



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICO-MATEMÁTICAS

"Mat. Luis Manuel Rivera Guiltérrez"

**SOBRE LOS TRABAJOS DE CONWAY Y
THURSTON ACERCA DE TESELACIONES**

____ TESIS ____

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
**LICENCIADO EN CIENCIAS
FÍSICO-MATEMÁTICAS**

____ PRESENTA: ____

ANA CRISTINA CHÁVEZ CÁLIZ

____ ASESOR: ____

Dr. en Ciencias Físico Matemáticas Jorge Luis López López

MORELIA, MICHOACÁN ENERO DE 2014



*A mis papás: Flor y Bosco
y a mis hermanos: Ricardo y Juan Bosco
por ser fuente constante de amor
y apoyo incondicional.*

*A mi abuelo: don Nico el valiente,
que siempre me impulsa a dar lo mejor de mí;
porque en su ejemplo veo
el valor del trabajo duro.*

*A mi abuela: doña Reyna,
por ser también comadre, amiga y maestra;
porque te has convertido en un gran motor:
en mi motivo mayor.*

Agradecimientos

A mi asesor, Jorge Luis López, por todo el trabajo, tiempo, paciencia y esfuerzo invertido en este proyecto. Muchas gracias Jorge, por ser un profesor que siempre me impulsa a esforzarme más, por tu honestidad, por creer en mí siempre, pero sobretodo, por tu amistad aun en los tiempos más difíciles.

A mis sinodales: María Luisa Pérez, Luis Valero Elizondo, Karina Figueroa y Armando Sepúlveda. Gracias por sus invaluable comentarios y correcciones.

A mi hermano Juan Bosco por atender a mis caprichos y elaborar la portada de la presente.

A mis papás: Flor y Bosco, y a Héctor por el apoyo que de ellos recibí a lo largo de este proceso.

Por último, a la Coordinación de la Investigación Científica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por apoyar este trabajo a través del proyecto 9.22 “3-variedades hiperbólicas y superficies planas”.

Índice general

Introducción	6
1. Aplicaciones de los grupos de Conway	10
1.1. Coloración	10
1.2. Grupos de Conway	12
1.2.1. Dominós	12
1.2.2. Rombos	13
1.2.3. Bubulubus	15
1.2.4. Criterio de Conway	16
1.3. Ejemplos de aplicaciones	19
1.3.1. Un problema con bubulubus	19
1.3.2. Un problema con teselas triangulares	23
2. Criterio de Thurston	33
2.1. Rombos	33
2.2. Dominós	40
3. Teselaciones en el disco hiperbólico	46
3.1. Triángulos ideales	46
3.2. Extensión del Criterio de Thurston	50
3.3. Criterio de Conway y Coloración	53
A. Notación	55
B. Apéndice	56

Sobre los trabajos de Conway y Thurston acerca de teselaciones.

Resumen

Imagine que tiene usted un tablero y unas fichas, y que desea cubrir el tablero con las fichas, de manera que todo esté cubierto y que las fichas no se encimen. ¿Podrá siempre cumplir con su objetivo? ¿Habrá algún criterio que pueda decirle cuando no puede? ¿Y cuándo s ?

A lo largo de esta tesis exponemos dos métodos para poder resolver tales preguntas; uno de Conway y otro de Thurston. Además damos una adaptación para el caso hiperbólico que nosotros encontramos.

En el artículo *Tiling with Polyominoes and Combinatorial Group Theory* Conway y Lagarias exponen condiciones *necesarias* para la existencia de ciertas teselaciones de polígonos en el plano Euclideo. La solución dada en es algebraica: se construye un grupo, llamado *grupo de Conway*, y se muestra que si un polígono es teselable entonces cierto elemento del grupo, que representa al polígono, es el neutro del grupo. A este criterio le llamamos *criterio de Conway*.

Por otro lado, Thurston retoma estos conceptos en *Conway's Tiling Groups* y trata, entre otros problemas, el de teselar por dominós (formados por dos cuadrados) y rombos (formados por dos triángulos equiláteros). Apoyándose en las gráficas de Cayley asociadas a los grupos de Conway respectivos, Thurston reinterpreta a las teselaciones como superficies en la gráfica de Cayley y da un algoritmo para encontrar teselaciones. Esto le permite establecer una condición *necesaria y suficiente* para el teselado con dominós y rombos.

Inspirados en el trabajo de Thurston, trabajamos el problema de teselaciones regulares en el disco hiperbólico y damos una condición necesaria y suficiente para el teselado de regiones por *mariposas* (teselas formadas por dos polígonos hiperbólicos congruentes).

Palabras clave: Teselaciones, Grupos de Conway, Gráficas de Cayley, Geometr a Hiperb lica.

Sobre los trabajos de Conway y Thurston acerca de teselaciones.

(About Conway's and Thurston's tiling resource.)

Abstract

Imagine that you've a region and some tiles, and that you wish to cover the region with the tiles, in such way that everything is cover and the tiles doesn't overlap. Could you always accomplish that goal? Is there any criterion you can use?

On this thesis, we'll expose two methods to solve to questions. Also, we give a necessary and sufficient conditions to some tilings on the hyperbolic case.

On *Tiling with Polyominoes and Combinatorial Group Theory*, Conway and Lagarias expose necessary conditions for the existence of some tilings in the Euclidean plane. The solution that they give is algebraic: they construct a group, called *Conway's group*, and they prove that if a polygon can be tiled, some element of the group that represents the polygon, is the identity of the group. This criterion is called *Conway's criterion*.

On the other hand, Thurston summarizes this concepts on the article *Conway's Tiling Groups* and solves the problem of lozenges and dominoes tilings. Using the Cayley's graphs of the Conway's groups, Thurston reinterprets the tilings as surfaces in the Cayley's graphs. He gives an algorithm to find tilings, and gives *necessary and sufficient* tiling conditions for lozenges and dominoes.

Inspired on Thurston's tiling resource, we solve the problem of regular tilings on the hyperbolic disk, giving necessary and sufficient conditions for *butterflies* tilings (we call butterflies to tiles made by two hyperbolic congruent polygons).

Keywords: Tiling, Conway's group, Cayley's graphs, Hyperbolic geometry.

Introducción

Imagine que tiene usted un tablero y unas fichas, y que desea cubrir el tablero con las fichas, de manera que todo esté cubierto y que las fichas no se encimen (como ocurre con el mosaico de un piso, por ejemplo).

¿Podrá siempre cumplir con su objetivo? ¿Habrá algún criterio que pueda decirle cuando no puede? ¿Y cuándo sí? Este representa un problema ya estudiado en las matemáticas, y existen técnicas que se pueden usar para atacarlo.

En esta tesis expondremos dos métodos para poder resolver tales preguntas; uno de Conway y otro de Thurston. Además daremos una adaptación para el caso hiperbólico que nosotros encontramos y, al parecer, no está publicada.

A lo largo de este texto, nos referiremos a las fichas que mencionábamos en el primer párrafo, como *teselas*; y llamaremos *teselar* a cubrir un tablero con las teselas, de manera que todo quede completamente cubierto, sin traslaparse y sin cubrir área fuera del tablero. Además, siempre consideraremos tanto a las teselas como a las regiones a teselar como regiones cuya frontera consiste de una sola curva simple y cerrada.

Antecedentes

En el artículo *Tiling with Polyominoes and Combinatorial Group Theory* [2] Conway y Lagarias exponen condiciones *necesarias* para la existencia de ciertas teselaciones de polígonos en el plano euclideo. En particular, resuelven el problema de cuándo un arreglo triangular “equilátero” compuesto por hexágonos puede ser teselado por arreglos triangulares “equiláteros” más pequeños y por *bubulubus* (arreglos lineales compuestos por tres hexágonos),

como se aprecia en la Figura 1.

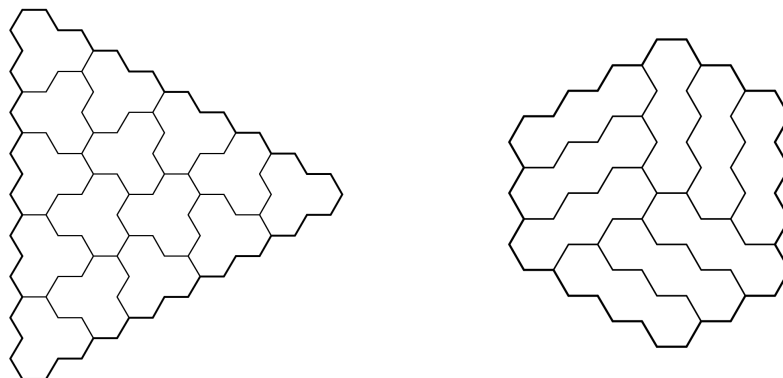


Figura 1: A la izquierda: un arreglo triangular “equilátero” de 9 hexágonos de lado, teselado por arreglos triangulares “equiláteros” más pequeños de 2 hexágonos de lado. A la derecha: una región teselada por bubulubus.

La solución dada en [2] es algebraica: se construye un grupo, llamado *grupo de Conway*, y se muestra que si un polígono es teselable entonces cierto elemento del grupo, que representa al polígono, es el neutro del grupo. A este criterio le llamamos *criterio de Conway*. Además, en el mismo artículo se prueba que el criterio de Conway da resultados que no se pueden obtener por argumentos de coloración.

Por otro lado, Thurston retoma estos conceptos en *Conway’s Tiling Groups* [1] y trata, entre otros problemas, el de teselar por dominós (formados por dos cuadrados) y rombos (formados por dos triángulos equiláteros).

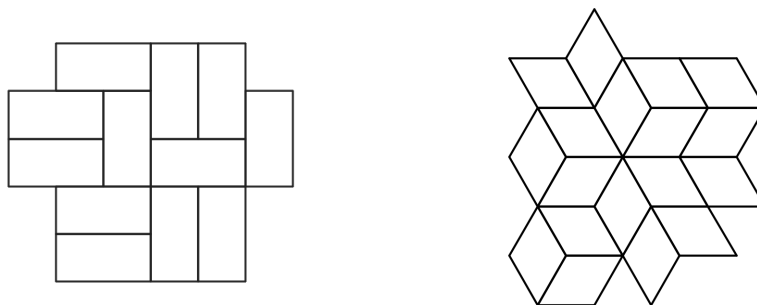


Figura 2: Una región teselada por dominós y otra por rombos.

Apoyándose en las gráficas de Cayley asociadas a los grupos de Conway respectivos, Thurston reinterpreta a las teselaciones como superficies en la gráfica de Cayley y da un algoritmo para encontrar teselaciones. Esto le permite establecer una condición *necesaria y suficiente* para el teselado con dominós y rombos.

La teoría de los grupos de Conway y algunos ejemplos conocidos están expuestos a lo largo del Capítulo 1.

Los detalles del trabajo de Thurston de teselaciones por dominós y rombos pueden encontrarse en el Capítulo 2. Corregimos además algunos errores en fórmulas encontradas en el artículo de Thurston. También observamos que, para estos casos, el criterio de Conway y coloración son equivalentes (aunque la prueba se encuentra en el Capítulo 3); algo que Thurston no menciona.

Resultados originales

Inspirados en el trabajo de Thurston, trabajamos el problema de teselaciones regulares en el disco hiperbólico y damos una condición necesaria y suficiente para el teselado de regiones por *mariposas* (teselas formadas por dos polígonos hiperbólicos congruentes). Hay que notar que, en realidad Thurston ya trabaja el caso de mariposas euclidianas, pues tanto los dominós como los rombos son casos específicos de éstas.

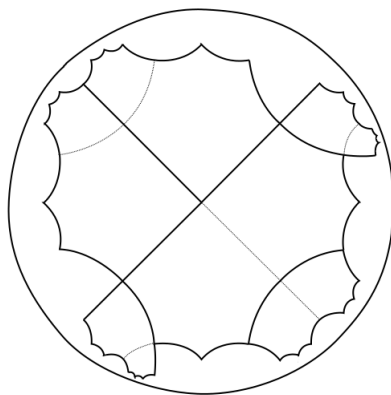


Figura 3: Una región teselada por 6 mariposas, cada una formada por dos hexágonos congruentes cuyos ángulos interiores son de 90° grados.

La generalización a la que llegamos fue posible en la medida que fuimos capaces de abstraer la esencia del método de Thurston, al punto de eliminar

el enfoque algebraico de Conway y Thurston, para transformar el problema en algo completamente combinatorio. El Capítulo 3 de la presente tesis está conformado por este material nuevo.

Prácticamente no hay literatura que hable de teselaciones en el contexto hiperbólico desde un enfoque combinatorio. Básicamente, toda la literatura existente para teselaciones hiperbólicas tiene un enfoque algebraico, pues se consideran teselas que son regiones fundamentales de la acción de un grupo discreto de isometrías del plano hiperbólico.

Capítulo 1

Aplicaciones de los grupos de Conway

1.1. Coloración

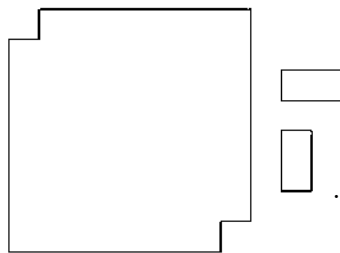


Figura 1.1: De ahora en adelante, a cada una estas teselas las llamaremos *dominó*.

Solución: Coloreamos el tablero como uno de ajedrez, como se ilustra en la Figura 1.2. Cada que una tesela dominó es colocada, cubre un cuadro negro y un cuadro blanco.

Sin embargo, nuestro tablero tiene 30 casillas negras y 32 casillas blancas, por lo tanto el tablero no puede ser teselado. $\square$

Ejemplo 1.1. Considere un tablero de 8×8 al que se le han quitado los cuadros de la esquina superior izquierda e inferior derecha, como se muestra en la Figura 1.1. ¿Es posible cubrir nuestro tablero con teselas de 2×1 y 1×2 ?

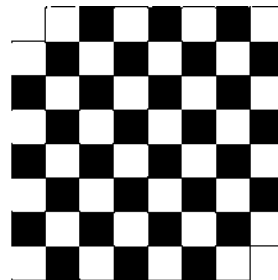
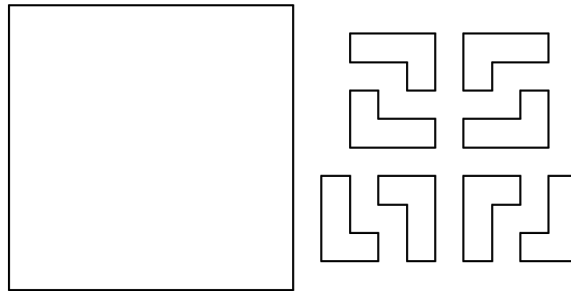


Figura 1.2: La coloración para el Ejemplo 1.1.

Los argumentos tipo coloración, como el que acabamos de usar, pueden ser más complejos. Para muestra de ello, revisemos otro ejemplo.

Ejemplo 1.2. *¿Podemos teselar un cuadrado de 10×10 con teselas en forma de L fabricadas con cuatro cuadritos de 1×1 ? (Figura 1.3)*

Figura 1.3: La tesela con la que trabajamos tiene 8 orientaciones posibles distintas: aquí las ilustramos, junto con el tablero a teselar.



Solución: “Coloreamos” esta vez nuestro tablero con 1’s y 5’s, como se muestra en la Figura 1.4. Notemos que, sin importar cómo acomodemos una tesela, siempre cubrirá una suma congruente con 0 módulo 8. Sin embargo, la suma total del tablero es $5 \times 10 \times 5 + 1 \times 10 \times 5 = 300$ y $300 \equiv 4 \pmod{8}$ así que el tablero no puede ser cubierto por las teselas. $\square$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

Figura 1.4: La coloración para el Ejemplo 1.2.

Resulta que los argumentos de esta técnica de coloración no son lo suficientemente fuertes como para dar una respuesta a otros tableros y teselas. De hecho, se puede probar (ver [2]) que la técnica de coloración no da solución a otros problemas (como los resueltos en los teoremas 1.6 y 1.12 enunciados en las páginas 19 y 28 respectivamente) pero que sí pueden ser resueltos con ayuda del siguiente concepto.

1.2. Grupos de Conway

John Conway descubrió una técnica algebraica para responder, en muchos casos interesantes, a la pregunta de cuándo una región en el plano no puede ser teselada por teselas previamente establecidas.

En efecto, calcularemos los grupos de Conway de los dominós, los rombos y los bubulubus. Luego probaremos el criterio de Conway, que puede mostrar cuando una región no puede ser teselada por los tres tipos de teselas mencionadas.

1.2.1. Dominós

Consideremos de nuevo las teselas descritas en el ejemplo 1.1, ilustradas en la Figura 1.5:

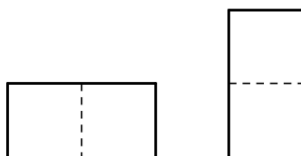
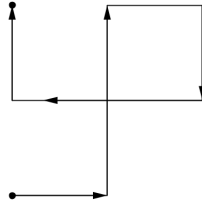


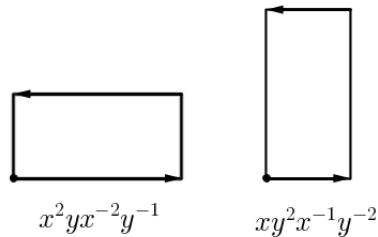
Figura 1.5: Los dominós son teselas en forma de rectángulos de 2×1 y 1×2 .

El conjunto de caminos en una cuadrícula pueden ser representados por una palabra compuesta por las letras x , x^{-1} , y y y^{-1} (que denotan derecha, izquierda, arriba y abajo, respectivamente). Por ejemplo, el camino siguiente recorrido en el sentido que se indica, está representado por la palabra $xy^2xy^{-1}x^{-2}y$.

Nota: Las palabras se leerán de izquierda a derecha a lo largo de toda la tesis.

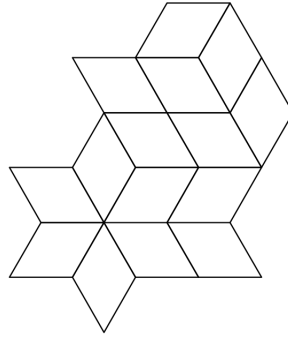


Ahora agreguemos la información de nuestras teselas al grupo que acabamos de formar, pidiendo que los caminos que describen a las teselas sean 1 en el grupo.

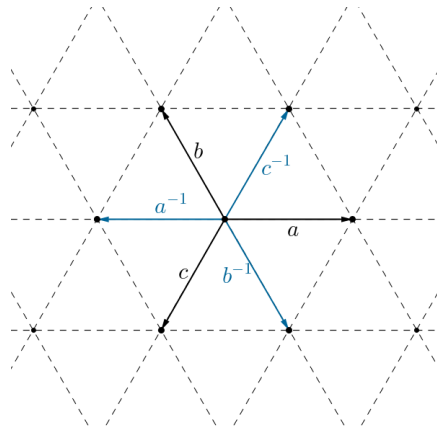

$$D = \langle x, y \mid x^2 y x^{-2} y^{-1} = x y^2 x^{-1} y^{-2} = 1 \rangle.$$

1.2.2. Rombos

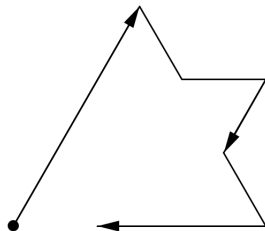
Consideremos las teselas formadas de pegar dos triángulos equiláteros adyacentes, y llamemos a dichas teselas *rombos*. ¿Cuándo R puede ser teselada por rombos?



Para analizar este problema, primero estableceremos una notación conveniente para representar caminos: arreglamos la triangulación del plano de manera que eje x esté formado por aristas de la triangulación. Etiquetamos las aristas dirigidas, bajo el siguiente criterio: nombramos por a , b o c a las rectas que tienen una inclinación de 0° , 120° o 240° con respecto al eje x , respectivamente.

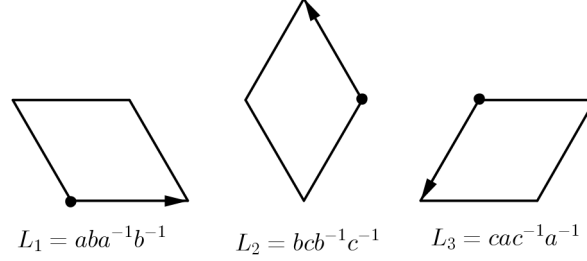


Entonces, un camino formado por aristas de la triangulación del plano está determinado por una serie de aristas, que podemos representar por una palabra conformada por las letras a , b , c , a^{-1} , b^{-1} y c^{-1} .



Por ejemplo, el camino recorrido como se ilustra en la figura está representado por la palabra $c^{-3}b^{-1}acb^{-1}a^{-2}$.

Si un rombo es colocado en el arreglo triangular, dependiendo de su orientación, su frontera está representada por uno de los siguientes tres elementos:



El grupo de Conway queda definido por estas relaciones; es decir:

$$L = \langle a, b, c \mid L_1 = L_2 = L_3 = 1 \rangle.$$

Notemos que las relaciones implican que a , b y c conmutan todos entre sí; de nuevo estas propiedades son independientes del punto inicial que se elija para recorrer las teselas y de la dirección en que se recorren. De aquí que $L = \mathbb{Z}^3$.

1.2.3. Bubulubus

Consideremos ahora el plano teselado por hexágonos y etiquetemos las aristas (esta vez no hay necesidad de dirigir las aristas) con a , b y c , como se ilustra en la Figura 1.7.

Las teselas que tomaremos en cuenta para este caso, a las que llamaremos “bubulubus”, ilustradas en la Figura 1.8, están determinados por las palabras:

$$B_1 = (ab)^3 c(ab)^3 c$$

$$B_2 = (bc)^3 a(bc)^3 a$$

$$B_3 = (ca)^3 b(ca)^3 b$$

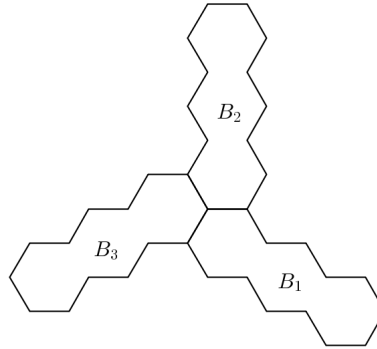


Figura 1.8: Las tres teselas.

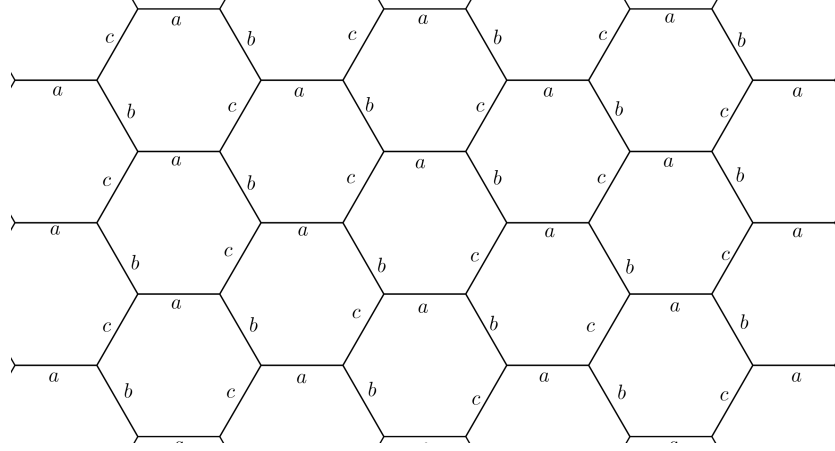


Figura 1.7: Hacer el recorrido a^2 , b^2 o c^2 nos regresa al vértice de inicio, entonces $a^2 = b^2 = c^2 = 1$.

Así, el grupo de Conway que buscamos para este ejemplo es:

$$B = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = B_1 = B_2 = B_3 = 1 \rangle.$$

1.2.4. Criterio de Conway

Notemos que los grupos de Conway tienen dos ingredientes esenciales: los generadores y las relaciones que definen al grupo. La rejilla en la que trabajamos determina los generadores, mientras que las relaciones están dadas por las teselas.

Llamamos rejilla regular a un teselado del plano que emplea un sólo tipo de polígonos regulares. Las rejillas regulares del plano sólo son tres: en [3, sección 2.1], se prueba que sólo son posibles rejillas regulares del plano empleando triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares; como las que ya vimos en los tres ejemplos anteriores. Trabajamos en ellas, pues ahí es posible determinar caminos usando palabras.

El objetivo de esta sección es probar el criterio de Conway (Proposición 1.5) que es aplicable a problemas donde tanto las regiones como las teselas son subpolígonos de una de estas rejillas regulares.

Por otro lado, si se tienen teselas $T_1, T_2, \dots, T_n$, contando todas las posibles orientaciones (por ejemplo, un dominó tiene dos orientaciones y

la tesela en forma de L del ejemplo 1.2 tiene ocho diferentes orientaciones), y $W_1, W_2, \dots, W_n$ denotan las palabras que representan a la frontera de cada tesela; las relaciones que se usan para definir al grupo de Conway serán $W_1 = W_2 = \dots = W_n = 1$.

En general, si π representa un camino en el plano, denotaremos por $\alpha(\pi)$ a la palabra que representa a π .

Notemos que las palabras W_i dependen del punto inicial p y la dirección en que se recorren. Sin embargo, el siguiente lema muestra que el grupo de Conway no.

Lema 1.3. *Sea W_i la palabra que se obtiene de recorrer la frontera de T_i empezando por el punto p . Sea p' otro punto en la frontera de T_i y W'_i la palabra que describe a T_i comenzando en p' recorrida en cualquier sentido. Si $W_i = 1$, entonces $W'_i = 1$ en el grupo de Conway.*

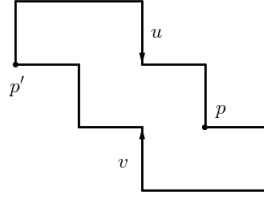


Figura 1.9: Frontera de la región T_i .

Demostración. Sea u el camino que va de p' a p , y v el camino de p a p' (ambos caminos sobre la frontera de T_i), como se ilustra en la Figura 1.9. Entonces $W_i = \alpha(vu)$ y $W'_i = \alpha(uv)$. Como $W_i = 1$, tenemos que $\alpha(vu) = 1$. Luego $\alpha(uv) = \alpha(v^{-1}(vu)v) = \alpha(v^{-1}v) = 1$.

Además el sentido tampoco importa, pues la palabra que se obtiene recorrer T_i en el otro sentido, no es más que W_i^{-1} . $\square$

Definición 1.4 (Grupo de Conway). *Dada una rejilla regular, y teselas $T_1, T_2, \dots, T_n$ que son subpolígonos de tal rejilla, estas determinan un grupo generado por letras usadas para describir todos los caminos en dicha rejilla, y definido por las relaciones $W_1 = W_2 = \dots = W_n = 1$, correspondientes a las teselas. Este grupo es llamado el Grupo de Conway para las teselas $T_1, T_2, \dots, T_n$.*

Sea R una región, con frontera π . La siguiente proposición provee una condición necesaria para la teselación de R .

Proposición 1.5 (Criterio de Conway). *Si R puede ser teselada por copias de $T_1, T_2, \dots, T_n$, entonces $\alpha(\pi) = 1$ en el grupo de Conway determinado por $T_1, T_2, \dots, T_n$.*

Demostración. Procedamos por inducción sobre el número de teselas. Si R puede ser cubierto por una tesela, entonces R mismo es una tesela, digamos T_i . Gracias a la proposición anterior, $\alpha(\pi) = W_i = 1$.

Supongamos ahora que R puede ser teselado por m teselas. Entonces, podemos cortar el polígono R en dos regiones P_1 y P_2 teseladas, por un camino w que esté dentro de R y que vaya de un punto p en la frontera a otro punto p' en la frontera (ver Figura 1.10). Sean v_1 y v_2 los caminos que corresponden a los pedazos de la frontera de R que van de p' a p y de p' a p , respectivamente. Tenemos entonces que la palabra que describe la frontera de P empezando por p es $\alpha(v_1v_2)$. Pero $\alpha(v_1v_2) = \alpha((v_1w^{-1})(wv_2))$. Las palabras $\alpha(v_1w^{-1})$ y $\alpha(wv_2)$ representan la frontera de los polígonos P_1 y P_2 , respectivamente. Por hipótesis de inducción, $\alpha(v_1w^{-1}) = 1$ y $\alpha(wv_2) = 1$, así que $\alpha(v_1v_2) = 1$. Finalmente, tal vez la palabra frontera $\alpha(\pi)$ difiera de $\alpha(v_1v_2)$ por la elección del punto inicial y el sentido, pero por el lema anterior, si una de estas palabras es equivalente a la identidad, la otra también lo es. Esto completa la prueba. $\square$

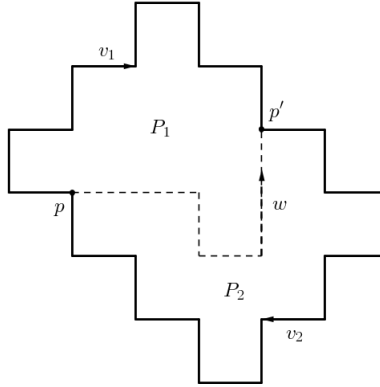


Figura 1.10: Paso de inducción para la prueba de la Proposición 1.5.

1.3. Ejemplos de aplicaciones

En esta sección mostramos ejemplos que se pueden analizar algebraicamente con el criterio de Conway, ya que el método de coloración resulta ineficaz (ver [2]). Recomendamos consultar [4] en lo referente a grupos definidos por generadores y relaciones, así como sus gráficas de Cayley.

1.3.1. Un problema con bubulubus

Se desea teselar un arreglo “triangular equilátero” de tamaño n (ver Figura 1.11) con bubulubus. ¿Para qué n el arreglo puede ser teselado?

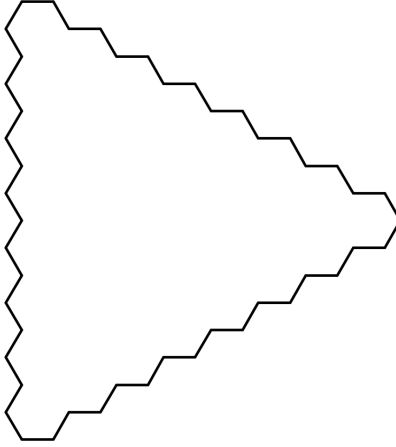


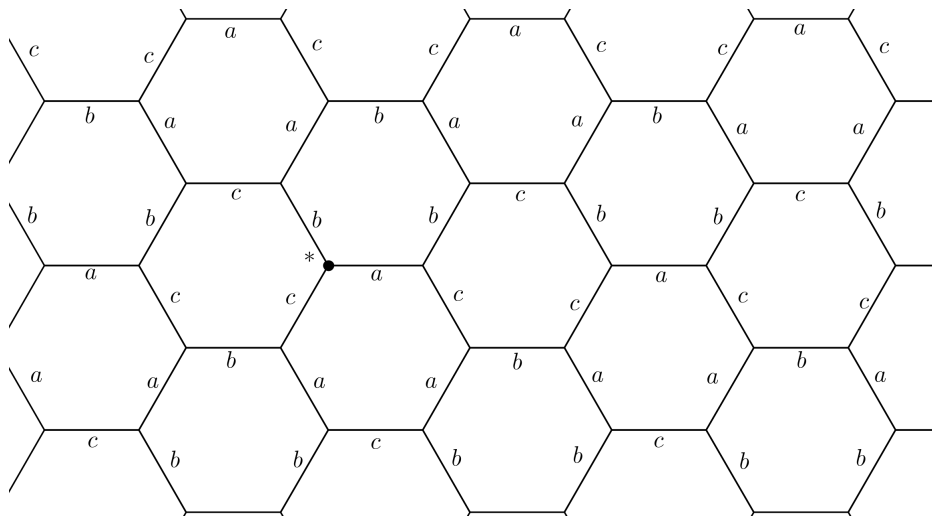
Figura 1.11: Este arreglo triangular equilátero tiene tamaño 8. En general, un arreglo triangular equilátero de tamaño n se compone de hexágonos que forman un arreglo triangular de tal manera que cada lado del arreglo tiene n hexágonos. De ahora en adelante a estas regiones las denotaremos por T_n .

Los grupos de Conway nos permitirán demostrar el siguiente resultado.

Teorema 1.6 (Conway). *Para toda n , el arreglo triangular de tamaño n no puede ser teselado por bubulubus.*

Demostración. Recordemos que el grupo representado por los bubulubus es:

$$B = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = B_1 = B_2 = B_3 = 1 \rangle$$



donde

$$B_3 = (ca)^3 b (ca)^3 b.$$

Notemos que $(ab)^3$ conmuta con c . Además, $(ab)^3a(ab)^3a = abababaabababa = 1$, así que $(ab)^3$ conmuta con a también. Análogamente, $(ab)^3$ conmuta con b . De la misma forma $(bc)^3$ y $(ca)^3$ conmutan con a , b y c . Se concluye que $(ab)^3$, $(ca)^3$ y $(bc)^3$ generan un subgrupo normal abeliano J de B . Consideremos el siguiente grupo cociente:

$$B_0 = B/J = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ca)^3 = 1 \rangle.$$

Denotaremos por C_1 , C_2 y C_3 a las palabras $(ab)^3$, $(ca)^3$ y $(bc)^3$, respectivamente.

La gráfica de Cayley $\Gamma(B_0)$ (ver apéndice), ilustrada en la Figura 1.12, se construye de pegar una colección infinita de hexágonos, cuyos hexágonos representan las palabras C_1 , C_2 y C_3 . Los hexágonos forman una teselación del plano, de forma que en cada vértice están pegados cada uno de los tres tipos de hexágonos. Fijemos un vértice de $\Gamma(B_0)$ al que llamaremos $*$.

Dada una curva π en la rejilla hexagonal original (Figura 1.7), la palabra $\alpha(\pi)$ determina otra curva $\bar{\pi}$ en $\Gamma(B_0)$ que comienza en $*$ y está formada

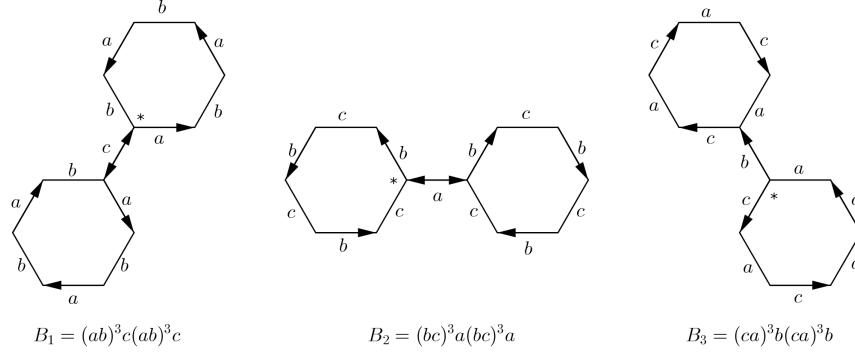


Figura 1.13: Los caminos en $\Gamma(B_0)$ determinados por los bubulubus

por las aristas de la gráfica que indica $\alpha(\pi)$.

El teorema quedará probado si mostramos que $\alpha(\pi) \neq 1$. Si $\alpha(\pi) = 1$, entonces $\bar{\pi}$ debe ser una curva cerrada (pero el recíproco no es cierto). Notemos que si $n \equiv 1 \pmod{3}$ la curva $\bar{\pi}$ no es cerrada (y así este caso queda resuelto). Para los otros dos se hace necesario introducir un invariante: el número de vueltas que la curva da a la familia de hexágonos que representan a la palabra C_i , para $i \in \{1, 2, 3\}$, que es lo que haremos a continuación.

Veamos el camino $\overline{B_1}$ en $\Gamma(B_0)$: Comenzando en $*$, $\overline{B_1}$ encierra el hexágono correspondiente a la palabra C_1 en el sentido opuesto a las manecillas del reloj, recorre una arista marcada por c , encierra de nuevo otro hexágono correspondiente a la palabra C_1 , esta vez en sentido de las manecillas del reloj, para finalmente recorrer de nuevo la arista marcada por c y llegar a $*$. En particular, el número total de vueltas con signo que el camino da alrededor de la familia de hexágonos correspondientes a C_1 es 0. Además es evidente que tal camino da 0 vueltas alrededor de la familia de hexágonos correspondientes a C_2 o C_3 . De la misma forma ocurre con los caminos $\overline{B_2}$ y $\overline{B_3}$ (véase Figura 1.13). Probaremos el siguiente resultado.

Proposición 1.7. *Sea R una región, y π su frontera. Si R es teselable por bubulubus, entonces el número de vueltas dadas por $\bar{\pi}$ a la familia de hexágonos correspondiente a C_i debe ser 0, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Demostración. Procedamos por inducción sobre el número de teselas que cubren a la región.

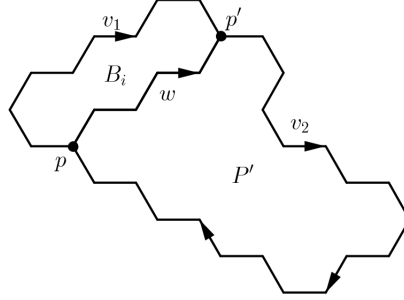


Figura 1.14: Paso de inducción para la prueba de la Proposición 1.7.

Si R es teselado por un solo bubulubu, entonces R mismo es una tesela, y ya hemos visto que el número de vueltas que da $\overline{B_i}$ a cada C_i es cero. Supongamos cierto el resultado para regiones teseladas con $n - 1$ bubulubus. Sea R una región teselada por n bubulubus. Entonces podemos cortar de R una tesela mediante un camino que vaya de un punto p a otro p' , ambos en la frontera (Figura 1.14).

Si $\alpha(w)$ es la palabra que corresponde al camino pp' dentro de R y $\alpha(v_1)$, $\alpha(v_2)$ las palabras que corresponden a los pedazos de la frontera de R que van de p a p' y de p' a p respectivamente, entonces $\alpha(v_1v_2)$ describe la frontera de R , así que nos interesa el número de vueltas que da $\overline{v_1v_2}$ a cada familia de hexágonos C_i . Pero $\overline{v_1v_2} = \overline{(v_1w^{-1})(wv_2)} = \overline{v_1w^{-1}\overline{wv_2}}$, y por lo tanto el número de vueltas que da $\overline{v_1v_2}$ a la familia de hexágonos correspondientes a cada C_i , es el mismo que el número de vueltas que dan $\overline{v_1w^{-1}}$ y $\overline{wv_2}$ a cada familia de hexágonos C_i juntas. Sin embargo $\alpha(v_1w^{-1}) = B_i$ y wv_2 corresponde a la frontera de una región teselada por $n - 1$ bubulubus; por caso base e hipótesis de inducción, el número de vueltas que da $\overline{\pi}$ a cada familia de hexágonos correspondiente a C_i es 0.

Finalmente, notemos que si el número de vueltas que $\overline{W}$ da a cada familia de hexágonos C_i es 0, entonces no depende del punto inicial del que $\alpha(W)$ está descrito: si $\alpha(W')$ es otra palabra que representa el mismo camino que $\alpha(W)$ pero con otro punto inicial, entonces $\overline{W'}$ difiere de $\overline{W}$ sólo por una conjugación. Claramente, tampoco depende del sentido en el que W es recorrido. $\square$

Sin embargo, para la palabra $t_n = (ab)^n(ca)^n(bc)^n$ que representa a la frontera de T_n no cumple con la condición de que el área con signo de cada familia de C_i encerrada por $\overline{T_n}$ es cero (Figura 1.15). $\square$

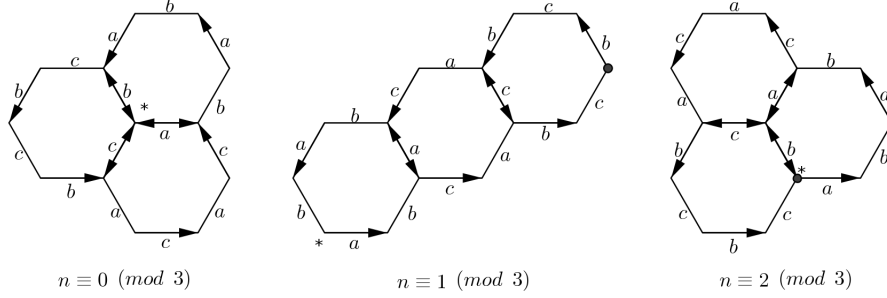


Figura 1.15: Los caminos determinados por $t_n = (ab)^n(ca)^n(bc)^n$, de acuerdo con su congruencia módulo 3. El vértice inicial corresponde a *, mientras que el punto final es el punto indicado.

1.3.2. Un problema con teselas triangulares

Consideremos de nuevo un arreglo triangular equilátero de tamaño N , el mismo que denotamos por T_N anteriormente (ver Figura 1.11). ¿Para qué N el arreglo T_N puede ser teselado por copias de T_2 ?

Usaremos de nuevo la rejilla hexagonal con las etiquetas establecidas en la Figura 1.7. Como vimos anteriormente, un camino π en esta rejilla determina un elemento $\alpha(\pi)$ del grupo $F = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1 \rangle$.

Ilustramos la tesela T_2 , junto con sus diferentes orientaciones en la Figura 1.16.

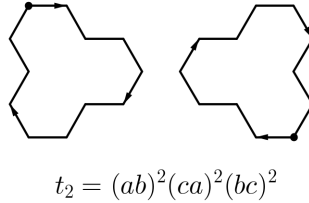


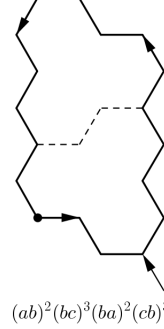
Figura 1.16: Ambas teselas pueden describirse mediante la palabra $t_2 = (ab)^2(ca)^2(bc)^2$.

Consideremos el grupo de Conway asociado a estas teselas:

$$G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = t_2 = 1 \rangle,$$

donde $t_2 = (ab)^2(ca)^2(bc)^2$.

Notemos que un paralelogramo formado con dos hexágonos en un lado y tres hexágonos en el otro, puede ser teselado con dos copias de T_2 , así que, por el criterio de Conway $(ab)^2(bc)^3(ba)^2(cb)^3$, $(ab)^2(ca)^3(ba)^2(ac)^3$, etcétera; es decir, las palabras que representan la frontera de este paralelogramo con sus diferentes posiciones, son la identidad en G , de donde tenemos que $(ab)^2$ conmuta con $(bc)^3$ y $(ca)^3$, y así sucesivamente.



Estas relaciones a su vez implican que $(ab)^2$ conmuta con $(bc)^6$ y $(ca)^6$, así como también $(ab)^3$ conmuta con $(bc)^6$ y $(ca)^6$. Combinando estos dos hechos tenemos que ab conmuta con $(bc)^6$ y con $(ca)^6$.

Como todas las relaciones en G y F tienen longitud par, la longitud módulo 2 describe un homeomorfismo G y F en $\mathbb{Z}_2$. Los núcleos, a los que denotamos por G_e y F_e respectivamente, forman subgrupos ($G_e < G$ y $F_e < F$) de índice 2. Notemos que G_e consiste de las palabras reducidas de longitud par en G .

F_e es isomorfo al grupo libre de dos generadores $F_2 = \langle x, z \rangle$ mediante el isomorfismo que manda $x \mapsto ab$ y $z \mapsto bc$ (pues las palabras de longitud par se expresan de manera única en términos de ab , $(ab)^{-1}$, bc , $(bc)^{-1}$, $ca = (bc)^{-1}(ab)^{-1}$ y $ac = (ab)(bc)$, si $a^2 = b^2 = c^2 = 1$). Sin embargo, F_2 tiene una descripción más simétrica: $\langle x, y, z \mid xyz = 1 \rangle$ con $x = ab$, $z = bc$ y $y = x^{-1}z^{-1} = ca$.

Para dar la construcción del subgrupo G_e estudiemos primero la gráfica de Cayley correspondiente a G : $\Gamma(G)$ se obtiene agregando ciclos (todos estos ciclos correspondientes a la relación $t_2 = 1$) a la gráfica $\Gamma(F)$ y pegando 2-celdas cuya frontera son estos ciclos. Por otro lado, el grupo G_e se obtiene recorriendo un número par de aristas, con las mismas relaciones que tiene G . Notemos que las palabras que se escriben en términos de x , y y z terminan a una distancia par de la identidad de G (donde la distancia se mide por

el número de aristas atravesadas), esto ve sólo las 2-celdas que están a una distancia par de la identidad; pero las 2-celdas que están a una distancia impar de e (como bt_2b) y que sí deberían anularse (pues rodean una 2-celda) no son tomadas en cuenta. Basta agregar una de estas 2-celdas a las relaciones que describen a G_e (por ejemplo bt_2b) y a la relación para considerarlas a todas. Usando entonces que $t_2 = 1$ y $bt_2b = 1$ obtenemos que:

$$G_e = \langle x, y, z \mid xyz = x^2y^2z^2 = x^{-3}y^{-3}z^{-3} = 1 \rangle$$

$$\text{pues } bt_2b = b(ab)^2(ca)^2(bc)^2b = b(ab)^2aa(ca)^2cc(bc)^2b = (ba)^3(ac)^3(cb)^3 = (ab)^{-3}(ca)^{-3}(bc)^{-3}.$$

Ya vimos que x , y y z conmutan con x^6 , y^6 y z^6 , así que estos últimos tres generan un subgrupo $J \triangleleft G_e$ que conmuta con todo elemento de G_e . Podemos entonces considerar el cociente $G_e/J = G_0$. Sea $H < G_0$ el subgrupo generado por x^2 , y^2 y z^2 ; y $H' < G_0$ generado por x^{-3} , y^{-3} y z^{-3} . Los subgrupos H y H' cumplen dos propiedades importantes, las cuales quedan expresadas en las siguientes dos proposiciones. Antes, recordemos el concepto de grupo triangular (una buena referencia es [5])

Definición 1.8. Sea $M \geq 2$ número natural. El grupo triangular $\Delta(M)$ está generado por reflexiones sobre los lados de un triángulo equilátero con ángulo π/n (medido en radianes), actúa sobre la esfera en el caso $M = 2$, en el plano Euclideo para $M = 3$ y sobre el plano hiperbólico cuando $M \geq 4$. El grupo triangular queda representado como:

$$\Delta(M) = \langle A, B, C \mid A^2 = B^2 = C^2 = (AB)^M = (BC)^M = (CA)^M = 1 \rangle.$$

El grupo triangular que preserva orientación $T(M) \leq \Delta(M)$ está representado a su vez por:

$$T(M) = \langle X, Y, Z \mid XYZ = X^M = Y^M = Z^M = 1 \rangle$$

donde $X = AB$, $Y = CA$ y $Z = BC$.

Nota: En general, se pueden considerar grupos triangulares generados por las reflexiones sobre los lados de cualquier triángulo con ángulos interiores múltiplos racionales de π (no necesariamente equilátero). Sin embargo, para nuestros fines basta considerar éstos grupos triangulares especiales.

Proposición 1.9. Los subgrupos H y H' son isomorfos a los grupos $T(3)$ y $T(2)$ respectivamente.

Demostración. Consideremos el morfismo $g : T(3) \mapsto H$ tal que $g(X) = x^2$, $g(Y) = y^2$ y $g(Z) = z^2$. Como $H < G_0 = \langle x, y, z \mid xyz = x^2y^2z^2 = x^{-3}y^{-3}z^{-3} = x^6 = y^6 = z^6 = 1 \rangle$ entonces $g(XYZ) = (x^2)(y^2)(z^2) = 1$ y $g(X^3) = (x^2)^3 = x^6 = 1$. Análogamente tenemos que $g(Y^3) = g(Z^3) = 1$, por lo que g está bien definido. Luego H es al menos cociente del grupo $T(3)$.

Consideremos el grupo triangular completo $\Delta(3)$ y $f : G \mapsto \Delta(3)$ morfismo de grupos tal que $f(a) = A$, $f(b) = B$ y $f(c) = C$. El morfismo f está bien definido pues $f(a^2) = A^2 = 1$ (de igual manera sucede con b^2 y c^2) y $f(t_2) = f(ab)^2 f(ca)^2 f(bc)^2 = (BA)(AC)(CB) = 1$.

Además, $f(x^{-3}y^{-3}z^{-3}) = (BA)^3(AC)^3(CB)^3 = 1$ y $f(x^6) = [f((ab)^2)]^3 = (BA)^3 = 1$ (análogamente, se tiene el mismo resultado para y^6 y z^6). Notemos que f envía los generadores de H a generadores de $T(3)$, pues $f(x^2) = BA$, $f(y^2) = AC$ y $f(z^2) = CB$, así que H es isomorfo al grupo triangular $T(3)$ que preserva orientación.

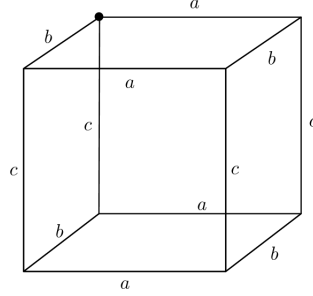
Haciendo el mismo análisis, se demuestra que H' es isomorfo al grupo $T(2)$. $\square$

Proposición 1.10. $G_0 = H \times H'$

Demostración. En efecto, H y H' conmutan uno con otro y juntos generan al grupo G_0 . Basta verificar que $H \cap H' = \{1\}$. Tomemos un elemento $h \in H \cap H'$ y supongamos que $h \neq 1$. La función f definida en la demostración de la proposición anterior es un isomorfismo entre H y $T(3)$, por lo que h como elemento de H cumple que $f(h) \neq 1 \in T(3)$. Sin embargo, $f(x^{-3}) = f((ab)^{-3}) = 1$ al igual $f(y^{-3}) = f(y^{-3}) = 1$, de forma que $f[H'] = \{1\}$, de donde si $h \in H'$ entonces $f(h) = 1$, una contradicción. $\square$

Observemos ahora las gráficas de Cayley de los grupos triangulares completos $\Delta(2)$ y $\Delta(3)$. La primera, formada por tres familias de cuadrados correspondientes a las palabras $(ab)^2$, $(ca)^2$ y $(bc)^2$ es ni más ni menos que un cubo (ver Figura 1.17). Por otro lado, $\Gamma(\Delta(3))$ se forma por tres familias de hexágonos, correspondientes a las palabras $(ab)^3$, $(bc)^3$ y $(ca)^3$, con cada tipo de hexágono pegándose en cada vértice de la gráfica (notemos que esta gráfica es la misma que la ilustrada en la Figura 1.12 del ejemplo de los bubulubus).

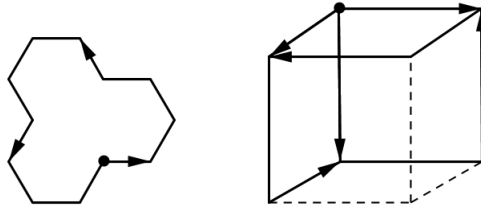
Dado un camino π en la rejilla hexagonal original (Figura 1.7), denotamos por $\varphi(\pi)$ a la curva en la gráfica $\Gamma(\Delta(3))$ que comienza en el vértice 1 y que está formada por las aristas que indica la palabra $\alpha(\pi)$. De la misma manera, $\varphi'(\pi)$ denota la curva determinada por π en $\Gamma(\Delta(2))$. Notemos que

Figura 1.17: La gráfica $\Gamma(\Delta(2))$.

el número de cuadrados de la misma familia encerrados por una curva cerrada en $\Gamma(\Delta(2))$ está bien definida sólo módulo 2. Al igual que en el ejemplo de los bubulubus, encontramos un invariante de áreas encerradas por curvas que representan la frontera de regiones teselables.

Proposición 1.11. *Sea R una región de la rejilla hexagonal original y π su frontera. Si R es teselable por copias de T_2 , entonces el número de vueltas que da $\varphi(\pi)$ a la familia de hexágonos correspondientes a $(ab)^3$ módulo 2 es el mismo que número de vueltas que da $\varphi'(\pi)$ a la familia de cuadrados correspondientes a $(ab)^2$ módulo 2. De igual manera ocurre con las otras dos familias de polígonos.*

Demostración. Procedamos por inducción sobre el número de teselas que cubren a R . Si R se cubre con una tesela, R mismo es una tesela, así que $\alpha(\pi) = t_2 = (ab)^2(ca)^2(bc)^2$. $\varphi(t_2)$ encierra un hexágono de cada tipo, mientras que $\varphi'(t_2)$ encierra también un cuadrado de cada tipo (ver Figura 1.18):

Figura 1.18: Las curvas $\varphi(t_2)$ y $\varphi'(t_2)$.

Sea R una región teselable por n copias de T_2 (con $n > 1$). Sean p y p' dos puntos distintos en la frontera de R y w un camino que va de p a p'

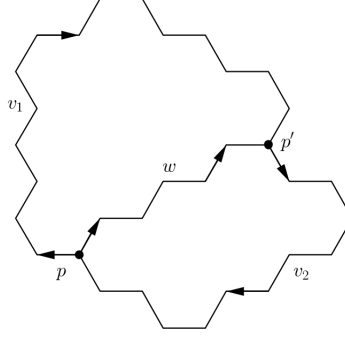


Figura 1.19: Paso de inducción.

dentro de R que divide a la región en dos regiones teselables por copias de T_2 . Sean v_1 el pedazo de frontera de R que va de p a p' , y v_2 el pedazo de frontera de R que va de p' a p . Entonces $\alpha(v_1v_2)$ describe la frontera de R .

Nos interesa el número de vueltas que da $\varphi(v_1v_2)$ a cada familia de hexágonos y $\varphi'(v_1v_2)$ a cada familia de cuadrados.

Pero $\varphi(v_1v_2) = \varphi((v_1w^{-1})(wv_2)) = \varphi(v_1w^{-1})\varphi(wv_2)$ así que el número de vueltas que da $\varphi(v_1v_2)$ a cada la familia de hexágonos, es el mismo que el número de vueltas que dan $\varphi(v_1w^{-1})$ y $\varphi(wv_2)$ a cada familia de hexágonos juntas.

De la misma forma la paridad del número de vueltas que da $\varphi'((v_1)(v_2))$ a cada tipo de cuadrado es la misma que la paridad del número de vueltas que da $\varphi'(v_1w^{-1})$ más el número de vueltas que da $\varphi'(wv_2)$ a cada familia de cuadrados juntas.

Sin embargo v_1w^{-1} y wv_2 corresponden a las fronteras de dos regiones teseladas por un número menor de copias de T_2 , por hipótesis de inducción la paridad del número de vueltas que da $\varphi(wv_2)$ a cada hexágono etiquetada por $(ab)^3$ es la misma que la paridad del número de vueltas que da $\varphi'(wv_2)$ a cada tipo de cuadrado etiquetado por $(ab)^2$. Igualmente ocurre con las dos familias de polígonos restantes; también v_1w^{-1} cumple con estas condiciones. De esta manera, $v_1v_2 = \pi$ cumple las cualidades que pedíamos. $\square$

El resultado anterior nos permitirá probar lo siguiente.

Teorema 1.12 (Conway). T_N se tesela por copias de T_2 si y sólo si $N \equiv 0, 2, 9, 11 \pmod{12}$

Demostración. A partir de esta condición necesaria para la teselación de regiones descrita en la Proposición 1.11, podríamos tratar de verificar para

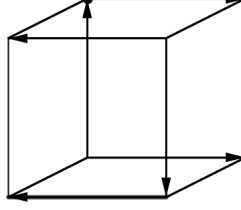


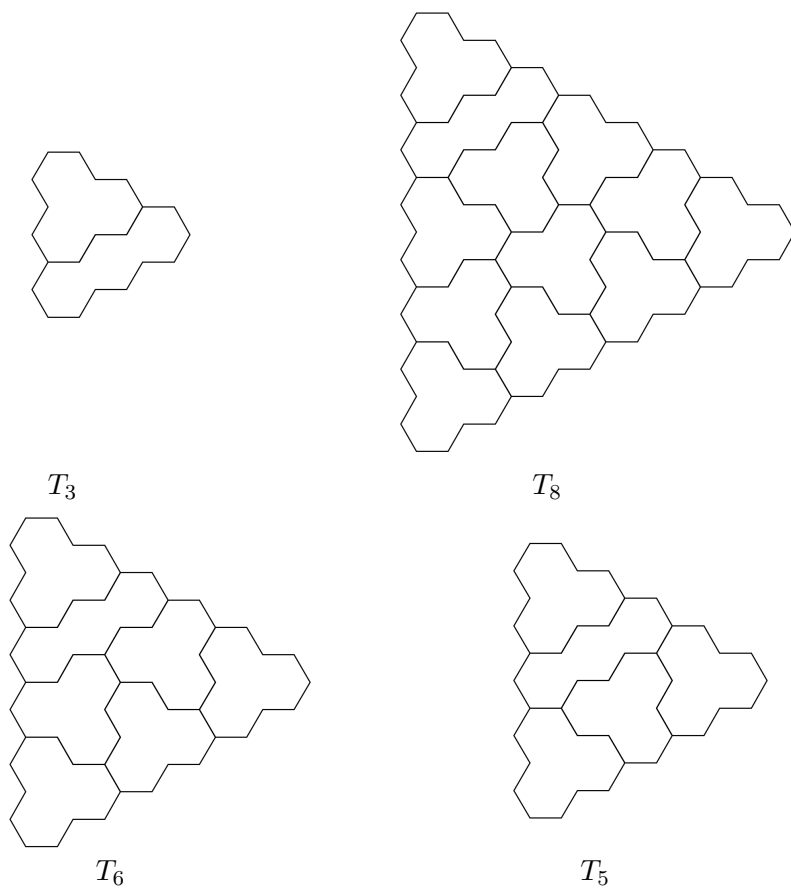
Figura 1.20: La curva $\varphi'(B_1)$ da tres vueltas a la cara marcada por $(ab)^2$.

qué $k \in \mathbb{N}$, T_k no cumple con estas condiciones; sin embargo, los cálculos pueden ser complicados.

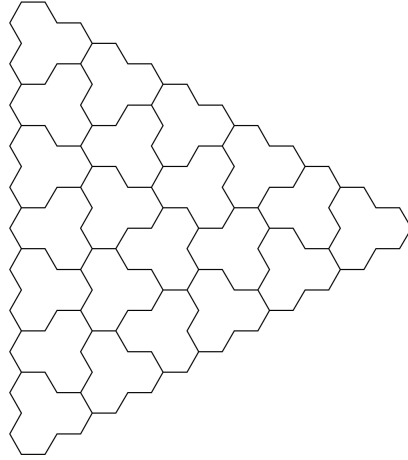
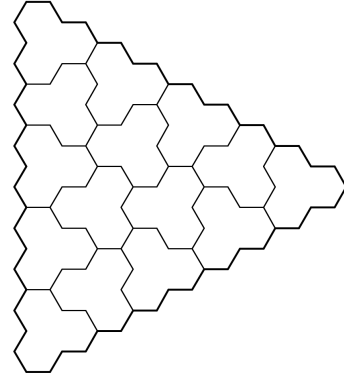
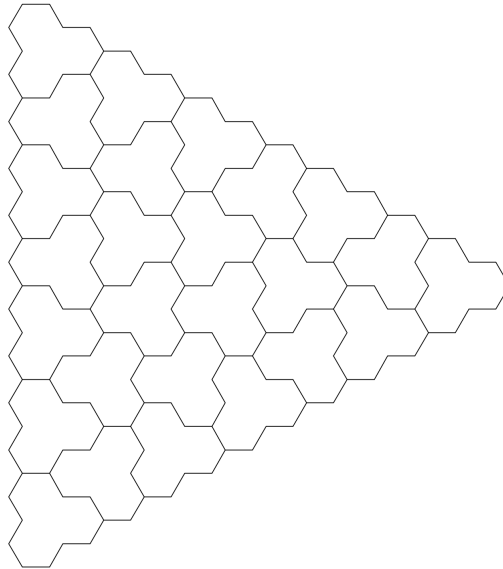
De cualquier forma, hay un truco que podemos usar: como vimos en el ejemplo de los bubulubus, el número de vueltas que da $\varphi(B_i)$ a cada familia de hexágonos es 0. Sin embargo $\varphi'(B_1)$ da 1,5 vueltas a la cara marcada por $(ab)^2$ baja por una arista marcada por c , da de nuevo 1,5 vueltas a la cara $(ab)^2$ para regresar al punto inicial recorriendo una arista c (ver Figura 1.20). De esta manera $\varphi'(B_1)$ da $3 \equiv 1 \pmod{2}$ vueltas a la cara $(ab)^2$. De la misma forma ocurre con B_2 y B_3 .

Así que, si una región es teselada por copias de T_2 y un bubulubu, no cumplir con la proposición anterior. Por otro lado, el número de hexágonos que debe poseer un arreglo T_k para ser teselado debe ser múltiplo de 3, es decir $\frac{k(k+1)}{2} \equiv 0 \pmod{3}$ por lo que una condición necesaria es $k \equiv 0, 2 \pmod{3}$.

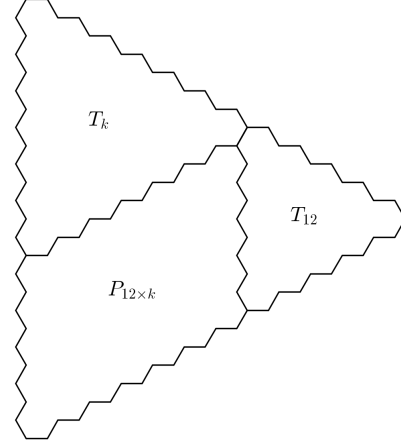
Notemos que T_3 , T_5 , T_6 y T_8 pueden ser teselados por copias de T_2 y un bubulubu, así que estos no pueden ser teselados por solo T_2 .



Por otro lado, T_2 , T_9 , T_{11} y T_{12} sí pueden ser teselados:

 T_{11}  T_9 Figura 1.21: T_{12}

Además, dado un arreglo T_k teselado, este puede extenderse a un arreglo T_{k+12} teselado añadiendo un paralelogramo $P_{12 \times k}$ y un T_{12} .



Ya vimos que T_{12} es teselable por copias de T_2 . Para $k > 1$ el paralelogramo $P_{12 \times k}$ puede ser teselado por paralelogramos de 2×6 y 3×6 los cuales también son teselables por T_2 's:

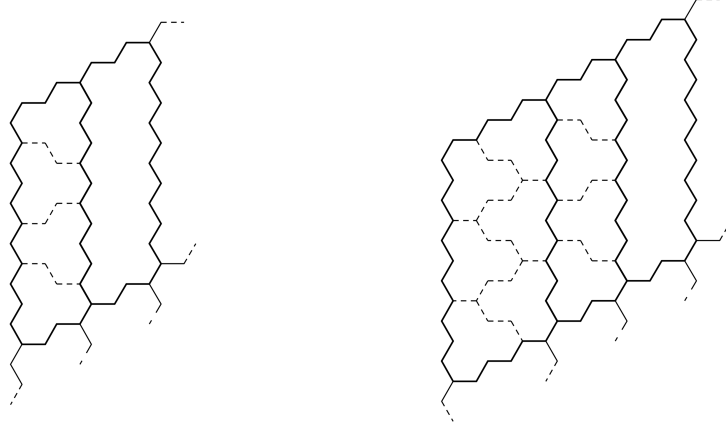


Figura 1.22: Teselado para k par.

Figura 1.23: Teselado para k impar.

Así, T_N se tesela por copias de T_2 si y sólo si $N \equiv 0, 2, 9, 11 \pmod{12}$

□

Un análisis muy similar al que acabamos de hacer (véase la referencia [1]) prueba que:

Proposición 1.13. *Para $2 < M < N$ el arreglo T_N no puede ser teselado por copias de T_M .*

Capítulo 2

Criterio de Thurston

En el capítulo anterior expusimos condiciones necesarias para el teselado de regiones simplemente conexas. En este capítulo deseamos ir más allá: queremos dar condiciones suficientes para decidir cuando una región es tesimalable.

El método empleado por Thurston en su artículo *Conway's tiling groups* [1] explota la sencillez y simetría de las gráficas de Cayley de ciertos grupos de Conway. Mediante una interpretación geométrica de las gráficas, traduce el problema de teselado a un problema de encontrar superficies de área mínima con una frontera específica.

A continuación, trabajaremos con dos familias de teselas y veremos cómo Thurston obtiene un nuevo criterio que extiende al de Conway. Cabe mencionar que el artículo [1] tiene errores en dos fórmulas que, sin embargo, aquí las corregimos.

2.1. Rombos

Retomemos las teselas rombo, presentadas en el capítulo anterior.

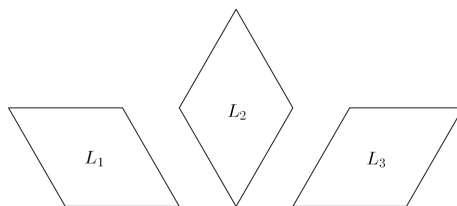


Figura 2.1: Las teselas rombo L_1 , L_2 y L_3 .

Vimos que el grupo de Conway de los rombos es:

$$L = \langle a, b, c \mid aba^{-1}b^{-1} = bcb^{-1}c^{-1} = cac^{-1}a^{-1} = 1 \rangle.$$

Incluso probamos que $L = \mathbb{Z}^3$, así que la gráfica de Cayley $\Gamma(L)$ es el esqueleto de una teselación del espacio por cubos añadiendo las caras de los cubos. De forma más específica, podemos pensar a $\Gamma(L)$ encajada en $\mathbb{R}^3$ de manera tal que las proyecciones de las aristas correspondientes a los generadores a , b y c en $\Gamma(L)$ coincidan con las aristas a , b y c respectivamente, de la teselación equilátera ilustrada en la figura de la página 14. Sin pérdida de generalidad, arreglamos la gráfica de manera que el vértice en $\Gamma(L)$ correspondiente a la identidad e esté ubicado en $(0, 0, 0)$.

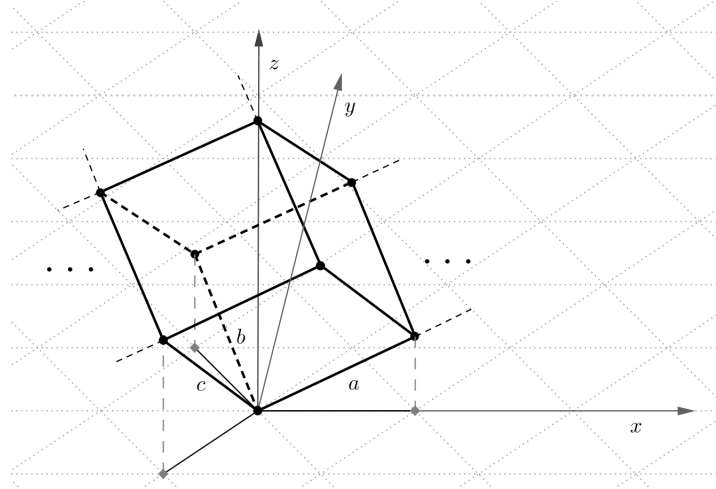


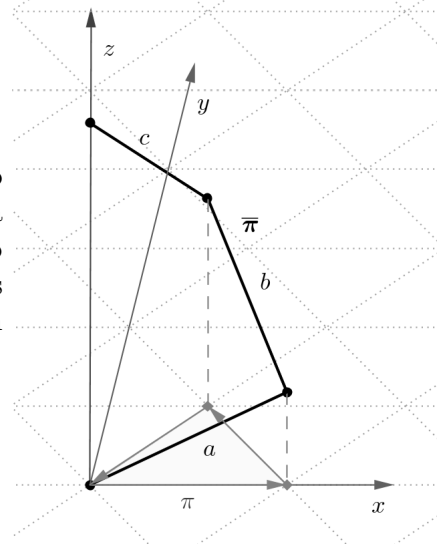
Figura 2.2: Fragmento de la gráfica $\Gamma(L)$.

A una cara de un cubo le llamamos *celda*. Notemos que la proyección sobre el plano $z = 0$ de cualquier celda es un rombo.

Dado un camino π en el plano, lo trasladamos (sólo para propósitos de notación) de manera tal que el punto desde donde empieza quede justo en el vértice $e \in \Gamma(L)$.

Definición 2.1. Definimos el *levantamiento* de π como una curva $\bar{\pi}$ en $\Gamma(L)$ la cual comienza en e y está conformada por las aristas correspondientes a la palabra $\alpha(\pi)$.

Notemos que si π representa camino cerrado, $\bar{\pi}$ no tiene por qué ser una curva cerrada: por ejemplo, el camino π determinado por la palabra abc es cerrado. Sin embargo, $\bar{\pi}$ no es un camino cerrado en $\Gamma(L)$.



Si una región R en el plano es teselada por rombos entonces, por el criterio de Conway, el levantamiento de la frontera de esta región debe ser una curva cerrada. De hecho, el teselado mismo puede levantarse a $\Gamma(L)$ tesela por tesela. No daremos una prueba de esta última afirmación; sin embargo, esta idea es el corazón del trabajo de Thurston [1].

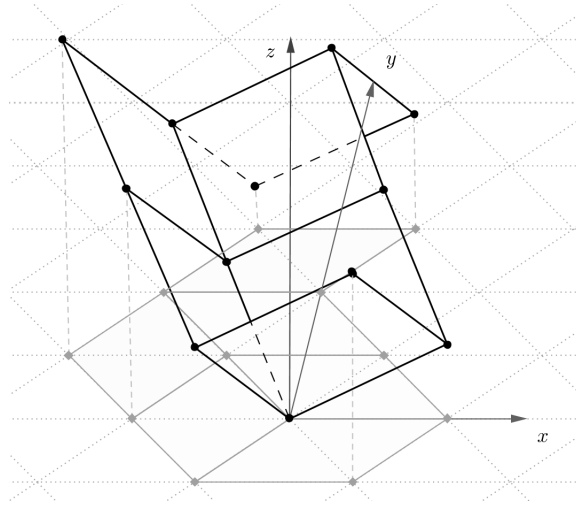


Figura 2.3: Dada una región teselada R en el plano, su levantamiento a $\Gamma(L)$ es una superficie S conformada por uniones de celdas.

Definición 2.2. Definimos una distancia $d(u, v)$ entre dos vértices u y v

en una región cualquiera R , como

$$d(u, v) = \min\{l(w) : \alpha(w) \in L^+\}$$

donde w es un camino que empieza en u , termina en v y está contenido en R (w puede o no formar parte de la frontera de R), $L^+ < L$ denota el conjunto de las palabras que sólo se escriben con exponentes positivos (por ejemplo, $ab^{-2}c^3a$ no forma parte de L^+ pero ab^2c^3a sí) y $l(w)$ representa la suma de los exponentes de cada letra que conforma a $\alpha(w)$ (por ejemplo, $l(ab^{-2}c^3a) = 1 - 2 + 3 + 1 = 3$).

En otras palabras, $d(u, v)$ es la longitud del camino más corto contenido en R “positivamente orientado” que va de u a v .

Además, si R es conexa, siempre es posible encontrar al menos un camino positivamente orientado de u a v , ya que cualquier arista negativamente orientada de un camino siempre puede cambiarse por dos aristas positivamente orientadas contenidas en R . Así, $d(u, v)$ está bien definida.

Notemos que $d(u, v)$ no es una distancia en el sentido usual, ya que no es simétrica:

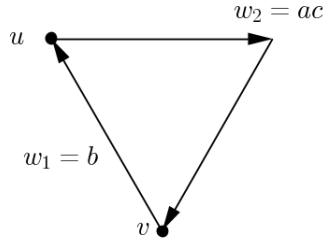


Figura 2.4: La distancia $d(v, u) = 1$, sin embargo, $d(u, v) = 2$. En la figura ilustramos dos caminos $w_1 = b$ y $w_2 = ac$ que realizan la distancia mínima entre los puntos.

Dada una región R y cualquier enlozamiento de R , su levantamiento en $\Gamma(L)$ (y en general el levantamiento de cualquier curva) está determinado por una función altura $h(v)$ donde v corre sobre los vértices de R . Además podemos elegir una escala apropiada tal que $h(v) \in \mathbb{Z}$ y que la diferencia de alturas entre los extremos de una arista levantada a $\Gamma(L)$ sea 1.

Existe una relación clave entre la función altura y la distancia definida previamente:

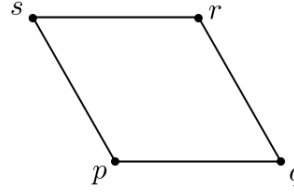
Proposición 2.3. *Dada una región teselada R en el plano, para cualesquiera par de vértices u y v en R se tiene que $h(u) - h(v) \leq d(v, u)$.*

Aquí corregimos un error en [1], donde la desigualdad aparece al revés (y sin demostración).

Demostración. Procedamos por inducción sobre el número de teselas que cubren a R .

Si R es cubierto por una tesela, R mismo es un rombo, digamos el representado por la palabra L_1 :

Figura 2.5: La función altura $h(v)$ para los vértices que conforman a R asigna (salvo suma de una constante) los siguientes valores: $h(p) = 0$, $h(q) = 1$, $h(r) = 2$ y $h(s) = 1$.



Como $d(u, v) \geq 0$ para todo par de vértices u y v , basta considerar u y v tales que $h(v) - h(u) > 0$. Además, si u y v son extremos de la misma arista $d(u, v) = h(v) - h(u) = 1$, así que basta verificar que la condición se cumple para los vértices p y r . Pero $d(p, r) = 2 \geq 2 = h(r) - h(p)$. El tratamiento para L_2 y L_3 es el mismo.

Supongamos verdadero el resultado para una región teselada por $n - 1$ rombos. Sea R una región que se tesela por n rombos. Cortamos una tesela mediante un camino w_1 , dividiendo así a R en dos regiones: una de ellas un rombo, y la otra R' una región teselada por $n - 1$ rombos. Sean u y v vértices cualesquiera de R .

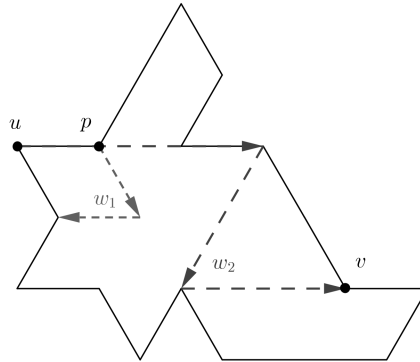


Figura 2.6: Cortamos una tesela a R mediante un camino w_1 .

Si u y v pertenecen a la misma región (ya sea a R' o al rombo que hemos cortado) por base e hipótesis de inducción, hemos terminado.

Por otro lado, si u y v pertenecen a diferentes regiones (digamos, u en la tesela y $v \in R'$), consideremos un camino w_2 positivamente orientado que va de u a v tal que la longitud de w_2 coincide con $d(u, v)$. Sea $p \in w_1 \cap w_2$ otro vértice. Como $p \in R'$, $d(u, p) \geq h(p) - h(u)$. Pero p también está en el rombo que cortamos, de donde $d(p, v) \geq h(v) - h(p)$. Luego $d(u, p) + d(p, v) \geq h(v) - h(u)$.

Afirmación: $d(u, v) = d(u, p) + d(p, v)$.

El pedazo del camino w_2 que va de u a p debe ser un camino de distancia mínima entre u y p , de lo contrario existiría w' camino positivamente orientado de longitud estrictamente menor que la de w_2 ya que al concatenar w' con el segmento de la curva w_2 que une p y v obtenemos un camino de longitud estrictamente menor a w_2 , una contradicción.

Análogamente, el pedazo del camino w_2 que va de p a v es un camino de distancia mínima, así que $d(u, v) = d(u, p) + d(p, v)$.

De aquí que $d(u, v) \geq h(v) - h(u)$. □

Dada una región R y su frontera π , el levantamiento π determina una única función altura h en sus vértices, salvo suma de constante. La proposición anterior da una condición necesaria para el teselado de R : para cualesquiera par de vértices $u, v \in \pi$ $h(u) - h(v) \leq d(v, u)$. Más aún, esta es una condición *necesaria y suficiente*, como lo enuncia el siguiente teorema.

Teorema 2.4 (Criterio de Thurston para rombos). *Una región R es tesselable si y sólo si, para cualesquiera par de vértices u y v en la frontera de R se cumple que $h(u) - h(v) \leq d(v, u)$.*

Demostración. Si π satisface esta condición, extendemos la función altura a los vértices del interior de R como sigue: Sea x un vértice interior de R , definimos

$$h(x) = \min_{v \in \pi} \{h(v) + d(v, x)\}$$

(esto corrige otra fórmula de [1]).

De esta forma h está bien definida para todos los vértices que forman parte de R . Además, esta función altura h cumple con dos propiedades muy importantes.

Proposición 2.5. *Para cualesquiera vértices x y y en R , $h(x) - h(y) \leq d(y, x)$.*

Demostración. Sea $u_y \in \pi$ tal que para todo $v \in \pi$ se cumple $h(v) + d(v, y) \geq h(u_y) + d(u_y, y)$. Entonces $h(x) \leq h(u_y) + d(u_y, x) \leq h(u_y) + d(u_y, y) + d(y, x) = h(y) + d(y, x)$ y así $h(x) - h(y) \leq d(y, x)$. $\square$

Proposición 2.6. *Sean x y y dos vértices en R adyacentes. Entonces $h(y) \equiv h(x) + 1 \pmod{3}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos $d(x, y) = 1$. Sea $u_y \in \pi$ tal que para todo $v \in \pi$ se cumple $h(v) + d(v, y) \geq h(u_y) + d(u_y, y)$ y W_y un camino de distancia mínima que va de u_y a y , es decir W_y realiza la distancia $d(u_y, y)$. De la misma forma se definen $u_x \in \pi$ y W_x . Denotamos por W' al camino W_x agregando la arista que une a x con y .

Consideremos el levantamiento de las curvas W_y , W_x y W' a $\Gamma(L)$. La altura de los vértices finales de las curvas $\overline{W_y}$ y $\overline{W_x}$ coinciden con $h(y)$ y $h(x)$ respectivamente. Además, el vértice final de la curva $\overline{W'}$ tiene altura $h(x) + 1$ y se proyecta al vértice y . Ambos vértices pertenecen a $\Gamma(L)$ por lo que la diferencia de sus alturas debe ser múltiplo de 3. Luego $h(x) + 1 - h(y) \equiv 0 \pmod{3}$. $\square$

De esta proposición se concluye que los tres vértices de cualquier triángulo que pertenece a R toman distintos valores módulo 3.

Además, si x y y son consecutivos, $d(y, x) \leq 2$. Gracias a la Proposición 2.5, $h(x) \leq h(y) + 2$. Análogamente, $d(x, y) \leq 2$ y $h(y) \leq h(x) + 2$, por lo que $h(y) - 2 \leq h(x) \leq h(y) + 2$.

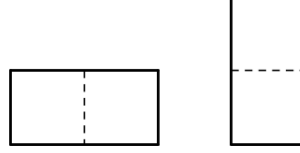
Esta última observación, junto con la proposición anterior, nos dice que la altura entre vértices consecutivos cambia en al menos uno y a lo más dos.

Para producir el teselado, borramos las arista donde la altura cambia en 2. Como los tres vértices de un triángulo toman distintos valores módulo 3 y la altura h incrementa al menos 1 a lo largo de una arista, cada triángulo tiene exactamente una arista donde h cambia en 2: al borrarlas, queda una colección de rombos que conforman un teselado para R .

$\square$

2.2. Dominós

Ahora trabajaremos con las
teselas dominó:



En el capítulo anterior vimos que el grupo de Conway de las teselas dominó está representado como:

$$D = \langle x, y \mid x^2 y x^{-2} y^{-1} = x y^2 x^{-1} y^{-2} \rangle.$$

¿Cómo podemos visualizar a la gráfica de Cayley $\Gamma(D)$? Consideremos el plano xy teselado por cuadrados unitarios con sus vértices con coordenadas en $\mathbb{Z}$, coloreado como un tablero de ajedrez. Pedimos que el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ del plano xy quede coloreado de negro.

Sobre el cuadro negro $[0, 1] \times [0, 1]$ construimos el camino poligonal determinado por la sucesión de puntos $(1, 1, -2)$, $(0, 1, -1)$, $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 2)$ etcétera, formando una *hélice positivamente orientada*, como la que se ilustra en la Figura 2.7.

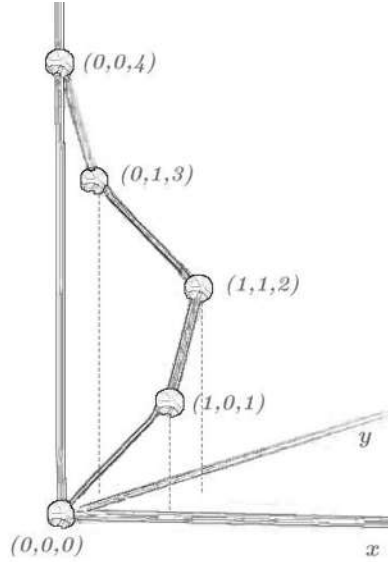


Figura 2.7: Fragmento de la hélice: las coordenadas en x y y corresponden a las esquinas del cuadro $[0, 1] \times [0, 1]$ recorridas en sentido positivo, la coordenada en z va creciendo de uno en uno, corriendo sobre todos los enteros.

También sobre el cuadro blanco $[1, 2] \times [0, 1]$ construimos un camino poligonal determinado por los puntos $(1, 1, -2)$, $(2, 1, -1)$, $(2, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 2)$ etcétera, formando esta vez una *hélice negativamente orientada* (Figura 2.8).

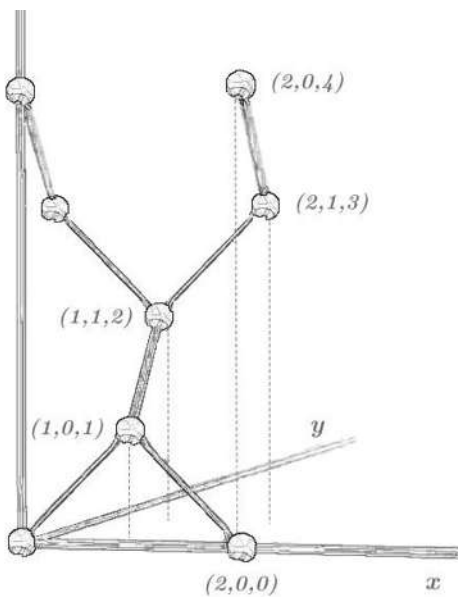


Figura 2.8: Fragmento de ambas hélices. Las coordenadas en x y y de los vértices que conforman a la hélice sobre el cuadro blanco $[1, 2] \times [0, 1]$ corresponden a las esquinas del cuadro recorridas en sentido negativo, mientras que la coordenada en z varía sobre todos los enteros y va creciendo de uno en uno.

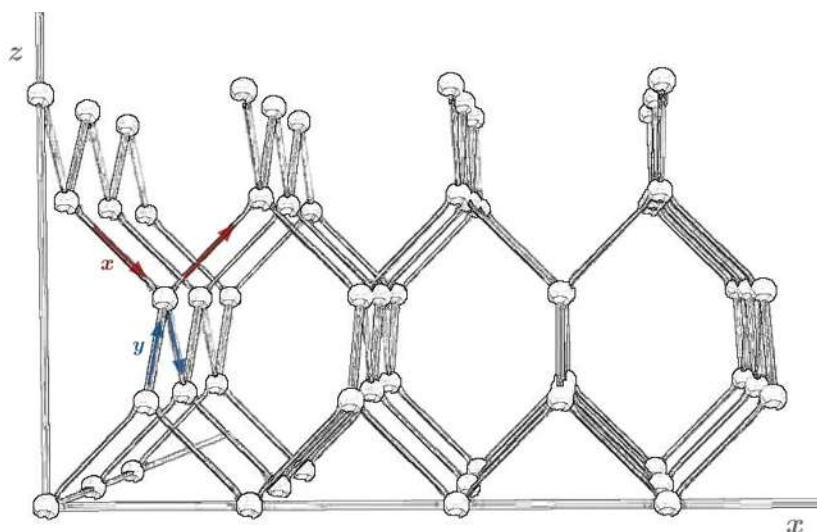


Figura 2.9: Fragmento de la construcción vista de frente.

Construimos una hélice positivamente orientada de manera análoga sobre todos los cuadros coloreados de negro, y una hélice negativamente orientada sobre los cuadros blancos. Etiquetamos por x o y a las aristas dependiendo de su proyección sobre el plano xy :

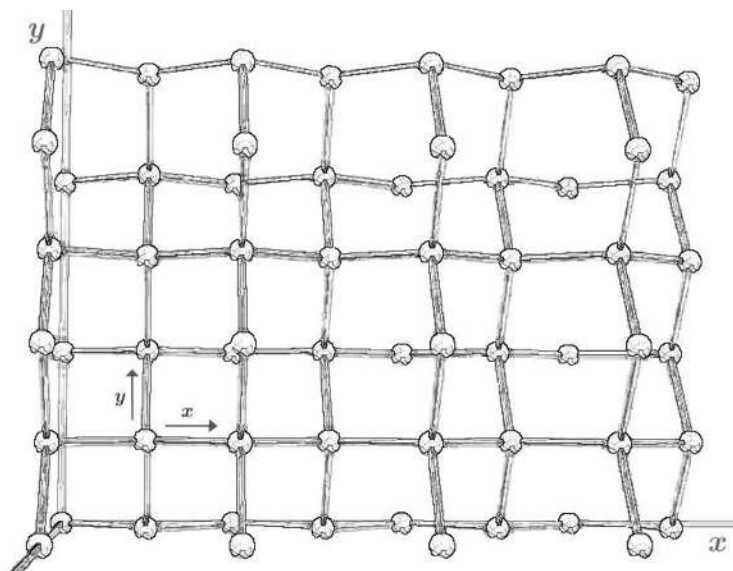


Figura 2.10: Fragmento de la construcción vista desde arriba. El etiquetado de las aristas depende de la proyección de las mismas sobre el plano xy .

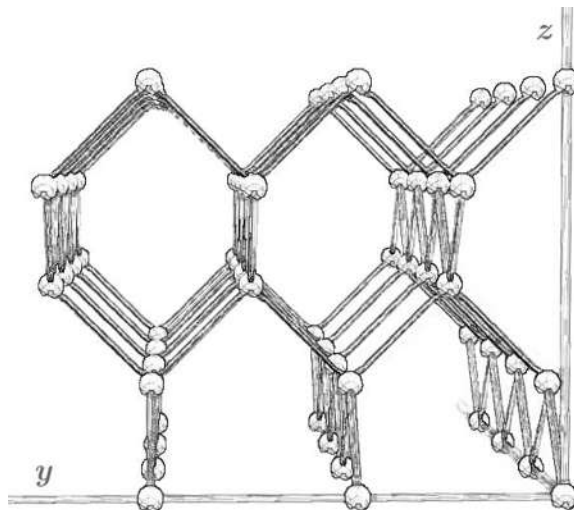


Figura 2.11: Otro punto de vista.

La gráfica resultante es, ni más ni menos que la gráfica de Cayley del grupo dominó: de cada vértice entran y salen dos aristas marcadas por x y y , y los ciclos que se forman corresponden a las palabras $yx^2y^{-1}x^{-2}$ (los hexágonos se aprecian en la Figura 2.9) y $xy^2x^{-1}y^{-2}$ (tales hexágonos se pueden observar mejor en el dibujo 2.11).

Al igual que en el caso de las teselas rombo, dado un camino π en el plano xy formado por aristas de la cuadrícula, éste se levanta a un camino $\bar{\pi}$ a la gráfica $\Gamma(D)$: este levantamiento induce una función altura h definida en los vértices.

También tenemos la misma interpretación geométrica de la condición de Conway: si una región R del plano puede ser teselada, el teselado mismo puede levantarse a una superficie en $\Gamma(D)$, de donde si π denota la frontera de R , $\bar{\pi}$ es necesariamente una curva cerrada en $\Gamma(D)$.

Definición 2.7. Dada una región R en el plano, definimos la *distancia* $d(u, v)$ entre dos vértices $u, v \in R$ como la longitud del camino más corto contenido en R positivamente orientado que va de u a v . En la Figura 2.12 ilustramos qué sentido le corresponde a cada arista de la cuadrícula.

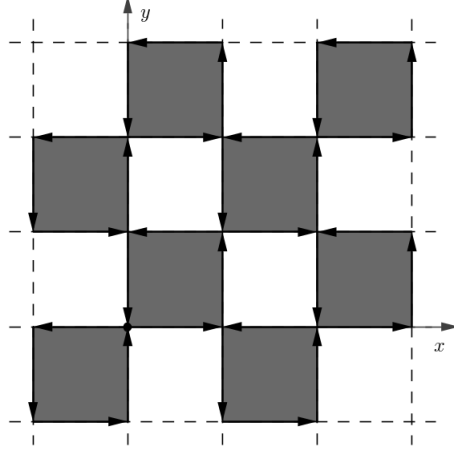


Figura 2.12: Retomamos la coloración del plano que dimos al principio: así el perímetro de los cuadros negros está positivamente orientado, quedando el perímetro de los cuadros blancos negativamente orientado.

Encontramos también la condición necesaria:

Proposición 2.8. *Sea R una región y π su frontera. Si R es teselable, un levantamiento del teselado define una función altura h sobre todos los vértices que conforman a R . Entonces para cualquier par de vértices u y v $h(u) - h(v) \leq d(v, u)$.*

Se procede por inducción sobre el número de teselas que cubre a R . Para el caso $n = 1$ por revisión de cada tesela se verifica fácilmente que los vértices cumplen la condición. La hipótesis y paso inductivo son iguales a la demostración de la Proposición 2.3, por lo que el lector no tendrá problemas en reproducir los detalles de esta demostración.

De esta forma, dada una región R arbitraria en el plano y π su frontera, dos condiciones necesarias para el teselado son: que π sea una curva cerrada en $\Gamma(D)$ y que para cualquier par de vértices $u, v \in \pi$ $h(u) - h(v) \leq d(v, u)$. Nuevamente, esta condición es suficiente.

Teorema 2.9 (Criterio de Thurston para dominós). *Una región R es teselable si y sólo si, para cualesquiera par de vértices u y v en la frontera de R se cumple que $h(u) - h(v) \leq d(v, u)$.*

Demostración. Si R cumple con estas condiciones, extendemos de la misma forma la función altura h a los vértices del interior como:

$$h(x) = \min_{v \in \pi} \{h(v) + d(v, x)\}$$

con x vértice interior de R .

Al igual que las teselas anteriores, la función altura definida de esta manera cumple que para cualesquiera vértices x y y en R , $h(x) - h(y) \leq d(y, x)$. Más aún, las teselas dominó cumplen una proposición análoga a la Proposición 2.6.

Proposición 2.10. *Sean x y y dos vértices en R adyacentes (sin pérdida de generalidad, $d(x, y) = 1$). Entonces $h(y) \equiv h(x) + 1 \pmod{4}$.*

Demostración. Sea $u_y \in \pi$ tal que para todo $v \in \pi$ se cumple que $h(v) + d(v, y) \geq h(u_y) + d(u_y, y)$ y W_y un camino de distancia mínima que va de u_y a y . De la misma forma se definen $u_x \in \pi$ y W_x . Denotamos por W' al camino W_x agregando la arista que une a x con y .

Consideremos el levantamiento de las curvas W_y , W_x y W' a $\Gamma(D)$. La altura de los vértices finales de las curvas $\overline{W_y}$ y $\overline{W_x}$ coinciden con $h(y)$ y $h(x)$ respectivamente. Además, el vértice final de la curva $\overline{W'}$ tiene altura $h(x) + 1$ y se proyecta al vértice y . Ambos vértices pertenecen a $\Gamma(D)$ por lo que la diferencia de sus alturas debe ser múltiplo de 4. Luego $h(x) + 1 - h(y) \equiv 0 \pmod{4}$. $\square$

De esta proposición se concluye que los cuatro vértices de cualquier cuadrado unitario que pertenece a R toman distintos valores módulo 4. Por otro lado, si x y y son consecutivos, $d(y, x) \leq 3$ por lo que $h(x) \leq h(y) + 3$. Análogamente, $d(x, y) \leq 3$ y $h(y) \leq h(x) + 3$, por lo que $h(y) - 3 \leq h(x) \leq h(y) + 3$. Así la altura entre vértices consecutivos cambia en al menos 1 y a lo más 3.

Para producir el teselado, borramos las aristas donde la altura cambia en 3. Como los tres vértices de un cuadrado toman distintos valores módulo 4 y la altura h incrementa al menos 1 a lo largo de una arista, cada cuadro tiene exactamente una arista donde h cambia en 3: al borrarlas, obtenemos una colección de dominós que conforma un teselado para R .

$\square$

Capítulo 3

Teselaciones en el disco hiperbólico

En [2] Conway y Lagarias afirman que el invariante algebraico propuesto en el Criterio de Conway (Proposición 1.5) puede, en principio, definirse para teselaciones en regiones finitas de cualquier teselación periódica de $\mathbb{R}^2$ e inclusive del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$; aunque no explican cómo se extienden estas nociones algebraicas.

La dificultad está en etiquetar las aristas de una teselación (por ejemplo, en el disco hiperbólico $\mathbb{D}$) de manera natural, por lo que dar una forma explícita del grupo de Conway definido por unas teselas preestablecidas representa un problema complicado de manejar. Por otro lado, la función altura que propone Thurston sí puede extenderse de manera automática a teselaciones regulares de valencia par en $\mathbb{D}$, para teselas bien específicas (mariposas, las cuales definimos más adelante), lo que nos permitió obtener una condición necesaria y suficiente para la teselación de regiones.

3.1. Triángulos ideales

En el Capítulo 2 vimos cómo Thurston usa la gráfica de Cayley de los grupos de Conway para darle una interpretación geométrica al Criterio de Conway, y así obtener otro criterio para teselar regiones finitas del plano. En este Capítulo nos interesa extender la técnica de Thurston a teselaciones del disco hiperbólico.

Para ello, comenzaremos a trabajar con una teselación particular, y una vez que hayamos entendido cómo trabaja el criterio de Thurston en este caso, estaremos listos para dar una generalización.

Definición 3.1. *La triangulación de Farey es el resultado de trazar todas las geodésicas en $\mathbb{H}$ con extremos en los puntos $(\frac{a}{b}, 0), (\frac{c}{d}, 0)$ tales que $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $ad - bc = 1$. Además, mediante la proyección estereográfica, podemos considerar la triangulación de Farey en $\mathbb{D}$.*

Para consultar los detalles acerca de esta triangulación, recomendamos [6, Capítulo 1]

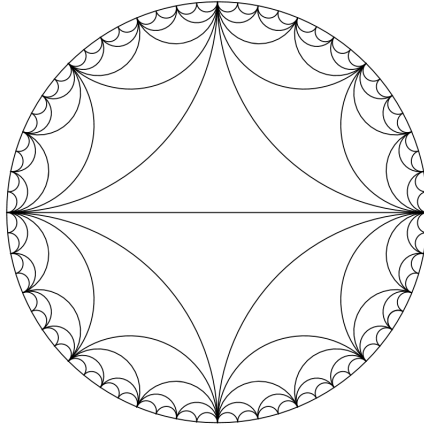


Figura 3.1: Triangulación de Farey en $\mathbb{D}$.

Un *diamante* es un cuadrilátero formado de la unión de dos triángulos ideales (de los que conforman a la triangulación) que comparten una arista. ¿Cuándo una región es teselable por diamantes?

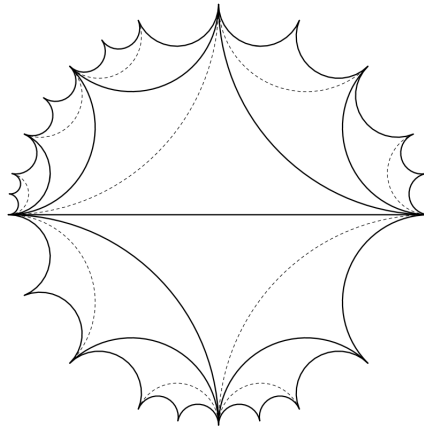


Figura 3.2: Una región teselada por diamantes

Denotamos por $\mathcal{R}$ al conjunto de vértices de la teselación. Inspirados en las gráficas de Cayley de los grupos de Conway para dominós y rombos, consideramos la siguiente gráfica (a la que llamaremos $\Gamma(F)$) con vértices en $\mathcal{R} \times \mathbb{Z}$ construida como sigue:

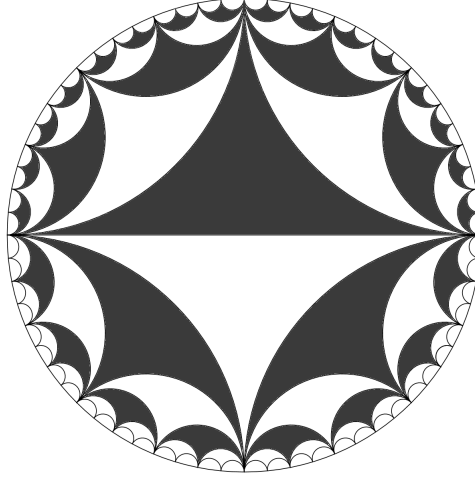


Figura 3.3: Coloreamos la teselación de blanco y negro alternadamente.

Colocamos un vértice en $(1, 0)$.

De manera inductiva, si ya hemos colocado un vértice en (q, n) , para cada $r \in \mathcal{R}$ tal que r y q están unidos mediante una geodésica:

1. Si hay un triángulo negro a la izquierda de la geodésica (recorrida de q a r), colocamos un vértice en $(r, n + 1)$ unido mediante una arista con el vértice en (q, n) .
2. Si hay un triángulo blanco a la izquierda de la geodésica (recorrida de q a r), colocamos un vértice en $(r, n - 1)$ unido mediante una arista con el vértice en (q, n) .

Notemos que $\Gamma(F)$ está compuesta (al igual que las gráficas de Cayley de los grupos de Conway de los dominós y los rombos) de *hélices positivamente orientadas* sobre los triángulos negros y *hélices negativamente orientadas* sobre los triángulos blancos. A diferencia de las gráficas anteriores, en esta salen una cantidad numerable de aristas de cada vértice y los ciclos que se

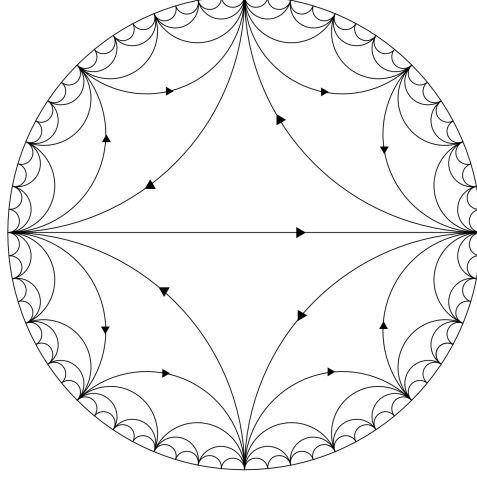


Figura 3.4: $\Gamma(F)$ define naturalmente una dirección sobre las aristas que conforman a la teselación: Una geodésica recorrida de p a q es recorrida en sentido positivo si a la izquierda de la geodésica hay un triángulo negro.

forman corresponden precisamente a los diamantes por los cuales deseamos teselar.

Dado un camino π en el disco, sin pérdida de generalidad (y sólo para propósitos de notación) podemos suponer que empieza en $1 \in \mathbb{S}^1$.

Entonces, podemos levantar el camino arista por arista a una curva $\bar{\pi}$ en $\Gamma(F)$ la cual comienza en el vértice que colocamos en $(1, 0)$ (ver Figura 3.5). Este camino induce a su vez una función altura h en los puntos $v_i \in \mathcal{R} \cap \pi$.

De nueva cuenta, no lo probaremos, pero, si una región R en el plano es teselada por diamantes, el teselado mismo puede levantarse a $\Gamma(F)$ tesela por tesela, así que el levantamiento de la frontera de una región teselable debe ser una curva cerrada: esta condición es una interpretación geométrica del criterio de Conway.

Para este caso, al trabajar con diamantes ideales, no es necesario pensar en un algoritmo para extender la función altura a puntos en el interior de la región R con frontera π : Basta elegir un vértice $v \in \pi \cap \mathcal{R}$ y un sentido para recorrer π empezando por v , esto define un camino, que a su vez asigna una

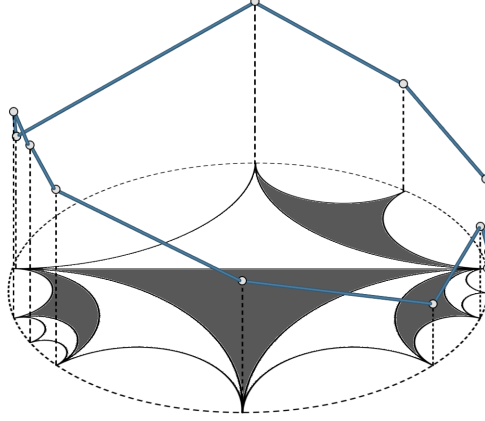


Figura 3.5: Un camino π conformado por aristas de la teselación en el disco, se levanta a una curva $\bar{\pi}$ en $\Gamma(F)$.

altura a los vértices en la frontera. Si π no se levanta a una curva cerrada en $\Gamma(F)$, entonces R no es teselable por diamantes. Si $\bar{\pi} \subset \Gamma(F)$ es curva cerrada, comenzamos a borrar las aristas en $\mathbb{D}$ cuyos extremos tengan diferencia de altura 2. Si al final de este procedimiento, no obtenemos una teselación, entonces R no era teselable.

3.2. Extensión del Criterio de Thurston

Hemos visto que los criterios de Thurston para rombos y dominós descritos en el Capítulo 2 (proposiciones 2.4 y 2.9) se extienden sin problemas a los diamantes hiperbólicos. Sin embargo, estas generalizaciones no se limitan sólo a este tipo de teselaciones.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Consideremos una teselación del disco hiperbólico por polígonos regulares y congruentes entre sí de n lados, de tal manera que alrededor de cada vértice hay $2m$ aristas. Sin pérdida de generalidad, pediremos que haya un vértice en $0 \in \mathbb{D}$. Llamamos *mariposas* a las teselas conformadas por la unión de dos polígonos de la teselación que comparten una arista. ¿Cuándo una región es teselable por mariposas?

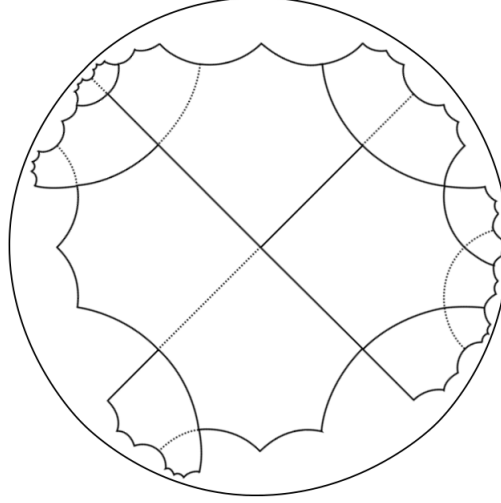


Figura 3.6: Una región teselada por mariposas, cuando $n = 6$ y $m = 2$.

Llamemos $\mathcal{V}$ al conjunto de vértices de la teselación. Como alrededor de cada vértice de la teselación hay una cantidad par de aristas (y así de polígonos), siempre podemos colorear la teselación con blanco y negro alternadamente. Usando esta coloración, construimos una gráfica $\Gamma(M)$ para las teselas mariposa (con vértices en $\mathcal{V} \times \mathbb{Z}$) igual que con la teselación anterior:

Colocamos un vértice en $(0, 0)$.

De manera inductiva, si ya hemos colocado un vértice en (q, n) , para cada vértice $r \in \mathcal{V}$ tal que r y q están unidos mediante una arista:

1. Si hay un polígono negro a la izquierda de la geodésica (recorrida de q a r), colocamos un vértice en $(r, n + 1)$ unido mediante una arista con el vértice en (q, n) .
2. Si hay un polígono blanco a la izquierda de la geodésica (recorrida de q a r), colocamos un vértice en $(r, n - 1)$ unido mediante una arista con el vértice en (q, n) .

Nuevamente, $\Gamma(M)$ está compuesta de *hélices positivamente orientadas* sobre los polígonos negros y *hélices negativamente orientadas* sobre los polígonos blancos.

Dado un camino π en el disco, sin pérdida de generalidad π comienza en $0 \in \mathbb{D}$. Entonces, podemos levantar el camino arista por arista a una curva $\bar{\pi}$ en $\Gamma(M)$ la cual comienza en el vértice que colocamos en $(0, 0)$. Este camino induce a su vez una función altura h en los puntos $v_i \in \mathcal{V} \cap \pi$.

El criterio de Conway para estos casos, también se traduce en que, dada una región R teselable con frontera π , la curva $\bar{\pi} \subset \Gamma(M)$ debe ser cerrada.

Más aún, $\Gamma(M)$ induce naturalmente una dirección sobre las aristas que conforman a la teselación: Una arista recorrida de p a q es recorrida en sentido positivo si a la izquierda de la arista hay un polígono negro. Esto a su vez permite establecer una “distancia” entre los vértices en $\mathcal{V}$.

Definición 3.2. *Dados dos vértices u y v en una región cualquiera R , definimos la distancia $d(u, v)$ como:*

$$d(u, v) = \min\{l(c) : c \in C^+\}$$

donde c es un camino formado por aristas de la teselación que empieza en u , termina en v y está contenido en R , C^+ denota el conjunto de los caminos formados por aristas recorridas en sentido positivo y $l(c)$ representa el número de aristas que conforman a c .

En otras palabras, $d(u, v)$ es la longitud del camino más corto contenido en R positivamente orientado que va de u a v .

Además, si R es conexa, siempre es posible encontrar al menos un camino positivamente orientado de u a v , por lo que $d(u, v)$ está bien definida.

Podemos entonces generalizar los resultados obtenidos en el Capítulo 2:

Proposición 3.3. *Dada una región R teselable por mariposas, para cualesquiera par de vértices u y v en R se tiene que $h(u) - h(v) \leq d(v, u)$.*

La demostración es idéntica que en las proposiciones 2.3 y 2.8 (páginas 36 y 44). Por un lado, se verifica por simple inspección que la condición se cumple sobre las teselas, y luego se procede por inducción sobre el número de mariposas con las que se tesela R .

Por otro lado, dada una región R con frontera π , tal que para cualesquiera par de vértices $u, v \in \pi$ se cumple que $h(u) - h(v) \leq d(v, u)$, extendemos la función altura a los vértices x del interior de R como:

$$h(x) = \min_{v \in \pi} \{h(v) + d(v, x)\}$$

También se tienen las siguientes observaciones, con demostración igual a las que se exponen en las proposiciones 2.5, 2.6 y 2.10.

Proposición 3.4. *Para cualesquiera vértices $x, y \in R$, se tiene que $h(x) - h(y) \leq d(y, x)$*

Proposición 3.5. *Sean x, y dos vértices en R adyacentes. Entonces $h(y) \equiv h(x) + 1 \pmod{n}$.*

De estas proposiciones se concluye que los vértices cualquier polígono que pertenece a R toman distintos valores módulo n . Por otro lado, si x y y son consecutivos, $d(y, x) \leq (n - 1)$ por lo que $h(x) \leq h(y) + (n - 1)$. Análogamente, $d(x, y) \leq (n - 1)$ y $h(y) \leq h(x) + (n - 1)$, por lo que $h(y) - (n - 1) \leq h(x) \leq h(y) + (n - 1)$. Así la altura entre vértices consecutivos cambia en al menos 1 y a lo más $n - 1$.

Hemos obtenido el teorema principal de este trabajo:

Teorema 3.6 (Criterio de Thurston generalizado). *Una región R es tesselable si y sólo si, para cualesquiera par de vértices u y v en la frontera de R se cumple que $h(u) - h(v) \leq d(v, u)$.*

Para producir el teselado, colocamos una tesela de manera que cubra una arista donde la altura cambia en $n - 1$. Como los n vértices de un polígono toman distintos valores módulo n y la altura h incrementa al menos 1 a lo largo de una arista, cada polígono tiene exactamente una arista donde h cambia en $n - 1$: la colección de mariposas distribuidas de esta manera conforma un teselado para R .

3.3. Criterio de Conway y Coloración

En el ya mencionado artículo de Conway y Lagarias, se prueba que el criterio de Conway es más fuerte que Coloración para el problema de teselaciones con bubulubus. ¿Qué pasará para las teselaciones con mariposas,

como las que acabamos de tratar?

Con anterioridad, expusimos una condición equivalente al Criterio de Conway: el levantamiento de la frontera en $\Gamma(M)$ debe ser una curva cerrada.

Proposición 3.7. *Para teselaciones del disco hiperbólico con las condiciones expuestas en la Sección 3.2, el Criterio de Conway y Coloración son equivalentes.*

Demostración. Sea R una región tal que cumple Coloración, y π su frontera. Sea N el conjunto de las aristas que conforman a los polígonos negros que contiene R , y B el conjunto de las aristas que forman parte de los polígonos blancos contenidos en R . Como R contiene la misma cantidad de polígonos blancos y negros, $|N| = |B|$. Además, $N \cap \text{int}(R) = B \cap \text{int}(R)$ por lo que $|N \cap \pi| = |B \cap \pi|$. Luego, dado un recorrido de π , $\bar{\pi}$ “sube” y “baja” el mismo número de veces en $\Gamma(M)$, por lo que $\bar{\pi}$ es una curva cerrada, y así cumple con el Criterio de Conway. Por otro lado, si R cumple el Criterio de Conway, podemos nuevamente considerar los conjuntos N y B descritos anteriormente. Como $\bar{\pi}$ es una curva cerrada, $|N \cap \pi| = |B \cap \pi|$. Además, $N \cap \text{int}(R) = B \cap \text{int}(R)$ sigue siendo verdadera, de donde $|N| = |B|$ y entonces R contiene la misma cantidad de polígonos blancos que de polígonos negros. $\square$

Apéndice A

Notación

A lo largo de la tesis, denotamos por π a los caminos en el plano, $\alpha(\pi)$ representa la palabra que describe a π y $\bar{\pi}$ denota a la curva en la Gráfica de Cayley que determina $\alpha(\pi)$.

Apéndice B

Apéndice

Definición B.1 (Gráfica de Cayley). *Si G es un grupo con la representación $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \mid W_1 = W_2 = \dots = W_k = 1 \rangle$, consideremos la gráfica dirigida cuyos vértices son los elementos del grupo: de cada $v \in \Gamma(G)$ salen n aristas etiquetadas con cada generador, y entran n aristas también etiquetadas por los generadores. La arista etiquetada por g_i une a v con vg_i . En caso de que el orden de los generadores sea 2, en vez de dibujar una flecha de v a vg_i y otra de vg_i a v , dibujamos una sola arista no dirigida etiquetada por g_i . Esta gráfica se extiende a un objeto bidimensional de la siguiente manera: se cosen k discos (a los que llamamos 2-celdas) en cada vértice $v \in \Gamma(G)$, uno por cada relación W_i , de tal manera que su frontera está descrita por la palabra W_i usando las aristas de $\Gamma(G)$. Se hace una excepción cuando las relaciones son de la forma $g_i^2 = 1$ ya que esta relación está ya incorporada al pedir que la arista no sea dirigida. Este objeto bidimensional es la gráfica de Cayley y la denotamos por $\Gamma(G)$.*

Nota: Normalmente a la gráfica sin los discos suele ser conocida como la gráfica de Cayley, y a la extensión bidimensional se le denota por $\Gamma(G)^2$. Sin embargo, a lo largo del texto, sólo manejamos al objeto bidimensional, por lo que decidimos cambiar la notación usual.

Bibliografía

- [1] W. P. Thurston, *Conway's Tiling Groups*. The American Mathematical Monthly. Vol. 97, no. 8 (1990), 757–773.
- [2] J. H. Conway, J. C. Lagarias, *Tiling with Polyominoes and Combinatorial Group Theory*. Journal of Combinatorial Theory, Series A 53 (1990), 183–208.
- [3] B. Grünbaum, G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman and Company (1987).
- [4] H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*. Springer-Verlag (1972).
- [5] W. Magnus, *Noneuclidean tessellations and their groups*. Academic Press (1974).
- [6] A. Hatcher, *Topology of Numbers*.
<http://www.math.cornell.edu/hatcher/TN/TNpage.html>