Apolonio fue más completo y sistemático. Es una realización monumental que prácticamente cerró el tema para los pensadores posteriores, al menos desde el punto de vista puramente geométrico.

Los predecesores de Apolonio obtenían las cónicas, Parábola, Elipse e Hipérbola mediante secciones de conos circulares rectos de tres tipos distintos, según que el ángulo en el vértice fuera agudo, recto u obtuso.

Apolonio fue el primer matemático en considerar las cónicas que se generan al seccionar un mismo cono mediante un plano colocado en distintas posiciones. También fue el

que usó los términos de Parábola, Elipse e Hipérbola para referirse a tales secciones cónicas. Estos términos no fueron inventados por Apolonio, sino tomados por él de los pitagóricos que los utilizaban en la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la aplicación de áreas. Los pitagóricos, al aplicar un rectángulo a un segmento de manera que los extremos del segmento coincidieran con los de la base, distinguían tres casos, el caso de Elipse, el de Parábola y el de Hipérbola, según que la base fuera más corta que el segmento, que coincidiera con él, o que fuera mayor.

Los resultados sobre las secciones cónicas de Apolonio aparecen en un tratado denominado *De las Secciones cónicas*, obra que consta de ocho libros de los cuales los cuatro primeros se conservan en su texto original (lengua griega), los tres siguientes mediante traducciones árabes gracias a ThabitIbnQurra quien los tradujo antes de que desapareciera su versión griega; el último, se perdió y se sabe de él por noticias de Pappus(320 d. C) y una reconstrucción histórica del astrónomo Edmund Halley en el siglo XVII.

Enseguida se presenta un breve resumen de los ocho libros de la obra de Apolonio.

Libro I.

El libro I de *Las Cónicas* comienza con una exposición de los motivos para escribir la obra. Se sabe que mientras Apolonio estaba en Alejandría fue visitado por el geómetra Naucrates y fue entonces que, a petición de este, Apolonio escribió un apresurado borrador de las Cónicas. En la introducción Apolonio escribe:

Apolonio a Eudemo, salud. Si gozas de buena salud y en lo demás las cosas salen a medida de tus deseos, muy bien está; para mí las cosas también marchan pasablemente bien. Durante el tiempo que estuve contigo en Pérgamo advertí tu anhelo para conocer mi obra sobre las cónicas; te remito, por lo tanto, el primer libro corregido y te remitiré los restantes cuando los termine según mis deseos. Me atrevo a decir que no habrás olvidado, según te conté, que emprendí la investigación de este tema a requerimiento de Naucrates, el geómetra, quien así me lo pidió cuando vino a Alejandría y se detuvo conmigo. Compuse la obra en ocho libros y se los entregué enseguida y con toda premura, pues estaba a punto de embarcarse, por tanto no las había revisado bien. En consecuencia ahora publico, en la medida que se me presente la ocasión, las partes corregidas de la obra (...) cuando todos se publiquen, quienes los lean podrán formarse su propio juicio a cerca de ellos, de acuerdo con su gusto individual. Adiós. (J. Rey Pastor y J. Babini pp. 117-118)

En este libro aparecen las siguientes definiciones básicas:

1. Si desde un punto P que no se encuentra en el plano de un círculo, se traza una recta a la circunferencia de este, se prolonga en ambas direcciones y se hace que recorra la circunferencia, permaneciendo P fijo, hasta que llegue a su posición inicial. Se llama superficie cónica a la que, descrita por la recta, se compone de dos superficies opuestas por el vértice que se extienden indefinidamente, lo mismo que la recta que la describe; se llama vértice de la superficie al punto fijo y ; eje a la recta determinada por éste y el centro del círculo.
2. Se llama cono a la figura limitada por el círculo y la superficie comprendida entre el vértice y la circunferencia del círculo. A este círculo se le llama base del cono.
3. Se llama cono recto al cono que tiene su eje perpendicular a la base y oblicuo o escaleno al que no tiene el eje perpendicular a la base.
4. Se llama diámetro de toda curva que se encuentra en un mismo plano a la recta que, al trazarse en la curva, divide en dos partes iguales a todas las paralelas a una recta cualquiera trazadas en la curva. El vértice de esta curva es el extremo del diámetro que se localiza en la curva.
5. Se llaman diámetros conjugados de una y dos curvas a cada una de las rectas que son un diámetro y dividen en dos partes iguales a las paralelas del otro.

Después concluye con otras dos definiciones y prosigue con setenta proposiciones.

De estas definiciones se puede apreciar que Apolonio consideraba las dos ramas de un cono y estudia las figuras obtenidas al seccionar el cono con un plano.

Ahora procede a obtener *el síntoma* o ecuación de las secciones cónicas; por ejemplo, usando nuestro lenguaje, para la Elipse de diámetro $AB = 2a$ (Figura 2(a)), se traza por A una perpendicular a AB de longitud $2p$, y sobre AB se localiza el punto C tal que al trazar una perpendicular a AB por C , el área del cuadrado de lado CD sea igual a la del rectángulo de lados $2p$ y AC : sea $AC = x$ y, por tanto, $CB = 2a - x$, así

$$CF \cdot AC = CD^2 \quad (1)$$

Ahora, el triángulo AEB es semejante al triángulo CFB por lo que $CF/CB = AE/AB = 2p/2a$, de donde $CF = (p/a)CB = (p/a)(2a - x)$, al sustituir en (1) y haciendo $CD = y$, a la que Apolonio llamó ordenada, se obtiene

$$y^2 = p/a(2a - x)x$$

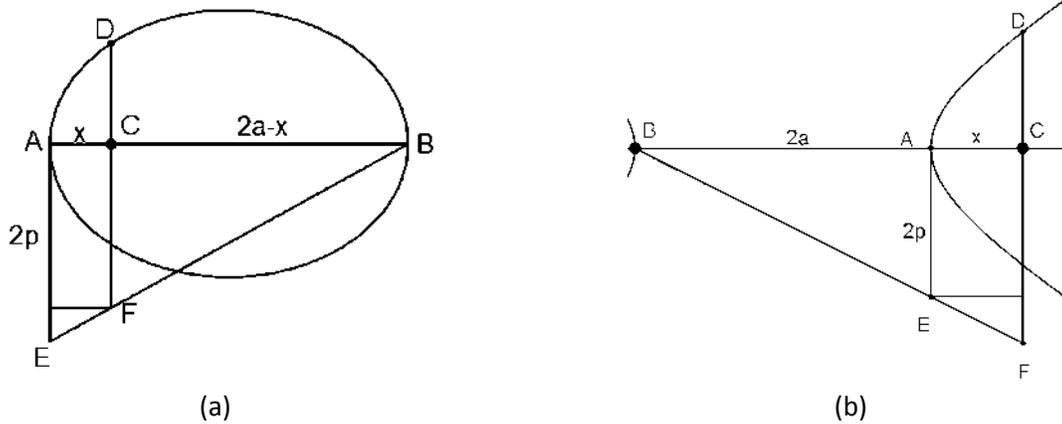


Figura 2. Figura para encontrar el síntoma o ecuación de la Elipse e Hipérbola.

Además el área del rectángulo de lado CF es menor que el área del rectángulo de lado AE ; así se dice que el rectángulo de lado CF se utiliza por defecto (elipsis), de ahí el nombre de Elipse.

El procedimiento para la Hipérbola es de manera análoga con una de sus ramas (Figura 2b), y se obtiene:

$$y^2 = p/a(2a + x)x$$

y como aquí el área del rectángulo de lado AF excede al área del rectángulo de lado EC , entonces se habla de Hipérbola.

En el caso en que la áreas del cuadrado y del rectángulo con un lado igual a $2p$ sean iguales, entonces no hay ni defecto ni exceso y se trata entonces de la Parábola.

En este libro también se ocupa de las tangentes a las cónicas. Apolonio concibe una tangente como una recta que sólo tiene un punto en común con la cónica, permaneciendo cualquier otro punto fuera de ésta.

Libro II.

Comienza con la construcción y propiedades de las asíntotas a una Hipérbola. Después introduce la Hipérbola conjugada a una dada, mostrando que tienen las mismas asíntotas.

También muestra cómo encontrar un diámetro a una cónica y el centro de la cónica que lo posea. Un método consiste en dibujar cuerdas paralelas: la recta que une sus puntos medios es un diámetro. El punto de intersección de dos diámetros cualesquiera es el centro de la cónica, si lo tiene.

Libro III.

Trabaja con teoremas sobre áreas de figuras formadas con tangentes y diámetros. Uno de los principales resultados es: desde un punto T se trazan TP y TQ tangentes a una cónica (Figura 3), y se toman cuerdas RS y $R'S'$ paralelas a TP y a TQ , respectivamente, que se cortan en M (interna o externamente), entonces

$$\frac{RM \cdot MS}{R'M \cdot MS'} = \frac{TP^2}{TQ^2}$$

Este teorema es una generalización del Teorema de la potencia de un punto, que asegura que si dos cuerdas de una circunferencia se cortan, el producto de los segmentos generados en una es igual al producto de los segmentos generados en la otra cuerda, ya que para la circunferencia $TP^2/TQ^2 = 1$.

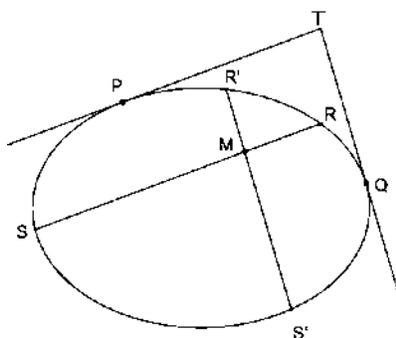


Figura 3. TP y TQ son tangentes a la cónica, SR y $S'R'$ son paralelas a estas.

Además aparecen teoremas sobre polos y polares y sobre la obtención de secciones cónicas.

En este libro también se aborda el problema de las propiedades focales de las cónicas con centro; no se menciona el foco de una Parábola. La palabra “focos” no es utilizada por Apolonio. Define para la Elipse e Hipérbola los puntos F y F' del eje mayor AA' tales que $AF \cdot FA' = AF' \cdot F'A' = 2p \cdot AA'/4$. Apolonio prueba para la Elipse y la Hipérbola que las rectas PF y PF' desde un punto P de la cónica forman ángulos iguales con la tangente en P (Figura 4), y que la suma (para la Elipse) o la diferencia (para la Hipérbola) de las distancias focales PF y PF' es igual AA' .

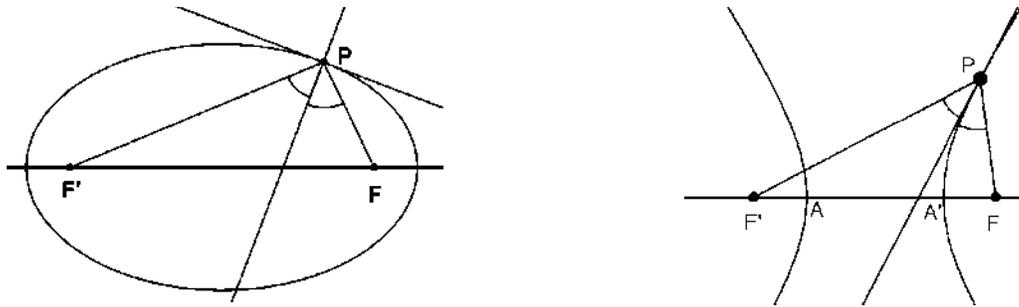


Figura 4. En la Elipse eHiperbola la tangente P está relacionado con la bisectriz del ángulo formado por FP y $F'P$.

Elementos como excentricidad y la directriz no aparecen en las cónicas de Apolonio, pero el hecho de que el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a un punto dado (foco) y una recta dada (directriz) están en razón constante es una cónica, probablemente ya era conocido por Euclides (aprox. 300 a .C) y fue demostrado por Pappus de Alejandría (ver Principio unificador de las cónicas).

Libro IV.

Aparecen proposiciones relacionadas con la división armónica de rectas. El resto del libro trata sobre las posibles intersecciones entre parejas de cónicas. Prueba que dos cónicas se intersecan a lo más en cuatro puntos.

Libro V.

Este libro es considerado como el más notable y novedoso del Tratado de cónicas. Está dedicado a la teoría de las normales, que no aparecen como perpendiculares a las tangentes sino como las longitudes, máxima y mínima, de los segmentos que unen los puntos de una cónica con un punto dado. Apolonio prueba que si O es cualquier punto interior a una cónica y OP es un segmento de longitud mínima o máxima desde O hasta la cónica, la recta perpendicular en P a OP es tangente a la cónica. En otras palabras los segmentos de longitud mínima y máxima desde cualquier punto a la cónica, son normales a ésta.

Libro VI.

Se ocupa de cónicas congruentes, semejantes y segmentos de cónicas. Muestra cómo construir sobre un cono circular recto dado una sección cónica, igual a una dada.

Libro VII.

Es el que menos destaca en la obra, ya que no contiene proposiciones sobresalientes. Trata de propiedades de los diámetros conjugados de una cónica con centro.

Libro VIII.

Este libro se ha perdido. Se cree que contenía proposiciones sobre cómo determinar diámetros conjugados en una cónica con centro.

Apolonio escribió otras obras que se conocen por referencia de Pappus. La *sección proporcional*, la *sección espacial* y la *sección determinada* se refieren esencialmente a las propiedades de series de puntos proyectivos. Las *intercalaciones* se refieren a los problemas del mismo tipo que se pueden lograr con regla y compás, tratándose de *curvas directrices* que se pueden construir con líneas rectas. En los *Lugares geométricos planos* se tratan lugares geométricos rectilíneos y circulares, apareciendo en el fondo principios de la teoría de inversión. En los *problemas de contacto* se construyen aquellos círculos que son tangentes a tres circunferencias dadas o a sus degeneraciones; es decir, a puntos y rectas.

II.2. LAS SECCIONES CÓNICAS

Cuando un cono es cortado por un plano perpendicular a su eje, la curva de intersección es una Circunferencia. En este caso, se puede inscribir en el cono una esfera que sea tangente al plano de corte (Figura 5), tal punto de tangencia F es el centro de la circunferencia. También se puede inscribir una esfera por debajo del cono y nuevamente el punto de tangencia es el centro de la circunferencia. Estas esferas se conocen como *Esferas de Dandelin* en honor al matemático Germinal Pierre Dandelin (1794 – 1847), quien demostró este teorema en 1842. Además el radio FP de la circunferencia es el mismo que la distancia en línea recta de P sobre el cono al lugar en que las esferas son tangentes a dicho cono; es decir, $FP = PQ = PQ'$, ya que las tangentes a una esfera desde un punto exterior deben ser iguales.

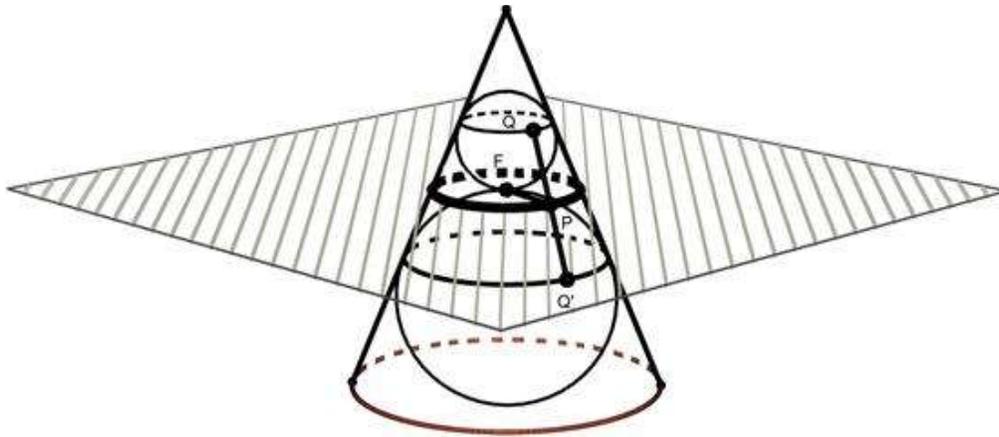


Figura 5. Obtención de la circunferencia mediante el corte de un cono con un plano.

Esto sugiere que las curvas obtenidas al inclinar el plano, deben ser estudiadas desde el mismo punto de vista.

Cuando el plano se inclina y corta al cono como en la Figura 6, la curva de intersección con el cono es una Elipse. En este caso las dos esferas inscritas, inferior y superior, y tangentes al plano de corte, tienen puntos de tangencia en F y F' respectivamente. De aquí que $FP = PQ$ y $F'P = PQ'$, esto nuevamente porque dos tangentes desde un punto exterior P a una esfera son iguales. De donde se sigue que $FP + F'P = QP + PQ' = QQ'$, que es una longitud constante por ser la distancia sobre una generatriz del cono entre las dos circunferencias de tangencia de las esferas inscritas con el cono. En otras palabras, si P es un punto cualquiera de la Elipse, la suma de la distancia de P a F y a F' es una constante. Los puntos F y F' se llaman focos de la Elipse.

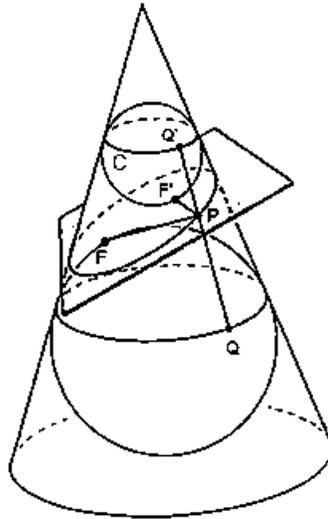


Figura 6. Generación de la Elipse, $QP + PQ' = cte.$

Conforme el plano de corte se inclina respecto a su posición original, se obtienen sucesivamente una Circunferencia, luego una Elipse, después, cuando el plano de corte es paralelo a una generatriz del cono, la curva de intersección es una Parábola (Figura 7).

En este caso sólo hay una esfera inscrita en el cono tangente al plano de corte en F , al plano de corte. Los puntos de tangencia del cono con la esfera se encuentran sobre una circunferencia C , en un plano perpendicular al eje del cono. Dicho plano y el plano de corte se intersectan en una recta D .

Tomemos un punto P de la Parábola, marquemos la generatriz que pasa por P y llamemos Q al punto en que dicha generatriz corta a la circunferencia de tangencia, también sobre la generatriz paralela al plano de corte tracemos Q' , donde dicha generatriz corta a la Circunferencia de tangencia, y tracemos por P el plano paralelo al que contiene a la circunferencia de tangencia; llamemos P' al punto que pertenece a tal plano y a la generatriz por Q' .

Sabemos que la distancia del vértice V a Q' es la misma que de V a Q , por ser Q y Q' puntos en la circunferencia de tangencia trazada desde V .

Ahora, la diferencia $P'V - Q'V = P'Q'$ es una cantidad constante, pues P' se encuentra en otra circunferencia de tangencia. Dicha diferencia puede medirse en la generatriz que pasa por P y está representada por la cantidad PQ , así que $PQ = P'Q'$. Ahora, $FP = PQ$ por ser ambos tangentes a la Esfera de Dandelin desde P . De esto se sigue que $FP = P'Q'$.

La distancia medida del punto P a la recta D puede obtenerse como sigue: los planos que contienen a la circunferencia de tangencia C y a la circunferencia que pasa por P' son planos paralelos, la distancia buscada es generada por un segmento dentro del plano de corte.

Su longitud es equivalente a la distancia $P'Q'$, segmento que se encuentra en la generatriz paralela. Así que $FP = PD$; es decir, la distancia de F a un punto P de la Parábola es la misma que la distancia de P a la recta D . Esta recta se llama Directriz de la Parábola y F es el foco.

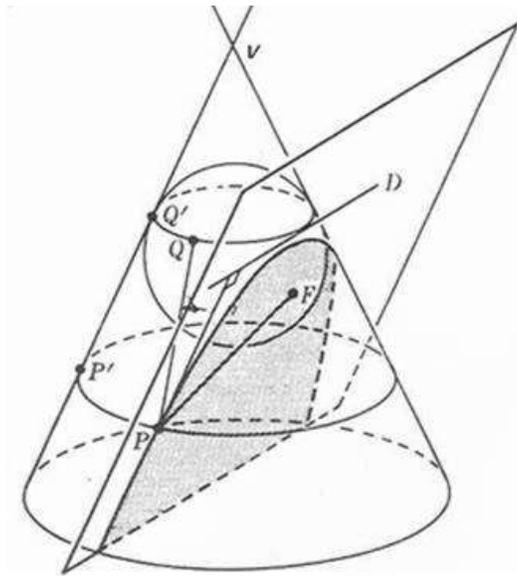


Figura 7. Obtención de la Parábola, aquí $PF = PD$.

Podemos hacer algo más general si prolongamos el cono en los dos sentidos con respecto a su vértice, y si el plano se inclina de modo que sea paralelo al eje de los conos y corte las dos hojas del cono, obteniéndose así la curva llamada Hipérbola (Figura 8).

Tomemos un punto P de la Hipérbola y tracemos por este la generatriz del cono, que interseca en los puntos Q' y Q a las circunferencias de tangencia entre las esferas y el cono.

Los segmentos PQ y PF son tangentes a la esfera inferior, uno por estar sobre la generatriz tangente y el otro por estar sobre el plano tangente a la esfera, esto indica que $PQ = PF$. También $PF' = PQ'$, ya que son tangentes a la esfera superior. Por lo tanto,

$$PF - PF' = PQ - PQ' = QQ' = \text{constante.}$$

Los puntos F y F' se llaman focos de la Hipérbola.

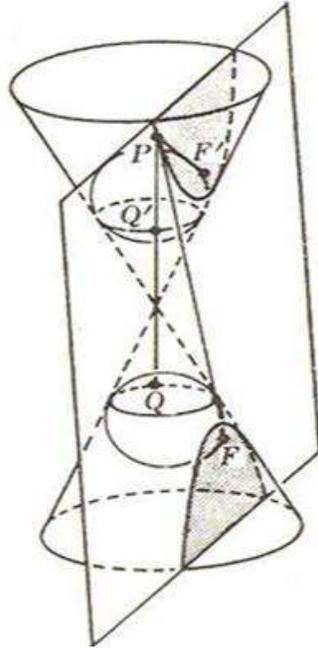
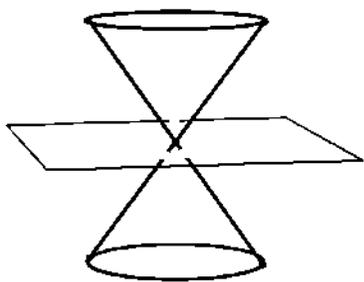
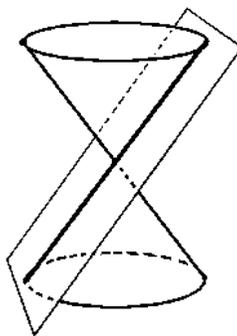


Figura 8. Obtención de la Hipérbola.

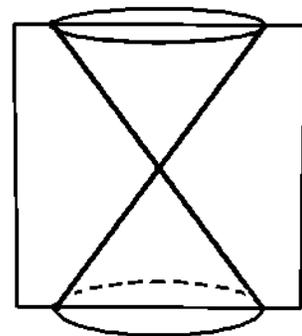
Estas curvas se llaman secciones cónicas y son curvas de intersección de un plano y un cono. También hay casos extremos en los que el plano corta al cono en un solo punto (el vértice), dando como resultado una Circunferencia nula o Elipse nula; cuando el plano contiene a una generatriz del cono se tiene como resultado una línea recta o una Parábola degenerada; y cuando el plano contiene al eje del cono se obtienen dos rectas que pasan por el vértice, una Hipérbola degenerada. Véase la Figura 9.



Circunferencia nula o Elipse nula



Parábola degenerada



Hipérbola degenerada

Figura 9. Cónicas degeneradas.

Ahora estudiemos analíticamente cada una de las secciones cónicas.

II.2.1.Elipse

Consideremos dos puntos fijos F, F' (focos) en un plano, separados a una distancia $2c$ entre sí y tomemos un punto $P(x, y)$ en ese mismo plano, que se mueva de tal manera que la suma de sus dos distancias a F y F' permanezca constante, igual a $2a$. El lugar geométrico que describe P se llama Elipse (Figura 10a).

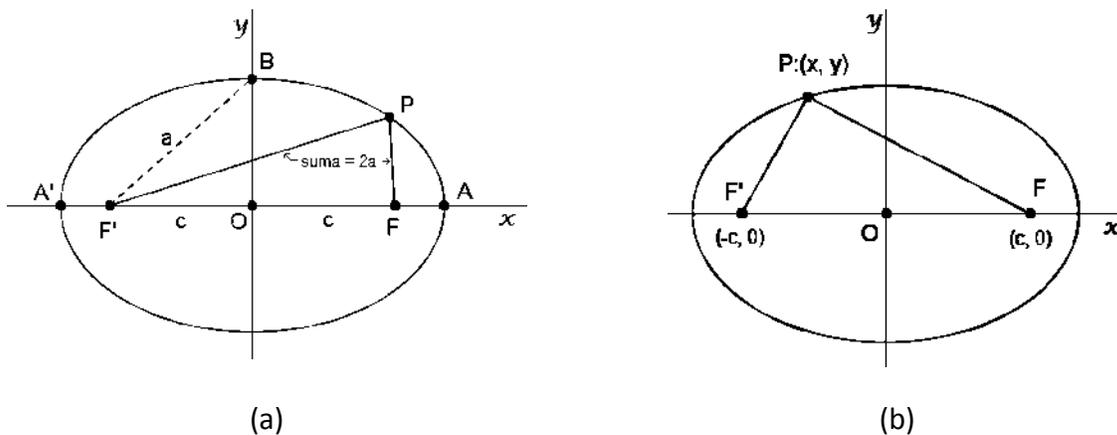


Figura 10. Ilustración usual para la deducción de la ecuación de la Elipse.

Se puede ver que si F y F' coinciden, el punto P describirá un circunferencia, que puede considerarse un caso especial de la Elipse. Se toman las dos longitudes como $2c$ y $2a$ en lugar de c y a para simplificar la ecuación de la Elipse.

A la recta que pasa por F y F' se llama *Eje transversal* de la Elipse, y es evidente que la Elipse es simétrica respecto a este eje. También es simétrica respecto a la mediatriz del segmento FF' , a la cual se le llama *Eje conjugado* de la Elipse. El punto de intersección de los dos ejes se llama *Centro* de la Elipse. La porción AA' del eje transversal que corta a la Elipse se llama *eje mayor*, mientras que la parte del eje conjugado BB' dentro de la Elipse se llama *Eje menor*.

Si P coincide con A

$$PF + PF' = AF + AF' = 2AF + FF' = 2a$$

y si P coincide con A'

$$PF + PF' = A'F + A'F' = 2A'F' + F'F = 2a$$

de aquí que $FA = F'A'$ y por tanto la longitud del eje mayor AA' es $2a$. Si P coincide con B se observa que $FP = F'P = a$, y BB' tiene longitud $2\sqrt{a^2 - c^2}$ que se llama $2b$. Como FF' es la distancia más corta entre los focos, $2c < 2a$ de aquí que $c < a$ y también $b = \sqrt{a^2 - c^2} < a$. El segmento OA es el *Semieje mayor*, OB es el *Semieje menor*. Los puntos A y A' son los vértices de la Elipse. Consideremos los ejes, transverso y conjugado como ejes coordenados x e y , respectivamente. El centro de la Elipse será el origen, los focos F y F' tienen coordenadas $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, mientras que P tiene coordenadas (x, y) (Figura 10b). De acuerdo a la definición se tiene

$$FP + F'P = \sqrt{(x - c)^2 + (y)^2} + \sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} = 2a$$

Transponiendo el radical del primer miembro y elevando al cuadrado

$$\left[\sqrt{(x + c)^2 + y^2} \right]^2 = \left[2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right]^2$$

Desarrollando y simplificando se tiene

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

O sea que

$$FP = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

es la expresión para el radio focal FP . A la razón c/a se le llama *Excentricidad* de la Elipse y se denota por la letra e , la cual es menor que la unidad, pues c siempre es menor que a .

Así las expresiones para los radios focales de la Elipse se convierten en:

$$PF = a - \frac{c}{a}x = a - ex$$

y como

$$PF + PF' = 2a$$

se sigue que

$$PF' = a + \frac{c}{a}x = a + ex$$

Volviendo a la expresión

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

Elevando nuevamente al cuadrado ambos miembros y desarrollando

$$\left[\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right]^2 = \left[a - \frac{c}{a}x\right]^2$$

se reduce a

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Recordemos que $a^2 - c^2 = b^2$ y dividiendo ambos miembros por a^2b^2

$$\frac{x^2b^2 + a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta es la ecuación de la Elipse, la cual se obtuvo a partir de la propiedad del lugar geométrico.

Ahora veamos que si un punto satisface la ecuación, entonces está en el lugar geométrico, tal como es el propósito de la geometría analítica.

Para ello, sea $P(x, y)$ un punto que satisface la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se quiere demostrar que $PF + PF' = 2a$, la propiedad de la Elipse. En otras palabras, veamos si empezando con

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

podemos invertir cada paso hasta llegar a

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} = 2a$$

La mayoría de los pasos son reversibles al sumar términos a ambos miembros, excepto los pasos donde se elevó al cuadrado ambos miembros, al invertir estos pasos de

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

al sacar raíz cuadrada se obtiene:

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Sumando términos a ambos miembros llegamos a

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Sacando nuevamente raíz cuadrada

$$\mp\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} \pm \sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} = 2a;$$

es decir, hay cuatro posibilidades en lugar de una. Pero como $2a > 0$ y como el radical $\sqrt{\quad}$ denota la raíz cuadrada positiva, la combinación $-\sqrt{\quad} - \sqrt{\quad}$ queda descartada, pues es imposible que una cantidad negativa se igual a una cantidad positiva, también

$$+\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$-\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

son imposibles, pues estas expresan que $FP - F'P$, o que $-FP + F'P$ es igual a $2a < 2c = FF'$, cosa que no es posible pues la diferencia entre dos lados de un triángulo debe ser menor que el tercer lado, por el Teorema de la desigualdad del triángulo. Entonces la única posibilidad es

$$+\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} = 2a$$

lo que equivale a decir que el punto P está en la Elipse.

Entonces se llama a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la ecuación ordinaria de la Elipse, con su eje mayor de longitud $2a$ y su eje menor de longitud $2b$. La relación entre a y b es $a^2 - c^2 = b^2$, donde $2c$ es la distancia entre los focos de la Elipse, que están en el eje x .

Si el eje transversal se toma como el eje y en lugar del eje x , estando los focos en el eje y , el centro en el origen, y $FP + F'P = 2a$, se obtendrá una ecuación semejante pero con el cuadrado del semieje mayor, a^2 , como denominador de y^2 en lugar de denominador de x^2 . Entonces

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

es la ecuación ordinaria de la Elipse con centro en el origen. Si a^2 es denominador de x^2 entonces la Elipse tiene sus focos en el eje x en $(\pm c, 0)$; si a^2 es denominador de y^2 , están en el eje y en $(0, \pm c)$; a es la longitud del semieje mayor. En ambos casos $c^2 = a^2 - b^2$, y

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

Si e se acerca a 0 la Elipse se asemeja a una circunferencia, si e se acerca a 1 la Elipse es angosta y alargada.

Al segmento de recta que pasa por un foco y es perpendicular a su eje mayor, interceptado por la Elipse en la recta, se le llama *Lado recto* de la Elipse (Figura 11). La longitud del lado recto es $2b^2/a$, pues si tomamos una Elipse en posición ordinaria, la recta que pasa por el foco $F(c, 0)$, tendrá por ecuación $x = c$, si sustituimos este valor en la ecuación de la Elipse obtendremos que los puntos en los que la Elipse interseca a la recta serán $(c, b^2/a)$ y $(c, -b^2/a)$ y la longitud entre ellos es $2b^2/a$.

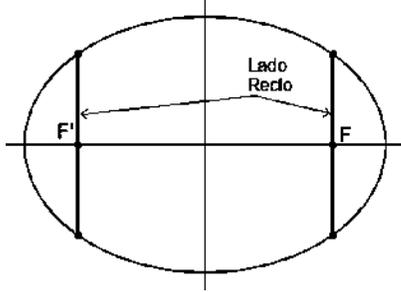


Figura 11. Lado recto de la Elipse.

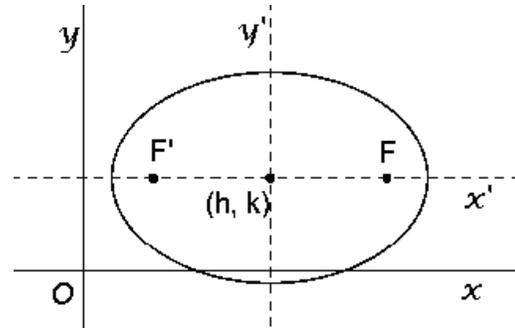


Figura 12. Elipse con centro en (h, k) .

Si la Elipse no tiene su centro en el origen, sino en (h, k) , como en la Figura 12, entonces tiene por ecuación

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Si desarrollamos esta ecuación:

$$b^2(x^2 - 2hx + h^2) + a^2(y^2 - 2ky + k^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h + a^2k - a^2b^2 = 0$$

Haciendo

$$A = b^2, \quad C = a^2, \quad D = -2b^2h, \quad E = -2a^2k$$

obtenemos

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

como ecuación general de la Elipse.

También podemos expresar la ecuación de la Elipse en forma paramétrica. Si relacionamos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con la relación trigonométrica $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, entonces $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$, las cuales son las ecuaciones paramétricas de la Elipse.

Estas ecuaciones se obtienen de la siguiente manera: se trazan dos circunferencias concéntricas de radios a y b con centro en el origen y un radio que las corte (Figura 13). El punto P es la intersección de la recta vertical trazada desde el extremo del radio mayor a , con la recta horizontal trazada desde el extremo del radio menor b . Vemos que $x = a \cos \theta$ e $y = b \sin \theta$, donde θ es el ángulo que el radio forma con la parte positiva del eje x . Estas ecuaciones satisfacen la ecuación ordinaria de la Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Así que

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

son las ecuaciones paramétricas de la Elipse.

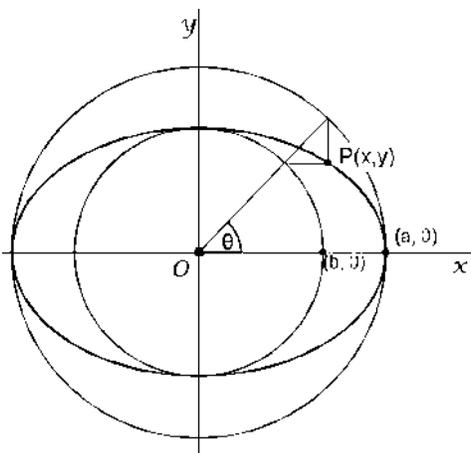


Figura 13. Ilustración de la que se obtienen las ecuaciones paramétricas de la Elipse.

Directriz de la Elipse

Consideremos nuevamente una Elipse horizontal en posición ordinaria de eje mayor $2a$, y tomamos el foco $F(c, 0)$ y su vértice correspondiente $A(a, 0)$. Podemos encontrar sobre el eje transversal un punto K (exterior a la Elipse) tal que $FA/AK = e$. El punto K tiene por coordenadas $(a/e, 0)$ (Figura 14), pues es claro que $FA = a - c$, y si llamamos k a la abscisa de K , $AK = k - a$. Sustituyendo en $FA/AK = e$ se tiene

$$\frac{FA}{AK} = \frac{a - c}{k - a} = e$$

o

$$a - c + ae = ek$$

Si sustituymos por c/a en el primer miembro de la ecuación

$$a - c + a\left(\frac{c}{a}\right) = ek$$

de donde se tiene que

$$k = a/e.$$

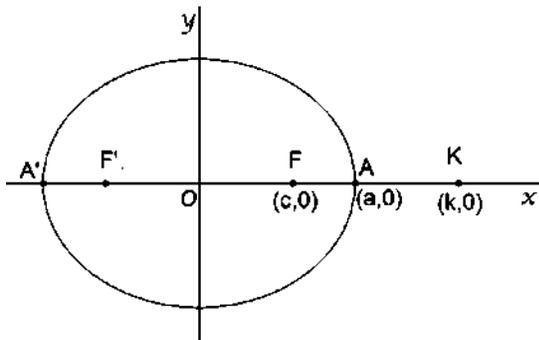


Figura 14. Punto K exterior a la Elipse tal que $FA/AK = e$.

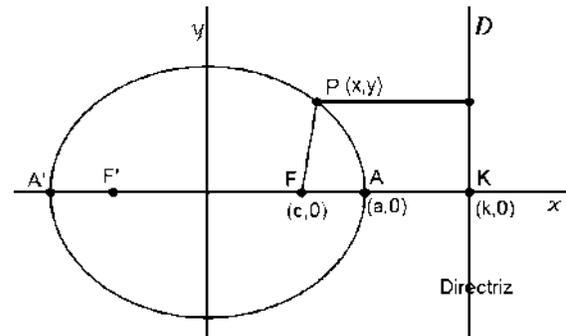


Figura 15. Directriz de la Elipse.

Entonces el punto K tiene coordenadas $(a/e, 0)$. A la recta que se encuentra a una distancia a/e del centro de la Elipse y que es perpendicular al eje transversal se llama *Directriz* de la Elipse (Figura 15). De esta manera obtenemos la siguiente

Proposición. La directriz cumple con la propiedad de que para cualquier punto $P(x, y)$ que se encuentre en la Elipse se tiene que

$$\frac{FP}{PD} = e$$

donde D es la directriz, y PD es la longitud de la perpendicular de P a la directriz.

Demostración:

Esto es fácil de probar si consideramos la Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y hacemos uso de la expresión encontrada anteriormente para el radio focal FP , de la Elipse

$$FP = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x;$$

la distancia de P a la recta D es la distancia desde el origen a D menos la abscisa del punto P ; es decir

$$PD = \frac{a}{e} - x = \frac{a^2}{c} - x$$

efectuando el cociente y simplificando se tiene

$$\frac{FP}{PD} = \frac{a - \frac{c}{a}x}{\frac{a^2}{c} - x} = \frac{\frac{a^2 - cx}{a}}{\frac{a^2 - cx}{c}} = \frac{c}{a} = e$$

que es lo que se quería probar.

El recíproco también es cierto; es decir, si tomamos un punto fijo $F(m, 0)$ y una recta D fija, que consideraremos como el eje y , y si un punto $P(x, y)$ se mueve de modo que $FP/PD = e$, donde PD es la perpendicular desde P hasta la recta D y $e < 1$, el lugar geométrico que describe P es una Elipse en la cual F es un foco y cuya excentricidad es e (Figura 16).

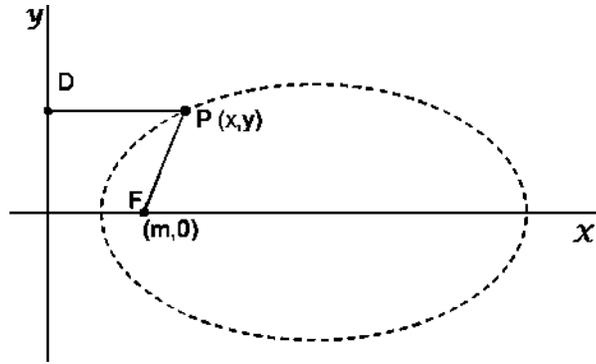


Figura 16. Elipse generada a partir de un foco y su directriz.

Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos es claro que

$$FP = \sqrt{(x - m)^2 + y^2} \quad PD = x$$

Sustituyendo estos valores en

$$\frac{FP}{PD} = e$$

se convierte en

$$\frac{\sqrt{(x - m)^2 + y^2}}{x} = e$$

al multiplicar por x y elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación y agrupando se tiene

$$(1 - e^2)x^2 - 2mx + m^2 + y^2 = 0$$

dividiendo por $(1 - e^2)$

$$\left(x^2 - \frac{2mx}{(1 - e^2)}\right) + \frac{y^2}{(1 - e^2)} = -\frac{m^2}{(1 - e^2)}$$

completando el cuadrado

$$\left(x^2 - \frac{2mx}{(1 - e^2)} + \frac{m^2}{(1 - e^2)^2}\right) + \frac{y^2}{(1 - e^2)} = -\frac{m^2}{(1 - e^2)} + \frac{m^2}{(1 - e^2)^2}$$

que se reduce a

$$\left(x - \frac{m}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{(1-e^2)} = \frac{m^2 e^2}{(1-e^2)^2}$$

Todos los términos de la ecuación son positivos ya que $e < 1 \Rightarrow e^2 < 1$.

Dividiendo por $\frac{m^2 e^2}{(1-e^2)^2}$ se tiene:

$$\frac{\left(x - \frac{m}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{me}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{m^2 e^2}{1-e^2}} = 1$$

Entonces el lugar geométrico que describe P es una Elipse con centro en $\left(\frac{m}{1-e^2}, 0\right)$,
semieje mayor = $\frac{me}{1-e^2}$ y *semieje menor* = $\frac{me}{\sqrt{1-e^2}}$.

La pendiente de una recta tangente a una curva en un punto $P(x_P, y_P)$. Para esto tomemos otro punto $Q(x_Q, y_Q)$ sobre la curva, tracemos la secante PQ , la prolongamos en ambos sentidos y luego marcamos un vector de dirección sobre ella. Luego dejamos que Q se acerque sobre la curva hacia P , llevando con él la recta secante. La posición final que tiene la secante cuando Q coincide con P , da la recta tangente a la curva en el punto P . Como el vector tangente a la curva es el límite del vector secante, si existe dicho límite, la pendiente de la recta tangente deberá ser el límite de la pendiente de la secante, a medida que la abscisa del punto Q tienda a la del punto P , si existe el límite.

En el caso de las cónicas siempre existirá la tangente ya que la Elipse, la Parábola y cada rama de la Hipérbola son curvas suaves o derivables.

La pendiente de PQ es

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

donde (x_P, y_P) , (x_Q, y_Q) son las coordenadas de P y de Q (Figura 17), y en consecuencia la pendiente λ de la tangente a una curva cualquiera en el punto P es

$$\lambda = \lim_{x_Q \rightarrow x_P} \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

si existe.

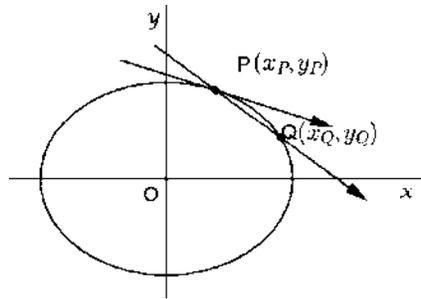


Figura 17. Tangente a una curva. Límite de la secante PQ cuando Q se acerca indefinidamente a P .

Para la Elipse, sin pérdida de generalidad consideremos $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Por la simetría de la Elipse podemos tomar P y Q en el primer cuadrante y como estos puntos satisfacen la ecuación podemos escribir

$$y_Q^2 = b^2 \left(1 - \frac{x_Q^2}{a^2}\right) \qquad y_P^2 = b^2 \left(1 - \frac{x_P^2}{a^2}\right)$$

y entonces

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} \cdot \frac{y_Q + y_P}{y_Q + y_P} = \frac{y_Q^2 - y_P^2}{x_Q - x_P} \cdot \frac{1}{y_Q + y_P}$$

sustituyendo en esta expresión los valores de y_Q^2 e y_P^2 , la pendiente de la secante se convierte en

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_P^2 - x_Q^2}{x_Q - x_P} \cdot \frac{1}{y_Q + y_P}$$

o bien

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_Q + x_P}{y_Q + y_P}$$

Entonces

$$\lambda = \lim_{x_Q \rightarrow x_P} \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \lim_{x_Q \rightarrow x_P} -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_Q + x_P}{y_Q + y_P} = -\frac{2b^2 x_P}{2a^2 y_P} = -\frac{b^2 x_P}{a^2 y_P}$$

esto porque se está considerando el primer cuadrante y en éste la Elipse se comporta como una función continua.

Ahora bien, la pendiente de la tangente a la Elipse en el punto (r, s) es $\lambda = -(b^2r/a^2s)$ y por tanto la tangente a la Elipse en este punto tendrá por ecuación

$$y - s = \frac{-b^2r}{a^2s}(x - r)$$

Al multiplicar por s/b^2 ambos miembros de la ecuación se obtiene

$$\frac{sy}{b^2} - \frac{s^2}{b^2} = -\frac{rx}{a^2} + \frac{r^2}{a^2}$$

Pero como el punto (r, s) está en la Elipse cumple que

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} = 1$$

y así la ecuación de la tangente a la Elipse es de la forma

$$\frac{rx}{a^2} + \frac{sy}{b^2} = 1$$

Con esto podemos probar la siguiente proposición, que es una propiedad muy importante de la Elipse:

Proposición. La recta normal a la Elipse en un punto $P(x, y)$ de esta es bisectriz del ángulo formado por los radios focales $F'P$ y FP .

Cabe mencionar que esta propiedad, como muchas otras de las secciones cónicas, ya era conocida por Apolonio de Perga.

Para demostrarla consideremos una la Elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, la tangente a esta en el punto P de la Elipse y la recta normal también por el punto P . Si α y β son los ángulos formados por los segmentos $F'P$, FP y por la recta normal (Figura 18). Se desea probar que $\alpha = \beta$.

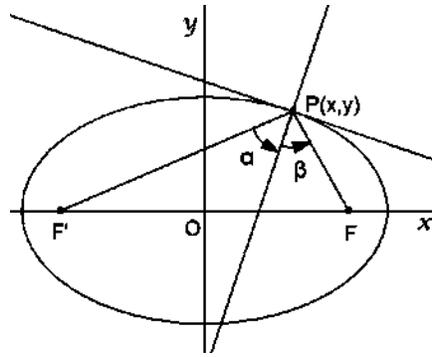


Figura 18. La normal en un punto P de la Elipse es bisectriz del ángulo $F'PF$.

Ya se vio que la recta tangente a la Elipse en $P(x,y)$ tiene pendiente $\lambda_1 = -b^2x/a^2y$, por tanto la normal tendrá pendiente $\lambda_2 = a^2y/b^2x$; los segmentos $F'P$ y FP tiene pendientes $\lambda_3 = y/(x+c)$ y $\lambda_4 = y/(x-c)$, respectivamente. Y recordando que el ángulo θ entre dos rectas de pendientes λ_1 y λ_2 se puede determinar a partir de la relación

$$\tan \theta = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \lambda_2}$$

podemos determinar los ángulos α y β .

Como α está formado por el segmento $F'P$ y por la recta normal se tiene que

$$\tan \alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{1 + \lambda_2 \lambda_3} = \frac{\frac{a^2y}{b^2x} - \frac{y}{x+c}}{1 + \frac{a^2y}{b^2x} \cdot \frac{y}{x+c}} = \frac{a^2xy + a^2cy - b^2xy}{b^2x^2 + b^2cx + a^2y^2} = \frac{(a^2 - b^2)xy + a^2cy}{b^2x^2 + a^2y^2 + b^2cx}$$

pero $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ por estar (x,y) en la Elipse, y también $c^2 = a^2 - b^2$, usando estas relaciones la expresión anterior se reduce a

$$\tan \alpha = \frac{c^2xy + a^2cy}{a^2b^2 + b^2cx} = \frac{cy(cx + a^2)}{b^2(a^2 + cx)} = \frac{cy}{b^2}$$

De manera análoga tenemos

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \frac{\lambda_4 - \lambda_2}{1 + \lambda_4 \lambda_2} = \frac{\frac{y}{x-c} - \frac{a^2y}{b^2x}}{1 + \frac{y}{x-c} \cdot \frac{a^2y}{b^2x}} = \frac{b^2xy - a^2xy + a^2cy}{b^2x^2 - b^2cx + a^2y^2} = \frac{-(a^2 - b^2)xy + a^2cy}{b^2x^2 + a^2y^2 - b^2cx} \\ &= \frac{-c^2xy + a^2cy}{a^2b^2 - b^2cx} = \frac{cy(-cx + a^2)}{b^2(a^2 - cx)} = \frac{cy}{b^2} \end{aligned}$$

De esto se sigue que los ángulos α y β son iguales y, por tanto, la normal es bisectriz del ángulo formado por $F'P$ y FP . Esto equivale a decir que los dos radios focales a un punto P de la Elipse forman ángulos iguales con la tangente en P .

Hay un principio físico que indica que si un rayo de luz choca contra una superficie reflectora el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Como las ondas sonoras se reflejan de igual manera que las luminosas un sonido emitido en un foco de la Elipse puede ser escuchado claramente en el otro foco. A este fenómeno se conoce como “galería de los susurros”.

II.2.2 Hipérbola

Consideremos dos puntos fijos F y F' (llamados *focos*) en un plano, separados a una distancia $2c$ entre sí y dejemos que un punto $P(x, y)$ se mueva en el plano de modo que la diferencia de sus distancias a F y F' sea una constante, igual a $2a$. Si $F'P - FP = 2a$, el lugar geométrico que describe P es una rama de la una Hipérbola y si $FP - F'P = 2a$ se obtiene la segunda rama. Obsérvese que $2a = FP - F'P < FF' = 2c$ y puesto que la diferencia de los lados de un triángulo es menor que el tercer lado; b es tal que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Al igual que en la Elipse, llamamos *Eje transverso* de la Hipérbola a la recta que pasa por F y F' ; los dos puntos en los que corta a la Hipérbola, A y A' , se llaman *Vértices*; el segmento AA' *Eje mayor* (o real, porque corta a la Hipérbola) y; la mediatriz de AA' es el *eje conjugado*. La intersección O de los ejes se llama *Centro* de la Hipérbola (Figura 19). El segmento BB' del *Eje conjugado*, de longitud $2b$, y en cuyo punto medio se encuentra el centro, se llama también *Eje menor* imaginario, porque no corta a la Hipérbola; donde $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ puede ser menor, mayor o igual que a ; pero c siempre es mayor que a o que b .

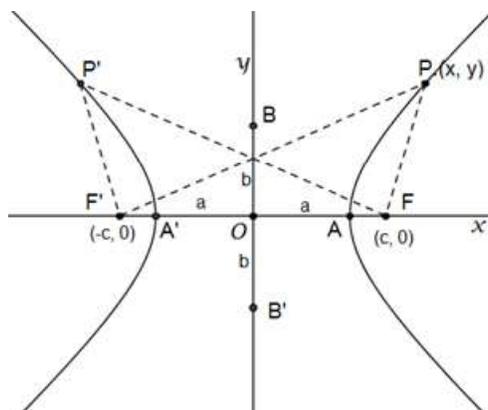


Figura 19. Ilustración usual para la deducción de la ecuación de la Hipérbola.

Por esta A en la Hipérbola, de la definición, se cumple que

$$2a = F'A - FA = F'A' + A'A - FA$$

y también, por misma razón con A'

$$2a = FA' - F'A' = FA + AA' - F'A'$$

Igualando ambas ecuaciones se ve que $FA = F'A'$ y por tanto $AA' = 2a$. Nuevamente, $e = c/a$ es la excentricidad de la Hipérbola, en este caso su valor es mayor que la unidad.

Para deducir la ecuación elijamos como ejes coordenados los ejes de la Hipérbola, si los focos están en el *eje x* con coordenadas $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ y el punto $P(x, y)$ se mueve de modo que $F'P - FP = 2a$ que $FP - F'P = 2a$, P describe la rama de la derecha y la de la izquierda respectivamente. Pasando las igualdades a su forma algebraica tenemos $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ y $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$.

Transponiendo el radical FP y elevando al cuadrado se obtiene

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

el doble signo indica la rama de la derecha y la de la izquierda respectivamente. Simplificando tenemos

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

lo que proporciona el radio focal para cada rama.

$$\frac{c}{a}x - a = +\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = FP$$

o $FP = ex - a$ y por tanto $F'P = ex + a$ para la rama derecha y

$$\frac{c}{a}x - a = -\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -F'P$$

o $FP = -ex + a$ y por tanto $F'P = -ex - a$ para la rama izquierda.

Regresando a la ecuación

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

reduciendo términos

$$a^4 + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

o bien

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Como $b^2 = c^2 - a^2$ tenemos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

dividiendo por a^2b^2 tenemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

como ecuación ordinaria de la Hipérbola con centro en el origen y focos sobre el eje x . Pero para llamar a esta ecuación de la Hipérbola falta probar la otra implicación de la *ecuación de una curva*; es decir, que todo punto que satisfaga esta ecuación está en la Hipérbola, lo que significa que debe satisfacer alguna de las dos partes de la propiedad que la define. Para esto veamos que todos los pasos son reversibles, excepto y esto es importante, cuando se elevó al cuadrado la primera vez, pues si queremos revertir este paso obtenemos de

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

que es lo mismo que

$$(x+c)^2 + y^2 = \left(2a \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

sacándole raíz cuadrada se obtiene

$$\mp \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a;$$

es decir, cuatro posibilidades en lugar de las dos partes de la propiedad de definición. Pero $-\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$ es imposible puesto que $2a$ es positivo. El caso

$+\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a < 2c$ también es imposible, pues indica que la suma de dos de los lados de un triángulo es menor que el tercero (Figura 20). De modo que las posibilidades que quedan son que P cumpla $+\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$ o $-\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$, las cuales son precisamente las dos relaciones que establece la definición de la Hipérbola.

Así,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es la ecuación para una Hipérbola horizontal con centro en el origen.

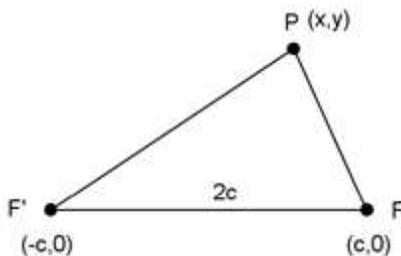


Figura 20. Triángulo formado por los focos y un punto P de la Hipérbola $F'P + FP \geq F'F$.

Ahora consideremos el caso en que los focos de la Hipérbola están sobre el eje ya una distancia $2c$ y $F'P - FP = 2a$ como se muestra en la Figura 21.

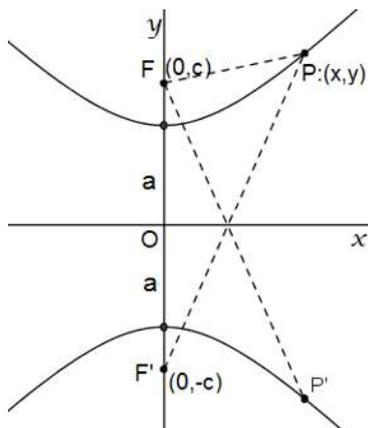


Figura 21. Hipérbola con focos en el eje y.

En términos algebraicos esto es: $\sqrt{x^2 + (y + c)^2} - \sqrt{x^2 + (y - c)^2} = 2a$ para la rama superior
 y; $F'P - FP = 2a$ que es $\sqrt{x^2 + (y - c)^2} - \sqrt{x^2 + (y + c)^2} = 2a$, para la rama inferior.

Transponiendo el radical FP , elevando al cuadrado y simplificando se tiene

$$cy - a^2 = \pm a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

Elevando nuevamente al cuadrado ambos términos y reduciendo

$$c^2y^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

o bien

$$(c^2 - a^2)y^2 - a^2x^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

y como $b^2 = c^2 - a^2$ tenemos

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

como ecuación de la Hipérbola vertical en posición ordinaria.

La distinción de una Hipérbola vertical u horizontal se hace con base en si el término x^2 o y^2 es positivo, a representa la distancia del centro al vértice de la Hipérbola, b es la longitud del semieje menor y la relación básica es $c^2 = a^2 + b^2$; y

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

Las dos Hipérbolas con ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

se llaman *Hipérbolas conjugadas* (Figura 22). Estas tienen la relación de que el eje mayor de una se convierte en el menor de la otra y viceversa.

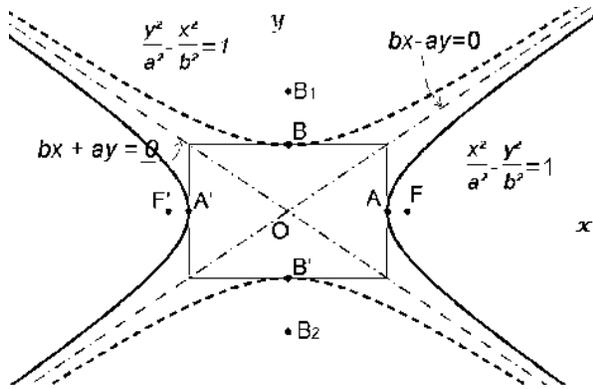


Figura 22. Hipérbolas conjugadas.

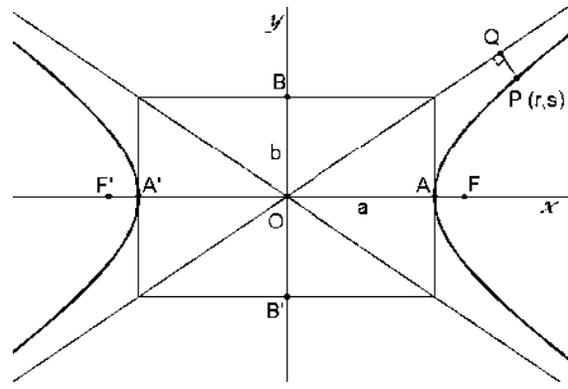


Figura 23. Asíntotas de la Hipérbola horizontal.

A diferencia de lo que sucede en la Elipse, el eje menor no corta a la Hipérbola. Pero si se traza el rectángulo de lados $2a$ y $2b$ con centro en el centro de la Hipérbola y lados paralelos a sus ejes, las diagonales prolongadas de este rectángulo se llaman *asíntotas* de la Hipérbola.

Una asíntota a una curva es una recta tal que, a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente y tiende a cero.

Para la Hipérbola horizontal con centro en el origen las ecuaciones de sus asíntotas serán

$$y = \frac{b}{a}x \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Veamos que estas rectas, efectivamente, son asíntotas de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por simetría de la Hipérbola basta considerar sólo el primer cuadrante (Figura 23).

Sea $P(r, s)$ en el lugar geométrico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

o

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Entonces se cumple que

$$b^2r^2 - a^2s^2 = a^2b^2$$

y podemos expresar la asíntota que pasa por el primer cuadrante en su forma general

$$bx - ay = 0$$

Sea $PQ = d$, la distancia de P a la recta. La distancia de un punto (r, s) a una recta $Ax + By + C = 0$ está dada por

$$d = \frac{|Ar + Bs + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

que para el punto P y la recta es

$$d = \frac{|br - as|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|br - as|}{c}$$

multiplicando el numerador y el denominador por $|br + as|$

$$d = \frac{|br - as|}{c} \cdot \frac{|br + as|}{|br + as|} = \frac{b^2r^2 - a^2s^2}{c(br + as)}$$

sustituyendo

$$b^2r^2 - a^2s^2 = a^2b^2$$

se tiene

$$d = \frac{a^2b^2}{c(br + as)}$$

donde el signo de valor absoluto no es necesario puesto que a, b, c, r, s son todos positivos, pues (r, s) está en el primer cuadrante. De $b^2r^2 - a^2s^2 = a^2b^2$ se tiene $as = b\sqrt{r^2 - a^2}$ que se considera positiva, pues a y s ambos positivos. Entonces

$$d = \frac{a^2b^2}{c(br + b\sqrt{r^2 - a^2})} = \frac{a^2b^2}{cb(r + \sqrt{r^2 - a^2})} = \frac{a^2b}{cr \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2}\right)}$$

De aquí que $sr \rightarrow \infty \Rightarrow d \rightarrow 0$, con lo cual se demuestra que la recta es una asíntota de la Hipérbola.

Ahora, para demostrar la propiedad de dirección de una asíntota, primero deduzcamos la ecuación de la pendiente de una recta tangente a una Hipérbola en un punto $P(x_P, y_P)$. Ya se vio, cuando se dedujo la tangente a una Elipse, que la pendiente λ de la tangente a una curva cualquiera en el punto P es

$$\lambda = \lim_{x_Q \rightarrow x_P} \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

si existe.

Para la Hipérbola, como P y Q satisfacen $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, podemos escribir

$$y_Q^2 = b^2 \left(\frac{x_Q^2}{a^2} - 1 \right) \qquad y_P^2 = b^2 \left(\frac{x_P^2}{a^2} - 1 \right)$$

y entonces

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} \cdot \frac{y_Q + y_P}{y_Q + y_P} = \frac{y_Q^2 - y_P^2}{x_Q - x_P} \cdot \frac{1}{y_Q + y_P}$$

Sustituyendo en esta expresión los valores de y_Q^2 e y_P^2 , la pendiente de la secante se convierte en

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_Q^2 - x_P^2}{x_Q - x_P} \cdot \frac{1}{y_Q + y_P}$$

o bien

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_Q + x_P}{y_Q + y_P}$$

Entonces

$$\lambda = \lim_{x_Q \rightarrow x_P} \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \lim_{x_Q \rightarrow x_P} \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_Q + x_P}{y_Q + y_P} = \frac{2b^2 x_P}{2a^2 y_P} = \frac{b^2 x_P}{a^2 y_P}$$

esto es válido porque se está considerando el primer cuadrante y en éste la Hipérbola se comporta como una función continua.

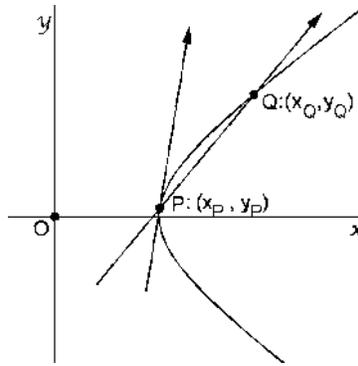


Figura 24. Tangente a una curva. Límite de la secante PQ cuando Q se acerca indefinidamente a P .

Ahora bien, la pendiente de la tangente a la Hipérbola en el punto (r, s) es $\lambda = (b^2 r / a^2 s)$. Sustituyendo $as = b\sqrt{r^2 - a^2}$ se tiene $\lambda = br / a\sqrt{r^2 - a^2}$, que es lo mismo que

$$\lambda = \frac{b}{a\sqrt{1 - \left(\frac{a^2}{r^2}\right)}}$$

cuando r crece indefinidamente λ se acerca ab/a , que es la pendiente de la asíntota.

Cuando las asíntotas forman ángulo recto la Hipérbola se llama equilátera o rectangular, y esto sucede cuando $a = b$, en este caso $x^2 - y^2 = a^2$, y $c^2 = 2a^2$ de modo que $e = \sqrt{2}$ para todas las Hipérbolas equiláteras.

Se observa que para una Hipérbola cualquiera en posición ordinaria las ecuaciones de las asíntotas son

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$$

donde las expresiones de la izquierda son los factores de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Para una Hipérbola equilátera las asíntotas son $x \pm y = 0$ (Figura 25).

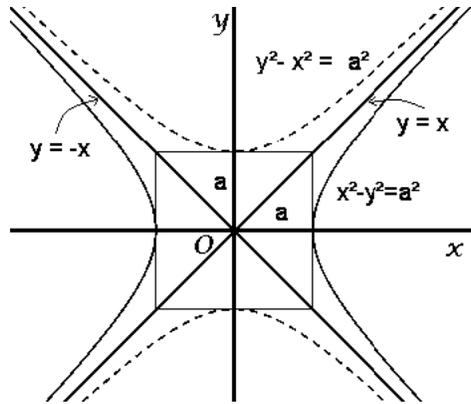


Figura 25. Hipérbolas equiláteras.

Como las asíntotas de la Hipérbola equilátera son perpendiculares, una buena opción es considerarlas como ejes coordenados, quedando así la Hipérbola en los cuadrantes I y III o II y IV según se elijan los ejes. Si se eligen de tal modo que las ramas de la Hipérbola estén en los cuadrantes I y III los focos estarán en la recta a 45° que pasa por el origen, y para que $FF' = 2c$ los focos deberán tener por coordenadas $(\frac{c}{\sqrt{2}}, \frac{c}{\sqrt{2}})$ y $(-\frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{c}{\sqrt{2}})$ (Figura 26).

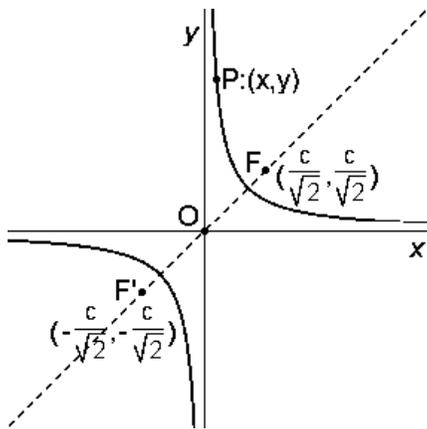


Figura 26. Hipérbola equilátera con los ejes coordenados como asíntotas.

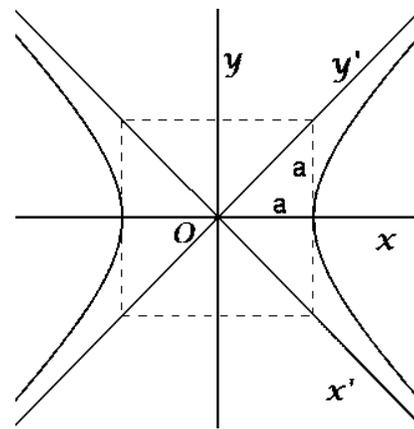


Figura 27. Hipérbola equilátera girando los ejes 45°.

A partir de la propiedad que define a la Hipérbola, $F'P - FP = 2a$ y $FP - F'P = 2a$, se tiene:

$$\sqrt{\left(x + \frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2} - \sqrt{\left(x - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2a$$

y

$$\sqrt{\left(x - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2} - \sqrt{\left(x + \frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2a$$

pasando el radical *FP*, elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando se tiene

$$\frac{c}{\sqrt{2}}(x + y) - a^2 = \pm a \sqrt{\left(x - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

elevando nuevamente al cuadrado ambos términos

$$\frac{c^2}{2}(x^2 + y^2 + 2xy) - 2a^2 \frac{c}{\sqrt{2}}(x + y) + a^4 = a^2[(x^2 + y^2) - 2 \frac{c}{\sqrt{2}}(x + y) + c^2]$$

haciendo $a^2 = \frac{c^2}{2}$ y reduciendo términos queda

$$\boxed{2xy = a^2}$$

como ecuación de la Hipérbola equilátera con sus asíntotas los ejes coordenados.

Otra manera de reducir la ecuación de la Hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ es girando los ejes un ángulo $\alpha = -45^\circ$ (Figura 27).

Las ecuaciones de transformación para la rotación son

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha$$

$$y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha$$

sustituyendo α se tiene

$$x = x' \cos(-45^\circ) - y' \operatorname{sen}(-45^\circ) = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = x' \operatorname{sen}(-45^\circ) + y' \cos(-45^\circ) = \frac{-x' + y'}{\sqrt{2}}$$

sustituyendo en $x^2 - y^2 = a^2$ obtenemos

$$\frac{x'^2 + 2x'y' + y'^2}{2} - \frac{x'^2 - 2x'y' + y'^2}{2} = a^2$$

o bien $2x'y' = a^2$. La misma ecuación que se obtuvo cuando se consideró las asíntotas como ejes coordenados.

Al igual que la Elipse, la Hipérbola también tiene dos lados rectos, uno en cada hoja, y la longitud de cada uno de estos es $2b^2/a$, donde a es el eje mayor.

Para las ecuaciones paramétricas de la Hipérbola basta relacionar una identidad trigonométrica en la que la diferencia de dos cuadrados sea igual a 1, y esta identidad es $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$ o $\tan^2 \theta - \sec^2 \theta = -1$. Por lo tanto las ecuaciones paramétricas de la Hipérbola son

$$\boxed{x = a \sec \theta \quad y = b \tan \theta}$$

para el caso horizontal, y

$$\boxed{x = a \tan \theta \quad y = b \sec \theta}$$

para el caso vertical.

Veamos de donde se obtienen estas ecuaciones paramétricas para una Hipérbola horizontal. Tracemos dos circunferencias concéntricas de radios a y b , con centro en el origen, y tracemos una recta l por el origen y que forme un ángulo θ con la parte positiva del eje x (Figura 28). Sea C el punto de intersección de la recta con la circunferencia de radio a . En C tracemos la tangente a la circunferencia y llamemos D al punto de intersección de la tangente con el eje x . Por B tracemos la perpendicular al eje x y nombremos E al punto en el que esta recta corta a la recta l . Por D y E tracemos perpendiculares a los ejes x e y , respectivamente; designemos por P el punto de intersección de estas rectas. Ahora, cuando θ varía, el punto P describe un lugar geométrico; si nos basamos en los triángulos rectángulos OCD y OBE obtenemos

$$x = OD = OC \sec \theta = a \sec \theta$$

y

$$y = DP = BE = OE \tan \theta = b \tan \theta.$$

Estos valores satisfacen la ecuación de la Hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

por lo tanto $x = a \sec \theta$ e $y = b \tan \theta$ son las ecuaciones paramétricas de una Hipérbola horizontal. Para una Hipérbola vertical se hace de manera análoga.

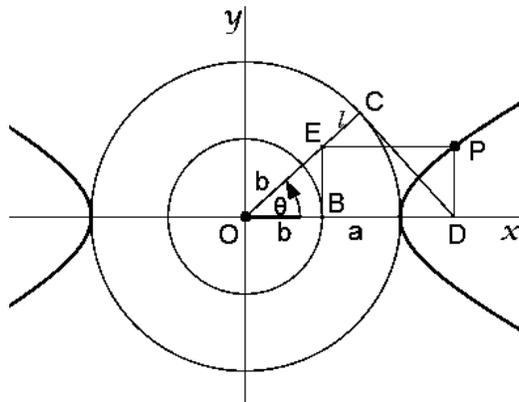


Figura 28. Ilustración de la que se obtienen las ecuaciones paramétricas de la Hipérbola.

Análogo a la Elipse, la recta D que se encuentra a una distancia a/e del centro de una Hipérbola, donde a es el semieje mayor, y que es perpendicular a su eje transversocumple con la propiedad de que si se toma un punto $P(x, y)$ de la Hipérbola, se tiene

$$FP/PD = e$$

donde e es la excentricidad de la Hipérbola y es mayor que 1, PD es la distancia del P a la la recta D , y F es el foco correspondiente a D ; es decir, del mismo lado de del centro que D como se muestra en la Figura 29. A esta recta se le llama directriz de la Hipérbola correspondiente a F ; también hay una directriz correspondiente a F' .

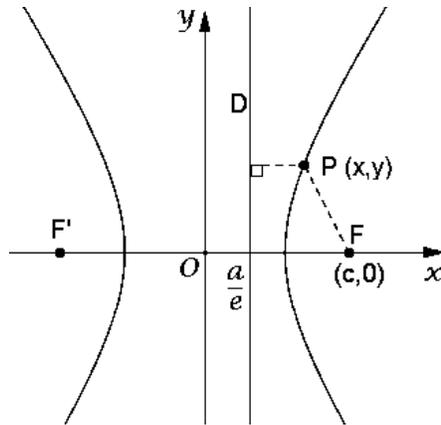


Figura 29. Directriz de la Hipérbola, $FP/PD = e$.

Cuando se dedujo la ecuación de la Hipérbola se encontró que una expresión para un radio focal es

$$FP = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}x - a = ex - a$$

y es claro de la figura anterior que

$$PD = x - \frac{a}{e}$$

Al desarrollar el cociente y simplificar tenemos

$$\frac{FP}{PD} = \frac{ex - a}{x - \frac{a}{e}} = \frac{ex - a}{\frac{ex - a}{e}} = e.$$

El recíproco también es válido; es decir, si tomamos un punto fijo $F(m, 0)$ y una recta D fija, que en este caso tomamos como eje y , y un punto $P(x, y)$ se mueve de tal manera que se cumpla que $FP/PD = e > 1$, el lugar geométrico que describe P es una Hipérbola (Figura 30).

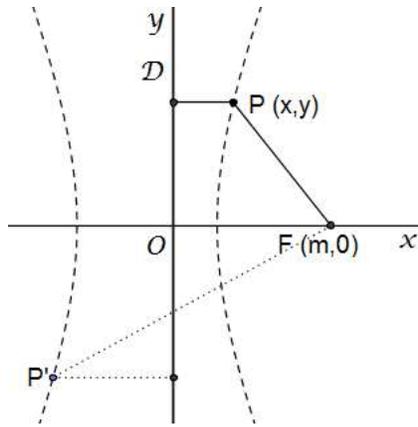


Figura 30. Hipérbola como lugar geométrico que describe P , cumpliendo $FP/PD = e > 1$.

Veamos, $FP = \sqrt{(x - m)^2 + y^2}$ la distancia de P a D es, claramente, x . Efectuando el cociente

$$\frac{FP}{PD} = \frac{\sqrt{(x - m)^2 + y^2}}{x} = e > 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - m)^2 + y^2} = ex$$

elevando al cuadrado ambos miembros y desarrollando

$$x^2 - 2mx + m^2 + y^2 = e^2x^2$$

o

$$(e^2 - 1)x^2 + 2mx - y^2 = m^2$$

dividiendo por $(e^2 - 1)$

$$\left[x^2 + \frac{2mx}{(e^2 - 1)} \right] - \frac{y^2}{(e^2 - 1)} = \frac{m^2}{(e^2 - 1)}$$

Completando el cuadrado se tiene

$$\left(x + \frac{m}{(e^2 - 1)} \right)^2 - \frac{y^2}{(e^2 - 1)} = m^2 + \frac{m^2}{(e^2 - 1)^2} = \frac{m^2 e^2}{(e^2 - 1)^2}$$

al dividir la ecuación por $\frac{m^2 e^2}{(e^2-1)^2}$ se llega a

$$\frac{\left(x + \frac{m}{(e^2-1)}\right)^2}{\frac{m^2 e^2}{(e^2-1)^2}} - \frac{y^2}{\frac{m^2 e^2}{e^2-1}} = 1$$

Todos los términos son positivos pues $(e^2 - 1)$ es positivos por ser $e > 1$. Así que la ecuación es la de una Hipérbola con centro en $\left(-\frac{m}{(e^2-1)}, 0\right)$, semieje mayor $= \frac{me}{e^2-1}$, semieje menor $= me/\sqrt{e^2 - 1}$. Y la distancia de D al centro de la Hipérbola esa/e , donde a es el semieje mayor, pues

$$\frac{a}{e} = \frac{\frac{me}{e^2-1}}{e} = \frac{m}{e^2 - 1}$$

En la Elipse se mostró que la normal a esta en un punto P es bisectriz del ángulo formado por $F'P$ y por FP . La Hiperbola tiene una propiedad semejante:

Proposición. La tangente a una Hipérbola en un punto $P(x,y)$ es bisectriz del ángulo formado por los segmentos $F'P$ y FP , donde F' y F son los focos de la Hipérbola.

Demostración. Consideremos la Hipérbola $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ y llamemos α al ángulo formado por $F'P$ y por la tangente y al ángulo formado por la tangente y PF llamémoslo β como se muestra en la Figura 31, demostraremos que $\alpha = \beta$.

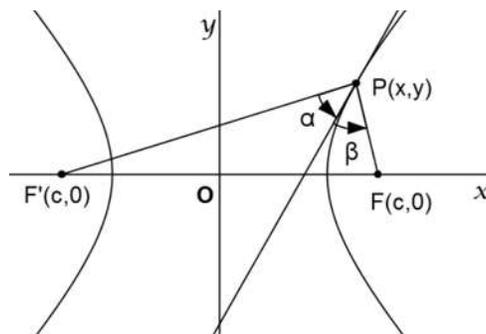


Figura 31. La tangente en un punto P de la Hipérbola es bisectriz del ángulo $F'PF$.

El segmento $F'P$ tiene pendiente $\lambda_1 = y/(x - c)$, y ya mostró que la pendiente de la tangente a la Hipérbola es $\lambda_2 = b^2x/a^2y$ y como α está formado por el segmento $F'P$ y por la recta normal se tiene que

$$\tan \alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2} = \frac{\frac{b^2x}{a^2y} - \frac{y}{x+c}}{1 + \frac{b^2x}{a^2y} \cdot \frac{y}{x+c}} = \frac{b^2x^2 + b^2cx - a^2y^2}{a^2xy + a^2cy + b^2xy} = \frac{b^2x^2 - a^2y^2 + b^2cx}{(a^2 + b^2)xy + a^2cy}$$

pero $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ por estar (x, y) en la Elipse, y también $c^2 = a^2 + b^2$, usando estas relaciones la expresión anterior se reduce a

$$\tan \alpha = \frac{a^2b^2 + b^2cx}{c^2xy + a^2cy} = \frac{b^2(cx + a^2)}{cy(cx + a^2)} = \frac{b^2}{cy}$$

De manera análoga para β , formado por la tangente (de pendiente λ_2) y por el segmento FP , de pendiente $\lambda_3 = y/(x - c)$ se tiene

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{1 + \lambda_2\lambda_3} = \frac{\frac{y}{x-c} - \frac{b^2x}{a^2y}}{1 + \frac{b^2x}{a^2y} \cdot \frac{y}{x-c}} = \frac{a^2y^2 - b^2x^2 + b^2cx}{a^2xy - a^2cy + b^2xy} = \frac{-(b^2x^2 - a^2y^2) + b^2cx}{(a^2 + b^2)xy - a^2cy} \\ &= \frac{-a^2b^2 + b^2cx}{c^2xy - a^2cy} = \frac{-b^2(cx - a^2)}{cy(cx - a^2)} = \frac{b^2}{cy} \end{aligned}$$

Y se sigue que los ángulos α y β son iguales y la proposición queda demostrada.

Si en un espejo que tenga forma de Hipérbola se emite un rayo de luz desde un foco de la Hipérbola y choca contra el espejo se alejará directamente del otro foco (Figura 32).

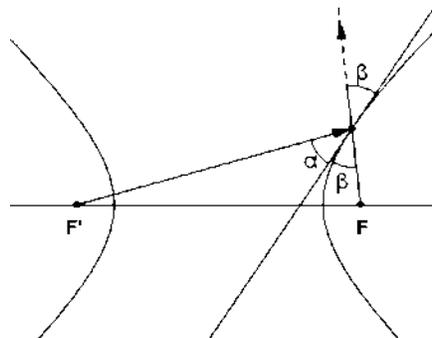


Figura 32. Propiedad óptica de la Hipérbola.

II.2.3. Parábola

Consideremos como propiedad de definición de la Parábola como el lugar geométrico que describe un punto $P(x, y)$ que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a una recta fija D , (llamada *directriz*) sea siempre igual a su distancia a un punto fijo F (llamado *foco*) y que no pertenece a la recta: $FP = PD$.

Si se traza la recta que pasa por el foco, perpendicular a la directriz, la Parábola es simétrica respecto a esta recta, llamada *eje* de la Parábola. El punto en el que interseca el eje a la Parábola se llama *vértice*. De la definición es claro que se encuentra a la mitad de la distancia entre el foco y la directriz. Una Parábola no tiene centro.

Para obtener la ecuación ordinaria consideremos que el origen se encuentre en el vértice y el eje x esté sobre el eje de la Parábola (Figura 33).

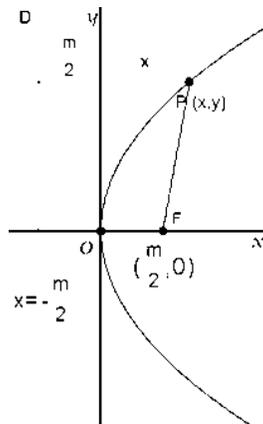


Figura 33. Ilustración de la que se obtiene la ecuación ordinaria de la Parábola.

Si la distancia entre el foco F y la directriz D es m , las coordenadas del foco serán $(\frac{m}{2}, 0)$ y la ecuación de D será $x = -m/2$.

Si P se mueve de tal manera que $FP = PD$, se tiene

$$\sqrt{\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{m}{2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y desarrollando

$$x^2 - mx + \frac{m^2}{4} + y^2 = x^2 + mx + \frac{m^2}{4}$$

que se reduce a

$$y^2 = 2mx$$

Para ver que todo punto $P(x, y)$ que satisfaga esta ecuación se encuentra en la Parábola, observemos que el paso donde se elevó al cuadrado no es reversible, pues al hacerlo se tiene

$$\pm \sqrt{\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{m}{2}$$

pero $x = \frac{y^2}{2m}$ es positivo y por tanto $x + \frac{m}{2}$ es positivo ya que m es positiva por ser una distancia. Así, que el signo del radical tiene que ser positivo, y

$$\sqrt{\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{m}{2}$$

es la propiedad que define a la Parábola; por lo tanto el punto P está en ella.

Entonces la ecuación ordinaria de la Parábola horizontal con vértice en el origen es

$$y^2 = 2mx$$

Si en lugar de considerar el eje de la Parábola en el eje x se se considera en el eje y (Parábola vertical) la ecuación será

$$x^2 = 2my$$

resultado que se puede obtener de $y^2 = 2mx$ al girar los ejes un ángulo de -90° , pues al sustituir este ángulo en las ecuaciones de transformación para la rotación de ejes

$$x = x' \cos(-90^\circ) - y' \sin(-90^\circ) = y'$$

$$y = x' \sin(-90^\circ) + y' \cos(-90^\circ) = -x'$$

dando así

$$x'^2 = 2my'$$

La Parábola también puede abrirse hacia la izquierda y hacia abajo, se pueden obtener sus ecuaciones girando los ejes un ángulo de 180° (para la que abre a la izquierda) y un ángulo de 90° (para la que abre hacia abajo); los resultados serán

$$\boxed{y^2 = -2mx \quad y \quad x^2 = -2my}$$

respectivamente.

Además, si el vértice de la Parábola no está en el origen las ecuaciones para las Parábolas vertical y horizontal con centro en (h, k) serán

$$\boxed{(y - k)^2 = 2m(x - h)} \quad y \quad \boxed{(x - h)^2 = 2m(y - k)}$$

respectivamente.

Para el trazo de una Parábola ayuda algo el saber que el lado recto, segmento perpendicular al eje de la Parábola en el foco, tiene longitud $2m$, una distancia m desde el foco hasta cada extremo.

Es de importancia conocer la ecuación o la pendiente de la recta tangente a una Parábola en un punto $P(x_P, y_P)$. Consideremos la que tiene por ecuación $y^2 = 2mx$, y hemos visto que la pendiente de la tangente a una curva está dada por

$$\lambda = \lim_{x_Q \rightarrow x_P} \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \lim_{x_Q \rightarrow x_P} \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} \cdot \frac{y_Q + y_P}{y_Q + y_P} = \lim_{x_Q \rightarrow x_P} \frac{y_Q^2 - y_P^2}{x_Q - x_P} \cdot \frac{1}{y_Q + y_P}$$

donde $Q(x_Q, y_Q)$ también está en la Parábola, así que se cumple $y_Q^2 = 2mx_Q$ y también $y_P^2 = 2mx_P$. Sustituyendo estos valores en la expresión para la pendiente se tiene

$$\lambda = \lim_{x_Q \rightarrow x_P} \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \lim_{x_Q \rightarrow x_P} \frac{2m(x_Q - x_P)}{x_Q - x_P} \cdot \frac{1}{y_Q + y_P} = \lim_{x_Q \rightarrow x_P} \frac{2m}{y_Q + y_P} = \frac{2m}{2y_P} = \frac{m}{y_P}$$

En un punto de coordenadas (r, s) la pendiente de la tangente es m/s y su ecuación es $y - s = (m/s)(x - r)$ o bien $sy - s^2 = mx - mr$, pero como $s^2 = 2mr$ por estar en la Parábola la ecuación se reduce a

$$\boxed{sy = m(x - r)}$$

como ecuación de la recta tangente en un punto (r, s) de la Parábola.

Al igual que la Elipse y la Hipérbola, también podemos representar la Parábola en forma paramétrica, para esto tomemos, por simplicidad, una Parábola horizontal con vértice en el origen; es decir, la que tiene por ecuación $y^2 = 2mx$. La recta tangente en un punto $P(x, y)$ de esta curva tiene por pendiente $\lambda = \frac{m}{y} = \tan \theta$, con $y \neq 0$ y donde θ es el ángulo de inclinación de la tangente, de aquí se tiene

$$y = m \cot \theta.$$

y como el valor de α depende de la posición de P , lo podemos considerar como parámetro. Así podemos tomar el valor de y como una de las ecuaciones paramétricas de la Parábola. Sustituyendo este valor en $y^2 = 2mx$ se obtiene $x = \frac{m}{2} \cot^2 \theta$.

Así las ecuaciones paramétricas de la Parábola $y^2 = 2mx$ son

$$\begin{cases} x = \frac{m}{2} \cot^2 \theta \\ y = m \cot \theta. \end{cases}$$

Ahora podemos demostrar la siguiente propiedad de la Parábola.

Proposición. Si por un punto $P(r, s)$ se traza una paralela al eje de la Parábola ésta forma con la tangente un ángulo θ igual al que la tangente forma con el eje.

Demostración. Tomemos la Parábola $y^2 = 2mx$. Consideremos una paralela por P al eje de la Parábola, en este caso el eje x , y la tangente a ésta también en P (Figura 34).

La recta tangente tiene por ecuación $sy = m(x - r)$, haciendo $y = 0$ nos indica que ésta recta corta al eje x en $R(-r, 0)$, por tanto $RF = r + m/2$. También, por definición de la Parábola, se tiene que $FP = m/2 + r$. Es decir, el triángulo RFP es isósceles y por tanto $\angle FRP = \angle RPF = \theta$.

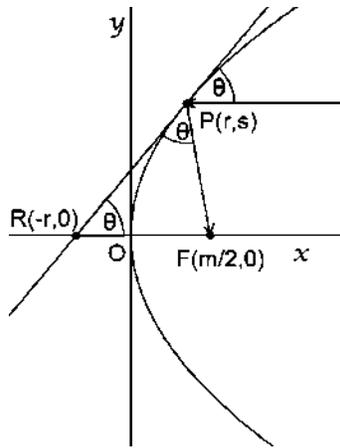


Figura 34. Propiedad óptica de la Parábola.

Los rayos del sol llegan a la tierra en forma paralela, entonces si un espejo en forma de Parábola se orienta hacia el sol los rayos que incidan en el espejo se reflejaran por el foco.

II.2.4. Principio unificador de las cónicas

En la Parábola, por definición, sabemos que si un punto $P(x, y)$ está en el lugar geométrico cumple con $FP = PD$ o bien $FP/PD = 1$ donde D es la recta directriz. Esto es similar a los problemas de lugares geométricos de la Elipse e Hipérbola donde se demostró que el lugar geométrico que describe P si $FP/PD = e < 1$ es una Elipse, y si $FP/PD = e > 1$ el lugar geométrico es una Hipérbola (Figura 35), donde D es la directriz en ambos casos y e es la excentricidad, así que se puede decir que en la Parábola su excentricidad tiene valor 1.

Esta forma de definir las cónicas se conoce como principio unificador, fue establecida por Pappus de Alejandría (290-350). Heath (1981) lo enuncia de la siguiente manera:

El lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto dado, está en una razón dada a una recta dada, es una sección cónica y, es una Elipse, una Parábola o una Hipérbola, según la razón sea menor, igual o mayor que la unidad. (p. 119)

La misma definición proporciona las tres curvas.

$$\frac{FP}{PD} = e \begin{cases} < 1, \text{Elipse} \\ = 1, \text{Parábola} \\ > 1, \text{Hipérbola} \end{cases}$$

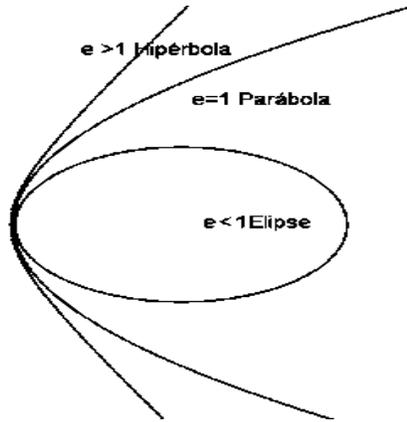


Figura 35. Principio unificador de las cónicas.

Este principio unificador permite obtener la ecuaciones de las tres cónicas en coordenadas polares, todas como un mismo problema. Si consideramos a F como el polo y la recta perpendicular a la directriz, que pasa por el polo, como dirección principal, entonces FP es r y $PD = m + r \cos \theta$, donde m es la distancia que hay del punto F a la directriz (Figura 36).

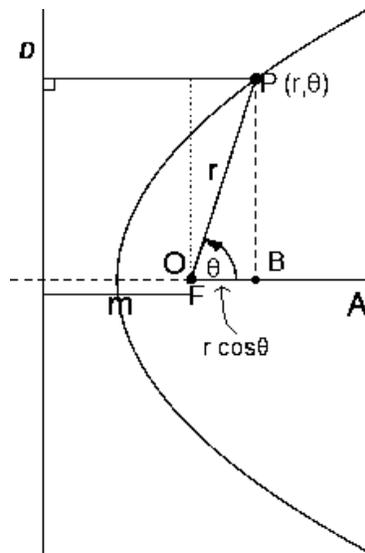


Figura 36. Ilustración para obtener la ecuación de las cónicas en coordenadas polares.

Entonces

$$\frac{FP}{PD} = \frac{r}{m + r \cos \theta} = e$$

para las tres cónicas, dando

$$r = em + re \cos \theta$$

o bien

$$r(1 - e \cos \theta) = em$$

y por tanto

$$r = \frac{em}{(1 - e \cos \theta)}$$

como la ecuación ordinaria, en coordenadas polares, de las tres curvas. La única forma en que se distinguen las curvas es por la magnitud de e .

Si el eje polar se rota un ángulo α como en la Figura 37 se obtiene la ecuación general

$$r = \frac{em}{(1 - e \cos(\theta - \alpha))}$$

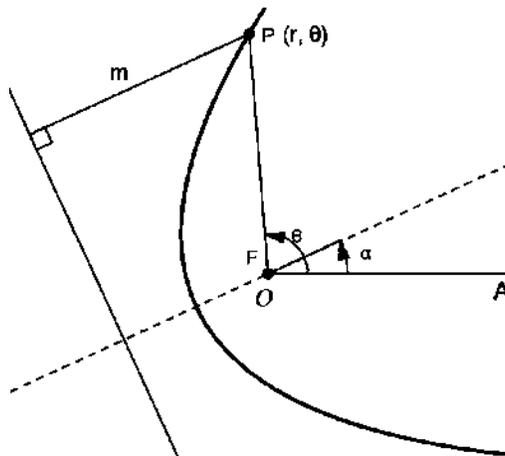


Figura 37. Cónica rotada un ángulo α .

Para el caso de la Hipérbola, se demostró que la relación $FP/PD = e$ vale para las dos ramas, donde sirve el mismo foco y la directriz correspondiente, pero la ecuación ordinaria anterior sólo sirve para la rama que tiene su foco en el origen. La otra rama tendrá una ecuación diferente en este sistema de referencia si se insiste en las r positivas, como se ha venido haciendo. Para la rama que no tiene su foco en el origen vemos que $FP = r$, pero como θ es mayor que 90° para toda la rama izquierda (Figura 38), la longitud de la proyección horizontal de FP es $-r \cos \theta$, por tanto $PD = -r \cos \theta - m$.

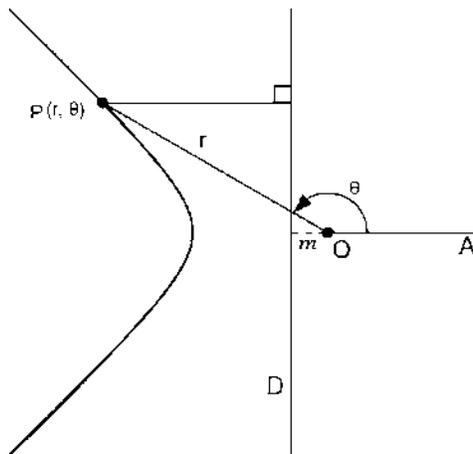


Figura 38. Ilustración para obtener la ecuación de la rama izquierda de la Hipérbola.

Así

$$\frac{FP}{PD} = \frac{r}{-r \cos \theta - m} = e$$

se reduce a

$$r = \frac{-em}{1 + e \cos \theta}$$

para la rama de la Hipérbola que no tiene su foco en el origen, pero donde el foco de la otra rama *sí está* en el origen.

Ejemplo 1. Determinar las ecuaciones en coordenadas polares de las dos ramas de la Hipérbola mostrada en laFigura 39.

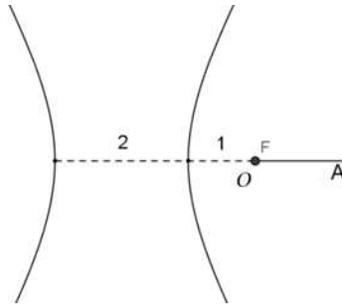


Figura 39. Ejemplo 1.

Solución. El centro de la Hipérbola está a la mitad de los dos vértices, en este caso se encuentra a una unidad de cada vértice; es decir, $a = 1$; y $c = 2$, es la distancia del centro de la Hipérbola al foco. Así que $e = \frac{c}{a} = 2$.

Para la rama derecha se tiene

$$r = \frac{em}{(1 - e \cos \theta)}$$

sustituyendo $e = 2$

$$r = \frac{2m}{(1 - 2 \cos \theta)}$$

Y cuando $\theta = 180^\circ$ r mide 1, o

$$1 = \frac{2m}{(1 - 2 \cos 180^\circ)} = \frac{2m}{1 - 2(-1)} = \frac{2m}{3}$$

de donde se tiene que $m = 3/2$. Sustituyendo estos valores en la ecuación ordinaria se tiene

$$r = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)}{1 - 2 \cos \theta}$$

o

$$r = \frac{3}{1 - 2 \cos \theta}$$

para la ecuación de la rama derecha.

Para la rama izquierda (que no tiene el foco en el origen), la ecuación será de la forma

$$r = \frac{-em}{1 + e \cos \theta}$$

La excentricidad sigue teniendo valor de 2, y como el foco y su directriz son los mismos para ambas ramas, m (la distancia del foco a la directriz) sigue teniendo el mismo valor, $3/2$. Se puede comprobar esto haciendo $r = 3$ cuando $\theta = 180^\circ$; es decir,

$$3 = \frac{-2m}{1 + 2 \cos 180^\circ} = \frac{-2m}{1 + 2(-1)} = \frac{2m}{1} \Rightarrow m = 3/2$$

sustituyendo los valores se tiene

$$r = \frac{-3}{1 + 2 \cos \theta}$$

para la rama izquierda de la Hipérbola.

Con respecto al tema de coordenadas polares, analicemos la situación para cuando los valores de r son negativos. Cuando se definen las coordenadas polares, r significa la magnitud del vector de posición \mathbf{r} al punto (x, y) : $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; por lo tanto r tenía que ser positivo. Podemos ampliar la definición de coordenadas polares para incluir un punto que tiene por coordenadas (*número negativo*, θ) que debe interpretarse como el vector que tiene la misma magnitud pero en sentido opuesto al rayo; es decir, el punto cuyas coordenadas son (*el número correspondiente positivo*, $180^\circ + \theta$). Por ejemplo, el punto $(-3, 90^\circ)$ significaría el $(3, 270^\circ)$ o $(3, -90^\circ)$. O el punto $(-2, 45^\circ)$ significaría trazar el rayo a 45° y retroceder sobre él una distancia de dos unidades (Figura 40).

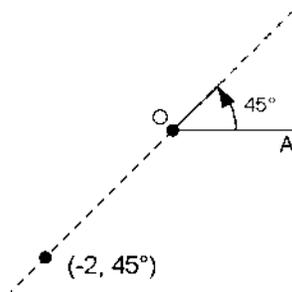


Figura 40. El punto $(-2, 45^\circ)$ es el mismo que el punto $(2, 225^\circ)$.

Considerando esto, vemos que en el ejemplo anterior, la misma ecuación

$$r = \frac{3}{1 - 2 \cos \theta}$$

dará las dos ramas de la Hipérbola, las r positivas y sus θ correspondientes darán la rama derecha; las r negativas la rama izquierda. Cuando $\theta = 120^\circ$ o 240° no tiene significado, y por tanto, estos ángulos dan las direcciones de las asíntotas que pasan por el centro de la Hipérbola.

Para algunas curvas que no sean secciones cónicas sus ecuaciones en coordenadas polares son mucho más simples que en coordenadas rectangulares y, en algunas de ellas el incluir r negativas produce bastantes diferencias en sus gráficas, incluyendo otras ramas o porciones de arco. Veamos algunas de estas curvas.

CAPÍTULO III

ESTUDIO DE OTRAS CURVAS

Introducción. Para el estudio de otras curvas haremos uso de las coordenadas polares, como en la sección anterior, las cuales tienen sus primeros indicios en la época de Hiparco de Alejandría (190 - 120 a C.), quien las utilizó en la elaboración de tablas trigonométricas para sus estudios astronómicos con el fin de la localización de estrellas. El establecimiento formal del sistema de coordenadas polares se debe a Newton (1642 - 1727) quien las utilizó en su obra *El método de las fluxiones* en 1671.

El sistema de coordenadas polares consiste en asociar a cada punto P del plano, que tiene coordenadas rectangulares (x, y) , un par de coordenadas (r, θ) : donde r es la distancia desde un punto fijo O , llamado polo, al punto P ; y θ representa el ángulo del segmento OP con la dirección positiva de una semirrecta horizontal que parte de O . Así, $(2, \frac{\pi}{2})$, $(3.4, \frac{7\pi}{4})$, $(\frac{1}{5}, \frac{5\pi}{3})$ son ejemplos de puntos expresados en coordenadas polares, los cuales tienen sus equivalentes en coordenadas rectangulares, para cuya transformación se utilizan las ecuaciones:

$$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta$$

en caso de que se limitara θ a los valores $0 \leq \theta \leq \pi$, se aceptan valores negativos para r , de manera que los puntos $(-2, \frac{\pi}{2})$, $(-3.4, \frac{3\pi}{4})$, $(-\frac{1}{5}, \frac{5\pi}{3})$ son los simétricos respecto al polo de los tres puntos anteriores.

Las coordenadas polares son importantes, entre otras cosas, porque permiten expresar relaciones que son complicadas en coordenadas rectangulares, de una manera sencilla; por ejemplo, la Espiral de Arquímedes en coordenadas polares tiene por ecuación $r = \theta$, en coordenadas rectangulares es: $\pm \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$.

En esta parte del trabajo es donde mayor beneficio obtendremos del uso del software "Geogebra", pues como se verá hay curvas que su construcción con lápiz y papel además de ser poco fácil presenta limitaciones para comprender su comportamiento. En cambio Geogebra nos permite manipular ciertas partes de las curvas y observar cómo se van transformando otros elementos.

III.1. Curva de la rosa o Trébol de n hojas

Su ecuación ordinaria en coordenadas polares es

$$r = a \cos n\theta$$

Para el caso especial $n = 1$, la ecuación corresponde a una circunferencia que pasa por el origen, con centro en OA y radio $a/2$: $r = a \cos \theta$.

Analicemos en una gráfica el trébol de tres hojas y el de cuatro hojas: $r = a \cos 3\theta$ y $r = a \cos 4\theta$, respectivamente. En ambos casos $r = a$ cuando $\theta = 0^\circ$, y r disminuye hasta llegar a 0, mientras que θ aumenta hasta llegar a 30° ($\pi/6$ radianes) y 22.5° ($\pi/8$ radianes) respectivamente; para el caso general, cuando $\theta = \pi/2n$ radianes (Figura 41).

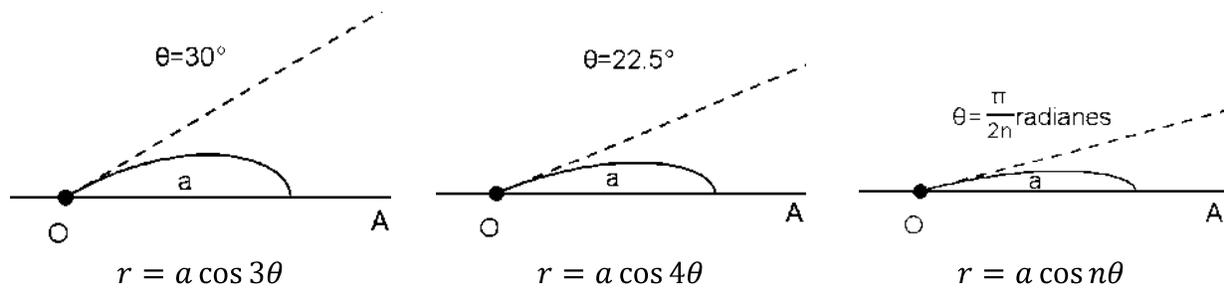


Figura 41

Cuando θ excede los 30° y 22.5° , 3θ y 4θ se convierten en ángulos en el segundo cuadrante, generando así una r negativa, que todavía no marcaremos. Esto sucede para los siguientes 60° y 45° , respectivamente. Cuando $\theta = 90^\circ$ y 67.5° , 3θ y 4θ se convierten en 270° y se dirigen al cuarto cuadrante, dando así r positivas para otros 60° y 45° respectivamente. Luego, para otros 60° y 45° r se vuelve nuevamente negativa. Para θ hasta 180° las gráficas se ven como en la Figura 42.

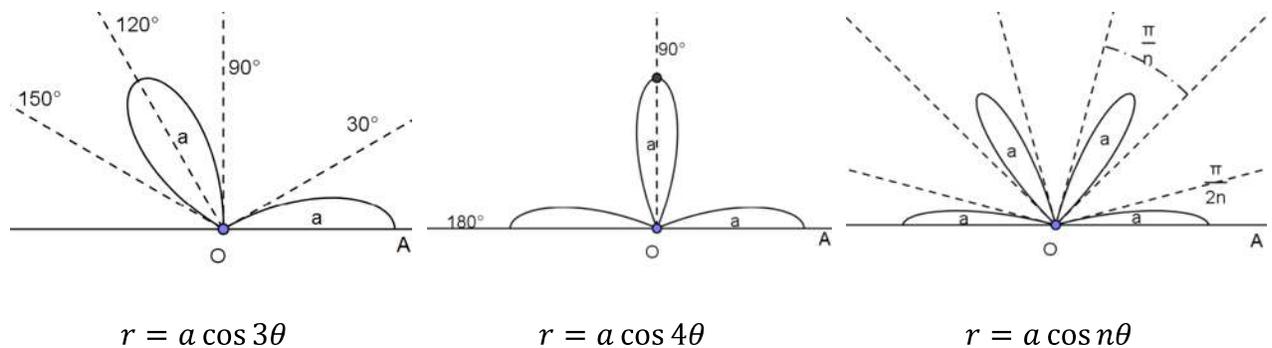


Figura 42

Ahora, si θ varía de 0 hasta -180° (en el sentido del reloj) cada curva se repetirá, puesto que $r = a \cos(-n\theta) = a \cos n\theta$ (Figura 43). Se tienen entonces n hojas para r positivas, igualmente espaciadas alternadamente con n espacios vacíos debido a las r negativas, cada espacio de 60° y de 45° respectivamente en los tréboles de tres y de cuatro hojas (en general π/n radianes).

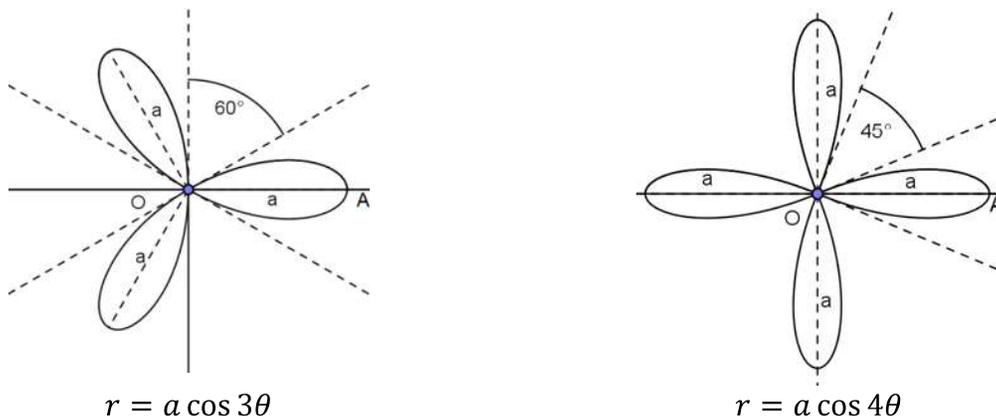


Figura 43. Tréboles de tres y de cuatro hojas

Si ahora deseamos incluir a la gráfica los puntos con r negativas, cada espacio vacío, en algunos casos, será ocupado por estas. Pues obsérvese que cuando retrocedemos sobre un rayo en el espacio vacío, el trébol de tres hojas ya tiene una hoja en este, y las r negativas no añaden más hojas a la gráfica, mientras que en el trébol de cuatro hojas añaden una hoja en cada espacio vacío, convirtiéndose así en uno de ocho hojas sin espacios vacíos (Figura 44). En general, si n es par, las r negativas duplican el número de hojas, llenando cada espacio vacío; pero esto no sucede si n es impar.

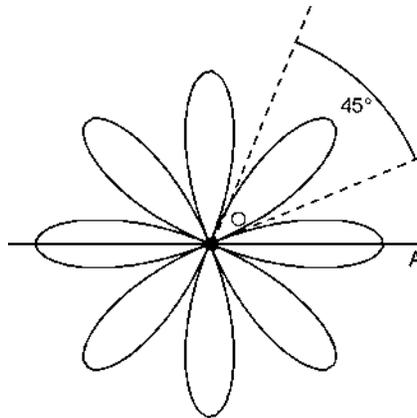


Figura 44. $r = a \cos 4\theta$. Includiendo r negativas.

Si la gráfica se gira un ángulo α la ecuación será

$$r = a \cos n(\theta - \alpha)$$

cuando el ángulo es $\alpha = \pi/2n$, se tiene $r = a \cos \left[n\theta - \left(\frac{\pi}{2} \right) \right]$, que es $r = a \sin n\theta$ como ecuación ordinaria del trébol de n hojas con la primera tangente a OA (Figura 45).

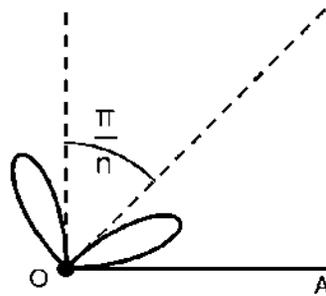


Figura 45. $r = a \sin n\theta$.

A continuación se presentan otras curvas que podrían estudiarse en el nivel superior, por su forma y elegancia, por los conceptos involucrados y por su aplicación o conexión con fenómenos físicos.

III.2. Óvalos de Cassini

Si recordamos, la propiedad que define a la Elipse es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve, en el plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es una constante ($2a$); o de la Hipérbola, como el lugar geométrico que describe el punto tal que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es una constante ($2a$); ¿porqué no pensar en el lugar geométrico que describirá un punto P que se mueve en el plano de tal manera que el producto de sus distancias a dos puntos es una constante (b^2)? Deduzcamos la ecuación en coordenadas polares del lugar geométrico que describe P . Consideremos dos puntos fijos $F(a, 0^\circ)$ y $F'(a, 180^\circ)$, los cuales se llaman focos; y un punto móvil $P(r, \theta)$, tal que $FP \cdot F'P = b^2$ (Figura 46).

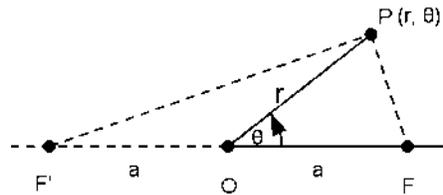


Figura 46. $FP \cdot F'P = b^2$.

Usando ley de cosenos para el triángulo OFP se tiene

$$(FP)^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta$$

Nuevamente, por ley de cosenos

$$(F'P)^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos(180^\circ - \theta) = a^2 + r^2 + 2ar \cos \theta$$

Ahora

$$FP \cdot F'P = b^2 \Rightarrow (FP)^2 \cdot (F'P)^2 = (b^2)^2$$

Sustituyendo los valores anteriores esta igualdad se transforma en

$$(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)(a^2 + r^2 + 2ar \cos \theta) = b^4$$

desarrollando, se tiene

$$(a^2 + r^2)^2 - 4a^2r^2 \cos^2 \theta = b^4 \Rightarrow$$

$$a^4 + r^4 + 2a^2r^2 - 4a^2r^2 \cos^2 \theta = b^4 \Rightarrow$$

$$r^2(r^2 + 2a^2 - 4a^2 \cos^2 \theta) = b^4 - a^4$$

usando la identidad trigonométrica $\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta$ y sustituyendo, la ecuación anterior se convierte en

$$r^2 \left(r^2 + 2a^2 - 4a^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) \right) = b^4 - a^4$$

que se reduce a

$$r^2(r^2 - 2a^2 \cos 2\theta) = b^4 - a^4$$

o bien

$$\boxed{r^4 - 2a^2 r^2 \cos 2\theta + a^4 - b^4 = 0}$$

como ecuación de la curva que describe P . Esta curva es conocida como *Óvalos de Cassini*, y fue estudiada en 1680 por el astrónomo y matemático francés Jean Dominique Cassini (1625-1712) a quien deben su nombre y, de quien cabe destacar su contribución en el descubrimiento de los satélites de Júpiter y Saturno. Si $b > a$ se obtiene una curva continua que no se corta a sí misma como la gráfica de la Figura 47.

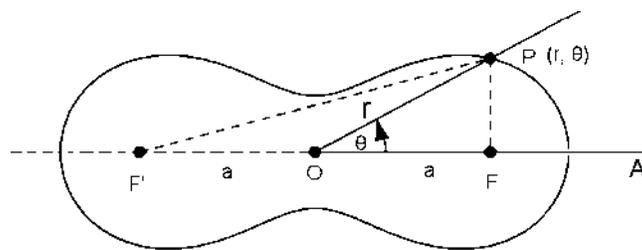


Figura 47. Óvalos de Cassini para $b > a$.

Si $b < a$ se obtienen dos óvalos separados como en la Figura 48.

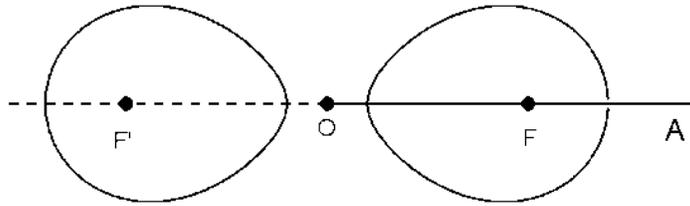


Figura 48. Óvalos de Cassini cuando $b < a$.

Si $b = a$, sustituyendo en la ecuación se tiene que

$$r^4 - 2a^2r^2 \cos 2\theta = 0 \Rightarrow$$

$$r^2 - 2a^2 \cos 2\theta = 0$$

la gráfica contiene al origen y se obtiene una curva como la de la Figura 49.

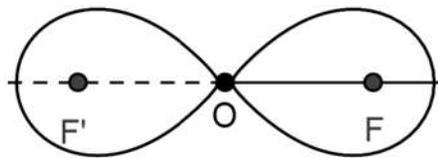


Figura 49. Óvalos de Cassini cuando $a = b$.

Cassini consideraba que la Tierra viajaba alrededor del Sol siguiendo como trayectoria uno de sus óvalos y el Sol permanecía situado en uno de los focos del óvalo.

III.3. Lemniscata de Bernoulli

La curva que describe la ecuación $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, se conoce como *Lemniscata de Bernoulli*, que significa cinta colgante; corresponde al caso en que $a = b$ en los Óvalos de Cassini, salvo por un 2 en el término trigonométrico. Así que la Lemniscata también podría definirse como el lugar geométrico que describe un punto P que se mueve en el plano de tal

manera que el producto de sus distancias a dos puntos fijos es una constante a^2 , donde a es la mitad de la distancia entre los puntos fijos.

El nombre de esta curva se debe a Jacob Bernoulli, quien descubrió esta curva para dar solución al problema de encontrar la curva que se denominó *isócrona paracéntrica*. Este problema, propuesto por Leibniz en 1689, consistía en:

Hallar la curva plana que describe un punto pesado P que se mueve de modo que su distancia a un punto fijo O varíe proporcionalmente al tiempo empleado al recorrer cada arco de dicha curva.

Para resolver este problema Jacob planteó una ecuación diferencial, que le resultaría complicada de resolver. Ante esta situación Jacob introdujo una nueva curva tal que la longitud de un arco de ella coincidiera con la integral que le era imposible calcular. A esta curva la denominó *Lemniscata*.

Johan Bernoulli no podía ser menos que su hermano mayor y también estudio de manera independiente el problema propuesto por Leibniz y, también de la misma forma lo redujo al cálculo de un arco de la lemniscata.

Los resultados de Dominique Cassini, sobre los óvalos, sólo serían publicados en 1749 por su hijo a Jaques (1677-1756), así que no necesariamente fueron del conocimiento de los hermanos Bernoulli.

Analicemos esta curva: como $(r, -\theta)$ es el simétrico del punto (r, θ) respecto al eje principal OA , entonces si al sustituir θ por $-\theta$ la ecuación no cambia, la curva es simétrica respecto a la dirección principal (Figura 50). Similarmente, como el punto $(r, 180^\circ - \theta)$ es el simétrico del punto (r, θ) respecto al rayo a 90° , si al sustituir θ por $180^\circ - \theta$ la ecuación no cambia; la gráfica es simétrica respecto al rayo a 90° (Figura 51).

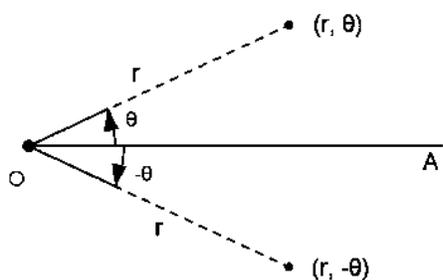


Figura 50. Simetría respecto a OA .

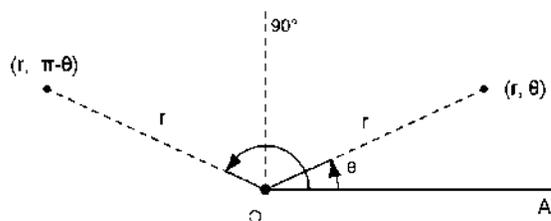


Figura 51. Simetría respecto al rayo a 90° .

La ecuación $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ permanece igual cuando se sustituye θ por $-\theta$; pues $\cos(-\theta) = \cos \theta$; y también cuando se sustituye θ por $(180^\circ - \theta)$, pues $\cos(360^\circ - 2\theta) = \cos(-2\theta)$. Por lo tanto, podemos analizar la gráfica sólo en el primer cuadrante. Cuando $\theta = 0$, $r = a$; cuando $\theta = 30^\circ$, $r = a/\sqrt{2}$; cuando $\theta = 45^\circ$, $r = 0$; entre 45 y 90° 2θ se encuentra en el segundo cuadrante y $\cos 2\theta$ es negativo, por lo tanto r^2 se vuelve negativo y r será imaginaria, de modo que no habrá r 's negativas. La gráfica de esta ecuación es como la que se muestra en la Figura 52. Esta curva se parece al Trébol de dos hojas, $r = a \cos 2\theta$, pero no es la misma. Por ejemplo, cuando $\theta = 30$, $r = a/\sqrt{2}$ en la Lemniscata de Bernoulli mientras que $r = a/2$ en el Trébol de dos hojas. Además las r negativas agregan otras dos hojas al Trébol pero no a la Lemniscata.

Nuevamente si se sustituye θ por $\theta - \alpha$ se efectúa una rotación a la gráfica. Si $\alpha = 45^\circ$, se tiene $r^2 = a^2 \cos 2(\theta - 45^\circ) = a^2 \sin 2\theta$ para la ecuación de la lemniscata en los cuadrantes I y III, que es tangente a la dirección principal y al rayo de 90° (Figura 53).

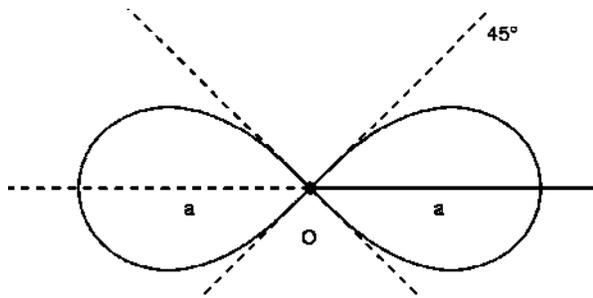


Figura 52. Lemniscata de Bernoulli.

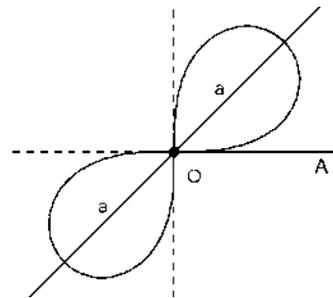


Figura 53. Lemniscata de Bernoulli rotada 45° .

Veamos otra forma de obtener esta curva.

Problema:

Tomemos una Hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$, una tangente a esta en el punto (r, s) , y una recta que pasa por el origen perpendicular a la tangente en $P(x, y)$ (Figura 54). ¿Qué lugar geométrico describirá el punto $P(x, y)$ cuando (r, s) se mueve sobre la Hipérbola?

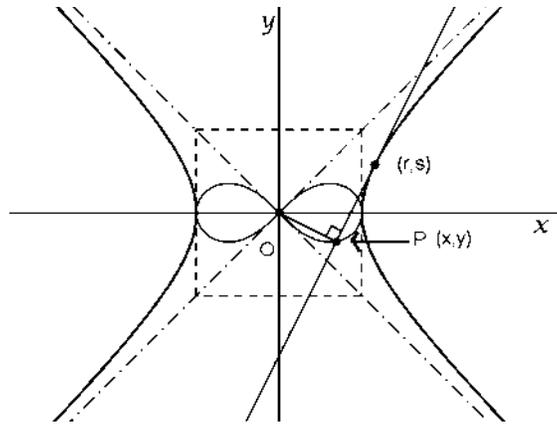


Figura 54. La Lemniscata como podaria de la Hipérbola equilátera.

Solución. Ya se vio que la pendiente de una recta tangente a la Hipérbola en un punto (r, s) es $\lambda = (b^2 r/a^2 s)$; en el caso de la equilátera $a^2 = b^2$ entonces $\lambda = r/s$, y la ecuación de la tangente será $(y - s) = \frac{r}{s}(x - r)$ o bien $rx - sy = r^2 - s^2$, pero como el punto (r, s) satisface la ecuación de la Hipérbola, se tiene $r^2 - s^2 = a^2$, entonces la ecuación de la recta tangente será $rx - sy = a^2$. La pendiente de la recta que pasa por el origen y perpendicular a la tangente es $\lambda_1 = -s/r$, así que su ecuación es $sx + ry = 0$. El punto $P(x, y)$ satisface las dos ecuaciones, así que si se eliminan r y s que también varían, se tendrá una ecuación en la que sólo intervienen x e y . Para esto resolvamos el sistema de dos ecuaciones y hallemos r y s en función de x e y .

$$\begin{cases} xr - ys = a^2 \\ yr + xs = 0 \end{cases}$$

resolviendo por determinantes tenemos:

$$r = \frac{\begin{vmatrix} a^2 & -y \\ 0 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2} \qquad s = \frac{\begin{vmatrix} x & a^2 \\ y & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{-a^2 y}{x^2 + y^2}$$

Nuevamente, como punto (r, s) está en la Hipérbola, se tiene $r^2 - s^2 = a^2$, sustituyendo r y s se tiene:

$$\left(\frac{a^2 x}{x^2 + y^2}\right)^2 - \left(\frac{-a^2 y}{x^2 + y^2}\right)^2 = a^2$$

desarrollando se obtiene

$$\frac{a^4 x^2 - a^4 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = a^2$$

o bien

$$a^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$$

como ecuación de la curva que describe el punto P . Esta ecuación no nos es familiar, pero si cambiamos a coordenadas polares haciendo $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, tenemos

$$a^2(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) = (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)^2 = r^4$$

(ya que $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$), o bien

$$a^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = r^2$$

y usando la fórmula del ángulo doble, $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$, tenemos:

$$\boxed{r^2 = a^2 \cos 2\theta}$$

que es la conocida ecuación de la Lemniscata de Bernoulli. Resultado sorprendente para el lugar geométrico que describe $P(x, y)$.

Así, la Lemniscata de Bernoulli también es representada en coordenadas cartesianas por la ecuación

$$\boxed{a^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2}$$

Alas curvas obtenidas de esta manera son llamadas *podarias* o *curvas pedales*¹, son definidas de la siguiente manera: si desde un punto fijo Q se trazan perpendiculares a las tangentes a una curva C , el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares es otra curva llamada *podaria de la curva C con respecto al punto Q* . Así podemos decir que la Lemniscata de Bernoulli es la podaria de la Hipérbola equilátera con respecto a su centro.

Las siguientes curvas que se presentan se denominan curvas mecánicas, algunas de ellas introducidas desde la antigüedad, fundamentalmente para dar solución a los tres famosos problemas griegos: la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.

¹ El lugar geométrico de las proyecciones ortogonales, desde un punto fijo, sobre las tangentes a una curva.

III.4. Espiral de Arquímedes

Una curva muy especial, que ha sido estudiada desde la antigüedad es la llamada *Espiral de Arquímedes*. Es la primera espiral que se conoce en la historia de las matemáticas, estudiada por Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C), quien incluso llegó a calcular que el área bajo una porción de esta es $1/3$ del primer círculo, que tiene por OP cuando da la primera revolución. La curva puede ser descrita mediante la conjunción de dos movimientos uniformes:

Un punto P se mueve uniformemente a lo largo de una línea recta OP y simultáneamente la recta OP rota con una velocidad constante en torno a O , el lugar geométrico que describe P es la espiral de Arquímedes.

La ecuación de esta curva es

$$r = n\theta$$

Por su escala, es más conveniente medir el ángulo θ en radianes. Tomando el caso más simple en que $n = 1$ y recordando que 2π radianes = 360° de donde 1 radián es aproximadamente 57.3° , se tiene que para $\theta = 0$, $r = 0$; para $\theta = 1$, $r = 1$, y así sucesivamente. La curva es tangente a OA en el origen, como se muestra en la Figura 55.

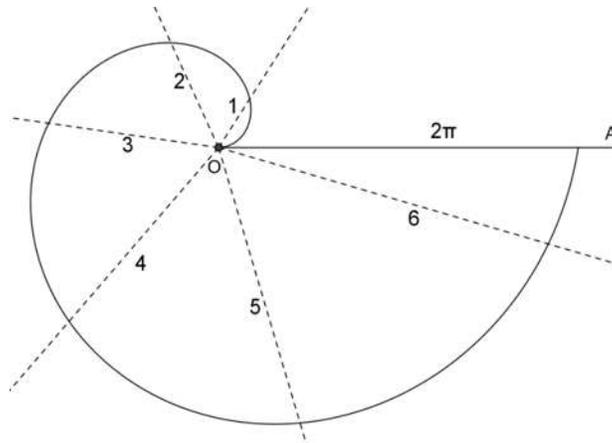


Figura 55. Espiral de Arquímedes.

Si avanzamos en el sentido de las manecillas del reloj, estos ángulos negativos producirán r negativas. Por ejemplo, si $\theta = -1$ rad, $r = -1$ que si interpretamos como se mencionó anteriormente, este punto será el mismo que $(1, \pi - 1$ rad). Si se hace de la misma forma para los θ negativos la gráfica generada por estos puntos será como en la Figura 56.

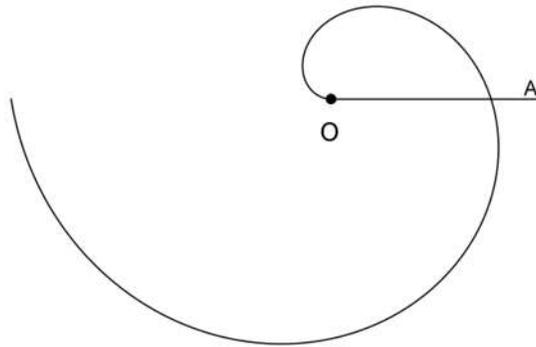


Figura 56. Espiral de Arquímedes para r negativas.

La historia dice que antes de morir, Arquímedes pidió que esta espiral se inscribiera en su lápida.

III.5. Espiral hiperbólica

Hay otra espiral, la inversa a la espiral de Arquímedes, y se conoce como Espiral Hiperbólica cuya ecuación en polares es

$$r = 1/\theta$$

Fue descubierta por Pierre Varignon en 1704 y después estudiada por Johan Bernoulli en 1710 y 1713. Para ver su gráfica el ángulo θ se mide en radianes. Cuando $\theta = 1$, $r = 1$; cuando $\theta = 2$, $r = 1/2$, y así sucesivamente. Cuanto mayor sea θ menor será r y se dirige indefinidamente hacia el origen. Por otra parte, cuando θ tiende a cero r , aumenta sin límite. Esta curva tiene una asíntota que es paralela a la dirección principal, a una unidad por encima de ella. La gráfica de la curva es como en la Figura 57. La razón de su nombre puede ser más bien por su ecuación que por su gráfica, pues $r = 1/\theta$ se parece a $y = 1/x$ pero en sus gráficas no hay semejanza.

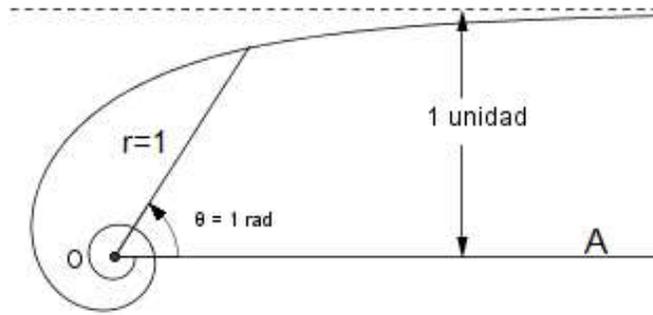


Figura 57. Espiral Hiperbólica.

Al igual que la Espiral de Arquímedes, la Espiral Hiperbólica también tiene r negativas; cuando θ es negativo se producen, dando como resultado la gráfica que se muestra en la Figura 58.

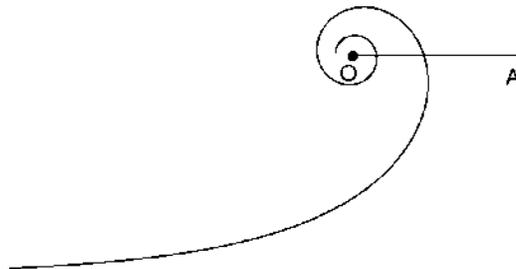


Figura 58. Espiral Hiperbólica para r negativas.

III.6. Espiral logarítmica o equiangular

Otra espiral que se hace presenta ahora es la Espiral *Equiangular* cuya ecuación es

$$r = a^\theta$$

donde $a > 1$, pues si $a = 1$ la curva es una circunferencia de radio 1. Si $\theta = 0, r = 1$; si $\theta = 1 \text{ rad}, r = a$; etc. Conforme θ aumenta, r también lo hace a una relación exponencial y describe una espiral hacia afuera en sentido contrario a las manecillas del reloj. Los valores de r son siempre positivos, aun cuando θ adquiere valores negativos, pero conforme θ decrece r se

acercas rápidamente 0 pero sin llegar a 0 y forma una espiral hacia adentro en el sentido de las manecillas del reloj. El nombre de equiangular proviene del hecho de que cualquier rayo forma el mismo ángulo α , con la tangente a la curva en el punto en el que el rayo corta a la espiral, como se muestra en la Figura 59.

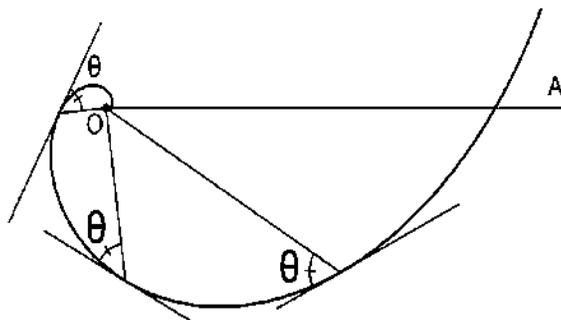


Figura 59. Espiral logarítmica o equiangular.

El primero en describirla como una curvamecánica, en contraposición a las curvas algebraicas, es Descartes quién en 1638 escribe al padre Mersenne (1588-1648) los resultados de sus investigaciones. Descartes estaba buscando una curva creciente con una propiedad similar a la de la circunferencia, que la tangente en cada punto forme con el radio vector en cada punto siempre el mismo ángulo. También demostró que esta condición es equivalente al hecho de que los ángulos alrededor del polo son proporcionales al logaritmo del radio vector. De ahí su segundo nombre: espiral logarítmica.

Toricelli también analizó esta espiral logrando rectificarla. Él logró calcular la longitud de un arco de esta curva basándose en la propiedad de equiangularidad. Este hallazgo causó un fuerte impacto en su época, ya que el problema de la rectificación de las curvas era considerado problema irresoluble desde la antigüedad.

Pero se considera el padre de esta espiral a Jacob Bernoulli, quien realiza un profundo estudio de la misma, quedando cautivado por la curva hasta tal punto de pedir que esta espiral fuera grabada en su lápida junto a la inscripción latina "*Eadem mutata resurgo*", que puede traducirse como: *Aun siendo modificada resurjo*. Sin embargo, tal vez debido a la ignorancia matemática del encargado de realizar la voluntad de Jacob, la espiral que aparece grabada en su tumba es una espiral arquimediana y no la logarítmica.

Jacob Bernoulli descubrió varias propiedades de esta curva que les pasaron desapercibidas a Descartes y Torricelli, entre ellas el hecho de que la espiral logarítmica es la única curva que verifica que su *evoluta*², su *involuta*³, su *caustica*⁴ y su *podaria* son, a su vez, una espiral logarítmica. A esto se debe la inscripción que Jacob pidió se grabara en su lápida.

La espiral logarítmica es sin duda la espiral que más se prodiga en la naturaleza. El reino animal nos proporciona unos ejemplos preciosos en las conchas de los caracoles y los moluscos. Detrás de todas estas formas hay un fenómeno natural: un proceso de enrollamiento vinculado al proceso de crecimiento. De hecho la concha de un caracol no es ni más ni menos que un cono enrollado sobre sí mismo (Figura 60).



Figura 60

III.7. Cardioide

Esta es una curva en forma de corazón (Figura 61), de ahí su nombre, y tiene por ecuación polar a

$$r = a(1 - \cos \theta)$$

El nombre se lo debemos a Francesco de Castellón que la denominó de esta forma en un trabajo titulado *Decurva cardiode* en 1741, aunque previamente ya había sido estudiada antes por astrónomos y matemáticos.

² El lugar geométrico de los centros de curvatura de una curva C .

³ La involuta de una curva C es la curva cuya evoluta es C .

⁴ La envolvente de la reflexión de los rayos emitidos desde un punto fijo y reflejados en la curva.

De acuerdo a los criterios de simetría mencionados anteriormente, esta curva es simétrica respecto a la dirección principal. Conforme θ varía de 0° hasta 180° , $\cos \theta$ lo hace de $+1$ hasta -1 , y por tanto r varía desde 0 hasta a en 90° y hasta $2a$ en 180° , así que no hay r negativas. Se puede probar fácilmente que la curva es simétrica respecto al eje polar, pues si se cambia θ por $-\theta$ en la ecuación se tiene:

$$r = a(1 - \cos(-\theta)) = a(1 - \cos \theta).$$

Además, si $\theta = 0$, $r = 0$; si $\theta = 180^\circ$, $r = 2a$; si $\theta = 90^\circ$ o $\theta = 270^\circ$, $r = a$.

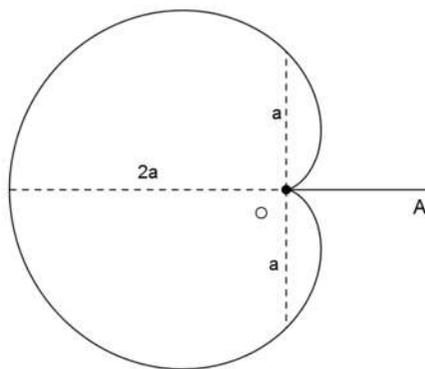


Figura 61. Cardioide.

Pero, ¿de dónde se obtienen esta curva?

Problema:

¿Qué lugar geométrico describe un punto P sobre una circunferencia de radio a que rueda sin deslizarse sobre otra circunferencia fija, también de radio a ?

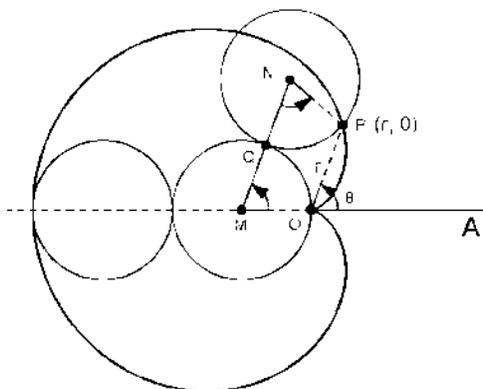


Figura 62. Cardioide como curva mecánica.

Nos basaremos en la Figura 62 para encontrar la ecuación de la curva, que parece ser una cardioide.

Como la circunferencia que rueda lo hace sin deslizarse los arcos \widehat{OQ} y \widehat{QP} son iguales, además los radios son iguales entonces el ángulo $\sphericalangle MNP$ es igual a $\sphericalangle OMN$ y por tanto el trapecio $OMNP$ es isósceles y OP es paralelo a MN y $\sphericalangle \theta = \sphericalangle OMN$ por ser ángulos correspondientes. Ahora si nos centramos en el trapecio $OMNP$ (Figura 63) es claro que $r = 2a - 2(a \cos \theta)$ o bien $r = 2a(1 - \cos \theta)$.

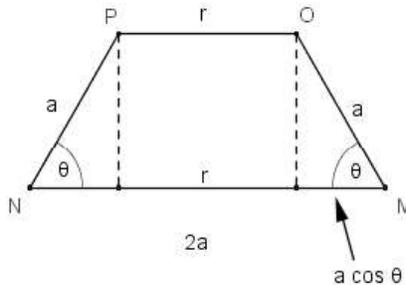


Figura 63. Trapecio formado por los radios de la circunferencias, el segmento que une sus centros y el vector \overrightarrow{OP} .

Así que efectivamente, la curva que describe el punto es una Cardioide que tiene por ecuación

$$r = 2a(1 - \cos \theta)$$

Más adelante se analizara los casos en los que el radio de la circunferencia que rueda es diferente al de la circunferencia fija.

III.8. Concoide de Nicomedes

Si trazamos una recta D perpendicular a la dirección principal OAA a una distancia a desde O . El lugar geométrico de los puntos de las rectas que pasan por O , tales que sus distancias a la intersección con D es un segmento de longitud constante b se llama concoide, es una curva en forma de concha (de ahí su nombre). Aunque su creador fue Nicomedes (280 – 210 a.C.), un geómetra griego que investigó junto a otras 16 curvas matemáticas, esta Concoide fue atribuida a Pappus.

Aunque la curva comprende dos ramas situadas a ambos semiplanos separados por la recta D , Nicomedes sólo consideraba la rama que está en el semiplano que no contiene a O .

Si se traza una línea por O que interseque a D habrá sobre la primera, dos puntos P y Q tales que sus distancias a la intersección R , con la recta D , sea b (Figura 64).

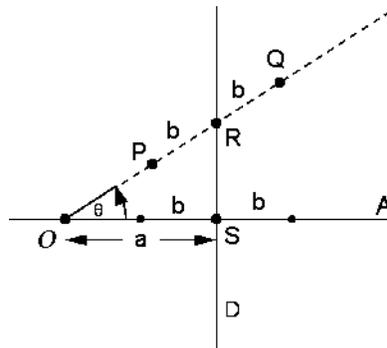


Figura 64. Los puntos P y Q describen las ramas de la Concoide.

Veamos cuales son las ecuaciones de las ramas de la curva que describe P y Q conforme el ángulo θ , formado por OA y la recta que pasa por O , varía.

Del triángulo rectángulo OSR , $\sec \theta = OR/a$, o bien, $OR = a \sec \theta$. Para el punto P es claro que $r_1 = OP = OR - b$. Así que

$$r_1 = a \sec \theta - b$$

Para el punto Q , $r_2 = OQ = OR + b = a \sec \theta + b$.

Y tenemos

$$\boxed{r = a \sec \theta \pm b}$$

como ecuación en coordenadas polares de la Concoide de Nicomedes; + para la rama derecha y - para la izquierda. LasFigura 65 aFigura 67 muestran las gráficas para los diferentes casos según sea $a > b$, $a = b$ o $a < b$.

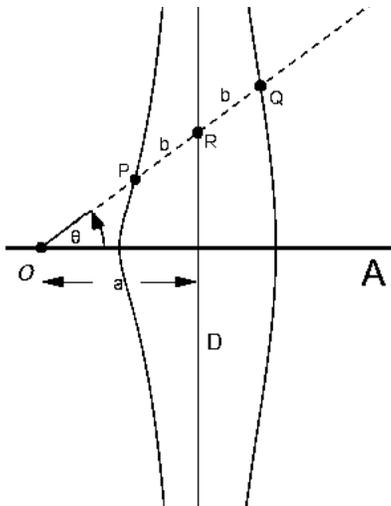


Figura 65. Concoide para $a > b$.

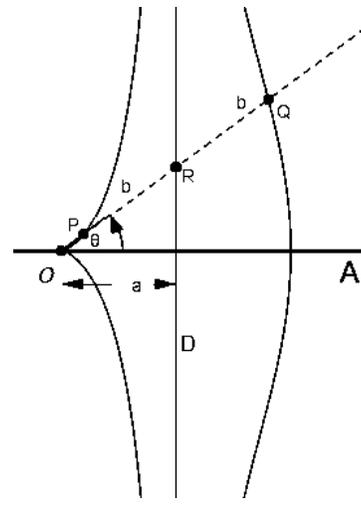


Figura 66. Concoide si $a = b$.

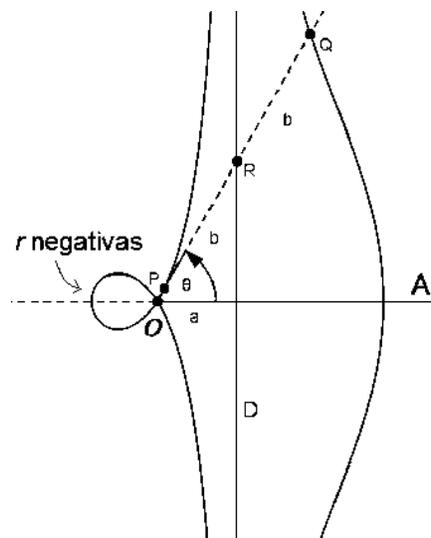


Figura 67. Concoide en el caso $a < b$.

Cuando $a \geq b$ y θ está en el cuadrante I , $\sec \theta \geq 1$, entonces $|a \sec \theta| \geq b$ y por tanto las r son positivas en este cuadrante. Para los cuadrantes II y III las r son negativas, y en el cuadrante IV nuevamente r es positiva. Como esta curva es simétrica respecto a la dirección principal, ya que si se sustituye θ por $-\theta$ en $r = a \sec \theta \pm b$ la ecuación no cambia, en consecuencia la gráfica en el cuadrante IV es la simétrica a la del cuadrante I .

Veamos qué pasa con las r negativas. Para el cuadrante II $\sec \theta \leq 1$ y por tanto las r son negativas. En este cuadrante se puede escribir $\theta = (180^\circ - \alpha)$, con $\alpha = (180^\circ - \theta)$. Y entonces $r = a \sec \theta \pm b = a \sec(180^\circ - \alpha) \pm b$, es negativo. Y como (r, θ) significa $(-r, 180 + \theta)$ cuando r es negativa, se tiene que $(a \sec(180^\circ - \alpha) \pm b, (180^\circ - \alpha))$ significará $(|a \sec(180^\circ - \alpha) \pm b|, -\alpha)$ o bien, $(a \sec \alpha \mp b, -\alpha)$, y ya que $0 \leq \alpha \leq 90$ de estos puntos serán las imágenes que caerán sobre la gráfica generada por ángulos en el cuarto cuadrante. De la misma manera, para θ en el cuadrante III la gráfica será la misma que la generada por ángulos en el primer cuadrante. Así que las r negativas no añaden más puntos a la gráfica.

Ahora veamos qué pasa cuando $a < b$, la ecuación es la misma así que es simétrica respecto a OA y al igual que para $a \geq b$, las r negativas generadas por ángulos en los cuadrantes II y III caen sobre la curva generada por ángulos en los cuadrantes I y IV . Aquí la diferencia es que para ángulos cercanos a 0 , en el primero y cuarto cuadrante también habrá r negativas, para ser más exactos para ángulos entre $+\sec^{-1}\frac{b}{a}$ y $-\sec^{-1}\frac{b}{a}$. En la Figura 67 se muestra la porción de la curva generada por las r negativas.

Hay tres problemas famosos que los griegos nunca pudieron resolver. Uno de ellos es el de trisecar un ángulo arbitrario, los otros dos son, la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo, utilizando únicamente regla y compás; es decir, sólo rectas y circunferencias. En la actualidad se sabe que estos instrumentos no son suficientes para dar solución al problema. Nicomedes inventó la concoide y un instrumento para dibujarla (Figura 68); con ésta se pueden resolver los problemas de la trisección del ángulo y de la duplicación del cubo.

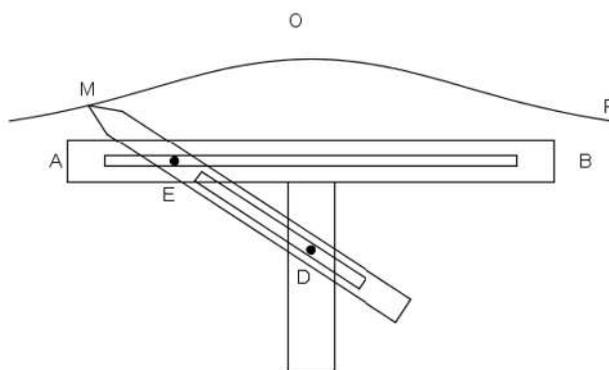


Figura 68. Instrumento ideado por Nicomedes para construir la Concoide.

Aquí presentaremos sólo la demostración de la trisección del ángulo. Consideremos la Figura 69, y sea $\angle MON$ el ángulo que se quiere trisecar; el triángulo OMN es rectángulo en M . Tomando el punto O como origen, trazamos la rama derecha de la Concoide, usando la recta que pasa por MN como D y la constante b , el doble de ON . Si se traza la perpendicular a D por N esta corta a la concoide en P , este punto, unido con O , determina el ángulo MOP , el cual mide un tercio del ángulo en O . Para comprobarlo tracemos la mediana NS del triángulo rectángulo RNP , donde R es la intersección de OP con D , esta mide la mitad de la hipotenusa RP , por tanto $NS = PS = ON = b/2$ y los triángulos NSP y ONS son isósceles. De aquí que $\angle NOS = \angle NSO = 2(\angle P)$; la segunda igualdad se debe a que $\angle NSO$ es exterior al triángulo NSP y, por tanto, mide la suma de los dos ángulo interiores no adyacentes a él. Pero $\angle MOP = \angle P$, por ser alternos internos, así $\angle NOS = 2(\angle MOP)$ y $\angle O = 3(\angle MOP)$, en otras palabras el ángulo MOP mide un tercio del ángulo en MON .

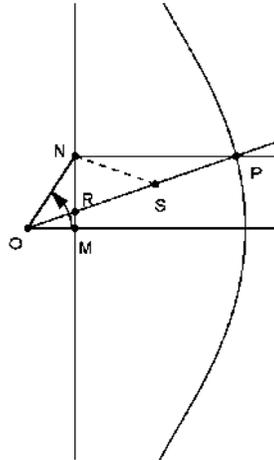


Figura 69. Trisección de un ángulo con la Concoide.

III.9. Cisoide de Diocles

Diocles (250 -100 a.C), en su libro *Sobre los espejos Ustorios* resuelve el problema de la duplicación del cubo introduciendo la curva llamada *Cisoide* (de kissos = hiedra), por la forma semejante a una hoja de hiedra que adopta la figura limitada por una arco de esta curva y una semicircunferencia.

La construcción de esta curva es como sigue: dada una circunferencia de diámetro OA y la tangente en A , un rayo que parte de O corta a la circunferencia en M y a la tangente en

N (Figura 70). Se toma el punto P de modo que $OP = MN$. Cuando el rayo gira, el punto P describe una curva llamada *Cisoide de Diocles*.

Veamos cuál es la ecuación de esta curva en coordenadas polares.

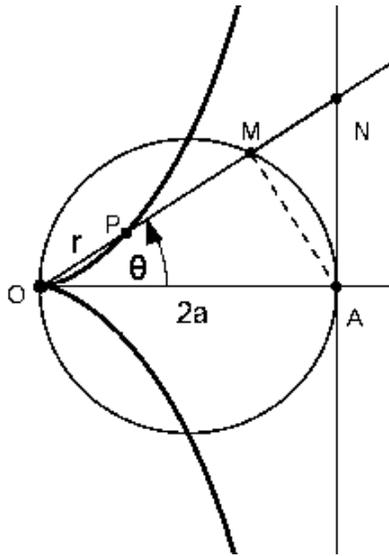


Figura 70. Cisoide de Diocles.

Tomemos como origen el punto O y como dirección principal el rayo OA . Como P es un punto del lugar geométrico, le asignamos coordenadas (r, θ) de manera que $r = |OP|$ y $\theta = \angle AOP$. Pero

$$r = |OP| = |MN| = |ON| - |OM| \quad (1)$$

Del triángulo rectángulo OAN , se tiene

$$|ON| = |OA| \sec \theta = 2a \sec \theta$$

Si trazamos el segmento AM , el triángulo OMA es rectángulo por ser inscrito en una semicircunferencia, y por tanto

$$|OM| = |OA| \cos \theta = 2a \cos \theta$$

sustituyendo en (1) los valores para $|ON|$ y $|OM|$, obtenemos

$$r = 2a(\sec \theta - \cos \theta)$$

que se reduce a

$$r = 2a \operatorname{sen} \theta \cdot \tan \theta$$

como ecuación de la Cisoide.

Esta ecuación produce r negativas para los cuadrantes *II* y *III*, pero no añaden más puntos a la gráfica de la Cisoide. Por ejemplo, para en el cuadrante *III*, $\theta = 180^\circ - \alpha$, y $2a \operatorname{sen} \theta \cdot \tan \theta$ será $2a \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) \cdot \tan(180^\circ - \alpha) = -2a \sin \alpha \cdot \tan \alpha$; de acuerdo a la interpretación que se ha venido dando a las r negativas, queda $(2a \sin \alpha \cdot \tan \alpha, -\alpha)$, punto generado por un θ (igual a α) en el cuadrante *IV*. De manera análoga, las r negativas generadas por ángulos en el cuadrante *III*, las imágenes caerán sobre las r positivas generadas θ en el cuadrante *I*.

La tangente por A a la circunferencia es asíntota de la cisoide de Diocles.

Ya se vio en la sección dedicada a la Lemniscata de Bernoulli, que tal curva es la podaria de la Hipérbola equilátera con respecto al origen. Ahora mostremos que la Cisoide de Diocles es la podaria de la Parábola con respecto a su vértice.

Problema. Tomemos una Parábola horizontal en posición ordinaria $y^2 = 2mx$, una tangente a esta en el punto (r, s) , y una recta que pasa por el vértice perpendicular a la tangente en $P(x, y)$ (Figura). ¿Qué lugar geométrico describirá el punto $P(x, y)$ cuando (r, s) se mueve sobre la Parábola?

Solución. Ya se mostró que la pendiente de la tangente a una Parábola $y^2 = 2mx$ en el punto (r, s) es $\lambda = m/s$, con $s \neq 0$, por lo tanto su ecuación es $sy = m(x + r)$, y la recta perpendicular a la tangente y que pasa por el vértice, que en este caso coincide con el origen, tendrá por ecuación $y = -\frac{s}{m}x$. Ahora necesitamos eliminar r y s para dejar una ecuación en la que sólo intervengan x e y . Para esto resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} sy = m(x + r) \\ y = -\frac{s}{m}x \end{cases}$$

de la segunda ecuación se obtiene $s = -my/x$, sustituyendo en la primera se tiene $r = -\frac{y^2}{x} - x$. Pero como (r, s) está en la Parábola se tiene que $s^2 = 2mr$, sustituyendo los valores de r y s tenemos

$$\frac{m^2 y^2}{x^2} = -2m \left(\frac{y^2}{x} + x \right) \Rightarrow y^2 = -\frac{2x^3}{2x + m}$$

o bien

$$y^2 = -\frac{x^3}{x + m/2}$$

como ecuación del lugar geométrico que describe el punto P .

Esta ecuación no nos es conocida pero si hacemos un transformación a coordenadas polares llegaremos a

$$r = -\frac{m}{2} \tan \theta \cdot \sin \theta$$

Esta la ecuación polar de una Cisoide de Diocles que abre hacia la izquierda y tiene por asíntota la recta $r \cos \theta = -m/2$ ($x = -m/2$ en coordenadas cartesianas), como se muestra en la Figura 71.

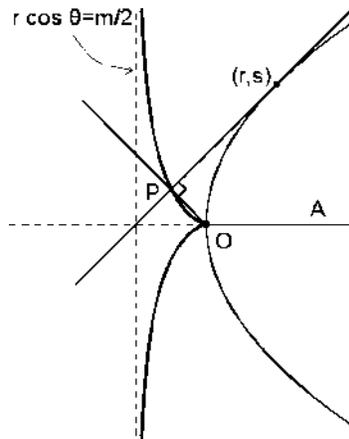


Figura 71. La Cisoide como curva pedal de la Parábola.

III.10. Limazón caracol de Pascal

Esta curva debe su nombre a Etienne Pascal (1588-1651) padre de Blaise Pascal. Se genera si a partir de una circunferencia de diámetro a y la dirección principal en la prolongación del diámetro OA , como en la Figura 72. Una recta que pasa por el origen corta a la circunferencia en el punto R y a partir de R se toma una distancia b en los dos sentidos de la

recta, hasta los puntos $P: (r, \theta)$ y $P': (r', \theta)$, tal que $RP = RP' = b$. Cuando la recta gira en torno al origen los puntos P y P' describen la curva llamada Caracol de Pascal.

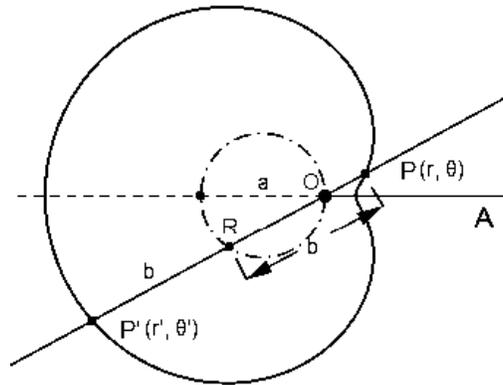


Figura 72. Limazón o Caracol de pascal si $a < b$.

Veamos cuales son la ecuaciones que describe a esta curva.

De acuerdo a la figura $r = OP = RP - RO$, pero $RP = b$, y $RO = a \cos \theta$ ya que el triángulo MPO es rectángulo, y de aquí se sigue que el lugar geométrico que describe P está dado por:

$$r = b - a \cos \theta$$

Para determinar el punto P' se tiene que $r' = OP' + OR = b + a \cos \theta$. Nótese que $\theta' = \theta + 180^\circ$, o bien $\theta = \theta' - 180^\circ$; sustituyendo en r' se tiene

$$r' = b + a \cos(\theta' - 180^\circ) = b - a \cos \theta'$$

así, la curva descrita por P' será la misma que la que describe P . Por ello podemos escribir a

$$\boxed{r = b - a \cos \theta}$$

como ecuación del Limazón de Pascal.

La gráfica, si $a < b$, se ve como en la Figura 72. Si hacemos $b = a$ la ecuación se convierte en $r = a(1 - \cos \theta)$. Ecuación que pertenece a una cardioide, como se muestra en la

Figura 73.

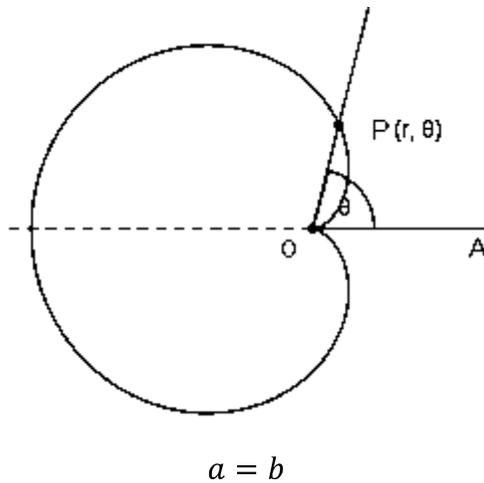


Figura 73. Caracol de Pascal. Cuando $a = b$ se convierte en cradioide.

Para estas dos curvas las r siempre son positivas, incluso para ángulos negativos. Pero cuando $b < a$ así hay r negativas y estas alteran la gráfica añadiendo una porción de arco (Figura 74). Estas r negativas se producen cuando θ es tal que $\cos \theta$ es suficientemente grande para que $b < a \cos \theta$.

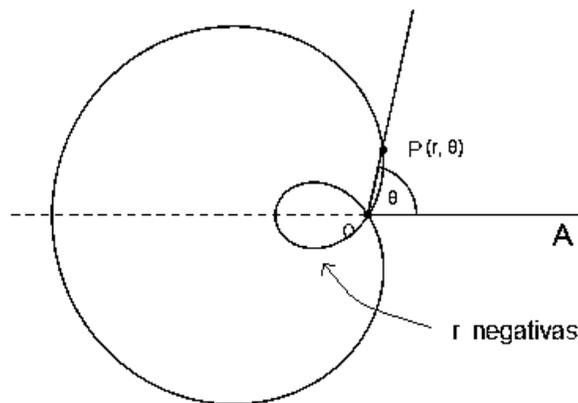


Figura 74. Caracol de Pascal para $b < a$.

Ahora veamos algunas curvas interesantes cuyas ecuaciones se presentan de forma más elegante en su forma paramétrica que en coordenadas polares o cartesianas.

III.11. Curva o bruja de Agnesi

Entre las curvas algebraicas de interés histórico se encuentra la *curva de Agnesi o Bruja de Agnesi*. Como lugar geométrico, esta curva se obtiene si en un sistema de referencia xy , tomamos una circunferencia de diámetro OA que sea tangente al eje x en O . Después tracemos una recta t tangente a la circunferencia en A ; desde O tracemos una recta cualquiera l y sean B y C los puntos de intersección de esta recta con la circunferencia y con la recta t , respectivamente. Por B tracemos una recta perpendicular a OA y por C una paralela a OA ; sea P el punto de intersección de estas dos rectas. La curva de Agnesi es el lugar geométrico que describe el punto P a medida que l gira alrededor de O (Figura 75).

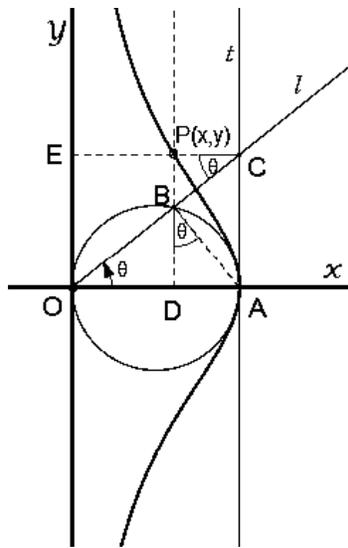


Figura 75. Curva o Bruja de Agnesi.

Como en la figura anterior, sea E la intersección de la paralela a OA con el eje y y D la intersección de la perpendicular a OA con el eje x . Y tracemos el segmento AB . Sea θ el ángulo que forma la recta l con la parte positiva del eje x . Como θ varía conforme l gira alrededor de O lo emplearemos como parámetro. Es fácil ver que: $\angle DBA = \angle ECO = \theta$. Sea a el radio del círculo. De acuerdo a esto, el punto $P(x, y)$ tiene por coordenadas:

$$x = EP = OD = OB \cos \theta = 2a \cos \theta \cdot \cos \theta = 2a \cos^2 \theta$$

$$y = DP = AC = OA \tan \theta = 2a \tan \theta$$

Así las ecuaciones paramétricas de la curva o bruja de Agnesi son:

$$\begin{cases} x = 2a \cos^2 \theta \\ y = 2a \tan \theta \end{cases}$$

III.12. La Cicloide

Si fijamos un punto P en una curva cerrada C y la dejamos que ruede, sin resbalar, sobre otra curva fija C' , el lugar geométrico que describe P se llama *ruleta*.

Un caso especial de la ruleta es la curva llamada *Cicloide*, una de las curvas mecánicas que los geómetras consideraron más tempranamente y fue introducida con el propósito de cuadrar el círculo mediante la integración.

Una Cicloide es lugar geométrico que describe un punto P de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre una recta fija.

Para deducir sus ecuaciones paramétricas elijamos como recta fija al eje xy como origen una de las posiciones del punto P sobre el *ejex*. Sean (x, y) las coordenadas del punto P , a el radio de la circunferencia que rueda y C su centro (Figura 76).

Tomemos como parámetro, o variable auxiliar, el ángulo θ que se muestra en la figura cuando la circunferencia rueda partiendo de su posición inicial en el origen. Sean A y B los pies de las perpendiculares por los puntos P y C con el eje x ; tracemos PD perpendicular a BC .

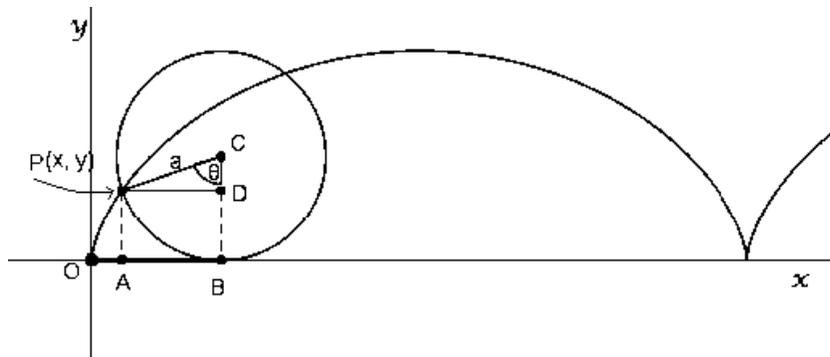


Figura 76. Cicloide.

Como la circunferencia rueda sin resbalar desde O hasta B , se tiene que

$$OB = \text{arco } PB$$

Si θ se mide en radianes, la longitud de arco es $a\theta$, así que

$$\text{arco } PB = a\theta$$

Por tanto, basándonos en la Figura 76, se tiene que

$$x = OA = OB - AB = a\theta - PD = a\theta - a \sin \theta,$$

$$y = AP = BD = BC - DC = a - a \cos \theta$$

de manera que las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

La base de cada arco de la Cicloide tiene longitud $2\pi a$, la longitud de la circunferencia que rueda, y la altura de cada arco es $2a$.

Galileo fue uno de los primeros en estudiar intensamente las propiedades de esta curva, a la que dice haber dedicado más de cuarenta años. Galileo se planteó el problema de comparar el área de un arco de cicloide con el área del círculo que la genera. Como no consiguió resolver el problema matemáticamente, lo que hizo fue recortar y pegar piezas de metal con la forma de la cicloide. Así encontró que el área bajo un arco de la cicloide es tres veces el área del círculo que la genera, pero él decidió que no debía ser exactamente 3, ya que intuía (erróneamente) que debía ser no racional.

Actualmente podemos mostrar mediante el uso de la integración que el área bajo un arco es $3\pi a^2$; es decir, tres veces el área de la circunferencia generatriz:

$$\int_0^{2\pi a} y \, dx = \int_0^{2\pi a} (a - a \cos \theta) \, d(a\theta - a \sin \theta) = \int_0^{2\pi a} (a - a \cos \theta)^2 \, d\theta = 3\pi a^2$$

La longitud de un arco de la Cicloide es $8a$, cuatro veces el radio de la circunferencia generatriz. También, en un punto de la Cicloide, la normal (perpendicular a la tangente en P) pasa por el punto más bajo de dicha circunferencia generatriz.

A la Cicloide también se le da el nombre de *Braquistocrona* o curva del más rápido descenso, porque si se invierte la curva, se puede demostrar que es el recorrido descrito por una partícula que cae desde un punto dado a otro en el intervalo de tiempo mínimo. Además, si se sueltan dos partículas simultáneamente desde dos puntos cualesquiera del arco invertido de una cicloide, llegaran ambas al punto más bajo al mismo tiempo.

III.13. Hipocicloide

Cuando una circunferencia de radio b rueda, sin resbalar, dentro de la circunferencia fija de radio a , un punto fijo $P(x, y)$ de la circunferencia que rueda describe una curva llamada *Hipocicloide*.

Para encontrar una representación matemática de esta curva, elijamos los ejes coordenados de tal manera que el origen sea el centro de la circunferencia fija y el eje x que pase por el punto en que P era punto de contacto entre las circunferencias. Llamemos θ al ángulo entre la recta que une los centros de la circunferencias con el eje x , si C es el centro de la circunferencia que rueda, llamemos φ al ángulo que forma CP con la línea de los centros, como se muestra en la

Figura 77. Sean B el punto en el que la línea que pasa por los centros corta a las dos circunferencias y D , la intersección de la normal bajada desde C con el eje x ; F es el pie de la normal desde P hacia el eje x , A es el punto de intersección de la circunferencia fija con el eje positivo de las x .

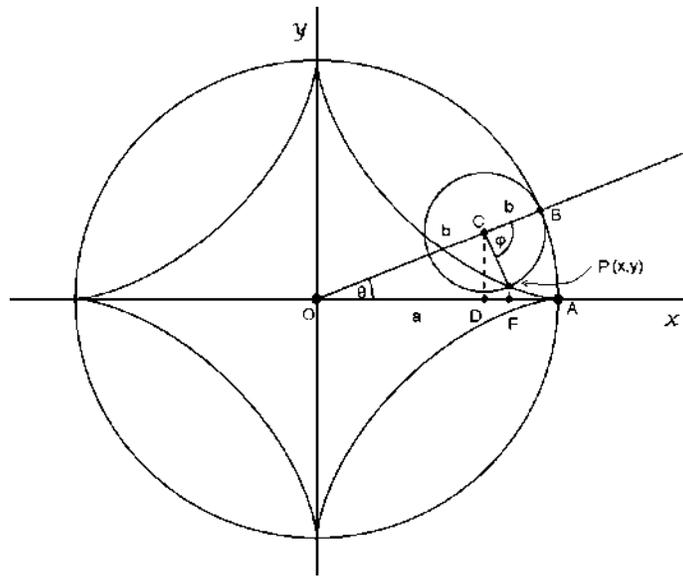


Figura 77. Hipocicloide. En esta ilustración $a = 4b$.

Debido a que la circunferencia rueda sin resbalar, la longitud de arco de la circunferencia fija y de la que rueda son iguales: $a\theta = b\varphi$. De la Figura 78 es claro que

$$x = OF = OD + DF = OD + GP$$

pero $OD = (a - b) \cos \theta$ y $GP = b \sin[(90^\circ + \theta) - \varphi] = b \cos(\varphi - \theta)$, y sustituyendo estos valores en la ecuación para x se tiene

$$x = (a - b) \cos \theta + b \cos(\varphi - \theta).$$

También se puede ver que

$$y = FP = DG = DC - GC,$$

pero $DC = (a - b) \operatorname{sen} \theta$ y $GC = b \cos[(90^\circ + \theta) - \varphi] = b \operatorname{sen}(\varphi - \theta)$

sustituyendo estos valores en la ecuación para y se tiene

$$y = (a - b) \operatorname{sen} \theta - b \operatorname{sen}(\varphi - \theta)$$

como $a\theta = b\varphi$ se tiene que

$$\varphi = \frac{a\theta}{b} \quad \text{y} \quad \varphi - \theta = \frac{a\theta}{b} - \theta = \frac{a - b}{b} \theta$$

y finalmente se tiene

$x = (a - b) \cos \theta + b \cos \frac{a - b}{b} \theta$ $y = (a - b) \operatorname{sen} \theta - b \operatorname{sen} \frac{a - b}{b} \theta$

como ecuaciones paramétricas de la Hipocicloide.

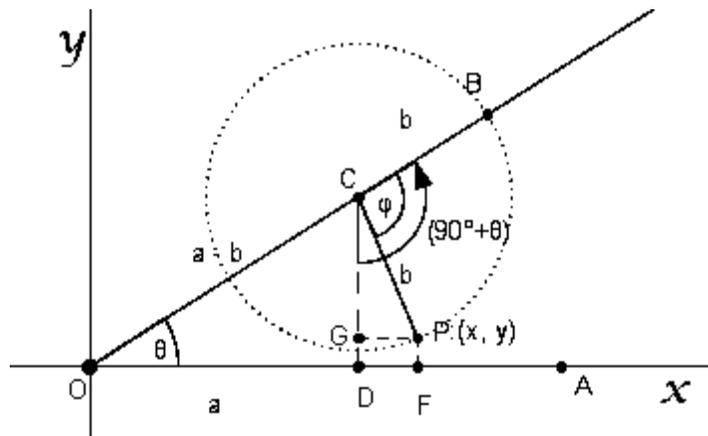


Figura 78. Figura auxiliar para encontrar las ecuaciones de la Hipocicloide.

A los puntos en que la circunferencia que rueda completa una revolución se llaman *picos* y a la curva entre cada pico se les llama *bucles*.

Cuando los radios de las circunferencias son tales que $a/b = r$ y r es un entero entonces la Hipocicloide será una curva cerrada con r picos y r bucles. La Figura 77 muestra el caso en el que $a/b = 4$ y en la Figura 79 cuando $a/b = 10$.

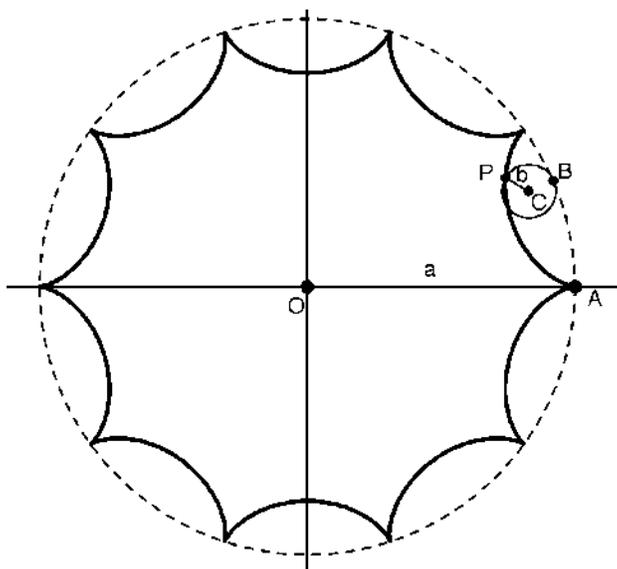


Figura 79. Hipocicloide cuando $a = 4b$.

Si r es un número racional p/q , con p y q sin factores comunes, entonces $qa = pb$ y $2\pi qa = 2\pi pb$; es decir, p veces la circunferencia que rueda es igual a q veces la circunferencia fija. O sea, cuando la circunferencia de radio b recorra q veces la circunferencia fija, el punto P estará en la posición en que estaba cuando la circunferencia empezó a rodar y, a partir de ahí, la curva se repite. La Figura 80 muestra el caso en que $r = 10/3$.

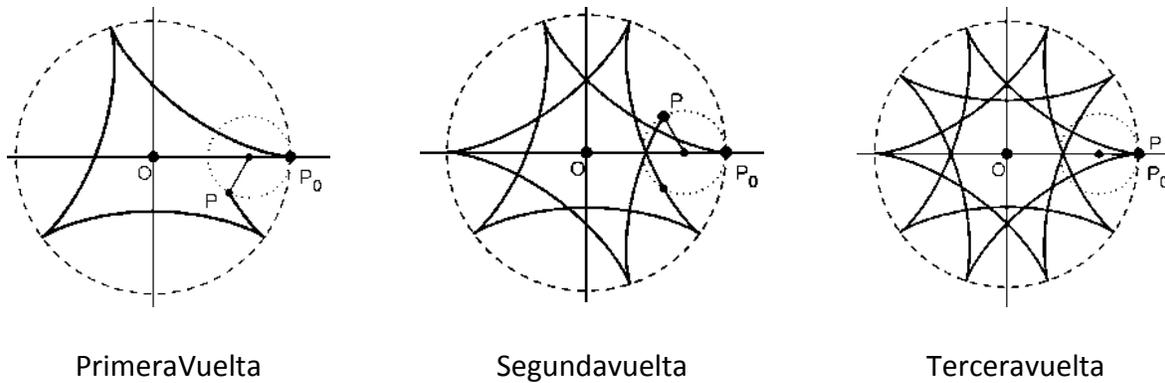


Figura 80. Hipocicloide cuando $a/b = 10/3$.

Cuando r es irracional el punto P nunca volverá a la misma posición.

Para el caso en que $a = 4b$, la curva que se genera se conoce como *Astroide*, en la que se tiene:

$$x = \frac{3a}{4} \cos \theta + \frac{a}{4} \cos 3\theta$$

y

$$y = \frac{3a}{4} \sin \theta - \frac{a}{4} \sin 3\theta$$

pero

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

y

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

Sustituyendo estos valores en x e y , obtenemos

$$\boxed{\begin{array}{l} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{array}}$$

como ecuaciones paramétricas de la astroide.

Para el caso en que $a = 2b$ se tiene

$$x = a \cos \theta$$

$$y = 0$$

es decir, el lugar geométrico que describe el punto P es un segmento rectilíneo, el diámetro de la circunferencia fija.

III.14. Epicicloide

Es la curva descrita por un punto de una circunferencia de radio b que rueda, sin resbalar, sobre el exterior de otra circunferencia fija de radio a (Figura 81).

Un procedimiento análogo al que se hizo para encontrar las ecuaciones de la Hipocicloide nos llevará a encontrar las respectivas ecuaciones de la Epicicloide.

La longitud del arco de ambas circunferencias debe ser igual, $a\theta = b\varphi$, ya que rueda sin deslizarse, y $\varphi + \theta = \frac{a+b}{b}\theta$. Establezcamos un sistema coordenado y marcando los puntos como se muestra en la Figura 81a) y b).

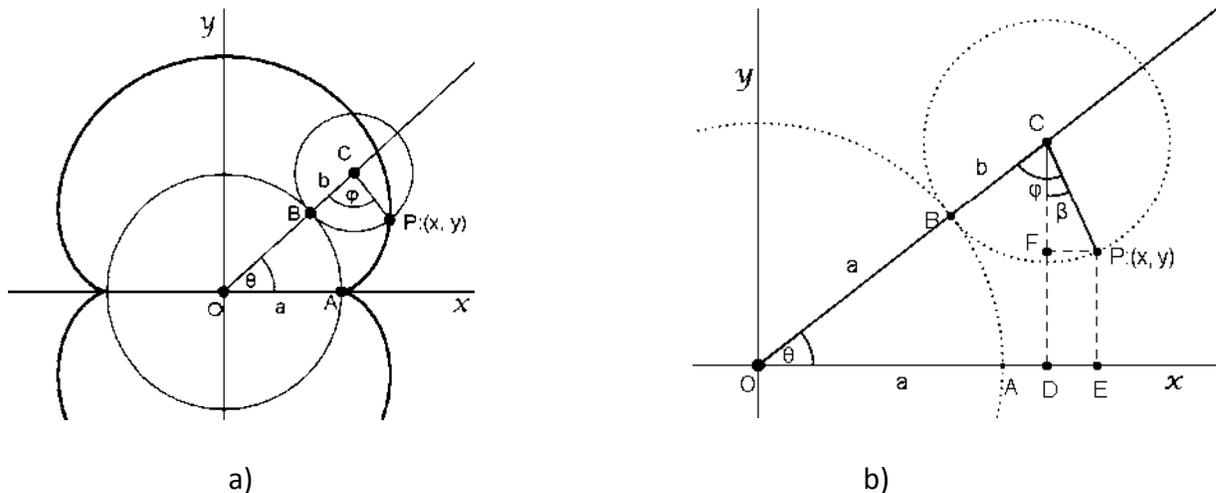


Figura 81. Epicicloide.

De la Figura 81 b) tenemos que

$$\beta = \varphi - \angle OCD = \varphi - (90^\circ - \theta) = (\varphi + \theta) - 90^\circ$$

Para (x, y) de P se tiene

$$x = OE = OD + DE = OD + FP = (a + b) \cos \theta + b \sin \beta$$

y

$$y = EP = FD = DC - FC = (a + b) \operatorname{sen} \theta - b \cos \beta$$

Pero

$$\operatorname{sen} \beta = \sin[(\varphi + \theta) - 90^\circ] = -\operatorname{sen}[90^\circ - (\varphi + \theta)] = -\cos(\varphi + \theta) = -\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$$

y

$$\cos \beta = \cos[(\varphi + \theta) - 90^\circ] = \cos[90^\circ - (\varphi + \theta)] = \operatorname{sen}(\varphi + \theta) = \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$$

sustituyendo estos valores en x e y obtenemos

$$\begin{array}{l} x = (a + b) \cos \theta - b \cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right) \\ y = (a + b) \operatorname{sen} \theta - b \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{b}\theta\right) \end{array}$$

como ecuaciones paramétricas de la Epicicloide.

Al igual que en la Hipocicloide, cuando en la Epicicloide los radios de las circunferencias son tales que $a/b = r$ y r es un entero entonces la Epicicloide será una curva cerrada con r picos y r bucles. Y si r es un número racional p/q , con p y q sin factores comunes, entonces cuando la circunferencia de radio b recorra q veces la circunferencia fija, el punto P estará en la posición en que estaba cuando la circunferencia empezó a rodar y, a partir de ahí, la curva se repite. La Figura 82 muestra el caso en el que $a/b = 6$.

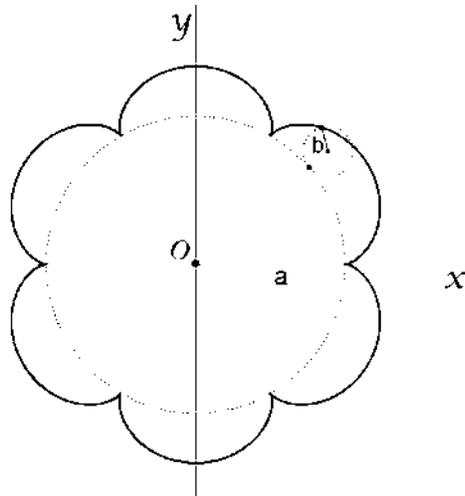


Figura 82. Epicicloide cuando $a = 6b$.

Ya se vio en el apartado dedicado a la Cardioide que cuando $a = b$ el lugar geométrico que describe el punto P es una Cardioide.

CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES

Como se ha visto en el desarrollo de este trabajo, los conocimientos históricos proporcionan la materia prima de la geometría analítica.

Cuando se habla de historia de la matemática, es imposible no considerar a los griegos, pues son una de las culturas que más han aportado al desarrollo de las matemáticas, en particular al de la geometría, pues esta la desarrollaron de una manera exhausta y perfeccionaron su metodología a un grado no alcanzado para ninguna otra de sus ciencias. Es aquí es donde encontramos a Apolonio de Perga, sin duda uno de los principales protagonistas en éste ámbito. Matemático de extraordinaria capacidad que aparte de los extensos trabajos geométricos que hizo, también realizó algunos aportes astronómicos.

Sin duda, el principal legado matemático de Apolonio es sobre geometría, más concretamente, el Tratado sobre secciones cónicas. Trabajo en el que recopiló y desarrolló de una manera completa prácticamente todo lo que se sabe hasta hoy acerca de las propiedades geométricas de las secciones cónicas.

Por otra parte, René Descartes en su obra *Le Géométrie* puso todo el campo de la geometría clásica al alcance de los algebristas. Sus aportes a la geometría analítica también son fundamentales en el desarrollo del presente trabajo, la idea de establecer un sistema de referencia de coordenadas rectangulares, el simbolismo algebraico y la idea de relacionar cada curva con una ecuación de dos variables, que fue lo que estudió como problema de lugar geométrico, son aspectos de la geometría analítica con los que se trabajó.

Pero la mayor parte de este trabajo tiene su base en las coordenadas polares; una invención de Grégoire de Saint-Vicent y Bonaventura Cavalieri quienes establecieron este concepto de manera independiente alrededor de 1650 y después definidas como actualmente se conocen por Jacob Bernoulli 1690.

El uso de las coordenadas polares, como ya hemos visto, simplifican muchos de los problemas de geometría analítica, algunos de los resultados que con estas se obtienen son más evidentes que en coordenadas rectangulares.

La tecnología computacional también puede jugar un papel muy importante en los métodos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Geogebra es un software de geometría dinámica que, desde mi punto de vista, puede contribuir a facilitar el acceso y entendimiento de curvas complejas, así como la construcción y representación tanto gráfica como algebraica.

REFERENCIAS

Collette, J.-P.(1986). *Historia de las matemáticas I. Editores siglo veintiuno.*

Díaz Barriga, A. E. (2009). *Geometría dinámica con Cabri-Geomètre. 3ª edición.*

Goldenberg, E. &Cuoco, A. (1998). "Whatisdynamicgeometry?" In *DesigningLearningEnviromentsforDevelopingUnderstending of Geometry and Space. R Lehrer and D. Chazan (eds.), Hillsdale, NJ: Erlbaum.*

Goldenberg, P. (2000).*Thinking (and talking) abouttechnology in mathclassrooms. EducationDevelopment Center, Inc.*

González, M. M. C., Paniagua C. J. G., Patiño, J. G. A., Instituto Tecnológico Metropolitano. (2008). *Secciones Cónicas, Una mirada desde la derivación implícita.*

González, U. P. M. (2003). *Orígenes y Evolución Histórica de la Geometría Analítica.*

Granville, W. A., Smith, F. P., Longley, R. W. (1963). *Cálculo Diferencial e Integral.*

Hofman, E. J. (1978). *Historia de la matemática. Tomo I.*

Kline, M.(1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. Edit. Alianza universidad.*

Lara A. M. (1991). *Los matemáticos Griegos. Universidad de Querétaro.*

Lehmann. (2004). *Geometría Analítica. Editorial Limusa.*

Magallán S. J. (2013). *Problemas centrales en el desarrollo histórico de la geometría analítica. Tesis de licenciatura no publicada, de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH.*

Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas .Editorial Iberoamérica.*

Presmeg, N. (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education.Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics (pp. 205-235).ISBN 90-77874-19-4.*

Rey Pastor, J., Babini, J.(1985) *Historia de la Matemática. Prefacio de J. Vernet. Vol. I De la antigüedad a la Baja Edad Media.*

Salazar, H. W. J. (2011). *Introducción al Cálculo a través de algunas curvas especiales. Universidad de Colombia.*

Sánchez, F. C., Valdés, C. C.(2001). *Los Bernoulli Geómetras y viajeros. Edit. Nivola Libros.*

Struik, D. J. (1986). Historia concisa de las matemáticas. Instituto Politécnico Nacional.

T. L. Heath, M. A. (1896). Apollonius of Perga. Treatise on conic sections. Edited in modern notation.

Wexler, C. (1968). Geometría Analítica. Un enfoque vectorial. Editorial Montaner Y Simon, S. A. Barcelona.

Zimmerman, W., Cunningham, S. (1995). Visualización Matemática, en Memorias del CIEAEM 01.95; Disco flexible, 10/02/95.

ANEXOS

Protocolos de construcción de las curvas graficadas con Geogebra.

Principio unificador de las cónicas

Nº	Nombre	Definición
1	Recta a	$x=0$
2	Punto F	(3,0)
3	Recta b	Recta que pasa por F perpendicular a a
4	Número e	Deslizador
5	Punto D	Punto sobre a
6	Recta c	Recta que pasa por D perpendicular a a
7	Segmento d	Segmento [F, D]
8	Circunferencia f	Circunferencia con centro F y radio e
9	Punto A	Punto de intersección de f, b
10	Circunferencia g	Circunferencia con centro D y radio 1
11	Punto B	Punto de intersección de g, c
12	Segmento h	Segmento [A, B]
13	Punto M	Punto de intersección de d, h
14	Texto texto1	M es el punto que divide al segmento FD en la razón e
15	Recta i	Recta que pasa por M perpendicular a c
16	Punto C	Punto de intersección de c, i
17	Circunferencia k	Circunferencia que pasa por C con centro M
18	Recta j	Tangente a k pasando por F
18	Recta l	Tangente a k pasando por F
19	Punto P	Punto de intersección de j, c
20	Punto P'	Punto de intersección de l, c
21	Lugar Geométrico lugar1	LugarGeométrico[P, D]
22	Lugar Geométrico lugar2	LugarGeométrico[P', D]

Curva de la rosa

Nº	Nombre	Definición
1	Punto O	Punto de intersección de EjeX, EjeY
2	Punto A	Punto sobre EjeX
3	Semirrecta a_1	Semirrecta que pasa por O, A
4	Número a	Deslizador
5	Número n	Deslizador
6	Ángulo θ	Deslizador
7	Número r	$a \cos(n \theta)$
8	Punto O'	O rotado por el ángulo $n \theta$
9	Punto c	Circunferencia con centro O y radio r
10	Punto A'	A rotado por el ángulo θ
11	Semirrecta b	Semirrecta que pasa por O, A'
12	Punto P	Punto de intersección de c, b
12	Punto D	Punto de intersección de c, b
13	Lugar Geométrico lugar1	LugarGeométrico[P, θ]
14	Número r_2	$-a \cos(n \theta)$
15	Punto d	Circunferencia con centro O y radio r_2
16	Punto O' ₁	O reflejado en O
17	Punto A''	A' reflejado en O
18	Semirrecta b'	Semirrecta que pasa por O' ₁ , A''
19	Punto C	Punto de intersección de d, b'
19	Punto B	Punto de intersección de d, b'
20	Ángulo α	Ángulo entre A, O, A'
21	Lugar Geométrico lugar2	LugarGeométrico[B, θ]

Espiral de Arquímedes

Nº	Nombre	Definición
1	Punto O	Punto de intersección de EjeX, EjeY
2	Punto A	Punto sobre EjeX
3	Semirrecta a	Semirrecta que pasa por O, A
4	Número b	Deslizador
5	Punto A'	A rotado por el ángulo b rad
6	Semirrecta c	Semirrecta que pasa por O, A'
7	Ángulo α	Ángulo entre A, O, A'
8	Circunferencia d	Circunferencia con centro O y radio b
9	Punto P	Punto de intersección de d, c
10	Lugar Geométrico Espiral	LugarGeométrico[P, b]

Óvalos de Cassini

Nº	Nombre	Definición
1	Punto O	(0,0)
2	Número a	Deslizador
3	Punto F	(a, 0)
4	Punto F'	F reflejado en O
5	Número p	Deslizador
6	Recta d	Recta que pasa por F', F
7	Circunferencia c	Circunferencia con centro F' y radio p
8	Punto C	Punto de intersección de c, d
8	Punto D	Punto de intersección de c, d
9	Circunferencia e	Circunferencia que pasa por F con centro O
10	Punto E	Punto sobre e
11	Semirrecta f	Semirrecta que pasa por C, E
12	Punto F ₁	Punto de intersección de e, f
12	Punto G	Punto de intersección de e, f

13	Segmento g	Segmento [C, G]
14	Texto r_1	"CG=" + g
15	Circunferencia h	Circunferencia con centro F' y radio g
16	Segmento i	Segmento [C, E]
17	Circunferencia k	Circunferencia con centro F y radio i
18	Punto P	Punto de intersección de h, k
18	Punto P'	Punto de intersección de h, k
19	Rastro de P,P' con respecto a E	

Concoide de Nicomedes

Nº	Nombre	Definición
1	Recta a_1	$x=0$
2	Recta b_1	$y=0$
3	Punto O	Punto de intersección de b_1, a_1
4	Número a	Deslizador
5	Número b	Deslizador
6	Recta c	$x = a$
7	Punto A	
8	Punto B	
9	Circunferencia d	Circunferencia que pasa por B con centro A
10	Segmento e	Segmento [A, B]
11	Punto C	Punto sobre d
12	Ángulo α	Ángulo entre B, A, C
13	Punto D	Punto sobre b_1
14	Punto D'	D rotado por el ángulo α
15	Ángulo β	Ángulo entre D, O, D'
16	Recta f	Recta que pasa por O, D'
17	Punto E	Punto de intersección de f, c
18	Circunferencia g	Circunferencia con centro E y radio b

19	Punto P	Punto de intersección de g, f
19	Punto Q	Punto de intersección de g, f
20	Lugar Geométrico lugar1	LugarGeométrico[Q, C]

CICLOIDE

Nº	Nombre	Definición
1	Recta a_1	$y=0$
2	Recta b	$x=0$
3	Punto A	Punto de intersección de a_1, b
4	Número a	Deslizador
5	Recta c	$y = a$
6	Punto B	Punto sobre a_1
7	Semirrecta d	Semirrecta que pasa por A, B
8	Punto P	Punto sobre d
9	Recta e	Recta que pasa por P perpendicular a c
10	Punto C	Punto de intersección de c, e
11	Circunferencia f	Circunferencia que pasa por P con centro C
12	Segmento g	Segmento [A, P]
13	Punto P'	P rotado por el ángulo $-(g / a)$
14	Segmento h	Segmento [C, P']
15	Lugar Geométrico lugar1	LugarGeométrico[P', P]

Cardioide, Hipocicloide e Epicloide

Nº	Nombre	Definición
1	Número a	Deslizador
2	Punto B	$(-a, 0)$
3	Punto A	Punto de intersección de EjeX, EjeY
4	Circunferencia c	Circunferencia que pasa por A con centro B
5	Recta b_1	Recta que pasa por B, A
6	Ángulo α	
7	Número b	Deslizador
8	Punto A'	A rotado por el ángulo α
9	Ángulo β	Ángulo entre A, B, A'
10	Semirrecta d	Semirrecta que pasa por B, A'
11	Circunferencia e	Circunferencia con centro A' y radio b
12	Punto C	Punto de intersección de e, d
13	Circunferencia f	Circunferencia que pasa por A' con centro C
14	Punto A'' ₁	A' rotado por el ángulo $\beta a / b$
15	Segmento g	Segmento [C, A'' ₁]
16	Punto G	Punto de intersección de e, d
17	Circunferencia k	Circunferencia que pasa por A' con centro G
18	Punto A''	A' rotado por el ángulo $-(\beta a / b)$
19	Segmento j	Segmento [G, A'']
20	Lugar Geométrico lugar1	LugarGeométrico[A'' ₁ , α]
21	Segmento h	Segmento [C, A']