

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICO MATEMÁTICAS

**Universidad Michoacana de San Nicolás de
Hidalgo.**

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez.

Tesis

**APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE ONDAS GRAVITACIONALES
MEDIANTE LA FÓRMULA
CUADRUPOLO**

Para obtener el grado de

Licenciada en Ciencias Físico Matemáticas.

Presenta:

Marian Lemus García.

Director: Doctor en Ciencias Físicas

José Antonio González Cervera.

Morelia, Michoacán.

Enero 2014



UNIVERSIDAD MICHOCANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CS. FÍSICO MATEMÁTICAS

APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE ONDAS GRAVITACIONALES MEDIANTE LA FÓRMULA CUADRUPOLO

TESIS PRESENTADA POR MARIAN LEMUS GARCÍA
PARA OBTENER EL GRADO DE LIC. EN CS. FÍSICO MATEMÁTICAS

ASESORADA POR DR. JOSÉ ANTONIO GONZÁLEZ CERVERA

ENERO 2014

Agradecimientos

El camino ha sido largo pero aún falta mucho.

Agradezco principalmente a Dios que me mandó a este mundo, que me dio la vida y es ese amigo que siempre ha estado y estará conmigo en cada una de las etapas de mi vida. Gracias Dios mío por todas las bendiciones que me has dado y, más aún, por las personas que has puesto en el camino de mi vida. También agradezco mi amada Virgen María que ha estado presente desde antes de mi nacimiento y me acogió con su amor maternal y me ha cuidado siempre

Agradezco a mi familia que ha sido el motor de cada uno de mis proyectos. El apoyo de cada uno de ellos es fundamental en mi vida. A mi padre, Luis Enrique Lemus Gaona, eres el mejor papá del mundo y en cada paso que doy estás tú. Eres uno de mis mayores ejemplos a seguir; tus ganas de salir adelante y la fuerza de voluntad que tienes son de tus cualidades más sorprendentes, pero ante todo, eres una persona con un corazón tan grande que es lo que te ha hecho lo que eres. Gracias por traerme a este mundo, por el apoyo que me has dado. Gracias por empujarme a realizar mis sueños y por darme la mano para dar cada paso en la vida, pero lo más importante es todo el amor que me has dado. Te amo papá.

A mi madre, Alicia García Sánchez, la más maravillosa del mundo, la mujer más fuerte y bondadosa que he conocido en mi vida, a ti mami que cada nuevo día tienes algo de que sorprenderme. Eres la mujer que me da un ejemplo de vida todos los días al estar siempre al servicio de los demás y por tus triunfos en la vida. Gracias mamá por tus desveladas conmigo, por demostrarme que lo que los sueños se hacen realidad y por el gran apoyo que ahora me das para cumplir los míos. Por tus desvelos a mi lado, por cuidarme y por tu paciencia; por todo tu amor hacia mí, gracias. Te amo mamá.

A mi hermano mayor, Luis Enrique Lemus García, el más lindo y comprensivo. Tú que desde que estabas pequeño ya velabas por mí y que hasta ahora lo sigues haciendo. Eres un ejemplo para mí, pues eres una gran persona con una nobleza extraordinaria. Gracias por consentirme y por darme la mano cada vez que caigo. Gracias por las lecciones que me has dado con sólo mirarme (particularmente como tú lo haces). Gracias por el apoyo que me has brindado a lo largo de mi vida y por el apoyo que sé que siempre tendré de tu parte. Te amo hermano.

A mi hermano menor, Alejandro Lemus García, por ser la personita que vino a traer el ruido y el relajo a la casa, pero más que eso, eres una persona llena de virtudes. Las pláticas largas contigo me relajan (a veces me estresan), pero aunque seas el más pequeño, todos los días me enseñas a soñar y a pensar en grande. Gracias por todas las veces que estuve triste y tú estabas ahí para animarme. Siempre he sentido tu apoyo y espero siempre tenerte cerca de mí para reír tanto como sabemos hacerlo. Te amo hermanito.

A ti Mayte, eres la hermana que nunca tuve, siempre me has apoyado y, aunque a veces no lo creas, eres un ejemplo a seguir para mí. Tu carácter de lucha y tus ganas de salir adelante las admiro mucho de ti. Gracias porque cada vez que quería rendirme, estuviste tú, para recordarme que yo podía y me diste las fuerzas para seguir en el camino. Eres una gran mujer y sé que siempre estarás ahí a un lado de mí. Te amo hermanita.

Gracias a mis tíos, a mi tía Laura que ha sido como mi segunda madre al estar al pendiente de mí en cada paso que doy, a Pablo por tu apoyo en este poco tiempo. A los Ortiz; Mago (la cana), por ayudarme a conocer el mundo y por alegrarme la vida con tu sonrisa, a Cecilia, mi hermana también, porque cada broma tuya me hace reír y saber que no todo siempre es tan malo; a Jesús porque aunque me estresas, siempre has estado al pendiente de mí, a Alejandro por tu apoyo, a Everado por todo lo que ha aprendido viendo Discovery y me lo ha compartido, a Victor y Carmen por las palabras y el amor que me dan a mí y a mi familia. A los Lemus, a mi tío Hugo y Chayo, por estar siempre cerca de mí y el cariño que día a día me dan, a Virginia y Alberto porque siempre me han apoyado cuando los he necesitado, a Jesús Alberto porque, a pesar de ser distraído, siempre es capaz de sacarme una sonrisa. A todos mis primos, desde el más pequeño hasta el más grande porque todos aportan un

granito de felicidad en esta familia; en especial agradezco a Adriana, porque hemos crecido juntas y siempre al pendiente de nosotras.

Quiero agradecer a mis amigos de la secundaria que siempre han estado en cada triunfo y derrota desde que los conozco. A Paulina por tu gran risa que siempre nos alegra, a Luz María por tu optimismo y sencillez, por ser tan relajada y enseñarme a no tomarme todo tan en serio. A Karla porque aunque eres muy directa, a la vez eres muy tierna, gracias por los consejos, las risas y todo lo que hemos compartido. A Jessica que desde la primaria hemos compartido muchas cosas (tu amistad es un tesoro), gracias por que me enseñaste a ser más sociable y me ayudaste en muchos aspectos desde entonces. A Rodrigo por se tan original y tan relajado, siempre tienes una sonrisa para mostrarnos y que siempre es una ayuda.

Agradezco a mis amigos de la preparatoria por todos los buenos momentos. A mi amiga del alma, Silvia Villa, gracias amiga por todas las experiencias, por estar día a día a mi lado ayudándome y levantándome el ánimo, por las horas y horas de plática y por todos los consejos. Gracias por dejarme entrar en tu vida y no soltarme. También agradezco a Ricardo, la persona más ocurrente que conozco. Gracias por todas las risas que me has regalado y por estar al pendiente de mí a pesar de las circunstancias. A las *chicas nice* por la diversión y el aprendizaje con todos los trabajos y las reuniones que pasamos juntas. A Lupita por su optimismo y sencillez, y por la mano que siempre me diste para salir adelante en la prepa.

Agrdezco a mi amigos de la licenciatura, a Ezequiel, por las desvelasdas haciendo tareas, por las discusiones y por darme la mano para avanzar juntos. Gracias por haber estado ahí cuando más te necesitaba y por compartir conmigo tantos momentos; fiestas, viajes, logros desde la secundaria y hasta ahora. Tus consejos y tu amistad siempre los llevaré en mi corazón, te quiero amigo. A Alma Rosa por llegar en el momento preciso a mi vida, gracias por no dejarme caer en momentos en los que no podía conmigo misma, gracias por tu paciencia y cariño con el que estuviste conmigo superando los obstáculos que iban llegando, te quiero amiga. A César por enseñarme que el tiempo es sólo un concepto creado por el hombre y que las cosas llegan cuando tienen que llegar. Gracias por tu apoyo y todas las sonrisas que compartimos. A Humberto por tu apoyo y por que me enseñaste que no importan las circunstancias para poder salir adelante, gracias por compartir tus virtudes conmigo.

A Miguel porque cuando estuve a punto de salir de la carrera, ahí estuviste tú para animarme y hacerme entender que había mucho camino por recorrer y que este era mi camino, gracias por ser tan compartido y por darme siempre una palabra precisa. Al Dr. Mariano Hernández porque más que un maestro, es un amigo para mí y agradezco cada consejo durante toda la carrera y por el apoyo para dar cada paso. A Didier porque a pesar de mostrar una cara tan dura, es una persona muy noble y siempre dispuesta a ayudar, gracias por todo lo que me enseñaste y por ser tan buen amigo. A Cecilio por ser tan buena persona, por enseñarme que no hay que preocuparse sabiendo que todo tiene solución. A Adán por siempre ayudarme sin condiciones.

Agradezco a mis profesores por su disposición y por compartir su conocimiento. A Joaquín y Francisco por su apoyo en las revisiones, a Mario César por su orientación y apoyo para nuevos proyectos, a Zannias por sus excelentes clase, a Astorga por abrirme los ojos a cosas desconocidas y en especial a mi asesor, José Antonio González, por la oportunidad que me brindó y, más aún, por la paciencia que me tuvo durante todo este tiempo. Finalmente, pero no menos importante, agradezco a mi amigo y maestro, Juan Pablo Cruz, quién no solo fue una guía en todo este proyecto sino también fue un amigo con el que pude llorar, discutir y hasta rezar. Gracias por todo lo que me enseñaste, no sólo en cuestiones académicas sino también en el aspecto de la vida. Gracias por compartirme tus experiencias y permitirme aprender de la gran persona que eres. Gracias por dejarme entrar en tu vida y por entrar tu en la mía.

Para todos ellos y para las personas que ya no están en este mundo pero que fueron piezas clave en mi vida como mis abuelos, Anita, Jesús, María y Salvador; mi tía Margarita y mi tío Sergio, mi bisabuelo Jesús y a todas las personas que están a mi alrededor con amor y cariño agradezco su apoyo y les dedico cada línea de esta tesis.

Índice general

Agradecimientos	3
1. Introducción	10
2. Teoría de Perturbaciones y Radiación Gravitacional	18
2.1. Relatividad General	19
2.2. Teoría de perturbaciones	24
2.3. Ecuaciones de Einstein para campos débiles	26
2.3.1. Perturbaciones al espacio-tiempo de Minkowski	26
2.3.2. Transformaciones de Norma	28
2.3.3. Consecuencias sobre la curvatura	30
2.4. Generación de Ondas Gravitacionales	36
2.5. Ondas Gravitacionales lejos de la fuente	39
2.6. Polarización de las ondas gravitacionales	44
3. Destrucción por fuerzas de marea	50
3.1. Métrica ADM	50
3.1.1. Observadores	51
3.2. Formulación Lagrangiana de las ecuaciones de un fluido ideal relativista	54
3.3. Hidrodinámica de Partículas Suavizadas	59
4. Extracción de ondas gravitacionales en un fluido de prueba	68
4.1. Condiciones iniciales SPH	69
4.1.1. Trayectorias alrededor de un agujero negro de Schwarzschild .	69
4.1.2. Parámetros	74

4.2. Simulaciones con SPH	75
4.3. Señales de Ondas Gravitacionales	86
4.3.1. Integración Monte Carlo	87
4.3.2. Aproximación de ondas gravitacionales	90
5. Observaciones y Conclusiones	96
Bibliografía	100

Resumen

Se esperan ondas gravitacionales de la destrucción por fuerzas de marea por un agujero negro masivo. Usando un código basado en hidrodinámica de partículas suavizadas, hemos evolucionado estrellas en orbitas aproximadamente circulares alrededor de una agujero negro de Schwarzschild de masa aproximada a $10^6 M_\odot$. Mostramos las ondas gravitacionales emitidas durante la destrucción por fuerzas de marea basada en la fórmula cuadrupolar.

Palabras clave: Ondas gravitacionales–fórmula cuadrupolar–agujero negro de Schwarzschild

Abstract

Gravitational waves are expected from tidal disruption of stars by a massive black hole. Using a relativistic smoothed particle hydrodynamics code, we investigate the fate of solar stars in circular orbits passing near Schwarzschild black holes of mass $\approx 10^6 M_\odot$. We show the quadrupole gravitational waves emitted during the tidal disruption process.

Subject headings: Gravitational waves–quadrupole-Schwarzschild black holes

Capítulo 1

Introducción

Motivación

La astronomía ha tenido un gran desarrollo gracias al avance de la tecnología, el cual ha permitido construir diversos instrumentos capaces de observar no solamente el intervalo visible del espectro electromagnético, sino también las ondas de radio, los rayos X , rayos γ y las demás ventanas del espectro. Dichos desarrollos han permitido tener una mayor comprensión de nuestro Universo. Una nueva ventana al Universo se abrió cuando, en 1915, la Teoría de la Relatividad General fue formulada por el físico alemán Albert Einstein. La Relatividad General es una teoría de campo gravitatorio que forma la base del estudio de la interacción gravitacional, la cual resulta ser dominante a escalas astronómicas, a pesar de que es muy pequeña, en magnitud, a comparación con la interacción electromagnética. Por esta razón, es una herramienta de vital importancia para el estudio del Universo, pues la información que nos proporciona de los eventos del Universo es bastante distinta a la ya conocida por otras técnicas y teorías.

La Relatividad General es una teoría matemáticamente completa, es decir, sus ecuaciones, en principio, tienen solución. El desarrollo de esta teoría permitió la predicción teórica de las ondas gravitacionales. El estudio de las ondas gravitacionales se realiza desde un punto de vista teórico, numérico y experimental. Hasta hace algunos años éstas solo eran consideradas como una teoría exótica ajena a la realidad.

En los años 60s se hicieron los primeros esfuerzos para construir algunos arreglos observacionales para detectarlas, esperando obtener evidencia de su existencia, sin embargo, no se tuvo ningún registro. Desde entonces, la detección directa de las ondas gravitacionales se volvió de gran importancia puesto que proporcionan una gran oportunidad de poner a prueba y verificar la teoría de Einstein y así poder entender la física detrás algunos de los objetos más exóticos de la naturaleza, en particular, los agujeros negros.

El espectro de ondas gravitacionales es completamente distinto pero complementario al de las ondas electromagnéticas. Las ondas gravitacionales son propagaciones de campos gravitatorios; son ondulaciones en la curvatura del espacio-tiempo, generadas por los movimientos acelerados de una distribución de masa no esférica ni uniforme. Dichas ondas presentan un comportamiento muy similar al de las ondas electromagnéticas, lo cual implica que las ondas gravitacionales puedan analizarse de una manera similar a las ondas electromagnéticas. Aún así, la diferencia entre ambos tipos de ondas nos proporcionará información diferente para la astrofísica observacional. La radiación electromagnética es emitida por objetos astronómicos y la recibimos en un intervalo amplio de longitudes de onda y nos brindan información de las condiciones físicas de las fuentes astronómicas (presión, temperatura, entre otros). En contraste, las ondas gravitacionales se emiten por la masa acumulada y la aceleración de los sistemas completos, tienen longitudes de onda larga y transmiten información directa sobre las regiones de gran escala. La información que transmite la radiación gravitacional es de alguna manera más global que la que nos brinda la radiación electromagnética. Debido a su baja intensidad, las ondas gravitacionales interactúan muy débilmente con la materia, es por eso que pueden propagarse a lo largo de grandes distancias sin sufrir gran alteración, y cuando algún cambio ocurre, éste a su vez nos proporciona abundante información sobre el medio interestelar. Esta característica resulta de gran importancia, pues a pesar de la fácil detección de las ondas electromagnéticas, éstas se dispersan y se absorben fácilmente por la materia, por lo que la información que brindan puede ser más limitada.

El 96 por ciento de la materia y energía del Universo no tiene carga, es por eso

que las ondas gravitacionales nos proporcionan la primera oportunidad de observar directamente una parte importante del Universo. En la cosmología, se sabe que en ciertas etapas del Universo temprano se produjeron ondas gravitatorias con características determinadas [14]; detectarlas entonces puede ayudar a establecer cotas sobre el valor de algunos parámetros cosmológicos. Esto permitiría mejorar las ideas que ya se tienen sobre los primeros escenarios del Universo.

Hasta el momento solo existen evidencias indirectas de la existencia de las ondas gravitacionales. Esta evidencia nos la proporcionó el descubrimiento, en 1974, del primer púlsar binario PSR B1913+16 [21]. Los púlsares binarios son estrellas de neutrones que giran una alrededor de otra. Este artículo que fué ganador del premio Nobel, demostraba que el periodo orbital del púlsar disminuye en el tiempo por pérdida de energía que se ve reflejada en las ondas gravitacionales. Recientemente se ha logrado hacer mediciones del cambio del periodo orbital anual de ciertos púlsares binarios (como la fuente *SDSS J065133,338 + 284423,37*) lo cual es consistente con la teoría de ondas gravitacionales [2].

Medición de ondas gravitacionales

La gravedad es la interacción dominante en la mayoría de los sistemas astronómicos. La sorpresa en las últimas décadas del siglo XX fue que la gravitación relativista es relevante en muchos de estos sistemas, así pues, la teoría de la radiación gravitacional puede hacer una importante contribución a la comprensión de un gran número de sistemas y fenómenos astronómicos.

Las ondas gravitacionales pueden ser detectadas bajo mediciones precisas del movimiento relativo de masas de prueba, producido por una onda que pasa entre ellas. Recientemente nuevos arreglos con tecnología más sofisticada se están diseñando para realizar la primera detección directa de radiación gravitacional. Estos dispositivos son llamados interferómetros, o bien, detectores de resonancia, y están localizados en la superficie terrestre. El principio de funcionamiento de los detectores de resonancia para la detección de ondas gravitacionales se basa en el hecho

de que una onda gravitacional transfiere energía a un cuerpo masivo, del cual resultan oscilaciones que se pueden observar. Para poder detectar una onda gravitacional, se requiere un interferómetro con una extensión de brazos comparable a la longitud de onda de la onda gravitacional que se quiere observar. Eso implica que para detectar frecuencias del orden de Hz se requieren detectores con extensiones del orden de 10^5 Km. Existen proyectos de detectores usando interferómetros como son LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) y VIRGO. El proyecto LIGO, que se encuentra en Estados Unidos cuenta con tres detectores: dos de 4 Km y uno de 2 Km. El proyecto VIRGO se encuentra en Italia y cuenta con un detector de 3 Km. En estos detectores se han implementado múltiples reflexiones en los espejos para poder alcanzar las dimensiones adecuadas que permitan la detección de ondas de la longitud de onda en el rango de 10 Hz a 10 KHz. Se tienen más expectativas del proyecto LISA (Laser Interferometer Space Antenna) el cual es un interferómetro que será construido en el espacio y está programado para el 2018. Dado que en la Tierra se tienen efectos ruidosos (como perturbaciones sísmicas), que son de amplitud mucho más grande que la de las ondas gravitacionales esperadas de fuentes astronómicas en frecuencias inferiores a 1 Hz, es necesario alejar los detectores de la Tierra con lo cual el ruido disminuye rápidamente. LISA contará con 3 naves espaciales separadas 5×10^6 Km entre sí, orbitando alrededor del Sol. Este proyecto abriría la ventana a frecuencias entre 0.1 mHz y 0.1 Hz. En esta banda de frecuencias se encuentran muchas fuentes interesantes como los choques de agujeros negros. Otras propuestas de interferómetros en el espacio son DECIGO y el Observador del Big Bang los cuales intentan tener una mayor sensibilidad para la detección de ondas gravitacionales.

Las antenas diseñadas para la detección de ondas gravitacionales son omnidireccionales, es decir, captan las señales independientemente de la dirección de origen. En la teoría de Einstein, la radiación gravitatoria tiene dos estados independientes de polarización. Es por esto que cualquier onda será una combinación de los estados de polarización generalmente denotados como h_+ y $h_\times$. Existen otras teorías de la gravitación en las que hay estados adicionales de polarización [22], lo cual complica la medición de ondas gravitacionales, pues serían necesarios más de tres detectores.

La medición de la polarización tiene una importante aplicación en la astronomía. La polarización de las ondas contiene información de la orientación de la fuente. Si se midiera la polarización de las ondas gravitacionales provenientes de un sistema binario, se puede determinar, además de la ubicación de la fuente en el cielo, la inclinación de su eje de rotación.

La polarización de las ondas gravitacionales proviene teóricamente de la fórmula cuadrupolar. La fórmula cuadrupolar se ha convertido en una herramienta importante para la extracción de señales gravitatorias, ya que nos proporciona una aproximación de las ondas gravitacionales dada una fuente.

Fuentes de ondas gravitacionales

Es difícil pensar en fuentes de ondas gravitacionales que se puedan detectar en la Tierra, ya que las masas en aceleración involucradas deben ser mucho más grandes en comparación a la misma masa de la Tierra; además de que deben llegar a velocidades cercanas a la de la luz. Por otro lado, el Universo está lleno de estas fuentes astrofísicas que son prometedoras para la detección de ondas gravitacionales.

Las estrellas de neutrones y los agujeros negros se forman a partir del colapso gravitacional de una estrella masiva evolucionada, si el colapso es no esférico podría emitir ondas gravitacionales fuertes, sin embargo, las capacidades de las computadoras para simular un colapso gravitacional con toda la física que conlleva aún está lejos de hacer predicciones confiables [18]. En una aproximación se esperaría observar ondas gravitacionales de frecuencias en el rango de 200 a 1000 Hz.

Otra de las fuentes de las que se espera emisión de ondas gravitacionales, son los púlsares dado que se ha observado que pierden espín, debido a pérdida de energía asociada con la energía de la radiación gravitacional.

Las observaciones indican que en el centro de cada galaxia existe un agujero negro cuya masa es del orden de 10^6 - $10^9 M_{\odot}$ [20], es decir, son agujeros negros supermasivos. En la actualidad existe evidencia observacional de que las galaxias colisionan

entre ellas y se fusionan; cuando eso ocurre, se cree que los agujeros negros en el centro de cada una de ellas se van aproximando siguiendo órbitas espirales hacia un centro común, lo cual sucede por un decaimiento orbital debido a la pérdida de energía por radiación gravitacional. De este tipo de eventos se espera medir frecuencias de 4 MHz. Los modelos de la relatividad numérica para la fusión de agujeros negros son cada vez más exactos y fiables, por lo que pronto se convertirán en una parte importante en la búsqueda de ondas gravitacionales.

Los sistemas binarios a bajas frecuencias son mayormente comunes en el Universo [9]. LISA buscará enanas blancas binarias. Una enana blanca es una estrella compacta que ya no produce reacciones termonucleares y que queda como remanente final de una estrella con una masa similar a la de nuestro Sol. Las enanas blancas no son tan compactas como los agujeros negros o las estrellas de neutrones, pero sus masas sí son similares a las de una estrella de neutrones. La amplitud máxima de la radiación de un sistema binario de enanas blancas será varios órdenes de magnitud menor que la de un sistema binario de agujeros negros a la misma distancia, sin embargo, el hecho de que hay miles de estos sistemas en nuestra galaxia las hace una de las fuentes más prometedoras para detectar radiación gravitacional. Se espera que de estos sistemas se midan frecuencias por encima de 1 MHz. Por debajo de 1 MHz hay muchas más fuentes que LISA no es capaz de ver.

La destrucción de estrellas orbitando relativamente cerca de un agujero negro también es una importante fuente de emisión de ondas gravitacionales y podría arrojar pruebas de la existencia y de las propiedades de los agujeros negros. Las simulaciones numéricas de este tipo de eventos son bastante confiables como para poder obtener aproximaciones de ondas gravitacionales esperando medir frecuencias en el rango de $10^{-4} - 10^{-1}$ Hz detectables por LISA.

Estos son solo algunos ejemplos de las fuentes más prometedoras para la detección de ondas gravitacionales. Sin embargo existen muchos más objetos exóticos en la naturaleza de los que se podría esperar radiación gravitacional. Muchos de ellos todavía no se pueden medir pues no están dentro de los rangos de los interferómetros

construidos hasta la fecha.

Acerca de esta tesis

La radiación gravitacional juega un papel observable en la dinámica de muchos sistemas astrofísicos. En algunos sistemas, como en los púlsares binarios, el papel de la radiación gravitacional se ha entendido desde hace varios años. En otros tantos, la importancia de la radiación se ha entendido hasta hace poco. Por tanto, es muy útil tratar de predecir lo que se podría observar. Esto no solo es importante en la ingeniería para la construcción de los detectores, sino que también es una guía para el análisis de datos.

En el esfuerzo de tratar de entender las ondas gravitacionales, las simulaciones numéricas han sido de gran importancia. Con estas simulaciones, se mejoran los algoritmos de detección y se puede extraer información de las señales que se obtienen de estos modelos.

De manera particular, muchas predicciones de emisión de ondas gravitacionales han sido basadas en la fórmula cuadrupolar. A partir de su aplicación desarrollada por la teoría de Einstein, ha sido posible construir los interferómetros.

Hasta el momento, no se ha detectado ninguna señal de ondas gravitacionales, sin embargo, esto podría ocurrir en cualquier momento con los detectores avanzados, pero si no se hacen detecciones tempranas, pueden surgir serias dudas acerca de la validez de la relatividad general. Por esta razón el estudio de las ondas gravitacionales es de suma importancia ya que pone a prueba una teoría fundamental. Al detectarlas revolucionaría la visión que tenemos del Universo; se espera detectar objetos nunca antes vistos por el hombre.

En esta tesis, hemos hecho una aproximación para predecir las ondas gravitacionales emitidas por la destrucción de una estrella debido a su cercanía a un agujero negro masivo. En el Capítulo 2 estudiamos la Teoría de Einstein para las ondas

gravitacionales de la que se obtiene la fórmula cuadrupolar, teniendo en cuenta que solo se tienen dos polarizaciones independientes, las cuales se analizan después. En el Capítulo 3 hacemos un estudio del método numérico SPH (Smooth Particle Hydrodynamics, por sus siglas en inglés) Hidrodinámica de Partículas Suavizadas, en el cual está basado el código que hemos usado para la evolución de la fuente de la que queremos extraer señales de ondas gravitacionales. Los datos que se obtienen de forma discreta a partir de este método serán utilizados en la fórmula cuadrupolar la cual se reescribe de manera que se pueda aproximar como una integral numérica de Monte Carlo. En el Capítulo 4 se hace evolucionar la destrucción de una distribución de polvo como primera aproximación de una estrella, el cual orbita circularmente alrededor de un agujero negro de Schwarzschild con masa del orden de $10^6 M_{\odot}$. A partir de estas evoluciones se obtienen las amplitudes de las ondas gravitacionales emitidas por esta configuración. En el Capítulo 5 se dan las conclusiones del análisis de las señales que se obtienen y las ventajas de la aproximación que hemos hecho.

Capítulo 2

Teoría de Perturbaciones y Radiación Gravitacional

En este capítulo se describe la teoría de perturbaciones para la aproximación de soluciones a las ecuaciones de Einstein. Primero se da un breve repaso de la Teoría de la Relatividad General, en la cual están definidas las ecuaciones de Einstein cuya solución se aproxima a través de un método basado en teoría de perturbaciones. El método de perturbaciones, es una herramienta que nos permite simplificar las ecuaciones de Einstein, pues al perturbarlas hasta un orden lineal, obtenemos una Teoría de Gravedad Linealizada de la cual nace lo que llamamos ondas gravitacionales. A partir de esta teoría es posible estudiar cómo son las ondas gravitacionales medidas sobre espacio-tiempo fijos. En nuestro caso hacemos el estudio sobre el espacio-tiempo plano y tomamos aproximaciones tomando la fuente que las genera muy lejana al punto en que se miden. Con esto se estudia cómo se generan las ondas gravitacionales dada una fuente que estará descrita por el tensor de energía-momento. Con ello obtenemos las componentes del tensor que describen la forma de la radiación gravitacional.

2.1. Relatividad General

Durante más de dos siglos, la mecánica de Newton dominó completamente en la física: el Universo entero parecía comportarse tal como lo predecían las ecuaciones de la física newtoniana. Sin embargo, a principios del siglo XX empezaron a surgir evidencias de que la física clásica no describe adecuadamente cualquier fenómeno. Uno de los fenómenos que arrojaron evidencias de ello fue la precesión del perihelio de Mercurio; la Teoría de Newton ya no podía explicar porqué el perihelio de la órbita de Mercurio se desplazaba lentamente. En este contexto nace la Teoría de la Relatividad, la cual describe los fenómenos físicos que ocurren a velocidades tan altas como la de la luz y de manera particular, logró describir el fenómeno ocurrido en el perihelio de Mercurio, lo que hizo que fuera más relevante en la física de ese tiempo. En esta sección damos una breve descripción de esta teoría y sus principales formulaciones [4].

La teoría de la relatividad incluye dos teorías, la de la relatividad especial y la de la relatividad general. Ambas teorías fueron formuladas por Albert Einstein. La relatividad especial describe la física de movimiento en el marco de un espacio-tiempo plano, describe correctamente el movimiento de los cuerpos incluso a grandes velocidades y se usa básicamente para estudiar sistemas de referencia inerciales (sistemas no acelerados). Los dos postulados base de esta teoría son:

- Principio de la relatividad: establece que las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales, es decir, no existe un sistema de referencia privilegiado que se pueda considerar como absoluto.
- Invariancia de la velocidad de la luz: la velocidad de la luz, denotada como c , en el vacío es una constante universal y su valor es independiente de la fuente que la emite.

A diferencia de la física newtoniana, la posición de un punto es descrita en relatividad especial como un evento en el espacio-tiempo que está dado por un cuadrivector que tiene componentes:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z), \quad (2.1)$$

tomando en cuenta la convención de que los índices griegos van como $\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots = \{0, 1, 2, 3\}$ y los latinos van como $i, j, k, \dots = \{1, 2, 3\}$. El cuadvivector denotado como (2.1) lleva consigo factores de c , sin embargo, en esta tesis trabajaremos en unidades geometrizadas, es decir, $c = G = 1$.

En Relatividad, la geometría del espacio-tiempo es especificada por un tensor métrico que depende de las coordenadas $g_{\alpha\beta}(x^\mu)$. La relatividad especial se describe únicamente sobre la métrica plana, es decir, la métrica de Minkowski, η , la cual en coordenadas cartesianas tiene las siguientes componentes

$$g_{\alpha\beta}(x^\mu) = \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La inversa de $\eta_{\alpha\beta}$ es $\eta^{\alpha\beta}$ y se escribe de la misma forma que la anterior. En coordenadas distintas a las cartesianas, las componentes del tensor de Minkowski cambian, pero en esta tesis trabajaremos en general con coordenadas cartesianas.

Es importante poder definir las leyes físicas en cualquier sistema de referencia. La Teoría de la Relatividad nos permite expresar un tensor de un sistema de referencia inercial a otro mediante el tensor de Lorentz, Λ , que se escribe como

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$\beta = v, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

con v la velocidad relativa del sistema de referencia $x^{\alpha'}$ respecto al sistema x^α . Así, dado un tensor $A_{\mu\nu}$ sobre el sistema x^α , podemos representar el tensor $A_{\beta'\gamma'}$ en el

sistema primado $x^{\alpha'}$ en notación de Einstein (índices repetidos se suman) como

$$A_{\beta'\gamma'} = \Lambda_{\beta'}^{\mu} \Lambda_{\gamma'}^{\nu} A_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

La distancia, en relatividad especial, entre dos puntos en el espacio-tiempo plano se le llama intervalo, que está definido mediante la métrica como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.3)$$

la cual se mantiene invariante bajo transformaciones de coordenadas puesto que es una escalar, es decir, si cambiamos de sistema de referencia, ds^2 se mantiene igual.

A partir de la teoría de relatividad especial, se hizo una generalización a una teoría de campo gravitatorio y de sistemas de referencia generales, es decir, ya no solo inerciales sino también acelerados. De ahí nace la Teoría de Relatividad General. La Relatividad General establece principalmente que el espacio-tiempo es curvo y la gravedad es la manifestación de esa curvatura; en presencia de materia, la geometría del espacio-tiempo no es plana sino curva. Así, una partícula en movimiento libre dentro de un campo gravitatorio seguirá una trayectoria geodésica, que se define como una curva cuyos vectores tangentes se mantienen paralelos si se trasportan a lo largo de esta [4]; por tanto, la curvatura de $g_{\alpha\beta}$ está relacionada con la distribución de materia en el espacio-tiempo mediante las ecuaciones de Einstein. Para llegar a las ecuaciones de Einstein, es necesario definir los tensores que miden curvatura del espacio-tiempo. La medición de la curvatura de cualquier métrica $g_{\mu\nu}$ viene determinada por el tensor de curvatura o el tensor de Riemann, que está dado en función de los símbolos de Christoffel

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_{\mu} g_{\sigma\beta} + \partial_{\beta} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\beta\mu}), \quad (2.4)$$

donde $\partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$. Entonces el tensor de Riemann expresado en términos de los símbolos de Christoffel y sus derivadas es

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_{\nu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\rho}_{\beta\nu} \Gamma^{\alpha}_{\rho\mu} - \Gamma^{\rho}_{\beta\mu} \Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}. \quad (2.5)$$

A partir del tensor de Riemann (2.5) se obtiene el tensor de Ricci el cual cuantifica

la aceleración de un volumen o un hipervolumen en un espacio-tiempo curvo. En relatividad general, el tensor de Ricci tiene la particularidad de representar efectos gravitatorios, que son los más importantes a gran escala. Este tensor es solo una contracción del tensor de Riemann, es decir,

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}. \quad (2.6)$$

La superficie que encierra un volumen o hipervolumen, está dada por el escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Ahora es posible escribir las ecuaciones de Einstein, es decir, la aplicación de la relatividad general al campo gravitatorio. La fórmula matemática que relaciona la geometría del espacio-tiempo con la distribución de masa y energía está dada por

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento. En el siguiente capítulo se define la forma de este tensor para nuestro problema. El tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ se escribe en términos del tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}$) y el escalar de Ricci (R), así como del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.9)$$

En principio, lo que describe la ecuación (2.9) es que dado un cuerpo con cierta forma y velocidad, se puede calcular su distribución de masa y energía, a partir de la cual, utilizando la ecuación (2.8), se puede obtener la métrica $g_{\alpha\beta}$ que determina enteramente el espacio-tiempo curvo. En la práctica, este procedimiento es extremadamente complicado porque el conjunto de diez ecuaciones que conforman (2.8), en un principio, era imposible resolver analíticamente excepto en algunos casos particulares. La primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein fue descubierta sólo unos meses después de que apareciera el artículo de Einstein. Esta solución se debe a Karl Schwarzschild. La solución de Schwarzschild nace de preguntarse cómo deformaba el espacio-tiempo una distribución de masa perfectamente esférica. El

espacio-tiempo resultante debía tener propiedades de simetría alrededor de la masa considerada; esto simplifica notablemente las ecuaciones. De ahí nace el espacio-tiempo de Schwarzschild el cual describe la región externa de un cuerpo esférico con masa M y radio r arbitrario [12], y está descrito en coordenadas de Schwarzschild por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.10)$$

De manera general, la métrica de Schwarzschild tiene la propiedad que si la esfera considerada de masa M tiene un radio menor que el radio de Schwarzschild

$$r_s = 2M, \quad (2.11)$$

entonces la luz emitida de su superficie, o de cualquier punto dentro de la esfera con radio r , no puede llegar al radio crítico r_s y queda atrapada para siempre. De aquí la existencia de los hoyos negros, los cuales corresponden al espacio-tiempo producido por un cuerpo masivo cuyo tamaño es igual o menor a su radio de Schwarzschild. La superficie esférica cuyo radio es justamente el de Schwarzschild se llama horizonte de eventos del hoyo negro; la luz puede cruzar sólo en un sentido el horizonte: de afuera hacia adentro y nunca al revés.

Hasta el momento hemos definido las ecuaciones de Einstein y una de sus soluciones exactas, es decir, la métrica de Schwarzschild, sin embargo, existen más soluciones exactas que no mencionaremos en esta tesis. Nos centraremos en buscar soluciones aproximadas a las ecuaciones de Einstein a partir de soluciones exactas conocidas. Esto se logra mediante una herramienta llamada Teoría de Perturbaciones. En la siguiente sección se hace una breve descripción del método de perturbaciones de una manera general para poder desarrollar una solución aproximada alrededor de la métrica de Minkowski.

2.2. Teoría de perturbaciones

Existen una gran cantidad de sistemas físicos descritos por ecuaciones que no tienen soluciones analíticas; por ello es importante desarrollar métodos que permitan obtener soluciones analíticas aproximadas. Uno de los métodos populares en la física matemática para resolver problemas complicados es utilizar un análisis perturbativo alrededor de una solución conocida, denominado teoría de perturbaciones[8]. La teoría de perturbaciones es una herramienta comúnmente usada en la mecánica clásica y cuántica. En Relatividad General, la teoría perturbativa también ha llegado a ser muy usada en diferentes problemas; tal es el caso del estudio de la propagación de ondas gravitacionales en el cual la teoría de perturbaciones es el principal medio para obtener una solución a las ecuaciones de Einstein. En esta sección damos una descripción no formal de la teoría de perturbaciones, de la cual partimos para perturbar los tensores de curvatura y encontrar una solución perturbada para las ecuaciones de Einstein.

La teoría de perturbaciones, de manera general, es un método matemático usado para aproximar la solución a ecuaciones (algebraicas, diferenciales, integrales, etc) que no pueden ser resueltas de manera exacta. Este método propone que si se conoce la solución exacta de un problema, la solución de un nuevo problema ligeramente diferente es una "perturbación" de la solución conocida [5]. Los métodos perturbativos solo podrán ser aplicados si es posible agregar un término pequeño (λ) a la solución exacta del problema conocido, es decir, la nueva solución estará expresada en términos de una serie de potencias en el parámetro λ .

Para describir el método, supongamos una ecuación cuya solución exacta está dada por la función $f_0(x)$ real o compleja. Es posible obtener una familia de soluciones dependientes de un parámetro λ , el cual cuantifica la desviación del nuevo problema respecto al original, que cumple con $\lambda \rightarrow 0$. Por tal condición lo escribimos como $\delta\lambda$ y hacemos una expansión en serie de Taylor para la función $f(x; \lambda)$ de manera que

$$f(x; \lambda) \approx f(x; \lambda = 0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \delta\lambda + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} (\delta\lambda)^2 + \dots \quad (2.12)$$

donde $f(x; \lambda)$ es infinitamente diferenciable alrededor de $\lambda = 0$ y $\delta\lambda$ es la variación de λ [11]. De la ecuación (2.12) se puede observar que $f(x; \lambda = 0) \equiv f_0(x)$; esto quiere decir que $f(x; \lambda)$ representa las soluciones perturbadas de $f_0(x)$. Por tanto, f estará dada en términos de la solución exacta más pequeñas variaciones, o bien

$$f = f_0 + \delta f + \delta^{(2)} f + \dots \quad (2.13)$$

donde δf es la variación a orden lineal de f respecto de λ y $\delta^{(2)} f$ es la segunda variación de f respecto de λ y así sucesivamente. La diferencia entre f_0 y f total será Δf y está dada por

$$\Delta f = \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \delta\lambda + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} (\delta\lambda)^2 + \dots$$

El parámetro λ representa, en la mayoría de los casos, una cantidad física y en algunos casos es solamente usado como un parámetro ficticio para poder hacer uso de la teoría de perturbaciones. Este es el principio de la teoría de perturbaciones donde las variaciones para cada función f , corresponden a perturbaciones a distintos órdenes de la función f_0 que representa la solución exacta. De esta manera se aplica a problemas en física, pero de manera específica lo vamos aplicar en Relatividad General. En las siguientes secciones se usa esta teoría para perturbar un espacio-tiempo plano, el cual ya no es una función sino un campo tensorial. En esta tesis no se entra en detalle la matemática que conlleva la teoría de perturbaciones en Relatividad General (en [5] se muestra un análisis completo). Sin embargo hacemos uso de la notación de las perturbaciones como se describió en esta sección. Para el estudio de ondas gravitacionales es necesario perturbar los campos tensoriales que describen cierto sistema. En nuestro caso solo los perturbamos hasta órdenes lineales lo cual resulta en una teoría linealizada que nos llevará a obtener ecuaciones que describan la forma de las ondas gravitacionales que emite una fuente descrita por $T_{\mu\nu}$.

2.3. Ecuaciones de Einstein para campos débiles

En esta sección, aplicamos la teoría de perturbaciones para construir una solución aproximada a las ecuaciones de Einstein. Dado que la métrica de Minkowski es una solución exacta de las ecuaciones de Einstein, podemos construir una solución perturbada a partir de η . Tomamos la métrica plana debido a que el estudio de la propagación de ondas gravitacionales se hará lejos de la fuente que las emite. En seguida se establecen las condiciones de invariancia que cumple la solución perturbada y sus propiedades bajo transformaciones de norma que serán un factor importante para demostrar la invariancia de norma de los tensores de curvatura al perturbarlos hasta primer orden.

2.3.1. Perturbaciones al espacio-tiempo de Minkowski

En la actualidad, existen varias métricas que son soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, pero es posible construir soluciones aproximadas a través de un análisis perturbativo. Para ello debemos tener en cuenta que el espacio-tiempo no es un escenario estático sino que es dinámico; por tanto, es necesario perturbar al espacio-tiempo representado por $g_{\mu\nu}$ y a todos los campos tensoriales que describen el sistema, como lo son los tensores de curvatura. En esta tesis se estudia el campo gravitatorio producido por cierta distribución de materia, descrita por $T_{\mu\nu}$, el cual queremos medir en una región alejada de ella. Bajo esta condición, suponemos que medimos desde un espacio-tiempo plano descrito por η y lo perturbamos de acuerdo a (2.13) como:

$$g = \eta + \delta g + O(\delta^{(2)}g), \quad (2.14)$$

donde δg corresponde a la perturbación a primer orden del espacio-tiempo plano y $\delta^{(2)}g$ se refieren a las perturbaciones a segundo orden. De acuerdo a la teoría de perturbaciones, hemos tomado la solución exacta a las ecuaciones de Einstein, η , y la estamos perturbando con términos que dependen de un parámetro λ . Podemos reescribir (2.14) en términos de sus componentes respecto a un sistema de coordenadas cartesiano x^μ descrito por (2.1) como

$$g_{\alpha\beta}(x^\mu; \lambda) = \eta_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}(x^\mu; \lambda) + O(\delta^{(2)} g_{\alpha\beta}), \quad (2.15)$$

donde $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ y la perturbación a orden lineal en λ se escribe como

$$\delta g_{\alpha\beta}(x^\mu; \lambda) = \left. \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x^\mu; \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \delta \lambda. \quad (2.16)$$

La linealización es un concepto útil para poder entender las perturbaciones gravitacionales, lo cual se logra al ir considerando sólo las perturbaciones de orden lineal de cada uno de los tensores, comenzando con el tensor métrico. Esto es posible gracias al límite de un campo gravitacional débil, es decir, considerando que los campos que perturban la solución exacta, en este caso la métrica plana, son pequeños. Tomemos entonces (2.15) hasta primer orden del parámetro λ

$$g_{\alpha\beta} \approx \eta_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}. \quad (2.17)$$

La ecuación (2.17) representa la métrica perturbada. Simplificamos la notación haciendo

$$h_{\alpha\beta} = \left. \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad (2.18)$$

de manera que (2.17) se reescribe como

$$g_{\alpha\beta} \approx \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \delta \lambda, \quad (2.19)$$

es decir, $h_{\alpha\beta}$ representa las componentes de la primera perturbación de la métrica de Minkowski. Debido a la debilidad del campo gravitatorio que perturba el espacio-tiempo plano, pedimos que las componentes $h_{\alpha\beta}$ sean pequeñas en comparación a las componentes de la métrica η , es decir,

$$\left| h_{\alpha\beta} \right| \ll 1. \quad (2.20)$$

La métrica perturbada tiene la propiedad de ser invariante bajo transformaciones de Lorentz, es decir, (2.19) se mantiene invariante. Si cambiamos de un sistema de referencia descrito por $\{x^\alpha\}$ al sistema de referencia descrito por coordenadas

$\{x^{\bar{\alpha}}\}$ podemos aplicar la transformación a las coordenadas antiguas de forma que $x^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} x^{\beta}$. En este nuevo sistema de referencia la métrica (2.19) se transforma de la siguiente manera:

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \Lambda^{\mu}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}} g_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \delta\lambda), \quad (2.21)$$

y obtenemos que

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \delta\lambda. \quad (2.22)$$

Así pues, (2.22) nos demuestra que la métrica perturbada (2.19) es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

Hemos obtenido la métrica perturbada que se escribe como (2.19) lo cual nos lleva a perturbar los campos tensoriales que describen el sistema físico que estamos analizando, es decir, los tensores de curvatura. En la siguiente sección se muestra cómo son las transformaciones de norma para la métrica perturbada. Las transformaciones de norma son importantes para la simplificación de las ecuaciones de Einstein, dada la libertad que otorgan para escoger cualquier sistema de coordenadas.

2.3.2. Transformaciones de Norma

La teoría de Einstein tiene libertad de norma, es por eso que es posible aplicar transformaciones de norma como herramienta para facilitar el análisis matemático de ciertos problemas. Las transformaciones de norma implican una transformación de coordenadas, y las teorías que se rigen bajo estas normas son llamadas teorías de norma [13]. En esta sección aplicamos una transformación de coordenadas al tensor métrico perturbado. Las propiedades en las transformaciones de norma de la métrica perturbada serán una herramienta al momento de escribir las ecuaciones de Einstein perturbadas a orden lineal [4].

En (2.19) escribimos la métrica respecto a un sistema de coordenadas dado por $\{x^{\alpha}\}$, sin embargo, podemos escoger otro sistema de coordenadas donde $h_{\alpha\beta}$ cumpla con la condición (2.20). Para ver esto consideremos la transformación de coordenadas

que va del sistema de referencia descrito por x^α al sistema de coordenadas $\{x^{\alpha'}\}$, agregando un pequeño cambio en las coordenadas $\{x^\alpha\}$ de tal manera que el nuevo sistema de coordenadas $(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ queda escrito como

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta), \quad (2.23)$$

donde $\xi^\alpha(x)$ son cuatro funciones arbitrarias que dependen de la posición y pedimos que sean de tamaño pequeño al igual que las $h_{\alpha\beta}$ en el sentido que $|\partial_\beta \xi^\alpha| \ll 1$.

A partir de la transformación (2.23) la aplicamos en la métrica perturbada (2.19)

$$g_{\alpha'\beta'}(x') = \Lambda^\mu_{\alpha'} \Lambda^\nu_{\beta'} g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}} g_{\mu\nu}(x). \quad (2.24)$$

Desarrollando las matrices de transformación de Lorentz obtenemos

$$\Lambda^{\alpha'}_{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_{\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha(x^\beta)}{\partial x^\beta}, \quad (2.25)$$

y a partir de esta matriz podemos obtener su inversa

$$\Lambda^\alpha_{\beta'} = \delta^\alpha_{\beta} - \frac{\partial \xi^\alpha(x^\beta)}{\partial x^\beta} + O\left(\left|\frac{\partial \xi^\alpha(x^\beta)}{\partial x^\beta}\right|^2\right). \quad (2.26)$$

Sustituyendo en (2.24) se tiene que

$$g_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha'\beta'} \delta\lambda, \quad (2.27)$$

donde

$$h_{\alpha'\beta'} = h_{\alpha\beta} - \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha} + O\left(\left|\frac{\partial \xi}{\partial x^\beta}\right|^2\right). \quad (2.28)$$

A la transformación (2.28) se le llama transformación de norma debido a su analogía con el caso electromagnético. Debido a la condición $|\partial_\beta \xi^\alpha| \ll 1$, la perturbación $h_{\alpha'\beta'}$ sigue cumpliendo con (2.28) por lo que estamos en un sistema de coordenadas aceptable. Con esto se demuestra que es posible establecer un sistema de coordenadas escogiendo un vector ξ^α arbitrario en el que podemos representar $g_{\alpha'\beta'}$, la cual cumplirá las mismas condiciones que la métrica $g_{\alpha\beta}$. Más adelante veremos que la métrica primada (2.27) junto con lo obtenido en (2.28), se convierten en una herra-

mienta para simplificar las ecuaciones de Einstein, estableciendo condiciones para el vector ξ^α y aprovechando la libertad de norma que tenemos en la teoría de Einstein.

2.3.3. Consecuencias sobre la curvatura

En esta sección obtenemos las perturbaciones a orden lineal de las ecuaciones de Einstein. Dada la perturbación de la métrica, los campos tensoriales también son perturbados a orden lineal usando el parámetro λ . A partir de esto, se obtiene una teoría linealizada que da como resultado una ecuación que nos describe la propagación de $h_{\alpha\beta}$ de la cual se pueden obtener soluciones para las perturbaciones $h_{\alpha\beta}$.

Comenzamos calculando los símbolos de Christoffel en un espacio-tiempo perturbado descrito por (2.19), los cuales están definidos en la sección 2.1 por la ecuación (2.4). Los $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ se perturban hasta primer orden de λ representados en el sistema de coordenadas (2.1)

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \approx {}^0\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha(1)}_{\beta\gamma}\delta\lambda, \quad (2.29)$$

donde ${}^0\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ es el correspondiente a la métrica η , por tanto, ${}^0\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ en el sistema de coordenadas cartesiano en el que estamos trabajando y escribimos a $\Gamma^{\alpha(1)}_{\beta\gamma}$ como las componentes de la primera perturbación de los símbolos de Christoffel. Para el cálculo de $\Gamma^{\alpha(1)}_{\beta\gamma}$ calculamos primero la inversa de (2.19) tomando en cuenta la propiedad [4]

$$(I + A)^{-1} = I - A + A^2 - A^3 + A^4 - + \dots,$$

donde A es una matriz $n \times n$ cuyas entradas tienen que cumplir que $|A_{ij}| \ll \frac{1}{n}$; I refiere a la matriz unitaria. Usando (2.30) obtenemos que

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \delta\lambda + O(\delta^{(2)}\lambda). \quad (2.30)$$

Tomamos solo hasta orden lineal de (2.30) y la sustituimos en (2.4)

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \approx \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\sigma} + h^{\alpha\sigma}\delta\lambda)[\partial_\gamma g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\gamma} - \partial_\sigma g_{\beta\gamma}]. \quad (2.31)$$

Desarrollamos la ecuación expandiendo la métrica perturbada $g_{\beta\gamma}$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} &\approx \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\sigma} + h^{\alpha\sigma}\delta\lambda)[\partial_{\gamma}(h_{\sigma\beta}\delta\lambda) + \partial_{\beta}(h_{\sigma\gamma}\delta\lambda) - \partial_{\sigma}(h_{\beta\gamma}\delta\lambda)] \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}[\partial_{\gamma}h_{\sigma\beta} + \partial_{\beta}h_{\sigma\gamma} - \partial_{\sigma}h_{\beta\gamma}]\delta\lambda - \frac{1}{2}h^{\alpha\sigma}[\partial_{\gamma}h_{\sigma\beta} + \partial_{\beta}h_{\sigma\gamma} - \partial_{\sigma}h_{\beta\gamma}](\delta\lambda)^2,\end{aligned}\quad (2.32)$$

donde hemos tomado en cuenta que $\delta\lambda$ es un parámetro independiente del sistema de coordenadas, es por eso que no se ve afectado por las derivadas parciales respecto a x^{μ} . Comparando (2.32) con (2.29) obtenemos que las perturbaciones a primer orden del símbolo de Christoffel son

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha(1)} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}[\partial_{\gamma}h_{\sigma\beta} + \partial_{\beta}h_{\sigma\gamma} - \partial_{\sigma}h_{\beta\gamma}]. \quad (2.33)$$

Ahora calculamos la perturbación a orden lineal del parámetro λ del tensor de Riemann

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \approx {}^0R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} + \delta R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = R_{\beta\mu\nu}^{\alpha(1)}\delta\lambda, \quad (2.34)$$

donde ${}^0R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}$ es cero pues corresponde a la métrica de fondo η , que es el espacio-tiempo plano y $R_{\beta\mu\nu}^{\alpha(1)}$ corresponde a las componentes de la primera perturbación del tensor de Riemann. Obtenemos entonces el tensor de Riemann mediante (2.5) por lo que sustituyendo (2.29)

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \approx \partial_{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha(1)}\delta\lambda - \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha(1)}\delta\lambda + \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma(1)}\Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha(1)}(\delta\lambda)^2 - \Gamma_{\beta\mu}^{\rho(1)}\Gamma_{\rho\nu}^{\alpha(1)}(\delta\lambda)^2. \quad (2.35)$$

Comparando con (2.34) obtenemos que

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}^{(1)} = \partial_{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha(1)} - \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha(1)}, \quad (2.36)$$

o en términos de $h_{\alpha\beta}$ se escribe como

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}(\partial_{\beta}\partial_{\mu}h_{\alpha\nu} + \partial_{\alpha}\partial_{\nu}h_{\beta\mu} - \partial_{\beta}\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha}\partial_{\mu}h_{\beta\nu}). \quad (2.37)$$

La libertad de norma en la teoría de Einstein nos permite cambiar de un sistema

coordinado a otro. De ahí que podemos calcular el tensor de Riemann respecto al sistema de coordenadas (2.23) y obtenemos que:

$$R'_{\alpha\beta\mu\nu}{}^{(1)} = R_{\alpha\beta\mu\nu}{}^{(1)} - \partial_\nu \partial_\beta \partial_\mu \xi_\alpha - \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\mu \partial_\alpha \partial_\nu \xi_\beta - \partial_\beta \partial_\alpha \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \partial_\beta \partial_\nu \xi_\alpha + \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\nu \partial_\alpha \partial_\mu \xi_\beta + \partial_\beta \partial_\alpha \partial_\mu \xi_\nu. \quad (2.38)$$

Si las funciones ξ_α son suficientemente suaves entonces de (2.38):

$$R'_{\alpha\beta\mu\nu}{}^{(1)} = R_{\alpha\beta\mu\nu}{}^{(1)}. \quad (2.39)$$

Así se demuestra que las componentes del tensor de Riemann son independientes de la norma, es decir, no se ven afectadas por las transformaciones de norma hasta primer orden en (2.28) y que esta condición se cumplirá para los sistemas de coordenadas del tipo (2.23). Es importante tener en cuenta que esto solo sucede a primer orden, puesto que a segundo orden la expresión para las componentes del tensor de Riemann sí cambian [5].

Ahora aplicamos una perturbación al tensor de Ricci a primer orden

$$R_{\beta\nu} \approx {}^{(0)}R_{\beta\nu} + \delta R_{\beta\nu} = R_{\beta\nu}^{(1)} \delta \lambda, \quad (2.40)$$

donde ${}^{(0)}R_{\beta\nu}$ es el tensor de Ricci asociado a η por lo cual es nulo y $R_{\beta\nu}^{(1)}$ son las componentes de la primera perturbación del tensor de Ricci. Calculemos la perturbación lineal del tensor de Ricci a partir de (2.6), es decir, con la contracción de la perturbación lineal de Riemann en (2.37) obtenemos, en términos de $h_{\alpha\beta}$, que

$$R_{\beta\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}(\partial_\beta \partial_\alpha h_\nu^\alpha + \partial^\alpha \partial_\nu h_{\beta\alpha} - \partial_\beta \partial_\nu h_\alpha^\alpha - \partial^\alpha \partial_\alpha h_{\beta\nu}). \quad (2.41)$$

Con esto calculamos la primera perturbación $R^{(1)}$ del escalar de Ricci hasta orden lineal de λ

$$R \approx {}^{(0)}R + \delta R = R^{(1)} \delta \lambda, \quad (2.42)$$

con lo que obtenemos que

$$R \approx g^{\beta\nu} R_{\beta\nu} = (\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \delta\lambda) \times \left[\frac{1}{2} (\partial_\beta \partial_\alpha h^\alpha_\nu + \partial^\alpha \partial_\nu h_{\beta\alpha} - \partial_\beta \partial_\nu h^\alpha_\alpha - \partial^\alpha \partial_\alpha h_{\beta\nu}) \delta\lambda \right]. \quad (2.43)$$

Comparando con (2.42) podemos ver que la primera perturbación $R^{(1)}$ estará dada por los términos que acompañan a $\delta\lambda$ por lo que

$$R^{(1)} = \partial^\nu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} - \partial^\nu \partial_\nu h, \quad (2.44)$$

donde $h \equiv h^\alpha_\alpha$, es decir, la traza del tensor de perturbación lineal.

Teniendo definidos todos los tensores de curvatura sobre una métrica perturbada, podemos construir el tensor de Einstein perturbado a orden lineal a partir de la ecuación (2.8), el cual se perturba de la misma manera que los demás campos tensoriales

$$G_{\alpha\beta} \approx {}^{(0)}G_{\alpha\beta} + \delta G_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta}^{(1)} \delta\lambda. \quad (2.45)$$

Sustituimos entonces el tensor de Riemann perturbado (2.34), así como la métrica (2.19) y el escalar de Ricci (2.42) perturbados a orden lineal. Obtenemos que el tensor de Einstein se escribe como

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &\approx R_{\alpha\beta}^{(1)} \delta\lambda - \frac{1}{2} (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \delta\lambda) (R^{(1)} \delta\lambda) \\ &= [R_{\alpha\beta}^{(1)} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} R^{(1)}] \delta\lambda + O(\delta\lambda)^2. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Entonces la perturbación a orden lineal del tensor de Einstein está dado por

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{(1)} &= R_{\alpha\beta}^{(1)} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} R^{(1)} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial^\nu h_{\nu\beta} + \partial^\nu \partial_\beta h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha \partial_\beta h - \partial^\nu \partial_\nu h_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (\partial^\nu \partial^\mu h_{\nu\mu} - \partial^\nu \partial_\nu h). \end{aligned} \quad (2.47)$$

La ecuación (2.47) tiene una forma complicada, sin embargo, es posible simpli-

ficarla por el hecho que tenemos libertad de norma en nuestra teoría [4]. Para ello, definimos el tensor de perturbación llamado *trace-reverse* de $h_{\alpha\beta}$ como:

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h, \quad (2.48)$$

donde h es la traza y cumple con la propiedad

$$\bar{h} = \bar{h}^\alpha_\alpha = -h, \quad (2.49)$$

esto ya que

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\beta}\bar{h}^{\alpha\beta} &= \bar{h}^\alpha_\mu = h^\alpha_\mu - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\mu h \\ \Rightarrow h^\alpha_\mu &= h^\alpha_\mu - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\mu h \\ \Rightarrow \bar{h} &= -h, \end{aligned}$$

por esta propiedad, $\bar{h}_{\alpha\beta}$ es llamado *trace-reverse* de $h_{\alpha\beta}$. Sustituyendo (2.48) en (2.47) tenemos simplificadas las ecuaciones de Einstein en términos de $\bar{h}_{\alpha\beta}$

$$G_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\partial^\mu\bar{h}_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\beta\partial^\mu\bar{h}_{\alpha\mu} - \partial_\alpha\partial^\mu\bar{h}_{\beta\mu}). \quad (2.50)$$

Establecemos ahora una condición tal que

$$\partial_\beta\bar{h}^{\alpha\beta} = 0. \quad (2.51)$$

Nos referimos a (2.51) como condiciones de norma de Lorentz, las cuales representan cuatro ecuaciones y ya que tenemos cuatro funciones ξ^α , podemos encontrar una norma en la que la ecuación (2.50) sea verdadera. Si tenemos $h_{\mu\nu}$ tal que cumpla con las condiciones de Lorentz, estaremos trabajando bajo dicha norma. Esta norma es utilizada principalmente para poder simplificar las ecuaciones de Einstein. Para usar la condición de Lorentz es necesario mostrar que siempre es posible encontrar $h_{\mu\nu}$ tal que cumpla con (2.51).

Construyamos $\bar{h}_{\alpha\beta}$ en el sistema dado por (2.23)

$$\begin{aligned}\bar{h}'_{\alpha\beta} &= h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(h - 2\xi^\nu_{,\nu}) \\ \Rightarrow \bar{h}'_{\alpha\beta} &= \bar{h}_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta}\xi^\nu_{,\nu}.\end{aligned}\quad (2.52)$$

Supongamos que para $\bar{h}_{\alpha\beta}$ arbitrario, no se cumple (2.51). Aplicamos entonces la divergencia a (2.52),

$$\partial_\beta \bar{h}'^{\alpha\beta} = \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} - \partial^\beta \partial_\beta \xi^\alpha. \quad (2.53)$$

Para saber la norma en la cual es válido (2.51), hacemos

$$\partial_\beta \bar{h}'^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.54)$$

y así obtenemos condiciones para las funciones ξ^α de manera que

$$\partial^\beta \partial_\beta \xi^\alpha = \square \xi^\alpha = \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta}, \quad (2.55)$$

donde el símbolo $\square$ es el operador de onda o bien el *D'Alembertiano* definido por

$$\square \equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right). \quad (2.56)$$

La expresión (2.55) es una ecuación inhomogénea que siempre tiene solución para cualquier $\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta}$ (lo tomamos como cierto aunque en esta tesis no se demostrará), por lo tanto decimos que siempre existe algún ξ^α que transforma la perturbación $h_{\alpha\beta}$ de tal manera que podamos imponer la norma de Lorentz (2.51).

A partir de imponer la norma de Lorentz simplificamos la ecuación para la perturbación (2.50) y obtenemos que

$$G_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{1}{2}\partial_\mu \partial^\mu \bar{h}_{\alpha\beta}. \quad (2.57)$$

Sustituyendo (2.57) en (2.8) se obtiene que

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta}. \quad (2.58)$$

Hasta aquí hemos llegado a la ecuación que describe la perturbación a un espacio-

tiempo plano en coordenadas cartesianas. Esto se obtiene al considerar términos lineales de las perturbaciones de cada uno de los tensores de curvatura y, finalmente, del tensor de Einstein y tomando en cuenta que las perturbaciones al espacio-tiempo son débiles. Dicha linealización de las ecuaciones de Einstein para campos débiles nos llevan a la ecuación de onda dada por (2.58) la cual describe la propagación de las $h_{\alpha\beta}$, o bien, ondas gravitacionales y permite el estudio de éstas. La solución de la ecuación anterior en el vacío se construye en la siguiente sección teniendo en cuenta las imposiciones de norma que hemos tomado para llegar a dicha ecuación, así como el hecho de tomar una fuente $T_{\alpha\beta}$ muy distante de la región del espacio-tiempo de interés.

2.4. Generación de Ondas Gravitacionales

En la sección anterior llegamos a la ecuación de Einstein para un espacio-tiempo plano el cual se perturba con campos débiles, con lo cual obtenemos una ecuación de onda por (2.58) que nos permitirá estudiar la propagación de las ondas gravitacionales. En esta sección se desarrolla una solución a la ecuación de onda teniendo en cuenta las condiciones impuestas durante el desarrollo de la teoría linealizada de Einstein para campos débiles. A partir de la solución, es posible hacer aproximaciones que simplifican el cálculo de las componentes de las perturbaciones $h_{\alpha\beta}$.

Tomamos la ecuación de onda (2.58) la cual muestra similitudes con la ecuación que describe la propagación de ondas electromagnéticas [12]. En analogía a este caso podemos construir una solución para la ecuación de onda que está dada en términos de la función de Green $G(x^\sigma - x'^\sigma)$ de manera que

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(\vec{x}, t) = -16\pi \int G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') T_{\alpha\beta}(\vec{x}', t') d^3x' dt', \quad (2.59)$$

es decir, obtenemos las componentes de $\mathbf{h}$ en $(\vec{x}, t)$, consecuencia de que la fuente $T_{\alpha\beta}$ produce la radiación gravitacional localizada en $(\vec{x}', t')$ [10].

Es conocido que la función de Green puede ser "retardada" o "avanzada" dependiendo de la situación que queramos tratar. Nosotros estamos interesados en la función de Green retardada la cual representa el efecto de las señales del pasado

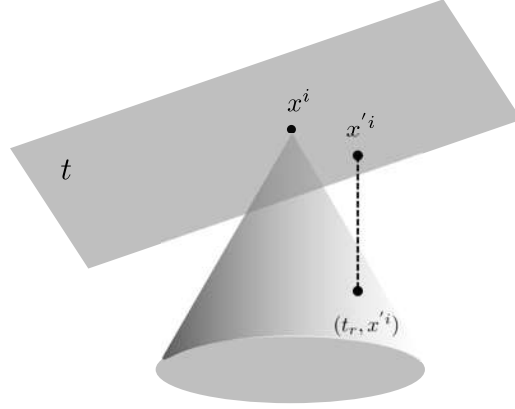


Figura 2.1: Las perturbaciones que se miden en (t, x^i) se calculan en términos de los eventos del pasado del cono de luz, donde t_r es el tiempo retardado

acumuladas en los puntos en los que se mide, como se muestra en la figura (2.1), y está dada por

$$G_{ret}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(t - t' - |\vec{x} - \vec{x}'|), \quad (2.60)$$

donde hay que tener en cuenta que estamos en unidades geometrizadas ($G=c=1$). Además $\vec{x} = \{x^1, x^2, x^3\}$ y $\vec{x}' = \{x'^1, x'^2, x'^3\}$, así como $|\vec{x} - \vec{x}'| = [\delta_{ij}(x^i - x'^i)(x^j - x'^j)]$ y $t' \equiv t_{ret}$. La derivación de (2.60) se da a partir de resolver la ecuación de onda en presencia de una fuente con función delta [13]. Sustituyendo (2.60) en (2.59) obtenemos que

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(\vec{x}, t) = 4 \int \frac{\delta(t - t' - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} T_{\alpha\beta}(\vec{x}', t') d^3x' dt'. \quad (2.61)$$

Podemos usar la función delta para integrar sobre t' y nos lleva a que

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(\vec{x}, t) = 4 \int \frac{T_{\alpha\beta}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x', \quad (2.62)$$

donde la integral se hace sobre la fuente, es decir, donde $T_{\alpha\beta} \neq 0$. Se puede observar que la solución (2.62) para la perturbación métrica $\bar{h}_{\alpha\beta}$ satisface la ecuación (2.58), y es válida en un sistema de referencia inercial con coordenadas cartesianas.

La interpretación de (2.62) es que la perturbación medida en el punto $(\vec{x}, t)$ es producto de la suma de la influencia de la fuente $T_{\alpha\beta}$ que proviene del cono de luz pasado en el punto $(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|)$. Vamos a simplificar nuestra solución por medio de transformaciones de Fourier en la variable temporal t . Para ello es necesario transformar todas las cantidades dejando sin transformar las variables espaciales. Asumimos entonces que $T_{\alpha\beta}(\vec{x}, t)$ y $\tilde{h}_{\alpha\beta}(\vec{x}, t)$ admiten representación de Fourier, es decir

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{T}_{\alpha\beta}(\vec{x}, \omega) \\ \tilde{h}_{\alpha\beta}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\tilde{h}}_{\alpha\beta}(\vec{x}, \omega), \end{aligned} \quad (2.63)$$

donde ω es la frecuencia; con esto tenemos los tensores representados sobre el espacio de frecuencias [12]. Así mismo podemos representar sus inversas como

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\alpha\beta}(\vec{x}, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} T_{\alpha\beta}(\vec{x}, t) \\ \tilde{\tilde{h}}_{\alpha\beta}(\vec{x}, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \tilde{h}_{\alpha\beta}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Tomamos la representación de Fourier (2.63) y la sustituimos en la ecuación (2.61). De ahí obtenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\tilde{h}}_{\alpha\beta}(\vec{x}, \omega) = 4 \int \frac{\delta(t - t' - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \times \\ &\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t'} \tilde{T}_{\alpha\beta}(\vec{x}', \omega) \right] d^3x' dt' \\ &= \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{\delta(t - t' - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} e^{-i\omega t'} \tilde{T}_{\alpha\beta}(\vec{x}', \omega) dt' d^3x' d\omega \\ &= \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{e^{-i\omega(t - |\vec{x} - \vec{x}'|)}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \tilde{T}_{\alpha\beta}(\vec{x}', \omega) d^3x' d\omega. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Escogemos una ω , es decir, representamos la solución como una onda monocromática [12] con lo que obtenemos que

$$e^{-i\omega t} \tilde{h}_{\alpha\beta}(\vec{x}, \omega) = 4e^{-i\omega t} \int \frac{e^{-i\omega|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tilde{T}_{\alpha\beta}(\vec{x}', \omega) d^3x'. \quad (2.66)$$

La solución para la perturbación métrica $\tilde{h}_{\alpha\beta}$ en el espacio de frecuencias estará dada por

$$\tilde{h}_{\alpha\beta}(\vec{x}, \omega) = 4 \int \frac{e^{-i\omega|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tilde{T}_{\alpha\beta}(\vec{x}', \omega) d^3x'. \quad (2.67)$$

La integral (2.67) se hace sobre la fuente, es decir, donde $T_{\alpha\beta} \neq 0$. Con (2.67) hemos obtenido una solución en representación de Fourier para las componentes de la perturbación del espacio-tiempo de Minkowski, sin embargo, dada la debilidad descrita en la teoría linealizada de Einstein, es necesario tomar una aproximación tomando una fuente aislada lejana del observador cuya velocidad es mucho menor a la de la luz y está compuesta por materia no relativista [18]. En la siguiente sección se desarrolla esta aproximación dando como resultado la fórmula cuadrupolar.

2.5. Ondas Gravitacionales lejos de la fuente

En la sección anterior obtuvimos la solución para las componentes de la perturbación métrica en un espacio-tiempo plano sobre un espacio de frecuencias. Dada la debilidad del campo gravitacional supuesta en la teoría linealizada de Einstein, es necesario hacer una aproximación donde la fuente está aislada y lejana al observador, así como considerar que su velocidad es mucho menor que la velocidad de la luz [3]. Esto significa que si r es la distancia que hay entre el observador y la fuente, vamos a asumir que $r \gg R_{fuente}$, como se muestra en la figura (2.2) y $\lambda \gg R_{fuente}$ donde R_{fuente} es la escala característica de la fuente, es decir, donde $T_{\alpha\beta} \neq 0$; y $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$ es la longitud de onda asociada con la frecuencia de la fuente ω y debe ser lo suficientemente pequeña tal que $R_{fuente} \ll \omega^{-1}$ [18]. Sea entonces $|\vec{x}| = r \gg R_{fuente}$ aproximamos

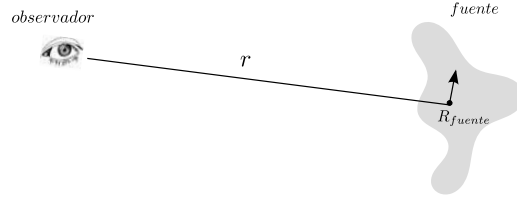


Figura 2.2: Fuente cuyo tamaño característico es R_{fuente} y se encuentra a una distancia r del observador.

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^5}\right) \quad (2.68)$$

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = r - \vec{n} \cdot \vec{x}' + O\left(\frac{1}{r^5}\right), \quad (2.69)$$

donde $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$. Dado que queremos fuentes lejanas del observador asumimos que $r \rightarrow \infty$. Por tanto de (2.68) solo tomamos en cuenta los factores a primer orden y sustituimos en (2.67) con lo que obtenemos que

$$\tilde{h}_{\alpha\beta}(\vec{x}, \omega) \approx 4 \frac{e^{-i\omega r}}{r} \int \tilde{T}_{\alpha\beta}(\vec{x}', \omega) d^3x'. \quad (2.70)$$

Así hemos obtenido la representación de Fourier (2.70) para las componentes de la perturbación métrica para fuentes lejanas del observador. A partir de ésta, nos concentramos en la solución de la integral con la finalidad de simplificar la expresión para las perturbaciones métricas [10].

Tenemos de la teoría de Einstein la ley de conservación del tensor de energía-momento que establece que

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.71)$$

válida en un sistema de referencia dado por (2.1). Tomemos la representación de Fourier para $T^{\alpha\beta}$ para una ω tal que

$$T^{\alpha\beta}(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \tilde{T}^{\alpha\beta}(\vec{x}, \omega). \quad (2.72)$$

Sustituimos (2.72) en (2.71)

$$\begin{aligned}
 \partial_\alpha T^{\alpha\beta} &= \partial_\alpha [e^{-i\omega t} \tilde{T}^{\alpha\beta}(\vec{x}, \omega)] \\
 &= \partial_0 [e^{-i\omega t} \tilde{T}^{0\beta}(\vec{x}, \omega)] + \partial_j [e^{-i\omega t} \tilde{T}^{j\beta}(\vec{x}, \omega)] \\
 &= -i\omega e^{-i\omega t} \tilde{T}^{0\beta}(\vec{x}, \omega) + e^{-i\omega t} \partial_j \tilde{T}^{j\beta}(\vec{x}, \omega),
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

y obtenemos que

$$-i\omega \tilde{T}^{0\beta}(\vec{x}, \omega) + \partial_j \tilde{T}^{j\beta}(\vec{x}, \omega) = 0. \tag{2.74}$$

Desarrollamos ahora la derivada

$$\begin{aligned}
 \partial_j [\tilde{T}^{jl}(\vec{x}, \omega) x^i] &= [\partial_j \tilde{T}^{jl}(\vec{x}, \omega)] x^i + \tilde{T}^{jl}(\vec{x}, \omega) \partial_j x^i \\
 &= [\partial_j \tilde{T}^{jl}(\vec{x}, \omega)] x^i + \tilde{T}^{il}(\vec{x}, \omega).
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

De (2.75) despejamos $\tilde{T}^{il}(\vec{x}, \omega)$, entonces

$$\tilde{T}^{il}(\vec{x}, \omega) = \partial_j [\tilde{T}^{jl}(\vec{x}, \omega) x^i] - [\partial_j \tilde{T}^{jl}(\vec{x}, \omega)] x^i, \tag{2.76}$$

e integrando sobre la fuente de los dos lados tenemos que

$$\int d^3x \tilde{T}^{il}(\vec{x}, \omega) = \int d^3x \partial_j [\tilde{T}^{jl}(\vec{x}, \omega) x^i] - \int d^3x [\partial_j \tilde{T}^{jl}(\vec{x}, \omega)] x^i. \tag{2.77}$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (2.77), por el teorema de la divergencia, se vuelve una integral de superficie que desaparece cuando la fuente está aislada, por lo que

$$\int d^3x \tilde{T}^{il}(\vec{x}, \omega) = - \int d^3x [\partial_j \tilde{T}^{jl}(\vec{x}, \omega)] x^i. \tag{2.78}$$

En seguida tomamos las componentes espaciales de la relación que obtuvimos en (2.74), es decir, cuando $\beta = l$

$$\begin{aligned}
-i\omega \tilde{T}^{0l}(\vec{x}, \omega) + \partial_j \tilde{T}^{jl}(\vec{x}, \omega) &= 0 \\
\Rightarrow i\omega \tilde{T}^{0l}(\vec{x}, \omega) &= \partial_j \tilde{T}^{jl}(\vec{x}, \omega).
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Sustituyendo (2.79) en (2.78) se obtiene

$$\int d^3x \tilde{T}^{il}(\vec{x}, \omega) = -i\omega \int d^3x \tilde{T}^{0l}(\vec{x}, \omega) x^i. \tag{2.80}$$

Desarrollamos el lado derecho de la ecuación (2.80)

$$\begin{aligned}
-i\omega \int d^3x \tilde{T}^{0l}(\vec{x}, \omega) x^i &= -i\omega \int d^3x \left[\frac{\tilde{T}^{0l}(\vec{x}, \omega) x^i + \tilde{T}^{0i}(\vec{x}, \omega) x^l}{2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\tilde{T}^{0l}(\vec{x}, \omega) x^i - \tilde{T}^{0i}(\vec{x}, \omega) x^l}{2} \right].
\end{aligned} \tag{2.81}$$

De (2.80), dado que el tensor T^{il} es simétrico, tenemos que

$$-i\omega \int d^3x \tilde{T}^{0l}(\vec{x}, \omega) x^i = \int d^3x \tilde{T}^{il}(\vec{x}, \omega) = \int d^3x \tilde{T}^{li}(\vec{x}, \omega). \tag{2.82}$$

Por lo tanto sustituyendo (2.82) en (2.81) llegamos a

$$\begin{aligned}
\int d^3x \tilde{T}^{il}(\vec{x}, \omega) &= -i\omega \int d^3x \tilde{T}^{0l}(\vec{x}, \omega) x^i \\
&= \frac{-i\omega}{2} \int d^3x [\tilde{T}^{0l}(\vec{x}, \omega) x^i + \tilde{T}^{0i}(\vec{x}, \omega) x^l] \\
&= \frac{-i\omega}{2} \int d^3x \{ \partial_j [\tilde{T}^{0j}(\vec{x}, \omega) x^i x^l] - \partial_j [\tilde{T}^{0j}(\vec{x}, \omega)] x^i x^l \}.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Una vez más, el primer término de (2.83) se convierte en una integral de superficie y éste desaparece puesto que la fuente está aislada. Finalmente obtenemos una expresión para la integral de las componentes espaciales del tensor de energía-momento sobre la fuente

$$\int d^3x \tilde{T}^{il}(\vec{x}, \omega) = \frac{i\omega}{2} \int d^3x \partial_j [\tilde{T}^{0j}(\vec{x}, \omega)] x^i x^l. \quad (2.84)$$

De acuerdo a la ecuación (2.74), tomando solo la componente temporal, es decir, cuando $\beta = 0$ se tiene que

$$\partial_j \tilde{T}^{0j}(\vec{x}, \omega) = i\omega \tilde{T}^{00}(\vec{x}, \omega). \quad (2.85)$$

Sustituyendo (2.85) en (2.84) se obtiene

$$\int d^3x \tilde{T}^{il}(\vec{x}, \omega) = \frac{-\omega^2}{2} \int d^3x \tilde{T}^{00}(\vec{x}, \omega) x^i x^l. \quad (2.86)$$

Ahora sustituimos (2.86) en la solución (2.70) y con eso llegamos a la expresión final de la solución a las perturbaciones de la métrica plana en representación de Fourier

$$\tilde{h}_{il}(\vec{x}, \omega) = 4 \frac{e^{-i\omega r}}{r} \frac{(-\omega^2)}{2} \int d^3x' \tilde{T}^{00}(\vec{x}', \omega) x^{i'} x^{l'}. \quad (2.87)$$

Hasta el momento obtuvimos las perturbaciones métricas para un espacio-tiempo plano representada en el espacio de frecuencias. Podemos representarla en términos del tensor de momento cuadrupolar de la densidad de energía de la fuente que se define por convención como

$$\tilde{I}_{il}(\omega) = \int d^3x' \tilde{T}^{00}(\vec{x}', \omega) x^{i'} x^{l'}. \quad (2.88)$$

Por lo tanto, nuestra solución adquiere la forma

$$\tilde{h}_{il}(\vec{x}, \omega) = -2\omega^2 \frac{e^{-i\omega r}}{r} \tilde{I}_{il}(\omega). \quad (2.89)$$

Aplicamos la transformada inversa a (2.89) para regresar a la expresión en el espacio de configuraciones,

$$\bar{h}_{il}(\vec{x}, t) = \frac{-2}{r} \frac{d^2}{dt^2} \int d^3x' T^{00}(\vec{x}', t') x^{i'} x^{l'}, \quad (2.90)$$

que en términos del tensor de momento cuadrupolar obtenemos la fórmula cuadrupolar para el cálculo de las componentes del tensor de perturbación dada por

$$\bar{h}_{il}(\vec{x}, t) = \frac{-2}{r} \frac{d^2 I_{il}(t')}{dt^2}, \quad (2.91)$$

donde t' es el tiempo retardado dado por $t - r$. Recurrimos a una identidad que se deriva de la ley de conservación del tensor de energía-momento [4], la cual enuncia lo siguiente

$$\frac{d^2}{dt^2} \int T^{00} x^i x^l d^3 x = 2 \int T^{il} d^3 x. \quad (2.92)$$

A partir de esto obtenemos la ecuación (2.91) en términos de (2.92) y obtenemos que

$$\bar{h}_{il}(\vec{x}, t) = \frac{-4}{r} \int d^3 x' T^{il}(\vec{x}', t'). \quad (2.93)$$

La ecuación (2.93) representa las componentes del campo de perturbaciones en un espacio-tiempo plano, que describen la radiación gravitacional producida por una fuente $T_{\alpha\beta}$ aislada, no relativista y alejada del punto en que se mide. La teoría de Einstein, de la ecuación (2.91) nos dice que el primer término dominante de la radiación gravitacional es el momento cuadrupolar lo que lo convierte en la herramienta principal en el estudio de las ondas gravitacionales. En esta tesis nos hemos basado en la ecuación (2.93), que es una simplificación de (2.91) para el estudio de las ondas gravitacionales, sin embargo, la amplitud de las ondas no nos proporciona información detectable. Es por eso que debemos analizar su polarización la cual marca un efecto sobre masas de prueba y así es posible medir o detectar si existe una señal de ondas gravitacionales.

2.6. Polarización de las ondas gravitacionales

Las ecuaciones de Einstein toman la forma de la ecuación (2.58) cuando cumple con la condición de Lorentz (2.51). La ecuación de onda en el vacío, es decir, cuando $T_{\alpha\beta} = 0$ estará dada por

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \bar{h}^{\alpha\beta} = 0. \quad (2.94)$$

La ecuación (2.94) tiene una solución que va como

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} e^{(ik_\gamma x^\gamma)}_\alpha, \quad (2.95)$$

donde $\{k_\gamma\}$ son las componentes constantes de un cuadri-vector y $A_{\alpha\beta}$ son las componentes de la amplitud de la onda. Para simplificar las ecuaciones de Einstein a la forma (2.94) se ha usado una condición de norma de Lorentz, es decir, debe cumplir que (2.51). Por tanto, de la solución (2.95) se obtiene que

$$A^{\alpha\beta} k_\beta = 0, \quad (2.96)$$

lo que implica que la amplitud $A^{\alpha\beta}$ debe ser ortogonal al vector $\vec{k}$. Cualquier solución de la ecuación (2.94) será una superposición de (2.95), la cual es llamada onda plana.

En la ecuación (2.55) demostramos que es posible obtener transformaciones de $\bar{h}_{\alpha\beta}$ para poder imponer la norma de Lorentz. Restringir las soluciones para las funciones de transformación ξ_α , dará como resultado una imposición de condiciones sobre la amplitud de la onda [4], donde

$$A^\alpha_\alpha = 0, \quad (2.97)$$

es decir, la traza del tensor $A_{\alpha\beta}$ es nula y también se obtiene que

$$A_{\alpha\beta} U^\beta = 0, \quad (2.98)$$

donde $\vec{U}$ es alguna cuatro-velocidad que podemos elegir. Así pues, las ecuaciones (2.96), (2.97) y (2.98) constituyen la llamada norma TT, (por sus siglas en inglés *transverse-traceless*) que considera una norma transversa y sin traza debido a la condición (2.97).

Supongamos un marco de referencia en el espacio-tiempo de Minkowski, en donde las componentes del vector $\vec{U}$ están dadas por $U^\beta = \delta^\beta_0$. Por tanto, la ecuación (2.98) implica que $A_{\alpha 0} = 0$ para todo α . Si orientamos este sistema de referencia de manera que la onda viaja en la dirección z , entonces el vector de onda se escribirá como $\vec{k} \rightarrow (\omega, 0, 0, \omega)$. Entonces $A_{\alpha z} = 0$ para todo α , es decir, la amplitud de la onda es transversal a la dirección de propagación, por eso la norma TT recibe también el

nombre de transversa. Con las dos restricciones sabemos que $A_{xy} = A_{yx}$. Así mismo, la condición (2.97) implica que $A_{xx} = -A_{yy}$. Por tanto, de forma matricial, en este marco de referencia y con las condiciones de la onda ya impuestas, las amplitudes se pueden escribir como

$$A_{\alpha\beta}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí nace el que en la norma TT que existen dos polarizaciones independientes en el plano transversal a la dirección en la que viaja la onda, por tanto el tensor de las amplitudes $\bar{h}_{\alpha\beta}$ estará expresado en términos de la polarización h_+ y la polarización $h_\times$, de manera que

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los estados de polarización de las ondas gravitacionales son dos observables que dependen del tiempo y sus efectos son transversales a la dirección de propagación. Si consideramos un anillo circular de partículas que se encuentra en un plano ortogonal a la dirección de propagación de las ondas, uno de los estados de polarización alargará y comprimirá al anillo de partículas a lo largo de direcciones ortogonales. A este estado de polarización es al que le hemos llamado h_+ . La figura (2.3) muestra la deformación del anillo de partículas conforme una onda gravitacional pasa por él en el tiempo. El segundo estado de polarización deformará el anillo de manera similar, pero a lo largo de direcciones que están rotadas $\pi/4$ radianes con respecto a las direcciones de deformación del estado h_+ . A esta polarización es a la que hemos llamado estado $h_\times$. La figura (2.4) muestra la deformación de un anillo de partículas conforme una onda gravitacional pasa por él en el tiempo.

Hasta el momento hemos desarrollado la teoría de Einstein para las perturbaciones del espacio-tiempo plano en orden lineal de las perturbaciones $\bar{h}_{\alpha\beta}$ con lo que

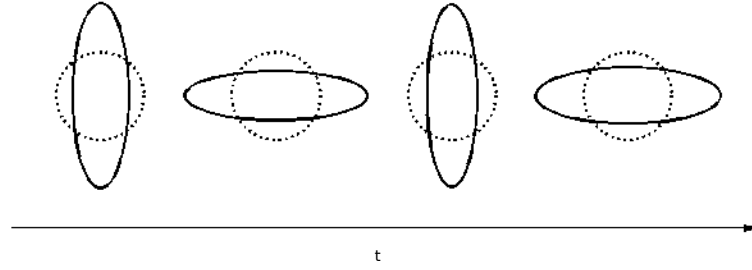


Figura 2.3: El efecto en el tiempo del estado de polarización h_+ de una onda gravitacional que viaja sobre el eje z en las separaciones propias de partículas en un anillo circular en el plano (x-y). El anillo con trazo discontinuo muestra la posición de las partículas en ausencia de ondas gravitacionales

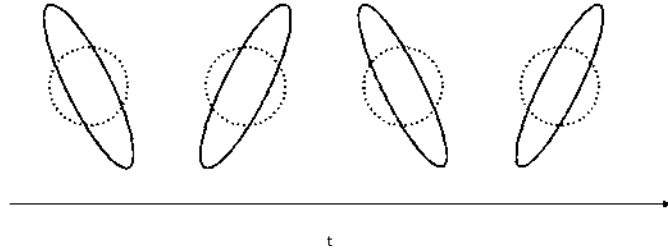


Figura 2.4: El efecto en el tiempo del estado de polarización h_x de una onda gravitacional que viaja sobre el eje z en las separaciones propias de partículas en un anillo circular en el plano (x-y). El anillo con trazo discontinuo muestra la posición de las partículas en ausencia de ondas gravitacionales

hemos obtenido ecuación dada por (2.93) la cual dado un tensor de energía-momento podremos obtener las componentes del tensor de amplitudes el cual relacionamos con las polarizaciones de la onda como lo marca la norma TT. Para poder aplicar esta teoría hemos usado una evolución de una distribución de polvo alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. Esta evolución se hace por medio de un código basado en un método conocido como Hidrodinámica de Partículas Suavizadas (SPH por sus siglas en inglés). SPH fue desarrollado para problemas de la mecánica de fluidos. En el siguiente capítulo hacemos un estudio de este método numérico y del escenario en que lo hemos aplicado para poder obtener datos de la fuente de la que queremos extraer señales de ondas gravitacionales. Mediante estos datos nos será posible hacer una aproximación numérica de (2.93) mediante un método de integración a la Monte Carlo.

Capítulo 3

Destrucción por fuerzas de marea

Existen distintos fenómenos astrofísicos posibles para la emisión de ondas gravitacionales. Entre ellos se encuentra la destrucción de una estrella cercana a un agujero negro. En esta tesis hemos hecho una aproximación de este escenario mediante una distribución de polvo orbitando circularmente alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. La evolución en el tiempo de esta configuración se hizo por medio de un código basado en una formulación Lagrangiana llamada Hidrodinámica de partículas suavizadas (SPH). A partir de los datos que se obtienen en el tiempo se pueden obtener las señales de ondas gravitacionales emitidas por este tipo de configuración. En seguida usamos una integración numérica a la Monte Carlo para obtener las amplitudes de las polarizaciones de la radiación gravitacional. En este capítulo describimos el método SPH y las condiciones que hemos impuesto para usarlo en nuestro problema. También se hace una breve descripción del método de integración Monte Carlo y la manera de aplicarlo en la extracción de ondas gravitacionales.

3.1. Métrica ADM

En relatividad especial y general, la distinción entre las tres dimensiones espaciales y la dimensión tiempo es difícil de entender. Existen varias maneras de resolver este problema. Una manera de aproximarlos es la construcción de "rebanadas de

tiempo” de la geometría del tres-espacio a lo largo de una secuencia de pasos en una coordenada tipo tiempo t . Esto significa que el espacio-tiempo es rebanado en una familia de hipersuperficies, Σ_t , cuyas coordenadas en cada rebanada son descritas por x^i y están separadas por desplazamientos diferenciales de la coordenada t . Éste es llamado formalismo ADM o (3+1) donde el tiempo propio $\tilde{d}\tau$ entre la hipersuperficie de abajo y la de arriba se define a lo largo de la dirección normal $\vec{n}$ de la hipersuperficie espacial [17].

3.1.1. Observadores

Observador Euleriano: Un observador euleriano se mueve a través del espacio-tiempo en dirección ortogonal de todos los vectores confinados en las hipersuperficies espaciales. Dicho observador es un buen sistema para hacer mediciones de cantidades físicas.

Observador Coordinado: La distancia espacial propia dl^2 entre un punto y otro dentro del tres-espacio está dada por

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j,$$

donde γ_{ij} es la métrica del tres-espacio. Un observador en reposo en coordenadas de las hipersuperficies espaciales lo referimos como observador coordinado. Este observador se mueve a través del espacio-tiempo en la dirección en la que las coordenadas espaciales x^i al tiempo t son iguales a las coordenadas espaciales de su localización al tiempo $t + dt$. En el formalismo ADM, tenemos la libertad de elegir dónde esas coordenadas se conectan de una hipersuperficie a la siguiente, es decir, se define un desplazamiento $\vec{\beta}$ de las coordenadas espaciales de una hipersuperficie a otra. Si denotamos a y^i a las coordenadas del punto normal de la hipersuperficie al tiempo t que conecta con la siguiente hipersuperficie (observador euleriano) tenemos que

$$x^i(t) = x^i(t + dt) = y^i + \beta^i dt,$$

como se muestra en la figura (3.1). Definimos también la medida del vector que va de la posición del observador coordinado al tiempo t hasta su posición al tiempo

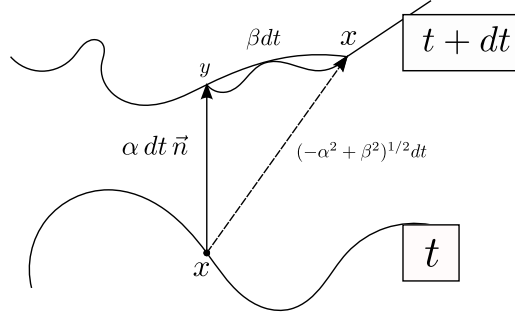


Figura 3.1: Descripción de la métrica ADM que depende de la función de lapso α y el desplazamiento β

$t + dt$ que es

$$ds_{CO}^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2,$$

donde α se le llama función de lapso la cual representa la tasa de flujo del tiempo propio con respecto al tiempo coordenado t .

Con lo anterior podemos escribir el intervalo en el espacio-tiempo entre dos puntos que se expresa como

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.1)$$

donde $\beta_i = \gamma_{ij} \beta^j$ y $\gamma_{il} \gamma^{lj} = \delta_i^j$. El tensor métrico ADM estará dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \beta_l \beta^l - \alpha^2 & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix},$$

con la forma contravariante como

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{\beta^i}{\alpha^2} \\ \frac{\beta^j}{\alpha^2} & \gamma_{ij} - \frac{\beta^i \beta^j}{\alpha^2} \end{pmatrix}.$$

El vector normal al tres-espacio γ_{ij} lo podemos definir como

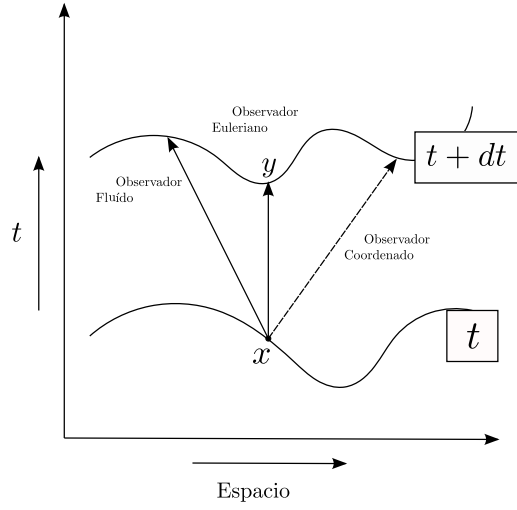


Figura 3.2: Descripción general de los observadores definidos en el formalismo ADM

$$n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0)$$

$$n^\mu = \left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^i}{\alpha}\right),$$

lo cual cumple que

$$n^\mu n_\mu = -1.$$

Observador fluido: Podemos definir un sistema más como lo es el observador fluido, o bien, observador lagrangiano el cual se monta en el fluido. Este es el sistema donde se puede medir la densidad de masa en reposo del fluido, la temperatura, etc., de una manera más sencilla. La 4-velocidad de fluido se denota como U^μ medida por un observador euleriano. Dicha velocidad satisface la condición

$$U^\mu U_\mu = -1, \tag{3.2}$$

y desde este mismo observador se mide la tres-velocidad espacial del fluido v^i . Así pues, escribimos el factor de Lorentz, L , el cual asigna un observador euleriano a un sistema que se mueve con la materia

$$L^2 = \frac{1}{1 - \gamma_{ij}v^i v^j / \alpha^2}, \quad (3.3)$$

y por consiguiente nos permite pasar de un observador euleriano a un observador fluido.

3.2. Formulación Lagrangiana de las ecuaciones de un fluido ideal relativista

En mecánica de fluidos es posible obtener las ecuaciones de Euler que describan el movimiento de cierto medio continuo. En astrofísica se puede hacer una generalización de dichas ecuaciones tomando en cuenta los efectos de la relatividad especial. Para ello se toma un fluido perfecto, el cual es una generalización de gas ideal. Un fluido perfecto está definido en relatividad general como un fluido que no tiene viscosidad y no conduce calor en cierto marco referencial [4]. Las ecuaciones generales de la hidrodinámica se obtienen a partir de las leyes de conservación local del número bariónico [19], es decir, solo son válidas donde se cumple que

$$\nabla_\mu(\rho u^\mu) = 0, \quad (3.4)$$

también donde se cumpla la conservación del tensor de energía-momento,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.5)$$

donde ρ es la densidad de masa en reposo y u^μ es la 4-velocidad del fluido y estamos usando la convención para la suma de Einstein. Definimos ahora el tensor de energía-momento para un fluido perfecto

$$T^{\mu\nu} = (pw + q)u^\mu u^\nu + (p + q)g^{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

donde p es la presión termodinámica, $w = 1 + \epsilon + \frac{p}{\rho}$ es la entalpía relativista con energía interna ϵ , q es la presión debida a la viscosidad artificial de la cual se dará una expresión explícita más adelante, $g^{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo. Todas las cantidades en el tensor de energía-momento (3.6) son medidas desde un sistema local

en reposo del fluido.

Es conveniente definir de una manera simple el espacio-tiempo en el que estamos trabajando. Para ello usamos la métrica ADM, por lo que un elemento de línea puede ser escrito como (3.1). De acuerdo a la definición de α y β^i , podemos descomponer un vector base ∂_t del sistema de coordenadas conformado por $\{\partial_t, \partial_i\}$ de manera que

$$\partial_t = \alpha \mathbf{n} + \beta^i \partial_i, \quad (3.7)$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a las rebanadas Σ_t , es decir, $\mathbf{n} \cdot \partial_i = 0$. El observador descrito entonces como (3.7) será un observador euleriano en el cual estableceremos nuestras variables termodinámicas. Así pues, en la base $\{\mathbf{n}, \partial_i\}$, o bien, base euleriana, la 4-velocidad $\mathbf{u}$ del fluido la podemos representar como

$$u^\mu \partial_\mu = \mathbf{u} = L(\mathbf{n} + \bar{v}^i \partial_i), \quad (3.8)$$

donde L es el factor de Lorentz que debido a la condición de normalización (3.2) tiene la forma

$$L = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_{ij} \bar{v}^i \bar{v}^j}}, \quad (3.9)$$

y $\bar{v}^i$ es la 3-velocidad del fluido medida desde un observador euleriano. Si reescribimos la 4-velocidad en la base $\{\partial_t, \partial_i\}$ obtenemos

$$\mathbf{u} = \frac{L}{\alpha} [\partial_t + (\alpha \bar{v}^i - \beta^i) \partial_i] = \frac{L}{\alpha} (\partial_t + v^i \partial_i), \quad (3.10)$$

donde hemos definido a v^i como

$$v^i = \alpha \bar{v}^i - \beta^i, \quad (3.11)$$

la cual refiere a la 3-velocidad en la base coordenada.

Ahora derivamos las ecuaciones lagrangianas de la hidrodinámica relativista donde definimos la derivada respecto al tiempo total que estará dada por

$$\frac{d}{dt} = \frac{\alpha}{L} U^\mu \partial_\mu = \partial_t + v^i \partial_i. \quad (3.12)$$

Es importante tener en cuenta que la derivada está en términos de la base coordenada pues desde ahí queremos medir nuestras variables.

De la ley de conservación de número bariónico (3.4) tenemos que

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} \rho u^\mu) = 0, \quad (3.13)$$

donde g es la determinante de la métrica $g^{\mu\nu}$. Desarrollando obtenemos que

$$\partial_t (\sqrt{-g} \rho u^0) + \partial_i (\sqrt{-g} \rho u^i) = \left(\frac{d}{dt} - v^i \partial_i \right) (\sqrt{-g} \rho u^0) + \partial_i (\sqrt{-g} \rho u^i) = 0 \quad (3.14)$$

Sustituyendo las componentes de la 4-velocidad, es decir, $u^\mu = (\frac{L}{\alpha}, \frac{L}{\alpha} v^i)$ junto con la definición de $L\rho = D$, $\frac{\sqrt{-g}}{\alpha} = \sqrt{\gamma}$ donde γ es la determinante de la métrica espacial γ_{ij} obtenemos la ecuación

$$\frac{dD^*}{dt} + D^* \partial_i v^i = 0, \quad (3.15)$$

donde

$$D^* = \sqrt{\gamma} L \rho, \quad (3.16)$$

la cual define, así como D , la densidad de masa en reposo relativista. A la ecuación (3.15) se le llama ecuación de continuidad relativista. Ahora tomamos la ley de conservación de energía-momento (3.5) y sustituimos el tensor de un fluido perfecto (3.6)

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_\nu T_\mu^\nu &= \nabla_\nu [(\rho w + q) u^\nu u_\mu + (p + q) g_\mu^\nu] \\ &= \rho u^\nu \nabla_\nu \left[\left(w + \frac{q}{\rho} \right) u_\mu \right] + \partial_\mu (p + q). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Desarrollando primer término de la ecuación resultante tenemos que

$$u^\nu \nabla_\nu \left[\left(w + \frac{q}{\rho} \right) u_\mu \right] = \frac{\gamma}{\alpha} \frac{d}{dt} \left[\left(w + \frac{q}{\rho} \right) u_\mu \right] - \frac{1}{2} \left(w + \frac{q}{\rho} \right) \partial_\mu g_{\sigma\phi} u^\sigma u^\phi, \quad (3.18)$$

pero tomamos el término

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\left(w + \frac{q}{\rho} \right) u_\mu \right] &= \frac{\alpha}{\rho \gamma \sqrt{-g}} \left\{ \frac{\sqrt{-g}}{2} (\rho w + q) u^\sigma u^\nu \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\mu [\sqrt{-g} (p + q)] \right\} \\ &= \frac{1}{D^*} \left\{ \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\sigma\nu} \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\mu [\sqrt{-g} (p + q)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde se ha usado la identidad

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \partial_\mu g_{\sigma\nu}. \quad (3.20)$$

Ahora tomamos solo las componentes espaciales de la ecuación (3.19), es decir, $\mu = i$ y obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left[\left(w + \frac{q}{\rho} \right) u_i \right] = \frac{1}{D^*} \left\{ \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\sigma\nu} \partial_i g_{\sigma\nu} - \partial_i [\sqrt{-g} (p + q)] \right\}, \quad (3.21)$$

y sustituyendo u_i que se escribe como

$$u_i = g_{i\mu} u_\mu = \frac{L}{\alpha} (\gamma_{ij} \beta^j + \gamma_{ij} v^j) = L \gamma_{ij} \bar{v}^j, \quad (3.22)$$

obtenemos la ecuación de momento relativista

$$\frac{d}{dt} S_i = \frac{1}{D^*} \left\{ \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\sigma\nu} \partial_i g_{\sigma\nu} - \partial_i [\sqrt{-g} (p + q)] \right\}, \quad (3.23)$$

que se deriva de tomar las componentes espaciales de (3.19) donde S_i se define como el momento específico relativista medido por observadores eulerianos

$$S_i = \left(w + \frac{q}{\rho} \right) L \gamma_{ij} \bar{v}^j. \quad (3.24)$$

Ahora tomamos la parte temporal de la ecuación (3.19), es decir, $\mu = 0$ y obtenemos la ecuación de energía relativista

$$\frac{d}{dt} \left[\left(w + \frac{q}{\rho} \right) u_0 \right] = \frac{1}{D^*} \left\{ \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\sigma\nu} \partial_t g_{\sigma\nu} - \partial_t [\sqrt{-g}(p+q)] \right\}, \quad (3.25)$$

la cual tiene derivadas respecto del tiempo de variables hidrodinámicas de los dos lados de la ecuación. En la parte izquierda de (3.25), hacemos

$$\left(w + \frac{q}{\rho} \right) u_0 = -\frac{\alpha}{L} \left(w + \frac{q}{\rho} \right) + \beta^i S_i, \quad (3.26)$$

esto debido a que

$$u_0 = g_{0\mu} u^\mu = L \left(\frac{\beta^i \beta_i}{\alpha} - \alpha + \frac{\beta_i v^i}{\alpha} \right) = L(\gamma_{ij} \beta^i \bar{v}^j - \alpha).$$

Así mismo reescribimos el segundo término de la parte derecha de la ecuación (3.25) con ayuda de la ecuación (3.15) como

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^*} \partial_t [\sqrt{-g}(p+q)] &= \frac{1}{D^*} \frac{d}{dt} [\sqrt{-g}(p+q)] - \frac{v^i}{D^*} \partial_i [\sqrt{-g}(p+q)] \\ &= \frac{1}{D^*} \frac{d}{dt} [\sqrt{-g}(p+q)] - \frac{v^i}{D^*} \partial_i [\sqrt{-g}(p+q)] - \left[\frac{\sqrt{-g}(p+q)}{D^{*2}} \left(\frac{dD^*}{dt} + D^* \partial_i v^i \right) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\sqrt{-g}(p+q)}{D^*} \right] - \frac{1}{D^*} \partial_i [\sqrt{-g}(p+q) v^i]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Sustituyendo (3.26) y (3.27) en (3.25) obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \left[\alpha \left(w + \frac{q}{\rho} \right) L - \beta^i S_i \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\sqrt{-g}(p+q)}{D^*} \right] = \frac{1}{D^*} \partial_i [\sqrt{-g}(p+q) v^i] - \frac{1}{D^*} \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\alpha\beta} \partial_t g_{\alpha\beta}, \quad (3.28)$$

y simplificando hemos derivado una nueva expresión para la ecuación de energía relativista la cual sigue estando medida por observadores eulerianos

$$\frac{d}{dt} \bar{E} = -\frac{1}{D^*} \left\{ \partial_t [\sqrt{-g}(p+q) v^i] + \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\sigma\nu} \partial_t g_{\sigma\nu} \right\}, \quad (3.29)$$

donde $\bar{E} = \alpha E - \beta^i S_i$, y E es la energía específica relativista total

$$E = \left(w + \frac{q}{\rho}\right)\gamma - \frac{p + q}{D}. \quad (3.30)$$

La parte derecha de la ecuación (3.29) así como la de (3.23) no contienen derivadas en el tiempo de las variables hidrodinámicas, lo cual las hace adecuadas para ser tratadas con el método de SPH como se verá en la siguiente sección.

Hasta el momento hemos obtenido un sistema de ecuaciones hidrodinámicas conformadas por las ecuaciones (3.15), (3.23) y (3.29). Pero aún nos falta agregar la ecuación de estado de la forma $p = p(\rho, \epsilon)$, la cual nos describe la presión termodinámica, p , por medio de la densidad de masa en reposo, ρ , y la energía específica interna, ϵ . Por lo tanto nos restringimos a la descripción de un gas ideal cuya ecuación de estado está dada por

$$p = (\Gamma - 1)\rho\epsilon \quad (3.31)$$

con Γ la constante adiabática del gas ideal.

Con (3.31) hemos completado el sistema de ecuaciones que describe a un fluido relativista perfecto, desarrollando las ecuaciones de conservación desde un formalismo lagrangiano las cuales se componen por las ecuaciones (3.15), (3.23), (3.29) y (3.31).

3.3. Hidrodinámica de Partículas Suavizadas

Para las simulaciones numéricas de problemas en mecánica de fluidos, las ecuaciones gobernantes pueden ser las que describen las leyes de conservación que establecen que un cierto número de variables tales como la masa, el momento y la energía deben conservarse durante el proceso de evolución del sistema. Estos principios de conservación junto con especificaciones de la naturaleza del medio, condiciones de frontera y condiciones iniciales, determinan el desarrollo del sistema fluido cuyas ecuaciones están dadas, la mayoría de las veces, en forma diferencial. Las ecuaciones de la dinámica de fluidos difícilmente tienen soluciones analíticas, es por eso que computacionalmente se hacen aproximaciones de las soluciones mediante la discretización

de las ecuaciones, lo que nos conduce a un conjunto de ecuaciones algebraicas que pueden resolverse al obtener puntos discretos en el espacio-tiempo. En esta sección se hace una descripción de un método numérico con el que es posible evolucionar las ecuaciones hidrodinámicas de la sección anterior.

Existen distintos métodos numéricos eficientes para la solución de ecuaciones diferenciales que tienen distintas características en su formulación. Entre ellos se encuentra el método SPH. Este método fue desarrollado para problemas de hidrodinámica que están dados en forma de ecuaciones diferenciales parciales de variables de campo como la velocidad, energía, etc. Es un método libre de mallas, es decir, de partículas que refiere al uso de un número finito de partículas discretas para representar el estado de un sistema y registrar el movimiento del mismo. Cada partícula puede estar directamente asociada con objetos físicos discretos, o ser generada para representar una parte del dominio del problema continuo teniendo atributos como la masa, posición, momento y energía. Las partículas pueden variar desde escalas muy pequeñas hasta escalas astronómicas.

SPH es un método lagrangiano en el que las partículas se mueven de acuerdo a las ecuaciones gobernantes y se va desarrollando el sistema en el tiempo. Para ello es necesaria una distribución inicial o generación de partículas que representen el dominio del problema. En seguida se hace una representación integral de las ecuaciones de campo para su aproximación, a lo que se le llama Aproximación del Kernel. Esta representación integral se basa en la identidad

$$f(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (3.32)$$

donde f es una función del vector de posición $r = \{x^i\}$ y $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es la función de Dirac. La integral (3.32) se hace sobre un volumen definido que contenga $\mathbf{r}$. Si reemplazamos la función Delta por una función suave $W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h)$, la representación integral de $f(\mathbf{r})$ queda de la forma

$$f(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}', \quad (3.33)$$

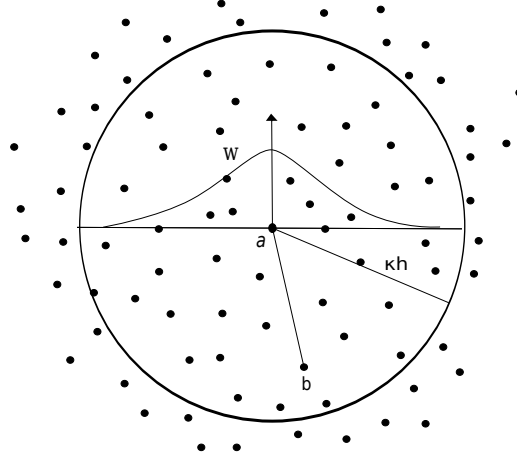


Figura 3.3: Para cada partícula a hay una influencia de las partículas que se encuentran dentro del radio κh

donde W es llamada la función kernel que depende de h que es la longitud de suavizado que define el área de influencia de la función de suavizado W . La función de suavizado tiene que cumplir ciertas condiciones, entre ellas la condición de normalización que significa que

$$\int W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}' = 1, \quad (3.34)$$

que se evalúa sobre el volumen. Otra propiedad es la de Dirac, la cual se cumple cuando h se acerca a 0, es decir,

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) = \delta(r - r'). \quad (3.35)$$

La última condición es la compacta la cual indica que

$$W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) = 0 \text{ cuando } |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > \kappa h \quad (3.36)$$

donde κ es un factor de escalamiento que frecuentemente se toma con el valor 2.

En SPH el sistema completo es representado por un número finito de partículas que están descritas por una masa y un volumen. Estas características están representadas en la aproximación partícula, la cual discretiza las representaciones integrales continuas usando partículas. Para ello se va reemplazando la representación integral

de las funciones de campo y sus derivadas con sumas sobre los valores correspondientes de las partículas vecinas en un dominio local llamado soporte compacto. Esto significa que a cada partícula se le asigna una masa

$$m_b = \Delta V_b \rho_b, \quad (3.37)$$

donde ρ y ΔV_b , son la densidad y el volumen de la partícula b ($= 1, 2, \dots, N$) respectivamente y N es el número de partículas en el soporte compacto de la partícula a . Así la aproximación de partículas de una función en la partícula a puede escribirse como

$$\langle f(\mathbf{r}_a) \rangle = \int f(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}' \cong \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} f(\mathbf{r}_b) W_{ab}, \quad (3.38)$$

donde $\langle \rangle$ indican la aproximación de $f r_a$ y

$$W_{ab} = W(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, h). \quad (3.39)$$

También se hace la discretización de las derivadas de las funciones, es decir,

$$\langle \nabla \cdot f(\mathbf{r}_a) \rangle = \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} f(\mathbf{r}_b) \cdot \nabla_a W_{ab}, \quad (3.40)$$

donde ∇_a indica el gradiente respecto a las coordenadas de la partícula a . Hasta el momento tenemos la aproximación de las funciones en cada partícula. La aproximación de partículas se hace en cada paso de tiempo y por lo tanto el uso de las partículas depende de la distribución actual local de las partículas. Las aproximaciones de las partículas se llevan a cabo para todos los términos relacionados con las funciones de campo para producir un conjunto ecuaciones en derivadas ordinarias en forma discretizada con respecto al tiempo únicamente. Las ecuaciones en derivadas ordinarias se resuelven usando un algoritmo de integración para poder obtener el historial en el tiempo de todas las variables de campo en todas las partículas.

En base a las aproximaciones definidas en el método anterior, vamos a derivar las ecuaciones de SPH para nuestro sistema de ecuaciones hidrodinámicas. Introducimos la densidad de número denominada por $n(r)$ que se puede expresar en términos de

la masa por partícula y la densidad de masa, es decir, $n_a = D_a^*/m_a$. De acuerdo a esto podemos aproximar D_a^*

$$\langle D_a^* \rangle = D_a^* = \sum_b \frac{D_b}{n_b} W_{ab} = \sum_b m_b W_{ab}, \quad (3.41)$$

De la ecuación de continuidad (3.15) y usando la identidad

$$D^* \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (D^* \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla D^*, \quad (3.42)$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dD^*}{dt} &= -D^* d_i v^i \\ \Rightarrow -\frac{dD^*}{dt} &= \nabla \cdot (D^* \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla D^* \\ \Rightarrow -\frac{dD_a^*}{dt} &= \sum_b \left(\frac{D_b^*}{n_b} \mathbf{v}_b \cdot \nabla W_{ab} - \frac{D_b^*}{n_b} \mathbf{v}_a \cdot \nabla_a W_{ab} \right) \\ \Rightarrow \frac{dD_a^*}{dt} &= -\sum_b m_b (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a) \cdot \nabla_a W_{ab}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde $\mathbf{v} = \{v^i\}$ y $\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv d_i v^i$. Así, la ecuación (3.43) está en la forma de SPH lo cual permite que sea calculada para cada partícula a .

Ahora derivamos la forma SPH para la ecuación de momento relativista para lo que reescribimos el gradiente de la presión

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^*} \nabla [\sqrt{-g} (p+q)] &= \sqrt{-g} \left[\frac{1}{D^*} \nabla (p+q) - \left(\frac{p+q}{D^{*2}} \right) \nabla D^* + \left(\frac{p+q}{D^{*2}} \right) \nabla D^* \right] + \\ &+ \left(\frac{p+q}{D^*} \right) \nabla \sqrt{-g} = \\ &= \sqrt{-g} \left[\nabla \left(\frac{p+q}{D^*} \right) + \left(\frac{p+q}{D^{*2}} \right) \nabla D^* \right] + \left(\frac{p+q}{D^*} \right) \nabla \sqrt{-g}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

y de la ecuación (3.23) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{S}_a = & -\sqrt{-g_a} \sum_b m_b \left(\frac{p_a + q_{ab}}{D_a^{*2}} + \frac{p_b + q_{ba}}{D_b^{*2}} \right) \nabla_a W_{ab} - \\ & \frac{\sqrt{-g_a}}{D_a^*} \left[(p_a + q_a) \nabla_a (\ln \sqrt{-g})_a - \frac{1}{2} T_a^{\alpha\beta} \nabla_a (g_{\alpha\beta})_a \right], \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde $\mathbf{S}_a = \{S_i\}_a$ y q_{ab} tiene una expresión explícita dada después. Los gradientes de la métrica se pueden calcular analíticamente.

Ahora derivamos la forma SPH de la ecuación de energía relativista. Tomamos la ecuación (3.29) y reescribimos

$$\frac{1}{D^*} \nabla \cdot [\sqrt{-g}(p+q)\mathbf{v}] = \frac{\sqrt{-g}}{D^*} \nabla \cdot [(p+q)\mathbf{v}] + \left(\frac{p+q}{D^*} \right) \mathbf{v} \cdot \nabla \sqrt{-g}. \quad (3.46)$$

Desarrollamos el primer término de la derecha

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^*} \nabla \cdot [(p+q)\mathbf{v}] &= \frac{1}{D^*} \mathbf{v} \cdot \nabla (p+q) + \left(\frac{p+q}{D^*} \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{D^*} \mathbf{v} \cdot \nabla (p+q) + (p+q) \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{D^*} \right) + \left(\frac{p+q}{D^{*2}} \right) \mathbf{v} \cdot \nabla D^* + \left(\frac{p+q}{D^*} \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{p+q}{D^*} \right) + \frac{p+q}{D^{*2}} \mathbf{v} \cdot \nabla D^* + \frac{1}{2} \left(\frac{p+q}{D^*} \right) \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \left(\frac{p+q}{D^*} \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{v} \cdot \left[\nabla \left(\frac{p+q}{D^*} \right) + \frac{p+q}{D^{*2}} \nabla D^* \right] + \frac{1}{2} \left\{ \nabla \cdot \left(\frac{p+q}{D^*} \mathbf{v} \right) - \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{p+q}{D^*} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{p+q}{D^{*2}} [\nabla \cdot (D^* \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla D^*] \right\}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Sustituyendo (3.46) junto con (3.47) en la ecuación de energía relativista (3.29) con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{E} = & -\frac{\sqrt{-g}}{2} \left[\frac{p+q}{D^{*2}} \mathbf{v} \cdot \nabla D^* + \frac{p+q}{D^{*2}} \nabla \cdot (D^* \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{p+q}{D^*} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{p+q}{D^*} \mathbf{v} \right) \right] - \\ & - \frac{p+q}{D^*} \mathbf{v} \cdot \nabla \sqrt{-g} - \frac{\sqrt{-g}}{2} \frac{1}{D^*} T^{\alpha\beta} \partial_t g_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

que en forma SPH, es decir, el valor de la energía $\bar{E}$ para cada partícula a estará dado por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{E} = & - \frac{\sqrt{-g}}{2} \sum_b m_b \left(\frac{p_a + q_{ab}}{D_a^{*2}} + \frac{p_b + q_{ba}}{D_b^{*2}} \right) (\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b) \cdot \nabla_a W_{ab} - \\ & - \frac{\sqrt{-g_a}}{D_a^*} (p_a + q_a) v_a \cdot \nabla_a (\ln \sqrt{-g})_a - \frac{\sqrt{-g_a}}{2} D_a^* T_a^{\alpha\beta} (\partial_t g_{\alpha\beta})_a. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Por tanto la ecuación (3.49) no tiene derivadas respecto al tiempo de las variables hidrodinámicas del lado derecho, lo cual es la condición para poder evolucionarlas para cada paso de tiempo en el método SPH. La última ecuación que formulamos de acuerdo a SPH es la ecuación de estado la cual representaremos para cada partícula a como

$$p_a = (\Gamma - 1) \rho_a \epsilon_a. \quad (3.50)$$

Con esto completamos el sistema de ecuaciones que nos permitirá calcularlas dada cualquier métrica de fondo. Sin embargo, debemos tener en cuenta también las variables físicas, las cuales no evolucionamos mediante ecuaciones sino que, con las definiciones dadas por (3.16), (3.24) y (3.30), se obtienen para cada paso de tiempo, por el hecho de que las variables relativistas D^* , S_i y $\bar{E}$ se tienen en cada rebanada de tiempo.

Mediante estas ecuaciones, es posible hacer una simulación para un fluido que orbita alrededor de un agujero negro. Para ello establecemos condiciones iniciales sobre la distribución de polvo y las coordenadas en las que se trabaja en el código. En el siguiente capítulo se asignan las condiciones de la velocidad inicial para cada una de las partículas que se usan en el código SPH y damos la métrica en coordenadas

de Kerr-Schild que es la que hemos usado en este trabajo.

Hasta el momento hemos obtenido las herramientas para la evolución de un fluido, lo cual nos permitirá obtener los valores de las variables del fluido en cada momento. El método SPH nos permitirá obtener los valores del tensor de energía momento del un fluido para poder obtener las señales gravitacionales mediante la fórmula cuadrupolar. En el siguiente capítulo mostramos cómo ha sido usado y los resultados obtenidos.

Capítulo 4

Extracción de ondas gravitacionales en un fluido de prueba

Existen un gran número de fuentes de las que se espera la emisión de ondas gravitacionales. La destrucción por fuerzas de marea de una estrella debido a un agujero negro masivo es una fuente prometedora de ondas gravitacionales [6][18]. En esta tesis nos hemos centrado en la aproximación de las ondas gravitacionales a partir de una fuente que ha sido simulada numéricamente [7]. Esta fuente se trata de un fluido de prueba (polvo) puesto en las cercanías de un agujero negro de Schwarzschild. La evolución del fluido en el tiempo se ha hecho mediante un código numérico basado en el método de hidrodinámica de partículas suavizadas. Con este obtenemos el estado del fluido de prueba para cada tiempo. Usamos distintas condiciones iniciales para observar cómo repercutía en las señales de las ondas gravitacionales las cuales hemos aproximado mediante la fórmula cuadrupolar (2.93) haciendo una integración Monte Carlo. En este capítulo mostramos los resultados obtenidos para las ondas gravitacionales y cómo dependen de las condiciones de la fuente.

4.1. Condiciones iniciales SPH

4.1.1. Trayectorias alrededor de un agujero negro de Schwarzschild

A través de las ecuaciones de Euler-Lagrange, es posible encontrar la ecuación de la trayectoria de una partícula en un espacio-tiempo curvo. En el código de SPH, es necesario establecer condiciones iniciales con las que sometemos a las partículas a ciertas trayectorias a seguir. En nuestro caso, queremos analizar las ondas gravitacionales que emite una distribución de polvo que orbita en una trayectoria aproximadamente circular alrededor de un agujero negro de Schwarzschild.

Un agujero negro con simetría esférica estático, es decir que no cambia con el tiempo, puede ser descrito por la métrica de Schwarzschild la cual está determinada por un parámetro M que es la masa del objeto, en este caso, del agujero negro [4]. En este espacio-tiempo podemos escribir un elemento de línea como

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.1)$$

que está descrita en coordenadas de Schwarzschild y es independiente del tiempo, dadas las características de la métrica.

Se define el lagrangiano de las geodésicas tipo tiempo para partículas a partir de una métrica $g_{\mu\nu}$ como

$$L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -1, \quad (4.2)$$

donde x^μ es el sistema de coordenadas en el cual está escrita la métrica $g_{\mu\nu}(x^\mu)$. Dada la simetría esférica del espacio-tiempo, el movimiento está confinado a un plano. Escogemos el plano ecuatorial donde θ es una constante, o bien, $\theta = \pi/2$ para la órbita. Calculamos entonces el lagrangiano correspondiente a la métrica de Schwarzschild (4.1) con lo que obtenemos

$$L = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = -1, \quad (4.3)$$

donde

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\tau}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\tau}, \quad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\tau}, \quad (4.4)$$

y $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$. A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange podemos obtener la ecuación de movimiento para una partícula alrededor del espacio-tiempo de Schwarzschild. Las ecuaciones de Euler-Lagrange respecto a las variables ϕ y t son

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} - \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (4.6)$$

De la primera ecuación de (4.5) obtenemos que

$$\frac{d}{d\tau} (2r^2 \dot{\phi}) = 0, \quad (4.7)$$

lo que implica que

$$r^2 \dot{\phi} = cte = L_\phi, \quad (4.8)$$

donde L_ϕ es llamado momento angular, que en el sistema es una cantidad conservada, dado que el movimiento está restringido sobre el plano, en este caso el plano ecuatorial; y por tanto

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L_\phi}{r^2}. \quad (4.9)$$

De la segunda ecuación de (4.5) obtenemos que

$$\frac{d}{d\tau} \left(-2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} \right) = 0, \quad (4.10)$$

lo que implica que el término dentro de la derivada es una constantes, es decir,

$$\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} = cte = E, \quad (4.11)$$

donde E es la energía del sistema la cual, dadas las condiciones de sistema, es una cantidad conservada; podemos despejar $\dot{t}$ en términos de la energía

$$\dot{t} = E \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1}. \quad (4.12)$$

Las cantidades conservadas E y L serán de gran utilidad para entender las órbitas de las partículas alrededor de la geometría de Schwarzschild. Sustituyendo (4.9) y (4.12) en (4.3), obtenemos una ecuación para el lagrangiano en términos de las cantidades que son constantes del sistema, L_ϕ y E , de manera que

$$-E^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + \frac{L_\phi^2}{r^2} = -1. \quad (4.13)$$

Entonces, del lagrangiano (4.13) podemos obtener una ecuación de movimiento que solo depende de la coordenada r dada por

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{L_\phi^2}{r^2} \right). \quad (4.14)$$

La ecuación (4.14) nos permite hacer un análisis de los tipos de órbitas que puede seguir una partícula sumergida en un campo gravitacional descrito por la métrica de Schwarzschild. Para ello definimos el potencial efectivo como

$$V^2(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{L_\phi^2}{r^2} \right), \quad (4.15)$$

y la ecuación (4.14) se escribe como

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = E^2 - V^2(r). \quad (4.16)$$

Dado que el lado izquierdo de (4.16) es positiva ó cero, esto implica entonces que del lado derecho, la energía E de la trayectoria debe ser mayor al potencial efectivo V . Por tanto, para una energía E , el rango de los radios de la órbita están restringidos para los casos en que el potencial, V , es menor que la energía, E .

En particular, es posible tener órbitas circulares, es decir, cuando $r_c = \text{constante}$ y esto va suceder solamente cuando haya un mínimo o un máximo de $V^2(r)$. El máximo describe una órbita circular no estable, mientras que el mínimo es una órbita circular estable; por tanto, $\frac{dV^2}{dr} = 0$. Diferenciando el potencial

$$\frac{dV^2(r)}{dr} = \frac{d}{dr} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{L_\phi^2}{r^2} \right) \right] = 0; \quad (4.17)$$

de donde se obtiene que una órbita circular va tener radio r_c dado por

$$r_c = \frac{L_\phi^2}{2M} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{L_\phi^2}} \right). \quad (4.18)$$

De (4.18), hay dos radios que se pueden obtener. Los dos radios son iguales cuando $L_\phi^2 = 12M^2$, y no existen cuando $L_\phi^2 < 12M^2$. Para $L_\phi^2 = 12M^2$ existe un mínimo [10], por lo que una partícula en una órbita circular estable tendrá un radio mínimo dado por

$$r_c = 6M. \quad (4.19)$$

De la ecuación (4.18) obtenemos una expresión también para el momento angular

$$L_\phi^2 = \frac{Mr}{1 - \frac{3M}{r}}. \quad (4.20)$$

De la ecuación (4.16) obtenemos que para una órbita circular $E^2 = V^2$, por lo tanto la energía para este tipo de órbitas es

$$E^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{1 + L_\phi^2}{r^2} \right) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^2 / \left(1 - \frac{3M}{r} \right). \quad (4.21)$$

Se puede obtener entonces, en base a las constantes del movimiento, la velocidad angular de una partícula en una espacio-tiempo de Schwarzschild como

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{L_\phi}{r^2} \frac{\left(1 - \frac{2M}{r} \right)}{E}, \quad (4.22)$$

con lo que la partícula tendrá una velocidad angular dada por

$$\frac{d\phi}{dt} = \left(\frac{M}{r^3} \right)^{1/2}, \quad (4.23)$$

que no está dada en el tiempo propio de la partícula, sino en el tiempo coordenado. Esta condición sobre la velocidad inicial de las partículas que se distribuyen en el

código y la evolución en el código SPH, nos permite obtener órbitas circulares de las cuales se analizan las ondas gravitacionales emitidas en esa configuración. Dado que en el código se tiene el agujero negro descrito en coordenadas penetrables de Kerr-Schild, es decir, donde un elemento de línea se escribe como

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{4M}{r}dt dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)dr^2 + r^2d\phi^2, \quad (4.24)$$

donde hemos tomado también que $\theta = \pi/2$, es decir, para movimientos confinados en el plano ecuatorial; podemos obtener el lagrangiano respecto a la métrica (4.24)

$$L = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \frac{4M}{r}\dot{t}\dot{r} = -1. \quad (4.25)$$

De las ecuaciones de movimiento obtenemos que

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{L_\phi}{r^2} \\ \dot{t} &= \left(-E + \frac{2M}{r}\dot{r}\right) / \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \end{aligned}$$

lo cual, sustituyéndolo en el lagrangiano (4.25) obtenemos la ecuación de movimiento

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 + \frac{L_\phi^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (4.26)$$

La ecuación (4.26) describe el movimiento de una partícula en la métrica de Schwarzschild en coordenada penetrables, o bien, en coordenadas de Kerr-Schild y comparando con (4.14), no hay diferencia, por lo que el análisis para las órbitas, es el mismo que se hace en coordenadas de Schwarzschild por lo que la velocidad angular inicial con la que se lanza una partícula en el código SPH para aproximar trayectorias circulares será igual a la que muestra la ecuación (4.23).

4.1.2. Parámetros

La simulación numérica de la fuente se ha hecho usando un código de SPH en tres dimensiones, elaborado por un estudiante de doctorado [15][16], en donde la hidrodinámica es calculada en un agujero negro de Schwarzschild escrito en coordenadas penetrables de Kerr-Schild dadas por (4.24), las cuales permiten penetrar el horizonte de eventos y son adecuadas para el estudio de estrellas que orbitan cerca de todo el horizonte de eventos o incluso caen en él. El código tiene una longitud de suavizado variable, y la integración en el tiempo se hace mediante el integrador Runge-Kutta de cuarto orden [19], con pasos de tiempo de 10^{-2} . Suponemos, como primera aproximación, que la curvatura del polvo es insignificante respecto a la curvatura del agujero negro, por lo que hemos despreciado la curvatura del fluido de prueba.

Dado que es polvo, hacemos que la presión sea nula, es decir, la constante adiabática $\Gamma = 0$ y la energía interna $\epsilon = 0$. Inicialmente se hace una distribución de partículas alrededor de una partícula de prueba ubicada a cierta distancia del centro del agujero negro, el cual está localizado en el origen de nuestro sistema de referencia. La distribución de n partículas se hace sobre una esfera de radio R_* y de masa M_* . El perfil de densidad inicial está dado por

$$\rho_a = \frac{M_*}{2\pi R_*^2} \frac{1}{r_a}, \quad (4.27)$$

donde r_a está medida desde el centro de la esfera. Se han elegido varias posiciones iniciales distintas, dentro del radio de destrucción por fuerzas de marea. El radio de marea, R_t , o límite de Roche es la distancia al agujero negro en donde las fuerzas de marea, debido al agujero negro, comienzan a destruir la estrella. Este está definido aproximadamente como

$$R_t \sim R_* \left(\frac{M_h}{M_*} \right), \quad (4.28)$$

donde M_h es la masa del agujero negro. Dado que las posiciones iniciales que hemos elegido están dentro de este radio de marea, se espera una pronta destrucción de la distribución de polvo. La velocidad inicial de las partículas esta dada por (4.23), por

lo que el fluido se deberá aproximar al agujero negro supermasivo en trayectorias circulares. Dicha velocidad se toma menor en las primeras simulaciones, para poder aproximar el agujero negro más rápidamente.

Para las simulaciones que hemos hecho en esta tesis, hemos tomado un agujero negro supermasivo, es decir, donde $M_h = 10^6 M_\odot$. El fluido de prueba lo hemos supuesto con las propiedades de una estrella tipo Sol, es decir, donde $R_* = R_\odot$ y $M_* = M_\odot$ la cual está medida desde el sistema de referencia fijo y la simulación se hace con $n = 1000$ partículas. Los valores de $M_\odot$ y $R_\odot$ son

$$\begin{aligned} M_\odot &= 1.9891 \times 10^{30} \text{ Kg} \\ R_\odot &= 6.96 \times 10^8 \text{ m}. \end{aligned}$$

Las simulaciones las desarrollamos en unidades donde $G = c = 1$, donde los valores para c y G son

$$\begin{aligned} c &= 299792458 \text{ m/s} \\ G &= 6.671281 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{Kg}^{-1} \text{s}^{-2}. \end{aligned}$$

Así mismo todas las condiciones iniciales las hemos reescalado en términos de la M_h . Los resultados finales se mostrarán al final en unidades reales. En la siguiente sección se muestran los resultados de las simulaciones para distribuciones de polvo que se evolucionan teniendo posiciones iniciales distintas.

4.2. Simulaciones con SPH

Con los parámetros mostrados en la sección anterior, hemos hecho distintas simulaciones cambiando las posiciones iniciales sobre el eje x . En unidades donde $G = c = 1$ y en escala de la masa del agujero negro hemos obtenido las siguientes simulaciones. En estas unidades $R_t \sim 80$, por tanto, estamos dentro del radio de destrucción por lo que esperamos que desde el comienzo de la evolución se vea una

pronta destrucción. Las distancias que hemos tomado son medidas respecto al centro del agujero negro el cual está ubicado en el centro de nuestro sistema de referencia.

Hemos tomado tres distintas distancias iniciales: $x_0 = 5, 10, 15$. Las simulaciones hechas en $x_0 = 5, 10$ se han hecho con un 90 por ciento de la velocidad dada por (4.23), mientras que la distribución de posición inicial en $x_0 = 15$ tiene un 100 por ciento de dicha velocidad. Las figuras (4.1), (4.2) y (4.3) muestran *snapshots* de la evolución con el código SPH visto en el plano XY a distintos tiempos. Debido a que reescalamos en términos de la masa del agujero negro, el horizonte de eventos se encuentra en $r = 2 M_h = 2$, dado que en esta escala $M_h = 1$. Debido a la cercanía al agujero negro, el polvo rápidamente se deforma y se acerca al agujero negro alargando en cada paso de tiempo las distancias entre las partículas.

Para poder observar las trayectorias que siguen las partículas hemos hecho un estudio sobre el centro de masa de la distribución de polvo. El centro de masa no está definido en Relatividad [12], sin embargo, estadísticamente se refiere a la posición media de una distribución de partículas en el espacio tiempo en las coordenadas pseudo cartesianas. Inspirados en esa definición, hemos calculado el centro de masa para hacer un mejor análisis [7]. Las trayectorias del centro de masa en unidades físicas para cada una de las simulaciones se ve en las figuras (4.4), (4.5) y (4.6). El horizonte de eventos está localizado en $r = 3 \times 10^9 m$. Observamos que (4.4) describe una distribución de polvo ubicada inicialmente en $x_0 = 7.4 \times 10^9 m$ lo que significa que la distancia del horizonte de eventos del agujero negro al centro de la distribución esférica de polvo es de aproximadamente $4.4 \times 10^9 m$. En esta simulación vemos que el centro de masa no alcanza a dar una vuelta completa, y cae atravesando el horizonte de eventos hasta llegar al origen. En la figura (4.5) se muestra una distribución de polvo con posición inicial en $15 \times 10^9 m$ lo que implica una distancia aproximada de $12 \times 10^9 m$ del horizonte de eventos. La trayectoria que sigue el centro de masa es más larga, sin embargo, también penetra el agujero negro hasta llegar al origen. Estas dos simulaciones caen al agujero debido a que hemos tomado velocidades menores a (4.23). La trayectoria del centro de masa de la distribución con posición inicial en $2.2 \times 10^{10} m$ sí se aproxima más a una circular, esto es debido a la velocidad que le hemos dado a las partículas. Estas alcanzan a dar varias vueltas alrededor del

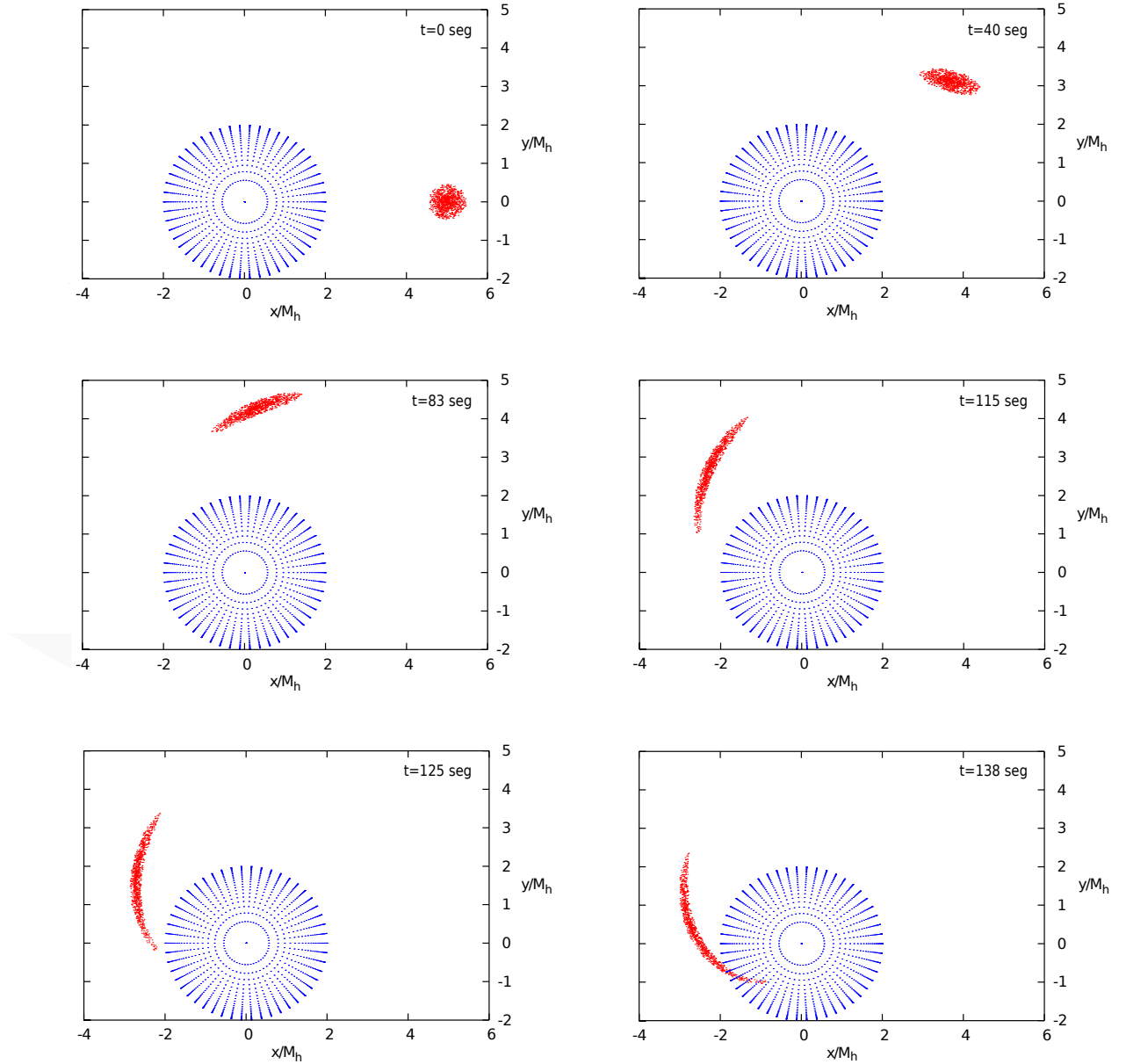


Figura 4.1: Evolución de una distribución de polvo con posición inicial en $x_0 = 5$ medida desde el centro del agujero negro, dado en unidades geometrizadas. El círculo punteado representa el horizonte de eventos que está en $r = 2 M_h$. La distribución de polvo gira alrededor del agujero negro y es destruida y capturada en muy poco tiempo.

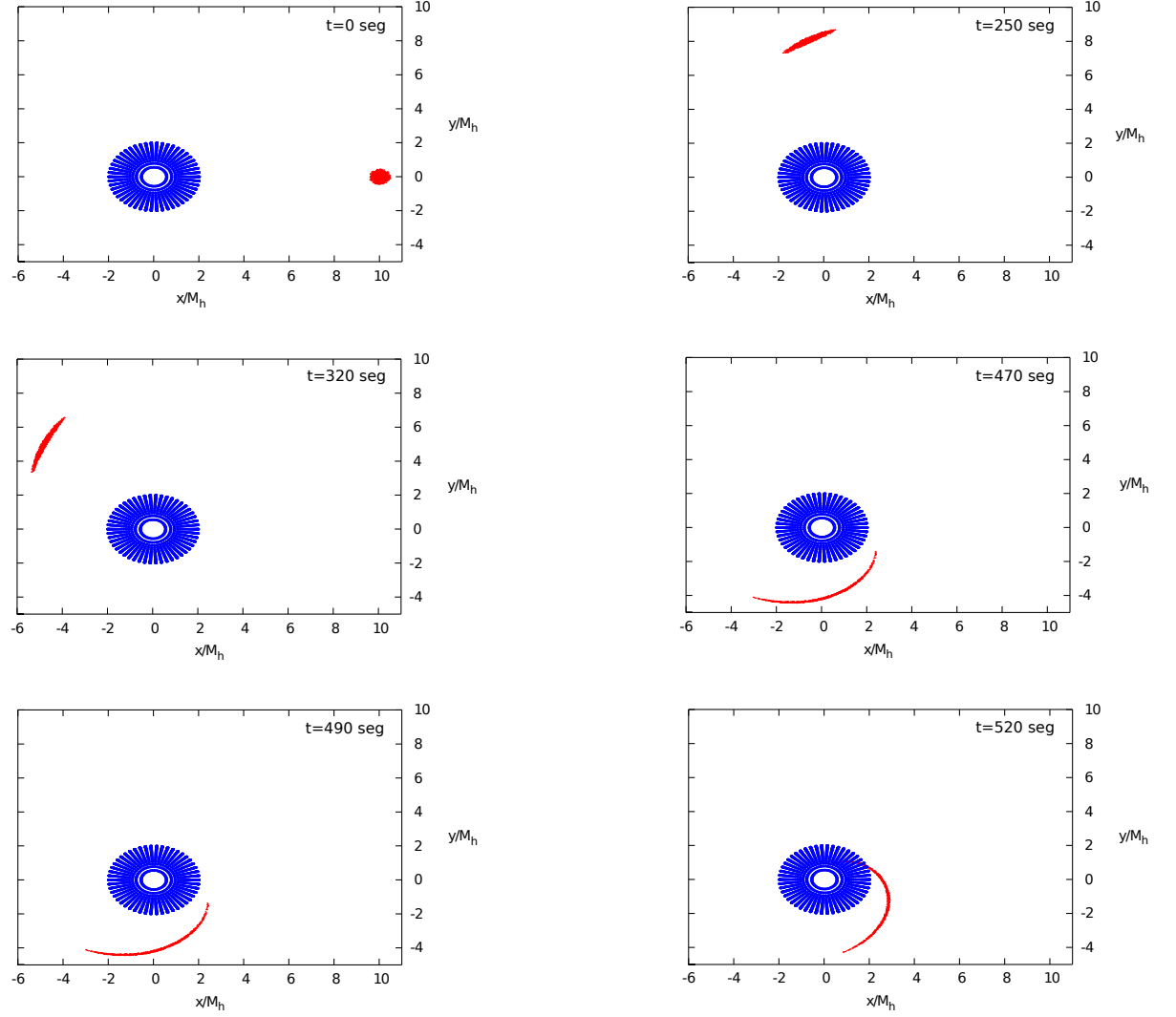


Figura 4.2: Evolución de una distribución de polvo con posición inicial en $x_0 = 10$ medida desde el centro del agujero negro, dado en unidades geometrizadas. El círculo punteado representa el horizonte de eventos que está en $r = 2 M_h$. La distribución de polvo gira alrededor del agujero negro y es destruida y capturada por el mismo.

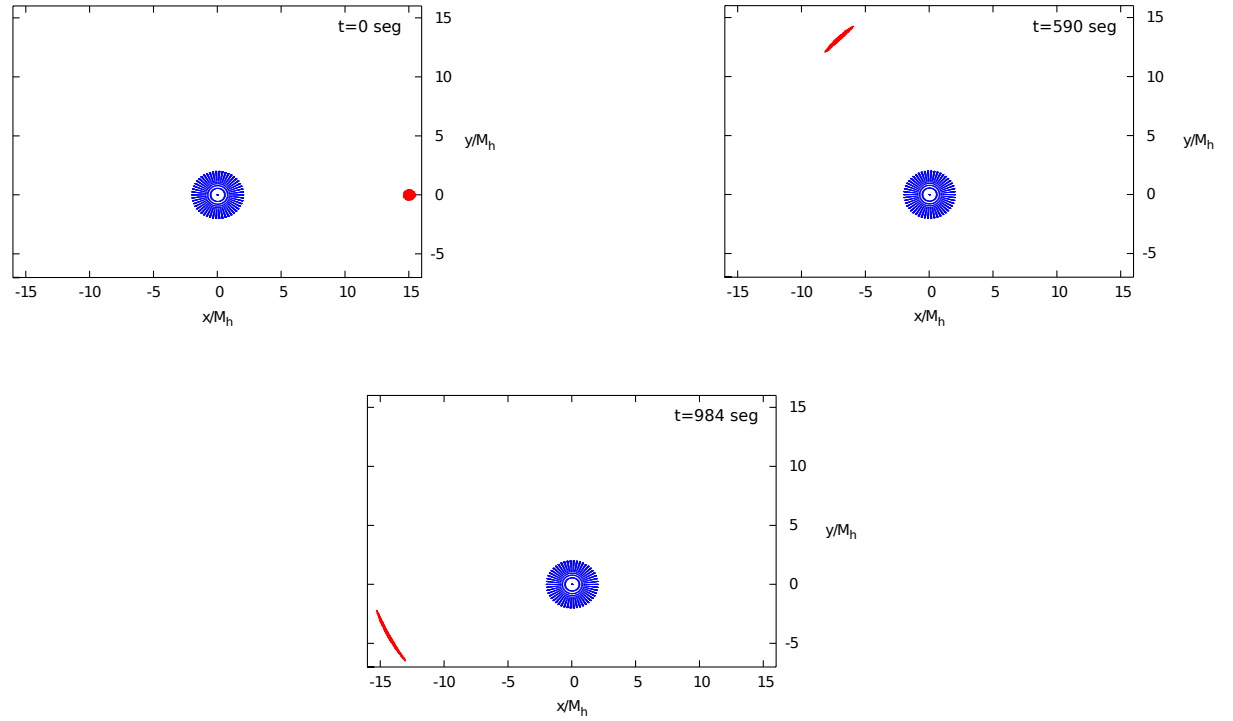


Figura 4.3: Evolución de una distribución de polvo con posición inicial en $x_0 = 15$ medida desde el centro del agujero negro, dado en unidades geometrizadas. El círculo punteado representa el horizonte de eventos que está en $r = 2 M_h$. La distribución de polvo gira alrededor del agujero negro y conforme el tiempo avanza es destruida por el agujero negro sin ser penetrado por el mismo

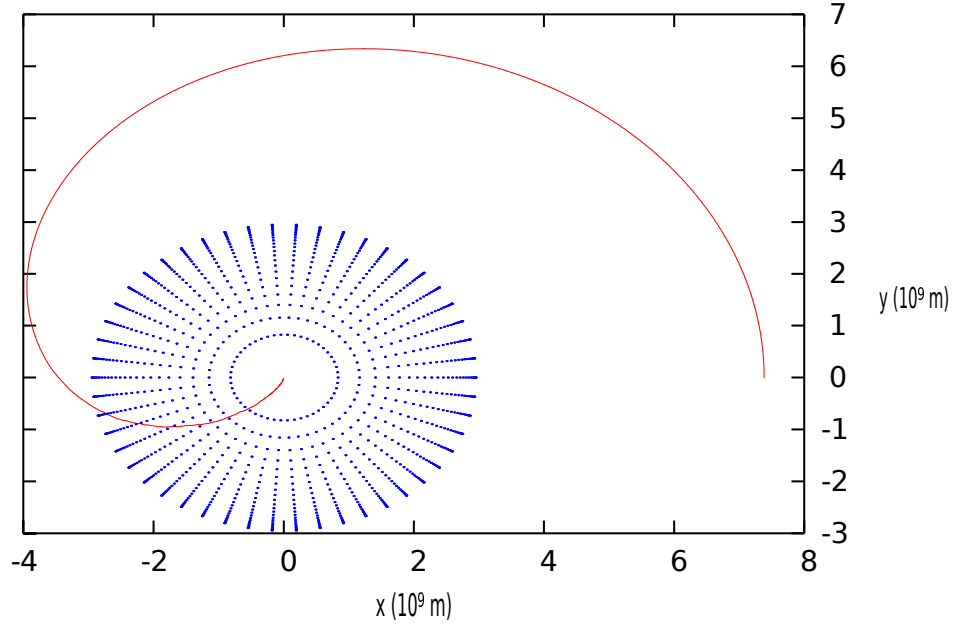


Figura 4.4: Movimiento del centro de masa de la distribución con posición inicial en $7.4 \times 10^9 \text{ m}$ donde el horizonte de eventos está aproximadamente en $r = 3 \times 10^9 \text{ m}$.

agujero negro; por otro lado, la evolución del código no fue completa por lo que no alcanza a tocar el horizonte de eventos.

El radio del centro de masa al origen del sistema de referencia se muestra en las figuras (4.7) y (4.8). La posición inicial se ubica cuando $t = 0 \text{ seg}$ y conforme evoluciona, el centro de masa se acerca más al horizonte de eventos. En (4.7) se puede ver que el centro de masa penetra en horizonte en $t = 155 \text{ seg}$, mientras que en (4.8) lo hace en $t = 500 \text{ seg}$.

A partir del centro de masa hemos calculado la velocidad angular promedio de la fuente que evoluciona en el tiempo. En la figura (4.9) mostramos la velocidad angular para la primera simulación. Mostramos que debido a que $\omega = d\phi/dt$, donde dt se refiere al tiempo coordinado, las frecuencias angulares características de la fuente están en valores aproximados a $\omega \sim 0.1 \text{ rad/seg}$ y aumenta en el tiempo. Esto implica que la velocidad angular del centro de masa aumenta conforme se acerca al agujero negro. En la segunda simulación la velocidad angular se muestra en la figura (4.10).

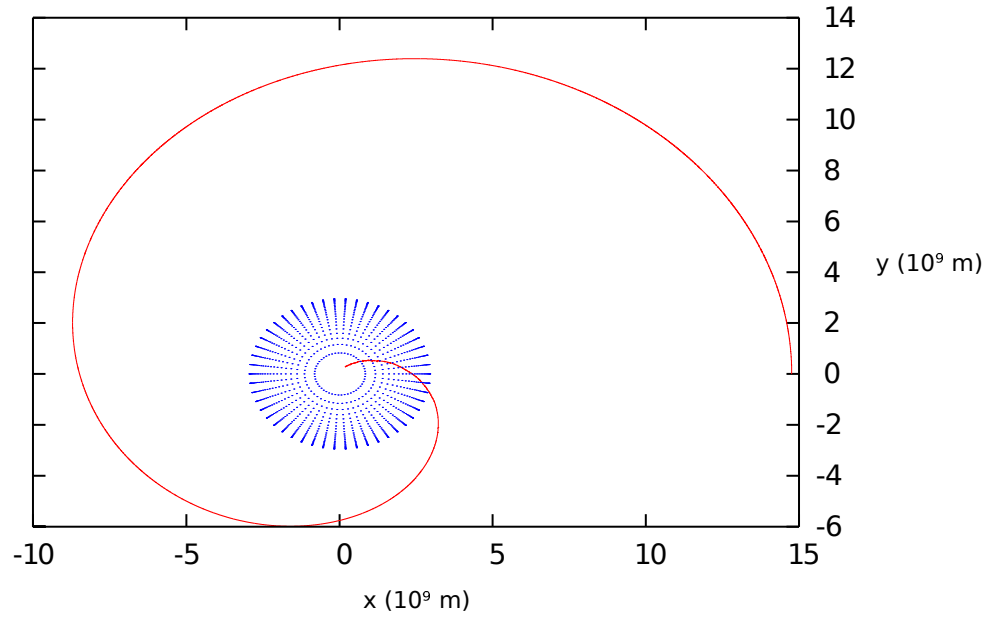


Figura 4.5: Movimiento del centro de masa de la distribución con posición inicial en $15 \times 10^9 m$ donde el horizonte de eventos está aproximadamente en $r = 3 \times 10^9 m$.

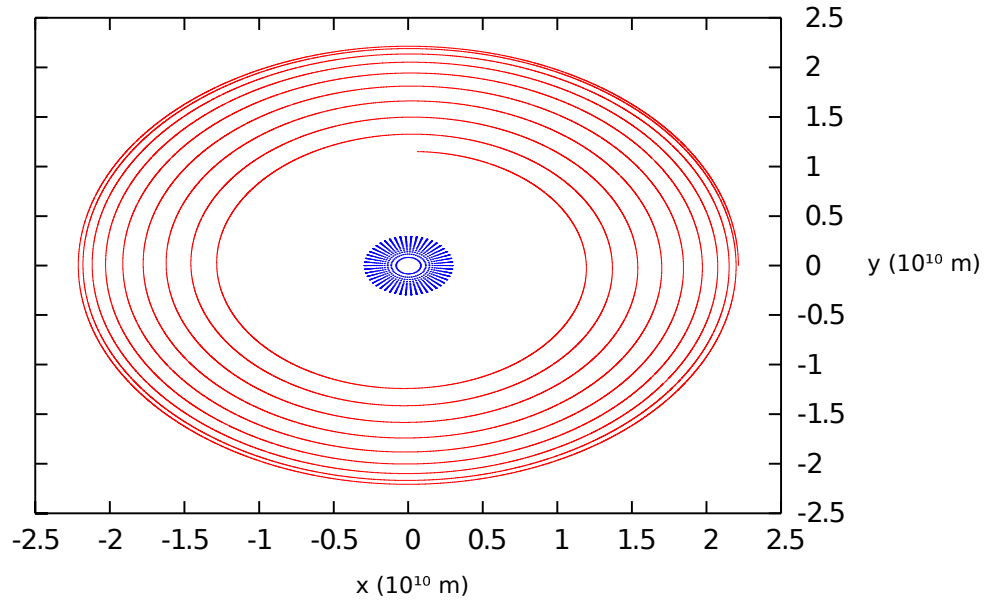


Figura 4.6: Movimiento del centro de masa de la distribución con posición inicial en $2.2 \times 10^{10} m$ donde el horizonte de eventos está aproximadamente en $r = 3 \times 10^9 m$.

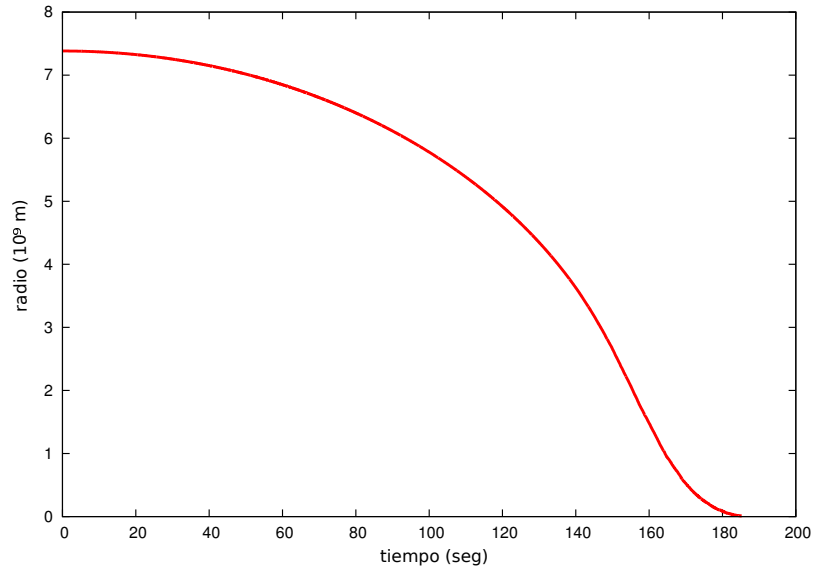


Figura 4.7: Movimiento del centro de masa de la distribución con posición inicial en $7.4 \times 10^9 m$ donde el horizonte de eventos está aproximadamente en $r = 3 \times 10^9 m$. Se muestra que el centro de masa atraviesa el horizonte de eventos en $t = 155 seg$.

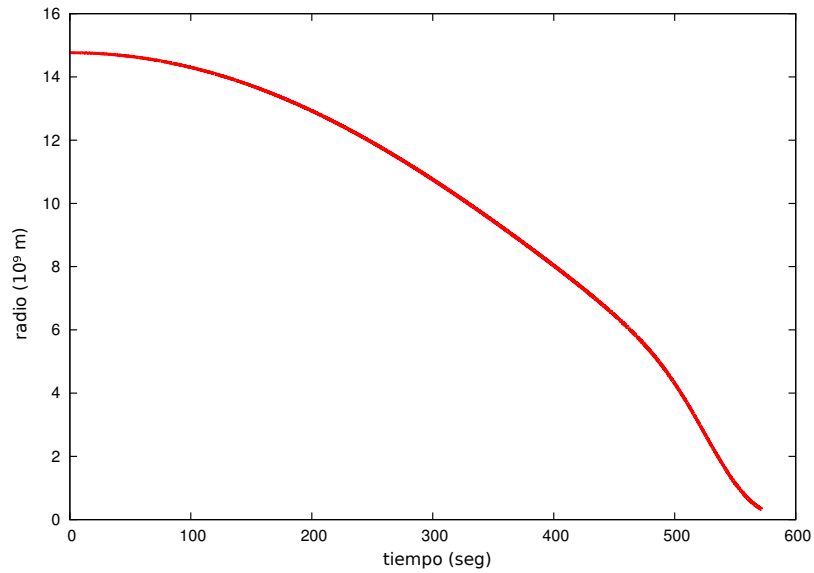


Figura 4.8: Movimiento del centro de masa de la distribución con posición inicial en $15 \times 10^9 m$ donde el horizonte de eventos está aproximadamente en $r = 3 \times 10^9 m$. Se muestra que el centro de masa atraviesa el horizonte de eventos en $t = 500 seg$.

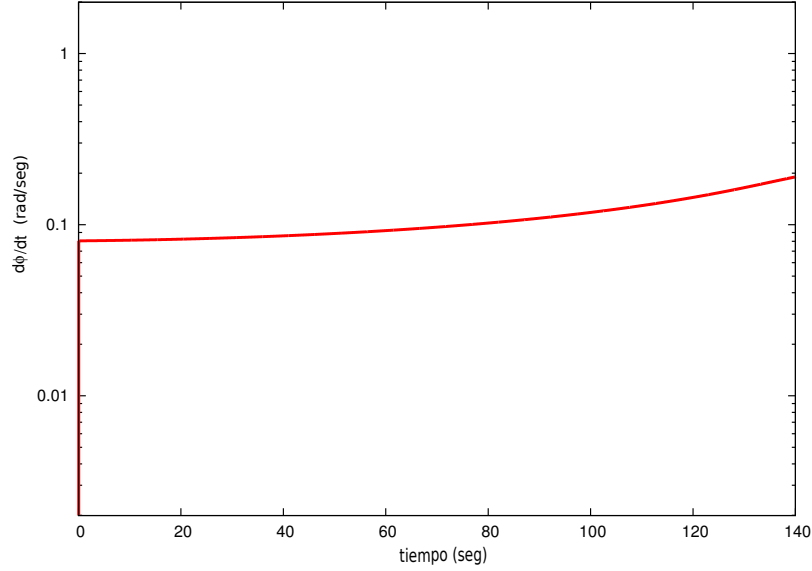


Figura 4.9: Velocidad angular en rad/seg para cada tiempo en la simulación con posición inicial $x_0 = 7.4 \times 10^9 m$. El eje de la velocidad angular se muestra en escala logarítmica.

La velocidad angular de la fuente está dentro del rango de $0.1 - 10 rad/seg$. De la misma manera que la simulación anterior, la velocidad angular aumenta conforme el centro de masa se acerca al agujero negro. En la tercera simulación, la velocidad angular se mantiene en el tiempo.

La evolución de la densidad ha sido graficada. Dado que la densidad también evoluciona en el tiempo, hemos obtenido los valores de la densidad para el conjunto de 1000 partículas a distintos tiempos como se muestran en las figuras (4.12) y (4.13) para los casos $x_0 = 7.4 \times 10^9 m$ y $x_0 = 2.2 \times 10^{10} m$ respectivamente. En la figura (4.12) los valores de las densidades de las partículas disminuye rápidamente mientras que conforme evoluciona en el tiempo, la distancia entre las partículas aumenta. Por tanto, cuando $t = 155 seg$, la distribución de polvo ya está destruida. En seguida comienza a entrar en el agujero negro. La figura (4.13) muestra que la densidad disminuye aunque la diferencia no es considerable. La distancia entre las partículas también crece, sin embargo lo hace más lento que en el primer caso. Por tanto, en los tiempos $t = 0, 590$ y $984 seg$ la distribución se sigue manteniendo aproximadamente como la distribución inicial.

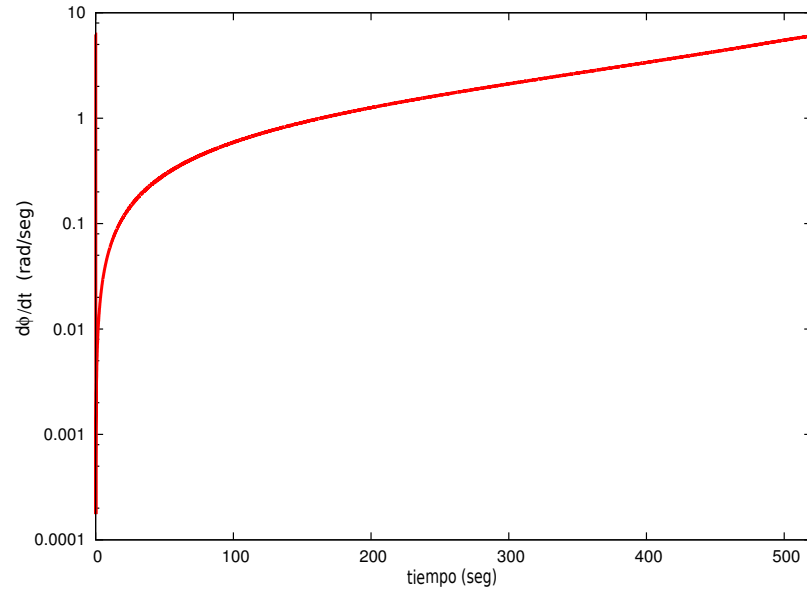


Figura 4.10: Velocidad angular en *rad/seg* para cada tiempo en la simulación con posición inicial $x_0 = 15 \times 10^9$ m. El eje de la velocidad angular se muestra en escala logarítmica.

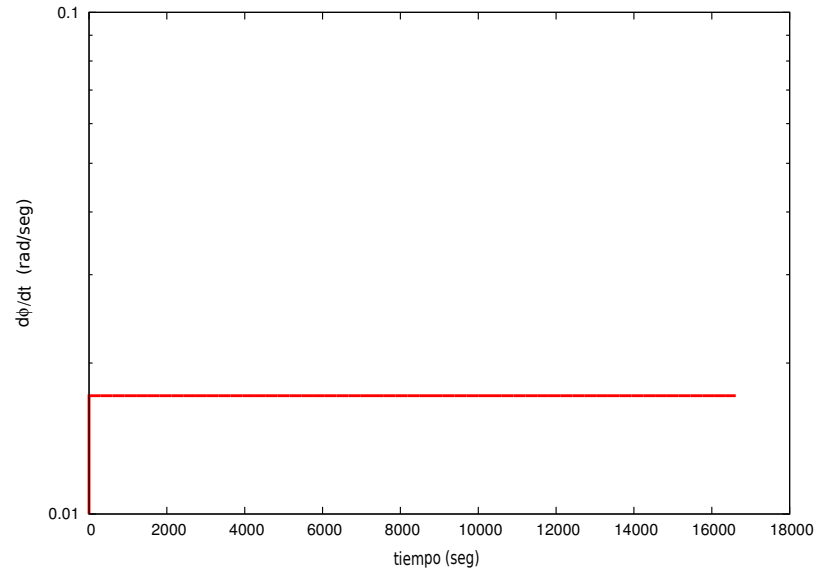


Figura 4.11: Velocidad angular en *rad/seg* para cada tiempo en la simulación con posición inicial $x_0 = 2.2 \times 10^{10}$ m. El eje de la velocidad angular se muestra en escala logarítmica.

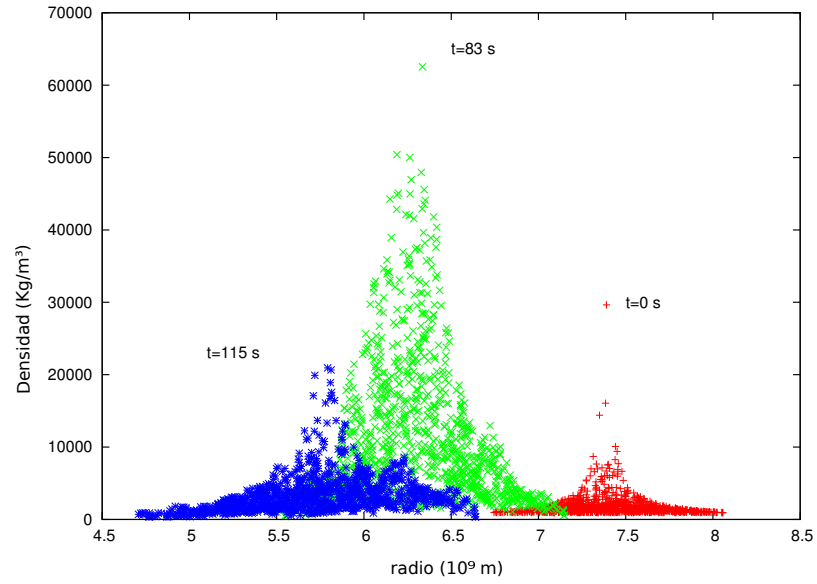


Figura 4.12: Densidad de las 1000 partículas del fluido de prueba con posición inicial en $x_0 = 7.4 \times 10^9 m$.

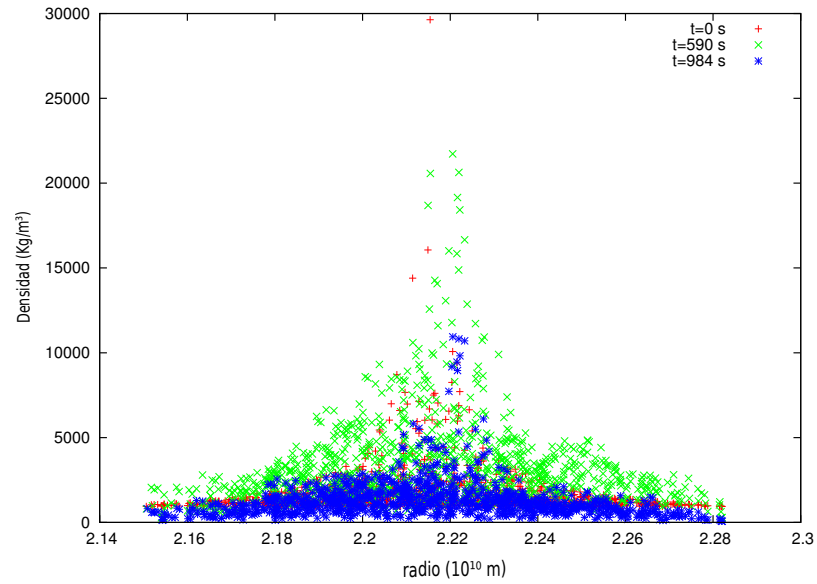


Figura 4.13: Densidad de las partículas del fluido de prueba a distintos tiempos con posición inicial en $x_0 = 2.2 \times 10^{10} m$.

A partir de las simulaciones de SPH, hemos hecho una aproximación de las ondas gravitacionales emitidas por los escenarios descritos en esta sección. En la siguiente sección mostramos los resultados que obtuvimos para las señales de ondas gravitacionales emitidas por fuentes descritas por un fluido de prueba alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. Para ello es necesario aproximar, mediante algún método numérico, la integral de la ecuación (2.93) para poder hacer una aproximación de cómo serían las señales que estamos obteniendo. En la siguiente sección mostramos el método de integración Monte Carlo con el que hemos aproximado la integral que nos dará como resultado las amplitudes de las polarizaciones de las señales emitidas por la fuente que estamos simulando. En seguida se muestran los resultados obtenidos.

4.3. Señales de Ondas Gravitacionales

Una estrella dentro del radio de marea puede ser destruida rápidamente por las fuerzas de marea [7]. En esta tesis hemos trabajado con una primera aproximación a una estrella tipo solar. Debido a esta evolución, es posible recibir señales de ondas gravitacionales caracterizadas por una amplitud h y una frecuencia f . Se esperaría que el proceso de destrucción debido a las fuerzas de marea afecte la amplitud y la forma de las ondas gravitacionales. Las simulaciones numéricas hechas mediante el método SPH, han permitido obtener los datos del tensor de energía-momento de la fuente y aproximar, mediante la fórmula cuadrupolar, las emisiones de ondas gravitacionales de nuestra fuente. En esta sección presentamos los resultados obtenidos para las ondas gravitacionales a partir de las fuentes que se muestran en la sección anterior. Primero presentamos el método numérico por medio del cual hemos aproximado la fórmula cuadrupolar y en seguida mostramos las gráficas para cada una de las simulaciones.

4.3.1. Integración Monte Carlo

En análisis numérico, la integración numérica constituye una gama amplia de algoritmos para calcular el valor numérico de una integral definida. Entre estos algoritmos se encuentra el método de Monte Carlo el cual es una técnica simple y poderosa de aproximar integrales en base a la utilización de números pseudoaleatorios [1]. La mayoría de los algoritmos deterministas funcionan bien con un pequeño número de dimensiones y en el caso de la integración Monte Carlo, es más usado en integrales múltiples. La integración Monte Carlo elige de manera aleatoria los puntos en los que se evaluará la función, por tanto, bastará con seleccionar aleatoriamente un cierto número de puntos y tener algún promedio sobre los valores de la función en estos puntos.

Supongamos que queremos calcular el valor, I , que se obtiene de la integral de una función f sobre cierto dominio D :

$$I = \int_D f(\vec{x}) d\vec{x},$$

donde hemos usado notación vectorial para indicar que f no necesariamente es unidimensional, sobre todo por el hecho de que la integración Monte Carlo es más usada en integrales de más de una dimensión. Asumimos que tenemos una función de densidad de probabilidad ρ definida sobre el dominio D , por lo que

$$I = \int_D \frac{f(\vec{x})}{\rho(\vec{x})} \rho(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Entonces, el valor esperado E de $\frac{f(\vec{x})}{\rho(\vec{x})}$ será igual al valor de la integral I , es decir,

$$E \left[\frac{f(\vec{x})}{\rho(\vec{x})} \right] = I,$$

respecto a una variable aleatoria distribuida de acuerdo a $\rho(\vec{x})$. Esto es válido para cualquier $\rho(\vec{x}) \neq 0$ cuando $f(\vec{x}) \neq 0$. Podemos entonces estimar el valor esperado generando un número de muestras aleatorias de acuerdo a ρ , calculando f/ρ para cada muestra y encontrando el valor promedio de dichos valores. Este proceso de promediar el valor de $\frac{f(\vec{x})}{\rho(\vec{x})}$ de múltiples muestras aleatorias para aproximar el valor

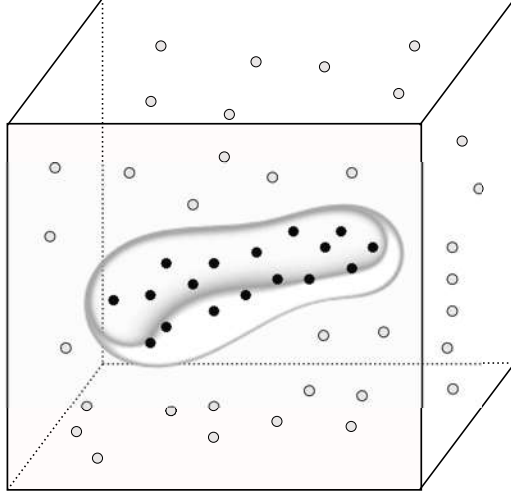


Figura 4.14: Dominio V encerrado por una caja de volumen V_0 donde se tienen distribuidas N partículas de manera aleatoria. Solo los puntos dentro del volumen de integración contribuyen en la ecuación (4.31)

de la integral I es llamado Integración Monte Carlo.

Particularmente, suponemos que queremos integrar una función $f(x, y, z)$ sobre un volumen interior, V , de una superficie cerrada que tiene alguna forma específica, por lo que el valor I se define como

$$I = \int_V f(x, y, z) dV. \quad (4.29)$$

Esta integral de volumen se puede reescribir como una integral triple

$$I = \int \int \int f(x, y, z) dx dy dz. \quad (4.30)$$

Los límites de integración de (4.30) están determinados por la forma específica de la región V . Muchas de las veces se tienen formas para las que que, analíticamente, no se pueden establecer los límites en las tres dimensiones. Este problema no se presenta cuando se hace uso del método de integración de Monte Carlo para la aproximación de la integral (4.29); así obtenemos que

$$I \approx \sum_{j=1}^N f(x_j, y_j, z_j) H(x_j, y_j, z_j) \Delta V. \quad (4.31)$$

Para calcular (4.31) se construye una caja de tres dimensiones que tendrá volumen V_0 y esta encierra el volumen de integración V como se muestra en la figura (4.14). En seguida se distribuyen N puntos aleatorios localizados dentro de la caja y se calcula $f(x_j, y_j, z_j)$ para cada punto. La función $H(x, y, z)$ se define como 1 si (x_j, y_j, z_j) está dentro del volumen V y cero en otro caso. El tamaño del elemento de volumen ΔV está dado por $\Delta V = V_0/N$.

Como cualquier método numérico, el método de Monte Carlo nos proporciona un resultado aproximado. El método de Monte Carlo, converge al resultado exacto conforme el número de puntos, N , incrementa. El error de este método, se aproxima a cero como $N^{-1/2}$, es decir, entre más puntos, la precisión será mayor.

En esta tesis hemos utilizado método Monte Carlo para la solución de integrales definidas, haciendo la aplicación en la ecuación (2.93). Esto ha sido posible debido a que SPH es un método lagrangiano y cada partícula que simula la distribución de polvo tiene información de la configuración que nos va permitir obtener el valor del tensor de energía-momento para cada partícula en cada paso de tiempo y obtener las señales discretas de las ondas gravitacionales para todo tiempo. Esto significa que

$$\bar{h}_{il}(\vec{x}, t' + r) \approx \frac{-4}{r} \sum_{a=1}^N T^{il}(x_a, y_a, z_a, t') H(x_a, y_a, z_a) \Delta V_a, \quad (4.32)$$

es decir, si medimos la amplitud en la posición $\vec{x}$, que está a una distancia r de la fuente, en el tiempo $t' + r$, esto se podrá aproximar como la suma del valor numérico del tensor de energía-momento sobre las N partículas de la fuente multiplicado por el volumen asignado a cada partícula a . Es claro que entre más lejos se mida, las amplitudes disminuyen en magnitud. Los datos que se obtienen del método SPH nos han permitido realizar la aproximación (4.32) pues para cada partícula podemos calcular las componentes del tensor de energía-momento al tener como datos la posición, la densidad, la velocidad, el volumen y la energía de cada partícula a . La señal la obtendremos retardada, es decir, dependerá de la distancia a la que se está midiendo.

4.3.2. Aproximación de ondas gravitacionales

El método SPH nos ha permitido hacer evoluciones sobre una aproximación de fuentes posibles de emisión de ondas gravitacionales. Para aproximar las ondas gravitacionales, hemos usado la fórmula cuadrupolar aproximándola mediante la ecuación (4.32). Podemos medir con la fórmula cuadrupolar cuando estamos en un régimen donde estamos muy lejos de la fuente de emisión. Es por ello que las ondas gravitacionales son medidas por un observador a una distancia $D = 20 \text{ Mpc}$, medida desde el mismo sistema de referencia. Entonces, la fórmula cuadrupolar nos proporcionará una apropiada aproximación para nuestro modelo.

En el caso donde la fuente está en una posición inicial de $7.4 \times 10^9 \text{ m}$, las polarizaciones de las ondas gravitacionales que mide un observador a distancia D se muestran en la figura (4.15). Dado que el fluido se encuentra dentro del radio de marea, ocurre rápidamente una destrucción del fluido, es por eso que la señal no comienza en una amplitud igual a cero, sino que es distinta de cero. La señal medida es una señal retardada que depende de la distancia a la que se encuentra el observador, debido a (2.93). Por tanto, las ondas gravitacionales emitidas por nuestra fuente, tardarán $2.0585 \times 10^{15} \text{ seg}$ en llegar al observador. Solo se observa un ciclo hasta que la señal se vuelve cero.

La figura (4.15) muestra un aumento en sus amplitudes en $t = 83 \text{ seg}$ y en $t = 115 \text{ seg}$. En esos tiempos se puede observar que la densidad ha aumentado respecto a la densidad inicial, como que se muestra en la figura (4.12). El centro de masa aún no toca el horizonte de eventos, sin embargo, la señal tiende a cero conforme el fluido toca el horizonte de eventos. Las señales se vuelven nulas cuando el fluido penetra el agujero negro hasta que no queda ninguna partícula fuera del horizonte.

A través de una transformada discreta de Fourier podemos obtener las frecuencias f en las que oscila la fuente. La figura (4.16) muestra las frecuencias de (4.15). Se puede observar que las amplitudes de las ondas están en el orden de 10^{-21} m ; Las frecuencias características de la fuente se encuentran en el rango de $0.001\text{-}0.1 \text{ Hz}$.

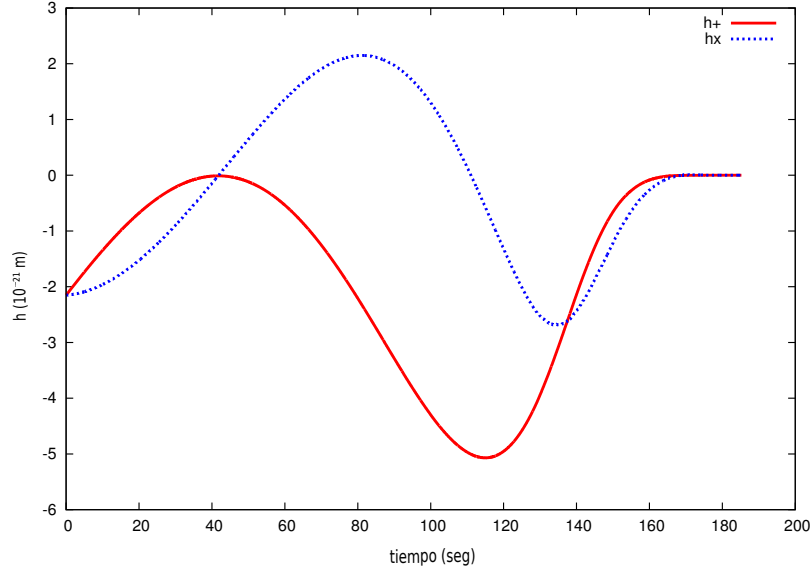


Figura 4.15: Ondas gravitacionales medidas por un observador a una distancia de 20 Mpc de una fuente descrita por un fluido de prueba a una distancia $4.4 \times 10^9 \text{ m}$ del horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild. La señal es retardada con un tiempo de llegada de $2.0585 \times 10^{15} \text{ seg}$.

En el caso de las ondas gravitacionales para la segunda simulación donde la posición inicial de la fuente es $15 \times 10^9 \text{ m}$, hemos obtenido las señales como se muestran en la figura (4.17). La señal, igualmente, es una señal retardada. Comienza en una amplitud distinta de cero, pero menor a la de la simulación anterior. Eso significa que inicialmente, entre más lejos este el fluido del agujero negro, las ondas gravitacionales son de menor amplitud.

Las señales que se miden tienen dos ciclos, sin embargo el primero tiene amplitudes menores al segundo. En $t = 300 \text{ seg}$ comienza a crecer en amplitud aunque aún no toca el agujero negro. La densidad aumenta en ese tiempo y de la misma manera tiende a cero conforme tocan el horizonte de eventos. Sin embargo, como se ve en la figura (4.7), el centro de masa está muy cerca del horizonte de eventos cuando las amplitudes de la onda crecen.

Las frecuencias de la onda han sido obtenidas como se muestran en la figura (4.18). Se muestra que las frecuencia de la onda oscilan en el rango de $0.001\text{-}0.01 \text{ Hz}$.

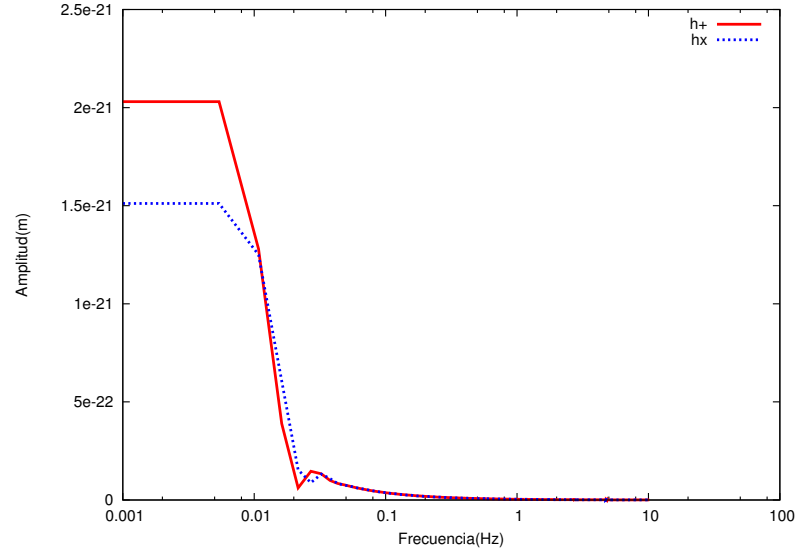


Figura 4.16: Frecuencias de las ondas gravitacionales emitidas por la destrucción, por fuerzas de marea, de un fluido de prueba debido a un agujero negro de Schwarzschild. El fluido se encuentra inicialmente a $4.4 \times 10^9 m$ del horizonte de eventos.

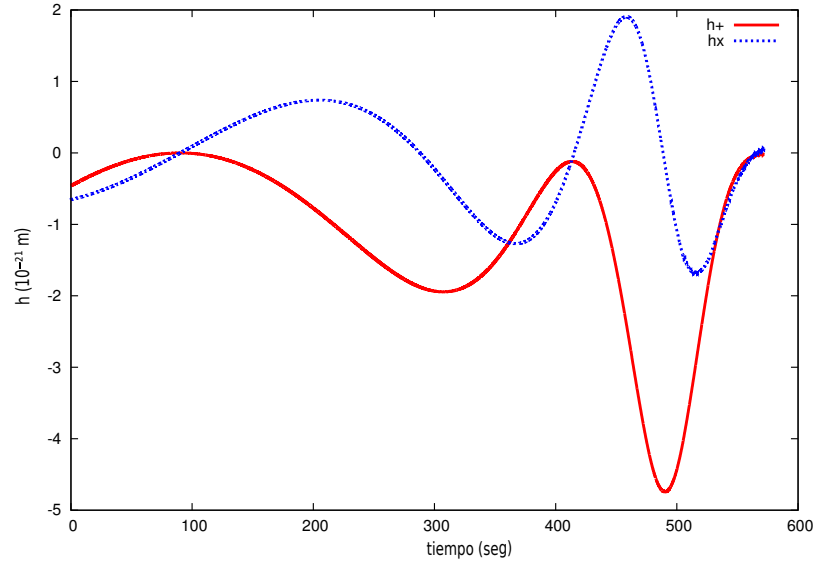


Figura 4.17: Ondas gravitacionales medidas por un observador a una distancia de $20 Mpc$ de una fuente descrita por un fluido de prueba a una distancia $4.4 \times 10^9 m$ del horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild. La señal es retardada con un tiempo de llegada de $2.0585 \times 10^{15} seg$.

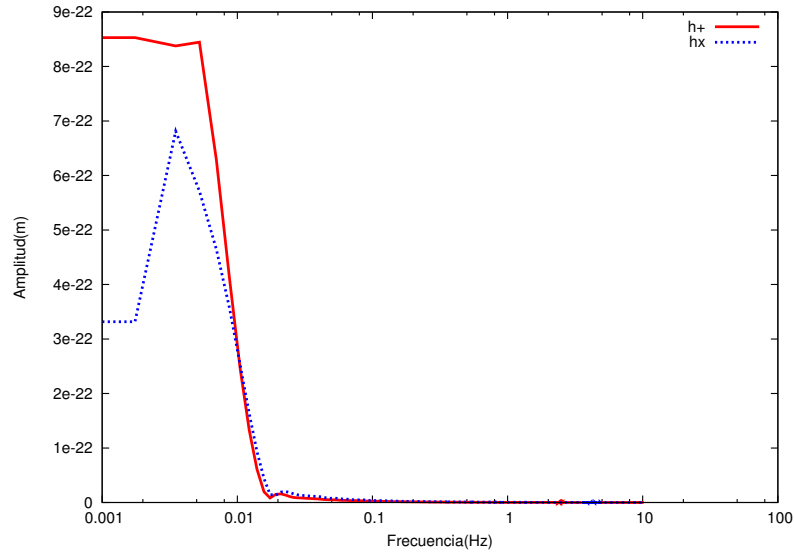


Figura 4.18: Frecuencias de las ondas gravitacionales emitidas por la destrucción, por fuerzas de marea, de un fluido de prueba debido a un agujero negro de Schwarzschild. El fluido se encuentra inicialmente a $4.4 \times 10^9 m$ del horizonte de eventos.

obteniendo amplitudes del orden de $10^{-22} m$.

En el caso de la tercera simulación, la distancia de fluido de prueba es $19 \times 10^9 m$ hacia el agujero negro, y la velocidad inicial está dada con el 100 por ciento de (4.23). La figura (4.19) muestra que las amplitudes de la onda son parecidas a la de la simulación anterior. Igualmente comienza en un valor distinto de cero, y a pesar de que la velocidad angular es constante como se ve en (4.11), la amplitud de la señal disminuye en el tiempo y lo hace constantemente conforme el centro de masa se acerca al horizonte de eventos. Aunque la distribución no alcanza a tocar el horizonte de eventos, la señal de la polarización $h_{\times}$ disminuye hasta llegar a cero mientras que la polarización h_{+} no va a cero, sin embargo, las amplitudes sí son más pequeñas que en el inicio.

En conclusión, las ondas gravitacionales dependerán de la velocidad y la posición inicial del fluido. Si la velocidad angular se mantiene constante conforme se acerca al horizonte de eventos, la amplitud de la señal disminuirá. Sin embargo, si la velocidad angular aumenta conforme se acerca al agujero negro, la amplitud de la señal aumenta y comienza a ir a cero cuando el fluido entra al agujero negro. Así mismo,

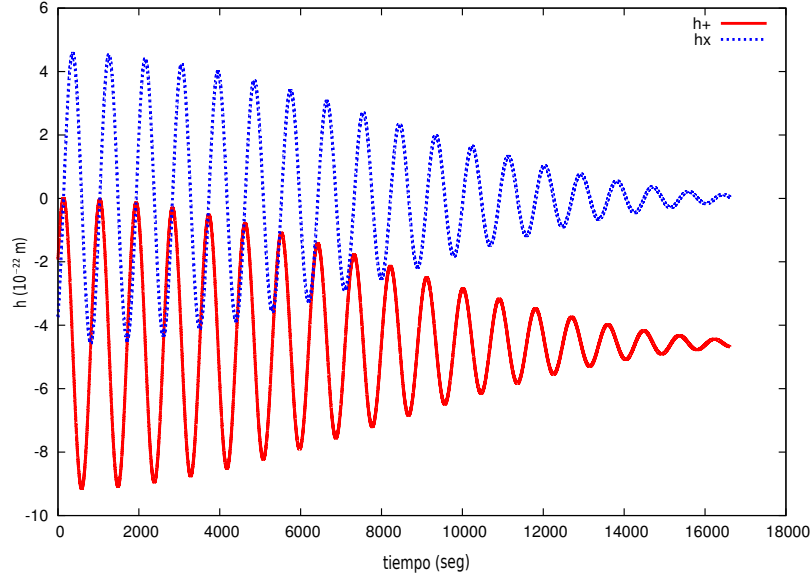


Figura 4.19: Ondas gravitacionales medidas por un observador a una distancia de 20 Mpc de una fuente descrita por un fluido de prueba a una distancia $4.4 \times 10^9 \text{ m}$ del horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild. La señal es retardada con un tiempo de llegada de $2.0585 \times 10^{15} \text{ seg.}$

como dice la teoría, las señales de las ondas gravitacionales nos darán la información precisa de la frecuencia con la que gira la fuente alrededor del agujero negro y por tanto las distancias a las que se encuentra la fuente. Las amplitudes de las ondas gravitacionales debido a destrucciones por fuerzas de marea dentro del límite de Roche son del orden de $10^{-21} - 10^{-22} \text{ m}$ con frecuencias de oscilación de $0.001\text{-}0.1 \text{ Hz}$.

Capítulo 5

Observaciones y Conclusiones

En las últimas seis décadas hemos sido testigos de una gran evolución en la astronomía, impulsada por las mejoras en las capacidades de observación en todo el espectro elctromagnético. Dentro de unos años, otra nueva ventana al Universo se abrirá, con la primera detección de las ondas gravitacionales, con el fin de probar la teoría de la relatividad general de Einstein y observar algunos de los objetos más exóticos de la naturaleza, particularmente, los agujeros negros.

Las fuentes de emisión de ondas gravitacionales son descritas por masa no simétrica acelerada. Tienen longitudes de onda larga y transmiten información directa sobre las regiones de gran escala. La interacción de las ondas gravitacionales con la materia es muy débil por lo que su detección se vuelve muy difícil. Teniendo en cuenta que el 96 por ciento de la masa-energía del Universo no tiene carga, las ondas gravitacionales nos proporcionarán nuestra primera oportunidad de observar directamente una parte importante del Universo.

Para la deteccón de las ondas gravitacionales, ha sido necesaria la construcción de detectores. El desarrollo de estos detectores ha requerido paciencia, el ingenio y la dedicación de toda una generación de físicos experimentales, sin embargo, hasta el momento, ninguno de los interferómetros con los mejores niveles de sensibilidad han obtenido detecciones. Para las mejoras y el entendimiento de los datos que se espera medir en los detectores ha sido necesaria la Relatividad Numérica como una

herramienta para simular los eventos y aproximar los datos esperados de las ondas gravitacionales.

Las ondas gravitacionales son perturbaciones al espacio-tiempo en el que se realizan mediciones. Hemos hecho una revisión de la Teoría de Einstein para las ondas gravitacionales. Se observa que a partir de las perturbaciones a las ecuaciones de Einstein en un régimen donde el observador que mide se encuentra muy lejos de la fuente, podemos aproximar la solución para obtener las componentes del tensor que describe las ondas gravitacionales, es decir, las perturbaciones para cada componente del tensor métrico para cada instante de tiempo. Las soluciones vendrán dadas por la ecuación cuadrupolar que, cumpliendo con que el observador que mide está lo suficientemente lejos de la fuente y descrito en una métrica de fondo dada por la métrica plana, o bien, la de Minkowski, podemos aproximar las componentes del tensor de perturbación dada una fuente. Esta aproximación se ha hecho en un orden lineal, es decir, en otros órdenes los resultados son distintos. Así mismo, si la métrica de fondo en la que se miden las ondas gravitacionales, es distinta a la plana, las ecuaciones a resolver son distintas y se vuelven más complicadas, sin embargo, en esta tesis no hemos analizado ese caso.

Teniendo la fórmula cuadrupolar, hemos simulado una fuente mediante el método de Hidrodinámica de Partículas Suavizadas. SPH es un método numérico que se ha convertido en una excelente herramienta en las simulaciones computacionales de fluidos relativistas. Hemos presentado el desarrollo del método SPH que describe las ecuaciones de un fluido que fluye sobre una métrica dada. Hemos usado un código basado en esas ecuaciones y se trata de un código numérico tridimensional con el cual hemos simulado, como una primera aproximación, una estrella de tipo solar, es decir, de radio igual al radio solar $R_{\odot}$ y de masa igual a una masa solar $M_{\odot}$, la cual es capturada y destruida por un agujero negro de Schwarzschild masivo de $10^6 M_{\odot}$. La aproximación a una estrella se refiere a que hemos despreciado la curvatura debido a la estrella. También, hemos quitado la presión que hay entre las partículas del fluido. Hemos probado con distintas posiciones del fluido respecto al agujero negro y hemos evolucionado los códigos en el tiempo. Dado que las posiciones iniciales están dentro

del radio de destrucción de marea, la destrucción del fluido ocurre inmediatamente. Las trayectorias del centro de masa se dirigen hacia el agujero negro hasta penetrar en él. Esto se ha logrado al disminuir la velocidad angular inicial al noventa por ciento de la velocidad necesaria para obtener órbitas circulares. En el caso en el que la velocidad angular inicial es del cien por ciento de la velocidad que se calcula a partir de analizar el potencial de Schwarzschild, el centro de masa del fluido alcanza a dar varias vueltas alrededor de agujero negro y se acerca lentamente al horizonte de eventos.

Teniendo la configuración de la fuente en todo tiempo podemos obtener las componentes del tensor de perturbaciones al tensor métrico para cada tiempo. Al medir desde un observador ubicado a 20 Mpc de la fuente, hemos podido usar la aproximación para ondas gravitacionales débiles. Las gráficas donde se muestran las polarizaciones de las ondas gravitacionales, que son las que tienen importancia a la hora de medir, se puede observar que entre más alejado esté el fluido del agujero negro, la amplitud de las ondas disminuyen en un inicio. También se muestra que las mayores amplitudes se obtienen donde el fluido ya está destruido y está muy cerca del agujero negro, mientras que la velocidad angular ha aumentado. La amplitud comienza a acercarse a cero conforme el agujero negro captura todas las partículas.

En el caso en el que el fluido mantiene una velocidad angular constante, hemos visto que las ondas gravitacionales comienzan a disminuir de amplitud constantemente, y conforme se va acercando al agujero negro, la señal comienza a tender a cero. Hemos mostrado que en los tiempos en el que la densidad aumenta, las señales de las ondas gravitacionales también aumentan en amplitud.

En este tipo de configuraciones, en donde un fluido es destruido debido a las fuerzas de marea generadas por un agujero negro de Schwarzschild esperaríamos entonces medir amplitudes del orden de $10^{-21}m$, por tanto, los interferómetros deben estar calibrados para medir cambios de ese orden. La sensibilidad de los interferómetros debe ser muy alta eliminando el mayor ruido posible. Así mismo, las frecuencias que deben medir serán en el rango de $0.001\text{-}0.1\text{Hz}$, por tanto, LISA debe ser

capaz de medir este tipo de eventos.

Aún hay mucho trabajo por hacer. Es necesario mejorar nuestra aproximación, haciendo un análisis con un fluido con condiciones distintas a la de un fluido de prueba (polvo). Se pretende mejorar las condiciones iniciales en el código SPH al tomar una estrella sin despreciar la curvatura que genera y las condiciones hidrodinámicas exactas. Será interesante cambiar su ecuación de estado mediante la constante adiabática. También es necesario analizar otro tipo de órbitas para así analizar si nuestros resultados coinciden teniendo bien definido un perihelio.

También queremos estudiar cómo es el cambio en las ondas gravitacionales debido al cambio de la métrica de fondo alrededor de la cual gira la estrella. Se esperaría obtener otras propiedades y así poder distinguir cómo se conforma la fuente de la que se obtienen las señales.

Se pretende hacer un análisis de las ondas gravitacionales medidas desde una métrica distinta a la plana. Con eso se obtienen otras ecuaciones a resolver, es decir, la ecuación de onda llevará más términos por lo que su solución se obtiene utilizando otras herramientas.

Bibliografía

- [1] Forman S. Acton. *Numerical Methods That Work*. Harper, 1970.
- [2] Jonh Antoniadis y Paulo C. Freire. A massive pulsar in a compact relativistic binary. *Science*, 340:448, 2013.
- [3] James B. Hartle. *GRAVITY An Introduction to Einstein's General Relativity*. Addison-Wesley, 2003.
- [4] Bernard F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 1985.
- [5] A. Javier. Revisión de la teoría de perturbaciones en relatividad general. *Revista Mexicana de Física*, 57:273–303, 2011.
- [6] Shiho Kobayashi, Pablo Laguna, E. Sterl Phinney, y Peter Mészáros. Gravitational wave and x-ray signals from stellar disruption by a massive black hole. *Astrophys. J.*, 2004.
- [7] Pablo Laguna, Wojciech H. Zurek Warner A. Miller, y Melvyn B. Davies. Tidal disruption by supermassive black hole: Hydrodynamic evolution of stars on a schwarzschild background. *The Astrophysical Journal*, págs. L83–L86, 1993.
- [8] R. Lazkoz. Ondas gravitatorias. *Revista Mexicana de Física*, 49:384–390, 2003.
- [9] Aberto Lobo y Carlos F. Sopuerta. La astronomía de ondas gravitatorias en el siglo xxi. *Revista Española de Física*, 25, 2011.
- [10] Sean M. Carroll. *An Introduccion to General Relativity Spacetime and Geometry*. Addison-Wesley, 2004.

-
- [11] George M. Erwing. *Calculus of Variations with Applications*. Dover Publications, Inc., 1985.
 - [12] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago, 1984.
 - [13] Hans Ohanian y Remo Ruffini. *Gravitation and Spacetime*. W. W. Norton and Company, 1994.
 - [14] Manuel Peimbert. *Fronteras del Universo*. Fondo de Cultura Económica, 2000.
 - [15] Juan Pablo Cruz Pérez y J. Antonio González Cervera. Initial data for general relativistic sph. En *IX Mexican School on Gravitation and Mathematical Physics: Cosmology for the XXIst Century*. 2012.
 - [16] Juan Pablo Cruz Pérez y J. Antonio González Cervera. Initial data for general relativistic sph with centroidal voronoi tessellations. 2013.
 - [17] James R. Wilson. *Relativistic Numerical Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 2003.
 - [18] B.S. Sathyaprakash y B.F. Schutz. Physics, astrophysics and cosmology with gravitational waves. *Living Rev. Relativity*, 12, 2009.
 - [19] S. Siegler y H. Riffert. Smoothed paticle hydrodynamics simulations of ultra-relativistic shocks whit artificial viscosity. *The Astrophysical Journal*, 1999.
 - [20] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, 2013.
 - [21] J. M. Weisberg, J.H. Taylor, y L.A Fowler. Gravitacional waves from an orbitig pulsar. *Scientific American*, 245:74–82, 1981.
 - [22] C.M. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Rev. Relativity*, 2006.