Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Universidad Nacional Autónoma de México

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM-UMSNH

I-ultrafiltros, existencia genérica y algunas relaciones de Katětov

TESINA
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
Juan Salvador Lucas Martínez

DIRECTOR:
Doctor en Ciencias Matemáticas
David Meza Alcántara

Morelia, Michoacán. Febrero de 2014.

Índice general

Introducción

El presente trabajo tiene que ver con clases de ultrafiltros y cuándo estas están caracterizadas por ideales sobre conjuntos numerables. Esto se consigue comparando los ideales duales de ultrafiltros en el orden de Katětov con algún ideal dado. Por otro lado, nos interesa la existencia de clases de ultrafiltros, particularmente de $\mathcal{I}$-ultrafiltros.

En el primer capítulo se establecen las propiedades básicas de los $\mathcal{I}$-ultrafiltros, y se define el invariante cardinal $cof^*(\mathcal{I})$ asociado a un ideal $\mathcal{I}$, lo cual lleva a formular el concepto de existencia genérica. Se establecen las caracterizaciones de ultrafiltros Ramsey, p-puntos y q-puntos como $\mathcal{I}$-ultrafiltros. Finalmente, se exhibe un ejemplo de un ideal analítico cuyo invariante $cof^*(\mathcal{I})$ es igual a la cardinalidad del continuo, dejando abierta la pregunta si esta misma propiedad puede ser satisfecha por un ideal Borel.

En el segundo capítulo se establece la negación de ciertas relaciones de Katětov entre algunos ideales, lo cual abre la posibilidad de distinguir entre clases de $\mathcal{I}$-ultrafiltros. Utilizando técnicas de forcing, así como la absolutez del orden de Katětov para ideales Borel, se prueba que $\mathcal{G}_{fc} \not\leq_K \mathcal{S}$ y que $\mathcal{S} \not\leq_K \mathcal{ED}_{fin}$. También se prueba que $\mathcal{G}_{fc} \not\leq_K \mathsf{nwd}$ por métodos estándar en ZFC. A la luz de este resultado, se realiza la costrucción de un ultrafiltro Hausdorff (caracterizado como $\mathcal{G}_{fc}$-ultrafiltro) que no es nwd-ultrafiltro, lo cual constituye la principal aportación de este trabajo.

Keywords: $\mathcal{I}$-ultrafiltros, existencia genérica, ultrafiltros Hausdorff.

Abstract

This paper is concerned with classes of ultrafilters and when they are characterized by ideals on countable sets. This is achieved by comparing the dual ideals of ultrafilters in Katětov order with some given ideal. On the other hand, we are interested in the existance of classes of ultrafilters, particularly of $\mathcal{I}$-ultrafilters.

In the first chapter we stablish the basic properties of $\mathcal{I}$-ultrafilters, and we define the cardinal invariant $cof^*(\mathcal{I})$ associated to an ideal $\mathcal{I}$, which leads to formulate the concept of generic existence. We stablish characterizations for Ramsey ultrafilters, p-points and q-points as $\mathcal{I}$-ultrafilters. Finally, we show an example of an analytic ideal which invariant $cof^*(\mathcal{I})$ is equal to the cardinality of the continuum, leaving open the question whether the same property can be satisfied by a Borel ideal.

In the second chapter we stablish the denial of some Katětov relations between some ideals, which opens the possibility to distinguish between classes of $\mathcal{I}$-ultrafilters. Using some forcing techniques and the absoluteness of Katětov order for Borel ideals, we prove that $\mathcal{G}_{fc} \nleq_K \mathcal{S}$ and $\mathcal{S} \nleq_K \mathcal{ED}_{fin}$. We also prove that $\mathcal{G}_{fc} \nleq_K \mathsf{nwd}$ by using standars methods in ZFC. In light of this result, we build a Hausdorff ultrafilter (characterized as a $\mathcal{G}_{fc}$-ultrafilter) which is not a nwd-ultrafilter, which constitutes the main contribution of this work.

Keywords: $\mathcal{I}$-ultrafilters, generic existence, Hausdorff ultrafilters.

Capítulo 1

$\mathcal{I}$-ultrafiltros y existencia genérica

1.1. Conceptos preliminares

Sea X un conjunto no vacío. Un *ideal* sobre X es una familia $\mathcal{I}$ de subconjuntos de X que satisface las siguientes propiedades:

- $\emptyset \in X$ y $X \notin \mathcal{I}$,
- si $A, B \in \mathcal{I}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$ y
- si $B \in \mathcal{I}$ y $A \subseteq B$ entonces $A \in \mathcal{I}$.

Si la familia $\mathcal{I}$ es cerrada bajo uniones numerables de elementos de $\mathcal{I}$, diremos que $\mathcal{I}$ es un σ-ideal.

De manera dual, diremos que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X es un *filtro* sobre X si satisface:

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$ y $X \in \mathcal{F}$,
- si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$ y
- si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

Un *ultrafiltro* es un filtro que es maximal con respecto a la contención. Si $\mathcal{I}$ es un ideal sobre X, denotaremos por $\mathcal{I}^*$ a la familia $\{A \subseteq X : X \setminus A \in \mathcal{I}\}$. Esta familia $\mathcal{I}^*$ resulta ser un filtro, y se le conoce como el *filtro dual* de $\mathcal{I}$. A la familia $\{A \subseteq X : A \notin \mathcal{I}\}$ se le conoce como la familia de subconjuntos *$\mathcal{I}$-positivos*, y se le denota por $\mathcal{I}^+$. De manera dual, si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, denotaremos por $\mathcal{F}^*$ a la familia $\{X \setminus A : A \in \mathcal{F}\}$. A dicha familia se le conoce como el *ideal dual* de $\mathcal{F}$.

Si Y es un subconjunto $\mathcal{I}$-positivo, la *restricción* de $\mathcal{I}$ a Y se define como $\mathcal{I} \restriction Y = \{I \cap Y : I \in \mathcal{I}\}$.

Si $\mathcal{I}$ es un filtro, una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ es una *base* de $\mathcal{I}$ si para cada $I \in \mathcal{I}$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $I \subseteq A$. Dualmente, si $\mathcal{F}$ es un filtro, una familia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ es una *base* de $\mathcal{F}$ si para cada $F \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq F$. A la mínima cardinalidad de una base para el filtro $\mathcal{F}$ la denotaremos por $\chi(\mathcal{F})$.

Dada una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X, si no existe una subfamilia finita $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ tal que $\bigcup \mathcal{D} = X$ entonces el *ideal generado* por $\mathcal{C}$ es el mínimo ideal que contiene a $\mathcal{C}$.

En el caso particular en que $X = \omega$, si $\mathcal{I}$ es un ideal sobre ω, diremos que $\mathcal{I}$ es *alto* si para cada subconjunto infinito $Y \subseteq \omega$ existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $I \cap Y$ es infinito.

Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ ideales sobre ω. Se definen las relaciones de (pre)orden:

- *(Orden de Katětov)* $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$ si existe una función $f : \omega \longrightarrow \omega$ tal que $f^{-1}[I] \in \mathcal{J}$ para todo $I \in \mathcal{I}$.

- *(Orden de Katětov-Blass)* $\mathcal{I} \leq_{KB} \mathcal{J}$ si existe una función finito-a-uno $f : \omega \longrightarrow \omega$ tal que $f^{-1}[I] \in \mathcal{J}$ para todo $I \in \mathcal{I}$.

- *(Orden de Rudin-Keisler)* $\mathcal{I} \leq_{RK} \mathcal{J}$ si existe una función $f : \omega \longrightarrow \omega$ tal que $A \in \mathcal{I}$ si y sólo si $f^{-1}[A] \in \mathcal{J}$.

Si $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos (nos interesa el caso en el que $\mathcal{A}$ es un ideal o un filtro) sobre ω y $f : \omega \longrightarrow \omega$ es una función, se define $f(\mathcal{A}) = \{J \subseteq \omega : f^{-1}(J) \in \mathcal{A}\}$. Utilizando esta notación, se tiene que para $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ ideales sobre ω, $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$ si y sólo si existe $f \in \omega^\omega$ tal que $\mathcal{I} \subseteq f(\mathcal{J})$.

1.2. $\mathcal{I}$-ultrafiltros y existencia genérica

Definición 1.2.1. Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro e $\mathcal{I}$ un ideal, ambos sobre ω.

- Diremos que $\mathcal{U}$ es un *$\mathcal{I}$-ultrafiltro* si para cada función $f : \omega \longrightarrow \omega$ existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $f[A] \in \mathcal{I}$.
- Diremos que $\mathcal{U}$ es un *$\mathcal{I}$-ultrafiltro débil* si para cada función finito-a-uno $f : \omega \longrightarrow \omega$ existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $f[A] \in \mathcal{I}$.
- Diremos que $\mathcal{U}$ es un *$\mathcal{I}$-punto* si para cada función inyectiva $f : \omega \longrightarrow \omega$ existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $f[A] \in \mathcal{I}$.

De acuerdo con las definiciones anteriores, se desprenden de inmediato las siguientes observaciones:

- $\mathcal{U}$ es $\mathcal{I}$-ultrafiltro *syss* $\mathcal{I} \not\leq_K \mathcal{U}^*$ *syss* para cualquier función $f : \omega \longrightarrow \omega$, $\mathcal{I} \cap f(\mathcal{U}) \neq \emptyset$
- $\mathcal{U}$ es $\mathcal{I}$-ultrafiltro débil *syss* $\mathcal{I} \not\leq_{KB} \mathcal{U}^*$ *syss* para cualquier función uno-a-uno $f : \omega \longrightarrow \omega$, $\mathcal{I} \cap f(\mathcal{U}) \neq \emptyset$
- Si $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$ y $\mathcal{U}$ es $\mathcal{I}$-ultrafiltro, entonces $\mathcal{U}$ es también $\mathcal{J}$-ultrafiltro.
- Si $\mathcal{I} \leq_{KB} \mathcal{J}$ y $\mathcal{U}$ es $\mathcal{I}$-ultrafiltro débil, entonces $\mathcal{U}$ es también $\mathcal{J}$-ultrafiltro débil.

Definición 1.2.2. Dado un ideal $\mathcal{I}$, se definen

- *Cofinalidad de $\mathcal{I}$:*

$$cof(\mathcal{I}) = min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \ \wedge \ \forall I \in \mathcal{I} \ \exists A \in \mathcal{A} \ \ I \subseteq A\}$$

- *Cofinalidad exterior de $\mathcal{I}$:*

$$cof^*(\mathcal{I}) = min\{cof(\mathcal{J}) : \mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}\}$$

Definición 1.2.3. Diremos que los $\mathcal{I}$-ultrafiltros *existen genéricamente* si cualquier filtro $\mathcal{F}$ con $\chi(\mathcal{F}) < \mathfrak{c}$ puede ser extendido a un $\mathcal{I}$-ultrafiltro.

Observación 1.2.4.

1. Si $\mathcal{I}$ es un ideal sobre ω y $f : \omega \longrightarrow \omega$, entonces $cof(f(\mathcal{I})) \leq cof(\mathcal{I})$.
2. Si $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$ entonces $cof^*(\mathcal{I}) \leq cof^*(\mathcal{J})$.

Demostración:

1. Sea $\mathcal{K}$ una familia cofinal en $\mathcal{I}$ de cardinalidad mínima, y considere la familia $\{f[K] : K \in \mathcal{K}\}$. Se afirma que esta es una familia cofinal en $f(\mathcal{I})$. En efecto, si $A \in f(\mathcal{I})$ entonces $f^{-1}[A] \in \mathcal{I}$, por lo que existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $f^{-1}[A] \subseteq K$. Entonces $A \subseteq f\big[f^{-1}[A]\big] \subseteq f[K]$, y por tanto la desigualdad se sigue.

2. Si $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{J}$ y f testifica $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$, entonces $\mathcal{I} \subseteq f(\mathcal{K})$; en efecto, si $I \in \mathcal{I}$, entonces se tiene que $f^{-1}[I] \in \mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$. Por la Observación anterior, se tiene que $cof(f(\mathcal{K})) \leq cof(\mathcal{K})$. Como $\mathcal{K}$ es arbitrario, se concluye que $cof^*(\mathcal{I}) \leq cof^*(\mathcal{J})$.

□

Proposición 1.2.5. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $cof^*(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}$

2. Existe un $\mathcal{I}$-ultrafiltro genéricamente.

Demostración: Probaremos que (1) implica (2). Sea $\mathcal{F}$ filtro con $\chi(\mathcal{F}) < \mathfrak{c}$; veamos que se puede extender a un $\mathcal{I}$- ultafiltro. Considere una enumeración $\omega^\omega = \{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$, y sea H_0 una base para $\mathcal{F}$ con $|H_0| < \mathfrak{c}$. Recursivamente construiremos $\{H_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ tales que para cada $\alpha < \mathfrak{c}$:

- H_α es una base para un filtro $\mathcal{F}_\alpha$ que extiende a $\mathcal{F}$.
- $|H_\alpha| < \mathfrak{c}$
- $H_\alpha \subseteq H_{\alpha+1}$
- $H_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} H_\alpha$ si $\lambda < \mathfrak{c}$ es ordinal límite.
- $\bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} H_\alpha$ se extiende a un $\mathcal{I}$-ultrafiltro.

Afirmamos que para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, existe un elemento $I_\alpha \in \mathcal{I}$ tal que $I_\alpha \notin f_\alpha(\mathcal{F}^*_\alpha)$. Si esto no fuera el caso, entonces f_α sería testigo de $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{F}^*_\alpha$, y como $\{\omega \setminus A : A \in H_\alpha\}$ es una base para $\mathcal{F}^*_\alpha$ se tiene

$$\mathfrak{c} = cof^*(\mathcal{I}) \leq cof^*(\mathcal{F}^*_\alpha) < \mathfrak{c}$$

Una contradicción. Por tanto la afirmación se sigue.

Definamos ahora $H_{\alpha+1} = H_\alpha \cup \{f_\alpha[I_\alpha]\}$ para $\alpha < \mathfrak{c}$ ordinal sucesor y $H_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} H_\alpha$ para $\lambda < \mathfrak{c}$ ordinal límite. Veamos que para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, la familia $H_{\alpha+1}$ tiene PIF. En efecto, suponga que para cierto $\alpha < \mathfrak{c}$, existe $A \in H_\alpha$ tal que $A \cap f_\alpha^{-1}[I_\alpha] = \emptyset$. Entonces $f_\alpha^{-1}[I_\alpha] \subseteq \omega \setminus A$ y así $\omega \setminus A \notin H_\alpha$, por lo que $A \notin H_\alpha$, una contradicción.

Sea $\mathcal{F}_\mathfrak{c} = \langle \bigcup H_\alpha : \alpha < \mathfrak{c} \rangle$. Es claro que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_\mathfrak{c}$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro tal que $\mathcal{F}_\mathfrak{c} \subseteq \mathcal{U}$. Afirmamos que $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{I}$-ultrafiltro. En efecto, sea $f \in \omega^\omega$. Entonces $f = f_\alpha$ para algún $\alpha < \mathfrak{c}$, y así $f_\alpha^{-1}[I_\alpha] \in \mathcal{F}_\mathfrak{c} \subseteq \mathcal{U}$ testifica que $f\left[f_\alpha^{-1}[I_\alpha]\right] \subseteq I_\alpha \in \mathcal{I}$.

Ahora se probará que (2) implica (1). Suponga que $cof^*(\mathcal{I}) < \mathfrak{c}$ y sea $\mathcal{J}$ un ideal tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ y $cof(\mathcal{J}) = cof^*(\mathcal{I})$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro tal que $\mathcal{J}^* \subseteq \mathcal{U}$. Entonces la función identidad $id : \omega \longrightarrow \omega$ testifica $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{U}^*$; es decir, $\mathcal{J}^*$ es un filtro que no puede ser extendido a un $\mathcal{I}$-ultrafiltro.

□

De hecho, esta misma prueba nos brinda más información, y es posible enunciar esta Proposición de la siguiente manera:

Proposición 1.2.6. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $cof^*(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}$
2. *Existe un $\mathcal{I}$-ultrafiltro genéricamente.*
3. *Existe un $\mathcal{I}$-ultrafiltro débil genéricamente.*
4. *Existe un $\mathcal{I}$-punto genéricamente.*

Demostración: Ya se probó que (1) implica (2), y las pruebas de (2) implica (3), y (3) implica (4) son triviales. La misma prueba de arriba demuestra (4) implica (1), ya que la función identidad $id : \omega \longrightarrow \omega$ es inyectiva.

$\square$

A continuación haremos una comparación entre el invariante $cof^*(\mathcal{I})$ que hemos definido, y el siguiente invariante definido por Jana Flašková y Jörg Brendle.

Definición 1.2.7. Sea $\mathcal{I}$ un ideal alto. Se define el *número de existencia genérica* como

$$ge(\mathcal{I}) = min\big\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \text{ es base de filtro, } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}^+ \text{ y} \\ \forall I \in \mathcal{I}\ \exists F \in \mathcal{F}\ \big(|I \cap F| < \aleph_0\big)\big\}$$

Ahora se establecerá la relación entre ambos invariantes.

Proposición 1.2.8. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal alto sobre ω. Entonces $ge(\mathcal{I}) = cof^*(\mathcal{I})$.*

Demostración: $ge(\mathcal{I}) \leq cof^*(\mathcal{I})$: Si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$, entonces $\mathcal{J}^* = \{\omega \setminus A : A \in \mathcal{J}\}$ es una familia de conjuntos $\mathcal{I}$-positivos que es (base de) filtro, y además, si $I \in \mathcal{I}$ entonces $\omega \setminus I \in \mathcal{J}^*$ y $|I \cap (\omega \setminus I)| < \aleph_0$.

$cof^*(\mathcal{I}) \leq ge(\mathcal{I})$: Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}^+$ base de filtro que testifica $ge(\mathcal{I})$. Entonces $\mathcal{F}^* = \{\omega \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ genera un ideal que extiende a $\mathcal{I}$; en efecto, si $I \in \mathcal{I}$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $|I \cap F| < \aleph_0$, es decir $I \subseteq^* \omega \setminus F \in \mathcal{F}^*$.

$\square$

Proposición 1.2.9. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal alto. Entonces existe una base de filtro de cardinalidad $ge(\mathcal{I})$ que no puede ser extendida a un $\mathcal{I}$-punto.*

Demostración: Si $\mathcal{F}$ testifica $ge(\mathcal{I})$, considere f como la función identidad $id : \omega \longrightarrow \omega$. Entonces no existe un ultrafiltro $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ tal que $U = f(U) \in \mathcal{I}$ para algún $U \in \mathcal{U}$.

$\square$

1.3. Ejemplos de $\mathcal{I}$-ultrafiltros

A continuación se brindarán algunos ejemplos sin demostración de clases bien conocidas de ultrafiltros que pueden ser caracterizados como $\mathcal{I}$-ultrafiltros para ciertos ideales $\mathcal{I}$.

Proposición 1.3.1. *(J. Ketonen [9]) Toda base de filtro de tamaño $< \mathfrak{c}$ puede ser extendida a un p-punto si y sólo si $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$.*

Proposición 1.3.2. *(R. M. Canjar [5]) Toda base de filtro de tamaño $< \mathfrak{c}$ puede ser extendida a un ultrafiltro Ramsey si y sólo si, cov$(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$.*

Proposición 1.3.3. *(J. Baumgartner [2]) Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un ultrafiltro $\mathcal{U}$:*

- *$\mathcal{U}$ es p-punto.*
- *$\mathcal{U}$ es conv-ultrafiltro.* [1]
- *$\mathcal{U}$ es $\mathsf{fin} \times \mathsf{fin}$-ultrafiltro.* [2]

Proposición 1.3.4. *(J. Flašková [6]) Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un ultrafiltro $\mathcal{U}$:*

- *$\mathcal{U}$ es un ultrafiltro Ramsey.*
- *$\mathcal{U}$ es un $\mathcal{R}$-ultrafiltro.* [3]
- *$\mathcal{U}$ es un $\mathcal{ED}$-ultrafiltro.* [4]

[1] conv es el ideal en $\mathbb{Q}(2^\omega)$ generado por las sucesiones convergentes de racionales.

[2] $\mathsf{fin} \times \mathsf{fin}$ es el ideal en $\omega \times \omega$ generado por las columnas y áreas por debajo de gráficas de funciones en ω^ω; es decir

$$\mathsf{fin} \times \mathsf{fin} = \big\{A \subseteq \omega \times \omega : \big(\exists f \in \omega^\omega\big)\big(\forall^\infty n \in \omega\big)\big(\forall m \in (A)_n\big)\big(m \leq f(n)\big)\big\}$$

donde $(A)_n = A \cap \big(\{n\} \times \omega\big)$.

[3] $\mathcal{R}$ es el ideal generado por los subconjuntos homogéneos de la gráfica Random. Sea $\{X_n : n < \omega\}$ una familia independiente de subconjuntos de ω. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $n \in X_m$ syss $m \in X_n$. El conjunto $E = \big\{\{n, m\} : m \in X_m\big\}$ son las aristas de la gráfica Random.

[4] $\mathcal{ED} = \{A \subseteq \omega \times \omega : (\exists n, m \in \omega)(\forall k \geq n)(|(A)_k| \leq m)\}$

Proposición 1.3.5. *(J. Flašková [6]) Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un ultrafiltro $\mathcal{U}$:*

- $\mathcal{U}$ *es q-punto.*
- $\mathcal{U}$ *es* thin*-ultrafiltro débil.* [5]
- $\mathcal{U}$ *es* $\mathcal{ED}_{fin}$*-ultrafiltro débil.* [6]

Utilizando las Proposiciones y conceptos anteriores, podemos enunciar la siguiente

Proposición 1.3.6. *Se tienen las siguientes igualdades.*

- $\mathfrak{d} = cof^*(\mathsf{conv}) = cof^*(\mathsf{fin} \times \mathsf{fin})$
- $cov(\mathcal{M}) = cof^*(\mathcal{ED}) = cof^*(\mathcal{R})$

También es posible obtener una caracterización de $\mathcal{I}$-ultrafiltros para el caso de ideales analíticos altos. Para ello se utiliza el siguiente resultado.

Teorema 1.3.7. *(A.R.D. Mathias [10]) $\mathcal{U}$ es ultrafiltro selectivo si y sólo si $\mathcal{U} \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$ para cualquier ideal analítico alto $\mathcal{I}$.*

Corolario 1.3.8. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal analítico alto y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro selectivo. Entonces $\mathcal{U}$ es $\mathcal{I}$-ultrafiltro.*

Demostración: Suponga que $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{U}^*$ y sea $f \in \omega^\omega$ que testifica la relación de Katětov, y así $\mathcal{I} \subseteq f(\mathcal{U}^*)$. Considere $\mathcal{V} = f(\mathcal{U}) = \{A \subseteq \omega : f^{-1}[A] \in \mathcal{U}\}$. Por minimalidad en el orden de Rudin-Keisler, se tiene que $\mathcal{V}$ es selectivo, pero $\mathcal{V} \cap \mathcal{I} = \emptyset$, contradiciendo el Teorema de Mathias. $\square$

Observación 1.3.9. En realidad, se sabe un poco más. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathcal{U}$ es selectivo.
- $\mathcal{U}$ es $\mathcal{I}$-ultrafiltro para todo ideal $\mathcal{I}$ analítico alto.

---

[5] thin es el ideal generado por los subconjuntos de ω del mismo nombre. Un conjunto $A = \{a_n : n \in \omega\}$ es *thin* si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 0$.

[6] $\mathcal{ED}_{fin}$ es la restricción del ideal $\mathcal{ED}$ a $\Delta = \{\langle i, j\rangle \in \omega \times \omega : i \geq j\}$.

- $\mathcal{U}$ es $\mathcal{I}$-ultrafiltro para todo ideal $\mathcal{I}$ Borel alto.

Pues el ideal $\mathcal{R}$ es Borel alto (ver [11], Lemma 1.6.29.).

Proposición 1.3.10. $cof^*(\mathcal{ED}) = min\big\{cof^*(\mathsf{fin} \times \mathsf{fin}), cof^*(\mathcal{ED}_{fin})\big\}$

Demostración: Dada la Proposición 1.3.6 y la relación $\mathcal{ED} \leq_K \mathcal{ED}_{fin}$, es suficiente demostrar la desigualdad $\geq$. Sea $\mathcal{K}$ un ideal que extiende a $\mathcal{ED}$. Entonces se tienen dos casos:

- Si $\mathsf{fin} \times \mathsf{fin} \subseteq \mathcal{K}$, entonces $cof^*(\mathsf{fin} \times \mathsf{fin}) \leq cof(\mathcal{K})$.

- Si no, entonces existe $f \in \omega^\omega$ de tal manera que el conjunto $X_f := \{\langle m, n\rangle : n \leq f(m)\} \in \mathcal{K}^+$, entonces $\mathcal{K} \restriction X_f \supseteq \mathcal{ED}_{fin}$ y así

$$cof^*(\mathcal{ED}_{fin}) \leq cof^*(\mathcal{K} \restriction X_f) \leq cof^*(\mathcal{K}) \leq cof(\mathcal{K})$$

$\square$

Para concluir esta sección, daremos un ejemplo de un ideal analítico con cofinalidad exterior $\mathfrak{c}$. Para ello nos apoyaremos en el siguiente resultado.

Teorema 1.3.11. *(Folklore) Existe una familia independiente perfecta.*

Corolario 1.3.12. *Existe un ideal analítico $\mathcal{J}$ con $cof^*(\mathcal{J}) = \mathfrak{c}$.*

Demostración: Sea $\mathcal{I}$ una familia independiente perfecta. Definamos

$$\mathcal{J} := \Big\langle \mathcal{I} \cup \{A \subseteq \omega : \exists \langle I_n\rangle_{n<\omega} \subseteq \mathcal{I} \text{ sucesión de elementos distintos} \\ \text{tal que } \forall n < \omega\ I_n \subseteq^* \omega \setminus A\}\Big\rangle$$

Por su definición, el ideal $\mathcal{J}$ es analítico. Ahora se verificará que $cof^*(\mathcal{J})$ es $\mathfrak{c}$. Sea $\mathcal{L}$ un ideal que extiende a $\mathcal{J}$. Afirmamos que para cada $L \in \mathcal{L}$, el conjunto $\{I \in \mathcal{I} : I \subseteq L\}$ es finito. En efecto, si dicho conjunto fuese infinito para alguna $L \in \mathcal{L}$, entonces se puede conseguir una sucesión de elementos distintos $\langle I_n\rangle_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{I}$ de tal manera que para cualquier $n < \omega$, $I_n \subseteq L$. Entonces $\omega \setminus L \in \mathcal{J} \subseteq \mathcal{L}$ y por tanto $L \cup (\omega \setminus L) \in \mathcal{L}$, una contradicción.

Si $\kappa < \mathfrak{c}$ y $\mathcal{B} \in [\mathcal{L}]^\kappa$ entonces $|\{J \in \mathcal{I} : (\exists B \in \mathcal{B})\ (J \subseteq B)\}| = \kappa < \mathfrak{c}$. Así existe un $I \in \mathcal{I}$ tal que para cualquier $B \in \mathcal{B}$ se tiene $I \nsubseteq^* B$, por lo que $cof(\mathcal{L}) = \mathfrak{c}$. Se concluye que $cof^*(\mathcal{J}) = \mathfrak{c}$.

$\square$

Pregunta 1.3.13. ¿Existe un ideal Borel $\mathcal{I}$ con $cof^*(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}$?

Capítulo 2

Algunas relaciones de Katětov

Ahora centraremos ahora nuestra atención en el estudio de la negación de ciertas relaciones de Katětov entre ideales bien conocidos. Esto nos resulta interesante ahora a la luz de la Definición 1.2.1 del Capítulo anterior, pues nos permiten hacer distinciones entre clases de ultrafiltros, a saber, $\mathcal{I}$-ultrafiltros que no son $\mathcal{J}$-ultrafiltros, por ejemplo.

En general puede ser complicado establecer la negación de la relación de Katětov entre ideales. En el desarrollo de este Capítulo se utilizarán algunos argumentos sofisticados, como la construcción de extensiones genéricas de modelos de ZF^*, lo cual permite establecer la negación de algunas relaciones gracias a la Absolutez del orden del Katětov para ideales Borel (Ver [11], Proposition 1.5.3).

Aunque los argumentos de Forcing dan pruebas breves y contundentes de ciertas relaciones de nuestro interés, son preferibles las pruebas en ZFC por la información adicional que pueden brindar. Un buen ejemplo será la prueba de la Proposición 2.1.7, cuya demostración nos brindará una buena idea para la prueba del Lema 2.2.4.

2.1. Negaciones

Definición 2.1.1. Sea $\mathcal{I}$ un ideal alto sobre ω. Se define el *número de cubierta* de $\mathcal{I}$, denotado $cov^*(\mathcal{I})$, como

$$cov^*(\mathcal{I}) = min\big\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge (\forall X \in [\omega]^\omega)(\exists A \in \mathcal{A})(|X \cap A| = \aleph_0)\big\}$$

Proposición 2.1.2. *(F. Hernández-Hernández, M. Hrušák [7]) Si* $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$ *entonces* $cov^*(\mathcal{I}) \geq cov^*(\mathcal{J})$

Teorema 2.1.3. *(D. Meza-Alcántara [11], Theorem 1.6.2)*

$$cov^*(\mathcal{S}) = non(\mathcal{N})$$

Proposición 2.1.4. $\mathcal{G}_{fc}$[1] $\not\leq_K \mathcal{S}$ [2]

Demostración: Sea $\mathbb{C}$ el forcing de Cohen. Entonces se tiene

$$\mathbb{C}_{\omega_2} \Vdash cov^*(\mathcal{G}_{fc}) = \mathfrak{s}_{pair} < cov^*(\mathcal{S}) = non(\mathcal{N})$$

(ver [4] 11.11. y [11] Theorem 1.6.21) De acuerdo a la Proposición 1.2.4, no es posible que $\mathcal{G}_{fc} \leq_K \mathcal{S}$. □

Teorema 2.1.5. *(T. Bartoszyński [1], M. Benedikt [3])*

$$cof^*(\mathcal{S}) = cov(\mathcal{E})\ ^3 \geq max\{cov(\mathcal{N}), cov(\mathcal{M})\}$$

Proposición 2.1.6. $\mathcal{S} \not\leq_K \mathcal{ED}_{fin}$

Demostración: Sea $\mathbb{L}$ el Laver forcing. De acuerdo a [4] 11.11, se tiene

$$\mathbb{L}_{\omega_2} \Vdash \omega_1 = cov(\mathcal{M}) < \omega_2 = \mathfrak{d}$$

Más aún

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{\omega_2} * \dot{\mathbb{B}}(\omega_2) \quad \Vdash \quad & cov(\mathcal{M}) = \omega_1 < \mathfrak{d} = \omega_2 \quad \wedge \\ & cov(\mathcal{N}) = \omega_2 = cov(\mathcal{E}) = cof^*(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Si $\mathcal{S} \leq_K \mathcal{ED}_{fin}$ entonces se debería tener $cof^*(\mathcal{S}) \leq cof^*(\mathcal{ED}_{fin})$. Sin embargo, por la Proposición 1.3.10 se tiene que

$$\mathbb{L}_{\omega_2} * \dot{\mathbb{B}}(\omega_2) \Vdash cof^*(\mathcal{ED}_{fin}) < cof^*(\mathcal{S})$$

.

□

[1] $\mathcal{G}_{fc}$ es el ideal de gráficas con número cromático finito.

[2] $\mathcal{S}$ es el ideal de Solecki, que es el ideal sobre el conjunto numerable
$$\Omega = \{A \in Clop(2^\omega) : \lambda(A) = 1/2\}$$
y que está generado por los subconjuntos de Ω con intersección no vacía.

[3] $\mathcal{E}$ es el σ-ideal generado por los conjuntos cerrados de medida cero.

En las pruebas de las negaciones anteriores se utilizaron extensiones genéricas construidas utilizando *forcing*. La siguiente negación fue demostrada en ZFC, y es de particular interés, pues la combinatoria utilizada brinda ideas útiles para otras pruebas venideras.

Proposición 2.1.7. $\mathcal{G}_{fc} \not\leq_K \mathsf{nwd}$ [4]

Demostración: Sea $f : \mathbb{Q} \longrightarrow [\omega]^2$ una función. Se utilizará la notación $\Delta_n = \{\langle n, k\rangle : n < k < \omega\}$ para referir a la n-ésima franja vertical de $\omega \times \omega$ por encima de la diagonal. Sea $\mathcal{B} = \{B_n : n < \omega\}$ una base numerable para la topología de $\mathbb{Q}$. Se pueden suponer los siguientes hechos, pues de lo contrario, el resultado se sigue de inmediato:

1. $f^{-1}(\langle n, m\rangle) \in \mathsf{nwd}$ para cualquier punto $\langle n, m\rangle$ en $\omega \times \omega$ por encima de la diagonal.

2. Para cualquier $n < \omega$, $f^{-1}[\Delta_n] \in \mathsf{nwd}$.

3. Para cada $k < \omega$, $f[B_k]$ intersecta a una cantidad infinita de verticales Δ_n.

Se construirá de manera recursiva un conjunto $D = \{d_n : n < \omega\} \subseteq \omega \times \omega$ de tal manera que $D \in \mathcal{G}_{fc}$ y $f^{-1}[D] \in \mathsf{nwd}^+$.

- Se elige $d_0 = \langle n_0, m_0\rangle \in f[B_0]$.

- En general, se elige $d_{k+1} = \langle n_{k+1}, m_{k+1}\rangle \in f\left[B_{k+1} \setminus \bigcup_{j\leq k}\{f^{-1}[d_j]\}\right]$ con $n_{k+1} > m_k$.

Esta elección garantiza que para $i \neq j$, los puntos d_i y d_j no tienen coordenadas en común, lo cual garantiza que $D \in \mathcal{G}_{fc}$. De la misma manera, la elección de cada punto garantiza que $f^{-1}[D]$ es denso en $\mathbb{Q}$, por lo que $f^{-1}[D] \in \mathsf{nwd}^+$.

$\square$

[4] nwd es el ideal de conjuntos nunca-densos de $\mathbb{Q}(2^\omega)$.

2.2. Un ultrafiltro Hausdorff no nwd

Definición 2.2.1. Sean $f, g \in \omega^\omega$ y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω. Diremos que f y g son *equivalentes módulo* $\mathcal{U}$ si existe $X \in \mathcal{U}$ de manera que $f(n) = g(n)$ para $n \in X$.

Definición 2.2.2. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω. Diremos que $\mathcal{U}$ es un *ultrafiltro Hausdorff* si para cualesquiera funciones $f, g \in \omega^\omega$, la condición $f(\mathcal{U}) = g(\mathcal{U})$ implica que f y g son equivalentes módulo $\mathcal{U}$.

Teorema 2.2.3. *(M. Hrušák, D. Meza-Alcántara [8]) Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω. Entonces $\mathcal{U}$ es Hausdorff si y sólo si $\mathcal{U}$ es $\mathcal{G}_{fc}$-ultrafiltro.*

Lema 2.2.4. *Sean $\{A_n : n < \omega\}$ una sucesión $\subseteq_{\mathsf{nwd}}$-decreciente de conjuntos nwd^+ de $\mathbb{Q}$ y $f : \mathbb{Q} \longrightarrow [\omega]^2$ una función. Entonces existe $G \in \mathcal{G}_{fc}$ tal que para cualquier $n < \omega$, $f^{-1}[G] \cap A_n \in \mathsf{nwd}^+$.*

Demostración: Suponga que para cualquier $G \in \mathcal{G}_{fc}$ existe una $n < \omega$ tal que $f^{-1}[G] \cap A_n \in \mathsf{nwd}$. Considere $f \restriction A_0$. Por la Proposición 2.1.7 existe un elemento $G_0 \in \mathcal{G}_{fc}$ tal que $f^{-1}[G_0] \cap A_0 \in \mathsf{nwd}^+$. Definamos $n_0 = 0$ y $n_1 := min\{k \in \omega : f^{-1}[G_0] \cap A_k \in \mathsf{nwd}\}$. Suponga definidos G_i y n_{i+1} tales que

- $f^{-1}[G_i] \cap A_{n_i} \in \mathsf{nwd}^+$
- $G_i \cap \bigcup_{j<i} G_j = \emptyset$
- $f^{-1}[G_i] \cap A_{n_{i+1}} \in \mathsf{nwd}$

Vamos a construir G_{i+1} y n_{i+2}: Tome $f \restriction (A_{n_{i+1}} \setminus \bigcup_{j\leq i} f^{-1}[G_j])$. Por la Proposición 2.1.7 existe $G_{i+1} \in \mathcal{G}_{fc}$ tal que $f^{-1}[G_{i+1}] \cap A_{n_{i+1}} \in \mathsf{nwd}^+$. Se define

$$n_{i+2} = min\{k \in \omega : f^{-1}[G_{i+1}] \cap A_k \in \mathsf{nwd}\}$$

Así se tiene una sucesión $\{G_{n_i} : i < \omega\}$ de elementos de $\mathcal{G}_{fc}$ tal que

- Para cualquier $i < \omega$, $f^{-1}[G_{n_i}] \cap A_{n_i} \in \mathsf{nwd}^+$
- $G_{n_i} \cap G_{n_j} = \emptyset$ si $i \neq j$

Los índices que nos interesan son los elementos de la sucesión $\{n_i : i < \omega\}$; así que reenumeraremos a la sucesión $\{A_n : n < \omega\}$ conservando sólamente a aquellos elementos de esta sucesión cuyo índice es de la forma A_{n_i} para alguna $i < \omega$, ignorando al resto de los elementos de la sucesión. De esta manera, supondremos entonces que

- Para toda $n < \omega$, $f^{-1}[G_n] \cap A_n \in \mathsf{nwd}^+$
- $G_n \cap \bigcup_{i<n} G_i = \emptyset$
- Para toda $n < \omega$, $f^{-1}[G_n] \cap A_{n+1} \in \mathsf{nwd}$

Para cada $k < \omega$, sea $\Delta_k = \{\langle k, n\rangle : k < n < \omega\} \in \mathcal{G}_{fc}$. Consideremos dos situaciones:

Situación (a): $\forall^\infty n < \omega\ \forall k < \omega\ f^{-1}[G_n \cap \Delta_k] \cap A_n \in \mathsf{nwd}$

Sea $H = \{n < \omega : \forall k < \omega\ f^{-1}[G_n \cap \Delta_k] \cap A_n \in \mathsf{nwd}\}$ el conjunto de testigos para esta Situación. De manera análoga a la Proposición 2.1.7, se construirá conjunto $D = \{d_n : n < \omega\} \subseteq \omega \times \omega$ de tal manera que $D \in \mathcal{G}_{fc}$ y para cada $n \in H$ se tiene $f^{-1}[D] \cap A_n \in \mathsf{nwd}^+$, lo cual constituye una contradicción a la suposición inicial.

Para cada $n < \omega$, el conjunto $f^{-1}[G_n]$ es denso en un abierto $O_n \subseteq A_n$. Sea $\mathcal{B}_n = \{B^n_k : k < \omega\}$ base numerable de O_n. Considere una biyección $\psi : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$, y denotemos $B^n_k = V_{\psi(n,k)}$.

Ahora se usa recursión para construir el conjunto D:

- Se elige $d_0 = \langle i_0, j_0\rangle \in f[V_0]$.
- En general, se elige $d_{k+1} = \langle i_{k+1}, j_{k+1}\rangle \in f\left[V_{k+1} \setminus \bigcup_{l\le k}\{f^{-1}[d_l]\}\right]$ con $i_{k+1} > j_k$, lo cual es posible debido a que $f^{-1}\left[G_n \cap \bigcup_{k\le j_k} \Delta_l\right] \in \mathsf{nwd}$.

Esta elección garantiza que para $i \neq j$, los puntos d_i y d_j no tienen coordenadas en común, lo cual garantiza que $D \in \mathcal{G}_{fc}$. Analogamente, la elección de cada punto garantiza que para $n \in H$ se tiene que el conjunto $f^{-1}[D] \cap A_n$ es nwd^+, una contradicción a la suposición inicial.

Situación (b): $\exists^\infty n < \omega\ \exists k < \omega\ f^{-1}[G_n \cap \Delta_k] \cap A_n \in \mathsf{nwd}^+$.

Sea $B = \{n < \omega : \exists\, k < \omega\, f^{-1}[G_n \cap \Delta_k] \cap A_n \in \mathsf{nwd}^+\}$ el conjunto de testigos de esta situación. Se tienen dos posibilidades:

(b.I): $\exists\, k_0 < \omega\ \exists^\infty n \in B\ f^{-1}[G_n \cap \Delta_{k_0}] \cap A_n \in \mathsf{nwd}^+$

Sea $C = \{n \in B : f^{-1}[G_n \cap \Delta_{k_0}] \cap A_n \in \mathsf{nwd}^+\}$. Este C es infinito y para $n \in C$ se tiene que

$$f^{-1}[\Delta_{k_0}] \cap A_n \supseteq f^{-1}[G_n \cap \Delta_{k_0}] \cap A_n \in \mathsf{nwd}^+$$

Así para $G = \Delta_{k_0} \in \mathcal{G}_{fc}$ existen una infinidad de índices $n \in \omega$ tales que $f^{-1}[G] \cap A_n \in \mathsf{nwd}^+$, lo cual es una contradicción a la suposición inicial.

(b.II): $\forall\, k < \omega\ \forall^\infty n \in B\ f^{-1}[G_n \cap \Delta_k] \cap A_n \in \mathsf{nwd}$

Para cada $k < \omega$ definamos $D_k = \{n \in B : f^{-1}[G_n \cap \Delta_k] \cap A_n \in \mathsf{nwd}^+\}$. Nótese que D_k es finito. Sea $\varphi(k) = max(D_k \cup \{0\})$.

Se tienen dos posibilidades para esta $\varphi(k)$. Considere las situaciones (b.II.α) y (b.II.β):

(b.II.α): $\exists m \in \omega\ \forall k \in \omega\ \varphi(k) \leq m$

Sea $J = \{n < \omega : \exists k \in \omega\ \ f^{-1}[G_n \cap \Delta_k] \cap A_n \in \mathsf{nwd}^+\}$, y $J' = J \setminus (m+1)$. Entonces para cualquier $k \in \omega$ y cualquier $n \in J'$ se tiene que el conjunto $f^{-1}[G_n \cap \Delta_k] \cap A_n$ es nwd. Estas condiciones son de nuevo la Situación (a) en J', de modo que este caso también cae en contradicción.

(b.II.β) $\forall\, n \in \omega\ \exists\, k \in \omega\ \varphi(k) > n$

Sea $\{k_m : m < \omega\}$ sucesión tal que para cualquier $m < \omega$, $m < \varphi(k_m)$ y la sucesión $\{\varphi(k_m) : m < \omega\}$ es estríctamente creciente. Esta situación da lugar a los subcasos (b.II.β.1) y (b.II.β.2) siguientes:

(b.II.β.1) $\exists^\infty\, n \in \omega\ \exists\, a_n \in G_{\varphi(k_n)} \cap \Delta_{k_n}\ \ f^{-1}[a_n] \cap A_{\varphi(k_n)} \in \mathsf{nwd}^+$

Sea $A = \{a_i : i < \omega\}$; cada a_j es tal que $f^{-1}[a_j] \cap A_{\varphi(k_j)} \in \mathsf{nwd}^+$.

Entonces para $G = A \in \mathcal{G}_{fc}$ existen una infinidad de índices $n \in \omega$ tales que $f^{-1}[G] \cap A_n \in \mathsf{nwd}^+$, una contradicción a la suposición inicial.

(b.II.β.2) $\forall^\infty n \in \omega\ \forall\, a_n \in G_{\varphi(k_n)} \cap \Delta_{k_n}\ f^{-1}[a_n] \cap A_{\varphi(k_n)} \in \mathsf{nwd}$

Sea $K = \{n \in \omega : \forall\, a_n \in G_{\varphi(k_n)} \cap \Delta_{k_n}\ f^{-1}[a_n] \cap A_{\varphi(k_n)} \in \mathsf{nwd}\}$ el conjunto de testigos de esta situación. Bajo estas hipótesis es posible hacer una construcción recursiva análoga a la de la Situación (a), y se obtiene un conjunto $D = \{a_n : n < \omega\} \subseteq \omega \times \omega$ de tal manera que $D \in \mathcal{G}_{fc}$ y $f^{-1}[D]$ es denso en $\bigcup_{n<\omega} A_{\varphi(k_n)}$, lo cual constituye una contradicción a la suposición inicial. Por tanto, se pueden descartar los casos (b.II.β), y con ello el caso (b.II) y finalmente la Situación (b). Por tanto, se tiene la afirmación del Lema.

$\square$

Teorema 2.2.5. (CH) *Existe un ultrafiltro Hausdorff que no es* nwd-*ultrafiltro.*

Demostración: Considere una enumeración $\{\langle f_\alpha, g_\alpha\rangle : \alpha < \mathfrak{c}\} = \omega^\omega \times \omega^\omega$, y considere a ω con una topología homeomorfa a $\mathbb{Q}(2^\omega)$, testificado por el homeomorfísmo $f : \omega \longrightarrow \mathbb{Q}(2^\omega)$. Se quiere construir una base de filtro $\{U_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ de tal manera que para $\alpha < \mathfrak{c}$, $U_\alpha \in \mathsf{nwd}^+$ y $f_\alpha \restriction U_\alpha = g_\alpha \restriction U_\alpha$ ó $f_\alpha[U_\alpha] \cap g_\alpha[U_\alpha] = \emptyset$. Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ defina $Y_\alpha = \{n \in \omega : f_\alpha(n) = g_\alpha(n)\}$.

Para $\alpha = 0$, se tiene que $Y_0 \in \mathsf{nwd}^+$ ó $\omega \setminus Y_0 \in \mathsf{nwd}^+$. Si $Y_0 \in \mathsf{nwd}^+$, se define $U_0 = Y_0$; de otro modo, considere $\{O_n : n < \omega\}$ una base del abierto $A = \omega \setminus \bar{Y_0}$. Se tienen los siguientes casos:

- f_0 y g_0 son nwd-to-one.
  Elija $d_0 \in O_0$ y defina $k_1 = max\{f_0(d_0), g_0(d_0)\}$. A continuación tome $d_1 \in O_1$ con $f_0(d_1), g_0(d_1) > k_1$; y así sucesivamente. De esta manera, el conjunto $D = \{d_n : n < \omega\}$ es denso en A y $f_0[D] \cap g_0[D] = \emptyset$, por lo que hacemos $U_0 = D$.

- Existe $m \in \omega$ con $f_0^{-1}(m) \in \mathsf{nwd}^+$ y g_0 es nwd-to-one.
  Si $f_0^{-1}(m)$ es denso en un abierto O y Y_0 es nwd, existe un abierto $O' \subseteq O$ que evade a Y_0. Defina $U_0 = O'$.

- Existen $n, m \in \omega$ tales que $f_0^{-1}(n) \in \mathsf{nwd}^+$ y $g_0^{-1}(m) \in \mathsf{nwd}^+$.
  En esta situación se deben distinguir dos subcasos:

- $n \neq m$
  Si $f_0^{-1}(n)$ y $g_0^{-1}(m)$ son densos en abiertos U y V respectivamente, considere $U_0 = U \cap V$ si $U \cap V \neq \emptyset$, y $U_0 = U$ (ó $U_0 = V$) si U y V son ajenos.

- $n = m$
  En este caso considere $U_0 = U \cup V$.

Suponga definido U_α. Se usará recursión para construir la base de filtro deseada.

- Para $\lambda = \alpha + 1 < \mathfrak{c}$, considere las restricciones $f_{\alpha+1} \restriction U_\alpha$ y $g_{\alpha+1} \restriction U_\alpha$. Entonces $Y_{\alpha+1} \cap U_\alpha \in \mathsf{nwd}^+$ ó $(\omega \setminus Y_{\alpha+1}) \cap U_\alpha \in \mathsf{nwd}^+$. Si $Y_{\alpha+1} \cap U_\alpha$ es nwd^+, defina $U_{\alpha+1} = Y_{\alpha+1} \cap U_\alpha$. En otro caso, realice el mismo análisis que para U_0 para definir $U_{\alpha+1}$.

- Para $\lambda < \mathfrak{c}$ límite, use CH para bien-ordenar λ con tipo de orden ω. Haciendo un refinamiento, se puede suponer que la sucesión $\langle U_n : n < \omega \rangle$ de subconjuntos nwd^+ es $\subseteq_{\mathsf{nwd}}$-decreciente. Entonces se define U_λ como el conjunto dado por el Lema anterior.

Sea $\mathcal{F}$ el filtro generado por la familia $\{U_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$, y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro que extiende a $\mathcal{F}$. Se afirma que este ultrafiltro $\mathcal{U}$ es Hausdorff, pero no es nwd-ultrafiltro. En efecto:

- Dadas dos funciones $f, g \in \omega^\omega$, se tiene que existe $\alpha < \mathfrak{c}$ de tal manera que $\langle f, g \rangle = \langle f_\alpha, g_\alpha \rangle$. El elemento $U_\alpha \in \mathcal{U}$ testifica que se satisface la Definición 2.2.2.

- El homeomorfísmo $f : \omega \longrightarrow \mathbb{Q}(2^\omega)$ testifica que $\mathcal{U}$ no es nwd-ultrafiltro, pues cada elemento de $\mathcal{U}$ contiene un subconjunto nwd^+.

$\square$

Bibliografía

[1] Tomek Bartoszyński and Haim Judah. *Set Theory: On the Structure of the Real Line.* A. K. Peters, 1995.

[2] J. Baumgartner, *Ultrafilters on ω*, J. Symbolic Logic **60** (1995), no. 2, 624-639.

[3] Michael Benedikt. *Ultrafilters which extend measures.* J. Symbolic Logic **63** (1998), no. 2, 638-662.

[4] A. Blass, *Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum,* in: Handbook of Set Theory (M. Foreman and A. Kanamori, eds.), Vol. 1, Springer, Dordrecht, 2010.

[5] R. M. Canjar, *On the generic existence of special ultrafilters,* Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 233-241.

[6] J. Flašková, *Description of some ultrafilters via $\mathcal{I}$-ultrafilters,* in: Combinatorial and Descriptive Set Theory, RIMS Kōkyūroku 1619 (2008), 20-31.

[7] F. Hernández-Hernández and M. Hrušák. *Cardinal invariants of analytic P-ideals.* Canada J. Math, 59(3). 2007.

[8] M. Hrušák, D. Meza-Alcántara. *Katětov order, Fubini property and Hausdorff ultrafilters.* Rend. Istit. Mat. Univ.Trieste **44** (2012), 503-511.

[9] J. Ketonen, *On the existence of P-points in the Stone-Čech compactification of the integers,* Fund. Math. **92** (1976), 91-94.

[10] A.R.D. Mathias, *Happy Families*, Annals of Mathematical Logic **12** (1977), 59-111.

[11] David Meza-Alcántara. *Ideals and filters on countable sets.* PhD thesis, UNAM México, 2009.