



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ADVECCIÓN EN REGIONES
IRREGULARES USANDO DIFERENCIAS FINITAS

Tesis

Que para obtener el grado de
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

Presenta

Erika Ruiz Díaz

Asesores:

Doctor en Matemáticas
José Gerardo Tinoco Ruiz

Doctor en Cs. Matemáticas
Francisco Javier Domínguez Mota

Morelia, Michoacán.

mayo de 2014

Índice general

Resumen	6
Abstract	7
Prefacio	8
1. Introducción	10
Antecedentes	10
1.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales	11
1.2. Diferencias Finitas	15
1.2.1. Conceptos fundamentales de la generación de mallas	15
1.2.2. Diferencias Finitas 1D	16
1.3. Diferencias Finitas en 2D para la ecuación de Poisson	25
1.4. Errores de truncación locales y órdenes de precisión	27
1.4.1. Consistencia	28
1.4.2. Estabilidad	30
1.4.3. Convergencia	30
2. Ecuación de advección 1+1D	34
2.1. Método Forward Time Center Space (FTCS)	35
2.2. Método Lax-Friedrichs	36
2.3. Método de Lax-Wendroff	39
2.4. Método Upwind	41
2.5. Ejemplos prácticos	49

3. Ecuación de advección en 2+1D en regiones rectangulares	59
3.1. Errores y Estabilidad	63
3.2. Advección en 2D	64
3.3. Ejemplos numéricos	72
4. Advección en Regiones Irregulares	78
4.1. Esquemas en Diferencias Finitas en el plano	78
4.2. UNAMalla	80
4.3. Esquemas en diferencias finitas para operadores lineales	81
4.4. Efecto de la geometría de la malla	82
4.4.1. Esquema propuesto	86
4.5. Ejemplos numéricos	88
5. Conclusiones	94
A. Códigos	96
Bibliografía	104

Índice de figuras

1.1. Mallado uniforme en el intervalo $[0, 1]$	17
1.2. Malla en el dominio espacio-tiempo	22
1.3. Malla para la discretización del problema (1.36).	26
2.1. Esténcil 1.	36
2.2. Característica de la ecuación de advección hacia atrás en el tiempo del punto (x_j, t_{n+1})	45
2.3. Mallado de la región $[0, 1] \times [0, 1]$	50
2.4. Esténcil en el método explícito	50
2.5. Comparación de los resultados de los 4 métodos con 21 nodos.	55
2.6. Comparación de los resultados de los 4 métodos con 41 nodos.	56
2.7. Comparación de los resultados de los 4 métodos con 100 nodos.	57
2.8. Comparación de los resultados de los 4 métodos con 1000 nodos.	58
3.1. Propagación de onda en 2D	67
3.2. Diferentes tipos de separación direccional	70
3.3. Método de Lax-Wendroff con 21 nodos por lado.	72
3.4. Método de Lax-Wendroff con 41 y 81 nodos por lado.	73
3.5. Método Upwind con 21, 41 y 81 nodos por lado.	74
3.6. Método de Lax-Friedrichs con 21, 41 y 81 nodos por lado.	75
4.1. Regiones irregulares.	78
4.2. Descripción gráfica de la definición (4.1).	80
4.3. Distribución arbitraria del punto p_0 y sus vecinos.	81
4.4. Dominio Ω con fronteras $\partial\Omega = L \cup B$	82

4.5. Estilo Upwind	84
4.6. Cuadrilátero que representa alguna celda de algún mallado G	87
4.7. Dominios	88
4.8. Comparación de los resultados del método explícito de 4 puntos con MIC.	92
4.9. Comparación de los resultados del método explícito de 4 puntos con CAB.	92
4.10. Comparación de los resultados del método explícito de 4 puntos con HA.	93
4.11. Comparación de los resultados del método explícito de 4 puntos con UC.	93

Resumen

El estudio de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) es un campo de gran interés en matemáticas debido a que es posible modelar muchos fenómenos físicos que ocurren en la naturaleza. En particular, el estudio de la ecuación de advección es de suma importancia en el modelado de aguas someras en lagos y lagunas que, sus dominios no presentan una geometría sencilla ni regular y como tal, existen pocos esquemas aplicables en este tipo de regiones.

En la actualidad, existen esquemas en diferencias finitas que nos ayudan a aproximar las solución de una EDP que trabajan tanto con regiones rectangulares planas como no-rectangulares; una de las principales motivaciones para usar métodos de aproximación de este tipo es el hecho de que por medio de estos se puede aproximar el problema original empleando un problema más sencillo que puede resolverse de manera eficiente. Los esquemas en diferencias finitas en regiones rectangulares se derivan con facilidad del Teorema de Taylor, sin embargo, su aplicación a regiones irregulares requiere de una malla convexa estructurada adecuada. Es posible obtener resultados satisfactorios para dichas regiones usando diferencias definidas sobre mallas estrucutradas generadas usando un método variacional.

En este trabajo se presentan algunos métodos comunes para la solución de la ecuación de advección en regiones en 1+1D y 2+1D, su implementacion en regiones regulares e irregulares y las pruebas para mostrar la eficiencia de los métodos al ver que tan exactos son los resultados que se tienen con los diferentes esquemas, en distintas regiones.

Palabras Clave: Ecuación de advección, regiones irregulares, diferencias finitas, métodos numéricos.

Abstract

The study of Partial Differential Equations (PDE) is a field of great interest in mathematics because it is possible to model many physical phenomena that occur in nature. In particular , the study of the advection equation is very important in modeling shallow water in lakes and ponds that their domains do not have simple and regular geometry and as such , there are few schemes applicable in such regions.

Currently, there are finite difference schemes that help us to approximate the solution of a PDE working both with flat rectangular regions as non-rectangular ; one of the main motivations for using methods such approach is the fact that through these you can approximate the original problem using a simpler problem that can be solved efficiently. The finite difference schemes for rectangular regions are derived easily from Taylor's theorem , however , its application to irregular regions requires proper convex structured mesh. It is possible to obtain satisfactory results for these regions using defined differences on estrucutradas meshes generated using a variational method.

Some common methods for solving the advection equation in regions 1 +1 D and 2 +1 D are presented in this paper, its implementation in regular and irregular regions and evidence to show the efficiency of the methods to see how accurate are the results we have with the different schemes in different regions.

Keywords: Advection equation, irregular regions, finite difference, numerical methods.

Prefacio

La teoría de ecuaciones en derivadas parciales (EDP) es uno de los campos de estudio más importantes en matemáticas, debido a que la gran mayoría de los fenómenos físicos que ocurren en la naturaleza se pueden modelar con EDP's; se trata de un campo de las matemáticas estrechamente ligado a problemas del mundo real. Se aplican en diferentes áreas de las matemáticas, física, ingeniería y otras ciencias.

En esta tesis nos centramos en la ecuación de advección para regiones irregulares ya que en la naturaleza los dominios que se presentan no tiene una geometría sencilla como un rectángulo o un cuadrado, sin embargo, también se trabajaran con dominios regulares y es importante recalcar que la ecuación de advección en $2D+1$ es un tema aún poco estudiado.

Los métodos de aproximación analítica a la solución de EDP's, proporcionan frecuentemente información útil acerca del comportamiento de la solución en valores críticos de la variable dependiente, pero tienden a ser más difíciles de aplicar que los métodos numéricos; con ayuda de computadoras, esquemas y modelos matemáticos se logra obtener soluciones que ofrecen resultados muy aproximados a la solución real analítica, ya que aunque tengamos un cierto margen de error nos ayuda a predecir el comportamiento de cierto fenómeno estudiado.

El contenido del primer capítulo está orientado a dar una idea los conceptos básicos que originan los esquemas usados en la tesis, se abordan esquemas que aproximan la primera y segunda derivada hasta segundo orden: diferencias hacia adelante, diferencias centradas, y diferencias hacia atrás, las cuales pueden obtenerse como una aplicación natural del teorema de Taylor. También se plantean tres puntos de suma importancia para esquemas en diferencias: *consistencia, convergencia y estabilidad*.

En el capítulo dos se empezará a trabajar con la ecuación de advección en $1+1D$,

hablaremos de los métodos que nos ayudarán a obtener resultados que queremos para nuestra aproximación como son: Forward Time Center Space (FTCS), Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff y Upwind, haremos ejemplos numéricos que no ayudarán a hacer una comparación entre ellos.

En el capítulo tres seguiremos con la ecuación de advección pero ahora en dos dimensiones en el espacio y una en el tiempo en regiones rectangulares; cabe recalcar que la ecuación de advección en regiones regulares ha sido poco estudiado, por los que abordaremos los métodos que existen actualmente y el comportamiento que tienen cuando se está trabajando numéricamente con este tipo de regiones. Se muestran algunos resultados obtenidos con el método Lax-Wendroff, Upwind y Lax-Friedrichs.

En el capítulo cuatro se trabaja con regiones irregulares en dos dimensiones, aquí se hace un especial manejo en cuanto a la geometría de la malla que es de suma importancia al manejar este tipo de regiones para mantener la estabilidad de nuestros esquemas; y en el último capítulo se exponen las conclusiones a las que se llegaron después de la elaboración de este trabajo de tesis.

Capítulo 1

Introducción

Antecedentes

Existen varios trabajos en la literatura acerca de cómo aproximar la solución de las ecuaciones diferenciales parciales, por medio de métodos analíticos o métodos numéricos. En particular los métodos numéricos más usados son los de diferencias finitas, elementos finitos, volúmenes finitos, método espectral, etcétera. Nosotros nos centraremos en el método de diferencias finitas en regiones rectangulares y su generalización a regiones no-rectangulares.

Una de las mayores motivaciones para usar métodos de aproximación, en particular las diferencias finitas, es el hecho de que por medio de estos se puede aproximar el problema original empleando un problema más sencillo que puede resolverse de manera eficiente. Los métodos actuales de solución de ecuaciones diferenciales parciales lineales (EDP) están definidos para regiones que resultan de productos de intervalos, por lo que su aplicación se limita bastante cuando la región no es de este tipo.

Fenómenos físicos que ocurren en la naturaleza se pueden describir y aproximar por medio de ecuaciones diferenciales, particularmente en ecuaciones diferenciales parciales.

1.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales

Una ecuación diferencial parcial es una ecuación que contiene derivadas parciales de una función desconocida $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ y que es usada para encontrar esa función desconocida. Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R} con $d \geq 2$ (en el caso $d = 1$ tenemos una ecuación diferencial ordinaria).

Las ecuaciones diferenciales parciales lineales dependen únicamente de manera lineal de una función desconocida y sus derivadas; cualquier ecuación que no es de este tipo es no-lineal. El segundo atributo esencial de una ecuación diferencial es su *orden*, el cual es el mismo que el orden de su derivada más alta que se encuentre en la ecuación. Los sistemas de ecuaciones diferenciales que simulan fenómenos físicos comúnmente se separan en grupos dependiendo del tipo de las relaciones existentes entre las derivadas que involucran, trataremos con EDP lineales de segundo orden, éstas se pueden clasificar en *hiperbólicas*, *parabólicas* y *elípticas*.

Una EDP lineal de segundo orden tiene la forma:

$$Au_{xx} + Bu_{x,y} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0, \quad (1.1)$$

en donde A, B, C, D, E y F son funciones que pueden depender tanto de la variable x como la variable y . Una forma saber a qué grupo pertenece una EDP depende del signo del discriminante, ver detalles en [3],

$$B^2 - 4AC \begin{cases} < 0 & \Rightarrow \text{elíptico,} \\ = 0 & \Rightarrow \text{parabólico,} \\ > 0 & \Rightarrow \text{hiperbólico.} \end{cases}$$

Los ejemplos más comunes son la ecuación de Poisson, $u_{xx} + u_{yy} = g$ para un problema elíptico, la ecuación de calor $u_t = au_{xx}$ (con $a > 0$) para un problema parabólico, y la ecuación de onda $u_{tt} = c^2u_{xx}$ para un problema hiperbólico. En el caso parabólico y en el caso hiperbólico se usa la variable t en lugar de y ya que estos son problemas que típicamente dependen del tiempo; así mismo, se pueden extender a más dimensiones espaciales. Estas ecuaciones describen diferentes tipos de fenómenos y requieren diferentes métodos para su solución (analíticos y numéricos).

En el caso de dimensiones superiores las ecuaciones diferenciales lineales de se-

gundo orden tienen la forma:

$$Lu := \sum_{i,j}^n a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{con} \quad a_{i,j} = a_{j,i}. \quad (1.2)$$

Cuando estamos en el caso bidimensional ($n = 2$) denotamos las variables independientes como x_1, x_2 o por x, y , en el caso tridimensional ($n = 3$) usamos x_1, x_2, x_3 o x, y, z . Cuando una de las variables represente el tiempo usaremos t . El operador L genera una forma cuadrática de \sum que se define por

$$\sum(\xi) := \sum_{i,j}^n a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j.$$

Las propiedades de \sum dependen de los eigenvalores de la matriz

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \\ \cdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

El operador (1.2) es *elíptico* en un punto dado si todos los eigenvalores de A son distintos de cero y tienen el mismo signo. El caso *parabólico* es caracterizado por un eigenvalor cero y todos los demás eigenvalores teniendo el mismo signo. En el caso *hiperbólico*, sin embargo, la matriz A es invertible pero el signo de uno de sus eigenvalores es diferente de los signos de los otros eigenvalores.

Ecuaciones Hiperbólicas

Las ecuaciones hiperbólicas modelan el transporte y movimiento de alguna cantidad física, ya sea perturbaciones del medio o flujo de fluidos. Surgen de muchos problemas físicos, generalmente cuando se ve una onda moverse: ondas acústicas, ondas electromagnéticas, ondas sísmicas, ondas de choque, y muchos más tipos de ondas pueden ser modeladas por ecuaciones hiperbólicas. Frecuentemente, estas son modeladas por EDP hiperbólicas lineales (para la propagación de perturbaciones suficientemente pequeñas), pero modelar movimientos grandes requiere generalmente resolver ecuaciones hiperbólicas no lineales.

Consideremos un sistema hiperbólico de primer orden el cual (en una dimensión en el tiempo y en el espacio) tiene la forma

$$u_t + Au_x = 0,$$

donde $u(x, t) \in \mathbb{R}$ y A es una matriz de $s \times s$. El problema es hiperbólico si A tiene eigenvalores reales y es diagonalizable, i.e., tiene un conjunto de eigenvalores linealmente independientes.

Las ecuaciones hiperbólicas también surgen en el “transporte por advección”, cuando una sustancia es llevada junto con un flujo, dando cabida a la ecuación de advección. Esta es una ecuación diferencial parcial escalar lineal de primer orden. Estas condiciones nos permiten ver la solución en términos de ondas que se propagan y en sistemas hiperbólicos que surgen de procesos físicos que generan el movimiento de las ondas o del transporte advectivo.

El ejemplo más simple de una ecuación hiperbólica es la ecuación de advección con coeficientes constantes

$$u_t + au_x = 0,$$

donde a es la velocidad de advección.

Ecuaciones Parabólicas

Las ecuaciones parabólicas describen un fenómeno que evoluciona en el tiempo y que llevan a un estado de equilibrio. Modelan la difusión de calor en un material y los procesos de conductibilidad térmica.

Si L es un operador elíptico con una matriz A definida positiva, entonces tenemos la siguiente ecuación que depende del tiempo

$$u_t = Lu - f$$

la cual define un problema bien planteado y esto nos da la ecuación parabólica. Si $L = \nabla^2$ es el Laplaciano, entonces la ecuación anterior es la *ecuación de calor* o la *ecuación de difusión*.

La función $u(\vec{x}, t)$ varía con el tiempo y requiere de condiciones iniciales en un

tiempo t_0 , tradicionalmente se toma $t_0 = 0$,

$$u(\vec{x}, 0) = \eta(x)$$

para cada $\vec{x} \in \Omega$; así como de las condiciones de frontera.

Ecuaciones Elípticas

Las ecuaciones elípticas están asociadas con un estado especial del sistema, modelan fenómenos que están típicamente en estado estacionario o en equilibrio y que no tienen dependencia temporal (aunque existen ciertas excepciones).

Las ecuaciones elípticas dan problemas de frontera donde la solución en todo punto se debe determinar basada en las condiciones de frontera de todo el dominio de forma simultánea. Normalmente, esto conduce a un sistema ralo y muy grande de ecuaciones lineales con muchos ceros, que debe ser resuelto para el valor de U en cada punto de la malla.

En general, una ecuación lineal elíptica tiene la forma

$$Lu = f,$$

donde L es algún operador elíptico.

El ejemplo clásico de una ecuación elíptica es *la ecuación de Poisson*

$$\nabla^2 u = f,$$

donde ∇^2 es el operador Laplaciano y f es una función dada de $\vec{x} = (x, y)$ en un dominio espacial Ω . En el caso especial $f \equiv 0$, tenemos *la ecuación de Laplace*,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Si se especifican las condiciones de frontera en todo el límite del dominio Ω tenemos dos casos: tener las condiciones de Dirichlet, donde la solución $u(x, y)$ es conocida en cada punto de la frontera, o las condiciones de Neumann, donde el valor de la derivada es conocido.

1.2. Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas sirve para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales, las cuales van por lo general acompañadas de condiciones iniciales o de frontera. La idea principal al querer resolver una EDP por aproximación con diferencias finitas, es reemplazar el problema continuo por uno discreto obtenido al hacer un número finito de evaluaciones en un subconjunto finito del dominio. De esta manera el problema de encontrar una solución a una ecuación diferencial parcial se convierte en tratar de encontrar la solución a un sistema algebraico de dimensión finita, para el cual existen herramientas eficientes que podemos utilizar.

Para el presente trabajo, es importante entender de forma clara la manera en que se aplica el método de las diferencias finitas, es por ello que se analizará primero en una dimensión y luego en dos dimensiones.

1.2.1. Conceptos fundamentales de la generación de mallas

Históricamente, los esquemas de diferencias finitas definidas en una malla lógicamente rectangular se han utilizado ampliamente para conseguir aproximaciones numéricas para la solución de ecuaciones diferenciales parciales en dominios simples, i.e. regiones rectangulares o aquellos adecuados para ser descompuesto en rectángulos, pero cuando la región no es de este tipo, los esquemas clásicos ya no se pueden aplicar.

El método de diferencias, en el tiempo presente, es uno de los métodos más difundidos de resolución aproximada para los problemas de valores a la frontera para las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. La esencia del método consiste sustituir o aproximar el dominio (por ejemplo, un segmento, un rectángulo, etc.) con un conjunto finito (discreto) de los puntos (los nodos), llamada malla; en vez de las funciones de un argumento continuo se analizan las funciones de un argumento discreto definidas en los nodos de la malla y llamadas funciones malla. Las derivadas, que forman parte de la ecuación diferencial y de las condiciones de frontera, se aproximan por las razones en diferencias, o sea, por la combinaciones lineales de los valores de la función malla en ciertos nodos de la malla; en tal caso, el problema se sustituye por un sistema de ecuaciones algebraicas (esquema en diferencias) lineales

si el problema inicial era lineal.

A pesar de la sencillez aparente del método, antes de empezar la resolución de un problema concreto es necesario saber responder adecuadamente a las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo se elige la malla?
2. ¿De qué modo se escribe el esquema en diferencias para obtener una buena aproximación?

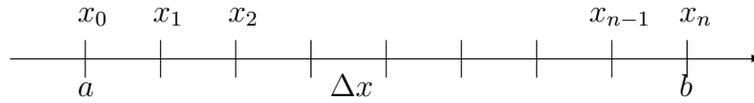
Una vez solucionadas estas cuestiones, tiene importancia la información sobre las siguientes:

1. ¿Con qué precisión el esquema en diferencias finitas aproxima el problema inicial?
2. ¿Es estable el esquema en diferencias?, y ¿en qué sentido?
3. ¿Cuál es la velocidad de convergencia de la resolución del problema en diferencias a la del problema inicial?

Para hacer el mallado con el fin de discretizar el dominio, se divide el área de interés en pequeños subdominios en los que se harán las aproximaciones a la función continua. Suponemos que el mallado se hace de una forma que nos permita el cálculo haciendo uso de conjuntos más pequeños en donde se requiera una aproximación más fina. Sin embargo, esperaríamos que una discretización regular funcione bien en la mayoría de los casos.

1.2.2. Diferencias Finitas 1D

Como mencionamos, el método de Diferencias Finitas consiste en discretizar el dominio dado en donde se quiere aproximar la solución de cierta ecuación diferencial parcial u ordinaria, reemplazando las derivadas de las ecuaciones diferenciales por una combinación lineal de los valores de la función en cada uno de los nodos de la malla. La función que aproxima a la solución está definida sólo en un número finito de puntos de la malla que están en el dominio subyacente y su frontera.

Figura 1.1: Mallado uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

Haremos un breve paréntesis para introducir el término de “ O grande”, notación que se refiere cuando suponemos que las derivadas de orden superior de v en $(k\Delta x, n\Delta t)$ son acotadas,

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(k\Delta x, n\Delta t) + O(\Delta t), \quad (1.3)$$

así podemos hacer uso de la siguiente definición:

Definición 1.1. Se dice que $f(s) = O(\phi(s))$ para $s \in S$ si existe una constante A tal que $|f(s)| \leq A|\phi(s)|$ para todo $s \in S$. Decimos que $f(x)$ es “ O grande” de $\phi(x)$ o que $f(s)$ es de orden $\phi(s)$.

Ahora haciendo uso del concepto de límite, consideremos la función $u(x)$ definida en el intervalo abierto (a, b) , sabemos por definición que la derivada de u en x es

$$\frac{du}{dx} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{(x+h) - x}, \quad (1.4)$$

de la expresión anterior obtenemos un esquema en diferencias finitas en 1D, tomemos el intervalo $[a, b]$ de la recta real y dividimos en donde está definida la función $u(x)$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (en un problema real esto no es así), por lo tanto tenemos $n + 1$ puntos que llamamos nodos y los indexamos de manera natural empezando por la cota inferior del intervalo $[a, b]$, $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$, como se muestra en la figura (1.1); a cada uno de ellos lo identificamos como $x_{i+1} = x_i + h$ con $h = (b - a)/n$. Ésta no es la única manera de hacer el mallado, pero es la más sencilla y nos ayudará para ilustrar cómo es que funciona el método de diferencias finitas.

Ahora, si quitamos el límite de la ecuación (1.4), obtenemos

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} \cong \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{(x_i + h) - x_i} \equiv \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (1.5)$$

donde $u_{i+1} = u(x_i + h)$ y $u_i = u(x_i)$, así se ha obtenido una expresión en diferencias finitas que aproximan el valor de la derivada de u en x_i , la cual es conocida como *diferencia hacia adelante*. Si hacemos un procedimiento similar al anterior obtenemos otras dos aproximaciones a du/dx

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} \cong \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}. \quad (1.6)$$

y

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} \cong \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{x_i - (x_i - h)} \equiv \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (1.7)$$

Así entonces, las expresiones y (1.6) y (1.7) se les conoce como *diferencia centrada* y *diferencia hacia atrás* respectivamente. También es posible definir aproximaciones en diferencias finitas de orden superior como d^2u/dx^2 , la cual se obtiene mediante la aplicación repetida de los esquemas anteriores, o bien, por combinación de ellos,

$$\left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_i} \approx \frac{\left. \frac{du}{dx} \right|_{i+1/2} - \left. \frac{du}{dx} \right|_{i-1/2}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \equiv \frac{\frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}}. \quad (1.8)$$

Debemos notar que se están usando los esquemas (1.5) y (1.7) con una aproximación en el punto $x_{i\pm 1/2}$, esto es, el punto medio entre x_i y $x_{i\pm 1}$; si quisiéramos aproximar con diferencias finitas a d^2u/dx^2 necesitaríamos los valores de u_{i-2} , u_i y u_{i+2} , lo que se hizo fue similar con los puntos medios, tenemos una malla con el doble de puntos aprovechando que sabemos de antemano que los valores $u_{i\pm 1/2}$ no se va a necesitar. En el caso en el que el espaciamiento entre los nodos sea constante h , la ecuación (1.8) se tiene

$$\left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_i} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}. \quad (1.9)$$

Las matemáticas que intervienen en el método de diferencias finitas son relativamente sencillas. Los esquemas se pueden obtener de una forma rigurosa usando como herramienta el teorema de Taylor para expandir una función continua $u(x)$ en términos de las derivadas en puntos dentro de una vecindad, entonces debemos mencionar el teorema de Taylor en una dimensión.

Teorema 1 (Taylor). Sea $u(x)$ una función continua definida en el intervalo $[a, b]$ la cual tiene derivadas continuas hasta orden N sobre (a, b) ; dado un punto x^* en (a, b) , entonces para cualquier otro punto x en (a, b) ,

$$u(x) = u(x^*) + \frac{du}{dx}\Big|_{x^*} (x - x^*) + \frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x^*} \frac{(x - x^*)^2}{2!} + \cdots + \frac{d^{N-1}u}{dx^{N-1}}\Big|_{x^*} \frac{(x - x^*)^{N-1}}{(N-1)!} + R^N \quad (1.10)$$

donde

$$R^N \equiv \frac{d^N u}{dx^N}\Big|_{\xi} \frac{(x - x^*)^N}{N!}, \quad \xi \in (x, x^*) \quad (1.11)$$

es el residuo [5].

Sea $u(x)$ una función que satisface las hipótesis del teorema, usemos la expansión en serie Taylor alrededor de los puntos x_{i-1} y x_{i+1} en el intervalo $[a, b]$

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &\equiv u_{i+1} \\ &= u(x_i) + \frac{du}{dx}\Big|_{x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} + \frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \\ &\quad + \frac{d^3u}{dx^3}\Big|_{x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3!} + \cdots + R_{i+1}^N \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} u(x_{i-1}) &\equiv u_{i-1} \\ &= u(x_i) - \frac{du}{dx}\Big|_{x_i} \frac{(x_i - x_{i-1})}{1!} + \frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x_i} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2!} \\ &\quad + \frac{d^3u}{dx^3}\Big|_{x_i} \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{3!} + \cdots + R_{i-1}^N, \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde, R_{i+1}^N y R_{i-1}^N son los residuos. De las expresiones (1.12) y (1.13) podemos obtener los esquemas (1.5) y (1.7), sólo hay que restar u_i de ambos lados de la igualdad y despejar du/dx

$$\begin{aligned}
u_{i+1} - u_i &= u(x_i) - u_i + \frac{du}{dx} \Big|_{x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} + O(\Delta x^2) \\
\Rightarrow u_{i+1} - u_i &= \frac{du}{dx} \Big|_{x_i} \frac{x_{i+1} - x_i}{1!} + O(\Delta x^2) \\
\Rightarrow \frac{du}{dx} \Big|_{x_i} &= \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} + O(\Delta x). \tag{1.14}
\end{aligned}$$

Ahora, haciendo un proceso similar al anterior, pero ahora a partir de la expresión (1.13), podemos obtener la ecuación (1.7); en el caso del esquema en *diferencias finitas centradas* (1.6) y (1.12) le restamos la expresión (1.13) y despejamos du/dx

$$\begin{aligned}
u_{i+1} - u_{i-1} &= \frac{du}{dx} \Big|_{x_i} \frac{x_{i+1} - x_i}{1!} + \frac{du}{dx} \Big|_{x_i} \frac{(x_i - x_{i-1})}{1!} + O(\Delta x^2) \\
u_{i+1} - u_{i-1} &= \frac{du}{dx} \Big|_{x_i} 2 \frac{(x_{i+1} - x_{i-1})}{1!} + O(\Delta x^2) \\
\frac{du}{dx} \Big|_{x_i} &\approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2(x_{i+1} - x_{i-1})} + O(\Delta x^2). \tag{1.15}
\end{aligned}$$

En el caso cuando el espaciamiento entre un nodo y el siguiente sea constante, las ecuaciones anteriores (sin el término O) se reducen a:

$$\frac{du}{dx} \Big|_{x_i} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \tag{1.16}$$

$$\frac{du}{dx} \Big|_{x_i} \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \tag{1.17}$$

$$\frac{du}{dx} \Big|_{x_i} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \tag{1.18}$$

Dependiendo de la precisión que se desee y el esquema a utilizar, es como se trunca la expansión en serie de Taylor hasta cierta potencia de las derivadas para obtener

un polinomio y el resto se engloba en el *residuo*, que es un error de truncación.

Ahora para obtener una diferencia de segundo orden d^2u/dx^2 , usando la expansión en serie de Taylor alrededor de los puntos x_{i+1} y x_{i-1} ; para ello tomemos las series (1.12) y (1.13) de modo tal que el orden cuatro lo agruparemos como $O(h^4)$

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &\equiv u_{i+1} \\ &= u(x_i) + \frac{du}{dx} \Big|_{x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} + \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \\ &\quad + \frac{d^3u}{dx^3} \Big|_{x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3!} + O(\Delta x^4) \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} u(x_{i-1}) &\equiv u_{i-1} \\ &= u(x_i) - \frac{du}{dx} \Big|_{x_i} \frac{(x_i - x_{i-1})}{1!} + \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{x_i} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2!} \\ &\quad + \frac{d^3u}{dx^3} \Big|_{x_i} \frac{(x_i - x_{i+1})^3}{3!} + O(\Delta x^4) \end{aligned} \quad (1.20)$$

sumamos estas dos expresiones y despejamos d^2u/dx^2 :

$$\begin{aligned} u_{i+1} + u_{i-1} &= 2u(x_i) + 2 \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} + O(\Delta x^4) \\ \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{x_i} (x_{i+1} - x_i)^2 &= u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} + O(\Delta x^4). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Con espaciamiento constante tenemos $(x_{i+1} - x_i) = \Delta x = h$

$$\frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{x_i} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(\Delta x^2).$$

Empleando los métodos anteriores se puede obtener una aproximación ‘discreta’. Los métodos comúnmente se dividen en dos: *explícitos* e *implícitos*, esto en función del tipo de ecuación discreta que se obtiene. Por lo general, los métodos explícitos son económicos en cuanto a tiempo y procesamiento, debido a que para encontrar un

valor se utiliza una combinación de algunos de los valores que ya son conocidos; sin embargo, los métodos implícitos son más estables en sus resultados aunque consuman más tiempo de ejecución y recursos computacionales.

Para visualizar y discutir el método de diferencias finitas para ecuaciones diferenciales parciales, vamos a considerar el siguiente problema de valor inicial con condiciones a la frontera:

$$u_t = \alpha u_{xx}, \quad x \in (0, 1), t > 0 \quad (1.22)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, 1] \quad (1.23)$$

$$u(0, t) = a(t), \quad u(1, t) = b(t), \quad t \geq 0 \quad (1.24)$$

donde $f(0) = a(0)$, y $f(1) = b(0)$.

Este problema lo podemos resolver analíticamente, pero estamos interesados en mostrar cómo resolverlo numéricamente: debemos hacer una aproximación a la solución del problema, se pretende aproximarlos, comenzando por discretizar el dominio espacial mediante la colocación de una malla sobre el dominio. Por conveniencia, se utilizará una malla uniforme con espacio entre cada nodo $\Delta x = 1/M$, como se muestra en la siguiente figura:

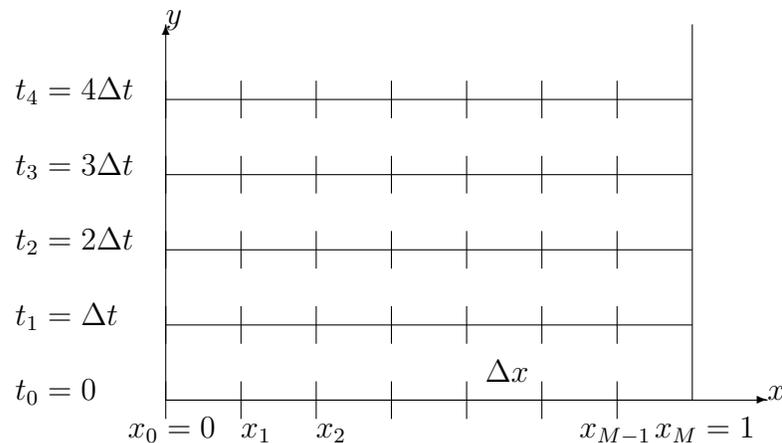


Figura 1.2: Malla en el dominio espacio-tiempo

donde x_k son los nodos de la malla, $k = 0, \dots, M$ y $x_k = k\Delta x$, $k = 0, \dots, M$. De

manera similar, se discretiza el dominio del tiempo en el eje temporal espaciado con tamaño Δt .

El dominio espacio-tiempo del problema a resolver se aproxima por el mallado de puntos de la figura (1.2). La idea es aproximar la solución del problema en cada uno de los nodos de la malla.

Definiremos u_k^n como una función evaluada en el punto $(k\Delta x, n\Delta t)$, es decir, en el nodo (k, n) . La función u_k^n será la aproximación a la solución del problema (1.22)-(1.24) en el punto $(k\Delta x, n\Delta t)$. Como ya tenemos la malla en nuestro dominio, aproximaremos el problema propuesto en dicha malla (1.2).

Dado que

$$u_t(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t},$$

se tiene una aproximación a u_t dada por

$$u_t(k\Delta x, n\Delta t) \cong \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} \quad (1.25)$$

dicha aproximación también se puede usar para aproximar u_t a $(k\Delta x, (n+1)\Delta t)$. De forma similar aproximamos u_{xx} a $(k\Delta x, n\Delta t)$ por

$$\frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (1.26)$$

Considerando que

$$\frac{(u_k)_{k+\frac{1}{2}}^n - (u_k)_{k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x}$$

puede usarse para aproximar $(u_{xx})_k^n$, y que $(u_x)_{k+\frac{1}{2}}^2$ y $(u_x)_{k-\frac{1}{2}}^2$ puede ser aproximado por

$$\frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x} \quad \text{y} \quad \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{\Delta x},$$

respectivamente, entonces

$$(u_{xx})_k^n \approx \frac{(u_k)_{k+\frac{1}{2}}^n - (u_k)_{k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \quad (1.27)$$

$$\approx \frac{\frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x} - \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{\Delta x}}{\Delta x}. \quad (1.28)$$

Por lo tanto, podemos usar las expresiones (1.25) y (1.26) para aproximar la ecuación diferencial parcial (1.22) en el punto $(k\Delta x, n\Delta t)$ por

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2} \quad (1.29)$$

o

$$u_k^{n+1} = u_k^n + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n) \quad (1.30)$$

Empleando las condiciones inicial y de frontera para este problema tenemos

$$u_k^0 = f(k\Delta x), \quad k = 0, \dots, M \quad (1.31)$$

$$u_0^{n+1} = a((n+1)\Delta t), \quad n = 0, \dots \quad (1.32)$$

y

$$u_m^{n+1} = b((n+1)\Delta t), \quad n = 0, \dots \quad (1.33)$$

Recapitulando, lo que se quiere es obtener un aproximación a la solución del problema (1.22)-(1.24) por medio de la solución del problema discreto discutido anteriormente, pero aún debemos elegir Δx (o M) y Δt , lo que determinará en gran medida la precisión y el comportamiento de nuestra solución. Ignorando por un momento estos detalles, vemos que la ecuación (1.31) da la aproximación u_k^0 para $k = 0, \dots, M$; de esta manera la ecuación (1.30) la usaremos para determinar u_k^1 con $n = 0$ y $k = 1, \dots, M - 1$

$$u_k^1 = u_k^0 + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{k+1}^0 - 2u_k^0 + u_{k-1}^0) \quad (1.34)$$

y finalmente las ecuaciones (1.32) y (1.33) las usamos para determinar u_0^1 y u_M^1 . Entonces se usa la información obtenida en (1.34), para determinar u_k^1 en el primer paso de tiempo (con $n = 1$).

Ahora que ya se conoce la aproximación de u_k^1 (con $k = 0, \dots, M$), de nueva cuenta las ecuaciones (1.30), (1.32) y (1.33) nos ayudan para la determinar u_k^2 (para el paso de tiempo $n = 2$).

$$u_k^2 = u_k^1 + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{k+1}^1 - 2u_k^1 + u_{k-1}^1) \quad (1.35)$$

De esta forma, el proceso antes planteado puede continuar para determinar las apro-

ximaciones de $u_k^3, u_k^4, \dots, u_k^n$, con $k = 1, \dots, M$, y así determinar cualquier paso de tiempo deseado usando la información de los pasos de tiempo anteriores.

Debemos observar que no podemos determinar u_0^1 y u_M^1 usando la ecuación (1.30) ya que los subíndices $k + 1$ y $k - 1$ están fuera de los límites al hacer los cálculos. Casi siempre será necesario contar con algún tipo de tratamiento de la información en la frontera, en este caso eso es lo que sucede con las ecuaciones (1.32) y (1.33).

De esta forma tenemos un esquema numérico para aproximar la solución del problema inicial con valores en la frontera descrito en (1.22)-(1.24). Llamamos a este esquema numérico ‘esquema explícito’ porque podemos aproximar el valor de la variable en el $(n + 1)$ -ésimo nivel de tiempo de manera explícita; es decir, usamos datos obtenidos con anterioridad para calcular los datos del siguiente nodo, que es lo que se hizo en el ejemplo descrito previamente.

Surge la duda de si la aproximación a la solución es realmente útil, una primera respuesta es que si se trata de una aproximación suficientemente buena para la solución un problema, en este caso el ejemplo planteado en (1.22)-(1.24), entonces va a ser una buena aproximación a la solución física.

1.3. Diferencias Finitas en 2D para la ecuación de Poisson

Después de estudiar el esquema en Diferencias Finitas en 1D, para el estudio del caso en 2D de forma análoga como se hizo en 1D haremos uso del Teorema de Taylor que nos garantiza la validez de la aproximación de las diferencias finitas en dimensiones mayores a uno. Como una introducción a los métodos de diferencias finitas en 2D consideremos el siguiente ejemplo

Nos interesa calcular una aproximación a la función u que es suficientemente suave para una f dada que satisface la ecuación de Poisson en el cuadrado unitario y se anula en la frontera:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{en } \Omega &:= (0, 1)^2 \subset \mathbb{R} \\ u &= 0 & \text{en } \Gamma &:= \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.36}$$

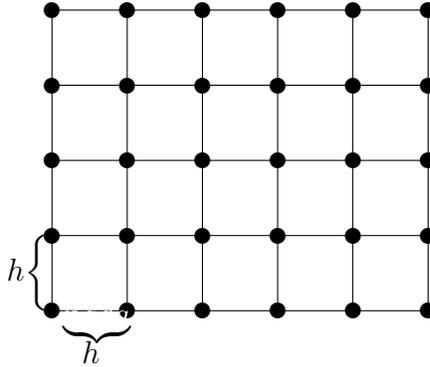


Figura 1.3: Malla para la discretización del problema (1.36).

El método de diferencias finitas provee valores $u_{i,j}$ que aproximan los valores deseados de la función $u(x_{i,j})$ a un número finito de puntos, i.e., en los nodos $(x_{i,j})$. Tomemos los puntos de la malla como

$$x_{i,j} = (ih, jh)^T \in \mathbb{R}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N.$$

Aquí $h := 1/N$, con $N \in \mathbb{N}$ es el número de los nodos de la malla. Los puntos de la malla situados en la frontera de la función dada Γ (que aquí son homogéneos) pueden ser inmediatamente tomados como los valores función de los puntos en la malla. Todas las derivadas del problema (1.36) tienen que ser aproximadas por cocientes. Usando el teorema de Taylor tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_{i,j}) &\approx \frac{1}{h^2}(u(x_{i-1,j}) - 2u(x_{i,j}) + u(x_{i+1,j})), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_{i,j}) &\approx \frac{1}{h^2}(u(x_{i,j-1}) - 2u(x_{i,j}) + u(x_{i,j+1})). \end{aligned}$$

Si estas fórmulas son usadas para reemplazar las derivadas parciales en los puntos interiores de la malla y los valores de la frontera dados son tomados en cuenta, entonces una descripción aproximada del problema original con valores en la frontera ver (Figura 1.3), está dada por el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} &= h^2 f(x_{i,j}), & i, j = 1, \dots, N-1 \\
u_{0,j} = u_{N,j} = u_{i,0} &= u_{i,N} = 0. &
\end{aligned}
\tag{1.37}$$

Para cualquier $N \in \mathbb{N}$ este sistema lineal tiene una única solución $u_{i,j}$ [6]. Bajo ciertas suposiciones de suavidad en la solución u deseada, del problema original tenemos $u_{i,j} \approx u(x_{i,j})$.

En el método de diferencias finitas seguimos los preceptos:

- tener una buena malla,
- todas las derivadas requeridas en los nodos de la malla, serán aproximadas por de diferencias finitas que usa los valores de la función malla en puntos colindantes.

En problemas definidos con condiciones de frontera y/o iniciales, dichas condiciones deben ser satisfechas. A diferencia de los problemas con valores iniciales y de frontera en las ecuaciones diferenciales ordinarias, aquí, *la geometría del dominio* juega un papel importante; esto hace que la construcción del método de diferencias finitas en dominios generales en \mathbb{R}^n con $n \geq 2$ no sea trivial.

1.4. Errores de truncación locales y órdenes de precisión

Cuando hacemos aproximaciones numéricas, nos topamos con dos tipos de errores que son los más comunes, son el error de truncamiento y el error de redondeo. El error de truncamiento se genera cuando se toma un número finito de términos de una serie, como se hizo para obtener los esquemas en diferencias, en donde el error de truncamiento se representó por \mathbb{R}^N , dicha expresión nos indica que la diferencia que existe entre la representación de la expansión en serie de Taylor de la función y la aproximación que se utiliza. El error de redondeo se genera por causa de las limitaciones del equipo de cómputo que se está utilizando, lo que se hace es reducir el número de cifras significativas de su representación decimal para facilitar el manejo

de este número, pero, debido a que el número que se utiliza tras el redondeo no es el exacto, los cálculos que se hacen con esta representación no son exactos.

Ahora, antes de definir consistencia, estabilidad y convergencia, introduciremos la siguiente notación: una ecuación diferencial parcial la denotamos bajo las consideraciones por $Lv = F$ y la correspondiente aproximación por diferencias finitas por $L_k^n u_k^n = G_k^n$ donde n indica el paso del tiempo y k el nodo de la malla; G_k^n se refiere a cualquier aproximación que se ha hecho del término fuente.

1.4.1. Consistencia

El concepto de *consistencia* está relacionado con el error de truncamiento, dado que si el error de truncamiento es muy grande, a la hora de hacer un refinamiento de nuestro mallado el error tenderá a incrementarse. Este concepto en un esquema diferencial se puede definir globalmente o punto a punto.

Cuando se hace la diferencia entre la solución real y la solución al problema aproximado se eliminan algunos términos que se engloban bajo la notación de la O , cuando se quiere que un esquema en diferencias sea consistente se quiere que este error disminuya, o en su defecto, que no crezca exponencialmente.

Definición 1.2. *Un esquema diferencial es consistente con una ecuación parcial diferencial de acuerdo a la norma $\|\cdot\|$ si cumple con que*

$$\|\hat{U} - u\| \rightarrow 0 \quad \text{mientras} \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad (1.38)$$

donde \hat{U} es la solución real y u es una aproximación a \hat{U} .

A continuación veremos cómo el esquema (1.30)-(1.33) es adecuado para aproximar la solución del problema (1.22)-(1.24). Haremos notar que la ecuación en diferencias (1.30) proporciona una buena aproximación a la ecuación diferencial parcial (1.22); la herramienta que vamos a utilizar es de nueva cuenta el desarrollo en serie de Taylor. Para llegar a la ecuación en diferencias finitas utilizada para la ecuación diferencial parcial aproximada (1.22), se utilizó la aproximación

$$u_t(n\Delta t, k\Delta x) \approx \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t}.$$

Vemos que usando la expansión en serie de Taylor, tenemos

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= u(k\Delta x, (n+1)\Delta t) = u(k\Delta x, \Delta t) + \frac{\partial u}{\partial t}(k\Delta x, n\Delta t) \frac{\Delta t}{1!} \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(k\Delta x, n\Delta t) \frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(k\Delta x, n\Delta t) \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (1.39)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} &= \frac{\partial u}{\partial t}(k\Delta x, n\Delta t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(k\Delta x, n\Delta t) \frac{\Delta t}{2} \\ &+ \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(k\Delta x, n\Delta t) \frac{\Delta t^2}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (1.40)$$

Debemos tener en cuenta que la constante asociada con la O grande puede ser muy grande, de hecho, trabajamos con problemas en los que la solución tiene cambios bruscos con respecto al tiempo, esta constante puede ser grande. Pero en general, si Δt es suficientemente pequeño, estamos desaprovechando cosas de orden Δt , entonces $\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t}$ es una buena aproximación de u_t .

El mismo criterio puede ser usado para mostrar que la aproximación hacia adelante y hacia atrás son de orden Δx

$$\frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(k\Delta x, n\Delta t) + O(\Delta x), \quad (1.41)$$

$$\frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(k\Delta x, n\Delta t) + O(\Delta x), \quad (1.42)$$

y en el caso de la diferencia central, haciendo uso de las expresiones anteriores

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x} + \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{\Delta x} &= 2\frac{\partial u}{\partial x}(k\Delta x, n\Delta t) - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(k\Delta x, n\Delta t) + \dots \\ &= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(k\Delta x, n\Delta t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(k\Delta x, n\Delta t)\right) + \dots \\ \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\Delta x} &= \frac{\partial u}{\partial x}(k\Delta x, n\Delta t) + O(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (1.43)$$

Observamos que la diferencia centrada aproxima a la primera derivada con respecto a x con mayor precisión que las diferencias hacia adelante y hacia atrás, con una precisión del orden de $O(\Delta x^2)$ contra $O(\Delta x)$. Ahora, usando de nueva cuenta

la expansión en serie de Taylor podemos demostrar el orden de la diferencia central de segundo orden

$$\begin{aligned}
(u_{k+1}^n - u_k^n) - (u_k^n - u_{k-1}^n) &= u_{k+1}^n - u_k^n - u_k^n + u_{k-1}^n \\
&= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(k\Delta x, n\Delta t) \frac{\Delta x^2}{2!} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(k\Delta x, n\Delta t) \frac{\Delta x^4}{4!} \\
&\quad + 2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(k\Delta x, n\Delta t) \frac{\Delta x^6}{6!} + \dots \\
\frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(k\Delta x, n\Delta t) + \Delta x^2 \left(\frac{2}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(k\Delta x, n\Delta t) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{6!} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(k\Delta x, n\Delta t) \Delta x^2 + \dots \right) \\
\frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(k\Delta x, n\Delta t) + O(\Delta x^2). \tag{1.44}
\end{aligned}$$

1.4.2. Estabilidad

Cuando estamos haciendo aproximaciones, un pequeño cambio en los datos de entrada puede llevarnos a obtener resultados que no se aproximan al resultado esperado, este error en los resultados es consecuencia de la falta de robustez en el esquema utilizado para aproximar las derivadas. Esto significa que el rango de utilidad del esquema es limitado, existe una condición que los parámetros deben de cumplir para que la solución se siga considerando como aceptable para el problema que estamos aproximando.

Definición 1.3. *Un esquema diferencial es estable con respecto a la norma $\|\cdot\|$ si existen constantes Δx_0 y Δt_0 y constantes no-negativas K y β tales que*

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\| \leq K e^{\beta t} \|\mathbf{u}^0\| \tag{1.45}$$

1.4.3. Convergencia

Un esquema en diferencias $L_k^n u_k^n = G_k^n$ que aproxima a la ecuación diferencial parcial $L\hat{U} = F$ es un esquema convergente en el tiempo t si para $(n+1)\Delta t \rightarrow t$,

$$\|u^{n+1} - \hat{U}^{n+1}\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \Delta t \rightarrow 0. \tag{1.46}$$

De acuerdo con el Teorema de Equivalencia de Lax [1], si la condición de consistencia se satisface, la estabilidad es necesaria y suficiente para la condición de convergencia. Se enuncia el siguiente:

Teorema 2 (Equivalencia de Lax). *Considérese un problema lineal de valores en la frontera bien planteado. Un esquema en Diferencias Finitas para este problema es estable si y sólo si es convergente. [7]*

Cuando tenemos un esquema consistente, la convergencia es sinónimo de estabilidad. En lugar de tratar de demostrar este teorema, probamos una versión un poco más fuerte de la mitad del teorema anterior.

Teorema 3 (Teorema de Lax). *Si para un problema lineal de valor inicial bien planteado se tiene un esquema consistente de dos niveles de posición (p, q) , y dicho esquema es estable con respecto a $\|\cdot\|$, entonces es convergente de orden (p, q) con respecto a la norma $\|\cdot\|$.*

Demostración. Una de las hipótesis en ambos teoremas de la Equivalencia de Lax y el Teorema de Lax es que los problemas con valores iniciales están bien planteados. Un problema con valores iniciales es bien posicionado si dependen continuamente de sus condiciones iniciales.

Ahora, sea $v = v(x, t)$ la solución exacta del problema con valor inicial. Entonces, debido a que el esquema es diferencias es de orden (p, q) , tenemos

$$\mathbf{v}^{n+1} = Q\mathbf{v}^n + \Delta t\mathbf{G}^n + \Delta t\tau^n$$

con $\mathbf{G}^n = (\dots, G_{-1}^n, G_0^n, G_1^n, \dots)^T$, Q es un operador actuando en un espacio apropiado, $\|\tau^n\| = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q)$. Definiremos \mathbf{w}^j como la diferencia $\mathbf{v}^j - \mathbf{u}^j$. Entonces \mathbf{w} también satisface

$$\mathbf{w}^{n+1} = Q\mathbf{w}^n + \Delta t\tau^n.$$

Aplicando la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}^{n+1} &= Q\mathbf{w}^n + \Delta t\tau^n \\
 &= Q(Q\mathbf{w}^{n-1} + \Delta t\tau^{n-1}) + \Delta t\tau^n \\
 &= Q^2\mathbf{w}^{n-1} + \Delta tQ\tau^{n-1} + \Delta t\tau^n
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

$$\begin{aligned}
 &\dots \\
 &= Q^{n+1}\mathbf{w}^0 + \Delta t\sum_{j=0}^n Q^j\tau^{n-j}.
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

Ya que $\mathbf{w}^0 = \theta$, tenemos

$$\mathbf{w}^{n+1} = \Delta t\sum_{j=0}^n Q^j\tau^{n-j}. \tag{1.49}$$

El hecho de que el esquema en diferencias sea estable, implica que para cualquier j ,

$$\|Q^j\| \leq Ke^{\beta t}. \tag{1.50}$$

Tomando la norma de ambos lados de la ecuación (1.49) y usando la ecuación (1.50) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{w}^{n+1}\| &\leq \Delta t\sum_{j=0}^n \|Q^j\| \|\tau^{n-j}\| \\
 &\leq \Delta tK\sum_{j=0}^n e^{\beta j\Delta t} \|\tau^{n-j}\| \\
 &\leq \Delta tKe^{\beta(n+1)\Delta t} \sum_{j=0}^n \|\tau^{n-j}\| \\
 &\leq (n+1)\Delta tKe^{\beta(n+1)\Delta t} C^*(t)(\Delta x^p + \Delta t^q)
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

donde $C^*(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} C(s)$ donde $C(s)$, $s = (n-j)\Delta t$, es la constantes que involucra la expresión O grande para $\|\tau^{n-j}\|$. Como en la definición de convergencia (1.46), t se elige de tal forma que $(n+1)\Delta t \rightarrow t$ para $\Delta t \rightarrow 0$. Por lo tanto, como $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, la ecuación (1.51) da,

$$(n+1)\Delta tKe^{\beta t}C^*(t)(\Delta x^p + \Delta t^q) \rightarrow tKe^{\beta t}C^*(t)0 = 0 \tag{1.52}$$

Esto equivale a $\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+1}\| \rightarrow 0$. Ahora, para ver que la convergencia es de orden (p, q) , la ecuación (1.51) se puede reescribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\|\mathbf{w}^{n+1}\| &\leq K(t)(\Delta x^p + \Delta t^q) \\ &= O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q).\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Ecuación de Advección 1 + 1D

La ciencia de la dinámica de fluidos gira en torno a una idea de partículas de fluido que se están transportando en el tiempo y en el espacio; esto puede ocurrir en muchos tipos de los medios de comunicación a partir de agua a la atmósfera y es conocida como *la ecuación de advección*. La ecuación de advección es una ecuación diferencial parcial que gobierna el movimiento de un escalar conservado cuando es trasladado por un campo de velocidad conocido. Se deriva usando la *Ley de Conservación del Escalar*, junto con el *Teorema de Gauss* y tomando el límite infinitesimal.

La ecuación de advección no es simple de solucionar numéricamente: el sistema es una ecuación diferencial parcial hiperbólica y el interés típicamente se centra en soluciones “de choque” discontinuas (que son notoriamente difíciles para manejar esquemas numéricos).

La ecuación de transporte por advección está dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

donde a es la velocidad de advección. La solución es $u(x, t) = u(x - at, 0)$, por lo que cualquier u se perfila para ser simplemente trasladado con el flujo de velocidad a . Esta ecuación necesita condiciones iniciales y posiblemente también condiciones de frontera con el fin de determinar una única solución.

El caso más sencillo es el *problema de Cauchy* en $-\infty < x < \infty$ (sin contorno) también llamado el problema puro de valores iniciales. Entonces sólo necesitamos

especificar los valores iniciales:

$$u(x, 0) = \eta(x).$$

Este es el ejemplo más sencillo de una ecuación hiperbólica y podemos escribir la solución exacta,

$$u(x, t) = \eta(x - at). \quad (2.2)$$

Sin embargo, muchas de las cuestiones que se plantean en términos más generales en discretizar las ecuaciones hiperbólicas se puede ver con mayor facilidad a esta ecuación.

2.1. Método Forward Time Center Space (FTCS)

La primera aproximación que podríamos considerar es usar las diferencias centradas en el espacio,

$$u_x(x, t) = \frac{u(x + h, t) - u(x - h, t)}{2h} + O(h^2); \quad (2.3)$$

y la diferencia hacia adelante con respecto al tiempo, resulta en el método numérico

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} = -\frac{a}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \quad (2.4)$$

que puede escribirse como

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{ak}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \quad (2.5)$$

Esto se puede visualizar en la figura (2.1):

En la práctica este método no es tan útil debido a cuestiones de estabilidad. Es por ello que este método no es comúnmente usado en la práctica, pero nos ayuda a ilustrar algunos ejemplos de problemas de estabilidad.

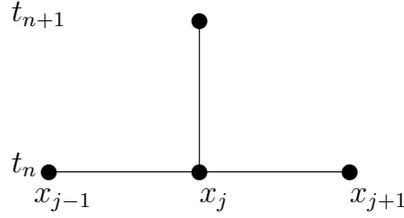


Figura 2.1: Estencil 1.

2.2. Método Lax-Friedrichs

Ahora, retomemos la expresión (2.5) y reemplazemos el término u_j^n en el lado derecho de dicha expresión por $\frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)$, entonces obtenemos el *método de Lax-Friedrichs*

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{ak}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \quad (2.6)$$

Lax-Friedrichs es Lax-Richtmyer estable y provee convergencia

$$\left| \frac{ak}{h} \right| \leq 1. \quad (2.7)$$

Definición 2.1. Sea $B(k) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ alguna matriz en una malla con $h = 1/(m + 1)$ y $b^n(k) \in \mathbb{R}^m$.

Se dice que un método lineal de la forma anterior, es Lax-Richtmyer estable si, para cada tiempo T , existe una constante $C_T > 0$ de tal forma que

$$\|B(k)^n\| \leq C_T \quad (2.8)$$

para todo $k > 0$ y un entero n para que $kn \leq T$.

Esta restricción de estabilidad permite usar un paso de tiempo $k = O(h)$ aunque el método es explícito. La razón básica es que la ecuación de advección involucra sólo la primera derivada de orden u_x en lugar de u_{xx} por lo que en la ecuación de diferencias la restricción de estabilidad involucra el cociente $1/h$ en lugar de $1/h^2$.

Podemos ver que (2.7) da un paso de tiempo razonable; notemos que

$$u_x(x, t) = \eta'(x - at),$$

mientras que

$$u_t(x, t) = -au_x(x, t) = -a\eta'(x - at).$$

La magnitud de la derivada con respecto al tiempo u_t es mayor que la derivada u_x por un factor de a , y entonces podemos esperar que el paso de tiempo requerido para lograr la resolución temporal de consistencia con la resolución espacial h sea menos por un factor de a , esto sugiere que la razón $k \approx h/a$, sea razonable en la práctica.

Para obtener un sistema de ecuaciones con dimensión finita hay que resolver la ecuación en algún dominio acotado.

En un dominio acotado, como por ejemplo $0 \leq x \leq 1$, la ecuación de advección puede tener una condición frontera específica en una de las dos fronteras. Si $a > 0$, entonces necesitamos una condición de frontera en $x = 0$, se dice que,

$$u(0, t) = g_0(t), \tag{2.9}$$

el cual es la entrada del flujo en la frontera en este caso. El caso de la frontera en $x = 1$ es el flujo de salida y la solución no está completamente determinada por lo que es trasladada hacia la derecha desde el interior.

Si $a < 0$, se tiene una condición de frontera en $x = 1$, que es la frontera de entrada de flujo en este caso. Desde el punto de vista físico, cualquier flujo en la frontera de salida fluye de vuelta en la frontera de entrada. Esto también lo modela el problema de Cauchy en el caso en que las condiciones iniciales son periódicos con periodo 1, en cuyo caso la solución sigue siendo periódica y tenemos que modelar sólo un único periodo de $0 \leq x \leq 1$; en este caso, el valor $u_0(t) = u_{m+1}(t)$ a lo largo de las fronteras es otra incógnita, y debemos tener uno de este en el vector $u(t)$. Si el que tenemos es $u_{m+1}(t)$, entonces tenemos el vector de valores de la malla

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_{m+1}(t) \end{bmatrix}.$$

Para el caso $2 \leq j \leq m$ se tiene la ecuación diferencial ordinaria (EDO)

$$u'_j(t) = -\frac{a}{2h}(u_{j+1}(t) - u_{j-1}(t)),$$

y se modifican la primera y la última ecuación usando la periodicidad:

$$\begin{aligned} u'_1(t) &= -\frac{a}{2h}(u_2(t) - u_{m+1}(t)), \\ u'_{m+1}(t) &= -\frac{a}{2h}(u_1(t) - u_m(t)). \end{aligned}$$

Este sistema puede escribirse como

$$u'(t) = Au(t) \tag{2.10}$$

con

$$A = -\frac{a}{2h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & -1 \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}. \tag{2.11}$$

Esta matriz es no-simétrica ($A^T = -A$) por lo que sus eigenvalores deben ser números complejos; estos son

$$\lambda_p = -\frac{ia}{h} \sin(2\pi ph) \quad p = 1, 2, \dots, m+1. \tag{2.12}$$

y el correspondiente eigenvector

$$u^p = e^{2\pi ipjh} \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \dots, m+1. \tag{2.13}$$

los eigenvalores se encuentran en el eje imaginario entre $-ia/h$ y ia/h . Para estabilidad absoluta de la discretización en el tiempo necesitamos la región de estabilidad S para incluir este intervalo. Para cualquier método que incluya algún intervalo

iy , $|y| < b$ del eje imaginario dará lugar a un método estable para la ecuación de advección dando así $|ak/h| \leq b$.

2.3. Método de Lax-Wendroff

Si usamos una discretización temporal de segundo orden del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias visto anteriormente en (2.10), podemos lograr una precisión también de segundo orden en la aproximación de la solución de la ecuación de advección, ya que este sistema se basa en una discretización espacial de segundo orden.

Conviene hacer esto con un método de dos niveles para ecuaciones diferenciales parciales; algunas razones del por qué es buena opción usar métodos de dos niveles, es que en más de una dimensión la necesidad para tener varios niveles de datos puede ser restrictivo, las condiciones de frontera pueden ser mucho más difícil de poner, y combinando métodos usando de pasos fraccionarios pueden requerir métodos de dos niveles para cada paso.

Existen varias opciones para la discretización, como el método de Leapfrog (salto de rana), el método trapezoidal y el método de Runge-Kutta [3], pero debemos tener cuidado con la estabilidad, con el trato en la frontera, almacenamiento adicional que se puede requerir, entre otras cosas. Así, una forma simple para lograr el método explícito de nivel dos con precisión superior, es usar la idea del método de la expansión en serie de Taylor; aplicando esto directamente al sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias $u'(t) = Au(t)$ (y usando $u'' = Au' = A^2u$) nos da el método de segundo orden

$$u^{n+1} = u^n + kAu^n + \frac{1}{2}k^2A^2u^n,$$

donde A es la matriz (2.11); calculando A^2 y escribiendo el método en el nodo u_j de la malla, entonces tenemos

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{ak}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{a^2k^2}{8h^2}(u_{j-2}^n - 2u_j^n + u_{j+2}^n); \quad (2.14)$$

tenemos nuestra función malla que consiste en valores $u_0, u_1, \dots, u_m, u_{m+1}$, donde u_j es nuestra aproximación a la solución $\hat{U}(x_j)$, sabiendo que $x_j = jh$ y $h = 1/(m+1)$

que es la distancia de entre los nodos de cada celda de la malla.

Este método es de segundo orden de precisión y es explícito pero tiene una plantilla de 5 puntos que involucra los puntos u_{j-2}^n y u_{j+2}^n , con condiciones de frontera periódicas que no representa un problema. Notemos que el término (2.14) es una aproximación a $\frac{1}{2}a^2k^2u_{xx}$ usando una diferencia central basada en pasos de tamaño $2h$.

Una forma de deducir el método de Lax-Wendroff es usando expansión en serie de Taylor directamente en la ecuación de advección $u_t + au_x = 0$, para así obtener

$$u(x, t + k) = u(x, t) + ku_t(x, t) + \frac{1}{2}k^2u_{tt}(x, t) + \dots$$

Reemplazando u_t por $-au_x$, u_{tt} por a^2u_{xx} y u_{ttt} por $-a^3u_{xxx}$ se tiene

$$u(x, t + k) = u(x, t) - kau_x(x, t) + \frac{1}{2}k^2a^2u_{xx}(x, t) - \frac{1}{3!}k^3a^3u_{xxx}(x, t) + \dots$$

Si ahora usamos diferencias centradas para u_x y u_{xx} pero diferencias hacia adelante para u_t y eliminando los términos de órdenes más altos

$$u(x, t + k) = u(x, t) + ku_t(x, t) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(x, t) + O(k^3)$$

y de nueva cuenta de la ecuación de advección tenemos $u_t = -au_x$ y hacemos la respectiva sustitución, de manera que

$$\begin{aligned} u(x, t + k) &= u(x, t) - kau_x(x, t) + \frac{k^2}{2}a^2u_{xx}(x, t) + O(k^3) \\ &= u(x, t) - ak \left(\frac{u(x + h, t) - u(x - h, t)}{h^2} + O(h^2) \right) \\ &\quad + \frac{k^2a^2}{2} \left(\frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2} + O(h^2) \right) + O(k^3) \\ u(x, t + k) &= u(x, t) - \frac{ak}{2h}(u(x + h, t) - u(x - h, t)) \\ &\quad + \frac{k^2a^2}{2h^2}(u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)) + kO(k^2 + h^2) \quad (2.15) \end{aligned}$$

así obtenemos el método de Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{ak}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{a^2k^2}{2h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (2.16)$$

Este método es de segundo orden de precisión como se puede ver en (2.15) y es de gran interés por sus propiedades de orden y de estabilidad.

Es posible obtener precisión explícita de órdenes superiores con la misma técnica, dejando más términos en la serie y aproximando las derivadas espaciales por aproximaciones de diferencias finitas de una precisión de orden superior.

El método de Lax-Wendroff es estable con la restricción de paso de tiempo (2.7), esta es una condición de estabilidad muy natural que se espera para la ecuación de advección y es lo mejor que se puede esperar cuando se usa el método de tres puntos.

2.4. Método Upwind

El método anterior está basado en aproximaciones simétricas a las derivadas; sin embargo, también podemos usar aproximaciones no simétricas para u_x en la ecuación de advección, como pueden ser

$$u_x(x - j, t) \approx \frac{1}{h}(U_j - U_{j-1}) \quad (2.17)$$

o

$$u_x(x_j, t) \approx \frac{1}{h}(U_{j+1} - U_j). \quad (2.18)$$

Las expresiones anteriores son *aproximaciones de un lado*, puesto que usan datos de sólo un lado del punto x_j . Si acoplamos estas aproximaciones con diferencias centradas en x , pero diferencias hacia adelante en el tiempo, tenemos los siguientes métodos para la ecuación de advección:

$$u(x, t + k) = u(x, t) - \frac{ak}{h}(u(x, t) - u(x - h, t)) \quad (2.19)$$

o

$$u(x, t + k) = u(x, t) - \frac{ak}{h}(u(x + h, t) - u(x, t)). \quad (2.20)$$

Éstos métodos son de primer orden de precisión, tanto en el tiempo como en el espacio; aunque sabemos que las aproximaciones centrales son más precisas, para la ecuación de advección existen asimetrías en las ecuaciones porque los modelos de las ecuaciones se trasladan a velocidad a . Si $a > 0$, entonces la solución se mueve hacia la derecha, mientras que si $a < 0$ se mueve hacia la izquierda, es por ello que en ciertas situaciones es mejor conocer dichas asimetrías y así usar diferencias, ya sea hacia adelante o hacia atrás. Entonces, el signo de a nos indicará cuál método usaremos, si (2.19) ó (2.20). La solución real en un paso de tiempo puede ser escrita como

$$u(x_j, t + k) = u(x_j - ak, t);$$

dado que

$$u(x_j, t + k) = u + ku_t + \frac{k^2}{2}u_{tt} + \frac{k^3}{3!}u_{ttt} + \dots,$$

haciendo uso de la ecuación de advección $u_t = -au_x$,

$$\begin{aligned} u(x_j, t + k) &= u + k(-au_x) + \frac{k^2}{2}(-a)^2u_{xx} + \frac{k^3}{3!}(-a)^3u_{xxx} + \dots \\ &= u - aku_x + a^2\frac{k^2}{2}u_{xx} - a^3\frac{k^3}{3!}u_{xxx} + \dots \\ &= u(x_j - ak, t) \end{aligned}$$

vemos que la solución en el punto x_j en el siguiente nivel de tiempo está dado por los datos de la izquierda de x_j si $a > 0$, mientras que está determinado por los datos a la derecha de x_j si $a < 0$; esto sugiere que (2.19) puede ser una mejor opción para $a > 0$ y (2.20) para $a < 0$.

Un poco más adelante con el análisis de estabilidad se mostrará que (2.19) es estable si y sólo si

$$0 \leq \frac{ak}{h} \leq 1. \quad (2.21)$$

Debido a que k y h son positivos, éste método se puede usar sólo si $a > 0$; cuando

se usa en la ecuación de advección con $a > 0$ es llamado *método upwind*. En el caso del método (2.20), es estable si y sólo si

$$-1 \leq \frac{ak}{h} \leq 0 \quad (2.22)$$

y contrario al método anterior, este sólo ser usado si $a < 0$; así, el método (2.20) es el método upwind correcto para usar.

Siguiendo con el análisis de estabilidad del método upwind, vemos algunos puntos interesantes. El método (2.19) puede reescribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{ak}{h}(u_j^n - u_{j-1}^n) \\ &= u_j^n - \frac{ak}{2h}(2u_j^n - 2u_{j-1}^n) = u_j^n - \frac{ak}{2h}(-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j-1}^n + u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\ &= u_j^n - \frac{ak}{2h}(-(u_{j+1}^n - u_j^n + u_{j-1}^n) + (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)) \\ u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{ak}{2h}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{ak}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \end{aligned} \quad (2.23)$$

que podemos poner en la forma

$$A_\epsilon = -\frac{a}{2h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & -1 \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\epsilon}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

donde $\epsilon = \frac{ah}{2}$. Como $k, h > 0$, en particular se requiere que $\epsilon > 0$, y como ϵ depende de a , entonces la condición $\epsilon > 0$ se satisface sólo si $a > 0$; cuando esto ocurre y junto con los demás requisitos llevan a la restricción de estabilidad (2.21).

De manera similar a lo que se hizo con el método (2.19), podemos llevar al método

(2.20) a una forma similar a (2.23),

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{ak}{h}(u_{j+1}^n - u_j^n) \\
&= u_j^n - \frac{ak}{2h}(2u_{j+1}^n - 2u_j^n) \\
&= u_j^n - \frac{ak}{2h}(u_{j+1}^n - 2u_j^n - u_{j-1}^n + u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) \\
&= u_j^n - \frac{ak}{2h}[(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)] \\
u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{ak}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{ak}{2h}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (2.25)
\end{aligned}$$

pero como podemos ver el último término tiene un signo negativo en frente. En este caso, lo que necesitamos es que $a < 0$ para lograr estabilidad y entonces derivar fácilmente la restricción de estabilidad (2.22).

Como ya vimos anteriormente, la solución de la ecuación de advección está dada por (2.2); el valor de u es constante a lo largo de cada característica. De forma análoga a lo que se ha hecho anteriormente usando la expansión en serie de Taylor, en un sólo de paso de tiempo tenemos

$$u(x_j, t_{n+1}) = u + ku_t + \frac{k^2}{2}u_{tt} + \frac{k^3}{3!}u_{ttt} + \dots$$

usando la ecuación de advección $u_t = -au_x$, tenemos

$$\begin{aligned}
u(x_j, t_{n+1}) &= u - ak u_x + \frac{k^2}{2}a^2 u_{xx} - \frac{k^3}{3!}a^3 u_{xxx} + \dots \\
&= u(x_j, ak, t_n) \\
u(x_j, t_{n+1}) &= u(x_j, ak, t_n). \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Esta característica se puede visualizar en la Fig(2.2), en un paso de tiempo k en el punto x_j de la malla. Notemos que si $0 < ak/h < 1$, entonces el punto $x_j - ak$ se encuentra entre x_{j-1} y x_j , eligiendo cuidadosamente k y h de manera que se da la igualdad $ak/h = 1$, entonces $x_j - ak = x_{j-1}$ y así tenemos $u(x_j, t_{n+1}) = u(x_{j-1}, t_n)$.

La solución sólo debe desplazarse una celda a la derecha en cada paso de tiempo,

así se podría calcular la solución numérica ‘exacta’ del método

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n. \quad (2.27)$$

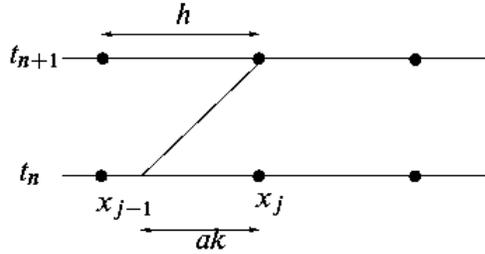


Figura 2.2: Siguiendo la característica de la ecuación de advección hacia atrás en el tiempo del punto (x_j, t_{n+1}) para calcular la solución según (2.26). Interpolando el valor en este punto para puntos vecinos en una malla vecina da el método upwind (para interpolación lineal) o el método de Lax-Wendroff (interpolación cuadrática). Aquí se muestra el caso $a > 0$.

Lo anterior nos sugiere que para la ecuación de advección, el punto $x_j - ak$ debe estar precedida por los puntos usados en el estencil del método de diferencias finitas si el método es estable y convergente; esto es una condición *necesaria* en general para cualquier método desarrollado para la ecuación de advección: si calculamos u_j^{n+1} basado en los valores de $u_{j+p}^n, u_{j+p+1}^n, \dots, u_{j+q}^n$ con $p \leq q$ entonces debemos tener $x_{j+p} \leq x_j - ak \leq x_{j+q}$, o de lo contrario el método puede no ser convergente. Puesto que $x_i = ih$, entonces requerimos que

$$q \leq \frac{ak}{h} \leq -p. \quad (2.28)$$

Esto resulta para la ecuación de advección en un caso especial de un principio mucho más general que es llamado *condición CFL*, condición nombrada así en honor a Courant, Friedrichs y Lewy. El valor

$$\mathcal{U} = \frac{ak}{h}$$

es el llamado *número de Courant*, con el cual trataremos en el siguiente capítulo.

Ahora se usará método Upwind descrito anteriormente, para la ecuación de advección

$$u_t + au_x = 0$$

cuando $a > 0$,

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{ak}{h}(u_j^n - u_{j-1}^n). \quad (2.29)$$

Lo que se hará es *modificar la ecuación*, para ello se inserta la fórmula $\varphi(x, t)$ en la ecuación (2.29), se supondrá que es una función que concuerda exactamente con u_j^n para los puntos de la malla por lo que, a diferencia de $u(x, t)$, la función $\varphi(x, t)$ satisface con exactitud la ecuación (2.29):

$$\varphi(x, t + k) = \varphi(x, t) - \frac{ak}{h}(\varphi(x, t) - \varphi(x - h, t)). \quad (2.30)$$

Usando la serie de Taylor para hacer la respectiva expansión para el resultado anterior alrededor de (x, t) tenemos:

$$\varphi(x, t + k) = \varphi(x, t) + k\varphi_t(x, t) + \frac{k^2}{2}\varphi_{tt}(x, t) + \frac{k^3}{3!}\varphi_{ttt}(x, t) + \dots \quad (2.31)$$

$$\varphi(x - h, t) = \varphi(x, t) - h\varphi_x(x, t) + \frac{h^2}{2}\varphi_{xx}(x, t) - \frac{h^3}{3!}\varphi_{xxx}(x, t) + \dots \quad (2.32)$$

y sustituyendo (2.32) en la expresión (2.30):

$$\begin{aligned} \varphi(x, t + k) = & \varphi(x, t) - \frac{ak}{h} \left(\varphi(x, t) - (\varphi(x, t) - h\varphi_x(x, t) + \frac{h^2}{2}\varphi_{xx}(x, t) \right. \\ & \left. - \frac{h^3}{3!}\varphi_{xxx}(x, t) + \dots) \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, t + k) = & \varphi(x, t) - \frac{ak}{h} \left(h\varphi_x(x, t) - \frac{h^2}{2}\varphi_{xx}(x, t) \right. \\ & \left. + \frac{h^3}{6}\varphi_{xxx}(x, t) + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Igualando (2.31) con (2.34):

$$\begin{aligned} & \left(\varphi(x, t) + k \varphi_t(x, t) + \frac{k^2}{2} \varphi_{tt}(x, t) + \frac{k^3}{3!} \varphi_{ttt}(x, t) + \dots \right) \\ &= \varphi(x, t) - \frac{ak}{h} \left(h \varphi_x(x, t) - \frac{h^2}{2} \varphi_{xx}(x, t) + \frac{h^3}{6} \varphi_{xxx}(x, t) + \dots \right) \end{aligned}$$

eliminando el término $\varphi(x, t)$ en ambos lados de la igualdad y simplificando el lado derecho tenemos:

$$k \varphi_t(x, t) + \frac{k^2}{2} \varphi_{tt} + \frac{k^3}{6} \varphi_{ttt} + \dots = -ak \left(\varphi_x - \frac{h}{2} \varphi_{xx} + \frac{h^2}{6} \varphi_{xxx} + \dots \right)$$

despejando el lado derecho de la igualdad y eliminando k en cada uno de los términos

$$\left(\varphi_t + \frac{k}{2} \varphi_{tt} + \frac{k^2}{6} \varphi_{ttt} + \dots \right) + a \left(\varphi_x - \frac{h}{2} \varphi_{xx} + \frac{h^2}{6} \varphi_{xxx} + \dots \right) = 0 \quad (2.35)$$

que se puede reescribir como

$$\varphi + a \varphi_x = \frac{1}{2} (a h \varphi_{xx} - k \varphi_{tt}) + \frac{1}{6} (a h^2 \varphi_{xxx} - k^2 \varphi_{ttt}) + \dots \quad (2.36)$$

Esta es la EDP que satisface u si tomamos k/h fijo, entonces los términos en el lado derecho son $O(k)$, $O(k^2)$, etc., de manera que para k pequeña es posible truncar (2.36) para obtener una EDP que es satisfecha por u_j^n . Si se eliminan todos los términos en el lado derecho de la ecuación (2.36), se obtiene la ecuación de advección original. Debido a que se han eliminado los términos $O(k)$, esperamos que u_j^n satisfaga esta ecuación para $O(k)$, lo cual es cierto, ya que este método upwind es exactamente de primer orden. Si se mantiene el término $O(k)$, entonces se tiene:

$$\varphi_t + a \varphi_x = \frac{1}{2} (a h \varphi_{xx} - k \varphi_{tt}). \quad (2.37)$$

Esto involucra las segundas derivadas tanto para x como para t , pero es posible derivar una ecuación ligeramente modificada y conservando la misma precisión

diferenciando (2.37) con respecto a t para obtener:

$$\varphi_{tt} = -a\varphi_{xt} + \frac{1}{2}(ah\varphi_{xxt} - k\varphi_{ttt})$$

y con respecto a x obtenemos:

$$\varphi_{tx} = -a\varphi_{xx} + \frac{1}{2}(ah\varphi_{xx} - k\varphi_{ttx}).$$

Si combinamos las dos expresiones anteriores se tiene:

$$\varphi_{tt} = a^2\varphi_{xx} + O(k),$$

y sustituyendola en (2.37)

$$\varphi_t + a\varphi_x = \frac{1}{2}(ah\varphi_{xx} - a^2k\varphi_{xx}) + O(k^2).$$

Debido a que para este ejemplo se truncará el término $O(k^2)$, la expresión anterior se reduce a

$$\varphi_t + a\varphi_x = \frac{1}{2}ah \left(1 - \frac{ak}{h}\right) \varphi_{xx}. \quad (2.38)$$

Los nodos de la malla con los valores U_j^n se pueden ver como una aproximación exacta de segundo orden a la solución real de la ecuación de advección-difusión.

2.5. Ejemplos prácticos

Se ilustrará con tres ejemplos en los cuales veremos los resultados obtenidos métodos antes descritos:

Tenemos la ecuación de advección en una dimensión en el espacio y una en el tiempo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (x, t) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2 \quad (2.39)$$

$$u = f, (x, t) \in \partial\Omega \quad (2.40)$$

donde u es el conjunto de valores que toma la función evaluada en la frontera del dominio, $g(x) = u(x, 0) = \sin x$; $h(0, t) = -\sin(ax)$; $h(1, t) = \sin(1 - at)$.

Resolviendo esta ecuación de manera analítica, obtenemos la solución exacta

$$\hat{U}(x, t) = \sin(x - at). \quad (2.41)$$

De esta forma, al tener la solución exacta a la ecuación (2.39) es posible comparar con la solución que obtendremos con el método FTCS, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff y Upwind usando diferencias finitas y ver qué tan buena es nuestra aproximación.

Para comenzar, se hará un mallado del dominio rectangular en el que estamos trabajando; con el eje x se hará el mallado \mathbb{X} con subintervalos de tamaño Δx y otro mallado \mathbb{T} en el eje t con subintervalos Δt . Entoces el mallado que se hizo en la región Ω queda definido como $\mathbb{F} = \{(x, t) | x \in \mathbb{X}, t \in \mathbb{T}\}$ de forma tal que obtenemos algo como se visualiza en la figura (2.3).

Es posible ver con esta malla del dominio que los nodos son los puntos de intersección entre las líneas paralelas al eje x que pasan por los nodos obtenidos en el mallado \mathbb{X} , y las líneas paralelas al eje y que pasan por los nodos obtenidos en el mallado \mathbb{T} . Retomemos las aproximaciones vistas anteriormente (1.14) y (1.25) para sustituirlas en la ecuación (2.39) para obtener el problema discretizado:

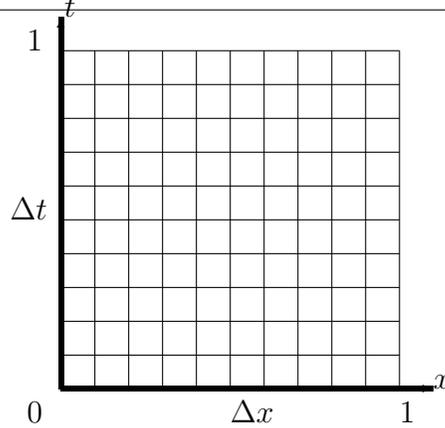


Figura 2.3: Mallado de la región $[0,1] \times [0,1]$.

$$\frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\Delta t} + a \frac{u(x_{i+1}, t_k) - u(x_i, t_k)}{\Delta x} = 0 \quad (2.42)$$

$$u(x_i, t_{k+1}) = u(x_i, t_k) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u(x_{i+1}, t_k) - u(x_i, t_k)). \quad (2.43)$$

Ya que se tiene el mallado se debe definir el estencil a usar, es decir, la forma gráfica que tendrá el esquema que en este caso es explícito. Así, las expresiones anteriores se pueden visualizar gráficamente en la figura (2.4), en la cual se observa cómo se calcularán los valores de los nodos en el paso $k + 1$, tomando en cuenta que se conocen de los valores en los nodos alrededor del nodo x_i para el tiempo k .

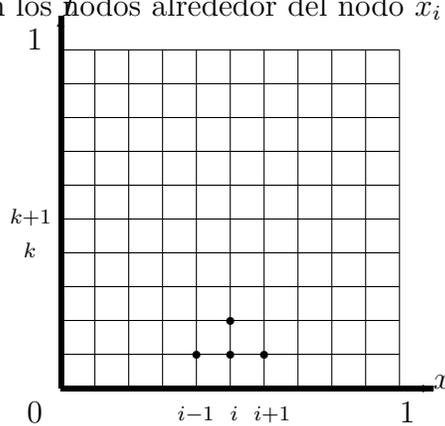


Figura 2.4: Estencil en el método explícito del método Upwind.

En cada uno de los casos se calculó la norma $\|\cdot\|_2$ para el error en cada nivel de

tiempo

$$\|u - \hat{U}\|_2 = \sqrt{\sum_i^M (u_i - U_i)^2 \Delta x},$$

donde u y \hat{U} son las soluciones aproximada y exacta respectivamente, calculadas en el i -ésimo elemento, M es el número de nodos de la malla. En todos los métodos se usó una velocidad $a = 0,01$.

Ejemplo 1. Método de FTCS.

En este esquema y en los siguientes las mallas se dividieron en 20 y 40 subintervalos uniformemente espaciados tanto en el eje \mathbb{X} como en el eje \mathbb{T} . También se discretizará el intervalo \mathbb{X} y \mathbb{T} en 1000 subintervalos tales que $\Delta t = 0,001$, así tenemos que $N = \{t_i | t_0 = 0; t_i = t_{i-1} + \Delta t; i = 1, 2, \dots, 1000\}$ de aquí tenemos $t_0 = 0; t_1 = 0,0001; \dots; t_{1000} = 1$. Tomando la velocidad $a = 0,01$ para mantener la condición de estabilidad $a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2}$. Usando los valores para \mathbb{T} y Δx y hacer las discretizaciones, primero con 21 nodos por lado y luego con 41 nodos por lado podemos ver que al hacer el refinamiento de la malla los errores se hacen más pequeños, lo cual nos muestra que aunque se hagan pequeños cambios en los datos de entrada, éstos se irán atenuando a medida que se repite el proceso, ver (2.1) y (2.2).

Nodos	Tiempo	Error
21 × 21	0.2	$8.42029839 \times 10^{-6}$
	0.4	$1.78660755 \times 10^{-5}$
	0.6	$2.83661482 \times 10^{-5}$
	0.8	$3.99423868 \times 10^{-5}$
	1.0	$5.26113596 \times 10^{-5}$
41 × 41	0.2	$4.53236593 \times 10^{-6}$
	0.4	$1.01091171 \times 10^{-5}$
	0.6	$1.67753998 \times 10^{-5}$
	0.8	$2.45590862 \times 10^{-5}$
	1.0	$3.34774887 \times 10^{-5}$

Cuadro 2.1: Errores para el método de FTCS con mallas de 21 y 41 nodos por lado.

Nodos en el eje X	Nodos en el eje T	Tiempo	Error
100	100	0.2	$2.15888434 \times 10^{-6}$
		0.4	$5.41572197 \times 10^{-6}$
		0.6	$9.82271478 \times 10^{-6}$
		0.8	$1.53989580 \times 10^{-5}$
		1.0	$2.21513608 \times 10^{-5}$
1000	1000	0.2	$7.39709228 \times 10^{-7}$
		0.4	$2.67532728 \times 10^{-6}$
		0.6	$5.80774873 \times 10^{-6}$
		0.8	$1.01323821 \times 10^{-5}$
		1.0	$1.56444622 \times 10^{-5}$

Cuadro 2.2: Errores para el método FTCS con mallas con nodos de 10×100 y 100×1000 .

Ejemplo 2. Método de Lax-Friedrichs

Nodos	Tiempo	Error
21×21	0.2	$8.42029839 \times 10^{-6}$
	0.4	$1.78660755 \times 10^{-5}$
	0.6	$2.83661482 \times 10^{-5}$
	0.8	$3.99423868 \times 10^{-5}$
	1.0	$5.26113596 \times 10^{-5}$
41×41	0.2	$4.53236593 \times 10^{-6}$
	0.4	$1.01091171 \times 10^{-5}$
	0.6	$1.67753998 \times 10^{-5}$
	0.8	$2.45590862 \times 10^{-5}$
	1.0	$3.34774887 \times 10^{-5}$

Cuadro 2.3: Errores para el método de Lax-Friedrichs con mallas de 21 y 41 nodos por lado.

Ejemplo 3. Método de Lax-Wendroff

Como en los casos anteriores, se mantiene la discretización en \mathbb{X} y \mathbb{T} , así como una velocidad para $a = 0,01$.

Nodos	Tiempo	Error
21 × 21	0.2	$8.29444189 \times 10^{-6}$
	0.4	$1.73524634 \times 10^{-5}$
	0.6	$2.71910994 \times 10^{-5}$
	0.8	$3.78240280 \times 10^{-5}$
	1.0	$4.92621963 \times 10^{-5}$
41 × 21	0.2	$4.40509522 \times 10^{-6}$
	0.4	$9.58287815 \times 10^{-6}$
	0.6	$1.55626143 \times 10^{-5}$
	0.8	$2.23643431 \times 10^{-5}$
	1.0	$3.00017975 \times 10^{-5}$

Cuadro 2.4: Errores para el método de Lax-Wendroff con mallas de 21 y 41 nodos por lado.

Nodos	Tiempo	Error
100 × 100	0.2	$2.02617899 \times 10^{-6}$
	0.4	$4.86032685 \times 10^{-6}$
	0.6	$8.54251297 \times 10^{-6}$
	0.8	$1.30907576 \times 10^{-5}$
	1.0	$1.85132407 \times 10^{-5}$
1000 × 1000	0.2	$5.90829984 \times 10^{-7}$
	0.4	$2.07579239 \times 10^{-6}$
	0.6	$4.45795674 \times 10^{-6}$
	0.8	$7.73404868 \times 10^{-6}$
	1.0	$1.19004058 \times 10^{-5}$

Cuadro 2.5: Errores para el método de Lax-Wendroff con mallas de 100 y 1000 nodos por lado.

Ejemplo 4. Método Upwind.

Ahora, haremos una aproximación de la solución de la ecuación (2.39) con el método *Upwind*. Se tomará el mallado realizado en la región Ω anteriormente cuando se aproximó la ecuación (2.39) con el método de Lax-Wendroff definido como $\mathbb{F} = (x, t) | x \in \mathbb{X}, t \in \mathbb{T}$ (2.3).

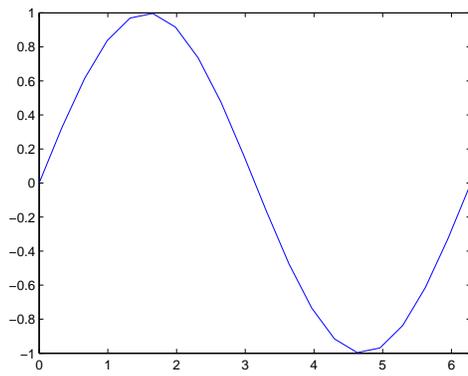
De igual forma, se tomará la discretización anterior $N = \{t_i | t_0 = 0; t_i = t_{i-1} + \Delta t; i = 1, 2, \dots, 1000\}$; y el estencil a usar es el mismo que se puede visualizar en la figura (2.4).

Nodos	Tiempo	Error
21 × 21	0.2	$2.94879349 \times 10^{-4}$
	0.4	$5.87379945 \times 10^{-4}$
	0.6	$8.77509367 \times 10^{-4}$
	0.8	$1.16527519 \times 10^{-3}$
	1.0	$1.45068501 \times 10^{-3}$
41 × 41	0.2	$2.97680848 \times 10^{-4}$
	0.4	$5.92984064 \times 10^{-4}$
	0.6	$8.85917005 \times 10^{-4}$
	0.8	$1.17648703 \times 10^{-3}$
	1.0	$1464701531 \times 10^{-3}$

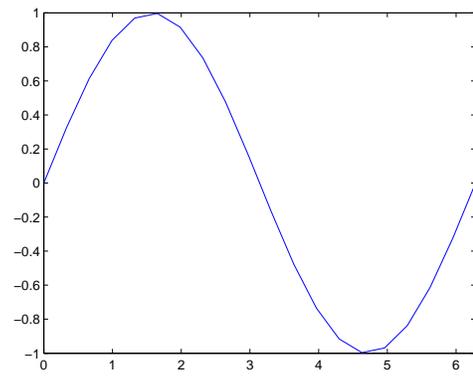
Cuadro 2.6: Errores para el método Upwind con mallas de 21 y 41 nodos por lado.

Nodos en el eje \mathbb{X}	Nodos en el eje \mathbb{T}	Tiempo	Error
100	100	0.2	$2.99263312 \times 10^{-4}$
		0.4	$5.96151231 \times 10^{-4}$
		0.6	$8.90670973 \times 10^{-4}$
		0.8	$1.18282976 \times 10^{-3}$
		1.0	$1.47263481 \times 10^{-3}$
1000	1000	0.2	$3.00193361 \times 10^{-4}$
		0.4	$5.98013330 \times 10^{-4}$
		0.6	$8.93467029 \times 10^{-4}$
		0.8	$1.18656159 \times 10^{-3}$
		1.0	$1.47730416 \times 10^{-3}$

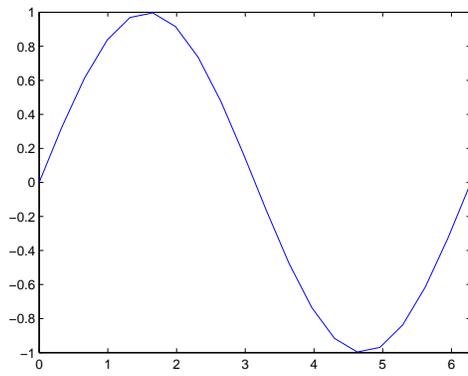
Cuadro 2.7: Errores para el método Upwind con mallas con nodos de 100×100 y 1000×1000 .



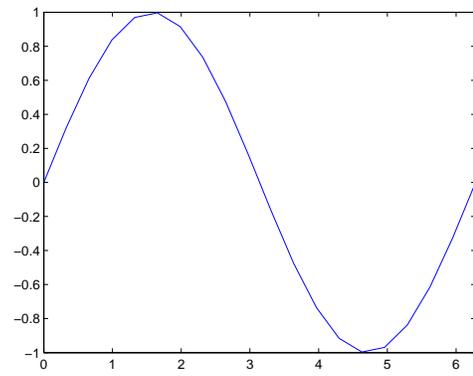
Método FTCS



Método de Lax-Friedrichs

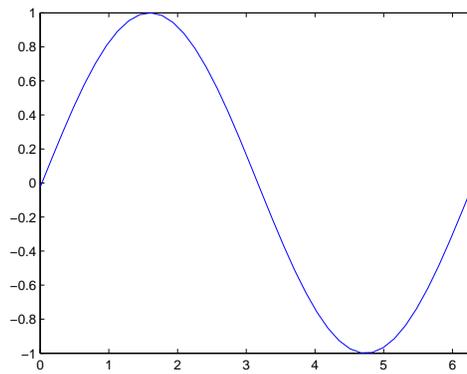


Método de Lax-Wendroff

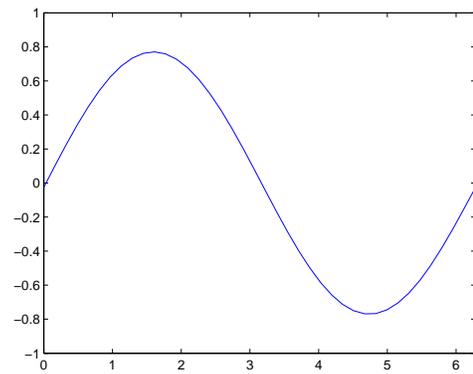


Método Upwind

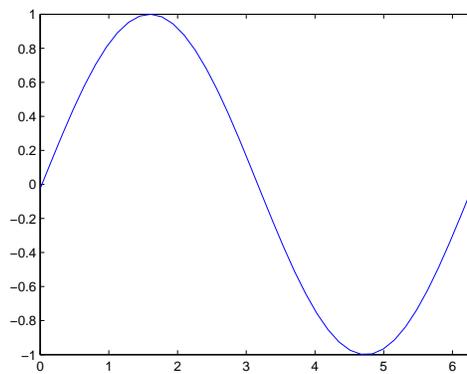
Figura 2.5: Comparación de los resultados de los 4 métodos con 21 nodos.



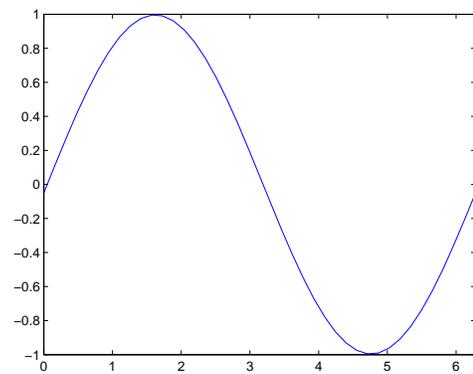
Método FTCS



Método de Lax-Friedrichs

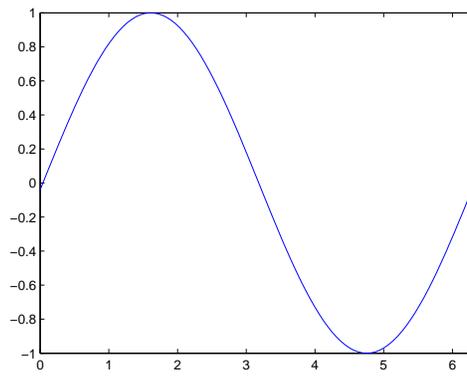


Método de Lax-Wendroff

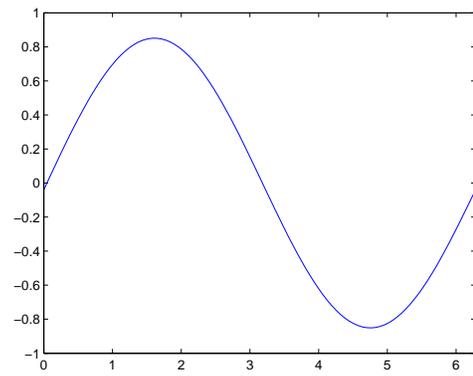


Método Upwind

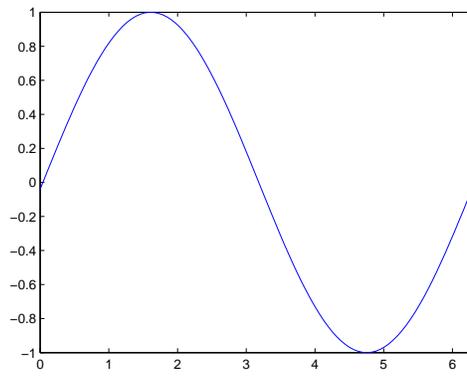
Figura 2.6: Comparación de los resultados de los 4 métodos con 41 nodos.



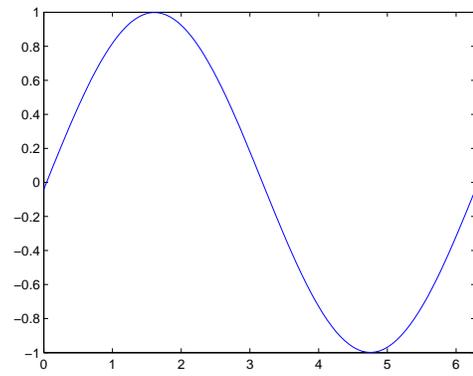
Método FTCS



Método de Lax-Friedrichs

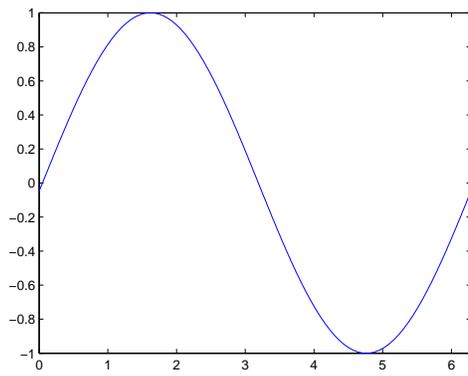


Método de Lax-Wendroff

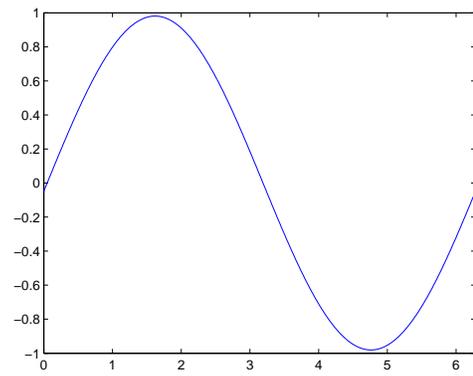


Método Upwind

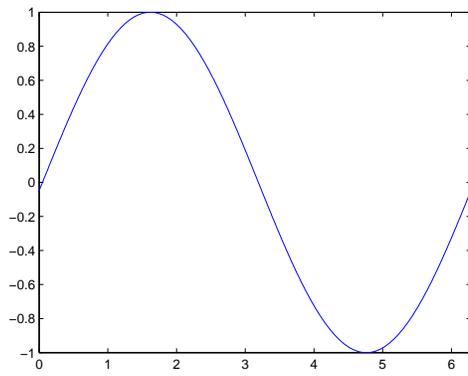
Figura 2.7: Comparación de los resultados de los 4 métodos con 100 nodos.



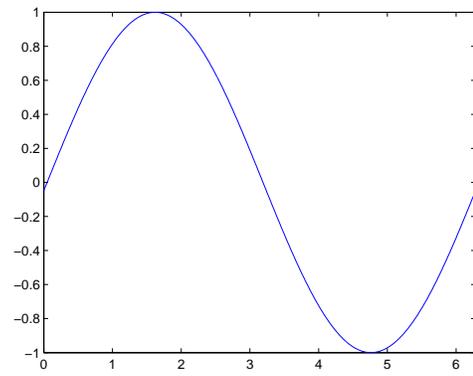
Método FTCS



Método de Lax-Friedrichs



Método de Lax-Wendroff



Método Upwind

Figura 2.8: Comparación de los resultados de los 4 métodos con 1000 nodos.

Capítulo 3

Ecuación de advección en 2+1D en regiones rectangulares

La ecuación de advección en dos dimensiones es análoga a la de una dimensión, pero la diferencia radica en que vamos a considerar dos componentes de las velocidades a y b . La ecuación queda expresada de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

en $[0, T] \times \Omega$. Con las condiciones de iniciales:

$$u(x, y, 0) = g(x, y)$$

y condiciones de frontera:

$$u(x, y, t)|_{L \cup B} = h(x, y, t)$$

donde Ω es un dominio plano simplemente conexo y $\partial\Omega = L \cup B$ es un polígono de Jordan orientado de manera positiva (4.4).

En este capítulo, abordaremos el caso particular cuando Ω es una región rectangular, dejando para el capítulo 4 el tratamiento del caso general.

Consideremos un rectángulo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [\mathbf{c}, \mathbf{d}]$ y una malla uniforme sobre él; es decir,

si

$$\Delta x = \frac{b - a}{m} \quad \Delta y = \frac{d - c}{n}, \quad (3.2)$$

los puntos de la malla son (x_i, y_j) , para $i = 0, \dots, m$ y $j = 0, \dots, n$; donde

$$x_i = a + \frac{i}{m}(b - a)$$

$$y_j = c + \frac{j}{n}(d - c).$$

En este caso, las expresiones clásicas para aproximar las derivadas parciales son

$$(u_x)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (3.3)$$

$$(u_y)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (3.4)$$

$$(u_{xx})_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (3.5)$$

$$(u_{yy})_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (3.6)$$

$$(u_{xy})_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \quad (3.7)$$

para cada nodo interior de nuestra malla.

En el caso de dos dimensiones se producen problemas interesantes para los esquemas de advección; las propiedades de estabilidad cambian en comparación al caso de la ecuación en una dimensión y hay la posibilidad de advección para diferentes velocidades en diferentes direcciones. Ciertos esquemas pueden ser directamente extendidos a partir del esquema en una dimensión 1D, mientras que otros podrían requerir que cada paso se divida en dos direcciones ortogonales [3].

Para la ecuación de advección en 2D (3.1) se conoce una solución analítica, el tener dicha solución nos permite ver qué tan bien hecho está nuestro esquema de transporte al hacer la comparación de los resultados obtenidos con la solución exacta. Si un esquema tiene buenas propiedades, entonces puede ser extendido a casos más complejos. Para poder crear nuestros diferentes esquemas y así resolver la ecuación de advección es importante que retomemos la expansión en serie de Taylor (1.10).

Como ya vimos anteriormente, la expansión en serie de Taylor provee un método con el cual la ecuación de advección puede ser resuelto computacionalmente; la solución en el nodo $(i + 1, j)$ puede ser expresado en serie de Taylor

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)\Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j)\Delta x^2 + O(\Delta x^3) \quad (3.8)$$

donde $\Delta x = x_{i+1} - x_i$.

Esta expansión en serie de Taylor expresa la función en el punto $(i + 1, j)$ en términos de su valor y el de sus derivadas en el punto (i, j) . De manera similar

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)\Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j)\Delta x^2 - O(\Delta x^3) \quad (3.9)$$

El término $O(\Delta x^3)$ del final de la ecuación es el error de truncamiento de nuestra aproximación en diferencias (1.1), idealmente nos gustaría que dicho error de truncamiento sea lo más pequeño posible.

Dos esquemas fundamentales son *los esquemas en diferencias hacia adelante* (FTBS) y *los esquemas en diferencias centradas* (CTCS). Ambos esquemas tienen beneficios y desventajas en lo referente a error y estabilidad. Estos esquemas son baratos en términos del costo computacional, sin embargo FTBS es difusivo y CTCS es dispersivo, ambos producen errores grandes de truncamiento. Ahora, usando la expansión en serie de Taylor (1.12) (expandido con respecto también a y y t) podemos reescribir la ecuación de advección (3.1) como

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = -a \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x} - b \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta y} + O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta t^2),$$

para obtener el esquema en diferencias hacia adelante (FTFC)

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \mathcal{U}(u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) - \mathcal{V}(u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n) + O(\Delta x, \Delta y, \Delta t) \quad (3.10)$$

donde \mathcal{U} y \mathcal{V} son los números de Courant, los cuales se definen de la siguiente manera

$$\mathcal{U} = a \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \mathcal{V} = b \frac{\Delta t}{\Delta y}. \quad (3.11)$$

De la definición de los esquemas (3.10), es posible ver que el esquema tiene un error de primer orden. El esquema sólo requiere los puntos ‘upwind’ de (i, j) para obtener los valores en el paso de tiempo siguiente y no se requiere información de ningún paso de tiempo anterior.

Ahora haciendo uso de las expresiones (3.3 - 3.7) y considerando

$$(u_t)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \quad (3.12)$$

$$(u_{tt})_{i,j} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (3.13)$$

al sustituirlas en la ecuación (3.1) podemos obtener el esquema en diferencias central (FTCS)

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{2\Delta t} = -a \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - b \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + O(\Delta x^3, \Delta y^3, \Delta t^3), \quad (3.14)$$

que puede ser reescrita como

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n-1} - \mathcal{U}(u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n) - \mathcal{V}(u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n) + O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta t^2). \quad (3.15)$$

Donde los números de Courant están definidos de la misma manera que se hizo en (3.11). Este esquema tiene un error de segundo orden, el cual es una mejora respecto al esquema en diferencias hacia adelante. Para obtener esta mejora en la precisión, se requiere obtener la información de los puntos de cada lado de (i, j) y el valor de u en el paso de tiempo anterior.

Cuando usamos un esquema y en particular cuando estamos tratando con procesos advectivos, queremos que los errores sean lo más pequeño posible; sin embargo, para métodos de diferencias finitas la validez del modelo se determina más por su estabilidad que por el orden de su error, este es un proceso que está cercanamente ligado con los números de Courant que fueron definidos anteriormente.

3.1. Errores y Estabilidad

Cuando se modela un proceso de transporte es importante saber qué tipo de errores pueden suceder. Un esquema numérico perfecto de advección transportaría una partícula en el espacio, sin pérdida de energía; sin embargo, cuando se trunca la serie de Taylor se introducen errores. Aquí se hará un pequeño paréntesis para ver los dos tipos de errores que existen: de dispersión y de difusión. Los errores de dispersión suceden cuando un esquema introduce ondas de pequeña escala, como componentes diferentes de Fourier que se propagan en diferentes velocidades fase, este tipo de errores son muy comunes en los esquemas de diferencias centrales. Por su parte, las diferencias hacia adelante introducen errores de difusión.

Muchos de los métodos numéricos ‘clásicos’ son diseñados para reducir uno de estos dos tipos de errores. Los esquemas modernos intentan usar una combinación de métodos cuando las soluciones son muy dispersas o muy difusas [9].

Es muy importante que el esquema de advección numérico sea estable; un esquema inestable se usa poco, ya que si la solución no está acotada cuando el tiempo tiende a infinito no podemos confiar que producirá resultados precisos para cualquier intervalo de tiempo útil.

El número de Courant (3.11) por lo regular necesita estar acotado a un cierto conjunto de valores para que un esquema sea estable (2.28). Para que el esquema FTBS en una dimensión sea estable, los números de Courant \mathcal{U}, \mathcal{V} deben estar acotados

$$0 < \mathcal{U} < 1, \quad 0 < \mathcal{V} < 1.$$

En dos dimensiones los cálculos son más complejos. Los números de Courant \mathcal{U}, \mathcal{V} y los espacios de la malla en las direcciones x y y pueden ser distintos. Incluso si el espaciado de la malla es el mismo, no todos los esquemas de advección 1D se extienden de manera sencilla a dos dimensiones. Para investigar la estabilidad usaremos *el análisis de estabilidad de Von Neumann*; para que este tipo de análisis funcione, el esquema tiene que ser lineal y los coeficientes deben ser constantes. Estas condiciones se satisfacen si las velocidades de advección a y b también son constantes.

3.2. Advección en 2D

En una dimensión, para que el esquema en diferencias central sea estable, el número de Courant debe estar acotado superiormente por el valor 1 como se vio con anterioridad. En dos dimensiones es posible extender este esquema directamente del caso unidimensional, aunque los valores del número de Courant para los cuales el esquema es estable cambiarán. Como se mencionó antes, usaremos el análisis de estabilidad de Von Neumann, esto requiere que se busque soluciones de la forma

$$u_{m,j}^n = \mathcal{A}^n e^{i(km\Delta x + lj\Delta y)}, \quad (3.16)$$

donde k y l son los números de onda en las direcciones x y y respectivamente.

Ahora, sustituyendo la ecuación (3.16) en la ecuación (3.15), omitiendo el término $O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta t^2)$, se obtiene

$$\begin{aligned} u_{m,j}^n &= \mathcal{A}^n e^{i(km\Delta x + lj\Delta y)} = \mathcal{A}(e^{ikm\Delta x} e^{ilj\Delta y}) \\ &= \mathcal{A}^n [\cos(km\Delta x) + i \sin(km\Delta x)] \cdot [\cos(lj\Delta y) + i \sin(lj\Delta y)], \end{aligned}$$

y haciendo un poco de álgebra obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{\mathcal{A}} - \mathcal{U}(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) - \mathcal{V}(e^{il\Delta y} - e^{-il\Delta y}) \\ \mathcal{A} &= \frac{1}{\mathcal{A}} - 2i\mathcal{U} \sin(k\Delta x) - 2i\mathcal{V} \sin(l\Delta y) \end{aligned}$$

despejando \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}^2 + 2 \mathcal{A} i (\mathcal{U} \sin(k\Delta x) + \mathcal{V} \sin(l\Delta y)) - 1 = 0$$

$$\mathcal{A} = \frac{-2 i (\mathcal{U} \sin(k\Delta x) + \mathcal{V} \sin(l\Delta y)) \pm \sqrt{-4 (\mathcal{U} \sin(k\Delta x) + \mathcal{V} \sin(l\Delta y))^2 + 4}}{2}$$

$$\mathcal{A} = i (\mathcal{U} \sin(k\Delta x) + \mathcal{V} \sin(l\Delta y)) \pm \sqrt{1 - (\mathcal{U} \sin(k\Delta x) + \mathcal{V} \sin(l\Delta y))^2}$$

$$|\mathcal{A}|^2 = (\mathcal{U} \sin(k\Delta x) + \mathcal{V} \sin(l\Delta y))^2 + 1 - (\mathcal{U} \sin(k\Delta x) + \mathcal{V} \sin(l\Delta y))^2 = 1.$$

Para la estabilidad necesitamos que

$$|\mathcal{U} \sin(k\Delta x) + \mathcal{V} \sin(l\Delta y)| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{A}| = 1. \quad (3.17)$$

En este punto debemos considerar el caso simple de una malla cuadrada $\Delta x = \Delta y = q$. Esto permite que las velocidades a y b sean definidas en términos de la velocidad de flujo específica (f_s) [18]

$$a = f_s \cos(\theta), \quad b = f_s \sin(\theta). \quad (3.18)$$

De esta forma la ecuación (3.17) se transforma

$$\frac{f_s \Delta t}{q} |\cos(\theta) \sin(kq) + \sin(\theta) \sin(lq)| \leq 1. \quad (3.19)$$

Para que esto se satisfaga en todas las ondas en el plano 2D, basta con probarlo para el caso más riguroso, cuando $\sin(kq) \cdot \sin(lq) = 1$. Esto reduce la ecuación (3.19)

a

$$\frac{f_s \Delta t}{q} |\cos(\theta) + \sin(\theta)| \leq 1. \quad (3.20)$$

Deseamos ver el caso límite para el cual el flujo se mueve diagonalmente, pues esto hace máximo $|\cos \theta + \sin \theta|$.

Esto implica que $\theta = \pi/4$ y el valor de $|\cos(\theta) + \sin(\theta)| = \sqrt{2}$. Entonces para el

caso bidimensional en donde estamos en una malla cuadrada y, a , b son advectivos con la misma velocidad de flujo, esto implica que (ver figura 3.1):

$$\frac{f_s \Delta t}{q} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad (3.21)$$

de esta manera, al combinar estos resultados con (3.18) y despejando la velocidad de flujo específica con las respectivas velocidades a y b

$$f_s = \frac{a}{\cos(\theta)} \quad f_s = \frac{b}{\sin(\theta)}$$

y sustituyendo en (3.21)

$$\frac{\frac{a}{\cos(\theta)} \Delta t}{q} \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{a \Delta t}{\cos(\theta) q} \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

recordemos que $\Delta x = q$

$$\frac{a \Delta t}{\cos(\theta) \Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

dado que $\theta = \pi/4$, $\cos(\theta) = 1/\sqrt{2}$, tenemos

$$\frac{a \Delta t}{\frac{1}{\sqrt{2}} \Delta x} = \sqrt{2} a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\implies a \frac{\Delta t}{\Delta x} = \mathcal{U} \leq \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2}} \leq \frac{1}{2}.$$

Análogamente para \mathcal{V} , usando: $f_s = b \cos(\theta)$, $\Delta y = q$, $\sin(\theta) = \pi/4$.

De esta forma obtenemos las condiciones para \mathcal{U} y \mathcal{V} ,

$$\mathcal{U} \leq 0,5 \quad \mathcal{V} \leq 0,5. \tag{3.22}$$

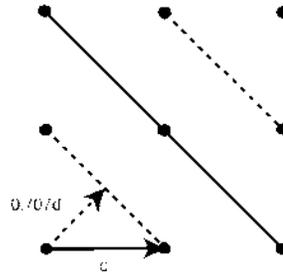


Figura 3.1: Propagación de onda en 2D

Ahora, no es posible extender todos los métodos de advección numérica a dos dimensiones con mucha facilidad, un ejemplo es el método de Lax-Wendroff, el cual en una dimensión se define como en (2.16). Para este caso hay estabilidad cuando el número de Courant está entre -1 y 1 ; sin embargo, si sólo agregamos términos en la dirección y el esquema se vuelve completamente inestable; la explicación para esto recae en la deducción del método de Lax-Wendroff.

El punto inicial de la deducción es la serie de Taylor de u alrededor de t

$$u(x, y, t \pm \Delta t) = u(x, y, t) \pm \Delta t \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} + \dots \tag{3.23}$$

Usando la ecuación (3.1), cada una de las derivadas con respecto a t pueden ser reescritas en términos de x y y . Por simplicidad de notación usaremos la convención de que $\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}$ puede ser reescrito como u_t . Entonces se tiene que

$$u_t = -a u_x - b u_y \tag{3.24}$$

$$u_{tt} = -a^2 u_{xx} - b^2 u_{yy} + 2ab u_{xy} \tag{3.25}$$

Sustituyendo en la fórmula para las primeras y segundas derivadas de la diferencia

central de segundo orden

$$u_x = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (3.26)$$

$$u_{xx} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (3.27)$$

$$u_y = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (3.28)$$

$$u_{yy} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (3.29)$$

$$u_{xy} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x\Delta y} \quad (3.30)$$

obtenemos el esquema completo de Lax- Wendroff en 2D:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n - \frac{\mathcal{U}}{2}(u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n) - \frac{\mathcal{V}}{2}(u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n) \\ &\quad - \frac{\mathcal{U}^2}{2}(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) - \frac{\mathcal{V}^2}{2}(u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \\ &\quad + \frac{\mathcal{UV}}{4}(u_{i+1,j+1}^n - u_{i-1,j+1}^n - u_{i+1,j-1}^n + u_{i-1,j-1}^n). \end{aligned}$$

Como podemos ver de la ecuación anterior en el esquema completo de Lax-Wendroff en 2D hay un término con una derivada cruzada; si el esquema en 1D se extiende, éste término es completamente omitido, de aquí que la extensión directa del método se convierte en inestable. Un método que puede ser usado para remediar este problema es usar el método de *separación direccional*, este método consiste en separar un esquema de diferencias finitas en series de pasos. En el problema en 2D que se ha estado usando, corresponde tomar el primer paso en la dirección x seguido de un paso en la dirección y ; entonces la ecuación completa de Lax-Wendroff puede reescribirse usando la notación de operadores diferenciales

$$\delta_{2x} u_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \quad \delta_{2y} u_{i,j}^n = \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \quad (3.31)$$

$$\delta_{xx}^2 u_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \quad \delta_{yy}^2 u_{i,j}^n = \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \quad (3.32)$$

de esta forma, obtenemos el esquema en direcciones separadas; para la velocidad a :

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - a\Delta t \delta_{2x} u_{i,j}^n + \frac{(a\Delta t)^2}{2} \delta_{xx} u_{i,j}^n$$

sustituyendo los operadores diferenciales

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - a\Delta t \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{(a\Delta t)^2}{2} \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \quad (3.33)$$

para la velocidad b :

$$(u_{i,j}^{n+1})^* = (u_{i,j}^n)^* - b\Delta t \delta_{2y} (u_{i,j}^n)^* + \frac{(b\Delta t)^2}{2} \delta_{yy} (u_{i,j}^n)^*$$

sustituyendo los operadores diferenciales

$$(u_{i,j}^{n+1})^* = (u_{i,j}^n)^* - b\Delta t \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{(b\Delta t)^2}{2} \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \quad (3.34)$$

El principal beneficio de este método es que son menos cálculos los que se requieren para resolver el ‘sistema dividido’, lo que reduce el costo computacional. Las restricciones de estabilidad en los números de Courant son mucho menos estrictos que para los esquemas completos en 2D; aquí, cada uno de estos pasos son acotados por las condiciones de estabilidad para los números de Courant en 1D ($-1 \leq U \leq 1$). Una desventaja importante es la necesidad de elegir pasos ortogonales para que este método funcione, esto limita los tipos de malla que se pueden elegir para problemas en 2D.

Se tiene dos opciones principales: la figura (3.2) en el inciso (a) muestra el método dividido que se definió en las ecuaciones (3.1) y (3.34); y en el inciso (b) de dicha figura, se muestra la ‘división Strang’, el cual toma un paso del método anterior y luego se invierte el orden en el siguiente paso; uno podría pensar que este segundo método daría más precisión a la solución, sin embargo la diferencia no siempre es tan buena [3]. La separación del problema puede llevar a cierta pérdida de precisión. Es muy difícil saber desde antes si los resultados obtenidos serán satisfactorios usando separación direccional [9], de modo que es necesario tener cuidado cuando se usa este

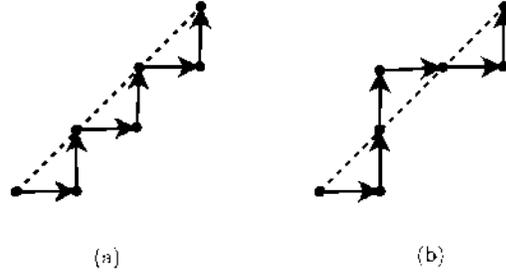


Figura 3.2: Diferentes tipos de separación direccional

método, lo que implica que se requiere de un esquema en 2D que sea más robusto y completo.

Los métodos antes mencionados han apuntado a tomar esquemas y extender estos usando la ecuación de advección en 1D, esto debido a que la ecuación de advección en 1D es bien conocida. Sin embargo, hay pérdida de precisión cuando se trata de usar el esquema 1D para hacer la aproximación en 2D. Anteriormente se definió el esquema de Lax-Wendroff en 2D y se mostró que contiene el término de la derivada cruzada, su implementación directa debería dar una representación más precisa y se deberían reducir los errores al mínimo. La condición de estabilidad para el método completo en 2D se define por

$$\mathcal{U}^{2/3} + \mathcal{V}^{2/3} \leq 1. \quad (3.35)$$

Se puede deducir que la condición es muy restrictiva, mucho más que las condiciones de CTCS y que el método de direcciones separadas del método de Lax-Wendroff. Es posible mejorar la estabilidad si se usa una aproximación diferente para la derivada espacial mixta en el esquema completo de Lax-Wendroff en 2D. Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, debemos reemplazar el término de la derivada cruzada [9]

$$\mathcal{UV} \Delta t \delta_{2x} \delta_{2y} u_{i,j}^n \quad (3.36)$$

con el término

$$\mathcal{UV} \Delta t \delta_x \delta_y u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n. \quad (3.37)$$

El cambio en el término significa que el esquema completo de Lax-Wendroff en

2D es estable para $0 \leq \mathcal{U} \leq 1$ y $0 \leq \mathcal{V} \leq 1$. Esta adaptación hace que el esquema sea más flexible y en consecuencia es el mejor para mostrar el esquema completo de Lax-Wendroff en 2D durante el estudio de la simulación.

Cada uno de los métodos que se han visto hasta ahora tienen sus ventajas y desventajas, para compararlos se hizo una implementación usando Matlab [11]. Los esquemas con los que se trabajaron y que fueron objeto de comparación son Lax-Wendroff, Upwind y .

Para el esquema de separaciones direccionales se hará uso de las ecuaciones (3.33) y (3.34). De manera intuitiva se espera que los dos esquemas de Lax-Wendroff sean superiores a CTCS, con la robustez añadida del esquema de Lax-Wendroff en 2D.

Consideremos un recuadro de tamaño $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$, dentro del cual se establecerá una malla.

Lo que se hará es usar cada esquema mencionado para “transportar” las condiciones iniciales alrededor del recuadro y luego regresar al lugar original en dónde se inició. De esta manera, es posible cuantificar el error en términos de la desviación de las condiciones iniciales; un buen esquema llevaría las condiciones iniciales de vuelta al mismo lugar después de algún cierto número de iteraciones. Tenemos dos formas de cuantificar el error, estas son la norma 2 y la norma del supremo, y se definen como siguen:

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\hat{u}_{i,j} - u_{i,j}|^2 \right)^{1/2} \quad (3.38)$$

$$\varepsilon_\infty = \max_{\forall i,j} |u_{i,j} - \hat{U}_{i,j}| \quad (3.39)$$

donde $u_{i,j}$ es la solución numérica y $\hat{U}_{i,j}$ es la solución exacta.

3.3. Ejemplos numéricos

Ejemplo 5. Se emplearán las siguientes pruebas numéricas usando el método de Lax-Wendroff, Upwind y Lax-Friedrichs, usando la expansión en serie de Taylor de manera análoga al capítulo anterior.

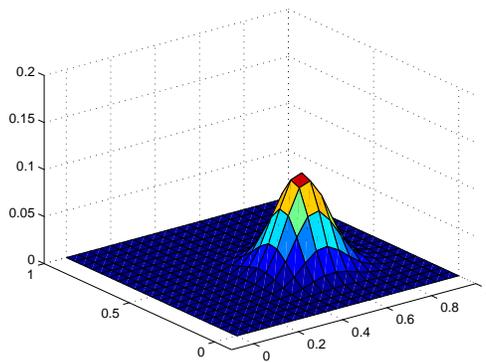
Utilizaremos una región Ω rectangular en el intervalo $[0, 1] \times [0, 1]$ y se harán pruebas con mallas con 21, 41 y 81 nodos por lado, así que el número de Courant sólo puede variar por el incremento o decremento de la velocidad de flujo o el paso de tiempo.

El intervalo de tiempo que se usa es en $[0, 1]$ y se discretizó uniformemente partiéndolo en 1000 subintervalos; se tomó el valor 0.1 para las velocidades a y b .

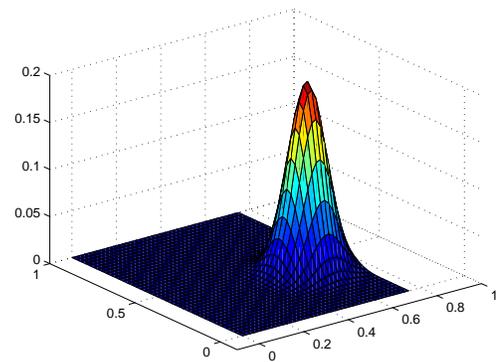
Para hacer las pruebas numéricas se usó las función

$$u(x, y, t) = 0,2 e^{((-x-0,5-0,1t)^2 - (y-0,3-0,1t)^2)/0,01}.$$

y así tenemos los siguientes resultados, los cuales podemos visualizar en (3.3, 3.4, 3.5, 3.6).

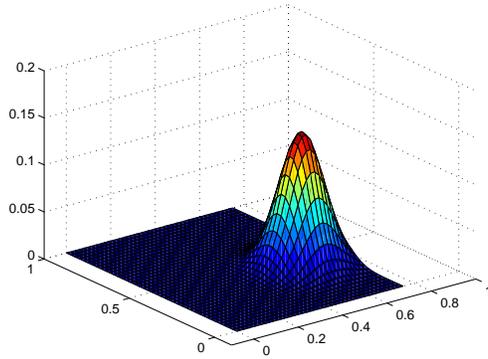


Lax-Wendroff

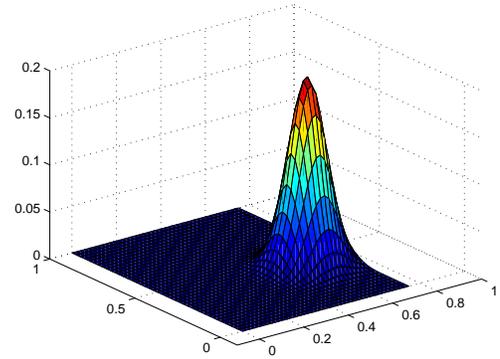


Solución exacta

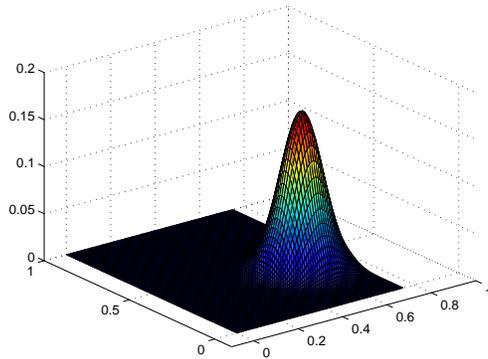
Figura 3.3: Método de Lax-Wendroff con 21 nodos por lado.



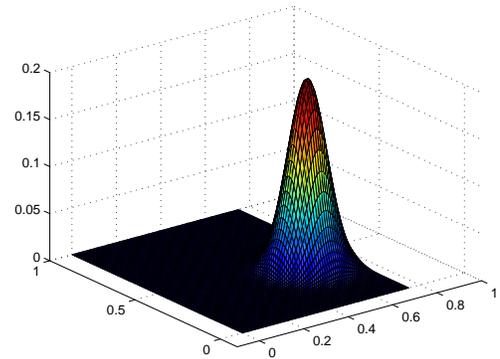
Lax-Wendroff



Solución exacta



Lax-Wendroff



Solución exacta

Figura 3.4: Método de Lax-Wendroff con 41 y 81 nodos por lado.

El error en cada nivel de tiempo se calcula

$$\|e^k\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} (u_{i,j}^k - \hat{U}_{i,j}^k)^2 A_{i,j}},$$

donde $u_{i,j}^k$ y $\hat{U}_{i,j}^k$ son el valor exacto y aproximado de la solución respectivamente calculado en el elemento i, j y $A_{i,j}$ es el área del polígono definido

$$\{P_{i+1,j}, P_{i,j+1}, P_{i-1,j}, P_{i,j-1}\}.$$

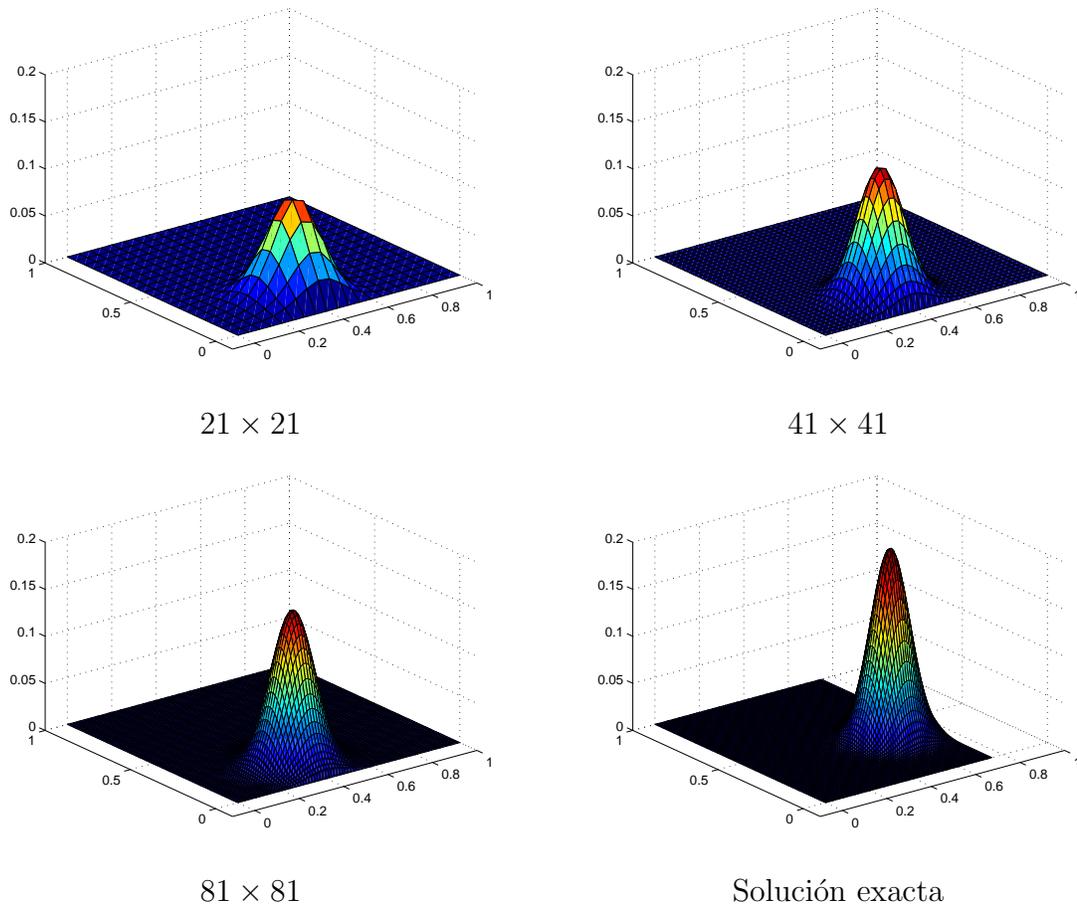
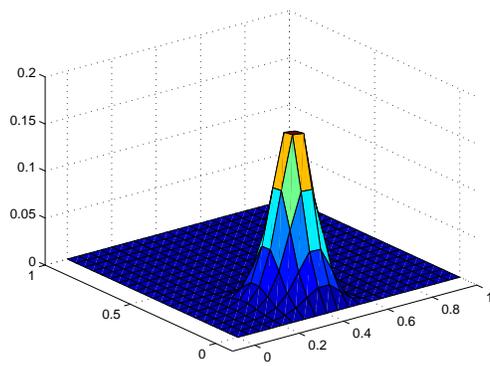


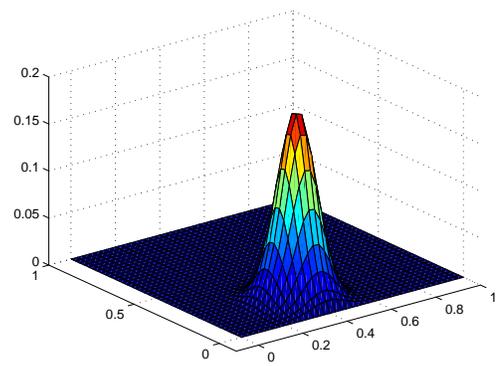
Figura 3.5: Método Upwind con 21, 41 y 81 nodos por lado.

Los errores obtenidos con el método de Lax Wendroff se reportan en la tabla (3.1), los del método Upwind en (3.2) y los del método de Lax-Friedrichs en (3.3).

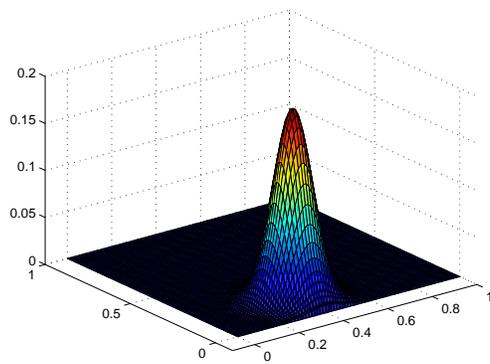
Los resultados son análogos a los resultados observados en el capítulo 2. Aquí presentamos los resultados en 2D



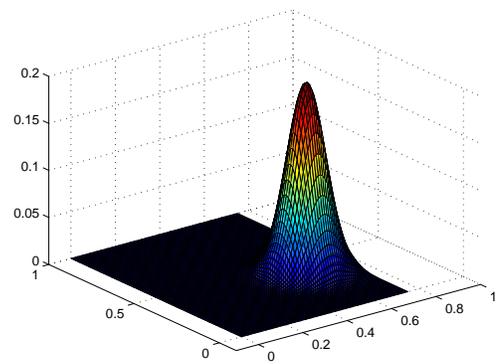
21×21



41×41



81×81



Solución exacta

Figura 3.6: Método de Lax-Friedrichs con 21, 41 y 81 nodos por lado.

Nodos	Tiempo	Error
21	0.2	3.008555×10^{-3}
	0.4	5.387705×10^{-3}
	0.6	7.309879×10^{-3}
	0.8	8.891805×10^{-3}
	1.0	1.020865×10^{-2}
41	0.2	1.447296×10^{-3}
	0.4	2.729422×10^{-3}
	0.6	3.872067×10^{-3}
	0.8	4.892973×10^{-3}
	1.0	5.800561×10^{-3}
81	0.2	7.562112×10^{-4}
	0.4	1.465138×10^{-3}
	0.6	2.130476×10^{-3}
	0.8	2.754137×10^{-3}
	1.0	3.333816×10^{-3}

Cuadro 3.1: Tabla de errores con el método de Lax-Wendroff en 2D.

Nodos	Tiempo	Error
21	0.2	7.019662×10^{-3}
	0.4	1.362990×10^{-2}
	0.6	1.948806×10^{-2}
	0.8	2.436647×10^{-2}
	1.0	2.815871×10^{-2}
41	0.2	7.012343×10^{-3}
	0.4	1.361646×10^{-2}
	0.6	1.947070×10^{-2}
	0.8	2.434776×10^{-2}
	1.0	2.814100×10^{-2}
81	0.2	6.998336×10^{-3}
	0.4	1.359086×10^{-2}
	0.6	1.943770×10^{-2}
	0.8	2.431228×10^{-2}
	1.0	2.810752×10^{-2}

Cuadro 3.2: Tabla de errores con el método Upwind en 2D.

Nodos	Tiempo	Error
21	0.2	1.2944380×10^{-3}
	0.4	2.3536397×10^{-2}
	0.6	3.0480881×10^{-2}
	0.8	3.3963072×10^{-2}
	1.0	3.5186051×10^{-2}
41	0.2	1.346361×10^{-3}
	0.4	2.418625×10^{-2}
	0.6	3.088032×10^{-2}
	0.8	3.405832×10^{-2}
	1.0	3.515564×10^{-2}
81	0.2	1.360092×10^{-3}
	0.4	2.434810×10^{-2}
	0.6	3.096914×10^{-2}
	0.8	3.407366×10^{-2}
	1.0	3.514634×10^{-2}

Cuadro 3.3: Tabla de errores con el método de Lax-Friedrichs en 2D.

Capítulo 4

Advección en Regiones Irregulares

Hasta ahora se ha trabajado con regiones regulares en 2D; sin embargo nos interesa trabajar con regiones que, como en la naturaleza, no poseen una geometría sencilla ni regular (ver ??).

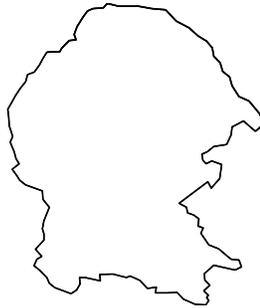


Figura 4.1: Regiones irregulares.

4.1. Esquemas en Diferencias Finitas en el plano

Consideremos un problema elíptico de frontera definido en una región plana Ω acotada y simplemente conexa

$$Lu = F \tag{4.1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = u_0 \tag{4.2}$$

donde

$$Lu = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y \quad (4.3)$$

Las funciones A, B, C, D, E, F dependen de las variables x, y y u_0 es el valor de la función desconocida en la frontera de la región.

Ahora consideremos los conjuntos de puntos:

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\} \quad (4.4)$$

en el interior de Ω donde se aproximarán los valores de la función, y

$$B = \{p_{M+1}, p_{M+2}, \dots, p_{M+N}\}$$

en la frontera, donde los valores de u son conocidos.

Los esquemas de diferencias finitas en regiones rectangulares se derivan con facilidad del teorema de Taylor. Sin embargo, su aplicación a regiones irregulares requiere una malla convexa estructurada adecuada. Tratando de remediar este problema, las regiones irregulares se aproximan por bloques de regiones rectangulares, pero en muchos casos, esto genera que se pierda lo estructurado de la malla.

Un enfoque que preserva la forma del dominio está dado por una transformación de coordenadas entre la región física y un rectángulo que produce una ecuación transformada en éste último, cuya solución puede ser aproximada usando los esquemas clásicos de diferencias finitas. Desafortunadamente, los cambios de coordenadas explícitos son únicamente conocidos para regiones simples, y esto es una gran limitación para el método.

Se pueden obtener resultados más satisfactorios para regiones muy irregulares utilizando diferencias definidas sobre mallas estructuradas generadas usando un método variacional, el cual consiste en minimizar un funcional adecuado.

En la sección (1.2.2) se dio una ligera noción de lo que es una malla, lo que facilitó trabajar con los ejemplos anteriormente mostrados, sin embargo, ahora se dará una definición más formal del concepto, particularmente, del mallado de una región en dos dimensiones [14, 15].

Sea Ω un dominio en el plano determinado por una región simplemente conexa, y $\partial\Omega$ una curva simple, cerrada y orientada positivamente; se puede generar en la

mayoría de los casos un mapeo uno a uno de la región Ω y su frontera a \mathcal{R} , el cuadrado unitario \mathbb{R}^2 .

Haciendo uso del concepto de malla como el conjunto de puntos en \mathcal{R} que cumplen $G = \{P_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, donde m y n son los números de subintervalos horizontales y verticales de la malla respectivamente; es posible dar la siguiente definición

Definición 4.1. Decimos que un mallado continuo $G(\gamma, \eta) = (x(\gamma, \eta), y(\gamma, \eta))$ sobre una región $\Omega \in \mathbb{R}^2$ es una **biyección continua**

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$$

con $G(\partial\mathcal{R}) = \partial\Omega$ donde \mathcal{R} es el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$.

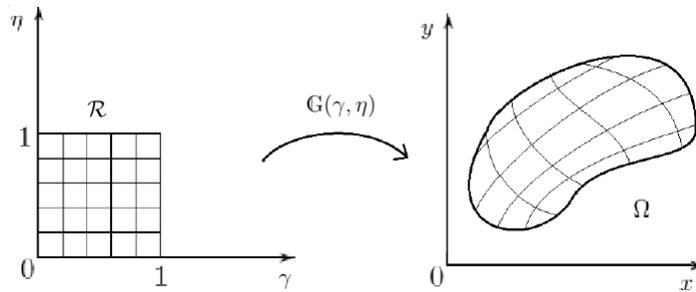


Figura 4.2: Descripción gráfica de la definición (4.1).

En particular los llamados funcionales de área y suavidad se pueden utilizar para generar mallas en una gran variedad de regiones simplemente conexas en el plano, cuyas fronteras son curvas poligonales cerradas de Jordan con orientación positiva.

Utilizando este tipo de mallas estructuradas, se han diseñado algunos esquemas para la discretización de las derivadas parciales directamente en la región física, podemos mencionar por ejemplo, las obras de Steinberg, Shashkov, Hyman, Castillo y Tinoco.

4.2. UNAMalla

El sistema UNAMalla [10] es un paquete computacional en el que podemos apoyarnos para resolver de forma suficientemente eficaz el problema de generar mallas convexas que describen regiones irregulares planas y acotadas.

El tipo de mallas que se generan al trabajar con este programa son en su mayoría estructuradas y lógicamente rectangulares, dos características muy útiles que nos facilitan el cálculo y producen buenos resultados cuando buscamos la solución numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales por el método de Diferencias Finitas [4, 16].

4.3. Esquemas en diferencias finitas para operadores lineales

Para aproximar el operador lineal básico de segundo orden

$$Lu = Au_{xx} + Bu_{x,y} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F \quad (4.5)$$

en el punto p_0 usando aproximaciones a los valores de u en algunos puntos vecinos p_1, \dots, p_q de p_0 , ver Fig(4.3), se usa un esquema en diferencias finitas, el cual se puede escribir como la combinación lineal

$$L_0 = \Gamma_0 u(p_0) + \Gamma_1 u(p_1) + \dots + \Gamma_q u(p_q) \quad (4.6)$$

con $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_q$ constantes.

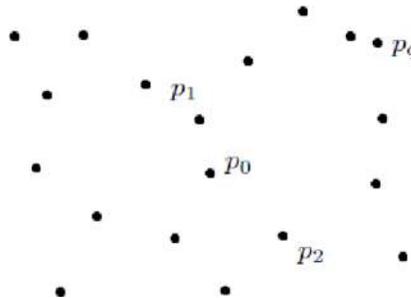


Figura 4.3: Distribución arbitraria del punto p_0 y sus vecinos.

Este esquema es consistente si

$$[Lu]_{p_0} - L_0 \rightarrow 0$$

cuando $p_1, \dots, p_q \rightarrow p_0$ [8]. Usando los primeros seis términos de la expansión en serie de Taylor, hasta segundo orden, de la condición de consistencia se obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ 0 & \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \\ 0 & (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_q)^2 \\ 0 & \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_q \Delta y_q \\ 0 & (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(p_0) \\ D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_0$, $\Delta y_i = y_i - y_0$ y $p_i = (x_i, y_i)^t$; el cual tiene 6 ecuaciones y $q + 1$ incógnitas, lo cual nos quiere decir que en la mayoría de los casos no está bien determinado.

4.4. Efecto de la geometría de la malla

Consideremos el problema de obtener una aproximación a la solución de la ecuación de advección

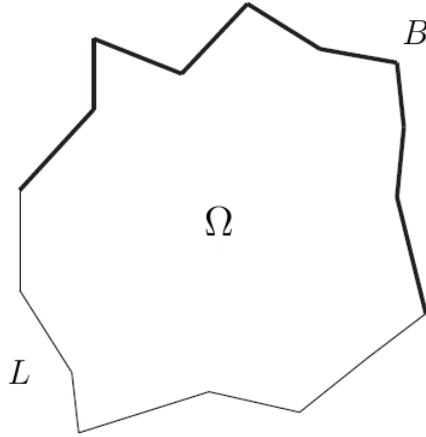
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{en } [0, T] \times \Omega, \quad a, b, \in \mathbb{R} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= g(x, y) \\ u(x, y, t)|_{S_1} &= h(x, y, t) \end{aligned}$$

usando el método de diferencias finitas, donde Ω es un dominio plano simplemente conexo del plano y $\partial\Omega$ es un polígono de Jordan positivamente orientado, tal que $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$, donde S_1 y S_2 son arco-conexos.

Para lograr este objetivo, consideramos el operador lineal de segundo orden

$$Lu = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu, \quad (4.9)$$


 Figura 4.4: Dominio Ω con fronteras $\partial\Omega = L \cup B$.

el cual aproximamos en el punto p_0 usando aproximaciones de los valores de u en algunos puntos vecinos p_0, \dots, p_q de p_0 ; para este propósito usamos un esquema en diferencias finitas para p_0 , que es una combinación lineal

$$L_0 = \Gamma_0 u(p_0) + \Gamma_1(p_1) + \dots + \Gamma_q(p_q). \quad (4.10)$$

Nuestro objetivo es aproximar L en el punto p_0 de la malla. Decimos que el esquema anterior es consistente si

$$[Lu]_{p_0} - L_0 \rightarrow 0$$

cuando $p_1, \dots, p_q \rightarrow 0$ [17].

Usando los primeros seis términos de la expansión de Taylor hasta segundo orden, la consistencia requiere que satisfaga el sistema matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ 0 & \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \\ 0 & (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_q)^2 \\ 0 & \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_q \Delta y_q \\ 0 & (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(p_0) \\ D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Como puede apreciarse este sistema tiene 6 ecuaciones y $q + 1$ incógnitas, por lo que al usar una malla de 3×3 (i.e. una malla estructurada con 9 nodos por lado), obtenemos un sistema sobredeterminado el cual en general no tiene solución; así que optamos por resolverlo en el sentido de mínimos cuadrados. Esto se puede hacer de una manera no iterativa considerando las ecuaciones normales del sistema formado por las últimas 5 ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \\ (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_q)^2 \\ \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_q \Delta y_q \\ (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

y usando la factorización de Cholesky para obtener $\Gamma_1, \dots, \Gamma_q$. Ahora, para calcular Γ_0 usamos la primera ecuación de (4.11)

$$\Gamma_0 = -\Gamma_1 - \dots - \Gamma_q + F(p_0). \quad (4.13)$$

El resultado que se obtiene es el conjunto de coeficientes que se requieren para definir el esquema (4.10) Ver[2]. Queremos aplicar esta aproximación al esquema de Lax-Wendroff para la ecuación (4.9) usamos la regla de la cadena para obtener las derivadas parciales de u con respecto a t

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \end{aligned}$$

y sustituimos éstas derivadas parciales en la expansión en serie de Taylor

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \dots \quad (4.14)$$

de manera que obtengamos la expresión

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \left[-\Delta t \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] + \dots$$

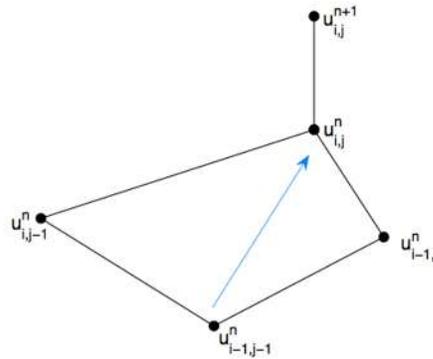


Figura 4.5: Estilo Upwind

Vamos a aplicar el esquema definido por las ecuaciones (4.12) y (4.13) al operador

$$-\Delta t \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad (4.15)$$

los coeficientes resultantes $\Gamma_0, \dots, \Gamma_q$ definen el esquema modificado de Lax-Wendroff de la siguiente manera:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \sum_{k=0}^q \Gamma_k(u_0, \dots, u_q) u_k^n, \quad (4.16)$$

donde el superíndice representa el nivel de tiempo.

Este esquema puede ser usado con mallas tanto estructuradas como no-estructuradas; puesto que nos interesan estas últimas, podemos aprovechar la estructura lógica dada por el par de índices en la malla $G = p_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$ y usamos un ‘estilo upwind’ para obtener el nodo de la malla $p_{i,j}$ con el estencil mostrado en la (??)

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Gamma_0(i,j)u_{i,j}^n + \Gamma_1(i,j)u_{i-1,j}^n + \Gamma_2(i,j)u_{i,j-1}^n + \Gamma_3(i,j)u_{i-1,j-1}^n, \quad (4.17)$$

donde $u_{i,j}^n$ es la aproximación a \hat{U} en el nodo i, j de la malla y el nivel de tiempo n , $1 < i \leq m$, $1 < j \leq k$, $n > 0$. Tomando en cuenta la expresión anterior y que $F = 0$ en (4.9), se tiene el siguiente teorema

Teorema 4. *El esquema en diferencias*

$$u_{i,j}^{n+1} = (1 + \Gamma_0(i,j))u_{i,j}^n + \Gamma_1(i,j)u_{i-1,j}^n + \Gamma_2(i,j)u_{i,j-1}^n + \Gamma_3(i,j)u_{i-1,j-1}^n$$

es estable cuando las condiciones

$$\begin{aligned} 1 + \Gamma_0(i,j) &\geq 0 \\ \Gamma_1(i,j) &\geq 0 \\ \Gamma_2(i,j) &\geq 0 \\ \Gamma_3(i,j) &\geq 0 \end{aligned}$$

se satisfacen $\forall i, j$

Demostración. Puesto que

$$\begin{aligned} |u_{i,j}^{n+1}| &\leq (1 + \Gamma_0(i,j)) |u_{i,j}^n| + \Gamma_1(i,j) |u_{i-1,j}^n| \\ &\quad + \Gamma_2(i,j) |u_{i,j-1}^n| + \Gamma_3(i,j) |u_{i-1,j-1}^n| \\ &\leq (1 + \Gamma_0(i,j) + \Gamma_1(i,j) + \Gamma_2(i,j) + \Gamma_3(i,j)) \sup_{i,j} |u_{i,j}^n| \\ &= \sup_{i,j} |u_{i,j}^n|, \end{aligned}$$

de lo que concluimos que

$$\|u^{n+1}\|_{\infty} \leq \|u^n\|_{\infty}$$

donde

$$\|u^n\|_\infty = \sup_{i,j} \{|u_{i,j}|\}.$$

□

4.4.1. Esquema propuesto

La pregunta natural que surge es: ¿en qué mallas se satisfacen las condiciones del teorema anterior? Se propone una solución, basada en dos requerimientos:

$$a, b > 0 \tag{4.18}$$

$$\Delta X_i, \Delta Y_i > 0 \tag{4.19}$$

El primer requerimiento es necesario para que el problema sea bien planteado; el segundo está motivado por lo siguiente: el sistema (4.12) para la ecuación (4.9) se escribe como

$$\begin{aligned} \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 &= 0 \\ \Gamma_1 \Delta x_1 + \Gamma_2 \Delta x_2 + \Gamma_3 \Delta x_3 &= -a \Delta t \\ \Gamma_1 \Delta y_1 + \Gamma_2 \Delta y_2 + \Gamma_3 \Delta y_3 &= -b \Delta t \end{aligned}$$

retomando las condiciones del teorema anterior son

$$\begin{aligned} 1 + \Gamma_0 &> 0 \\ \Gamma_{i,j} &> 0, \end{aligned}$$

por lo tanto si $\Delta x_i, \Delta y_i > 0$, entonces

$$\Gamma_2(\Delta x_1 \Delta y_2) + \Gamma_3(\Delta x_1 \Delta y_3 - \Delta x_3 \Delta y_1) = \Delta t(a \Delta y_1 - b \Delta x_1)$$

luego hacemos,

$$(\Delta x_1 \Delta y_2) = \alpha_1 \quad y \quad (\Delta x_1 \Delta y_3 - \Delta x_3 \Delta y_1) = \alpha_0$$

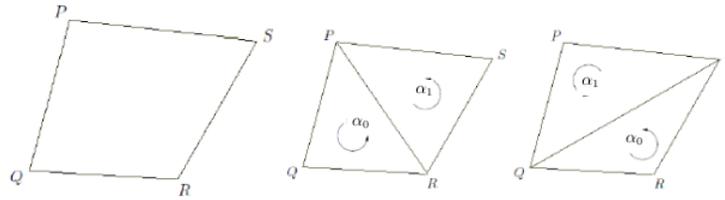


Figura 4.6: Cuadrilátero que representa alguna celda de algún mallado G

donde α_i es el área orientada del Δ_i (4.6), con lo que obtenemos

$$\alpha_1 \Gamma_2 + \alpha_0 \Gamma_3 = \Delta t (a \Delta y_1 - b \Delta x_1) > 0,$$

de tal modo que

$$a \Delta y_1 - b \Delta x_1 > 0 \tag{4.20}$$

$$-a \Delta t < \Gamma_2 \Delta x_2 + \Gamma_3 \Delta x_3 \tag{4.21}$$

bajo las hipótesis (4.18), (4.19), estas son las condiciones para lograr estabilidad.

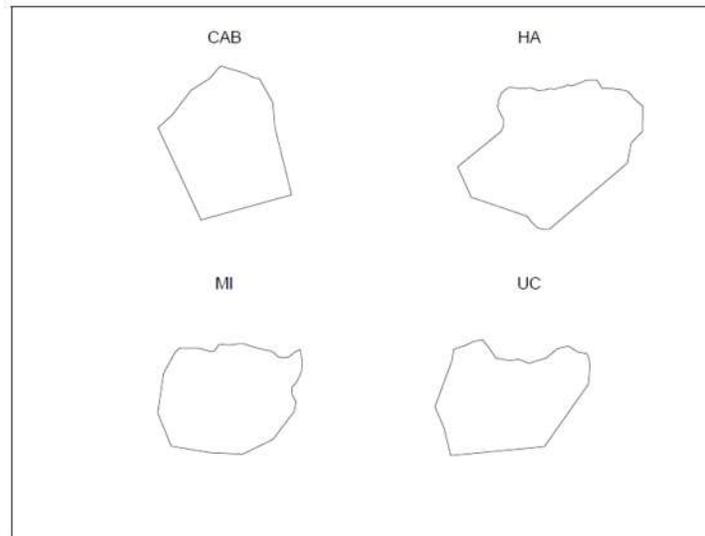


Figura 4.7: Dominios

4.5. Ejemplos numéricos

Ejemplo 6. Usaremos el esquema modificado de Lax-Wendroff con mallas de 21×21 y 41×41 nodos, usaremos las regiones de prueba denotadas con los nombres MIC, CAB, HA, UC (ver 4.7).

Se usaron distintas funciones en cada dominio antes mencionado como condiciones iniciales y condiciones de frontera de acuerdo a la geometría de cada región de manera que se intentó que el pulso que describe cada una de las funciones iniciara en el centro de la región a la que se le está aplicando. Las funciones son las siguientes:

MIC:

$$u(x, y, t) = 0,2 e^{((-x-0,4-0,1t)^2 - (y-0,25-0,1t)^2)/0,01},$$

CAB:

$$u(x, y, t) = 0,2 e^{((-x-0,5-0,1t)^2-(y-0,3-0,1t)^2)/0,01},$$

HA:

$$u(x, y, t) = 0,2 e^{((-x-0,45-0,1t)^2-(y-0,5-0,1t)^2)/0,01},$$

UC:

$$u(x, y, t) = 0,2 e^{((-x-0,5-0,1t)^2-(y-0,3-0,1t)^2)/0,01}.$$

A continuación se muestran los errores obtenidos al hacer las aproximaciones usando las regiones con las respectivas funciones antes descritas, así como las gráficas que corresponden a cada dominio con 21 y 41 nodos por lado para un tiempo $t = 1$.

Nodos	Tiempo	Error
21 × 21	0.2	2.373896×10^{-3}
	0.4	4.293898×10^{-3}
	0.6	5.870235×10^{-3}
	0.8	7.181950×10^{-3}
	1.0	8.282665×10^{-3}
41 × 41	0.2	1.256044×10^{-3}
	0.4	2.359389×10^{-3}
	0.6	3.332563×10^{-3}
	0.8	4.195181×10^{-3}
	1.0	4.960990×10^{-3}

Cuadro 4.1: Errores para el método explícito de los cuatro puntos con MIC.

Nodos	Tiempo	Error
21 × 21	0.2	1.997677×10^{-3}
	0.4	3.638061×10^{-3}
	0.6	5.007757×10^{-3}
	0.8	6.159534×10^{-3}
	1.0	7.114718×10^{-3}
41 × 41	0.2	1.053611×10^{-3}
	0.4	1.998247×10^{-3}
	0.6	2.849324×10^{-3}
	0.8	3.615975×10^{-3}
	1.0	4.297455×10^{-3}

Cuadro 4.2: Errores para el método explícito de los cuatro puntos con CAB.

Nodos	Tiempo	Error
21 × 21	0.2	2.219519×10^{-3}
	0.4	4.042284×10^{-3}
	0.6	5.576368×10^{-3}
	0.8	6.893969×10^{-3}
	1.0	8.039294×10^{-3}
41 × 41	0.2	1.157349×10^{-3}
	0.4	2.205029×10^{-3}
	0.6	3.162743×10^{-3}
	0.8	4.045245×10^{-3}
	1.0	4.860791×10^{-3}

Cuadro 4.3: Errores para el método explícito de los cuatro puntos con HA.

Nodos	Tiempo	Error
21 × 21	0.2	1.518484×10^{-3}
	0.4	2.807900×10^{-3}
	0.6	3.914096×10^{-3}
	0.8	4.858732×10^{-3}
	1.0	5.652830×10^{-3}
41 × 41	0.2	7.611643×10^{-4}
	0.4	1.446097×10^{-3}
	0.6	2.065019×10^{-3}
	0.8	2.621579×10^{-3}
	1.0	3.112201×10^{-3}

Cuadro 4.4: Errores para el método explícito de los cuatro puntos con UC.

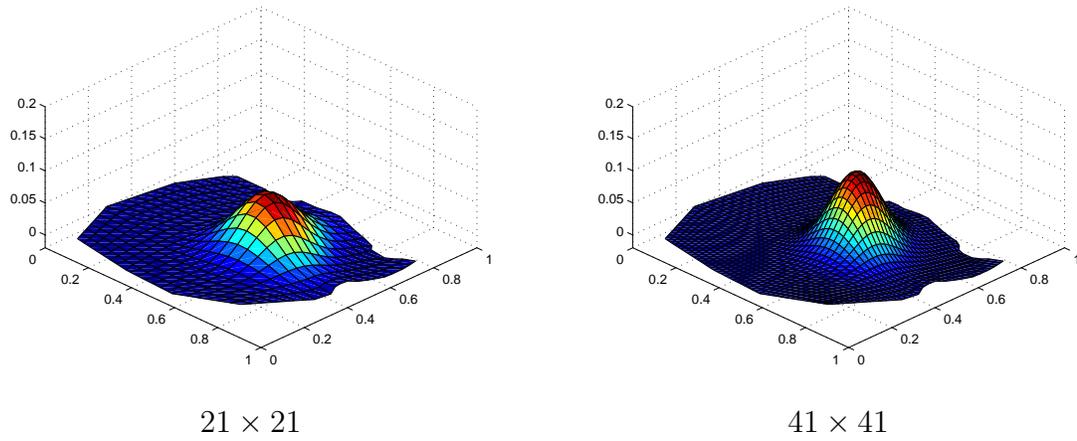


Figura 4.8: Comparación de los resultados del método explícito de 4 puntos con MIC.

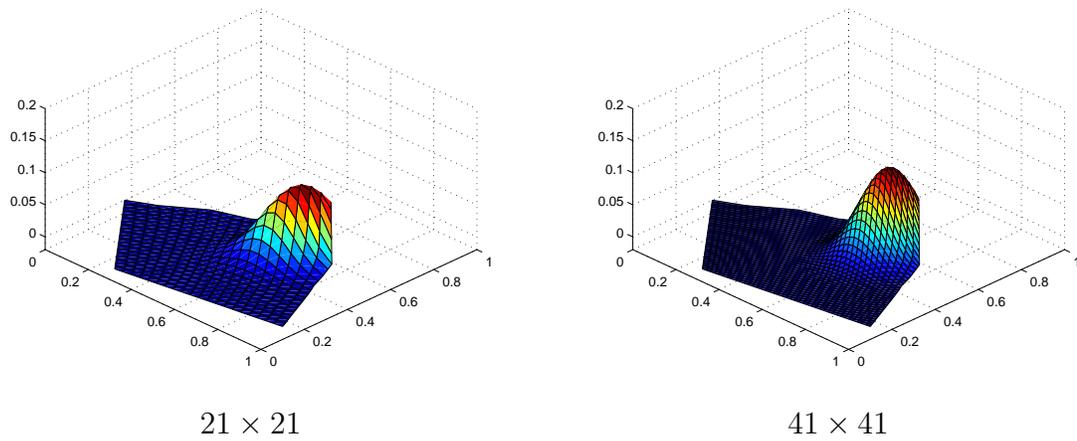


Figura 4.9: Comparación de los resultados del método explícito de 4 puntos con CAB.

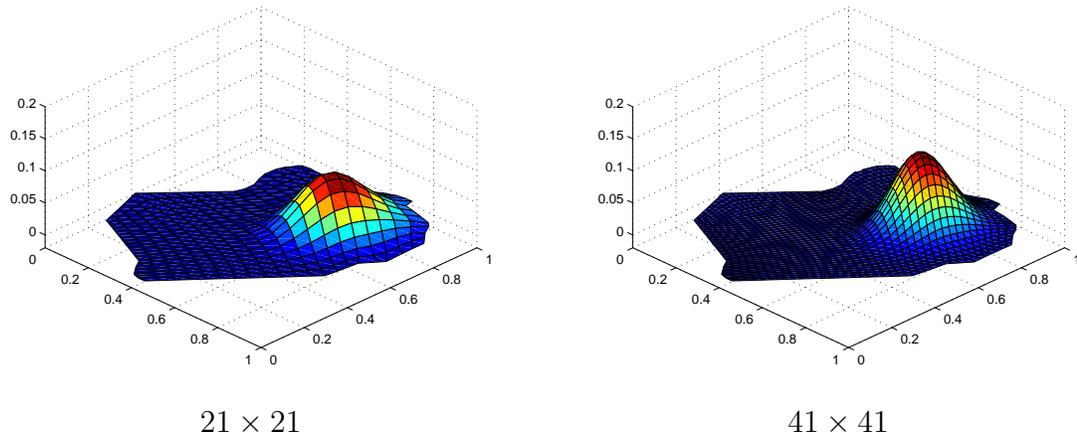


Figura 4.10: Comparación de los resultados del método explícito de 4 puntos con HA.

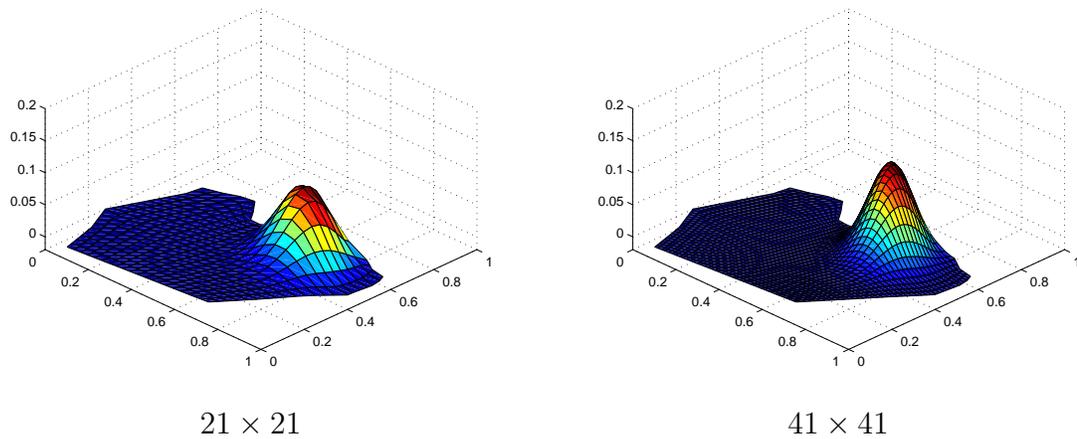


Figura 4.11: Comparación de los resultados del método explícito de 4 puntos con UC.

Capítulo 5

Conclusiones

El estudio de la aproximación de la solución de la ecuación de advección en regiones irregulares fue el tema central de esta tesis, pero para ello se trabajó también con regiones regulares en 1D y 2D, que nos ayudó a tener más material de comparación y así tener un estudio mucho más completo.

Como se vio, para hacer la deducción de los esquemas en diferencias finitas, usamos como base la expansión en serie de Taylor, que teóricamente son sencillos de trabajar; si bien, se necesita más teoría y manejo algebraico, la aplicación de manera natural del Teorema de Taylor, nos permite que los esquemas sean más accesibles.

La estabilidad es de suma importancia al emplear los esquemas, de no mantener dicha estabilidad, los resultados se vuelven imprecisos; pero al tener un manejo cuidadoso de esquemas estables, vimos que aunque hicimos variaciones en los datos de entrada como por ejemplo las distintas velocidades que se emplearon, las aproximaciones a la solución real se mantuvieron con buena precisión, aún cuando se trabajó con distintos métodos, con diferente número de nodos en las mallas que se usaron para aproximar la solución en las regiones elegidas en distintas dimensiones (1D y 2D) y en regiones (regulares e irregulares).

La ecuación de advección en 2D en regiones regulares es un esquema poco estudiado, sin embargo, aquí se ha logrado aproximaciones satisfactorias ya que muestran que, además de ser estables, tienen buena precisión como se vio en el capítulo 3. En general es posible ver que los esquemas propuestos en regiones regulares en el caso 1D y 2D, se aplican de manera satisfactoria en diversos tipos de mallas que aunque

se haga un refinamiento de estas, se producen resultados cercanos a los esperados.

En el caso de la ecuación en regiones irregulares, vimos que se debe tener especial cuidado en el tratamiento de las regiones, por ejemplo el Teorema de Taylor no se puede aplicar de forma directa como se hizo en regiones rectangulares ya que es necesario de una malla convexa estructurada adecuada, lo cual conyeva a otros problemas. Sin embargo, los esquemas que nos propusimos estudiar aún cuando se tienen ciertas limitantes al trabajar con mallas no-estructuradas, al usar un método variacional se obtuvieron resultados satisfactorios, muy cercanos a la solución real, con una muy buena precisión.

Apéndice A

Códigos

El siguiente programa fue usado para obtener los resultados mostrados en el capítulo 2, diseñado con ayuda del lenguaje de programación MATLAB[®] [11]. La finalidad del programa es aproximar la solución de la ecuación de advección en 1D, usando el esquema Upwind.

```
1 function [v, c]=advectionUp(m, n, a, T)
2 % m representa el número de puntos en la malla en la posición de los nodos en el eje X .
3 % n representa el número de puntos en la malla en la posición de los nodos en el eje T .
4 % a es la velocidad de advección.
5 % T es el tiempo.
6
7 dx = 1/m;
8 dt = T/n;
9 % Recordemos que  $c \leq 0,5$ ; donde c es la condición de estabilidad.
10 c=a*dt/dx;
11 y=dt:dt:T;
12 % Condiciones a la frontera.
13 x=0:dx:1;
14 v(1,:) = sin(x); % f(x, 0)
15 v(2:n+1,1) = -sin(a*y); % h(0, t)
16 v(2:n+1,m+1) = sin(1-a*y); % h(1, t)
17 % Llenado
18 for i=1:n
19     for k=2:m
20         % Esquema en diferencias.
```

```

21         v(i+1,k)= v(i,k) - c*(v(i,k) - v(i,k-1));
22     end
23 end

```

Código A.1: Ecuación de advección en 1D

El siguiente programa fue usado para obtener los resultados mostrados en el capítulo 2, para resolver la ecuación de advección en 1D con el método de Lax-Wendroff.

```

1  function [v,c]=advectionLW(m,t,a)
2  %m es el número de nodos en la malla en el espacio.
3  %t es el número de nodos en la malla en el tiempo.
4  %a es la velocidad de advección.
5
6  close all
7
8  T = linspace(0,5,t); % Se hace la malla en el tiempo
9  x = linspace(0,2*pi,m); % Se hace la malla en el espacio
10 dt = T(2) - T(1); % Se calcula dt con respecto a la malla en el tiempo T
11 dx = x(2) - x(1); % Se calcula dx con respecto a la malla en el espacio x
12 v = zeros(m,t); % Se inicializa la matriz de v, por cuestiones de velocidad.
13
14 c = a*dt/dx/2; % c es el número de Courant
15
16 % Condición inicial
17 for i = 1:m
18     v(i,1) = sin(x(i) -a*T(1));
19 end
20
21 % Condiciones de frontera
22 for k = 1:t
23     v(1,k) = sin(x(1) - a*T(k));
24     v(m,k) = sin(x(m) - a*T(k));
25 end
26
27 % Método de Lax-Wendroff
28 for k = 2:t
29     for i = 2:m-1

```

```

30         v(i,k) = v(i,k-1) - c*(v(i+1,k-1)-v(i-1,k-1)) + (c^2/2)*(v(i
+1,k-1)-2*v(i,k-1)+v(i-1,k-1));
31     end
32 end
33
34 % Graficamos la solución
35 for i = 1:20:t
36     plot(x,v(:,i));
37     axis([0 2*pi -1 1])
38     pause(0.1)
39 end
40 end

```

Código A.2: Ecuación de advección en 1D

El siguiente programa fue usado para obtener los resultados mostrados en el capítulo 3, diseñado con ayuda del lenguaje de programación MATLAB[®] [11]. La finalidad del programa es aproximar la solución de la ecuación de advección en 2D, usando el esquema Lax-Wendroff.

```

1 function [U,U1] = Ad.2D(x,y,t,f,a,b)
2 close all
3 % Se inicializan las variables
4 [m,n] = size(x);
5 nt = length(t);
6 dt = t(2)-t(1);
7 U1 = zeros(m,n,nt);
8 dx = x(1,1) - x(2,2);
9 dy = y(1,1) - y(2,2);
10
11 % Llenamos con la condición inicial
12 for i = 1:m
13     for j = 1:n
14         U1(i,j,1) = f([x(i,j),y(i,j)],t(1),a,b);
15     end
16 end
17
18 % Condiciones en la frontera
19 for k = 2:nt

```

```

20     for i = 1:m
21         U1(i,1,k) = f([x(i,1),y(i,1)],t(k),a,b);
22     end
23     for j = 2:n
24         U1(1,j,k) = f([x(1,j),y(1,j)],t(k),a,b);
25     end
26 end
27
28 % Llenado de los nodos interiores
29 U = U1;
30 for k = 2:nt
31     for i = 2:m
32         for j = 2:n
33             % Esquema en diferencias.
34             U(i,j,k) = U(i,j,k-1) - a*(dt/dx)*(U(i-1,j,k-1)-U(i,j,k-1))
35             - b*(dt/dy)*(U(i,j-1,k-1)-U(i,j,k-1));
36         end
37     end
38
39 for i = 1:50:nt
40     surf(x,y,U(:,:,i));
41     axis([-0.15 1 -1 2 -1 2])
42     view(3)
43     pause(0.1)
44 end
45 end

```

Código A.3: Ecuación de advección en 2D con el método de Lax-Wendroff

El siguiente programa fue usado para obtener los resultados mostrados en el capítulo 4, diseñado con ayuda del lenguaje de programación MATLAB[®] [11]. La finalidad del programa es aproximar la solución de la ecuación de advección en 2D, usando el método de Lax-Wendroff programado de manera explícita con el esquema de 4 puntos.

```

1 % Se inicializan las variables
2 % Es importante revisar que la matriz coincida con los límites de la malla.

```

```

3 | % Cuenta con ambas versiones para calcular las gammas, la versión donde se resuelve el sistema
  | de ecuaciones y la versión donde se tienen las fórmulas explícitas.
4 | % La llamada al método se hace:
5 | %     U = wendroffg(x,y,f,a,b,t,gr,graf);
6 |
7 | % Argumentos de salida
8 | %     U: Matriz U con la aproximación final de la función.
9 |
10 | %Argumentos de entrada
11 |
12 | % x, y : Coordenadas de los puntos de la malla
13 | % f : Función para la condición inicial y de frontera.
14 | % a, b : Velocidades de movimiento del pulso de la función f.
15 | % Los valores por defecto de a y b son .1
16 | % t : Vector con los diferentes niveles de tiempo.
17 | % El valor por defecto de t es 0:1/1023:2;
18 | % gr : Se utiliza para elegir la manera del cálculo de Gammas.
19 | %     0 : Cálculo clásico de Gammas (valor por defecto).
20 | %     1 : Cálculo con fórmulas explícitas.
21 | % graf : Se utiliza para elegir si se grafica o no.
22 | %     0 : No se grafica (valor por defecto).
23 | %     1 : Sí se grafica.
24 |
25 | function U = wendroffg4(x,y,f,a,b,t,gr,graf)
26 | tic
27 | close all
28 |
29 | switch nargin
30 |     case 3
31 |         a = .1;
32 |         b = .1;
33 |         t = 0:1/1023:2;
34 |         gr = 0;
35 |         graf = 0;
36 |     case 4
37 |         b = .1;
38 |         t = 0:1/1024:1;
39 |         gr = 0;
40 |         graf = 0;
41 |     case 5

```

```

42         t = 0:1/1024:1;
43         gr = 0;
44         graf = 0;
45     case 6
46         gr = 0;
47         graf = 0;
48     case 7
49         graf = 0;
50 end
51
52 [m,n] = size(x);
53 nt = length(t);
54 dt = t(2) - t(1);
55 U1 = zeros(m,n,nt);
56 Gamma = zeros(m,n,4);
57
58 % Primero llenamos k=1 con condiciones iniciales
59 for i = 1:m
60     for j = 1:n
61         U1(i,j,1) = f([x(i,j),y(i,j)],t(1),a,b);
62     end
63 end
64
65 % Ahora llenamos con condiciones de frontera
66 for k = 2:nt
67     for i = 2:m
68         U1(i,1,k) = f([x(i,1),y(i,1)],t(k),a,b);
69     end
70     for j = 2:n
71         U1(1,j,k) = f([x(1,j),y(1,j)],t(k),a,b);
72     end
73 end
74
75 % Calculamos las Gammas
76 if gr == 0
77     for i = 2:m
78         for j = 2:n
79             dx = [x(i-1,j)-x(i,j),x(i-1,j-1)-x(i,j),x(i,j-1)-x(i,j)];
80             dy = [y(i-1,j)-y(i,j),y(i-1,j-1)-y(i,j),y(i,j-1)-y(i,j)];

```

```

81         M = [dx ; dy ; dx.*dx ; dx.*dy ; dy.*dy];
82         YY = pinv(M)*[-a*dt -b*dt (a*dt)^2 a*b*dt^2 (b*dt)^2]';
83         Gamma(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
84     end
85 end
86 else
87
88 % Nuevas maneras de calcular los Gammas
89     for i = 2:m
90         for j = 2:n
91             h1 = x(i-1,j)-x(i,j);
92             h2 = x(i-1,j-1)-x(i,j);
93             h3 = x(i,j-1)-x(i,j);
94             k1 = y(i-1,j)-y(i,j);
95             k2 = y(i-1,j-1)-y(i,j);
96             k3 = y(i,j-1)-y(i,j);
97             s1 = (h2*k3-h3*k2)/(h1*k2-h2*k1);
98             s2 = (h3*k1-h1*k3)/(h1*k2-h2*k1);
99             a1 = -a*dt;
100            be = -b*dt;
101            ga = (a*dt)^2;
102            de = a*b*dt^2;
103            et = (b*dt)^2;
104            t1 = (a1*k2-be*h2)/(h1*k2-h2*k1);
105            t2 = (-a1*k1+be*h1)/(h1*k2-h2*k1);
106            Gamma(i,j,4) = ((h1^2*s1 + h2^2*s2 + h3^2)*(ga - h1^2*t1 -
107 h2^2*t2) + ...
108            (k1*h1*s1 + k2*h2*s2 + k3*h3)*(de - k1*h1*t1 - k2*h2*t2)
109 )+ ...
110            (k1^2*s1 + k2^2*s2 + k3^2)*(et - k1^2*t1 - k2^2*t2))/
111            ...
112            ((h1^2*s1 + h2^2*s2 + h3^2)^2 + (k1*h1*s1 + k2*h2*s2 +
113 k3*h3)^2 + ...
114            (k1^2*s1 + k2^2*s2 + k3^2)^2);
115            Gamma(i,j,2) = s1*Gamma(i,j,4) + t1;
116            Gamma(i,j,3) = s2*Gamma(i,j,4) + t2;
117            Gamma(i,j,1) = - Gamma(i,j,2) - Gamma(i,j,3) - Gamma(i,j,4)
118 ;
119         end
120     end

```

```

115     end
116 end
117
118 U = U1;
119
120 % Llenamos ahora los nodos interiores
121 for k = 2:nt
122     for i = 2:m
123         for j = 2:n
124             U(i,j,k) = U(i,j,k-1) + Gamma(i,j,1)*U(i,j,k-1) + Gamma(i,j
,2)*U(i-1,j,k-1) + ...
125                 Gamma(i,j,3)*U(i-1,j-1,k-1)+Gamma(i,j,4)*U(i,j-1,k-1);
126         end
127     end
128 end
129 toc
130
131 % Hacemos la gráfica
132 if graf == 1
133     for i=1:50:nt
134         surf(x,y,U(:,:,i));
135         axis([0 1 0 1 -.02 .2]);
136         view(3);
137         pause(0.01)
138     end
139 end
140 end

```

Código A.4: Ecuación de advección en 2D con el método de Lax-Wendroff en regiones irregulares

Bibliografía

- [1] A.R. Mitchell, D.F. Griffiths, 1980 *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering.
- [2] P. M. Fernández Valdez, 2013, *Un esquema directo de Diferencias Finitas para la solución numérica de ecuaciones elípticas en regiones irregulares del plano*. Tesis Licenciatura.
- [3] R. J. LeVeque, *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, Steady-State and Time-Dependent Problems*, 1976.
- [4] S. Mendoza Armenta, *Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales elípticas en regiones planas irregulares usando diferencias finitas*. Tesis Licenciatura, 2010.
- [5] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 1976.
- [6] C. Grossman, Hans-Görg Ross, *Numerical Treatment of Partial Differential Equations*, 2005.
- [7] J. W. Thomas, *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, 1995.
- [8] M. Celia and W. Gray, *Numerical Methods for Differential Equations*, Prentice-Hall, 1992.
- [9] H. Winter, *Advection Schemes in Two Dimensions*, 2011.

-
- [10] UNAMALLA Versión 4.0 *An automatic package for numerical grid generation*.
Web site:

http://www.mathmoo.unam.mx/unamalla/home_e.html
- [11] MATLAB[®] Versión R2011b. *The language of technical computing*. Web site:

<http://www.mathworks.com/products/matlab>
- [12] H.F. Weinberger, *A First Course In Partial Differential Equations, whit complex variables and transform methods*, 1995.
- [13] A.A. Samarski, V.B. Andréiev, *Métodos de Diferencias para las Ecuaciones Elípticas*, 1979.
- [14] Y.S. Osipov, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Volume 43, Number 6, June 2003. Godunov S.K., On the Ideas Underlying Grid Generation Methods, pag. 751-753.
- [15] P. Knupp, S. Steinberg, *Fundamentals of Grid Generation*, 1993.
- [16] F. Domínguez-M, S. Mendoza y J. Tinoco, *Finite Difference Schemes Satisfying an Optimality Condition*, MASCOT 10, Proceedings, 2011.
- [17] E. Ruiz-Díaz, F.J. Domínguez-Mota, J.G. Tinoco-Ruiz, G. Tinoco Guerrero y P.M. Fernández, *Efecto de la Geometría de la Malla en la Solución Numérica del Problema de Advección*, 2013.
- [18] Frank M. White, *Mecánica de Fluidos*, Quinta Edición. Año de publicación: 2004.