



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Y
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS UNAM-UMSNH

Dependencia del espectro de Dirac en estructuras espín del toro

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

HERNÁN LAIME ZANGA

Director: Doctor en rerum naturalium Elmar Wagner
Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

MORELIA, MICHOACÁN - FEBRERO DE 2014.

Dedicatoria

*Con mucho cariño a mi madre
Juana Zanga Chacapacha.*

Agradecimientos

Desde estas líneas, deseo expresar mi más sincero agradecimiento a mi asesor Dr. Elmar Wagner, por todo el apoyo que me brindó para que esta tesis de maestría pudiera llevarse a cabo.

Mi recuerdo más grato hacia mis compañeros y amigos del Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas. En especial a mis amigos Roberto Carlos y Victor Hugo.

Índice general

Introducción	VI
0.1. Resultados principales en este trabajo	VI
0.2. ¿Por qué es interesante?	VI
0.3. Plan General	VII
1. Estructura diferenciable del toro $\mathbb{T}^2$	1
1.1. Variedad Diferenciable	1
1.2. El toro	2
2. Los cuatro haces de espín del toro $\mathbb{T}^2$	13
2.1. Haces Vectoriales	14
2.2. El álgebra de Clifford y grupo espín	22
2.3. Construcción de las cuatro estructuras espín de $\mathbb{T}^2$	24
3. Funciones con condición de frontera sobre $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$	35
3.1. Espacio espinor	35
3.2. Espacio de funciones con funciones de transición	37
3.3. Espacio de funciones con condición de frontera	40
3.4. Trivialidad de los cuatro haces de espín del toro	56
4. El operador de Dirac sobre el toro $\mathbb{T}^2$	59
4.1. La derivada covariante en haces vectoriales	59
4.1.1. La derivada covariante de Levi Civita en $\mathbb{T}^2$	62
4.1.2. La derivada covariante espín sobre $\mathbb{T}^2$	63
4.2. El operador de Dirac	65
5. El espectro del operador de Dirac del toro $\mathbb{T}^2$	67
5.1. La clausura del operador de Dirac $\overset{k}{D}$ es autoadjunto en $L_2(S)$	68
5.2. Cálculo del espectro de Dirac $\overset{k}{D}$	72

Resumen

En la presente tesis, usamos cuatro cartas locales del toro plano, lo cual implica obtener las funciones de transición. Para hacer un levantamiento de las funciones de transición mediante la aplicación cubriente 2:1 del grupo espín al grupo ortogonal especial, obteniendo cuatro familias, llamadas estructuras espín del toro. Enseguida definimos los cuatro haces de espín del toro (mediante la representación espín) que están asociados a las cuatro estructuras espín. Además, demostramos que los haces de espín positivo y negativo son triviales, y utilizando la suma de Whitney (suma de haces vectoriales), obtenemos el haz de espín global que también resulta ser trivial.

Por otro lado, demostramos que el espacio espinor es isomorfo al espacio de funciones con condición de frontera, lo cual significa que el espinor (definido en el toro y cuya imagen puede ser el haz de espín positivo o negativo) es identificado con la función definida en un cuadrado con lados de longitud uno y con valores complejos. Esto nos ayuda a definir cada uno de los dominios de los cuatro operadores de Dirac que corresponden a los cuatro haces de espín. Luego extendemos dicho dominio a un espacio de Hilbert, que nos permite concluir que la clausura del operador de Dirac es autoadjunto. Teniendo esto en cuenta determinamos cuatro espectros que corresponden a cuatro operadores de Dirac, y de los cuales tres resultan distintos. Finalmente, concluimos que el espectro de Dirac depende de la estructura espín del toro.

Toro, estructura espín, operador de Dirac, espectro.

Abstract

In this thesis, start with four local charts of the flat torus and lift the transition function with the 2:1 covering map of the spin group to the especial orthogonal group, in order to obtain the four families, which are called the torus spin structures. After that, we define the four torus spin bundles (with the spin representation) which are associated with the four spin structures. We proof that the positive and negative spin bundles are trivial, and using the Whitney sum (vector bundles sum) we obtain the global spin bundle which turns out to be also trivial.

Furthermore, we show that the spinor space is isomorphic to a functions space with boundary conditions, which means that a spinor (defined on the torus and with values in the positive or negative spin bundle) is identified with a complex function defined on a unit length square. This helps us to define each of the domains of the four Dirac operators, corresponding to the four spin estructures. Then we extend this domain to a Hilbert space, which allows us to conclude that theclosure of the Dirac operator is self-adjoint. Moreover, we determine the four spectra of the four Dirac operators, and three of them turn out to be different. Finally, we conclude that the spectrum of the Dirac operator depends on the spin structure.

Torus, spin structure, Dirac operator, spectrum.

INTRODUCCIÓN

Las ideas y resultados que aparecen en la presente tesis se pueden enmarcar dentro del campo de interacción entre el Análisis Espectral de Operadores y la Geometría Diferencial.

0.1. Resultados principales en este trabajo

El objeto de estudio en este trabajo es saber si las cuatro estructuras espín construidas del toro $\mathbb{T}^2$ tienen espectros diferentes de los Operadores de Dirac definidos en los espacios espinores correspondientes a las cuatro estructuras espín.

Empezamos mostrando en el Capítulo 1 que el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ admite una estructura diferenciable, compuesta de cuatro cartas locales o cartas coordenadas para el $\mathbb{T}^2$. Esto nos lleva al Capítulo 2 para la construcción de las cuatro estructuras espín del toro. Luego en el Capítulo 3, mostramos que para las cuatro estructuras espín, los haces de espín asociados son **triviales**, de esta manera los espinores diferenciables se pueden escribir como funciones diferenciables con valores complejos definidas en el toro cuadrado $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Es decir, que las secciones son reemplazados por funciones definidas sobre $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

En el Capítulo 4 nos encargamos en determinar los operadores de Dirac definidos en el espacio de funciones con condiciones de frontera, tales funciones están definidas sobre el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ con valores complejos (i.e $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$), correspondientes a las cuatro estructuras espín. Por último en el Capítulo 5, determinamos los espectros de los cuatro operadores de Dirac, correspondientes a las cuatro estructuras espín, que resultan tres espectros distintos y uno de ellos resulta ser igual a uno de los tres espectros. Esto se debe a su simetría con uno de los tres espectros. Lo cual nos lleva a concluir que los espectros de operadores de Dirac pueden depender de la estructura espín.

0.2. ¿Por qué es interesante?

La relación entre la geometría de una variedad Riemanniana y su operador de Laplace que actúa en funciones (o mas generalmente en formas diferenciables), ha despertado mucho

la atención. De donde surge una pregunta, ¿Cómo la forma y el sonido de un espacio son relacionados?. Una hermosa introducción en este tema se puede encontrar en [2]. Cuando uno quiere pasar de la teoría “bozones” a la de “fermiones”, i.e. cuando nos dirigimos a espinores y el operador de Dirac, un nuevo objeto entra en la escena, la estructura espín. Esto es un objeto topológico global necesario para definir espinores.

Nos planteamos la siguiente pregunta ¿cómo esta pieza de la estructura espín, además de la geometría usual de la variedad, influye en el espectro del operador de Dirac?. Se ha sabido durante mucho tiempo, que incluso en los ejemplos más simples tales como la 1-esfera del espectro de Dirac no depende de la estructura espín. Pero sobre el caso del toro (también para el toro en general, que tenga dimensión n), el espectro depende de la estructura espín. Este resultado se puede ver en [5], donde Friedrich obtuvo resultados considerando al Laplaciano proporcionalmente al cuadrado del operador de Dirac por argumentos generales (no explícitos). En este trabajo de Tesis vamos a discutir el toro plano $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, con un cierto detalle (explícitamente), trabajando especialmente con el operador de Dirac, sin utilizar el Laplaciano. Para la variedad del toro plano, el espectro es calculado explícitamente y lo sorprendente es que los cuatro haces de espín son triviales, lo cual nos lleva a concluir que los cuatro operadores de Dirac tienen la misma manera de definirse, sin embargo cuando determinamos los espectros de los cuatro operadores de Dirac, resultan ser distintos, por tanto esto quiere decir que el espectro depende de la estructura espín, tal como el resultado de Friedrich [5].

Podemos interpretar que la estructura espín determina el comportamiento espectral cualitativo (ver referencia [1]).

0.3. Plan General

La estructura de esta tesis es la siguiente:

1. Construir una estructura diferenciable para el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, constituida por cuatro cartas “*especiales*” que nos ayudaran a determinar, las cuatro estructuras espín del toro $\mathbb{T}^2$ (Capítulo 1).
2. Demostraremos el isomorfismo del espacio espinor, espacio con funciones de transición definidas sobre la imagen de las cuatro cartas coordenadas del toro y el espacio de funciones con condición de frontera definidas en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (Capítulos 2 y 3). El cual, nos ayudara a demostrar que los cuatro haces de espín del toro $\mathbb{T}^2$ son triviales (cuarta sección del Capítulo 3).
3. Hallar el Operador de Dirac para la variedad compacta $\mathbb{T}^2$ con respecto a los cuatro haces de espín del toro $\mathbb{T}^2$.

4. Determinar los cuatro espectros de los cuatro Operadores de Dirac del toro $\mathbb{T}^2$ para llegar a conocerlos, resulta que estos son distintos con respecto a las cuatro estructuras espín del toro.
5. Al final del capítulo 5 se hará una conclusión de que el espectro del operador de Dirac es dependiente de las estructuras espín del toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

ESTRUCTURA DIFERENCIABLE DEL TORO

$\mathbb{T}^2$

En este comienzo del capítulo, nuestro objetivo será dotar una estructura diferenciable para el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, de tal manera que estará constituida de cuatro cartas locales. La construcción de estas cuatro cartas locales será de mucha importancia para el siguiente capítulo, donde nos servirá para poder definir las cuatro estructuras espín del toro. Entonces empezamos con la sección de variedad diferenciable.

1.1. Variedad Diferenciable

La noción de variedad como un espacio que localmente es equivalente a un abierto de un espacio vectorial de dimensión finita y donde podemos extender las nociones de cálculo diferenciable ya aparecía en los trabajos de Carl Friedrich Gauss y Bernhard Riemann. La definición moderna que utilizaremos es debida a Hassler Whitney.

Definición 1.1. Una *variedad topológica* de dimensión m es un espacio topológico M con las siguientes propiedades:

1. M es Hausdorff: dados dos puntos distintos p y q en M , entonces existen abiertos disjuntos U y V tales que $p \in U$ y $q \in V$;
2. M tiene base numerable de abiertos: existe una colección numerable de abiertos de M tal que todo abierto es una unión de abiertos de esa colección;
3. M es localmente Euclidiano: para cualquier $p \in M$, existen abiertos $U \subset M$ conteniendo p , $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ y un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$.

Definición 1.2. Un **atlas** en M es una colección $\{\varphi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i\}_{i \in I}$ de homeomorfismos, llamados **cartas locales o cartas coordenadas** de M , donde $U_i \subset M$ es abierto, $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^m$ abierto y $\cup_{i \in I} U_i = M$. Los homeomorfismos

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \tilde{U}_i \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \tilde{U}_j$$

son llamados **cambio de coordenadas**. Un atlas es de **clase** C^r , $0 \leq r \leq \infty$, si todos los cambios de coordenadas del atlas son de clase C^r . Una **estructura diferenciable** para M es un atlas de clase C^∞ que define una clase de equivalencia. Una **variedad diferenciable** es una variedad topológica con una estructura diferenciable.

Comentario 1.3. Si el atlas es de clase C^0 entonces M se define como una variedad topológica. Las cartas locales de la variedad diferenciable M denotaremos por (U_i, φ_i) donde $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) = \tilde{U}_i$, el atlas por $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ donde I es el conjunto de índices, la estructura diferenciable por $[\mathcal{A}]$ y la variedad diferenciable por $(M, [\mathcal{A}])$.

Observemos que para obtener una estructura diferenciable sobre M es suficiente definir un atlas de clase C^∞ , $\mathcal{A}$, en M y tomar su clase de equivalencia $[\mathcal{A}]$.

Definición 1.4. Sean M y N variedades diferenciables de dimensiones m y n , respectivamente. Decimos que una aplicación $f : M \rightarrow N$ es **diferenciable** en un punto $p \in M$ si, existen cartas locales (U, ϕ) en M y (V, ψ) en N , con $p \in U$ y $f(p) \in V$ tales que $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ es diferenciable en el punto $\phi(p) \in \mathbb{R}^m$. Decimos además, que f es diferenciable si es diferenciable en cada punto p de M .

Comentario 1.5. En la definición anterior si M y N son variedades topológicas, entonces $f : M \rightarrow N$ se define como una aplicación continua.

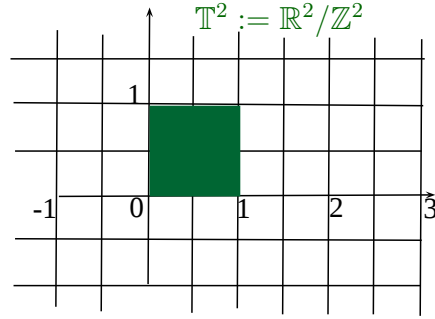
1.2. El toro

El objetivo de esta sección es construir las cuatro cartas locales del toro $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, que nos servirá para mostrar que el toro es una variedad diferenciable de dimensión 2, variedad Riemanniana, orientable y compacta.

El toro $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ tiene la definición dado de la siguiente manera:

$$\mathbb{T}^2 \ni (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \in \mathbb{T}^2 \text{ si y solo si } (y_1, y_2) - (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$$

Véase la ilustración gráfica del toro que vamos a estudiar:



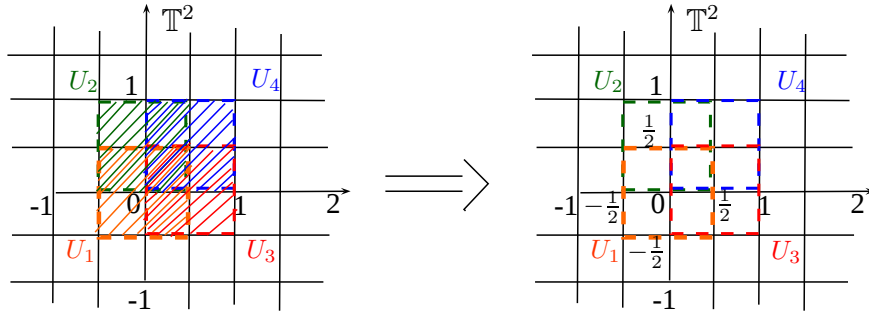
Proposición 1.6. *El toro $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es una variedad diferenciable de dimensión 2.*

Demostración. Primero vamos a mostrar que $\mathbb{T}^2$ es una variedad topológica. Consideremos a la aplicación cociente $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, donde la relación de equivalencia está dado por:

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \sim (a, b) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = a + m, \quad y = b + n$$

Entonces podemos obtener que

1. $\mathbb{T}^2$ es un espacio topológico; para esto definimos que un conjunto abierto U en $\mathbb{T}^2$ es cuando $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$. Con esta definición, se prueba que el toro es un espacio topológico.
2. $\mathbb{T}^2$ es Hausdorff; porque $\mathbb{R}^2$ es Hausdorff, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es aplicación abierta y el gráfico denotado por $R := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : u \sim v\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
3. $\mathbb{T}^2$ tiene base numerable; porque $\mathbb{R}^2$ tiene base numerable y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es aplicación abierta.
4. $\mathbb{T}^2$ es localmente Euclidiano; para mostrar esta afirmación, construiremos las cartas locales del toro $\mathbb{T}^2$, para eso, veamos la siguiente ilustración gráfica, donde U_1, U_2, U_3 y U_4 definiremos mas adelante:



Consideremos la norma del máximo sobre $\mathbb{R}^2$, $\|(x_1, x_2)\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$ para definir la bola abierta

$$B_r((a, b)) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|(a, b) - (x_1, x_2)\| < r\}.$$

Además como $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 = \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$ es una *aplicación cociente*, donde la topología de $\mathbb{T}^2$ es dado por

$$\tau(f) = \{U \subset \mathbb{T}^2 : f^{-1}(U) \in \tau\}$$

donde τ es la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Esto implica que los cuatro conjuntos que se definan U_1, U_2, U_3 y U_4 son abiertos.

Sean $U_1 := \{[(x_1, x_2)] : (x_1, x_2) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0))\}$, y $\varphi_1 : U_1 \subset \mathbb{T}^2 \longrightarrow B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \subset \mathbb{R}^2$ el homeomorfismo definido por:

$$[(x, y)] \mapsto (x, y), \quad (x_1, x_2) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)).$$

Su inversa es $\varphi_1^{-1} : B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_1 \subset \mathbb{T}^2$ dado por:

$$(x, y) \mapsto [(x, y)].$$

Sea $U_2 := \{[(x_1, x_2)] : (x_1, x_2) \in B_{\frac{1}{2}}((0, \frac{1}{2}))\}$ y $\varphi_2 : U_2 \subset \mathbb{T}^2 \longrightarrow B_{\frac{1}{2}}((0, \frac{1}{2})) \subset \mathbb{R}^2$ el homeomorfismo definido por:

$$[(x, y)] \mapsto (x, y), \quad (x_1, x_2) \in B_{\frac{1}{2}}((0, \frac{1}{2})).$$

Su inversa es $\varphi_2^{-1} : B_{\frac{1}{2}}((0, \frac{1}{2})) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_2 \subset \mathbb{T}^2$ dado por:

$$(x, y) \mapsto [(x, y)].$$

Sea $U_3 := \{[(x_1, x_2)] : (x_1, x_2) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0))\}$ y $\varphi_3 : U_3 \subset \mathbb{T}^2 \longrightarrow B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0)) \subset \mathbb{R}^2$ el homeomorfismo definido por:

$$[(x, y)] \mapsto (x, y), \quad (x_1, x_2) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0)).$$

Su inversa es $\varphi_3^{-1} : B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0)) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_3 \subset \mathbb{T}^2$ dado por:

$$(x, y) \mapsto [(x, y)].$$

Sea $U_4 := \{[(x_1, x_2)] : (x_1, x_2) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))\}$ y $\varphi_4 : U_4 \subset \mathbb{T}^2 \longrightarrow B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) \subset \mathbb{R}^2$ el homeomorfismo definido por:

$$[(x, y)] \mapsto (x, y), \quad (x_1, x_2) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2})).$$

Su inversa es $\varphi_4^{-1} : B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_4 \subset \mathbb{T}^2$ dado por:

$$(x, y) \mapsto [(x, y)].$$

Entonces $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), (U_3, \varphi_3)$ y (U_4, φ_4) son las cartas locales del toro y tienen la propiedad $\mathbb{T}^2 = \bigcup_{i=1}^4 U_i$.

Luego se observa que 1, 2, 3 y 4 satisfacen la condición de la definición 1.1. Por tanto el toro $\mathbb{T}^2$ es una variedad topológica.

Ahora vamos a determinar los cambios de coordenadas de las cartas locales para obtener una estructura diferenciable.

Cambios de Coordenadas

(a) Veamos

$$\begin{aligned}
 U_1 \cap U_2 &= \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : [(x, y)] \in U_1 \text{ y } [(x, y)] \in U_2\} \\
 &= \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \text{ y } (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, \frac{1}{2}))\} \\
 &\quad \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \text{ y } (x, y + 1) \in B_{\frac{1}{2}}((0, \frac{1}{2}))\} \\
 &= \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \text{ e } y \in (0, \frac{1}{2})\} \\
 &\quad \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \text{ e } y \in (-\frac{1}{2}, 0)\},
 \end{aligned}$$

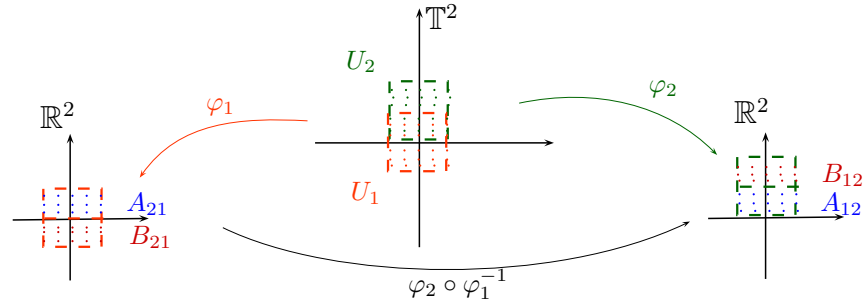
y definimos

$$A_{21} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \text{ e } y \in (0, \frac{1}{2})\},$$

$$B_{21} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \text{ e } y \in (-\frac{1}{2}, 0)\}.$$

Entonces $U_1 \cap U_2 = \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{21}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{21}\}$. Además $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = A_{21} \cup B_{21}$ es unión disjunta.

El cambio de coordenadas de las aplicaciones φ_1 y φ_2 es ilustrado en la siguiente gráfica.



donde $A_{12} = A_{21}$ y $B_{12} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, \frac{1}{2})) \text{ e } y \in (\frac{1}{2}, 1)\}$. Entonces la aplicación $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^2$ es dado por

$$(x, y) \mapsto \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } (x, y) \in A_{21}; \\ (x, y + 1), & \text{si } (x, y) \in B_{21}. \end{cases}$$

Su inversa $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ es dado por

$$(x, y) \mapsto \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } (x, y) \in A_{12}; \\ (x, y - 1), & \text{si } (x, y) \in B_{12}. \end{cases}$$

(b) Veamos

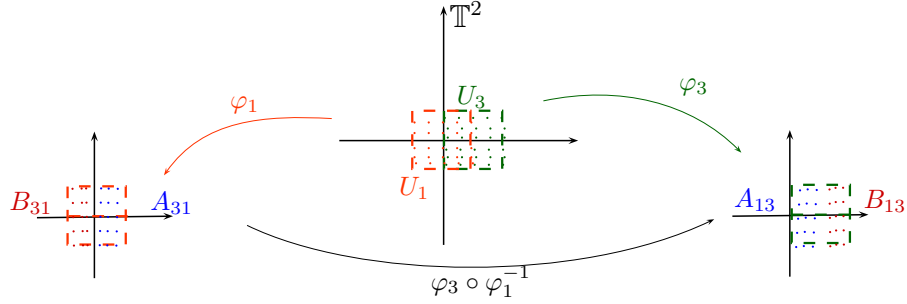
$$\begin{aligned}
 U_1 \cap U_3 &= \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : [(x, y)] \in U_1 \text{ y } [(x, y)] \in U_3\} \\
 &= \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \text{ y } (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0))\} \\
 &\quad \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \text{ y } (x + 1, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0))\} \\
 &= \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \text{ y } x \in (0, \frac{1}{2})\} \\
 &\quad \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \text{ y } x \in (-\frac{1}{2}, 0)\},
 \end{aligned}$$

y definimos

$$\begin{aligned}
 A_{31} &:= \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \text{ y } x \in (0, \frac{1}{2})\}, \\
 B_{31} &:= \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \text{ y } x \in (-\frac{1}{2}, 0)\}.
 \end{aligned}$$

Entonces $U_1 \cap U_3 = \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{31}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{31}\}$. Además $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = A_{31} \cup B_{31}$ es unión disjunta.

El cambio de coordenadas de las aplicaciones φ_1 y φ_3 es ilustrado en la siguiente gráfica.



donde $A_{13} = A_{31}$ y $B_{13} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0)) \text{ y } x \in (\frac{1}{2}, 1)\}$. Entonces la aplicación $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_3) \longrightarrow \varphi_3(U_1 \cap U_3) \subset \mathbb{R}^2$ es dado por

$$(x, y) \mapsto \varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } (x, y) \in A_{31}; \\ (x + 1, y), & \text{si } (x, y) \in B_{31}. \end{cases}$$

Su inversa $\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1} : \varphi_3(U_1 \cap U_3) \longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_3)$ es dado por

$$(x, y) \mapsto \varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } (x, y) \in A_{13}; \\ (x - 1, y), & \text{si } (x, y) \in B_{13}. \end{cases}$$

(c) Veamos

$$\begin{aligned}
 U_1 \cap U_4 &= \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : [(x, y)] \in U_1 \text{ y } [(x, y)] \in U_4\} \\
 &= \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \text{ y } (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))\} \\
 &\cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \text{ y } (x+1, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))\} \\
 &\cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \text{ y } (x+1, y+1) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))\} \\
 &\cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) \text{ y } (x, y+1) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))\},
 \end{aligned}$$

$$A_{41} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) : x \in (0, \frac{1}{2}), y \in (0, \frac{1}{2})\},$$

$$B_{41} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) : x \in (-\frac{1}{2}, 0), y \in (0, \frac{1}{2})\},$$

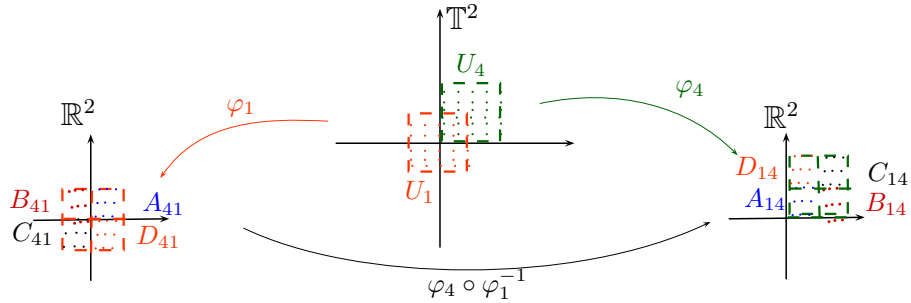
$$C_{41} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) : x \in (-\frac{1}{2}, 0), y \in (-\frac{1}{2}, 0)\},$$

$$D_{41} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) : x \in (0, \frac{1}{2}), y \in (-\frac{1}{2}, 0)\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 U_1 \cap U_4 &= \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{41}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{41}\} \\
 &\cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in C_{41}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in D_{41}\}.
 \end{aligned}$$

Además $\varphi_1(U_1 \cap U_4) = A_{41} \cup B_{41} \cup C_{41} \cup D_{41}$ es unión disjunta. El cambio de coordenadas de las aplicaciones φ_1 y φ_4 es ilustrado en la siguiente gráfica.



donde $A_{14} = A_{41}$ y

$$B_{14} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) : x \in (\frac{1}{2}, 1), y \in (0, \frac{1}{2})\},$$

$$C_{14} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) : x \in (\frac{1}{2}, 1), y \in (\frac{1}{2}, 1)\},$$

$$D_{14} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) : x \in (0, \frac{1}{2}), y \in (\frac{1}{2}, 1)\}.$$

Entonces la aplicación $\varphi_4 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_4) \rightarrow \varphi_4(U_1 \cap U_4) \subset \mathbb{R}^2$ es dado por

$$(x, y) \mapsto \varphi_4 \circ \varphi_1^{-1}(x_1, x_2) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } (x, y) \in A_{41}; \\ (x+1, y), & \text{si } (x, y) \in B_{41}; \\ (x+1, y+1), & \text{si } (x, y) \in C_{41}; \\ (x, y+1), & \text{si } (x, y) \in D_{41}. \end{cases}$$

Su inversa $\varphi_1 \circ \varphi_4^{-1} : \varphi_4(U_1 \cap U_4) \longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_4)$ es dado por

$$(x, y) \mapsto \varphi_1 \circ \varphi_4^{-1}(x_1, x_2) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } (x, y) \in A_{14}; \\ (x-1, y), & \text{si } (x, y) \in B_{14}; \\ (x-1, y-1), & \text{si } (x, y) \in C_{14}; \\ (x, y-1), & \text{si } (x, y) \in D_{14}. \end{cases}$$

(d) Veamos

$$\begin{aligned} U_2 \cap U_3 &= \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : [(x, y)] \in U_2 \text{ y } [(x, y)] \in U_3\} \\ &= \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, \frac{1}{2})) \text{ y } (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0))\} \\ &\cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, \frac{1}{2})) \text{ y } (x+1, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0))\} \\ &\cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, \frac{1}{2})) \text{ y } (x+1, y-1) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0))\} \\ &\cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, \frac{1}{2})) \text{ y } (x, y-1) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0))\}, \end{aligned}$$

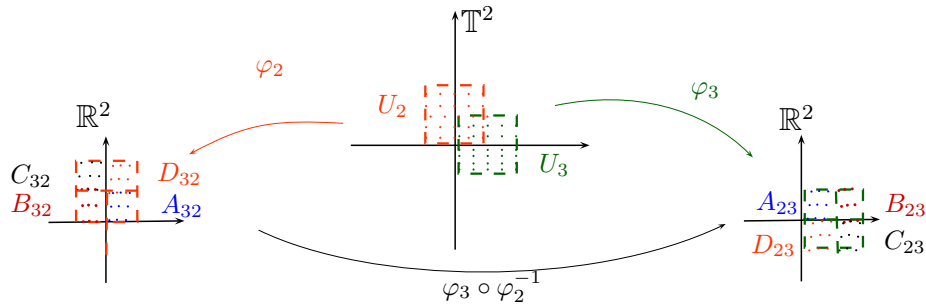
y definimos

$$\begin{aligned} A_{32} &:= \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, \frac{1}{2})) : x \in (0, \frac{1}{2}), y \in (0, \frac{1}{2})\}, \\ B_{32} &:= \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) : x \in (-\frac{1}{2}, 0), y \in (0, \frac{1}{2})\}, \\ C_{32} &:= \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) : x \in (-\frac{1}{2}, 0), y \in (\frac{1}{2}, 1)\}, \\ D_{32} &:= \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, 0)) : x \in (0, \frac{1}{2}), y \in (\frac{1}{2}, 1)\}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} U_2 \cap U_3 &= \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{32}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{32}\} \\ &\cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in C_{32}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in D_{32}\}. \end{aligned}$$

Además $\varphi_2(U_2 \cap U_3) = A_{32} \cup B_{32} \cup C_{32} \cup D_{32}$ es unión disjunta. El cambio de coordenadas de las aplicaciones φ_2 y φ_3 es ilustrado en la siguiente gráfica.



donde $A_{23} = A_{32}$,

$$B_{23} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0)) : x \in (\frac{1}{2}, 1), y \in (0, \frac{1}{2})\},$$

$$C_{23} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0)) : x \in (\frac{1}{2}, 1), y \in (-\frac{1}{2}, 0)\},$$

$$D_{23} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0)) : x \in (0, \frac{1}{2}), y \in (-\frac{1}{2}, 0)\}.$$

Entonces la aplicación $\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_2 \cap U_3) \longrightarrow \varphi_3(U_2 \cap U_3) \subset \mathbb{R}^2$ es dado por

$$(x, y) \mapsto \varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } (x, y) \in A_{32}; \\ (x+1, y), & \text{si } (x, y) \in B_{32}; \\ (x+1, y-1), & \text{si } (x, y) \in C_{32}; \\ (x, y-1), & \text{si } (x, y) \in D_{32}. \end{cases}$$

Su inversa $\varphi_2 \circ \varphi_3^{-1} : \varphi_3(U_2 \cap U_3) \longrightarrow \varphi_2(U_2 \cap U_3)$ es dado por

$$(x, y) \mapsto \varphi_2 \circ \varphi_3^{-1}(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } (x, y) \in A_{23}; \\ (x-1, y), & \text{si } (x, y) \in B_{23}; \\ (x-1, y+1), & \text{si } (x, y) \in C_{23}; \\ (x, y+1), & \text{si } (x, y) \in D_{23}. \end{cases}$$

(e) Veamos

$$\begin{aligned} U_2 \cap U_4 &= \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : [(x, y)] \in U_2 \text{ y } [(x, y)] \in U_4\} \\ &= \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, \frac{1}{2})) \text{ y } (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))\} \\ &\cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, \frac{1}{2})) \text{ y } (x+1, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))\} \end{aligned}$$

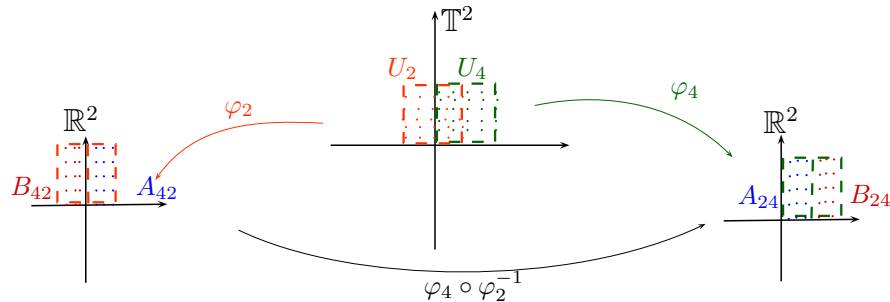
y definimos

$$A_{42} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, \frac{1}{2})) \text{ y } x \in (0, \frac{1}{2})\},$$

$$B_{42} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((0, \frac{1}{2})) \text{ y } x \in (-\frac{1}{2}, 0)\}.$$

Entonces $U_2 \cap U_4 = \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{42}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{42}\}$. Además $\varphi_2(U_2 \cap U_4) = A_{42} \cup B_{42}$ es unión disjunta.

El cambio de coordenadas de las aplicaciones φ_2 y φ_4 es ilustrado en la siguiente gráfica.



donde $A_{42} = A_{24}$ y $B_{24} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) \text{ y } x \in (\frac{1}{2}, 1)\}$. Entonces la aplicación $\varphi_4 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_2 \cap U_4) \rightarrow \varphi_4(U_2 \cap U_4) \subset \mathbb{R}^2$ es dado por

$$(x, y) \mapsto \varphi_4 \circ \varphi_2^{-1}(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } (x, y) \in A_{42}; \\ (x + 1, y), & \text{si } (x, y) \in B_{42}. \end{cases}$$

Su inversa $\varphi_2 \circ \varphi_4^{-1} : \varphi_4(U_2 \cap U_4) \rightarrow \varphi_2(U \cap U_4)$ es dado por

$$(x, y) \mapsto \varphi_2 \circ \varphi_4^{-1}(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } (x, y) \in A_{24}; \\ (x - 1, y), & \text{si } (x, y) \in B_{24}. \end{cases}$$

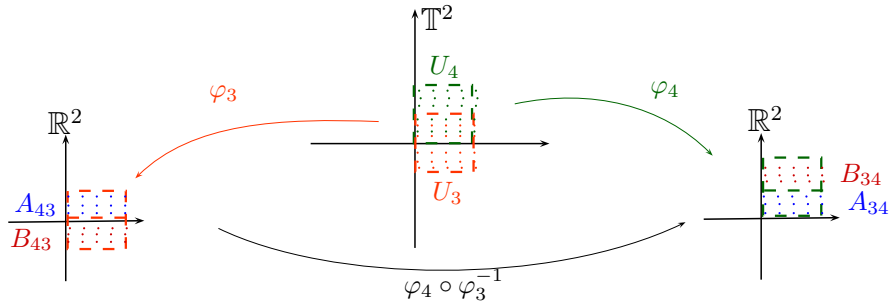
(f) Veamos

$$\begin{aligned} U_3 \cap U_4 &= \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : [(x, y)] \in U_3 \text{ y } [(x, y)] \in U_4\} \\ &= \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0)) \text{ y } (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))\} \\ &\cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0)) \text{ y } (x, y + 1) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))\}, \end{aligned}$$

y definimos

$$\begin{aligned} A_{43} &:= \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0)) \text{ y } y \in (0, \frac{1}{2})\}, \\ B_{43} &:= \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, 0)) \text{ y } y \in (-\frac{1}{2}, 0)\}. \end{aligned}$$

Entonces $U_3 \cap U_4 = \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{43}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{43}\}$. Además $\varphi_1(U_2 \cap U_4) = A_{43} \cup B_{43}$ es unión disjunta. El cambio de coordenadas de las aplicaciones φ_3 y φ_4 es ilustrado en la siguiente gráfica.



donde $A_{34} = A_{43}$ y $B_{34} := \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) \text{ y } y \in (\frac{1}{2}, 1)\}$. Entonces la aplicación $\varphi_4 \circ \varphi_3^{-1} : \varphi_3(U_3 \cap U_4) \rightarrow \varphi_4(U_3 \cap U_4) \subset \mathbb{R}^2$ es dado por

$$(x, y) \mapsto \varphi_4 \circ \varphi_3^{-1}(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } (x, y) \in A_{43}; \\ (x, y + 1), & \text{si } (x, y) \in B_{43}. \end{cases}$$

Su inversa $\varphi_3 \circ \varphi_4^{-1} : \varphi_4(U_3 \cap U_4) \rightarrow \varphi_3(U_3 \cap U_4)$ es dado por

$$(x, y) \mapsto \varphi_3 \circ \varphi_4^{-1}(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } (x, y) \in A_{34}; \\ (x, y - 1), & \text{si } (x, y) \in B_{34}. \end{cases}$$

Los cambios de coordenadas, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$, $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$, $\varphi_4 \circ \varphi_1^{-1}$, $\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}$, $\varphi_4 \circ \varphi_2^{-1}$, y $\varphi_4 \circ \varphi_3^{-1}$ son difeomorfismos. Entonces una estructura diferencial del toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ está dado por:

$$\mathcal{A} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), (U_3, \varphi_3), (U_4, \varphi_4)\}.$$

Entonces $\mathbb{T}^2$ es una variedad diferenciable.

□

Ahora vamos a mostrar que el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es una variedad Riemanniana. Pero requerimos algunos resultados conocidos, como el espacio tangente y la diferencial de una función diferenciable entre variedades diferenciables, esto lo podemos ver en [2]. Entonces dicho esto, empezamos definiendo una métrica Riemanniana.

Definición 1.7. Una **métrica Riemanniana** en una variedad diferenciable B es una correspondencia que asocia a cada punto b de B un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_b$ (esto es, una forma bilineal simétrica, positiva definida) en el espacio tangente $T_b B$, que varía diferenciablemente en siguiente sentido: Si $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ es una carta local en el entorno de b , con $\varphi(b) = (x_1, \dots, x_n) \in \varphi(U)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(b) = d\varphi_b^{-1}(0, \dots, 1, \dots, 0)$, entonces $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(b), \frac{\partial}{\partial x_j}(b) \rangle_b = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ es una función diferenciable en U .

Comentario 1.8. Otra manera de expresar una diferenciabilidad de la métrica Riemanniana es decir que para todo par X e Y de campos vectoriales diferenciables en una vecindad V de B , la función $\langle X, Y \rangle$ es diferenciable en V . Es inmediato verificar que esta definición es equivalente al anterior (ver referencia [13]).

Es usual dejar de indicar el índice b en $\langle \cdot, \cdot \rangle_b$ siempre que no hay posibilidad de confusión. Las funciones g_{ij} son llamados **expresiones de la métrica Riemanniana** (o los " g_{ij} de la métrica") en la carta coordenada $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Una variedad diferenciable con una métrica Riemanniana se llama una **variedad Riemanniana**.

Corolario 1.9. El toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es una variedad Riemanniana.

Demostración. Sea el atlas del toro $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha = 1, 2, 3, 4\}$ definido anteriormente. Entonces el cambio de coordenadas son traslaciones, i.e. $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_1, x_2) = (x_1 + c_1, x_2 + c_2)$ con c_1, c_2 constantes. Luego su matriz jacobiana es

$$d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_j(p)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = id \quad (1.1)$$

para todo $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $p \in \mathbb{T}^2$.

Consideremos $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = d\varphi_\alpha^{-1}|_p(e_i)$ con la base $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. Entonces podemos definir la métrica del toro por;

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p)\right) := \langle d\varphi_\alpha|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right), d\varphi_\alpha|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(p)\right) \rangle$$

La métrica g no depende la carta coordenada. Supongamos otra carta (U_β, φ_β) , entonces

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p)\right) &= \langle d\varphi_\alpha|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right), d\varphi_\alpha|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(p)\right) \rangle && \text{(definición de métrica)} \\ &= \langle d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta)|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right), d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta)|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(p)\right) \rangle \\ &= \langle d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_{\varphi_\beta(e_i)} d\varphi_\beta|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right), d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_{\varphi_\beta(e_j)} d\varphi_\beta|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(p)\right) \rangle \\ &= \langle d\varphi_\beta|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right), d\varphi_\beta|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(p)\right) \rangle && \text{(por (1.1))} \end{aligned}$$

Por tanto la métrica g , no depende de la carta coordenada. Así concluimos que la variedad diferenciable $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dotada con la métrica g es una variedad Riemanniana. $\square$

Observación 1.10. El toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es **orientable**. En efecto, por la relación (1.1) tenemos $d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_j(p)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces el determinante de $\det(d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_j(p))) = 1 > 0$. Por tanto el toro $\mathbb{T}^2$ es orientable.

Observación 1.11. El toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es **compacto**. Recordemos que la aplicación cociente $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ es continua y sobreyectiva. Pero si restringimos la aplicación cociente sobre $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, también tenemos que $f|_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{T}^2$ es continua y sobreyectiva. Entonces como $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ es compacto, implica que $f([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = \mathbb{T}^2$ es compacto.

Comentario 1.12. En el capítulo 2, utilizaremos las aplicaciones $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$ definidas por:

$$t_{ij}(p) := d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_j(p)) \in GL(2, \mathbb{R})$$

llamadas **funciones de transición**. En nuestro caso del toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ con sus respectivas cartas locales construidas anteriormente, y por la relación (1.1), nuestras funciones de transición están dadas por:

$$t_{ij}(p) = d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_j(p)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(2) \quad (1.2)$$

para todo $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. La relación (1.2), es de mucha importancia para utilizar como hipótesis en la Proposición 2.16. Pues lo que se hace, es hacer un levantamiento al grupo espín, mediante una aplicación cubriente 2:1, para obtener las cuatro estructuras espín del toro. Todo esto, que se está mencionando, grupo espín, estructura espín y el procedimiento como se desarrollará, se hará con mucho detalle en el siguiente capítulo.

LOS CUATRO HACES DE ESPÍN DEL TORO

$\mathbb{T}^2$

En este capítulo nuestro objetivo es construir las cuatro estructuras espín del toro, lo cual implicará obtener los cuatro haces de espín del toro.

Una pequeña idea sobre el desarrollo de este capítulo. En la primera sección, hablamos de las funciones de transición de manera general, para obtener los haces vectoriales. En la segunda sección hablamos sobre la aplicación cubriente $2:1 \lambda : \text{Spin}(2) \rightarrow SO(2)$, el grupo espín denotado por $\text{Spin}(2)$ y el álgebra de Clifford denotado por $\mathcal{Cl}(2)$, por supuesto que no hacemos demostraciones en esta sección, porque en los libros de referencia, ya están probadas. Esta aplicación λ nos sirve para hacer un levantamiento, que resulta de obtener nuevas funciones de transición, el cual nos define estructuras espín del toro. Luego continuando con la tercera sección, donde hacemos una demostración detallada, que solamente existen cuatro estructuras espín y también mencionamos a la representación espín $\gamma : \text{Spin}(2) \rightarrow Gl(2, \mathbb{C})$, que nos sirve para obtener nuevas funciones de transición, el cual nos define los haces de espín.

Algunas aclaraciones sobre las notaciones E , $\tilde{E}$ y $\hat{E}$. En la primera sección, mostraremos de forma general que los haces vectoriales denotados por E , $\tilde{E}$ y $\hat{E}$ son isomorfos. Esto nos ayudara a mostrar que los *haces de espín* del toro denotados por $\overset{k}{S}$, $\overset{\check{k}}{S}$ y $\overset{\hat{k}}{S}$ son isomorfos, donde $k = 1, 2, 3, 4$ esto significa que tenemos cuatro haces de espín correspondiente a las cuatro estructuras espín. Nos podemos preguntar ¿Por qué hacer varias notaciones de los haces de espín $\overset{k}{S}$, $\overset{\check{k}}{S}$ y $\overset{\hat{k}}{S}$? La respuesta, es que nosotros preferimos definir nuestro operador de Dirac, correspondiente al haz de espín $\overset{\hat{k}}{S}$. El tener tres tipos de haces de espín, nos facilita para hacer el desarrollo de la prueba de manera detallada. i.e. nosotros queremos probar $\overset{k}{S} \cong \overset{\hat{k}}{S}$, pero resulta más conveniente, que primero mostramos $\overset{k}{S} \cong \overset{\check{k}}{S}$ y $\overset{\check{k}}{S} \cong \overset{\hat{k}}{S}$ luego concluimos que $\overset{k}{S} \cong \overset{\hat{k}}{S}$.

2.1. Haces Vectoriales

El objetivo de esta sección es probar que los haces vectoriales, denotados por E , $\tilde{E}$ y $\hat{E}$ son isomorfos. Por esta razón empezamos definiendo los haces vectoriales.

Definición 2.1. *Un haz vectorial (E, π, B, V) consiste de los siguientes elementos:*

- (i) *Una variedad diferenciable E llamado el **espacio total**.*
- (ii) *Una variedad diferenciable B llamado el **espacio base**.*
- (iii) *Un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, llamado **fibra o fibra típica**.*
- (iv) *Una aplicación diferenciable y sobreyectiva $\pi : E \rightarrow B$ llamado **proyección**.*
- (v) *Para todo $b \in B$ el conjunto $E_b = \pi^{-1}(b)$ es llamado la **fibra sobre b** .*
- (vi) *Una propiedad llamado **trivialmente local** que significa: Para cada $b \in B$ existe una vecindad abierta U de b y un difeomorfismo $\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times V$ llamado la **trivialización local** de E sobre U tal que $\pi \circ \Psi^{-1}(b, v) = b$ y $\Psi|_{E_b} : E_b \rightarrow \{b\} \times V \cong V$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, para todo $b \in B$.*

Un haz vectorial puede ser real o complejo dependiendo de V y de la aplicación $\Psi|_{E_b}$. Pero nosotros estaremos concentrados en haces vectoriales complejos. También podemos mencionar que a menudo utilizaremos la notación $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ o simplemente E para denotar el haz vectorial (E, π, B, V) .

Comentario 2.2. *La aplicación $\Psi|_{E_b} : E_b \rightarrow \{b\} \times V$ es la que preserva la estructura de fibra e.i. $\Psi|_{E_b}$ es una transformación lineal sobre $\mathbb{R}$. Además la condición $\pi \circ \Psi^{-1}(b, v) = b$ de (vi) es equivalente a lo siguiente: Consideremos un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de la variedad diferenciable B y trivializaciones locales $\Psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times V$, entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Psi_i} & U_i \times V \\
 \searrow \pi & & \swarrow pr_1 \\
 & U_i &
 \end{array}$$

es decir, $pr_1 \circ \Psi_i(p) = b = \pi(p)$ para todo $p \in \pi^{-1}(b)$, donde $pr_1(b, v) = b$.

Ahora definiremos las aplicaciones $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ llamados **funciones de transición**, con $G \subset GL(V)$ llamado el **grupo de estructura**.

Consideremos el haz vectorial $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ de la definición 2.1 y la familia $\{(\pi^{-1}(U_i), \Psi_i)\}_{i \in I}$ de trivializaciones locales. Sea $\Psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times V$ definido por $\Psi_i = (\pi, \xi_i)$ donde $\xi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow V$, $\xi_i =: pr_2 \circ \Psi_i$ es una aplicación diferenciable (pr_2 dado por $pr_2(b, v) = v$ y Ψ_i son diferenciables) con la propiedad que $\xi_i|_{E_b} : E_b \rightarrow V$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Escribiremos (π, ξ_i) en lugar de $(\pi|_{\pi^{-1}(U_i)}, \xi_i)$. Por tanto $\Psi_i(y) = (\pi, \xi_i)(y) := (\pi(y), \xi_i(y))$, $y \in \pi^{-1}(U_i) \subset E$, donde ξ_i es llamado la **parte principal** de la trivialización local. Similarmente tenemos para la siguiente trivialización local $\Psi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times V$. Si $U_i \cap U_j$ es distinto del vacío, entonces $\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j) = \pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ es distinto del vacío y tenemos la siguiente aplicación,

$$\Psi_i \circ \Psi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times V \rightarrow (U_i \cap U_j) \times V$$

como $\xi_i|_{E_b}$ es un isomorfismo para cada $b \in B$, la aplicación $\xi_i|_{E_b} \circ (\xi_j|_{E_b})^{-1} : V \rightarrow V$ es un isomorfismo para todo $b \in U_i \cap U_j$. Entonces obtenemos una aplicación $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ con $G \subset GL(V)$ un subgrupo (de Lie) definido por

$$b \mapsto t_{ij}(b) := \xi_i|_{E_b} \circ (\xi_j|_{E_b})^{-1}. \quad (2.1)$$

Luego por la diferenciabilidad de $\xi_i|_{E_b}$ y $(\xi_j|_{E_b})^{-1}$ implica la diferenciabilidad de $t_{ij}(b)$. Sea $(\xi_j|_{E_b})^{-1}(v) \in \pi^{-1}(b) = E_b$ con $v \in V$. Entonces

$$\begin{aligned} \Psi_i \circ \Psi_j^{-1}(b, v) &= \Psi_i \circ \Psi_j^{-1}(\pi((\xi_j|_{E_b})^{-1}(v)), \xi_j|_{E_b} \circ (\xi_j|_{E_b})^{-1}(v)) \\ &= \Psi_i((\xi_j|_{E_b})^{-1}(v)) && \text{(definición de } \Psi^{-1}) \\ &= (\pi((\xi_j|_{E_b})^{-1}(v)), \xi_i \circ (\xi_j|_{E_b})^{-1}(v)) \\ &= (b, t_{ij}(b)(v)). \end{aligned}$$

Entonces

$$\Psi_i \circ \Psi_j^{-1}(b, v) = (b, t_{ij}(b)v). \quad (2.2)$$

Dado las trivializaciones locales del haz vectoriales $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$, las correspondientes funciones de transición, claramente satisfacen las siguientes **condiciones de cociclo**.

1. $t_{ii}(b) = id_V$ para $b \in U_i$,
2. $t_{ij}(b)t_{ji}(b) = id_V$ para $b \in U_i \cap U_j$,
3. $t_{ij}(b)t_{jk}(b)t_{ki}(b) = id_V$ para $b \in U_i \cap U_j \cap U_k$,

para todo i, j, k y es consecuencia directa de la relación (2.1).

Comentario 2.3. El haz vectorial $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ de la definición 2.1 donde su fibra es un espacio vectorial, supongamos que tiene $\dim(V) = k$. Entonces fijada una base $\{e_1, \dots, e_k\}$, la aplicación:

$$T : V \rightarrow \mathbb{K}^k, \quad T(v) = T\left(\sum_{i=1}^k x_i e_i\right) = (x_1, \dots, x_k), \quad v \in V, \quad x_i \in \mathbb{K}$$

con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, determina una estructura de una variedad diferenciable sobre V .

Por otro lado, tomando el atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de B , entonces el atlas para $U_i \times V$ es dado por una sola carta $\{(U_i \times V, \varphi_i \times T)\}$ donde $\varphi_i \times T : U_i \times V \rightarrow \varphi_i(U_i) \times \mathbb{K}^k$ es definido por $(\varphi_i \times T)(b_i, v_i) = (\varphi_i(b_i), (x_1, \dots, x_k))$, $v_i = \sum_{j=1}^k x_{ij} e_j$.

En la siguiente observación vamos a definir, una *carta local* de un haz vectorial.

Observación 2.4. Una **carta local** del haz vectorial $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ es $(\pi^{-1}(U_i), (\varphi_i \times T) \circ \Psi_i)$ donde $\pi^{-1}(U_i) = \{(b_i, v_i) : (b_i, v_i) \in U_i \times V\}$ y Ψ_i es la trivialización local del haz vectorial E . Esto implica que el conjunto de todas las cartas locales $\{(\pi^{-1}(U_i), (\varphi_i \times T) \circ \Psi_i)\}_{i \in I}$ es un atlas diferenciable del haz vectorial E . Por tanto E es una variedad diferenciable.

A continuación definiremos cuando dos haces vectoriales son isomorfos.

Definición 2.5. Sean $V_1 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\pi_1} B$ y $V_2 \rightarrow E_2 \xrightarrow{\pi_2} B$ dos haces vectoriales. Un **morfismo** de haces vectoriales de E_1 para E_2 es una de aplicación diferenciables $\Phi : E_1 \rightarrow E_2$ tal que $\Phi|_{\pi_1^{-1}(b)} : \pi_1^{-1}(b) \rightarrow \pi_2^{-1}(b)$ es lineal y además el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\Phi} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

Es decir: $\pi_2 \circ \Phi(p) = f \circ \pi_1(p)$ para todo $p \in E_1$. Decimos que E_1 y E_2 son **isomorfos** si $B_1 = B_2$, $f = id$ y Φ es un difeomorfismo.

En la siguiente definición que mencionaremos, nos dice que el haz vectorial puede ser reconstruido a partir de sus funciones de transición.

Definición 2.6. Sea $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ un haz vectorial, con atlas diferenciable $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de B . Sean V espacio vectorial de dimensión finita y las funciones de transición $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(V)$ de E diferenciables con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, tales que :

$$\begin{aligned} t_{ii}(b) &= id_V, & b \in U_i, \\ t_{ij}(b)t_{ji}(b) &= id_V, & b \in U_i \cap U_j, \\ t_{ij}(b)t_{jk}(b)t_{ki}(b) &= id_V, & b \in U_i \cap U_j \cap U_k. \end{aligned}$$

Entonces $V \rightarrow \check{E} \xrightarrow{\check{\pi}} B$ es un haz vectorial, donde $\check{E}$ es dado por

$$\check{E} := \coprod_{i \in I} (U_i \times V) / \sim$$

con $U_i \times V \ni (b_i, v_i) \sim (b_j, v_j) \in U_j \times V$ si y solo si $b_i = b_j$ y $t_{ij}(b_j)(v_j) = v_i$. Además:

- (a) La aplicación proyección $\check{\pi}_i : \check{E} \rightarrow B$ es dado por $\check{\pi}([(b_i, v_i)]) := b_i$.
- (b) Su trivialización local $\check{\Psi}_i : (\check{\pi})^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times V$ es dado por $\check{\Psi}_i([(b_i, v_i)]) = (b_i, v_i)$, para todo $(b_i, v_i) \in U_i \times V$.
- (c) Para todo $b_i \in B$, $\check{\Psi}_i|_{(\check{\pi})^{-1}(b_i)} : (\check{\pi})^{-1}(b_i) \rightarrow \{b_i\} \times V$, con $\check{\Psi}_i|_{(\check{\pi})^{-1}(b_i)}([(b_i, v_i)]) = (b_i, v_i)$ es un isomorfismo.
- (d) Definimos la parte principal de $\check{\Psi}_i$ por:

$$\check{\xi}_i := pr_2 \circ \check{\Psi}_i : (\check{\pi})^{-1}(U_i) \rightarrow V \text{ con } \check{\xi}_i([(b_i, v_i)]) := v_i$$

para todo $(b_i, v_i) \in U_i \times V$.

- (e) $\check{\Psi}_i$ es lineal en cada fibra sobre b . Es decir, definiendo en $\check{E}$ la siguiente operación

$$\alpha[(b, v)] + \beta[(b, w)] := [(b, \alpha v + \beta w)]$$

para todo $(b, v), (b, w) \in U_i \times V$, $\check{\Psi}_i$ es lineal en cada fibra sobre b .

En el siguiente teorema demostraremos que el haz vectorial $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ de la definición 2.1 es isomorfo al haz vectorial $V \rightarrow \check{E} \xrightarrow{\check{\pi}} B$ definido en la definición 2.6.

Teorema 2.7. El haz vectorial $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ es isomorfo a $V \rightarrow \check{E} \xrightarrow{\check{\pi}} B$. En simbolos: $E \cong \check{E}$.

Demostración. Sea $\Psi_i : (\pi)^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times V$ una trivialización local del haz vectorial E . Definamos la aplicación $h : \check{E} \rightarrow E$ dado por:

$$h([(b_i, v_i)]) := \Psi_i^{-1}(b_i, v_i)$$

para todo $[(b_i, v_i)] \in \check{E}$ donde $(b_i, v_i) \in U_i \times V$.

h está bien definida. Sean $[(b_i, v_i)], [(b_j, v_j)] \in \check{E}$ tal que $U_i \times V \ni (b_i, v_i) \sim (b_j, v_j) \in U_j \times V$ esto implica que $b_i = b_j$ y $t_{ij}(b_j)v_j = v_i$. Entonces

$$\begin{aligned} (b_j, t_{ij}(b_j)v_j) = (b_i, v_i) &\Leftrightarrow \Psi_i \circ \Psi_j^{-1}(b_j, v_j) = (b_i, v_i) & ((2.2)) \\ &\Leftrightarrow \Psi_j^{-1}(b_j, v_j) = \Psi_i^{-1}(b_i, v_i) & (\Psi_i \text{ es difeomorfismo}) \\ &\Leftrightarrow h([(b_i, v_i)]) = h([(b_j, v_j)]) & (\text{definición de } h) \end{aligned}$$

por tanto h esta bien definida.

Ahora consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \check{E} & \xrightarrow{h} & E \\
 \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\
 B & \xrightarrow{id} & B
 \end{array}$$

El diagrama anterior conmuta. Dado cualquier $[(b_i, v_i)] \in \check{E}$:

$$\begin{aligned}
 \pi \circ h([(b_i, v_i)]) &= \pi \circ \Psi_i^{-1}(b_i, v_i) && \text{(definición de } h) \\
 &= b_i && \text{(definición (2.1) inciso (vi))} \\
 &= \tilde{\pi}([(b_i, v_i)]) && \text{(definición (2.6), inciso (a))} \\
 &= id \circ \tilde{\pi}([(b_i, v_i)])
 \end{aligned}$$

h es biyectiva.

- h es sobreyectiva. En efecto, dado $p \in E$, existe una carta local $(\pi^{-1}(U_i), (\varphi_i \times T) \circ \Psi_i)$ del haz vectorial E tal que $p \in \pi^{-1}(U_i)$. Definimos $q = [\Psi_i(p)]$, entonces $h(q) = h([\Psi_i(p)]) = \Psi_i^{-1}(\Psi_i(p)) = p$. En estas igualdades se utilizó las definiciones de h y del difeomorfismo Ψ_i .
- h es inyectiva. Sean $[(b_i, v_i)], [(b_j, v_j)] \in \check{E}$ tal que $h([(b_i, v_i)]) = h([(b_j, v_j)])$. Esto implica $\Psi_i^{-1}(b_i, v_i) = \Psi_j^{-1}(b_j, v_j)$ entonces $(b_i, v_i) = \Psi_i \circ \Psi_j^{-1}(b_j, v_j) = (b_j, t_{ij}(b_j)v_j)$. Por tanto $[(b_i, v_i)] = [(b_j, v_j)]$.

h es un difeomorfismo. Sean $\Psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times V$ y $\check{\Psi}_i : (\tilde{\pi})^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times V$ las trivializaciones locales de E y $\check{E}$ respectivamente (véase la siguiente representación gráfica).

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\pi}^{-1}(U_i) \subset \check{E} & \xrightarrow{h} & \pi^{-1}(U_i) \subset E \\
 \check{\Psi}_i \downarrow & & \downarrow \Psi_i \\
 U_i \times V & \xrightarrow{\quad} & U_i \times V \\
 \varphi_i \times T \downarrow & & \downarrow \varphi_i \times T \\
 \varphi_i(U_i) \times \mathbb{K}^k & \xrightarrow{\quad} & \varphi_i(U_i) \times \mathbb{K}^k.
 \end{array}$$

Dado cualquier $p \in \check{E}$, consideremos las cartas $(\tilde{\pi}^{-1}(U_i), (\varphi_i \times T) \circ \check{\Psi}_i)$ del haz vectorial $\check{E}$ y $(\pi^{-1}(U_i), (\varphi_i \times T) \circ \Psi_i)$ en el haz vectorial E con $p \in \tilde{\pi}^{-1}(U_i)$. Sea $(x_i, y_i) = (\varphi_i \times T) \circ \check{\Psi}_i(p)$, entonces

$$\begin{aligned}
 ((\varphi_i \times T) \circ \Psi_i) \circ h \circ ((\varphi_i \times T) \circ \check{\Psi}_i)^{-1}(x_i, y_i) &= (\varphi_i \times T) \circ \Psi_i \circ h \circ \check{\Psi}_i^{-1} \circ (\varphi_i \times T)^{-1}(x_i, y_i) \\
 &= (\varphi_i \times T) \circ \Psi_i \circ h \circ \check{\Psi}_i^{-1}(\varphi_i^{-1}(x_i), T^{-1}(y_i))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\varphi_i \times T) \circ \Psi_i \circ h([\varphi_i^{-1}(x_i), T^{-1}(y_i)]) \\
 &= (\varphi_i \times T) \circ \Psi_i \circ \Psi_i^{-1}(\varphi_i^{-1}(x_i), T^{-1}(y_i)) \\
 &= (\varphi_i \times T)(\varphi_i^{-1}(x_i), T^{-1}(y_i)) \\
 &= (\varphi_i \circ \varphi_i^{-1}(x_i), T \circ T^{-1}(y_i)) \\
 &= (x_i, y_i)
 \end{aligned}$$

esto implica que $((\varphi_i \times T) \circ \Psi_i) \circ h \circ ((\varphi_i \times T) \circ \check{\Psi}_i)^{-1} = id$ es un difeomorfismo, por tanto h es un difeomorfismo.

$h|_{\check{\pi}^{-1}(b)} : \check{\pi}^{-1}(b) \rightarrow \pi^{-1}(b)$ es lineal sobre cada fibra.

En efecto, supongamos $(p, v), (p, w) \in U_i \times V$, entonces

$$\begin{aligned}
 h(\alpha[(p, v)] + \beta[(p, w)]) &= h([(p, \alpha v + \beta w)]) && \text{(definición (e))} \\
 &= \Psi_i^{-1}((p, \alpha v + \beta w)) && \text{(definición h)} \\
 &= [(p, \alpha v + \beta w)] && \text{(definición } \Psi_i^{-1}) \\
 &= \alpha[(p, v)] + \beta[(p, w)] && \text{(definición (e))} \\
 &= \alpha \Psi_i^{-1}((p, v)) + \beta \Psi_i^{-1}((p, w)) && \text{(definición } \Psi_i^{-1}) \\
 &= \alpha h([(p, v)]) + \beta h([(p, w)]). && \text{(definición h)}
 \end{aligned}$$

Por tanto h es un isomorfismo de haces vectoriales. $\square$

En la siguiente definición, definiremos el haz vectorial $\hat{E}$ y sus respectivas componentes.

Definición 2.8. Sea B una variedad diferenciable con un atlas diferenciable $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de B , V un espacio vectorial de dimensión finita y $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ un haz vectorial con trivializaciones locales $\Psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times V$ y funciones de transición $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(V)$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Entonces definiendo

$$\hat{E} := \coprod_{i \in I} (\varphi_i(U_i) \times V) / \sim$$

con $\varphi_i(U_i) \times V \ni (x_i, v_j) \sim (x_j, v_j) \in \varphi_j(U_j) \times V \Leftrightarrow \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_j) = x_i, t_{ij}(\varphi_j^{-1}(x_j))v_j = v_i$, $\hat{E}$ es un haz vectorial, tal que:

($\hat{a}$) La aplicación proyección $\hat{\pi} : \hat{E} \rightarrow B$ es dado por $\hat{\pi}([(x_i, v_i)]) := \varphi_i^{-1}(x_i)$.

($\hat{b}$) Su trivialización local $\hat{\Psi}_i : (\hat{\pi})^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times V$ es dado por $\hat{\Psi}_i([(x_i, v_i)]) = (\varphi_i^{-1}(x_i), v_i)$ para todo $(x_i, v_i) \in \varphi_i(U_i) \times V$.

($\hat{c}$) Para todo $b_i \in B$, $\hat{\Psi}_i|_{(\hat{\pi})^{-1}(b_i)}: (\hat{\pi})^{-1}(b_i) \rightarrow \{b_i\} \times V \cong V$ con $\hat{\Psi}_i|_{(\hat{\pi})^{-1}(b_i)}([(\varphi_i(b_i), v_i)]) = (b_i, v_i)$ es un isomorfismo.

($\hat{d}$) Definimos la parte principal de $\hat{\Psi}_i$ por:

$$\hat{\xi}_i := pr_2 \circ \hat{\Psi}_i : (\hat{\pi})^{-1}(U_i) \rightarrow V \text{ con } \hat{\xi}_i([(b_i, v_i)]) := v_i.$$

($\hat{e}$) $\hat{\Psi}_i$ es lineal en cada fibra sobre $\varphi_i^{-1}(x) = b$. Es decir, definiendo en $\hat{\pi}^{-1}(U_i)$ la siguiente operación

$$\alpha[(x, v)] + \beta[(x, w)] := [(x, \alpha v + \beta w)]$$

para todo $(x, v), (x, w) \in \varphi_i(U_i) \times V$, $\hat{\Psi}_i$ es lineal en cada fibra sobre $\varphi_i^{-1}(x) = b$.

En el siguiente teorema, vamos a demostrar que el haz vectorial $\hat{E}$ es isomorfo al haz vectorial $\check{E}$. En símbolos $\hat{E} \cong \check{E}$.

Teorema 2.9. El haz vectorial $V \rightarrow \hat{E} \xrightarrow{\hat{\pi}} B$ es isomorfo al haz vectorial $V \rightarrow \check{E} \xrightarrow{\check{\pi}} B$.

Demostración. Definimos la aplicación $g : \hat{E} \rightarrow \check{E}$ dado por:

$$g([(x_i, v_i)]) := [(\varphi_i^{-1}(x_i), v_i)] \quad \forall [(x_i, v_i)] \in \hat{E}, \quad (x_i, v_i) \in \varphi_i(U_i) \times V$$

g está bien definida. Sean $[(x_i, v_i)], [(x_j, v_j)] \in \hat{E}$ tal que $(x_i, v_i) \sim (x_j, v_j)$ esto implica que $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_j) = x_i$ y $t_{ij}(\varphi_j^{-1}(x_j))v_j = v_i$, entonces $\varphi_j^{-1}(x_j) = \varphi_i^{-1}(x_i)$ y $t_{ij}(\varphi_j^{-1}(x_j))v_j = v_i$, esto prueba que $(\varphi_i^{-1}(x_i), v_i) \sim (\varphi_j^{-1}(x_j), v_j)$ en $\check{E}$. Por tanto $g([(x_i, v_i)]) = g([(x_j, v_j)])$.

Ahora consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \hat{E} & \xrightarrow{g} & \check{E} \\ \hat{\pi} \downarrow & & \downarrow \check{\pi} \\ B & \xrightarrow{id} & B \end{array}$$

El diagrama anterior conmuta. Dado $[(x_i, v_i)] \in \hat{E}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \check{\pi} \circ g([(x_i, v_i)]) &= \check{\pi}([(\varphi_i^{-1}(x_i), v_i)]) && \text{(definición de } g) \\ &= \varphi_i^{-1}(x_i) && \text{(definición de } \hat{\pi}) \\ &= \hat{\pi}([(x_i, v_i)]) && \text{(definición de } \check{\pi}) \\ &= id \circ \hat{\pi}([(x_i, v_i)]). \end{aligned}$$

g es biyectiva.

- g es sobreyectiva. Dado $p = [(b, v)] \in \check{E}$ con $b \in U_i$, definimos $q := [(\varphi_i(b), v)] \in \hat{E}$ tal que

$$\begin{aligned} g(q) &= g([(\varphi_i(b), v)]) \\ &= [(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_i(b), v)] && \text{(definición de } g) \\ &= [(b, v)] \\ &= p. \end{aligned}$$

Por tanto g es sobreyectiva.

- g es inyectiva. Sean $[(x_i, v_i)], [(x_j, v_j)] \in \hat{E}$ tal que $g([(x_i, v_i)]) = g([(x_j, v_j)])$. Esto implica $[(\varphi_i^{-1}(x_i), v_i)] = [(\varphi_j^{-1}(x_j), v_j)]$, entonces $\varphi_i^{-1}(x_i) = \varphi_j^{-1}(x_j)$ y $t_{ij}(\varphi_j^{-1}(x_j)v_j) = v_i$ de aquí se obtiene $(x_i, v_i) \sim (x_j, v_j)$. Por tanto $[(x_i, v_i)] = [(x_j, v_j)]$.

g es un difeomorfismo. La prueba es análoga a la prueba del difeomorfismo h en la prueba del Teorema 2.7, pues basta considerar las cartas $(\hat{\pi}^{-1}(U_i), (\varphi_i \times T) \circ \hat{\Psi}_i)$ y $(\check{\pi}^{-1}(U_i), (\varphi_i \times T) \circ \check{\Psi}_i)$ de los haces vectoriales $\hat{E}$ y $\check{E}$ respectivamente.

$\Phi|_{\hat{\pi}^{-1}(b)} : \hat{\pi}^{-1}(b) \rightarrow \check{\pi}^{-1}(b)$ es lineal sobre cada fibra.

En efecto, supongamos $(x, v), (x, w) \in \varphi_i(U_i) \times V$, entonces

$$\begin{aligned} g(\alpha[(x, v)] + \beta[(x, w)]) &= g([(x, \alpha v + \beta w)]) && \text{(definición } (\hat{e})) \\ &= [(\varphi_i^{-1}(x), \alpha v + \beta w)] && \text{(definición } g) \\ &= \alpha[(\varphi_i^{-1}(x), v)] + \beta[(\varphi_i^{-1}(x), w)] && \text{(definición } (e)) \\ &= \alpha g([(p, v)]) + \beta g([(p, w)]). && \text{(definición } g) \end{aligned}$$

Por tanto g es un isomorfismo de haces vectoriales. □

En las pruebas de los Teoremas 2.7 y 2.9, cuando se refiera a uno de los elementos del haz vectorial $\check{E}$ o $\hat{E}$ tendrán las mismas definiciones que el haz vectorial E , salvo en las formulas explícitas. Por ejemplo, cuando nos referimos a las trivializaciones locales $\Psi_i, \check{\Psi}_i$ y $\hat{\Psi}_i$ de $E, \check{E}$ y $\hat{E}$ respectivamente, son difeomorfismos locales dados por :

$$\begin{aligned} \Psi_i(p) &= (\pi(p), \xi_i(p)), & \check{\Psi}_i([(b_i, v_i)]) &= (b_i, v_i), & \hat{\Psi}_i([(x_i, v_i)]) &= (\varphi_i^{-1}(x_i), v_i), \\ p &\in \pi^{-1}(U_i), & b_i &\in U_i, \ v_i \in V, & x_i &\in \varphi_i(U_i), \ v_i \in V. \end{aligned}$$

Como conclusión de esta sección tenemos que los haces vectoriales $E, \check{E}$ y $\hat{E}$ son isomorfos, por los Teoremas 2.7 y 2.9.

2.2. El álgebra de Clifford y grupo espín

En esta sección, nos ocuparemos en definir el grupo espín, la aplicación cubriente 2:1 y álgebra de Clifford, explícitamente para $n = 2$, porque nuestra variedad diferenciable $\mathbb{T}^2$ tiene dimensión 2. Este material nos servirá para la siguiente sección. Aquí algunas referencias generales [4] y [9]. Pero antes recordemos algunos conceptos sobre grupos y álgebras de Lie.

Comentario 2.10. *Decimos que un grupo G es un grupo de Lie si G es una variedad diferenciable y las aplicaciones*

- $G \times G \rightarrow G$ definido por $(x, y) \mapsto xy$,
- $G \rightarrow G$ definido por $x \mapsto x^{-1}$.

son diferenciables. Por otra parte, el álgebra de Lie correspondiente al grupo de Lie G es el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

$$\text{Lie}(G) := T_1 G$$

con un corchete de Lie

$$[\cdot, \cdot] : \text{Lie}(G) \times \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(G)$$

satisfaciendo ciertas condiciones algebraicas (ver [8] página 92). Aquí $1 \in G$ es el elemento unidad de G y $T_1 G$ es el espacio tangente de G en 1. En lo siguiente, no haremos mucho énfasis en el corchete de Lie.

En la siguiente definición, se definirá un álgebra de Clifford.

Definición 2.11. *El álgebra de Clifford $\text{Cl}(2)$ es el álgebra con unidad 1 sobre $\mathbb{C}$ generada por la base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ definido por las relaciones*

$$e_1 e_2 = -e_2 e_1, \quad e_1^2 = e_2^2 = -1. \quad (2.3)$$

De la definición 2.11 se obtiene

$$vw + wv = -2\langle v, w \rangle 1, \quad vv = -\|v\|^2 \cdot 1 \quad (2.4)$$

para todo $v, w \in \mathbb{R}^2$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno de $\mathbb{R}^2$. Se puede observar que $\{1, e_1, e_2, e_1 e_2\}$ es una base lineal de $\text{Cl}(2)$.

Ahora vamos a definir el grupo espín.

Definición 2.12. *El grupo generado por todos los productos pares en $\text{Cl}(2)$ de vectores unitarios*

$$\text{Spin}(2) := \{u = a_1 a_2 \dots a_{2n} : a_i \in \mathbb{R}^2, \quad \|a_i\| = 1, \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad n \in \mathbb{N}\}$$

es un grupo de Lie, con la multiplicación en $\mathbb{Cl}(2)$

$$\text{Spin}(2) \times \text{Spin}(2) \ni (u, v) \mapsto u \cdot v := uv \in \text{Spin}(2)$$

y el inverso $u^{-1} = (a_1 a_2 \dots a_{2n})^{-1} = a_{2n} \dots a_2 a_1$ para $u = a_1 a_2 \dots a_{2n} \in \text{Spin}(2)$.

En la definición 2.12 anterior, podemos observar que el elemento inverso, cumple lo siguiente $uu^{-1} = a_1 a_2 \dots a_{2n} a_{2n} \dots a_2 a_1 = (-1)^{2n} = 1$.

Vamos a determinar el grupo $\text{Spin}(2)$ explícitamente. Sean $v = \cos(\alpha)e_1 + \sin(\alpha)e_2$ y $w = -\cos(\beta)e_1 - \sin(\beta)e_2$ elementos normados de $\mathbb{R}^2$, mediante un cálculo simple obtenemos el producto $v \cdot w = \cos(\alpha - \beta)1 + \sin(\alpha - \beta)e_1 e_2$ haciendo $t := \alpha - \beta$ concluimos que $vw \in \{\cos(t)1 + \sin(t)e_1 e_2 : t \in \mathbb{R}\}$, para todo $v, w \in \mathbb{R}^2$ con $\|v\| = \|w\| = 1$. Además dado $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, con $u_1 = \cos(t_1)1 + \sin(t_1)e_1 e_2$ y $u_2 = \cos(t_2)1 + \sin(t_2)e_1 e_2$, entonces

$$\begin{aligned} u_1 u_2 &= (\cos(t_1)1 + \sin(t_1)e_1 e_2)(\cos(t_2)1 + \sin(t_2)e_1 e_2) \\ &= (\cos(t_1)\cos(t_2) - \sin(t_1)\sin(t_2)) + (\cos(t_1)\sin(t_2) + \sin(t_1)\cos(t_2))e_1 e_2 \\ &= \cos(t_1 + t_2) + \sin(t_1 + t_2)e_1 e_2 \in \{\cos(t)1 + \sin(t)e_1 e_2 : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Por tanto $\text{Spin}(2) = \{\cos(t)1 + \sin(t)e_1 e_2 : t \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, donde el isomorfismo $\text{Spin}(2) \cong \mathbb{S}^1$ es dado por:

$$\cos(t)1 + \sin(t)e_1 e_2 \mapsto \cos(t) + \sin(t)i = e^{it}$$

También $SO(2) \cong \mathbb{S}^1$ dado por:

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \mapsto e^{it}$$

El inverso de $u = \cos(t)1 + \sin(t)e_1 e_2 \in \text{Spin}(2)$ es de la forma $u^{-1} = \cos(t)1 - \sin(t)e_1 e_2$ tal que $uu^{-1} = 1$.

Comentario 2.13. El grupo $\text{Spin}(2)$ es conexo y la aplicación $\lambda : \text{Spin}(2) \rightarrow SO(2)$ definido por

$$\lambda(u)(x) := uxu^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

es una aplicación cubriente 2:1 con $\ker(\lambda) = \{1, -1\}$ (ver referencias [6] y [4]). En nuestro caso

$$\begin{aligned} \lambda(u)(e_1) &= \lambda(\cos(t)1 + \sin(t)e_1 e_2)(e_1) \\ &= (\cos(t)1 + \sin(t)e_1 e_2)e_1(\cos(t)1 - \sin(t)e_1 e_2) \\ &= (\cos^2(t) - \sin^2(t))e_1 + 2\cos(t)\sin(t)e_2 \\ &= \cos(2t)e_1 + \sin(2t)e_2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lambda(u)(e_2) &= \lambda(\cos(t)1 + \operatorname{sen}(t)e_1e_2)(e_2) \\
&= (\cos(t)1 + \operatorname{sen}(t)e_1e_2)e_2(\cos(t)1 - \operatorname{sen}(t)e_1e_2) \\
&= (\cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t))e_2 - 2\cos(t)\operatorname{sen}(t)e_1 \\
&= \cos(2t)e_2 - \operatorname{sen}(2t)e_1
\end{aligned}$$

entonces

$$\lambda(\cos(t)1 + \operatorname{sen}(t)e_1e_2) = \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\operatorname{sen}(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

esto es equivalente $\lambda(e^{ti}) = e^{2ti}$, porque los grupos $\operatorname{Spin}(2)$ y $SO(2)$ son isomorfos a $\mathbb{S}^1$. Además si denotamos $c(t) = \cos(t)1 + \operatorname{sen}(t)e_1e_2$, entonces

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\lambda(c(t)) = \begin{pmatrix} -2\operatorname{sen}(2t) & -2\cos(2t) \\ 2\cos(2t) & -2\operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sin embargo,

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}(\cos(t)1 + \operatorname{sen}(t)e_1e_2) = (-\operatorname{sen}(t)1 + \cos(t)e_1e_2)|_{t=0} = e_1e_2$$

luego $c(0) = 1$ y $c'(0) = e_1e_2$ entonces $e_1e_2 \in T_1\operatorname{Spin}(2) =: \operatorname{spin}(2)$ (pues $\operatorname{spin}(2)$ es el álgebra de Lie por la convención en el Comentario 2.10). Definimos $E_{12} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ entonces la transpuesta $E_{12}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -E_{12} \in T_1SO(2) =: \operatorname{so}(2)$ y $\operatorname{so}(2) = \operatorname{gen}\{E_{12}\}$. Por tanto la aplicación $d\lambda : T_1\operatorname{Spin}(2) = \operatorname{spin}(2) \rightarrow T_1SO(2) = \operatorname{so}(2)$ (pues $\operatorname{so}(2)$ es el álgebra de Lie por la convención tomada en el Comentario 2.3) es un isomorfismo tal que

$$(d\lambda)^{-1}(E_{12}) = \frac{1}{2}e_1e_2.$$

2.3. Construcción de las cuatro estructuras espín de $\mathbb{T}^2$

Esta es la sección más importante para la conclusión de nuestra tesis, en el cual está involucrada la estructura espín. Tomando en cuenta las definiciones de la anterior sección, construiremos las cuatro estructuras espín y de manera inmediata se obtendrá los cuatro haces de espín del toro. Empezaremos definiendo una variedad de espín.

Definición 2.14. (*Variedad de espín real*). Sea (M, g) una variedad Riemanniana orientada de dimensión 2. Sea el haz tangente

$$TM \cong \coprod_{\alpha \in I} (U_\alpha \times \mathbb{R}^2) / \sim_{t_{\alpha\beta}}$$

dado por $t_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow SO(2)$. Decimos que M es una **variedad de espín real** si existen aplicaciones diferenciables $\hat{t}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Spin}(2)$ tal que $\hat{t}_{\alpha\beta} \in \lambda^{-1}(t_{\alpha\beta})$ satisfacen la condición de cociclo donde $\lambda : \text{Spin}(2) \rightarrow SO(2)$ es la cubierta 2:1. Llamaremos **estructura espín** de M a la familia $\{\hat{t}_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in I\}$.

Comentario 2.15. De la misma manera se define para $\dim(M) > 2$ pero no hay obstrucción para $\dim(M) = 2$, es decir, todas las variedades orientable son espín (ver la referencia [11]). Las aplicaciones $\hat{t}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Spin}(2)$ de la definición 2.14 son llamados **levantamientos** que define una estructura espín para la variedad M .

En la siguiente proposición, es donde demostramos que solamente existen cuatro estructuras espín para el toro $\mathbb{T}^2$.

Proposición 2.16. Sea $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ el toro con atlas diferenciable $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^4$. Sea

$$T\mathbb{T}^2 = \coprod_{i=1}^4 (U_\alpha \times \mathbb{R}^2) / \sim_{t_{ij}}$$

el haz tangente del toro, dado por las funciones de transición $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow SO(2)$ con $t_{ij}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces existen solo cuatro familias $\left\{ \begin{smallmatrix} \hat{k} \\ t_{ij} \end{smallmatrix} \right\}$ con $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, que definen estructuras espín.

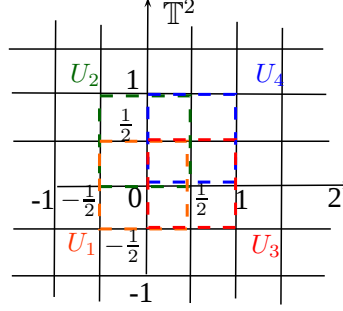
Demostración. Basta hacer un levantamiento para las funciones $\hat{t}_{12}$, $\hat{t}_{13}$ y $\hat{t}_{24}$, las demás funciones $\hat{t}_{ij}$ con $(i, j) \in \{(2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ son consecuencias de

$$\hat{t}_{ij} = \hat{t}_{ir} \hat{t}_{rj} \tag{2.5}$$

que satisfacen las condiciones de cociclo, también estamos considerando el cambio de base, es decir:

- Si cambiamos la base en $TU_i = \text{gen}\{e_1, e_2\}$, esto es $e_1 \mapsto -e_1$ y $e_2 \mapsto -e_2$ para un índice $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ fijo, obtenemos $t_{ij} = -id$ (id =identidad) para todo $j \neq i$.
- Si cambiamos también $\hat{t}_{ij}$ por $-\hat{t}_{ij}$, obtenemos estructuras espín equivalentes (isomorfismo de haces vectoriales definidas por $\hat{t}_{ij}$ y $-\hat{t}_{ij}$) correspondientes a otra base. Nos recordamos que $U_1 \cap U_2$, $U_1 \cap U_3$ y $U_2 \cap U_4$, tienen dos componentes conexos y que $\hat{t}_{ij}$ son continuas. Por tanto salvo un cambio de base, nos quedan dos posibilidades para cada $\hat{t}_{ij}$ con $(i, j) \in \{(2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ tal que $\hat{t}_{ij} = id$ en ambas componentes, también $\hat{t}_{ij} = id$ en una componente y $\hat{t}_{ij} = -id$ en la otra componente, por tanto hay $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ posibilidades.

Para esta construcción hagamos la siguiente ilustración geométrica del toro:



Para las primeras cuatro construcciones definimos lo siguiente:

$$p \mapsto \hat{k}_{t_{ii}}(p) := 1$$

para todo $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Recordemos de las definiciones de los conjuntos A_{ij} y B_{ij} del capítulo 1, sección 1.2 con $(i, j) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$, que los utilizaremos para las siguientes construcciones.

1. Para la primera construcción definimos la función, $\hat{1}_{t_{ij}} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{1}_{t_{ij}}(p) := 1$$

para todo $(i, j) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$. Entonces utilizando la ecuación (2.5) obtenemos $\hat{1}_{t_{ij}}(p) = 1$ para $(i, j) \in \{(1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$. Por tanto la familia $\{\hat{1}_{t_{ij}}\}$ define una estructura espín, llamado estructura espín trivial.

2. Para la segunda construcción definimos:

La función, $\hat{2}_{t_{12}} : U_1 \cap U_2 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{2}_{t_{12}}(p) := \begin{cases} 1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{12}\}; \\ -1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{12}\}. \end{cases}$$

con $U_1 \cap U_2 = \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{12}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{12}\}$ es unión disjunta.

La función $\hat{2}_{t_{13}} : U_1 \cap U_3 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{2}_{t_{13}}(p) := 1 \quad p \in U_1 \cap U_3$$

La función $\hat{2}_{t_{24}} : U_2 \cap U_4 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{2}_{t_{24}}(p) := 1 \quad p \in U_2 \cap U_4$$

Entonces mediante un simple cálculo con la ecuación (2.5), se obtiene el resto de las funciones $\hat{t}_{ij}^2$ para $(i, j) \in \{(1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hat{t}_{14}(p) &= \hat{t}_{12}(p)\hat{t}_{24}(p) \\ \hat{t}_{23}(p) &= \hat{t}_{12}(p)^{-1}\hat{t}_{13}(p) \\ \hat{t}_{34}(p) &= \hat{t}_{13}(p)^{-1}\hat{t}_{14}(p)\end{aligned}\tag{2.6}$$

estas funciones son continuas en sus respectivas componentes conexas. Por tanto la familia $\left\{\hat{t}_{ij}^2\right\}$ define una estructura espín.

3. Para la tercera construcción definimos:

La función $\hat{t}_{12}^3 : U_2 \cap U_4 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{12}^3(p) := 1 \quad p \in U_1 \cap U_2$$

La función, $\hat{t}_{13}^3 : U_1 \cap U_3 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{13}^3(p) := \begin{cases} 1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{13}\}; \\ -1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{13}\}. \end{cases}$$

donde $U_1 \cap U_3 = \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{13}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{13}\}$ es unión disjunta.

La función, $\hat{t}_{24}^3 : U_2 \cap U_4 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{24}^3(p) := \begin{cases} 1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{24}\}; \\ -1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{24}\}. \end{cases}$$

donde $U_2 \cap U_4 = \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{24}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{24}\}$ es unión disjunta.

Entonces mediante un simple cálculo con la ecuación (2.5), se obtiene el resto de las funciones $\hat{t}_{ij}^3$ para $(i, j) \in \{(1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$, que sean continuas en sus respectivas componentes conexas, ver (2.6). Por tanto la familia $\left\{\hat{t}_{ij}^3\right\}$ define una estructura espín.

4. Para la cuarta construcción definimos:

La función $\hat{t}_{12}^4 : U_1 \cap U_2 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{12}^4(p) := \begin{cases} 1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{12}\}; \\ -1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{12}\}. \end{cases}$$

donde $U_1 \cap U_2 = \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{12}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{12}\}$ es unión disjunta.

La función $\hat{t}_{13}^4 : U_1 \cap U_3 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{13}^4(p) := \begin{cases} 1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{13}\}; \\ -1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{13}\}. \end{cases}$$

donde $U_1 \cap U_3 = \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{13}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{13}\}$ es unión disjunta.

La función $\hat{t}_{24}^4 : U_2 \cap U_4 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{24}^4(p) := \begin{cases} 1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{24}\}; \\ -1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{24}\}. \end{cases}$$

donde $U_2 \cap U_4 = \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{24}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{24}\}$ es unión disjunta.

Entonces mediante un simple cálculo con la ecuación (2.5), se obtiene el resto de las funciones $\hat{t}_{ij}^4$ para $(i, j) \in \{(1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$, que son continuas en sus respectivas componentes conexas, ver (2.6). Por tanto la familia $\left\{\hat{t}_{ij}^4\right\}$ define una estructura espín.

5. Para la quinta construcción definimos: La función, $\hat{t}_{12}^5 : U_1 \cap U_2 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{12}^5(p) := \begin{cases} 1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{12}\}; \\ -1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{12}\}. \end{cases}$$

donde A_{12} y B_{12} son abiertos conexos disjuntos.

La función, $\hat{t}_{13}^5 : U_1 \cap U_3 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{13}^5(p) := 1 \quad p \in U_1 \cap U_3$$

donde $U_1 \cap U_3 = \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{13}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{13}\}$.

La función, $\hat{t}_{24}^5 : U_2 \cap U_4 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{24}^5(p) := \begin{cases} 1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{24}\}; \\ -1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{24}\}. \end{cases}$$

donde A_{24} y B_{24} son abiertos conexos disjuntos. Entonces podemos afirmar que la familia $\left\{\hat{t}_{ij}^5\right\}$ no define una estructura de espín. Por ejemplo, utilizando la ecuación (2.5)

obtenemos que la función $\hat{t}_{34}^5 = \left(\hat{t}_{13}^5\right)^{-1} \hat{t}_{14}^5 = \left(\hat{t}_{13}^5\right)^{-1} \hat{t}_{12}^5 \hat{t}_{24}^5 : U_3 \cap U_4 \rightarrow \text{Spin}(2)$ esta dado por

$$p \mapsto \hat{t}_{34}^5(p) := \begin{cases} 1, & p \in \{(x, y) : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)), x \in (0, 1/2), y \in (0, 1/2)\}; \\ -1, & p \in \{(x, y) : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)), x \in (1/2, 1), y \in (0, 1/2)\}; \\ 1, & p \in \{(x, y) : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)), x \in (1/2, 1), y \in (1/2, 1)\}; \\ -1, & p \in \{(x, y) : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)), x \in (0, 1/2), y \in (1/2, 1)\}. \end{cases}$$

Obsérvese que las componentes conexas donde esta definida la función $\hat{t}_{34}^5$ son disjuntos $U_3 \cap U_4 = \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{34}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{34}\}$, donde

$$A_{34} = \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)) : y \in (0, 1/2)\}$$

$$B_{34} = \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)) : y \in (1/2, 1)\}.$$

Entonces $\hat{t}_{34}^5$ no es continua en $\{[(\frac{1}{2}, y)] : y \in (0, 1/2)\}$, por que en la componente conexa definido por A_{34} ($A_{34} \subset \mathbb{R}^2$, no en $\mathbb{T}^2$) la función vale 1 y -1. Por tanto la familia $\left\{\hat{t}_{ij}^5\right\}$ se descarta.

6. Para la sexta construcción definimos: La función $\hat{t}_{12}^6 : U_1 \cap U_2 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{12}^6(p) := 1 \quad p \in U_1 \cap U_2$$

La función $\hat{t}_{13}^6 : U_1 \cap U_3 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{13}^6(p) := \begin{cases} 1, & p \in \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{13}\}; \\ -1, & p \in \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{13}\}. \end{cases}$$

donde A_{13} y B_{13} son abierto conexas disjuntos.

La función, $\hat{t}_{24}^6 : U_2 \cap U_4 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{24}^6(p) := 1, \quad p \in U_2 \cap U_4.$$

Entonces podemos afirmar que la familia $\left\{\hat{t}_{ij}^6\right\}$ no define una estructura espín. Por ejemplo, utilizando la ecuación (2.5) obtenemos que la función $\hat{t}_{34}^6 : U_3 \cap U_4 \rightarrow \text{Spin}(2)$

es determinada por $\hat{t}_{34}(p) = \left(\hat{t}_{13}(p) \right)^{-1} \hat{t}_{12}(p) \hat{t}_{24}(p)$,

$$p \mapsto \hat{t}_{34}(p) := \begin{cases} 1, & p \in \{[(x, y)] : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)), x \in (0, 1/2), y \in (0, 1/2)\}; \\ -1, & p \in \{[(x, y)] : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)), x \in (1/2, 1), y \in (0, 1/2)\}; \\ -1, & p \in \{[(x, y)] : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)), x \in (1/2, 1), y \in (1/2, 1)\}; \\ 1, & p \in \{[(x, y)] : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)), x \in (0, 1/2), y \in (1/2, 1)\}. \end{cases}$$

Obsérvese que las componentes conexas donde está definida la función $\hat{t}_{34}$ son disjuntos $U_3 \cap U_4 = \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{34}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{34}\}$. Entonces $\hat{t}_{34}$ no es continua en $\{[(\frac{1}{2}, y)] : y \in (0, 1/2)\}$, por que en la componente conexa A_{34} la función vale 1 y -1. Por tanto la familia $\left\{ \hat{t}_{ij} \right\}$ se descarta.

7. Para la séptima construcción definimos: La función, $\hat{t}_{12} : U_1 \cap U_2 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{12}(p) := \begin{cases} 1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{12}\}; \\ -1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{12}\}. \end{cases}$$

donde A_{12} y B_{12} son los abiertos conexos disjuntos definidos anteriormente.

La función $\hat{t}_{13} : U_1 \cap U_3 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{13}(p) := \begin{cases} 1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{13}\}; \\ -1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{13}\}. \end{cases}$$

donde A_{13} y B_{13} son los abiertos conexos disjuntos definidos anteriormente.

La función $\hat{t}_{24} : U_2 \cap U_4 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{24}(p) := 1, \quad p \in U_2 \cap U_4.$$

Entonces podemos afirmar que la familia $\left\{ \hat{t}_{ij} \right\}$ no define una estructura espín. Por

ejemplo, utilizando la ecuación (2.5) obtenemos que la función $\hat{t}_{34} : U_3 \cap U_4 \rightarrow \text{Spin}(2)$

es determinado por $\hat{t}_{34}(p) = \left(\hat{t}_{13}(p) \right)^{-1} \hat{t}_{12}(p) \hat{t}_{24}(p)$

$$p \mapsto \hat{t}_{34}(p) := \begin{cases} 1, & p \in \{[(x, y)] : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)), x \in (0, 1/2), y \in (0, 1/2)\}; \\ -1, & p \in \{[(x, y)] : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)), x \in (1/2, 1), y \in (0, 1/2)\}; \\ 1, & p \in \{[(x, y)] : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)), x \in (1/2, 1), y \in (1/2, 1)\}; \\ -1, & p \in \{[(x, y)] : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)), x \in (0, 1/2), y \in (1/2, 1)\}. \end{cases}$$

Obsérvese que las componentes conexas donde esta definida la función $\hat{t}_{34}^7$ son disjuntos $U_3 \cap U_4 = \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{34}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{34}\}$. Entonces $\hat{t}_{34}^7$ no es continua en $\{[(\frac{1}{2}, y)] : y \in (0, 1/2)\}$, por que en la componente conexa A_{34} la función vale 1 y -1. Por tanto la familia $\left\{\hat{t}_{ij}^7\right\}$ se descarta.

8. Para la octava construcción definimos: La función $\hat{t}_{12}^8 : U_1 \cap U_2 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{12}^8(p) := 1, \quad p \in U_1 \cap U_2.$$

La función $\hat{t}_{13}^8 : U_1 \cap U_3 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{13}^8(p) := 1, \quad p \in U_1 \cap U_3.$$

La función $\hat{t}_{24}^8 : U_2 \cap U_4 \rightarrow \text{Spin}(2)$ dado por:

$$p \mapsto \hat{t}_{24}^8(p) := \begin{cases} 1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{24}\}; \\ -1, & p \in \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{24}\}. \end{cases}$$

donde A_{24} y B_{24} son abiertos conexas disjuntos. Entonces podemos afirmar que la familia $\left\{\hat{t}_{ij}^8\right\}$ no define una estructura espín. Por ejemplo, utilizando la ecuación (2.5) obtenemos

que la función $\hat{t}_{34}^8 : U_3 \cap U_4 \rightarrow \text{Spin}(2)$ es determinado por $\hat{t}_{34}^8(p) = \left(\hat{t}_{13}^8(p)\right)^{-1} \hat{t}_{12}^8(p) \hat{t}_{24}^8(p)$

$$p \mapsto \hat{t}_{34}^8(p) := \begin{cases} 1, & p \in \{[(x, y)] : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)), x \in (0, 1/2), y \in (0, 1/2)\}; \\ -1, & p \in \{[(x, y)] : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)), x \in (1/2, 1), y \in (0, 1/2)\}; \\ -1, & p \in \{[(x, y)] : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)), x \in (1/2, 1), y \in (1/2, 1)\}; \\ 1, & p \in \{[(x, y)] : (x, y) \in B_{\frac{1}{2}}((1/2, 1/2)), x \in (0, 1/2), y \in (1/2, 1)\}. \end{cases}$$

Obsérvese que las componentes conexas donde está definida la función $\hat{t}_{34}^8$ son disjuntos $U_3 \cap U_4 = \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in A_{34}\} \cup \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 : (x, y) \in B_{34}\}$. Entonces $\hat{t}_{34}^8$ no es continua en $\{[(\frac{1}{2}, y)] : y \in (0, 1/2)\}$, por que en la componente conexa A_{34} la función vale 1 y -1. Por tanto la familia $\left\{\hat{t}_{ij}^8\right\}$ se descarta.

En conclusión solo obtenemos cuatro familias $\left\{\hat{t}_{ij}^k\right\}$, con $k = 1, 2, 3, 4$, que definen estructuras espín. Con esto concluimos la demostración. $\square$

Comentario 2.17. Para definir un haz de espín necesitamos realizar que los levantamientos $\left\{ \begin{smallmatrix} \hat{k} \\ t_{ij} \end{smallmatrix} \right\}$ con $k = 1, 2, 3, 4$, se conviertan en matrices. Para esto definimos una representación de Clifford (ver referencia [4]) $\gamma : \mathbb{Cl}(2) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ determinado por

$$\gamma(e_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_2) := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

extendidos a productos y combinaciones lineales, donde $\{e_1, e_2\}$ es una base estándar para $\mathbb{R}^2$. Se puede observar que cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \gamma(e_1)^2 &= \gamma(e_2)^2 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \gamma(e_1)\gamma(e_2) + \gamma(e_2)\gamma(e_1) &= 0, \end{aligned}$$

donde la representación de Clifford $\gamma : \mathbb{Cl}(2) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ tiene la propiedad de ser un homomorfismo irreducible. Definimos la **representación de espín** $\gamma : \text{Spin}(2) \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$ que es obtenido restringiendo la representación irreducible $\gamma : \mathbb{Cl}(2) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ bajo la inclusión $\text{Spin}(2) \subset \mathbb{Cl}(2)$ (ver referencia [4]). Por tanto definimos

$$\tilde{k} t_{ij} := \gamma \left(\begin{smallmatrix} \hat{k} \\ t_{ij} \end{smallmatrix} \right), \quad \text{con } k = 1, 2, 3, 4. \quad (2.7)$$

Observación 2.18. Las familias encontradas en la Proposición 2.16 dadas por $\hat{1} t_{ij}, \hat{2} t_{ij}, \hat{3} t_{ij}$ y $\hat{4} t_{ij}$ los evaluamos con la ecuación (2.7), para obtener las matrices,

$$\begin{aligned} \tilde{k} t_{ij} &= \gamma \left(\begin{smallmatrix} \hat{k} \\ t_{ij} \end{smallmatrix} \right) \\ &= \gamma(\pm 1) && \left(\begin{smallmatrix} \hat{k} \\ t_{ij} \end{smallmatrix} = \pm 1 \right) \\ &= \pm \gamma(1) && (\gamma \text{ es un homomorfismo}) \\ &= \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Además $\tilde{k} t_{ij}$ cumple las condiciones de cociclo para cada $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ con los subíndices $(i, j) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$, por que γ es un homomorfismo.

Con esta Observación 2.18 definimos los cuatro haces de espín.

Definición 2.19. *Los cuatro haces de espín sobre $\mathbb{T}^2$ son haces vectoriales $\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^2$ para cada $k = 1, 2, 3, 4$, definidos por:*

$$S^k = \coprod_{\alpha=1}^4 (U_\alpha \times \mathbb{C}^2) / \sim$$

con $U_\alpha \times \mathbb{C}^2 \ni (b_\alpha, s_\alpha) \sim (b_\beta, s_\beta) \in U_\beta \times \mathbb{C}^2 \Leftrightarrow b_\alpha = b_\beta, \quad s_\alpha = \tilde{t}_{\alpha\beta}^k(b_\beta) s_\beta$.

Ahora que ya tenemos definidos los cuatro haces de espín S^k , los siguientes haces de espín denotados por $\check{S}^k$ y $\hat{S}^k$ son definidas de manera similar que los haces vectoriales $\check{E}$ y $\hat{E}$ respectivamente. Recordemos que los haces de espín son haces vectoriales. Por esta razón enunciamos el siguiente corolario, que sera de mucha importancia para los siguientes capítulos.

Corolario 2.20. *Para $k = 1, 2, 3, 4$, sean $\tilde{t}_{ij}^k$ las funciones de transición para los tres tipos de haces de espín S^k , $\check{S}^k$ y $\hat{S}^k$. Entonces los haces de espín S^k , $\check{S}^k$ y $\hat{S}^k$ son isomorfos.*

Demostración. Por Teorema 2.7 y 2.9, se concluye la demostración. □

En la siguiente observación descompondremos el haz de espín S^k con fibra $\mathbb{C}^2$, en dos haces de espín con fibra $\mathbb{C}$.

Observación 2.21. *Sabemos que la dimensión del toro $\mathbb{T}^2$ es 2, por tanto **par**, entonces la representación de espín $\gamma : \text{Spin}(2) \rightarrow GL(2)$ se divide como suma directa*

$$\gamma = \gamma^+ + \gamma^- \tag{2.8}$$

de dos representaciones irreducibles (ver referencia [10], [4], [9]), tal que

$$\gamma(\hat{t}_{ij}) = \begin{pmatrix} \gamma^+(\hat{t}_{ij}) & 0 \\ 0 & \gamma^-(\hat{t}_{ij}) \end{pmatrix}.$$

Sea S es el haz de espín con fibra $\mathbb{C}^2$ definido por $\gamma(\hat{t}_{ij})$. Además si S_+ y S_- son los haces de espín con fibra $\mathbb{C}$ definido por $\gamma^+(\hat{t}_{ij})$ y $\gamma^-(\hat{t}_{ij})$ respectivamente, entonces

$$S = S_+ \oplus S_- \tag{2.9}$$

donde $\oplus$ denota la suma de Whitney, (ver referencia [12]).

Utilizando esta Observación 2.21 para las cuatro familias construidas por la Proposición 2.16, tenemos $\tilde{t}_{ij}^k = \gamma\left(\hat{t}_{ij}^k\right) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$, entonces $\gamma^+\left(\hat{t}_{ij}^k\right) =$

± 1 y $\gamma^- \begin{pmatrix} \hat{k} \\ t_{ij} \end{pmatrix} = \pm 1$. Por tanto para $k = 1, 2, 3, 4$ tenemos

$$\gamma^+ \begin{pmatrix} \hat{k} \\ t_{ij} \end{pmatrix} = \gamma^- \begin{pmatrix} \hat{k} \\ t_{ij} \end{pmatrix} = \pm 1 \in \mathbb{C} \cong GL(1, \mathbb{C}). \quad (2.10)$$

Sin embargo las funciones definidas por $\gamma^+ \begin{pmatrix} \hat{k} \\ t_{ij} \end{pmatrix} = \gamma^- \begin{pmatrix} \hat{k} \\ t_{ij} \end{pmatrix} = \pm 1 \in \mathbb{C}$ satisfacen las condiciones de cociclo, entonces obtenemos los siguientes haces de espín con fibra $\mathbb{C}$, dados por:

$$S_{\pm}^k = \coprod_{\alpha=1}^4 (U_{\alpha} \times \mathbb{C}) / \sim. \quad (2.11)$$

donde $U_{\alpha} \times \mathbb{C} \ni (b_{\alpha}, z_{\alpha}) \sim (b_{\beta}, z_{\beta}) \in U_{\beta} \times \mathbb{C} \Leftrightarrow b_{\alpha} = b_{\beta}, \quad z_{\alpha} = \gamma^{\pm} \begin{pmatrix} \hat{k} \\ t_{\alpha\beta} \end{pmatrix} (b_{\beta}) z_{\beta}$

Comentario 2.22. Como ya observamos que $\gamma^+ \begin{pmatrix} \hat{k} \\ t_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \gamma^- \begin{pmatrix} \hat{k} \\ t_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$ entonces el haz de espín S_+ es isomorfo al haz de espín S_- , es decir $S_+^k \cong S_-^k$. Por la suma de Whitney (suma de haces vectoriales es la suma directa de sus fibras) se puede expresar por:

$$S^k = S_+^k \oplus S_-^k = \coprod_{\alpha=1}^4 (U_{\alpha} \times (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})) / \sim, \quad (2.12)$$

donde la relación de equivalencia esta dado por:

$$\begin{pmatrix} \hat{k} \\ t_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \hat{k} \\ t_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^+ \begin{pmatrix} \hat{k} \\ t_{ij} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \gamma^- \begin{pmatrix} \hat{k} \\ t_{ij} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Antes de concluir este capítulo observemos que el haz de espín $\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} S_+^k \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^2$ es isomorfo al haz de espín $\mathbb{C} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{S}_+^k \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathbb{T}^2$ esto se debe al Teoremas 2.16. Además el haz de espín $\mathbb{C} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{S}_+^k \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathbb{T}^2$ es isomorfo al haz de espín $\mathbb{C} \xrightarrow{\hat{\pi}} \hat{S}_+^k \xrightarrow{\hat{\pi}} \mathbb{T}^2$ esto se debe al Teorema 2.9. Por tanto

$$S_+^k \cong \hat{S}_+^k. \quad (2.13)$$

Análogamente $S_-^k \cong \hat{S}_-^k$. Para concluir este capítulo, utilizamos el Corolario 2.20, las relaciones (2.12), (2.13) también $S_-^k \cong \hat{S}_-^k$, para obtener el siguiente resultado:

$$S^k = \hat{S}_+^k \oplus \hat{S}_-^k. \quad (2.14)$$

FUNCIONES CON CONDICIÓN DE FRONTERA SOBRE $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

En este capítulo, queremos hacer que todo espinor se puede escribir como una función continua con condición de frontera. Para esto mostraremos que el espacio de espinores $\Gamma\left(\overset{k}{S}_+\right)$ es isomorfo a un espacio de funciones continuas con condición de frontera definidas sobre $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En el desarrollo de este capítulo no daremos mucho énfasis sobre el haz de espín $\overset{k}{S}_-$. Ya que todo lo que se pruebe para el haz de espín $\overset{k}{S}_+$ también se cumplirá para el haz de espín $\overset{k}{S}_-$, por ejemplo de manera análoga se puede mostrar que el espacio de secciones de $\Gamma\left(\overset{k}{S}_-\right)$ es isomorfo a un espacio de funciones continuas con condición de frontera sobre $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, porque los haces de espín $\overset{k}{S}_+$ y $\overset{k}{S}_-$ son isomorfos.

También como otro objetivo de este capítulo, en la cuarta sección mostraremos que los cuatro haces de espín $\overset{\hat{k}}{S}$ son triviales. En todo el capítulo, denotaremos a V como el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión m tal que $V \cong \mathbb{C}^m$.

3.1. Espacio espinor

Por la relación (2.13) del capítulo 2, verificamos que el haz de espín $\mathbb{C} \rightarrow \overset{\hat{k}}{S}_+ \xrightarrow{\hat{\pi}} \mathbb{T}^2$ es isomorfo al haz de espín $\mathbb{C} \rightarrow \overset{k}{S}_+ \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^2$. Entonces nuestro objetivo de esta sección es demostrar que $\Gamma\left(\overset{k}{S}_+\right)$ es isomorfo a $\Gamma\left(\overset{\hat{k}}{S}_+\right)$. Por este motivo, empezamos definiendo lo siguiente:

Definición 3.1. Sea $C(X, Y)$ el conjunto de las aplicaciones continuas del espacio topológico X para el espacio topológico Y .

En símbolos: $C(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y : f \text{ es continua}\}.$

Definición 3.2. Una **sección global** de un haz vectorial (E, π, B, V) es una aplicación continua $\sigma : B \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = id_B$ (es decir $\sigma(b) \in E_b$). Una **sección local** sobre un conjunto abierto $U \subset B$ es una aplicación $\sigma : U \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = id_U$. El conjunto de todas las secciones continuas de E es denotado por $\Gamma(E) = \{\sigma : B \rightarrow E : \sigma \in C(B, E), \pi \circ \sigma = id\}$.

En la siguiente definición veremos que es un espinor.

Definición 3.3. Un **espinor** es un elemento de $\Gamma\left(\begin{smallmatrix} k \\ S_+ \end{smallmatrix}\right)$, donde $\begin{smallmatrix} k \\ S_+ \end{smallmatrix}$ es un haz de espín. El conjunto de todos los espinores $\Gamma\left(\begin{smallmatrix} k \\ S_+ \end{smallmatrix}\right)$ es llamado **espacio espinor**.

Podemos comentar que el haz de espín es un ejemplo específico del haz vectorial y el espinor es un ejemplo específico de una sección del haz vectorial. Por esta razón la siguiente observación será enunciada y la proposición será demostrada de manera general.

Observación 3.4. Consideremos el haz vectorial $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ con $V \cong \mathbb{C}^m$. Sea $C(B, \mathbb{C})$ el anillo de funciones continuas complejas, entonces el espacio de secciones $\Gamma(E)$ es un $C(B, \mathbb{C})$ -módulo, con la siguiente estructura:

Suma: $+: \Gamma(E) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ dado por $(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \sigma_1 + \sigma_2$ donde:

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(b) := \sigma_1(b) + \sigma_2(b) \quad \forall b \in B. \quad (3.1)$$

Producto: $\cdot : C(B, \mathbb{C}) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ dado por $(f, \sigma) \mapsto f \cdot \sigma$ donde:

$$(f \cdot \sigma)(b) := f(b) \cdot \sigma(b) \quad \forall b \in B. \quad (3.2)$$

Proposición 3.5. Sean los haces vectoriales $V \rightarrow E_1 \xrightarrow{\pi_1} B$ y $V \rightarrow E_2 \xrightarrow{\pi_2} B$ isomorfos. Entonces $\Gamma(E_1)$ es isomorfo a $\Gamma(E_2)$ como $C(B, V)$ -módulos.

Demostración. Por hipótesis tenemos $E_1 \cong E_2$, entonces existe un difeomorfismo $h : E_1 \rightarrow E_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{h} & E_2 \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi_2 \\ & B & \end{array}$$

Además h tiene la propiedad que $h|_{\pi_1^{-1}(b)} : \pi_1^{-1}(b) \rightarrow \pi_2^{-1}(b)$ es una transformación lineal. Definamos, $h_* : \Gamma(E_1) \rightarrow \Gamma(E_2)$ dado por $\sigma \mapsto h_*(\sigma) := \rho$ donde:

$$\rho(b) := h(\sigma(b)) \quad \forall b \in B$$

Como $\pi_2(h(\sigma(b))) = \pi_1(\sigma(b)) = b$ y $h \circ \sigma$ es continua, entonces $h_*(\sigma) = \rho \in \Gamma(E_2)$ para $\sigma \in \Gamma(E_1)$. El inverso está dado por $(h^{-1})_* : \Gamma(E_2) \rightarrow \Gamma(E_1)$ tal que $(h^{-1})_*(\rho)(b) := h^{-1}(\rho(b))$ para

todo $\rho \in \Gamma(E_2)$. Obviamente, $h_* \circ (h^{-1})_* = (h^{-1})_* \circ h_* = id$. Además h_* es un homomorfismo. En efecto, sean $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E_1)$ y $f \in C(B, \mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}
 h_*(f\sigma_1 + \sigma_2)(b) &:= h((f\sigma_1 + \sigma_2)(b)) && \text{(definición de } h_*) \\
 &= h(f(b)\sigma_1(b) + \sigma_2(b)) && \text{(por (3.1) y (3.2))} \\
 &= f(b)h(\sigma_1(b)) + h(\sigma_2(b)) && (h|_{\pi_1^{-1}(b)} \text{ es lineal)} \\
 &= f(b)h_*(\sigma_1)(b) + h_*(\sigma_2)(b).
 \end{aligned}$$

Por tanto h_* es un isomorfismo. □

Como una aplicación de la proposición anterior que nos sirve para nuestro objetivo de nuestra sección, lo enunciamos en un corolario de la siguiente manera.

Corolario 3.6. *El espacio espinor $\Gamma\left(\begin{smallmatrix} k \\ S_+ \end{smallmatrix}\right)$ es isomorfo a $\Gamma\left(\begin{smallmatrix} \hat{k} \\ S_+ \end{smallmatrix}\right)$ como $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ -módulos para $k = 1, 2, 3, 4$.*

Demostración. Por la relación (2.13) sabemos que los haces de espín $\begin{smallmatrix} k \\ S_+ \end{smallmatrix}$ y $\begin{smallmatrix} \hat{k} \\ S_+ \end{smallmatrix}$ son isomorfos. Por la Proposición 3.5 se concluye su prueba. □

3.2. Espacio de funciones con funciones de transición

El objetivo de esta sección es mostrar que $\Gamma\left(\begin{smallmatrix} k \\ S_+ \end{smallmatrix}\right)$ es isomorfo a un espacio de funciones con funciones de transición definidas sobre la imagen de las cartas coordenadas del toro. El cual empezaremos definiendo el caso general, explícitamente.

Definición 3.7. *Sea $V \rightarrow \hat{E} \xrightarrow{\hat{\pi}} B$ un haz vectorial, con atlas diferenciable finito $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^n$ correspondientes a las trivializaciones locales. Entonces el espacio de funciones con funciones de transición denotado por $\hat{\Gamma}(\hat{E})$ es definido:*

$$\begin{aligned}
 \hat{\Gamma}(\hat{E}) &:= \{(f_1, \dots, f_n) \in C(\varphi_1(U_1), V) \times \dots \times C(\varphi_n(U_n), V) : \\
 &\quad f_i(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_j)) = t_{ij}(\varphi_j^{-1}(x_j))f_j(x_j) \quad \forall x_j \in \varphi_j(U_i \cap U_j), \forall i, j \in \{1, \dots, n\}\}
 \end{aligned}$$

Ahora que definimos el espacio $\hat{\Gamma}(\hat{E})$, nos ocupamos en dar una estructura de módulo, que es redactado en la siguiente observación.

Observación 3.8. *Sea $C(B, \mathbb{C})$ el anillo de funciones continuas. Entonces el espacio $\hat{\Gamma}(\hat{E})$ es un $C(B, \mathbb{C})$ -módulo con la siguiente estructura:*

$$(f_1, \dots, f_n) + (g_1, \dots, g_n) := (f_1 + g_1, \dots, f_n + g_n) \quad (3.3)$$

$$f \cdot (f_1, \dots, f_n) := ((f \circ \varphi_1^{-1})f_1, \dots, (f \circ \varphi_n^{-1})f_n) \quad (3.4)$$

donde $(f_1, \dots, f_n) \in \hat{\Gamma}(\hat{E})$ y $f \in C(B, \mathbb{C})$.

En el siguiente teorema mostraremos de manera general que $\Gamma(\hat{E}) \cong \hat{\Gamma}(\hat{E})$.

Teorema 3.9. *Sea $V \rightarrow \hat{E} \xrightarrow{\hat{\pi}} B$ un haz vectorial. Entonces el espacio de secciones $\Gamma(\hat{E})$ es isomorfo al espacio de funciones con funciones de transición $\hat{\Gamma}(\hat{E})$.*

Demostración. Recordemos que el haz vectorial $\hat{E}$ es dado por $\hat{E} = \coprod_{i=1}^n (\varphi_i(U_i) \times V) / \sim$, con su respectiva relación de equivalencia $\sim$ definida en la Definición 2.8. Definamos la función $H : \Gamma(\hat{E}) \rightarrow \hat{\Gamma}(\hat{E})$ dado por $\hat{\sigma} \mapsto H(\hat{\sigma}) := (\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n)$ donde:

$$\hat{\sigma}_i(x_i) := \hat{\xi}_i \circ \hat{\sigma} \circ \varphi_i^{-1}(x_i)$$

con ξ_i dado en la Definición 2.8 inciso (d).

- (i) $\hat{\sigma}_i$ es continua. Por hipótesis sabemos que $\hat{\xi}_i$, $\hat{\sigma}$ y φ_i^{-1} son continuas, entonces la composición $\hat{\xi}_i \circ \hat{\sigma} \circ \varphi_i^{-1}$ es continua. Por tanto $\hat{\sigma}_i$ es continua.
- (ii) $\hat{\sigma}_i$ satisface $\hat{\sigma}_i(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_j)) = t_{ij}(\varphi_j^{-1}(x_j))\hat{\sigma}_j(x_j)$. Sea $\hat{\sigma} \in \Gamma(\hat{E})$, entonces consideremos $\hat{\sigma}(\varphi_i^{-1}(x_i)) = [(x_i, v_i)] = [(x_j, v_j)]$ para $(x_i, v_i) \in \varphi_i(U_i) \times V$ y $(x_j, v_j) \in \varphi_j(U_j) \times V$. Entonces $(x_i, v_i) \sim (x_j, v_j)$, esto implica que $x_i = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_j)$ y $v_i = t_{ij}(\varphi_j^{-1}(x_j))v_j$. Luego

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_i(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_j)) &= \hat{\sigma}_i(x_i) & (x_j &= \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x_i)) \\ &= \hat{\xi}_i \circ \hat{\sigma} \circ \varphi_i^{-1}(x_i) & (\text{definición de } \hat{\sigma}_i) \\ &= \hat{\xi}_i([(x_i, v_i)]) & (\text{definición de } \hat{\sigma}) \\ &= v_i & (\text{definición de } \hat{\xi}_i) \\ &= t_{ij}(\varphi_j^{-1}(x_j))v_j & ((x_i, v_i) \sim (x_j, v_j)) \\ &= t_{ij}(\varphi_j^{-1}(x_j))\hat{\xi}_j([(x_j, v_j)]) & (\text{definición de } \hat{\xi}_j) \\ &= t_{ij}(\varphi_j^{-1}(x_j))\hat{\xi}_j \circ \hat{\sigma} \circ \varphi_j^{-1}(x_j) & (\text{definición de } \hat{\sigma}) \\ &= t_{ij}(\varphi_j^{-1}(x_j))\hat{\sigma}_j(x_j). & (\text{definición de } \hat{\sigma}_j) \end{aligned}$$

Por tanto $\hat{\sigma}_i(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_j)) = t_{ij}(\varphi_j^{-1}(x_j))\hat{\sigma}_j(x_j)$. De (i) y (ii) implica que H está bien definida.

Por otro lado consideremos la aplicación $G : \hat{\Gamma}(\hat{E}) \rightarrow \Gamma(\hat{E})$ definido por:

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mapsto G(\sigma_1, \dots, \sigma_n) := \hat{\sigma}$$

donde, $\hat{\sigma}(b) := [(\varphi_i(b), \hat{\sigma}_i(\varphi_i(b)))]$ para todo $b \in U_i$.

(iii) $\hat{\sigma}$ no depende de i . Sea $b \in U_i \cap U_j$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(b) &= [(\varphi_i(b), \hat{\sigma}_i(\varphi_i(b)))], \quad (\varphi_i(b), \hat{\sigma}_i(\varphi_i(b))) \in \varphi_i(U_i) \times V \\ \hat{\sigma}(b) &= [(\varphi_j(b), \hat{\sigma}_j(\varphi_j(b)))], \quad (\varphi_j(b), \hat{\sigma}_j(\varphi_j(b))) \in \varphi_j(U_j) \times V. \end{aligned}$$

Es claro ver $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(\varphi_j(b)) = \varphi_i(b)$. Además haciendo $\varphi_j(b) = x_j$, por hipótesis tenemos

$$t_{ij}(\varphi_j^{-1}(x_j))\hat{\sigma}_j(x_j) = \hat{\sigma}_i(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_j))$$

esto implica $t_{ij}(b)\hat{\sigma}_j(x_j) = \hat{\sigma}_i(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_j))$. Entonces por la relación de equivalencia $\sim$ (Definición 2.8) concluimos que $(\varphi_i(b), \hat{\sigma}_i(\varphi_i(b))) \sim (\varphi_j(b), \hat{\sigma}_j(\varphi_j(b)))$, lo cual implica $[(\varphi_i(b), \hat{\sigma}_i(\varphi_i(b)))] = [(\varphi_j(b), \hat{\sigma}_j(\varphi_j(b)))]$.

($\hat{iv}$) $\hat{\sigma}_i$ es continua en B . Sea una trivialización local $\hat{\Psi}_i : \hat{\pi}^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times V$ entonces tenemos por definición $\hat{\sigma}(b) = (\hat{\Psi}_i)^{-1}(b, \hat{\sigma}_i(\varphi_i(b)))$, $b_i \in U_i$ esto implica que $\hat{\sigma}$ es continua en U_i , pero como $B = \cup_{i=1}^n U_i$ y $\hat{\sigma}$ no depende de i , entonces $\hat{\sigma}$ es continua en B .

De ($\hat{iii}$) y ($\hat{iv}$) concluimos que $\hat{\sigma}$ es un elemento de $\Gamma(\hat{E})$ por tanto G esta bien definida.

($\hat{v}$) H es biyectiva. Sea $\hat{\sigma} \in \Gamma(\hat{E})$, escribimos $\hat{\sigma}(b) = [(\varphi_i(b), v_i)]$, $(\varphi_i(b), v_i) \in \varphi_i(U_i) \times V$ y $b \in U_i$. Sea $H(\hat{\sigma}) = (\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n)$, entonces para $x_i = \varphi_i(b)$, se obtiene

$$\hat{\sigma}_i(x_i) = \hat{\xi}_i(\hat{\sigma}(\varphi_i^{-1}(x_i))) = v_i. \quad (3.5)$$

Luego para $b = \varphi_i^{-1}(x_i)$, se tiene

$$\begin{aligned} G \circ H(\hat{\sigma})(b) &= G(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n)(\varphi_i^{-1}(x_i)) \\ &= [(x_i, \hat{\sigma}_i(x_i))] \\ &= [(x_i, v_i)] && \text{(por (3.5))} \\ &= [(\varphi_i(b), v_i)] && (b = \varphi_i^{-1}(x_i)) \\ &= \hat{\sigma}(b). \end{aligned}$$

Sea $(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n) \in \hat{\Gamma}(\hat{E})$ con $H \circ G(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n) = ((\widehat{H \circ G})_1, \dots, (\widehat{H \circ G})_n)$ para $x \in \varphi_i(U_i)$ entonces,

$$\begin{aligned} (\widehat{H \circ G})_i(x) &= \hat{\xi}_i(G(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n)(\varphi_i^{-1}(x))) && \text{(definición de } H) \\ &= \hat{\xi}_i([(\varphi_i(\varphi_i^{-1}(x)), \hat{\sigma}_i(\varphi_i(\varphi_i^{-1}(x))))]) && \text{(definición de } G) \\ &= \hat{\xi}_i([(x, \hat{\sigma}_i(x))]) \\ &= \hat{\sigma}_i(x) \end{aligned}$$

por tanto $H \circ G(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n) = ((\widehat{H \circ G})_1, \dots, (\widehat{H \circ G})_n) = (\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n)$. De las dos ecuaciones anteriores $G = H^{-1}$, entonces H es biyectiva.

($\hat{v}i$) H es un homomorfismo. Sean $\hat{\sigma}, \hat{s} \in \Gamma(\hat{E})$ y $f \in C(B, \mathbb{C})$. Dado $x \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$ se tiene

$$\begin{aligned}
 (\widehat{f\sigma + s})_i(x) &= \hat{\xi}_i \circ (\widehat{f\sigma + s}) \circ \varphi_i^{-1}(x) && \text{(definición)} \\
 &= \hat{\xi}_i(f(\varphi_i^{-1}(x)))\hat{\sigma}(\varphi_i^{-1}(x)) + \hat{s}(\varphi_i^{-1}(x)) && (\Gamma(\hat{E}) \text{ es } C(B, \mathbb{C}) \text{ módulo}) \\
 &= f(\varphi_i^{-1}(x))\hat{\xi}_i(\hat{\sigma}(\varphi_i^{-1}(x))) + \hat{\xi}_i(\hat{s}(\varphi_i^{-1}(x))) && \text{(linealidad } \hat{\xi}_i|_{(\hat{\pi})^{-1}(b)}) \\
 &= f \circ \varphi_i^{-1}(x)\hat{\sigma}_i(x) + \hat{s}_i(x) && \text{(definición de } \hat{\sigma}_i \text{ y } \hat{s}_i) \\
 &= ((f \circ \varphi_i^{-1})\hat{\sigma}_i + \hat{s}_i)(x)
 \end{aligned}$$

entonces

$$(\widehat{f\sigma + s})_i = (f \circ \varphi_i^{-1})\hat{\sigma}_i + \hat{s}_i, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
 H(\widehat{f\sigma + s}) &= ((\widehat{f\sigma + s})_1, \dots, (\widehat{f\sigma + s})_n) && \text{(definición de } H) \\
 &= ((f \circ \varphi_1^{-1})\hat{\sigma}_1 + \hat{s}_1, \dots, (f \circ \varphi_n^{-1})\hat{\sigma}_n + \hat{s}_n) && \text{(por (3.6))} \\
 &= ((f \circ \varphi_1^{-1})\hat{\sigma}_1, \dots, (f \circ \varphi_n^{-1})\hat{\sigma}_n) + (\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n) \\
 &= f(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n) + (\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n) \\
 &= f H(\hat{\sigma}) + H(\hat{s}).
 \end{aligned}$$

Por tanto H es un isomorfismo como $C(B, \mathbb{C})$ -módulo, lo cual concluye su prueba. $\square$

Una aplicación del teorema anterior sobre los haces de espín $\hat{S}_+^k$ que es de nuestro interés, lo enunciamos en el siguiente corolario.

Corolario 3.10. *El espacio espinor $\Gamma\left(\hat{S}_+^k\right)$ es isomorfo a $\hat{\Gamma}\left(\hat{S}_+^k\right)$ como $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ -módulo.*

Demostración. Por el Teorema 3.5 se completa la prueba de este corolario. $\square$

Concluimos por los Corolarios 3.6 y 3.10 que $\Gamma\left(\hat{S}_+^k\right) \cong \hat{\Gamma}\left(\hat{S}_+^k\right)$ como $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ -módulo.

3.3. Espacio de funciones con condición de frontera

En esta sección, tiene como objetivo mostrar que un espacio de funciones continuas con condición de frontera definido sobre $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, es isomorfo a $\hat{\Gamma}\left(\hat{S}_+^k\right)$. Pero antes demostraremos dos lemas para mostrar el teorema principal de esta sección.

Lema 3.11. *Sea $\Omega := \{f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) : f(x_1 + p, x_2 + q) = f(x_1, x_2), \forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ el anillo de funciones complejas biperiódicas continuas y $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ el toro. Entonces el anillo de funciones continuas definidas en el toro $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ es isomorfo a Ω .*

Demostración. Definamos $\eta : C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}) \rightarrow \Omega$ dado por $f \mapsto \eta(f)$ donde

$$\eta(f)(x_1, x_2) := f([(x_1, x_2)]) \quad (3.7)$$

y obsérvese que $\eta(f)(x_1, x_2) = f \circ p(x_1, x_2)$ para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ donde $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es llamada la aplicación cociente.

- (i) $\eta(f)$ es continua. Como f y p son continuas entonces $\eta(f) = f \circ p$ es continua.
- (ii) $\eta(f)$ satisface la ecuación $\eta(f)(x_1 + k_1, x_2 + k_2) = \eta(f)(x_1, x_2)$. Sean $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ y cualquier punto $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \eta(f)(x_1 + k_1, x_2 + k_2) &= f([(x_1 + k_1, x_2 + k_2)]) && \text{(definición (3.7))} \\ &= f([(x_1, x_2)]) && ((x_1 + k_1, x_2 + k_2) \sim (x_1, x_2)) \\ &= \eta(f)(x_1, x_2) && \text{(definición (3.7))} \end{aligned}$$

Entonces de (i) y (ii) η está bien definida.

- (iii) η es inyectiva. Sea $f, g \in C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$. Supongamos que $\eta(f) = \eta(g)$, entonces para cada $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\eta(f)(x_1, x_2) = \eta(g)(x_1, x_2)$. Luego por definición de $\eta(f)$ y $\eta(g)$ tenemos $f([(x_1, x_2)]) = g([(x_1, x_2)])$ lo cual implica que $f = g$ en $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$.
- (iv) η es sobreyectiva. Dado $f \in \Omega$, definimos $g \in C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ por $g([(x_1, x_2)]) := f(x_1, x_2)$, para cualquier $[(x_1, x_2)] \in \mathbb{T}^2$. Como

$$\begin{aligned} g([(x_1 + k_1, x_2 + k_2)]) &= f(x_1 + k_1, x_2 + k_2) \\ &= f(x_1, x_2) && (f \in \Omega) \\ &= g([(x_1, x_2)]), && \text{(definición de } g) \end{aligned}$$

esto implica que g está bien definida. Además sabemos que $[(x_1, x_2)] \in \mathbb{T}^2$ entonces existe una carta local (U_i, φ_i) para algún i , tal que $[(x_1, x_2)] \in U_i$ con $\varphi_i([(x_1, x_2)]) = (x_1, x_2)$, donde se obtiene $g \circ \varphi_i^{-1}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$, lo cual implica que g es continua. Por tanto,

$$\eta(g)(x_1, x_2) = g([(x_1, x_2)]) = f(x_1, x_2).$$

Entonces de (iii) y (iv) η es biyectiva.

- (v) η es un homomorfismo. Sean $h, g \in C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} \eta(h + g)(x_1, x_2) &= (h + g)([(x_1, x_2)]) && \text{(definición (3.7))} \\ &= h([(x_1, x_2)]) + g([(x_1, x_2)]) && \text{(definición punto a punto)} \\ &= \eta(h)(x_1, x_2) + \eta(g)(x_1, x_2) \\ &= (\eta(h) + \eta(g))(x_1, x_2) \end{aligned}$$

entonces $\eta(h + g) = \eta(h) + \eta(g)$. También tenemos

$$\begin{aligned}\eta(h \cdot g)(x_1, x_2) &= (h \cdot g)([(x_1, x_2)]) && \text{(definición (3.7))} \\ &= h([(x_1, x_2)]) \cdot g([(x_1, x_2)]) && \text{(definición punto a punto)} \\ &= \eta(h)(x_1, x_2) \cdot \eta(g)(x_1, x_2) \\ &= (\eta(h) \cdot \eta(g))(x_1, x_2),\end{aligned}$$

entonces $\eta(h \cdot g) = \eta(h) \cdot \eta(g)$.

Por tanto η es un homomorfismo de anillos. □

Lema 3.12. *Sea*

$$\tilde{\Omega} := \left\{ f \in C\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \mathbb{C}\right) : f\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) = f\left(\frac{1}{2}, x_2\right), \quad f\left(x_1, -\frac{1}{2}\right) = f\left(x_1, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

el anillo de funciones continuas con condiciones de frontera biperiódicas y $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ el toro. Entonces el anillo de funciones continuas definidas en el toro $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ es isomorfo a $\tilde{\Omega}$.

Demostración. Definamos $\eta : C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}) \rightarrow \tilde{\Omega}$ dado por $f \mapsto \eta(f)$ donde:

$$\eta(f)(x_1, x_2) := f([(x_1, x_2)]) \tag{3.8}$$

para todo $(x_1, x_2) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Como $f([(x_1, x_2)]) = f \circ p(x_1, x_2)$ con $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ y se sabe que f y p son continuas, entonces $\eta(f) = f \circ p|_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}$ es continua. Además,

$$\begin{aligned}\eta(f)\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) &= f\left(\left[-\frac{1}{2}, x_2\right]\right) && \text{(por (3.8))} \\ &= f\left(\left[\frac{1}{2}, x_2\right]\right) && \left(\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) \sim \left(\frac{1}{2}, x_2\right)\right) \\ &= \eta(f)\left(\frac{1}{2}, x_2\right), && \text{(definición de } \eta(f)\text{)}\end{aligned}$$

por tanto $\eta(f)\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) = \eta(f)\left(\frac{1}{2}, x_2\right)$. Análogamente $\eta(f)\left(x_1, -\frac{1}{2}\right) = \eta(f)\left(x_1, \frac{1}{2}\right)$. Esto implica que $\eta(f) \in \tilde{\Omega}$ entonces η está bien definida.

Ahora definiremos la inversa de η por $\phi : \tilde{\Omega} \rightarrow C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$, $f \mapsto \phi(f)$ donde

$$\phi(f)([(x_1, x_2)]) := f(x_1, x_2) \tag{3.9}$$

para todo $[(x_1, x_2)] \in \mathbb{T}^2$ y $(x_1, x_2) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Sabemos que f es continua y

$$\begin{aligned}\phi(f)\left(\left[-\frac{1}{2}, x_2\right]\right) &= f\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}, x_2\right) && \text{(f es periódica)} \\ &= \phi(f)\left(\left[\frac{1}{2}, x_2\right]\right).\end{aligned}$$

Análogamente $\phi(f)\left(\left[x_1, -\frac{1}{2}\right]\right) = \phi(f)\left(\left[x_1, \frac{1}{2}\right]\right)$. Por tanto ϕ está bien definida.

(i) η es invertible. Sea $f \in \tilde{\Omega}$. Dado cualquier $(x_1, x_2) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$\phi \circ \eta(f)([(x_1, x_2)]) = \phi(f)((x_1, x_2)) = f([(x_1, x_2)]).$$

Entonces $\phi \circ \eta(f) = f$. Supongamos que $g \in C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ y $(x_1, x_2) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$\eta \circ \phi(g)((x_1, x_2)) = \eta(g([(x_1, x_2)])) = g((x_1, x_2)).$$

Entonces $\eta \circ \phi(g) = g$. Por tanto $\phi = \eta^{-1}$, entonces η es una biyección.

(ii) η es un homomorfismo. La prueba de homomorfismo es inmediato porque las operaciones están definidas punto a punto.

□

Notación 3.13. En la relación (2.10) concluimos que $\gamma^+ \left(\hat{k}_{t_{ij}(p)} \right) = \gamma^- \left(\hat{k}_{t_{ij}(p)} \right) = \pm 1 \in \mathbb{C}$. Entonces para la comodidad de la notación definiremos,

$$t_{ij}^{k+}(p) := \gamma^+ \left(\hat{k}_{t_{ij}(p)} \right), \quad (3.10)$$

donde la familia $\left\{ t_{ij}^{k+} \right\}$ cumple las condiciones de cociclo y define el haz vectorial S_+^k , que nosotros lo llamamos el haz de espín (este haz de espín tiene fibra $\mathbb{C}$). En la prueba del siguiente Teorema 3.16 utilizaremos t_{ij}^{k+} y también los símbolos,

$$l_{12}^k \in \{1, -1\} \quad y \quad l_{13}^k \in \{1, -1\}. \quad (3.11)$$

La diferencia que existe entre l_{12}^k y l_{13}^k con t_{12}^{k+} y t_{13}^{k+} , es que t_{12}^{k+} y t_{13}^{k+} depende de $p \in U_i \cap U_j$ mientras que l_{12}^k y l_{13}^k son constantes ± 1 .

Con la Notación 3.13 tenemos las siguientes formulas por la familia de funciones de transición $\{t_{ij}^{k+}\}$.

$$\begin{array}{ll} l_{12}^1 = 1, & l_{13}^1 = 1. \\ l_{12}^2 = 1, & l_{13}^2 = -1. \\ l_{12}^3 = -1, & l_{13}^3 = 1. \\ l_{12}^4 = -1, & l_{13}^4 = -1. \end{array}$$

y

$$t_{12}^{k+}(\varphi_2^{-1}(x_1, x_2)) := \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2}); \\ \iota_{12}^k, & (x_1, x_2) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}, 1). \end{cases} \quad (3.12)$$

$$t_{13}^{k+}(\varphi_3^{-1}(x_1, x_2)) := \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in (0, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \\ \iota_{13}^k, & (x_1, x_2) \in (\frac{1}{2}, 1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{cases} \quad (3.13)$$

$$t_{24}^{k+}(\varphi_4^{-1}(x_1, x_2)) := \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in (0, \frac{1}{2}) \times (0, 1); \\ \iota_{13}^k, & (x_1, x_2) \in (\frac{1}{2}, 1) \times (0, 1). \end{cases} \quad (3.14)$$

Las siguientes funciones de transición t_{14}^{k+} , t_{23}^{k+} y t_{34}^{k+} se obtienen a partir de t_{12}^{k+} , t_{13}^{k+} y t_{24}^{k+} . Por ejemplo:

$$\begin{aligned} t_{34}^{k+}(\varphi_4^{-1}(x_1, x_2)) &= t_{31}^{k+}(\varphi_1^{-1}(x_1, x_2)) t_{12}^{k+}(\varphi_2^{-1}(x_1, x_2)) t_{24}^{k+}(\varphi_4^{-1}(x_1, x_2)) \quad (t_{13}^{k+}=t_{31}^{k+}) \\ &= \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in (0, 1) \times (0, \frac{1}{2}); \\ \iota_{12}^k \iota_{13}^k \iota_{13}^k, & (x_1, x_2) \in (0, 1) \times (\frac{1}{2}, 1). \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in (0, 1) \times (0, \frac{1}{2}); \\ \iota_{12}^k, & (x_1, x_2) \in (0, 1) \times (\frac{1}{2}, 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora empezamos a definir un espacio de funciones continuas con condición de frontera.

Definición 3.14. Sea $\mathbb{C} \rightarrow \hat{S}_+^k \xrightarrow{\hat{\pi}^k} \mathbb{T}^2$ un haz vectorial, donde $\hat{S}_+^k = \coprod_{i=1}^4 (\varphi_i(U_i) \times \mathbb{C}) / \sim$ con $\sim$ dado por la familia $\{t_{ij}^{k+}\}$ de funciones de transición. Definamos $\hat{C}\left(\hat{S}_+^k\right)$ el espacio de funciones continuas con condición de frontera por:

$$\hat{C}\left(\hat{S}_+^k\right) := \{f \in C\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2, \mathbb{C}\right) : f\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) = \iota_{13}^k f\left(\frac{1}{2}, x_2\right), \quad f\left(x_1, -\frac{1}{2}\right) = \iota_{12}^k f\left(x_1, \frac{1}{2}\right)\}.$$

Luego vamos a dotar una estructura de módulo al espacio $\hat{C}\left(\hat{S}_+^k\right)$, redactado en la siguiente observación.

Observación 3.15. Sea $\tilde{\Omega}$ el anillo de funciones continuas definido en el Lema 3.12. Entonces el espacio $\hat{C}\left(\hat{S}_+^k\right)$ es un $\tilde{\Omega}$ -módulo con la siguiente estructura:

Suma. $+: \hat{C}\left(\hat{S}_+^k\right) \times \hat{C}\left(\hat{S}_+^k\right) \rightarrow \hat{C}\left(\hat{S}_+^k\right)$ dado por $(f, g) \mapsto f + g$ donde,

$$(f + g)(x_1, x_2) := f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2) \quad (3.15)$$

para cualquier $(x_1, x_2) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Producto. $\cdot : \tilde{\Omega} \times \hat{C} \left(\begin{smallmatrix} \hat{k} \\ S_+ \end{smallmatrix} \right) \rightarrow \hat{C} \left(\begin{smallmatrix} \hat{k} \\ S_+ \end{smallmatrix} \right)$ dado por $(\alpha, g) \mapsto \alpha \cdot g$ donde,

$$(\alpha \cdot g)(x_1, x_2) := \alpha(x_1, x_2) \cdot g(x_1, x_2) \quad (3.16)$$

para cualquier $(x_1, x_2) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

También podemos observar que $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}) \cong \Omega \cong \tilde{\Omega}$ por los Lemas 3.11 y 3.12. Entonces usando el isomorfismo $\eta : C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}) \rightarrow \tilde{\Omega}$ de la relación (3.8), por tanto $\hat{C} \left(\begin{smallmatrix} \hat{k} \\ S_+ \end{smallmatrix} \right)$ es un $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ -módulo, con la multiplicación $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}) \times \hat{C} \left(\begin{smallmatrix} \hat{k} \\ S_+ \end{smallmatrix} \right) \rightarrow \hat{C} \left(\begin{smallmatrix} \hat{k} \\ S_+ \end{smallmatrix} \right)$ dado por $(\alpha, g) \mapsto \eta(\alpha) \cdot g$ donde

$$(\eta(\alpha) \cdot g)(x_1, x_2) := \eta(\alpha)(x_1, x_2) \cdot g(x_1, x_2) \quad (3.17)$$

para cualquier $(x_1, x_2) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Ahora vamos a enunciar el teorema principal.

Teorema 3.16. Sea $\mathbb{C} \rightarrow \hat{S}_+ \xrightarrow{\hat{\pi}} \mathbb{T}^2$ un haz de espín y sea $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^4$ el atlas diferenciable del toro $\mathbb{T}^2$ de la sección 1.2. Entonces el espacio de funciones continuas con condición de frontera $\hat{C} \left(\begin{smallmatrix} \hat{k} \\ S_+ \end{smallmatrix} \right)$ es isomorfo a $\hat{\Gamma} \left(\begin{smallmatrix} \hat{k} \\ S_+ \end{smallmatrix} \right)$ como $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ -módulo.

Demostración. Consideremos la siguiente aplicación $\Psi : \hat{C} \left(\begin{smallmatrix} \hat{k} \\ S_+ \end{smallmatrix} \right) \rightarrow \hat{\Gamma} \left(\begin{smallmatrix} \hat{k} \\ S_+ \end{smallmatrix} \right)$ dado por $\Psi(f) := (f_1, f_2, f_3, f_4)$ donde:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &:= f(x_1, x_2) & (x_1, x_2) &\in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \\ f_2(x_1, x_2) &:= \begin{cases} f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right]; \\ \iota_{12}^k f(x_1, x_2 - 1), & (x_1, x_2) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases} \\ f_3(x_1, x_2) &:= \begin{cases} f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \\ \iota_{13}^k f(x_1 - 1, x_2), & (x_1, x_2) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{cases} \\ f_4(x_1, x_2) &:= \begin{cases} f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \times \left(0, \frac{1}{2}\right]; \\ \iota_{13}^k f(x_1 - 1, x_2), & (x_1, x_2) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right]; \\ \iota_{12}^k f(x_1, x_2 - 1), & (x_1, x_2) \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \times \left(\frac{1}{2}, 1\right); \\ \iota_{12}^k \iota_{13}^k f(x_1 - 1, x_2 - 1), & (x_1, x_2) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases} \end{aligned}$$

(i) f_1, f_2, f_3 y f_4 son continuas.

(a) f_1 es continua en $\varphi_1(U_1) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, porque f es continua.

(b) f_2 es continua en $\varphi_2(U_2) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (0, 1)$. En efecto la continuidad de f implica la continuidad de f_2 en el abierto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}, 1)$. Sea ahora $(z_1, \frac{1}{2}) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \{\frac{1}{2}\}$. Dado cualquier sucesión $\{(z_1^n, z_2^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\varphi_2(U_2)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_1^n, z_2^n) = (z_1, \frac{1}{2})$, consideramos dos subsucesiones, $\{(z_1^{N_n}, z_2^{N_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{(z_1^{M_n}, z_1^{M_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{(z_1^n, z_2^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que,

$$\{(z_1^{N_n}, z_2^{N_n})\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{(z_1^{M_n}, z_2^{M_n})\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(z_1^n, z_2^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$(z_1^{N_n}, z_2^{N_n}) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2}]$ y $(z_1^{M_n}, z_2^{M_n}) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_2(z_1^{M_n}, z_2^{M_n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{k}{l}_{12} f(z_1^{M_n}, z_2^{M_n} - 1) && \text{(definición de } f_2) \\ &= \overset{k}{l}_{12} f(z_1, -\frac{1}{2}) && \text{(continuidad de } f) \\ &= \overset{k}{l}_{12} \overset{k}{l}_{12} f(z_1, \frac{1}{2}) && (f \in \hat{C} \left(\overset{k}{S}_+ \right)) \\ &= (\overset{k}{l}_{12})^2 f(z_1, \frac{1}{2}) && \text{(ecuación (3.11))} \\ &= f(z_1, \frac{1}{2}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_1^{N_n}, z_2^{N_n}) && \text{(continuidad de } f) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_2(z_1^{N_n}, z_2^{N_n}) && \text{(definición de } f_2) \end{aligned}$$

Por tanto f_2 es también continua en $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \{\frac{1}{2}\}$.

(c) f_3 es continua en $\varphi_3(U_3)$, su prueba es análogo al anterior inciso (b).

(d) f_4 es continua en $\varphi_4(U_4) = (0, 1) \times (0, 1)$. En efecto, de manera análoga que el inciso (b) f_4 es continua en $\{\frac{1}{2}\} \times (0, \frac{1}{2})$, $\{\frac{1}{2}\} \times (\frac{1}{2}, 1)$, $(0, \frac{1}{2}) \times \{\frac{1}{2}\}$ y $(\frac{1}{2}, 1) \times \{\frac{1}{2}\}$. Además f_4 es continua en el abierto

$$((0, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2})) \cup ((\frac{1}{2}, 1) \times (0, \frac{1}{2})) \cup ((0, \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}, 1)) \cup ((\frac{1}{2}, 1) \times (\frac{1}{2}, 1))$$

porque f es continua. Solo resta probar que f_4 es continua en $\{\frac{1}{2}\} \times \{\frac{1}{2}\}$. Supongamos la sucesión $\{(z_1^n, z_2^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\varphi_4(U_4)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_1^n, z_2^n) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y considerando cuatro subsucesiones $\{(z_1^{N_n}, z_2^{N_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{(z_1^{M_n}, z_1^{M_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{(z_1^{P_n}, z_2^{P_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{(z_1^{Q_n}, z_1^{Q_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\{(z_1^{N_n}, z_2^{N_n})\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{(z_1^{M_n}, z_2^{M_n})\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{(z_1^{P_n}, z_2^{P_n})\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{(z_1^{Q_n}, z_2^{Q_n})\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(z_1^n, z_2^n)\}_{n \in \mathbb{N}},$$

$(z_1^{N_n}, z_2^{N_n}) \in (0, \frac{1}{2}] \times (0, \frac{1}{2}]$, $(z_1^{M_n}, z_2^{M_n}) \in (\frac{1}{2}, 1) \times (0, \frac{1}{2}]$, $(z_1^{P_n}, z_2^{P_n}) \in (0, \frac{1}{2}] \times (\frac{1}{2}, 1)$
y $(z_1^{Q_n}, z_2^{Q_n}) \in (\frac{1}{2}, 1) \times (\frac{1}{2}, 1)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_4(z_1^{N_n}, z_2^{N_n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_1^{N_n}, z_2^{N_n}) \\ &= f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_4(z_1^{M_n}, z_2^{M_n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{k}{\iota}_{13} f(z_1^{M_n} - 1, z_2^{M_n}) \\ &= \overset{k}{\iota}_{13} f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ &= \overset{k}{\iota}_{13} \overset{k}{\iota}_{13} f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ &= (\overset{k}{\iota}_{13})^2 f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ &= f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_4(z_1^{P_n}, z_2^{P_n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{k}{\iota}_{12} f(z_1^{P_n}, z_2^{P_n} - 1) \\ &= \overset{k}{\iota}_{12} f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\ &= \overset{k}{\iota}_{12} \overset{k}{\iota}_{12} f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ &= (\overset{k}{\iota}_{12})^2 f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ &= f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_4(z_1^{Q_n}, z_2^{Q_n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{k}{\iota}_{12} \overset{k}{\iota}_{13} f(z_1^{Q_n} - 1, z_2^{Q_n} - 1) \\ &= \overset{k}{\iota}_{12} \overset{k}{\iota}_{13} f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\ &= (\overset{k}{\iota}_{12})^2 (\overset{k}{\iota}_{13})^2 f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ &= f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por tanto f_4 es continua en $\{\frac{1}{2}\} \times \{\frac{1}{2}\}$ por las relaciones (3.18), (3.19), (3.20) y (3.21).

(ii) f_1, f_2, f_3 y f_4 satisfacen la condición de $\hat{\Gamma} \left(\hat{S}_+ \right)$.

Para justificar las siguientes igualdades, utilizaremos las relaciones (3.12), (3.13) y (3.14) respectivamente y definiciones de f_1, f_2, f_3, f_4 . Por otro lado, de la relación (3.11) tenemos $(\overset{k}{\iota}_{12})^2 = (\overset{k}{\iota}_{13})^2 = 1$ que también lo utilizaremos. Dicho todo esto tenemos:

$$\overset{k+}{t}_{12} (\varphi_2^{-1}(x_1, x_2)) f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2}); \\ \overset{k}{\iota}_{12} \overset{k}{\iota}_{13} f(x_1, x_2 - 1), & (x_1, x_2) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right); \\ \binom{k}{\iota_{12}}^2 f(x_1, x_2 - 1), & (x_1, x_2) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right); \\ f(x_1, x_2 - 1), & (x_1, x_2) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(x_1, x_2)), & (x_1, x_2) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right); \\ f(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(x_1, x_2)), & (x_1, x_2) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases} \\
&= f_1(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(x_1, x_2)) \quad (x_1, x_2) \in \varphi_2(U_1 \cap U_2)
\end{aligned}$$

Se utilizo el cambio de coordenadas $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ definidas en el Capítulo 1. Continuando con lo que sigue:

$$\begin{aligned}
\binom{k+}{t_{13}} (\varphi_3^{-1}(x_1, x_2)) f_3(x_1, x_2) &= \begin{cases} f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \\ \binom{k}{\iota_{13}} \binom{k}{\iota_{13}} f(x_1 - 1, x_2), & (x_1, x_2) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \\ \binom{k}{\iota_{13}}^2 f(x_1 - 1, x_2), & (x_1, x_2) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \\ f(x_1 - 1, x_2), & (x_1, x_2) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}(x_1, x_2)), & (x_1, x_2) \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \\ f(\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}(x_1, x_2)), & (x_1, x_2) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{cases} \\
&= f_1(\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}(x_1, x_2)) \quad (x_1, x_2) \in \varphi_3(U_1 \cap U_3)
\end{aligned}$$

Se utilizo el cambio de coordenadas $\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}$ definidas en el Capítulo 1. Continuando con lo que sigue:

$$\begin{aligned}
\binom{k+}{t_{24}} (\varphi_4^{-1}(x_1, x_2)) f_4(x_1, x_2) &= \begin{cases} f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ \binom{k}{\iota_{13}} \binom{k}{\iota_{13}} f(x_1 - 1, x_2), & (x_1, x_2) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ \binom{k}{\iota_{12}} f(x_1, x_2 - 1), & (x_1, x_2) \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right), \\ \binom{k}{\iota_{13}} \binom{k}{\iota_{12}} \binom{k}{\iota_{13}} f(x_1 - 1, x_2 - 1), & (x_1, x_2) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right), \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ \binom{k}{\iota_{13}}^2 f(x_1 - 1, x_2), & (x_1, x_2) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ \binom{k}{\iota_{12}} f(x_1, x_2 - 1), & (x_1, x_2) \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right), \\ \binom{k}{\iota_{13}}^2 \binom{k}{\iota_{12}} f(x_1 - 1, x_2 - 1), & (x_1, x_2) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right), \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in (0, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2}), \\ f(x_1 - 1, x_2), & (x_1, x_2) \in (\frac{1}{2}, 1) \times (0, \frac{1}{2}), \\ \overset{k}{t}_{12} f(x_1, x_2 - 1), & (x_1, x_2) \in (0, \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}, 1), \\ \overset{k}{t}_{12} f(x_1 - 1, x_2 - 1), & (x_1, x_2) \in (\frac{1}{2}, 1) \times (\frac{1}{2}, 1), \end{cases} \\
 &= \begin{cases} f(\varphi_2 \circ \varphi_4^{-1}(x_1, x_2)), & (x_1, x_2) \in (0, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2}), \\ f(\varphi_2 \circ \varphi_4^{-1}(x_1, x_2)), & (x_1, x_2) \in (\frac{1}{2}, 1) \times (0, \frac{1}{2}), \\ \overset{k}{t}_{12} f(\varphi_2 \circ \varphi_4^{-1}(x_1, x_2)), & (x_1, x_2) \in (0, \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}, 1), \\ \overset{k}{t}_{12} f(\varphi_2 \circ \varphi_4^{-1}(x_1, x_2)), & (x_1, x_2) \in (\frac{1}{2}, 1) \times (\frac{1}{2}, 1), \end{cases} \\
 &= f_2(\varphi_2 \circ \varphi_4^{-1}(x_1, x_2)), \quad (x_1, x_2) \in \varphi_4(U_2 \cap U_4).
 \end{aligned}$$

Se utilizo el cambio de coordenadas $\varphi_2 \circ \varphi_4^{-1}$ definidas en el Capítulo 1. Ahora es mas fácil obtener las siguientes igualdades, utilizando las tres igualdades anteriores, la continuidad de las funciones f_i con $i = 1, 2, 3, 4$ y el hecho que $U_i \cap U_j \cap U_k$ es denso en $U_i \cap U_j$.

$$\begin{aligned}
 \overset{k+}{t}_{14} (\varphi_4^{-1}(x_1, x_2)) f_4(x_1, x_2) &= \overset{k+}{t}_{12} (\varphi_2^{-1}(x_1, x_2)) \overset{k+}{t}_{24} (\varphi_4^{-1}(x_1, x_2)) f_4(x_1, x_2) \\
 &= \overset{k+}{t}_{12} (\varphi_2^{-1}(x_1, x_2)) f_2(\varphi_2 \circ \varphi_4^{-1}(x_1, x_2)) \\
 &= f_1(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\varphi_2 \circ \varphi_4^{-1}(x_1, x_2))) \\
 &= f_1(\varphi_1 \circ \varphi_4^{-1}(x_1, x_2)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overset{k+}{t}_{23} (\varphi_3^{-1}(x_1, x_2)) f_3(x_1, x_2) &= \overset{k+}{t}_{21} (\varphi_1^{-1}(x_1, x_2)) \overset{k+}{t}_{13} (\varphi_3^{-1}(x_1, x_2)) f_3(x_1, x_2) \\
 &= \overset{k+}{t}_{21} (\varphi_1^{-1}(x_1, x_2)) f_1(\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}(x_1, x_2)) \quad (\overset{k+}{t}_{21} \overset{k+}{t}_{13} = id) \\
 &= f_2(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}(x_1, x_2))) \\
 &= f_2(\varphi_2 \circ \varphi_3^{-1}(x_1, x_2)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overset{k+}{t}_{34} (\varphi_4^{-1}(x_1, x_2)) f_4(x_1, x_2) &= \overset{k+}{t}_{31} (\varphi_1^{-1}(x_1, x_2)) \overset{k+}{t}_{14} (\varphi_4^{-1}(x_1, x_2)) f_4(x_1, x_2) \\
 &= \overset{k+}{t}_{31} (\varphi_1^{-1}(x_1, x_2)) f_1(\varphi_1 \circ \varphi_4^{-1}(x_1, x_2)) \quad (\overset{k+}{t}_{31} \overset{k+}{t}_{14} = id) \\
 &= f_3(\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1 \circ \varphi_4^{-1}(x_1, x_2))) \\
 &= f_3(\varphi_3 \circ \varphi_4^{-1}(x_1, x_2)).
 \end{aligned}$$

Entonces de los incisos (i) y (ii) se obtiene que $(f_1, f_2, f_3, f_4) \in \hat{\Gamma} \left(\overset{\hat{k}}{S}_+ \right)$. Por tanto Ψ está bien definida.

Consideremos $\Phi : \hat{\Gamma} \left(\hat{S}_+^k \right) \rightarrow \hat{C} \left(\hat{S}_+^k \right)$ dado por $(f_1, f_2, f_3, f_4) \mapsto \Phi(f_1, f_2, f_3, f_4) := f$, donde:

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} f_1(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ f_2(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2}], \\ \iota_{12}^k f_2(x_1, x_2 + 1), & (x_1, x_2) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times [-\frac{1}{2}, 0), \\ f_3(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in (0, \frac{1}{2}] \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ \iota_{13}^k f_3(x_1 + 1, x_2), & (x_1, x_2) \in [-\frac{1}{2}, 0) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ f_4(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in (0, \frac{1}{2}] \times (0, \frac{1}{2}], \\ \iota_{13}^k f_4(x_1 + 1, x_2), & (x_1, x_2) \in [-\frac{1}{2}, 0) \times (0, \frac{1}{2}], \\ \iota_{12}^k f_4(x_1, x_2 + 1), & (x_1, x_2) \in (0, \frac{1}{2}] \times (-\frac{1}{2}, 0), \\ \iota_{12}^k \iota_{13}^k f_4(x_1 + 1, x_2 + 1), & (x_1, x_2) \in [-\frac{1}{2}, 0) \times [-\frac{1}{2}, 0). \end{cases}$$

(iii) f está bien definida. Como $(f_1, f_2, f_3, f_4) \in \hat{\Gamma} \left(\hat{S}_+^k \right)$, entonces satisface la ecuación:

$$f_i(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x)) = \iota_{ij}^{k+}(\varphi_j^{-1}(x)) f_j(x) \quad (3.22)$$

para $x = (x_1, x_2) \in \varphi_j(U_j)$. Por las ecuaciones (3.22), (3.12), (3.13) y (3.14) f esta bien definida. Por ejemplo si $(x_1, x_2) \in (0, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, 0)$, entonces:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2), \\ \iota_{12}^k f_2(x_1, x_2 + 1), \\ f_3(x_1, x_2), \\ \iota_{12}^k f_4(x_1, x_2 + 1), \end{cases} .$$

Utilizando el cambio de coordenadas de $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, la definición de elementos de $\hat{\Gamma} \left(\hat{S}_+^k \right)$

y la definición de $(\iota_{12}^k)^2 = (\iota_{12}^k)^2 = 1$, entonces obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= f_1(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(x_1, x_2 + 1)) \\ &= \iota_{12}^{k+}(\varphi_2^{-1}(x_1, x_2 + 1)) f_2(x_1, x_2 + 1) \\ &= \iota_{12}^k f_2(x_1, x_2 + 1), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= f_1(\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}(x_1, x_2)) \\ &= \iota_{13}^{k+}(\varphi_3^{-1}(x_1, x_2)) f_3(x_1, x_2) \\ &= f_3(x_1, x_2 + 1), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, x_2) &= f_1(\varphi_1 \circ \varphi_4^{-1}(x_1, x_2 + 1)) \\
 &= \overset{k+}{t}_{14}(\varphi_4^{-1}(x_1, x_2 + 1)) f_4(x_1, x_2 + 1) \\
 &= \overset{k}{t}_{12} f_4(x_1, x_2 + 1).
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Entonces por los incisos (3.23), (3.24) y (3.25) tenemos

$$f_1(x_1, x_2) = \overset{k}{t}_{12} f_2(x_1, x_2 + 1) = \overset{k}{t}_{12} f_4(x_1, x_2 + 1) = f_3(x_1, x_2).$$

Por tanto f está bien definida en $(0, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, 0)$. Análogamente los otros casos.

(iv) f es continua.

- f es continua en $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ por la continuidad de f_1 .
- f es continua en los intervalos $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \{\frac{1}{2}\}$ y $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \{-\frac{1}{2}\}$ por la continuidad de f_2 y $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \{\frac{1}{2}\} \subset \varphi_2(U_2)$.
- f es continua en los intervalos $\{\frac{1}{2}\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $\{-\frac{1}{2}\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ por la continuidad de f_3 y $\{\frac{1}{2}\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset \varphi_3(U_3)$.
- f es continua en los puntos $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ que pertenecen al intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, por la continuidad de f_4 y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \varphi_4(U_4)$.

Además f satisface las condiciones de frontera: Por la definición de f tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
 f(-\frac{1}{2}, x_2) &= \overset{k}{t}_{13} f_3(\frac{1}{2}, x_2) = \overset{k}{t}_{13} f(\frac{1}{2}, x_2), & x_2 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\
 f(x_1, -\frac{1}{2}) &= \overset{k}{t}_{12} f_2(x_1, \frac{1}{2}) = \overset{k}{t}_{12} f(x_1, \frac{1}{2}), & x_1 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),
 \end{aligned}$$

también en los puntos $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ satisface la condición de frontera:

$$f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \overset{k}{t}_{12} \overset{k}{t}_{13} f_4(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{cases} \overset{k}{t}_{12} \overset{k}{t}_{13} f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ \overset{k}{t}_{12} f_4(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ \overset{k}{t}_{13} f_4(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}). \end{cases}$$

Entonces $f \in \hat{C} \left(\overset{\hat{k}}{S}_+ \right)$. Así Φ está bien definida.

(v) Ψ es un homomorfismo.

- Sean $f, g \in \hat{C} \left(\overset{\hat{4}}{S}_+ \right)$. Entonces utilizando (3.15) y las definiciones de f_1, f_2, f_3 y f_4 tenemos para $(x_1, x_2) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$:

$$\begin{aligned}
(f+g)_1(x_1, x_2) &= (f+g)(x_1, x_2) \\
&= f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2) \\
&= f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2) \\
&= (f_1 + g_1)(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

y para $(x_1, x_2) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (0, 1)$

$$\begin{aligned}
(f+g)_2(x_1, x_2) &= \begin{cases} (f+g)(x_1, x_2), & x_2 \in (0, \frac{1}{2}] \\ \iota_{12}^4 (f+g)(x_1, x_2 - 1), & x_2 \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2), & x_2 \in (0, \frac{1}{2}] \\ \iota_{12}^4 f(x_1, x_2 - 1) + \iota_{12}^4 g(x_1, x_2 - 1), & x_2 \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \\
&= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2) \\
&= (f_2 + g_2)(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

De manera similar se muestra para el resto de los casos. Entonces obtenemos:

$$(f+g)_i = f_i + g_i, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (3.26)$$

Luego utilizando la ecuación (3.26), se tiene

$$\begin{aligned}
\Psi(f+g) &= ((f+g)_1, (f+g)_2, (f+g)_3, (f+g)_4) \\
&= (f_1 + g_1, f_2 + g_2, f_3 + g_3, f_4 + g_4) \\
&= (f_1, f_2, f_3, f_4) + (g_1, g_2, g_3, g_4) \\
&= \Psi(f) + \Psi(g).
\end{aligned}$$

Por tanto $\Psi(f+g) = \Psi(f) + \Psi(g)$.

- Sean $\alpha \in C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ y $f \in \hat{C} \left(\begin{smallmatrix} \hat{k} \\ S_+ \end{smallmatrix} \right)$. Entonces utilizando las definiciones de f_1, f_2, f_3, f_4 , la relación (3.16), la periodicidad de α , el isomorfismo de anillos de la relación (3.8) $\eta : C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}) \rightarrow \tilde{\Omega}$, definición de las cartas locales φ_i de $\mathbb{T}^2$ y la ecuación (3.4) respectivamente, para cada $(x_1, x_2) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tenemos,

$$\begin{aligned}
(\eta(\alpha)f)_1(x_1, x_2) &= (\eta(\alpha)f)(x_1, x_2) \\
&= \eta(\alpha)(x_1, x_2)f(x_1, x_2) \\
&= \alpha([(x_1, x_2)])f(x_1, x_2) \\
&= \alpha \circ \varphi_1^{-1}(x_1, x_2)f_1(x_1, x_2) \\
&= ((\alpha \circ \varphi_1^{-1})f_1)(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

y para $(x_1, x_2) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (0, 1)$ tenemos

$$\begin{aligned}
 (\eta(\alpha)f)_2(x_1, x_2) &= \begin{cases} (\eta(\alpha)f)(x_1, x_2), & x_2 \in (0, \frac{1}{2}] \\ \iota_{12}^k (\eta(\alpha)f)(x_1, x_2 - 1), & x_2 \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \eta(\alpha)(x_1, x_2)f(x_1, x_2), & x_2 \in (0, \frac{1}{2}] \\ \iota_{12}^k \eta(\alpha)(x_1, x_2 - 1)f(x_1, x_2 - 1), & x_2 \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \alpha([(x_1, x_2)])f(x_1, x_2), & x_2 \in (0, \frac{1}{2}] \\ \iota_{12}^k \alpha([(x_1, x_2 - 1)])f(x_1, x_2 - 1), & x_2 \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \alpha([(x_1, x_2)])f(x_1, x_2), & x_2 \in (0, \frac{1}{2}] \\ \iota_{12}^k \alpha([(x_1, x_2)])f(x_1, x_2 - 1), & x_2 \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \alpha \circ \varphi_2^{-1}(x_1, x_2)f(x_1, x_2), & x_2 \in (0, \frac{1}{2}] \\ \iota_{12}^k \alpha \circ \varphi_2^{-1}(x_1, x_2)f(x_1, x_2 - 1), & x_2 \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} (\alpha \circ \varphi_2^{-1})(x_1, x_2)f(x_1, x_2), & x_2 \in (0, \frac{1}{2}] \\ \iota_{12}^k (\alpha \circ \varphi_2^{-1})(x_1, x_2)f(x_1, x_2 - 1), & x_2 \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \\
 &= (\alpha \circ \varphi_2^{-1})(x_1, x_2) \begin{cases} f(x_1, x_2), & x_2 \in (0, \frac{1}{2}] \\ \iota_{12}^k f(x_1, x_2 - 1), & x_2 \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \\
 &= (\alpha \circ \varphi_2^{-1})(x_1, x_2)f_2(x_1, x_2), \\
 &= ((\alpha \circ \varphi_2^{-1})f_2)(x_1, x_2).
 \end{aligned}$$

De manera similar se muestra para el resto de los casos. Entonces obtenemos:

$$(\alpha f)_i = (\alpha \circ \varphi_i^{-1})f_i, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (3.27)$$

Luego utilizando la ecuación (3.28) se tiene:

$$\begin{aligned}
 \Psi(\eta(\alpha)f) &= ((\eta(\alpha)f)_1, (\eta(\alpha)f)_2, (\eta(\alpha)f)_3, (\eta(\alpha)f)_4) \\
 &= ((\alpha \circ \varphi_1^{-1})f_1, (\alpha \circ \varphi_2^{-1})f_2, (\alpha \circ \varphi_3^{-1})f_3, (\alpha \circ \varphi_4^{-1})f_4) \\
 &= \alpha(f_1, f_2, f_3, f_4) \quad (\text{por (3.4)}) \\
 &= \alpha\Psi(f).
 \end{aligned}$$

Por tanto $\Psi(\eta(\alpha)f) = \alpha\Psi(f)$.

(vi) Ψ es biyectiva. Sean $(f_1, f_2, f_3, f_4) \in \hat{\Gamma} \left(\hat{S}_+^4 \right)$ y $(g_1, g_2, g_3, g_4) \in \hat{\Gamma} \left(\hat{S}_+^4 \right)$ tal que

$$\Psi \circ \Phi(f_1, f_2, f_3, f_4) = (g_1, g_2, g_3, g_4) \quad (3.28)$$

Para el abierto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tenemos $g_1(x_1, x_2) = \Phi(f_1, f_2, f_3, f_4)(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2)$.

Para el abierto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (0, 1)$ y utilizando las definiciones de f_1, f_2, f_3 y f_4 tenemos,

$$\begin{aligned} g_2(x_1, x_2) &= \begin{cases} \Phi(f_1, f_2, f_3, f_4)(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2}] \\ \binom{k}{\iota_{12}} \Phi(f_1, f_2, f_3, f_4)(x_1, x_2 - 1), & (x_1, x_2) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_2(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2}] \\ \left(\binom{k}{\iota_{12}}\right)^2 f_2(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \\ &= f_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Para el abierto $(0, 1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tenemos,

$$\begin{aligned} g_3(x_1, x_2) &= \begin{cases} \Phi(f_1, f_2, f_3, f_4)(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in (0, \frac{1}{2}] \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ \binom{k}{\iota_{13}} \Phi(f_1, f_2, f_3, f_4)(x_1 - 1, x_2), & (x_1, x_2) \in (\frac{1}{2}, 1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_3(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in (0, \frac{1}{2}] \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ \left(\binom{k}{\iota_{13}}\right)^2 f_3(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in (\frac{1}{2}, 1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases} \\ &= f_3(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Para el abierto $(0, 1) \times (0, 1)$ tenemos,

$$\begin{aligned} g_4(x_1, x_2) &= \begin{cases} \Phi(f_1, f_2, f_3, f_4)(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in (0, \frac{1}{2}] \times (0, \frac{1}{2}]; \\ \binom{k}{\iota_{13}} \Phi(f_1, f_2, f_3, f_4)(x_1 - 1, x_2), & (x_1, x_2) \in (\frac{1}{2}, 1) \times (0, \frac{1}{2}]; \\ \binom{k}{\iota_{12}} \Phi(f_1, f_2, f_3, f_4)(x_1, x_2 - 1), & (x_1, x_2) \in (0, \frac{1}{2}] \times (\frac{1}{2}, 1); \\ \binom{k}{\iota_{13}\iota_{12}} \Phi(f_1, f_2, f_3, f_4)(x_1 - 1, x_2 - 1), & (x_1, x_2) \in (\frac{1}{2}, 1) \times (\frac{1}{2}, 1). \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_4(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in (0, \frac{1}{2}] \times (0, \frac{1}{2}]; \\ \left(\binom{k}{\iota_{13}}\right)^2 f_4(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in (\frac{1}{2}, 1) \times (0, \frac{1}{2}]; \\ \left(\binom{k}{\iota_{12}}\right)^2 f_4(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in (0, \frac{1}{2}] \times (\frac{1}{2}, 1); \\ \left(\binom{k}{\iota_{13}}\right)^2 \left(\binom{k}{\iota_{12}}\right)^2 f_4(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in (\frac{1}{2}, 1) \times (\frac{1}{2}, 1). \end{cases} \\ &= f_4(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Entonces $g_i = f_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Por tanto la ecuación (3.28) se convierte en $\Psi \circ \Phi(f_1, f_2, f_3, f_4) = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

Por otro lado, supongamos $f \in \hat{C} \left(\hat{S}_+^k \right)$, entonces:

En el abierto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, tenemos $\Phi \circ \Psi(f)(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$.

En las fronteras $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \{\frac{1}{2}\}$ y $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \{-\frac{1}{2}\}$ tenemos,

$$\Phi \circ \Psi(f)(x_1, \frac{1}{2}) = f_2(x_1, \frac{1}{2}) = f(x_1, \frac{1}{2}), \quad x_1 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$$

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Psi(f)(x_1, -\frac{1}{2}) &= \overset{k}{\iota}_{12} f_2(x_1, \frac{1}{2}) \\ &= \overset{k}{\iota}_{12} f(x_1, \frac{1}{2}) \\ &= (\overset{k}{\iota}_{12})^2 f(x_1, -\frac{1}{2}) \\ &= f(x_1, -\frac{1}{2}), \quad x_1 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

En las fronteras $\{\frac{1}{2}\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $\{-\frac{1}{2}\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tenemos,

$$\Phi \circ \Psi(f)(\frac{1}{2}, x_2) = f_3(\frac{1}{2}, x_2) = f(\frac{1}{2}, x_2) \quad x_2 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Psi(f)(-\frac{1}{2}, x_2) &= \overset{k}{\iota}_{13} f_3(\frac{1}{2}, x_2) \\ &= \overset{k}{\iota}_{13} f(\frac{1}{2}, x_2) \\ &= (\overset{k}{\iota}_{13})^2 f(-\frac{1}{2}, x_2) \\ &= f(-\frac{1}{2}, x_2), \quad x_2 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Para los puntos $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ utilizamos la función f_4 que es análogo al anterior. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Psi(f)(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) &= \overset{k}{\iota}_{13} \overset{k}{\iota}_{12} f_4(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ &= \overset{k}{\iota}_{13} \overset{k}{\iota}_{12} f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ &= \overset{k}{\iota}_{13} \overset{k}{\iota}_{12} \overset{k}{\iota}_{13} \overset{k}{\iota}_{12} f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\ &= (\overset{k}{\iota}_{13})^2 (\overset{k}{\iota}_{12})^2 f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\ &= f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Por tanto $\Phi \circ \Psi(f) = f$ para todo $f \in \hat{C} \left(\overset{\hat{k}}{S}_+ \right)$. Así obtenemos que la aplicación Φ es la inversa de Ψ es decir $\Phi = \Psi^{-1}$.

En conclusión Ψ es un isomorfismo, con el cual se termina la prueba. □

Utilizando el objetivo de la sección 3.2 y el Teorema 3.16, concluimos que $\Gamma \left(\overset{k}{S}_+ \right)$ y $\hat{C} \left(\overset{\hat{k}}{S}_+ \right)$ son isomorfos como $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ -módulos, que es nuestro primer objetivo del capítulo. Ahora vamos por el segundo objetivo de este capítulo, recordamos que tenemos que mostrar que los cuatro haces de espín del toro son triviales, para eso empezamos la siguiente sección.

3.4. Trivialidad de los cuatro haces de espín del toro

El objetivo de esta sección es mostrar que los cuatro haces de espín del toro $\hat{S}^k$ son triviales. Empezaremos dando el concepto de un haz trivial, en la siguiente comentario.

Comentario 3.17. *El haz $E = B \times V$ con la proyección $\pi = pr_1 : B \times F \rightarrow B$ definido por $pr_1((b, v)) = b$ se llama **el haz trivial**.*

Ahora vamos a definir, a qué llamamos un haz vectorial trivial, que es de importancia para nuestros cuatro haces de espín.

Definición 3.18. *Decimos que el haz vectorial $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ es **trivial** si es isomorfo al haz trivial $V \rightarrow B \times V \xrightarrow{pr_1} B$*

Comentario 3.19. *Un resultado importante de esta definición es la siguiente: Un haz vectorial $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ es trivial si y solo si existen m secciones $s_1, \dots, s_m \in \Gamma(E)$ tal que $\{s_1(b), \dots, s_m(b)\}$ es una base de $\pi^{-1}(b) \cong V$. La prueba de esta afirmación se puede ver en los libros de referencia [6] y [11].*

Ahora dotamos de una estructura de módulo al espacio $\Gamma(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{C})$ en la siguiente observación.

Observación 3.20. *Sea $\Gamma(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{C})$ el espacio de todas las secciones globales del haz trivial $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}$. Las secciones globales $\sigma : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}$, son escritos de la forma $\sigma(b) = (b, f(b))$ con $f \in C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$. Entonces el espacio $\Gamma(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{C})$ es un $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ -módulo con las siguientes operaciones:*

Suma. $+: \Gamma(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}) \times \Gamma(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}) \rightarrow \Gamma(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{C})$ dado por $(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \sigma_1 + \sigma_2$ donde

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(b) = \sigma_1(b) + \sigma_2(b) = (b, f_1(b)) + (b, f_2(b)) := (b, f_1(b) + f_2(b)) \quad (3.29)$$

para todo $b \in \mathbb{T}^2$ y $f_1, f_2 \in C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$.

Producto. $\cdot : C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}) \times \Gamma(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}) \rightarrow \Gamma(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{C})$ dado por $(f, \sigma) \mapsto f \cdot \sigma$ donde,

$$(f \cdot \sigma)(b) = f(b)\sigma(b) = g(b)(b, f(b)) := (b, g(b)f(b)) \quad (3.30)$$

para cualquier $b \in \mathbb{T}^2$, una función $g \in C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ y una sección global $\sigma(b) = (b, f(b))$.

En la siguiente proposición mostraremos que el espacio $\hat{C} \left(\hat{S}_+^k \right)$ admite una base que nos servirá para mostrar la trivialidad de los cuatro haces de espín.

Proposición 3.21. Sea ${}^k s \in \hat{C} \left(\hat{S}_+^k \right)$ dado por ${}^k s(x_1, x_2) = e^{2\pi i(\epsilon_1^k x_1 + \epsilon_2^k x_2)}$ donde $k = 1, 2, 3, 4$ y

$$\begin{aligned} \epsilon_1^1 &= 0, & \epsilon_2^1 &= 0, \\ \epsilon_1^2 &= 0, & \epsilon_2^2 &= \frac{1}{2}, \\ \epsilon_1^3 &= \frac{1}{2}, & \epsilon_2^3 &= 0, \\ \epsilon_1^4 &= \frac{1}{2}, & \epsilon_2^4 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Entonces $\{{}^k s\}$ es una base de $\tilde{\Omega}$ -módulo $\hat{C} \left(\hat{S}_+^k \right)$. Luego $\hat{C} \left(\hat{S}_+^k \right) = \tilde{\Omega} {}^k s = \{f {}^k s : f \in \tilde{\Omega}\}$.

Demostración. Por la definición de ϵ_i^k tenemos

$$\begin{aligned} {}^k s(x_1, -\frac{1}{2}) &= \iota_{12}^k {}^k s(x_1, \frac{1}{2}), & x_1 &\in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ {}^k s(-\frac{1}{2}, x_2) &= \iota_{13}^k {}^k s(\frac{1}{2}, x_2), & x_2 &\in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \end{aligned}$$

entonces ${}^k s \in \hat{C} \left(\hat{S}_+^k \right)$.

Sea ${}^k s'(x_1, x_2) = e^{-2\pi i(\epsilon_1^k x_1 + \epsilon_2^k x_2)}$, entonces ${}^k s'(x_1, x_2) {}^k s(x_1, x_2) = 1$. Demostraremos primero que si para todo $f \in \hat{C} \left(\hat{S}_+^k \right)$, tenemos $f {}^k s \in \tilde{\Omega}$. Veamos para $x_1 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tenemos

$$\begin{aligned} f(x_1, -\frac{1}{2}) {}^k s'(x_1, -\frac{1}{2}) &= (\iota_{12}^k)^2 f(x_1, \frac{1}{2}) {}^k s'(x_1, \frac{1}{2}) \\ &= f(x_1, \frac{1}{2}) {}^k s'(x_1, \frac{1}{2}), \end{aligned}$$

y para $x_2 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tenemos

$$\begin{aligned} f(-\frac{1}{2}, x_2) {}^k s'(-\frac{1}{2}, x_2) &= (\iota_{13}^k)^2 f(\frac{1}{2}, x_2) {}^k s'(\frac{1}{2}, x_2) \\ &= f(\frac{1}{2}, x_2) {}^k s'(\frac{1}{2}, x_2), \end{aligned}$$

entonces $f {}^k s \in \tilde{\Omega}$.

Luego $f = \left(f {}^k s' \right) {}^k s \in \text{gen}_{\tilde{\Omega}} \{{}^k s\}$, es decir ${}^k s$ genera $\hat{C} \left(\hat{S}_+^k \right)$ como $\tilde{\Omega}$ -módulo.

Supongamos que $f \overset{k}{s} = 0$, con $f \in \tilde{\Omega}$. Entonces $f = (f \overset{k}{s}) \overset{k}{s}' = 0$. Por tanto $\{\overset{k}{s}\}$ es una base libre del $\tilde{\Omega}$ -módulo $\hat{C} \left(\overset{\hat{k}}{S}_+ \right)$. Esto implica que;

$$\hat{C} \left(\overset{\hat{k}}{S}_+ \right) = \text{gen}_{\tilde{\Omega}} \{\overset{k}{s}\} = \tilde{\Omega} \overset{k}{s}.$$

□

Nos recordamos que $\hat{C} \left(\overset{\hat{k}}{S}_+ \right)$ es un $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ -módulo con el producto

$$\cdot : C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}) \times \hat{C} \left(\overset{\hat{k}}{S}_+ \right) \rightarrow \hat{C} \left(\overset{\hat{k}}{S}_+ \right)$$

definido por $(f, \sigma) \mapsto \eta(f)\sigma$, donde $\eta : C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}) \rightarrow \tilde{\Omega}$ es el isomorfismo de la ecuación (3.8). Por lo tanto, de la Proposición 3.21 implica el siguiente corolario:

Corolario 3.22. $\{\overset{k}{s}\}$ es una base libre del $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ -módulo $\hat{C} \left(\overset{\hat{k}}{S}_+ \right)$.

Para demostrar que nuestros haces de espín $\overset{k}{S}$ sean triviales, primero demostraremos que $\overset{k}{S}_+$ son triviales en el siguiente corolario.

Corolario 3.23. Los haces de espín $\overset{k}{S}_+$ son triviales.

Demostración. En la parte final de la sección 3.3 concluimos que $\Gamma \left(\overset{k}{S}_+ \right)$ y $\hat{C} \left(\overset{\hat{k}}{S}_+ \right)$ son isomorfos como $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ -módulos.

Sea $\Psi : \hat{C} \left(\overset{\hat{k}}{S}_+ \right) \rightarrow \Gamma \left(\overset{k}{S}_+ \right)$ el isomorfismo de $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ -módulos tal que $\Psi(fs) = f\Psi(s)$ con $f \in C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$.

Como $\overset{k}{s} \in \hat{C} \left(\overset{\hat{k}}{S}_+ \right)$ es una base, por la Proposición 3.21, entonces $\{\overset{k}{\sigma}\}$ ($\overset{k}{\sigma} := \Psi(\overset{k}{s})$) es una base de $\Gamma \left(\overset{k}{S}_+ \right)$. Por el Comentario 3.19, implica que el haz de espín $\overset{k}{S}_+$ es trivial, para cada $k = 1, 2, 3, 4$.

□

Recordamos que $\overset{k}{S}_+ \cong \overset{k}{S}_-$ y por el Corolario 3.23, afirmamos que el haz de espín $\overset{k}{S}_-$ es trivial. Por tanto la segunda conclusión del capítulo lo enunciamos en la siguiente observación.

Observación 3.24. Como sabemos que $\overset{k}{S} = \overset{k}{S}_+ \oplus \overset{k}{S}_-$, y por el Corolario 3.23, se afirma que los cuatro haces de espín del toro $\overset{k}{S}$ son triviales.

EL OPERADOR DE DIRAC SOBRE EL TORO $\mathbb{T}^2$

En este capítulo nos ocuparemos de obtener los operadores de Dirac en diferentes espacios de secciones que correspondan a los cuatro haces de espín del toro $\mathbb{C}^2 \rightarrow \hat{S}^k \xrightarrow{\hat{k}} \mathbb{T}^2$. Como ya es usual empezaremos definiendo de manera general una derivada covariante.

4.1. La derivada covariante en haces vectoriales

En esta sección nuestro objetivo es definir una derivada covariante ∇^{spin} sobre $\Gamma\left(\hat{S}^k\right)$ por el levantamiento dado por el isomorfismo $d\lambda : \text{spin}(2) \rightarrow \text{so}(2)$ calculado en el Capítulo 2 sección 2.2. Al igual que en el Capítulo 3, denotaremos a V el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ tal que $V \cong \mathbb{C}^m$. Para más detalles sobre derivada covariante podemos ver las referencias [6] y [8].

Definición 4.1. *Una derivada covariante (o conexión) en un haz vectorial $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ es una aplicación*

$$\nabla : \Gamma(TB) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), \quad (4.1)$$

donde $\nabla(X, s)$ es escrito como $\nabla_X s$, que satisface las siguientes tres propiedades:

- (i) $\nabla_{fX+gY}s = f\nabla_X s + g\nabla_Y s$
- (ii) $\nabla_X(s_1 + s_2) = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2$
- (iii) $\nabla_X(fs) = (X.f)s + f\nabla_X s$

para todo $f, g \in C(B, \mathbb{R})$, $X, Y \in \Gamma(TB)$ y $s, s_1, s_2 \in \Gamma(E)$.

Consideremos la base local $\{s_1, \dots, s_m\}$ de E y la base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ del haz tangente TB definido en la carta coordenada $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ donde $\frac{\partial}{\partial x_i}(b) := d\varphi_\alpha^{-1}(b)$. Sean $X \in \Gamma(TB)$ y $Y \in \Gamma(E)$ en coordenadas locales, digamos para la carta coordenada $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ podemos escribir

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^m Y^j s_j.$$

Si $\nabla : \Gamma(TB) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ es una derivada covariante, tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}} \sum_{j=1}^m Y^j s_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (Y^j s_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x_i} s_j + Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} s_j \right). \end{aligned}$$

Para determinar completamente $\nabla_X Y$ necesitamos conocer $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} s_j$, esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 4.2. Definimos los símbolos de Christoffel A_{ij}^l asociados a la conexión ∇ , relativos a la carta local $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ por:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} s_j = \sum_{l=1}^m A_{ij}^l s_l. \quad (4.2)$$

En ocasiones será conveniente considerar los símbolos de Christoffel como las entradas de una matriz $m \times m$ para cada i .

Definición 4.3. Definimos la matriz de los símbolos de Christoffel asociados a la conexión ∇ , relativos a la carta local $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ por

$$A_i := (A_{ij}^l)_{l,j=1}^m. \quad (4.3)$$

Observando desde otro punto de vista, para determinar $\nabla_X Y$ necesitamos conocer $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y$ que viene dado por los siguiente cálculos,

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\sum_{j=1}^m Y^j s_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x_i} s_j \right) + \sum_{j=1}^m \left(Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} s_j \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x_i} s_j \right) + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m A_{ij}^l Y^j s_l \\
&= \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial Y^l}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m A_{ij}^l Y^j \right) s_l.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Entonces la ecuación (4.4) en coordenadas locales se puede escribir de la forma:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i} + A_i. \tag{4.5}$$

La ecuación (4.5) depende de las cartas locales de la variedad B y define la derivada covariante para el haz vectorial $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ (ver referencia [6]).

Comentario 4.4. *Vamos a definir el corchete de Lie. Dados dos campos de vectores diferenciables X e Y sobre una variedad B , se define el **corchete de Lie** de los campos X e Y , denotado por $[X, Y]$, como el único campo de vectores que cumple:*

$$[X, Y](f) = X.(Y.(f)) - Y.(X.(f))$$

para todo $f \in C^\infty(B, \mathbb{R})$ (ver referencia [6]). Donde se observa que la notación $X.f(b)$, es definido por $X.f(b) := df(X(b))$ porque es la composición de las aplicaciones $X : B \rightarrow TB$ y $df : T_b B \rightarrow \mathbb{R}$.

Ahora requerimos definir una derivada covariante en el haz tangente de una variedad Riemanniana de tal manera que cumpla con dos condiciones adicionales a la definición de derivada covariante, en este sentido hacemos las siguientes definiciones.

Definición 4.5. *Sea B una variedad Riemanniana con métrica g .*

1. *Diremos que una derivada covariante ∇ es Riemanniana o compatible con la métrica, si para $X, Y, Z \in \Gamma(TB)$ cumple,*

$$X.g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

2. *Si para $X, Y \in \Gamma(TB)$ se cumple la siguiente propiedad,*

$$(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - [X, Y] = 0,$$

diremos que ∇ es simétrica.

Comentario 4.6. *Para el haz tangente de una variedad Riemanniana, existe una única derivada covariante compatible con la métrica y simétrica. Esta derivada es llamado la derivada covariante de **Levi-Civita** (ver referencia [6]).*

Comentario 4.7. Sea ∇ la derivada covariante de Levi-Civita. Si denotamos por $g_{ij}(b)$ a $g_b(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$, entonces los símbolos de Christoffel asociados a ∇ se pueden calcular explícitamente según la expresión:

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n g^{lr} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r} \right), \quad (4.6)$$

donde $(g^{ij})_{i,j=1}^n$ es la inversa de la matriz $(g_{ij})_{i,j=1}^n$. Además ∇ queda determinada de manera única por la ecuación (4.6) (ver referencia [6]).

Con estos dos comentarios hechos, nuestra derivada covariante de Levi-Civita, comparando con la formula (4.5) podemos escribir de la manera siguiente:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^{LC} = \frac{\partial}{\partial x_i} + A_i. \quad (4.7)$$

donde $A_i = (\Gamma_{ij}^l)_{l,j=1}^n$ y n es la dimensión de la variedad diferenciable B .

4.1.1. La derivada covariante de Levi Civita en $\mathbb{T}^2$

Recordemos que en el capítulo 1, definimos el atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ formada por cuatro cartas locales del toro $\mathbb{T}^2$. Como se puede observar en cada carta local $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ los espacios tangentes de $\mathbb{T}^2$ tiene como base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$, donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(p) &= d\varphi_\alpha^{-1}|_p(e_1) = (1, 0), \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(p) &= d\varphi_\alpha^{-1}|_p(e_2) = (0, 1), \end{aligned}$$

$\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y también definimos la métrica del toro en el Capítulo 1, dado por:

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p)\right) := \langle d\varphi_\alpha|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right), d\varphi_\alpha|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(p)\right) \rangle$$

donde $p \in \mathbb{T}^2$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la métrica usual de $\mathbb{R}^2$. Entonces haciendo un pequeño cálculo para hallar explícitamente la métrica del toro, tenemos;

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p)\right) &= \langle d\varphi_\alpha|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right), d\varphi_\alpha|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(p)\right) \rangle && \text{(definición de métrica)} \\ &= \langle d\varphi_\alpha|_p d\varphi_\alpha^{-1}|_p(e_i), d\varphi_\alpha|_p d\varphi_\alpha^{-1}|_p(e_j) \rangle \\ &= \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Por tanto, diremos que la métrica del toro definida anteriormente, es llamada la **métrica inducida de $\mathbb{R}^2$** . Luego se observa que $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$ es una base ortonormal.

Tomando como métrica para cada $p \in \mathbb{T}^2$, al espacio $T_p\mathbb{T}^2$ la métrica inducida de $\mathbb{R}^2$, podemos calcular los símbolos de Christoffel asociados a la derivada covariante de Levi-Civita según la relación (4.6).

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 g^{lr} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r} \right)$$

donde $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ y la matriz $(g^{ij})_{i,j=1}^2$ es la inversa de $(g_{ij})_{i,j=1}^2$. El cálculo es inmediato, por eso tenemos la siguiente matriz

$$(g_{ij})_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (g^{ij})_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos calcular los símbolos de Christoffel. Por lo anterior sabemos que $g_{ij} = \delta_{ij}$ son constantes entonces, $\Gamma_{ij}^l = 0$. Por tanto la relación (4.7) se vuelve en

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^{LC} = \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (4.8)$$

donde $\nabla^{LC} : \Gamma(T\mathbb{T}^2) \times \Gamma(T\mathbb{T}^2) \rightarrow \Gamma(T\mathbb{T}^2)$.

4.1.2. La derivada covariante espín sobre $\mathbb{T}^2$

En esta subsección calculamos la derivada covariante espín para nuestro haz de espín $\mathbb{C}^2 \xrightarrow{S} \xrightarrow{\frac{k}{\pi}} \mathbb{T}^2$ en cierto sentido será el “levantamiento” de la derivada covariante de Levi-Civita para el haz tangente $\mathbb{R}^2 \rightarrow T\mathbb{T}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^2$.

Pero antes queremos definir de manera general, la derivada covariante ∇^{spin} sobre $\Gamma(E)$ por un el levantamiento que es dado por el isomorfismo

$$d\lambda : T_1\text{Spin}(n) = \text{spin}(n) \rightarrow T_1SO(n) = \text{so}(n).$$

Observación 4.8. Consideremos la derivada covariante Levi-Civita ∇^{LC} y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal definida en la carta local $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= e_i \cdot g(e_j, e_k) \\ &= g(\nabla_{e_i}^{LC} e_j, e_k) + g(e_j, \nabla_{e_i}^{LC} e_k) \\ &= g\left(\sum_{l=1}^n (A_i)_j^l e_l, e_k\right) + g\left(e_j, \sum_{l=1}^n (A_i)_k^l e_l\right) \\ &= (A_i)_j^k + (A_i)_k^j \end{aligned}$$

por tanto $(A_i)_j^k = -((A_i)^t)_j^k$. Lo cual implica que $A_i \in \text{so}(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$.

Comentario 4.9. Como $\mathfrak{so}(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$, tenemos que la base del espacio vectorial $\mathfrak{so}(n)$ es formado por las matrices E_{ij} para $1 \leq i < j \leq n$ definido por:

$$E_{ij} := \begin{pmatrix} & & i & & j & & & \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & -1 & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 & & \\ 0 & \cdots & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix}.$$

Las referencias [6] y [4] afirman que el isomorfismo $(d\lambda)^{-1} : \mathfrak{so}(n) \rightarrow \mathfrak{spin}(n)$ está dado por:

$$(d\lambda)^{-1}(E_{ij}) = \frac{1}{2}e_i e_j$$

donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Además en el capítulo 2, comentario 2.17, con $n = 2$, mencionamos sobre la representación de Clifford $\gamma : \mathbb{Cl}(2) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ dado por $\gamma(e_i) := \gamma_i$, implica

$$\gamma(\frac{1}{2}e_i e_j) = \frac{1}{2}\gamma_i \gamma_j.$$

Con la Observación 4.8 y Comentario 4.9 damos la definición de la **derivada covariante espín**:

$$\nabla_{e_i}^{\text{spin}} = e_i + \gamma((d\lambda)^{-1}(A_i)) \quad (4.9)$$

donde $\nabla_{e_i}^{LC} = e_i + A_i$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal con respecto a la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Ahora para nuestro caso particular, utilizando la relación (4.9) determinamos la derivada covariante ∇^k sobre $\Gamma(S^k)$, donde S^k es el haz de espín del toro $\mathbb{T}^2$. Es decir: $\mathbb{C}^2 \xrightarrow{S^k} \mathbb{T}^2$ son los haces de espín con $k = 1, 2, 3, 4$.

Como sabemos que $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$ es una base ortonormal de $T_p \mathbb{T}^2$, entonces los símbolos de Christoffel $A_i = 0$, porque $\Gamma_{ij}^l = 0$ y $A_i = (\Gamma_{ij}^l)_{l=1}^m$. De aquí $(d\lambda)^{-1}(A_i) = (d\lambda)^{-1}(0) = 0$. Esto implica que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^{\text{spin}} = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (4.10)$$

para $k = 1, 2, 3, 4$ e $i = 1, 2$.

4.2. El operador de Dirac

Estamos ahora en posición de definir el operador de Dirac que es el principal objeto de esta sección. Sea el haz de espín $\mathbb{C}^2 \rightarrow \overset{k}{S} \overset{k}{\pi} \mathbb{T}^2$ sobre cuyas secciones actuará ese operador.

Definición 4.10. Llamaremos *operador de Dirac sobre $\mathbb{T}^2$* al operador diferencial de primer orden $\overset{k}{D}: \Gamma\left(\overset{k}{S}\right) \rightarrow \Gamma\left(\overset{k}{S}\right)$ dado por

$$\sigma \mapsto \overset{k}{D} \sigma := \sum_{j=1}^2 \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}^{\text{spin}} \sigma,$$

donde $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$ es la base ortonormal canónica en $T\mathbb{T}^2$ y $\gamma: T_b\mathbb{T}^2 \rightarrow \text{End}(\pi^{-1}(b)) \cong M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ es la aplicación lineal definida por $\gamma(\frac{\partial}{\partial x_1}) := \gamma_1$, $\gamma(\frac{\partial}{\partial x_2}) := \gamma_2$ con las matrices γ_1 y γ_2 definida en el Comentario 2.17 tal que

$$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = -I_2, \quad \gamma_1 \gamma_2 = -\gamma_2 \gamma_1,$$

donde I_2 es la matriz identidad 2×2 .

Observemos con detalle a este operador. Lo que se quiere hallar es el operador de Dirac sobre $\mathbb{T}^2$ de forma explícita definida sobre cada $\Gamma\left(\overset{k}{S}\right)$ con $k = 1, 2, 3, 4$. Entonces para esto usamos la carta (U_1, φ_1) , con $\varphi_1(U_1) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Como sabemos que $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$ es una base ortonormal, entonces vamos a obtener cuatro operadores de Dirac ($k=1,2,3,4$),

$$\overset{k}{D} = \sum_{j=1}^2 \gamma_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}^{\text{spin}}$$

Por la relación (4.10) tenemos $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}^{\text{spin}} = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Además también definimos en el Comentario 2.17 que

$$\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces nuestro operador es visto explícitamente:

$$\begin{aligned} \overset{k}{D} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Luego observamos por el momento que $\overset{k}{D}$ está definido sobre las secciones locales diferenciables de $\overset{k}{\hat{\pi}^{-1}}(U_1) \cong \varphi_1(U_1) \times \mathbb{C}^2$, donde $\Gamma^{(1)}\left(\overset{k}{\hat{\pi}^{-1}}(U_1)\right) \cong \{f : \varphi_1(U_1) \rightarrow \mathbb{C}^2 : f \text{ es diferenciable}\}$. Observemos también que

$$\Gamma\left(\overset{k}{S}\right) \cong \Gamma\left(\overset{k}{S_+}\right) \oplus \Gamma\left(\overset{k}{S_+}\right) \cong \hat{C}\left(\overset{k}{S_+}\right) \oplus \hat{C}\left(\overset{k}{S_+}\right)$$

(por Teorema 3.16 y $\overset{k}{S} = \overset{k}{S_+} \oplus \overset{k}{S_+}$). Sobre la restricción de $\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \in \hat{C}\left(\overset{k}{S_+}\right) \oplus \hat{C}\left(\overset{k}{S_+}\right)$ al abierto $\varphi_1(U_1) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, el operador de Dirac está dado por (ver Teorema 3.16 y la ecuación (4.11)):

$$\begin{aligned} \overset{k}{D} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1} + i \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + i \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Observemos además que $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ es denso. Por continuidad podemos extender la formula (4.12) del operador de Dirac a las fronteras. Entonces

$$\overset{k}{D} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1} + i \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + i \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

para todas las secciones diferenciables $\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \in \hat{C}\left(\overset{k}{S_+}\right) \oplus \hat{C}\left(\overset{k}{S_+}\right)$, $k = 1, 2, 3, 4$. Con esto estamos diciendo que los cuatro operadores de Dirac están definidas de manera global sobre todo el toro $\mathbb{T}^2$ y la expresión no depende de k .

EL ESPECTRO DEL OPERADOR DE DIRAC DEL TORO $\mathbb{T}^2$

En este capítulo vamos a determinar los valores propios del operador de Dirac $\overset{k}{D}$. Este operador de Dirac está definida en el espacio de todas las funciones diferenciales con condición de frontera denotado por $\hat{C}^{(1)}\left(\overset{k}{S}\right) := \{f \in \hat{C}\left(\overset{k}{S}\right) : f \text{ es diferenciable}\}$.

Vamos a desarrollar este capítulo en dos secciones: En la primera sección, nos enfocamos en determinar una base ortonormal del dominio del operador de Dirac $\overset{k}{D}$ de tal manera que los conceptos de separable, densamente definido, adjunta y autoadjunta tenga alguna relación para obtener las hipótesis de resultados ya demostrados en los libros de referencia [4] y [7]. Se trata de concluir que la clausura del operador $\overset{k}{D}$ es autoadjunta. A partir de aquí, empezamos la segunda sección, que se trata sobre los espectros de las clausuras denotado por $\overline{\overset{k}{D}}$ de los operadores de Dirac $\overset{k}{D}$ con la finalidad de poder encontrar explícitamente todos los espectros de cada operador de Dirac que tenemos. Luego demostramos que hay tres espectros distintos de los cuatro que encontremos. Por último al final del capítulo concluimos que el espectro del operador de Dirac sobre el toro realmente depende de la estructura espín.

Por otro lado, podemos comentar que todo lo que se afirme sobre el haz de espín $\overset{k}{S}_+$ también de manera análoga se afirma para el haz de espín $\overset{k}{S}_-$. Por ejemplo si afirmamos que el espacio $\hat{C}\left(\overset{k}{S}_+\right)$ es denso en $L_2\left(\overset{k}{S}_+\right)$, entonces sin dar mucho énfasis estaremos automáticamente suponiendo que el espacio $\hat{C}\left(\overset{k}{S}_-\right)$ es denso en $L_2\left(\overset{k}{S}_-\right)$. La razón es, porque los haces de espín $\overset{k}{S}_+$ y $\overset{k}{S}_-$ son isomorfos y triviales.

5.1. La clausura del operador de Dirac $\overset{k}{D}$ es autoadjunto en $L_2(\overset{k}{S})$

En esta sección vamos a determinar el dominio del operador de Dirac $\overset{k}{D}$ de tal manera que la clausura del operador $\overset{k}{D}$, denotado por $\overline{\overset{k}{D}}$, sea autoadjunto. Primero podemos empezar definiendo $L_2\left(\overset{k}{S}_+\right)$.

Definición 5.1. Para funciones $f, g \in \hat{C}\left(\overset{k}{S}_+\right)$, definimos un producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x_1, x_2) \overline{g(x_1, x_2)} dx_1 dx_2, \quad (5.1)$$

donde $dx_1 dx_2$ es la medida de Lebesgue (medida usual), y denotamos por $L_2\left(\overset{k}{S}_+\right)$ la completación (métrica) de $\hat{C}\left(\overset{k}{S}_+\right)$ con respecto a la norma $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

La noción de *completación* se puede consultar en la referencia [7].

Observación 5.2. Por la Definición 3.14 para $k = 1$ y la definición de $\tilde{\Omega}$ en el Lema 3.12 tenemos $\hat{C}\left(\overset{1}{S}_+\right) = \tilde{\Omega}$. Además por el Lema 3.12 tenemos $\tilde{\Omega} \cong C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$. Entonces afirmamos que $\hat{C}\left(\overset{1}{S}_+\right) \cong C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$.

Ahora definiremos cuando un espacio de Hilbert es separable.

Definición 5.3. Un espacio de Hilbert H se dice **separable** si admite una base ortonormal numerable.

Comentario 5.4. Las funciones $e_{nm} : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por

$$e_{nm}(x_1, x_2) := e^{2\pi i(n x_1 + m x_2)} \quad (5.2)$$

forman una base ortonormal numerable $\{e_{nm} : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$ del espacio $L_2\left(\overset{1}{S}_+\right)$ (donde $L_2\left(\overset{1}{S}_+\right)$ es la completación de $\hat{C}\left(\overset{1}{S}_+\right)$ es decir, $L_2\left(\overset{1}{S}_+\right) = \overline{\hat{C}\left(\overset{1}{S}_+\right)}$ y haciendo la

siguiente definición $L_2\left(\hat{S}_+\right) := L_2\left([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\right)$. En efecto:

$$\langle e_{nm}, e_{pq} \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e_{nm}(x_1, x_2) \overline{e_{pq}(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 \quad (\text{por (5.1)})$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i(n x_1 + m x_2)} e^{-2\pi i(p x_1 + q x_2)} dx_1 dx_2 \quad (\text{por (5.2)})$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i((n-p)x_1 + (m-q)x_2)} dx_1 dx_2$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{si } n = p \text{ y } m = q; \\ 0, & \text{si } n \neq p \text{ o } m \neq q. \end{cases}$$

y además el conjunto $\{e_{nm} : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$ es completo, ver la referencia [3]. Por tanto $L_2\left(\hat{S}_+\right)$ es un espacio separable.

Observación 5.5. Para cada $k = 1, 2, 3, 4$, consideremos $\hat{C}\left(\hat{S}_+\right)$ como un espacio lineal con producto interno definido en la relación (5.1). Definimos los isomorfismos lineales por las aplicaciones $\Upsilon^k: \hat{C}\left(\hat{S}_+\right) \rightarrow \hat{C}\left(\hat{S}_+\right)$ definidos por

$$\Upsilon^k(f)(x_1, x_2) := f(x_1, x_2) e^{2\pi i(\epsilon_1^k x_1 + \epsilon_2^k x_2)} \quad (5.3)$$

con inverso $\Upsilon^{k-1}: \hat{C}\left(\hat{S}_+\right) \rightarrow \hat{C}\left(\hat{S}_+\right)$ dado por

$$\Upsilon^{k-1}(g)(x_1, x_2) := g(x_1, x_2) e^{-2\pi i(\epsilon_1^k x_1 + \epsilon_2^k x_2)} \quad (5.4)$$

para cada $(x_1, x_2) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Como $|e^{2\pi i(\epsilon_1^k x_1 + \epsilon_2^k x_2)}| = 1$, es claro que

$$\begin{aligned} \langle \Upsilon^k(f), \Upsilon^k(f) \rangle &= \langle f, f \rangle \quad y \\ \langle \Upsilon^{k-1}(g), \Upsilon^{k-1}(g) \rangle &= \langle g, g \rangle, \end{aligned}$$

lo que verifica que Υ^k es un isomorfismo lineal. Como $\hat{C}\left(\hat{S}_+\right) \subset \overline{\hat{C}\left(\hat{S}_+\right)} = L_2\left(\hat{S}_+\right)$ es denso y Υ^k es un isomorfismo lineal, podemos extender Υ^k a un operador lineal que también es un isomorfismo (denotado por el mismo símbolo)

$$\Upsilon^k: L_2\left(\hat{S}_+\right) \rightarrow L_2\left(\hat{S}_+\right).$$

Entonces

$$L_2\left(\overset{\hat{1}}{S}_+\right) \cong L_2\left(\overset{\hat{2}}{S}_+\right) \cong L_2\left(\overset{\hat{3}}{S}_+\right) \cong L_2\left(\overset{\hat{4}}{S}_+\right).$$

Como $\{e_{nm} : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$ es una base ortonormal de $L_2\left(\overset{\hat{1}}{S}_+\right)$, entonces obtenemos que $\{\Psi_k^{n,m} : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$ es una base ortonormal para $L_2\left(\overset{\hat{k}}{S}_+\right)$, donde $\Psi_k^{n,m} := \Upsilon^k(e_{nm})$ con $k = 1, 2, 3, 4$. Sin embargo observando las relaciones (5.2) y (5.3) tenemos

$$\Psi_k^{n,m}(x_1, x_2) = e^{2\pi i((n+\overset{k}{\epsilon}_1)x_1 + (m+\overset{k}{\epsilon}_2)x_2)}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (5.5)$$

Sabemos que $\Gamma\left(\overset{k}{S}\right) \cong \hat{C}\left(\overset{k}{S}_+\right) \oplus \hat{C}\left(\overset{k}{S}_-\right)$ por la relación (2.12) y Teorema 3.16. Entonces hacemos la siguiente observación.

Observación 5.6. Definimos un producto interno en $\hat{C}\left(\overset{k}{S}_+\right) \oplus \hat{C}\left(\overset{k}{S}_-\right)$ por

$$\langle (f_1, f_2), (g_1, g_2) \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle + \langle g_1, g_2 \rangle,$$

para $(f_1, f_2), (g_1, g_2) \in \hat{C}\left(\overset{k}{S}_+\right) \oplus \hat{C}\left(\overset{k}{S}_-\right)$ y denotamos la completación por $L_2\left(\overset{k}{S}\right)$. Como $\hat{C}\left(\overset{k}{S}_+\right) \oplus \hat{C}\left(\overset{k}{S}_-\right)$ es suma ortogonal, entonces tenemos

$$\begin{aligned} L_2\left(\overset{k}{S}\right) &:= \overline{\hat{C}\left(\overset{k}{S}_+\right) \oplus \hat{C}\left(\overset{k}{S}_-\right)} \\ &= \overline{\hat{C}\left(\overset{k}{S}_+\right)} \oplus \overline{\hat{C}\left(\overset{k}{S}_-\right)} \\ &= L_2\left(\overset{k}{S}_+\right) \oplus L_2\left(\overset{k}{S}_-\right). \end{aligned}$$

En la siguiente observación vamos a definir los dominios de nuestros operadores de Dirac.

Observación 5.7. Como el operador de Dirac $\overset{k}{D}$ es un operador diferencial de primer orden, entonces definimos el dominio $\hat{C}^{(1)}\left(\overset{k}{S}_+\right) := \{f \in \hat{C}\left(\overset{k}{S}_+\right) : f \text{ es diferenciable}\}$ del operador $\overset{k}{D}$ por las secciones diferenciables, donde $\overset{k}{D} : \hat{C}^{(1)}\left(\overset{k}{S}_+\right) \oplus \hat{C}^{(1)}\left(\overset{k}{S}_-\right) \subset L_2\left(\overset{k}{S}\right) \rightarrow L_2\left(\overset{k}{S}\right)$ es dado por

$$\overset{k}{D} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{\partial s_2}{\partial x_1} + i \frac{\partial s_2}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial s_1}{\partial x_1} + i \frac{\partial s_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Además sabemos que $\Psi_k^{n,m} \in \hat{C}^{(1)} \left(\begin{smallmatrix} k \\ S_+ \end{smallmatrix} \right)$ entonces $\hat{C}^{(1)} \left(\begin{smallmatrix} k \\ S_+ \end{smallmatrix} \right)$ es denso en $L_2 \left(\begin{smallmatrix} k \\ S_+ \end{smallmatrix} \right)$, lo cual implica que el dominio del operador de Dirac $\hat{C}^{(1)} \left(\begin{smallmatrix} k \\ S_+ \end{smallmatrix} \right) \oplus \hat{C}^{(1)} \left(\begin{smallmatrix} k \\ S_- \end{smallmatrix} \right)$ es denso en el espacio $L_2 \left(\begin{smallmatrix} k \\ S \end{smallmatrix} \right) = L_2 \left(\begin{smallmatrix} k \\ S_+ \end{smallmatrix} \right) \oplus L_2 \left(\begin{smallmatrix} k \\ S_- \end{smallmatrix} \right)$.

Las siguientes definiciones sobre operadores adjuntos, autoadjuntos y clausura podemos ver en el libros de referencia [3] y [7].

Definición 5.8. Sea $T : \mathfrak{D}(T) \rightarrow H$ (posiblemente no acotada) un operador lineal definido densamente en un espacio de Hilbert H . Entonces el operador **adjunta** $T^* : \mathfrak{D}(T^*) \rightarrow H$ de T es definido de la siguiente manera: El dominio $\mathfrak{D}(T^*)$ de T^* consiste, para cada $y \in H$ tal que existe un $y^* \in H$ que satisface;

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, y^* \rangle \quad (5.7)$$

para todo $x \in \mathfrak{D}(T)$. Para cada $y \in \mathfrak{D}(T^*)$ el operador **adjunto** T^* es entonces definido en términos de y^* por

$$y^* = T^*y. \quad (5.8)$$

Definición 5.9. Sea $T : \mathfrak{D}(T) \rightarrow H$ un operador lineal y densamente definido en un espacio de Hilbert H . Entonces T es llamado operador lineal **autoadjunto** si

$$T = T^* \quad (5.9)$$

Observación 5.10. Sea $T : \mathfrak{D}(T) \rightarrow H$ un operador lineal densamente definido y simétrico, es decir,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

para todo $x, y \in \mathfrak{D}(T)$. Supongamos que $\{e_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{D}(T)$ es una base ortonormal de H que consiste de vectores propios de T , es decir, existen $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$Te_k = \lambda_k e_k.$$

Definimos $\mathfrak{D}(\bar{T}) := \{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |\alpha_k|^2 < \infty\}$, con $\alpha_k \in \mathbb{C}$ y el operador $\bar{T} : \mathfrak{D}(\bar{T}) \rightarrow H$, definido por

$$\bar{T} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \lambda_k e_k.$$

Se verifica que $\bar{T}^* = \bar{T}$. Llamaremos a $\bar{T}$ la **clausura** de T .

Comentario 5.11. Por la Observación 5.7 tenemos que el dominio del operador de Dirac $\overset{k}{D}$ es densamente definido en el espacio de Hilbert $L_2(\overset{k}{S})$. Luego tenemos la siguiente afirmación: Sea $\overset{k}{D}$ un operador de Dirac sobre la variedad compacta $\mathbb{T}^2$. Entonces la clausura $\overline{\overset{k}{D}}$ es un operador autoadjunto, es decir $\overline{\overset{k}{D}} = \overset{k}{D}^*$, ver referencia [4].

5.2. Cálculo del espectro de Dirac $\overset{k}{D}$

Ahora nuestro objetivo es encontrar el espectro de Dirac $\overline{\overset{k}{D}}$ para cada $k = 1, 2, 3, 4$. Primero definiremos el conjunto resolvente y el espectro de un operador autoadjunto de manera general.

Definición 5.12. Sea $T : \mathfrak{D}(T) \subset H \rightarrow H$ un operador autoadjunto.

(a) El **conjunto resolvente** $\rho(T)$ está definido por

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \in B(H)\}. \quad (5.10)$$

donde $B(H) := \{A : H \rightarrow H : A \text{ es acotado}\}$ denota el conjunto de todos los operadores acotados.

(b) El **espectro** de T está definido por

$$\text{Spec}(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T). \quad (5.11)$$

Observación 5.13. Supongamos que existe una base ortonormal $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ de H y números reales $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que $Te_n = \lambda_n e_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$. Observamos que $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene punto de acumulación en $\mathbb{C}$, luego para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$,

$$m(\lambda) := \sup\{|\frac{1}{\lambda_n - \lambda}| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Definimos un operador $R_\lambda : B(H) \rightarrow B(H)$ por

$$R_\lambda(e_n) := \frac{1}{\lambda_n - \lambda} e_n. \quad (5.12)$$

Como

$$\begin{aligned} \|R_\lambda(\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n)\|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |\frac{1}{\lambda_n - \lambda}|^2 |\alpha_n|^2 \\ &\leq m(\lambda)^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^2 \\ &= m(\lambda)^2 \|\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n\|^2, \end{aligned}$$

para todo $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n \in H$ entonces tenemos $\|R_\lambda\| \leq m(\lambda)$, en particular $R_\lambda \in B(H)$. Además

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)R_\lambda(\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n - \lambda) \frac{1}{(\lambda_n - \lambda)} \alpha_n e_n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n \end{aligned}$$

para todo $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n \in H$ y

$$\begin{aligned} R_\lambda(T - \lambda I)(\sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n e_n) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(\lambda_n - \lambda)} (\lambda_n - \lambda) \beta_n e_n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n e_n \end{aligned}$$

para $\sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n e_n \in \mathfrak{D}(T) \subset H$ entonces $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$, por tanto $\lambda \in \rho(T) = \mathbb{C} \setminus \text{Spec}(T)$. Esto implica $\text{Spec}(T) \subset \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por otro lado, tenemos $(T - \lambda_n I)e_n = 0$ entonces $\ker(T - \lambda_n I) \neq \{0\}$ y por lo tanto $T - \lambda_n I$ no tiene inverso. Entonces $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \text{Spec}(T)$, luego

$$\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} = \text{Spec}(T).$$

Proposición 5.14. Sea $\Psi_k^{n,m}(x_1, x_2)$ para todo $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ como en la ecuación 5.5. Entonces

$$\overset{k}{\mathcal{B}} := \{(\Psi_k^{n,m}, 0), (0, \Psi_k^{n,m}) : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\} \quad (5.13)$$

es una base ortonormal de $L_2 \left(\overset{k}{S} \right) = L_2 \left(\overset{k}{S}_+ \right) \oplus L_2 \left(\overset{k}{S}_- \right)$.

Demostración. Utilizando el Comentario 5.4 y las Observaciones 5.5 y 5.6 concluimos que $\overset{k}{\mathcal{B}}$ es una base para $L_2 \left(\overset{k}{S} \right)$. $\square$

Comentario 5.15. Tomando en cuenta la afirmación del Comentario 5.11, con un abuso de notación, vamos a escribir a partir de ahora $\overset{k}{D}$ en vez de $\overset{k}{\overline{D}}$.

Ahora estamos listos para calcular el espectro del operador de Dirac $\overset{k}{D}$. Definimos $\overset{k}{B}_{nm} := \text{gen}\{(\Psi_k^{n,m}, 0), (0, \Psi_k^{n,m})\}$ para $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ fijo. Sea $\overset{k}{X} \in \overset{k}{B}_{nm}$, entonces existe $\overset{k}{\alpha}, \overset{k}{\beta} \in \mathbb{C}$ tal que:

$$\overset{k}{X}_{nm}(x_1, x_2) = \overset{k}{\alpha} (\Psi_k^{n,m}, 0) + \overset{k}{\beta} (0, \Psi_k^{n,m})$$

para $k = 1, 2, 3, 4$, donde $\Psi_k^{n,m}(x_1, x_2) = e^{2\pi i((n + \overset{k}{\epsilon}_1)x_1 + (m + \overset{k}{\epsilon}_2)x_2)}$. Luego,

$$\begin{aligned} \overset{k}{D} \big|_{\overset{k}{B}_{nm}} (\overset{k}{X}_{nm}) &= \overset{k}{D} \left(\overset{k}{\alpha} (\Psi_k^{n,m}, 0) + \overset{k}{\beta} (0, \Psi_k^{n,m}) \right) \\ &= \overset{k}{\alpha} \overset{k}{D} ((\Psi_k^{n,m}, 0)) + \overset{k}{\beta} \overset{k}{D} ((0, \Psi_k^{n,m})) \\ &= \overset{k}{\alpha} \left(0, -\frac{\partial \Psi_k^{n,m}}{\partial x_1} + i \frac{\partial \Psi_k^{n,m}}{\partial x_2} \right) + \overset{k}{\beta} \left(\frac{\partial \Psi_k^{n,m}}{\partial x_1} + i \frac{\partial \Psi_k^{n,m}}{\partial x_2}, 0 \right) \\ &= \overset{k}{\alpha} (-2\pi i(n + \overset{k}{\epsilon}_1) + 2\pi(m + \overset{k}{\epsilon}_2)) (0, \Psi_k^{n,m}) + \overset{k}{\beta} (2\pi i(n + \overset{k}{\epsilon}_1) - 2\pi(m + \overset{k}{\epsilon}_2)) (\Psi_k^{n,m}, 0) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2\pi(i(n + \overset{k}{\epsilon}_1) - (m + \overset{k}{\epsilon}_2)) \\ -2\pi(i(n + \overset{k}{\epsilon}_1) + (m + \overset{k}{\epsilon}_2)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{k}{\alpha} \Psi_k^{n,m} \\ \overset{k}{\beta} \Psi_k^{n,m} \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\overset{k}{D}: \overset{k}{B}_{nm} \rightarrow \overset{k}{B}_{nm}$ y en la base de $\overset{k}{B}_{nm}$ nuestro operador de Dirac está dado por multiplicación con la matriz antisimétrica:

$$\overset{k}{D} \big|_{\overset{k}{B}_{nm}} = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi(i(n + \overset{k}{\epsilon}_1) - (m + \overset{k}{\epsilon}_2)) \\ -(2\pi(i(n + \overset{k}{\epsilon}_1) + (m + \overset{k}{\epsilon}_2))) & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces los **valores propios** de la restricción $\overset{k}{D} \big|_{\overset{k}{B}_{nm}}$ del operador de Dirac $\overset{k}{D}$ están dados por $(\lambda_{nm}^\pm)^2 - 4\pi^2|i(n + \overset{k}{\epsilon}_1) + (m + \overset{k}{\epsilon}_2)|^2 = 0$, es decir

$$\lambda_{nm}^\pm = \pm 2\pi \sqrt{(n + \overset{k}{\epsilon}_1)^2 + (m + \overset{k}{\epsilon}_2)^2},$$

para $k = 1, 2, 3, 4$. Esto implica que los valores propios de:

$$\overset{1}{D} \big|_{\overset{1}{B}_{nm}} \text{ son } \lambda_{nm}^\pm = \pm 2\pi \sqrt{n^2 + m^2}, \text{ donde } k = 1 \text{ corresponde } \epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = 0.$$

$$\overset{2}{D} \big|_{\overset{2}{B}_{nm}} \text{ son } \lambda_{nm}^\pm = \pm 2\pi \sqrt{n^2 + (m + \frac{1}{2})^2}, \text{ donde } k = 2 \text{ corresponde } \overset{2}{\epsilon}_1 = 0, \overset{2}{\epsilon}_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\overset{3}{D} \big|_{\overset{3}{B}_{nm}} \text{ son } \lambda_{nm}^\pm = \pm 2\pi \sqrt{((n + \frac{1}{2})^2 + m^2)}, \text{ donde } k = 3 \text{ corresponde } \overset{3}{\epsilon}_1 = \frac{1}{2}, \overset{3}{\epsilon}_2 = 0.$$

$$\overset{4}{D} \big|_{\overset{4}{B}_{nm}} \text{ son } \lambda_{nm}^\pm = \pm 2\pi \sqrt{((n + \frac{1}{2})^2 + (m + \frac{1}{2})^2)}, \text{ donde } k = 4 \text{ corresponde } \overset{4}{\epsilon}_1 = \frac{1}{2}, \overset{4}{\epsilon}_2 = \frac{1}{2}.$$

Un **vector propio** normalizado correspondiente a $\lambda_{nm}^+ = +2\pi \sqrt{(n + \overset{k}{\epsilon}_1)^2 + (m + \overset{k}{\epsilon}_2)^2}$ es determinado por

$$U_{nm}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{(n + \overset{k}{\epsilon}_1)i - (m + \overset{k}{\epsilon}_2)}{\sqrt{(n + \overset{k}{\epsilon}_1)^2 + (m + \overset{k}{\epsilon}_2)^2}} \Psi_k^{n,m}, 1 \Psi_k^{n,m} \end{pmatrix}.$$

Un **vector propio** normalizado correspondiente a $\lambda_{nm}^- = -2\pi \sqrt{(n + \overset{k}{\epsilon}_1)^2 + (m + \overset{k}{\epsilon}_2)^2}$ es determinado por

$$U_{nm}^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{-(n + \overset{k}{\epsilon}_1)i + (m + \overset{k}{\epsilon}_2)}{\sqrt{(n + \overset{k}{\epsilon}_1)^2 + (m + \overset{k}{\epsilon}_2)^2}} \Psi_k^{n,m}, 1 \Psi_k^{n,m} \end{pmatrix}.$$

Para afirmar con precisión sobre los vectores propios y valores propio enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 5.16. *Los vectores $\overset{k}{U}^\pm_{nm}$ son vectores propios de $\overset{k}{D}$ con valores propios $\overset{k}{\lambda}^\pm_{nm} \in \mathbb{R}$, es decir*

$$\overset{k}{D} \big|_{\overset{k}{B}_{nm}} \left(\overset{k}{U}^\pm_{nm} \right) = \overset{k}{\lambda}^\pm_{nm} \left(\overset{k}{U}^\pm_{nm} \right)$$

para $k = 1, 2, 3, 4$. Además, $\left\{ \overset{k}{U}^+_{nm}, \overset{k}{U}^\pm_{nm} : (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$ es una base ortonormal de $L_2 \left(\overset{k}{S} \right)$. Luego el espectro está dado por

$$\text{Spec} \left(\overset{k}{D} \right) = \left\{ \pm 2\pi \sqrt{(n + \overset{k}{\epsilon}_1)^2 + (m + \overset{k}{\epsilon}_2)^2} : (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \overset{k}{D} \big|_{\overset{k}{B}_{nm}} \left(\overset{k}{U}^+_{nm} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 2\pi(i(n + \overset{k}{\epsilon}_1) - (m + \overset{k}{\epsilon}_2)) \\ -2\pi(i(n + \overset{k}{\epsilon}_1) + (m + \overset{k}{\epsilon}_2)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(n + \overset{k}{\epsilon}_1)i - (m + \overset{k}{\epsilon}_2)}{\sqrt{(n + \overset{k}{\epsilon}_1)^2 + (m + \overset{k}{\epsilon}_2)^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \Psi_k^{n,m} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\pi(i(n + \overset{k}{\epsilon}_1) - (m + \overset{k}{\epsilon}_2)) \\ \frac{2\pi((n + \overset{k}{\epsilon}_1)^2 + (m + \overset{k}{\epsilon}_2)^2)}{\sqrt{(n + \overset{k}{\epsilon}_1)^2 + (m + \overset{k}{\epsilon}_2)^2}} \end{pmatrix} \Psi_k^{n,m} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\pi(i(n + \overset{k}{\epsilon}_1) - (m + \overset{k}{\epsilon}_2)) \\ 2\pi \sqrt{(n + \overset{k}{\epsilon}_1)^2 + (m + \overset{k}{\epsilon}_2)^2} \end{pmatrix} \Psi_k^{n,m} \\ &= +2\pi \sqrt{(n + \overset{k}{\epsilon}_1)^2 + (m + \overset{k}{\epsilon}_2)^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{(n + \overset{k}{\epsilon}_1)i - (m + \overset{k}{\epsilon}_2)}{\sqrt{(n + \overset{k}{\epsilon}_1)^2 + (m + \overset{k}{\epsilon}_2)^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \Psi_k^{n,m} \\ &= \overset{k}{\lambda}^+_{nm} \overset{k}{U}^+_{nm}. \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene, $\overset{k}{D} \big|_{\overset{k}{B}_{nm}} \left(\overset{k}{U}^-_{nm} \right) = \overset{k}{\lambda}^-_{nm} \overset{k}{U}^-_{nm}$.

Como $\overset{k}{D} : \overset{k}{B}_{nm} \rightarrow \overset{k}{B}_{nm}$ es simétrico y $\overset{k}{\lambda}^+_{nm} \neq \overset{k}{\lambda}^-_{nm}$, concluimos que $\overset{k}{U}^+_{nm} \perp \overset{k}{U}^-_{nm}$ (ortogonal), en particular, $\{\overset{k}{U}^+_{nm}, \overset{k}{U}^-_{nm}\}$ es linealmente independiente. Luego $\dim(\overset{k}{B}_{nm}) = 2 = \dim(\text{gen}\{\overset{k}{U}^+_{nm}, \overset{k}{U}^-_{nm}\})$, entonces $\{\overset{k}{U}^+_{nm}, \overset{k}{U}^-_{nm}\}$ es una base ortonormal de $\overset{k}{B}_{nm}$. Ya que $\overset{k}{B}_{nm} = \text{gen}\{\overset{k}{U}^+_{nm}, \overset{k}{U}^-_{nm}\} = \text{gen}\{(\Psi_k^{n,m}, 0), (0, \Psi_k^{n,m})\}$ y $\overset{k}{B}_{nm} \perp \overset{k}{B}_{jl}$ si $(n, m) \neq (j, l)$, entonces $\{\overset{k}{U}^+_{nm}, \overset{k}{U}^-_{nm} : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$ es un sistema ortonormal en $L_2 \left(\overset{k}{S} \right)$.

Como el sistema ortonormal $\{(\Psi_k^{n,m}, 0) : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\} \cup \{(0, \Psi_k^{n,m}) : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$ es completo en $L_2 \left(\overset{k}{S} \right) = L_2 \left(\overset{k}{S}_+ \right) \oplus L_2 \left(\overset{k}{S}_+ \right)$ y $(\Psi_k^{n,m}, 0), (0, \Psi_k^{n,m}) \in \text{gen}\{\overset{k}{U}^+_{nm}, \overset{k}{U}^-_{nm} : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$ concluimos que el sistema ortonormal $\{\overset{k}{U}^+_{nm}, \overset{k}{U}^-_{nm} : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$ es completo, por lo tanto es una base de $L_2 \left(\overset{k}{S} \right)$.

Finalmente observamos que $\lim_{(n,m) \rightarrow \infty} |\lambda_{nm}^{\pm}| = \infty$. Por la observación 5.13 concluimos que

$$\text{Spec} \left(\overset{k}{D} \right) = \left\{ \lambda_{nm}^{\pm} : (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

□

Comentario 5.17. *El espectro para $k = 2$ y $k = 3$ son iguales es decir; $\text{Spec} \left(\overset{2}{D} \right) = \text{Spec} \left(\overset{3}{D} \right)$ porque $\lambda_{nm}^{\pm} = \lambda_{mn}^{\pm}$. Pero para $k = 1, 2, 4$ los espectros son distintos, su prueba esta en el proximo corolario.*

Corolario 5.18. $\text{Spec} \left(\overset{1}{D} \right)$, $\text{Spec} \left(\overset{2}{D} \right)$ y $\text{Spec} \left(\overset{4}{D} \right)$ son diferentes.

Demostración. Para la prueba determinemos $\min\{|\lambda_{nm}^{\pm}| : n, m \in \mathbb{Z}\}$. Haciendo un cálculo inmediato, tenemos

$$\begin{aligned} \min\{|\lambda_{nm}^{\pm}| : n, m \in \mathbb{Z}\} &= \lambda_{00}^+ = 0 && \text{autovalor cero.} \\ \min\{|\lambda_{nm}^{\pm}| : n, m \in \mathbb{Z}\} &= \lambda_{00}^+ = \pi. \\ \min\{|\lambda_{nm}^{\pm}| : n, m \in \mathbb{Z}\} &= \lambda_{00}^+ = \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

Se observa que el mínimo de los tres espectros son distintos, por tanto $\text{Spec} \left(\overset{1}{D} \right)$, $\text{Spec} \left(\overset{2}{D} \right)$ y $\text{Spec} \left(\overset{4}{D} \right)$ son diferentes. □

CONCLUSIÓN

En el capítulo 2 construimos cuatro estructuras espín para el toro plano $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ y en la sección 3.4 demostramos que los cuatro haces de espín correspondientes a las estructuras espín son triviales, en particular son isomorfas. Además el operador de Dirac en coordenadas locales construido en la sección 4.2 tiene la misma expresión para las cuatro estructuras espín. Sin embargo, en la sección 5.2 demostramos que los espectros de los operadores de Dirac $\overset{1}{D}$, $\overset{2}{D}$ y $\overset{4}{D}$ son diferentes. Por lo tanto podemos concluir que el espectro del operador de Dirac depende de la estructura espín.

Bibliografia

- [1] BÄR, CHRISTIAN: *Dependence of the Dirac spectrum on the Spin structure*. Global analysis and harmonic analysis (Marseille-Luminy, 1999), p. 17 - 33, Sémin. Congr., 4, Soc. Math. France, Paris, 2000.
- [2] CHAVEL, ISAAC: *Eigenvalues in Riemannian geometry*. Pure and Applied Mathematics, 115. Academic Press, Inc., Orlando, 1984.
- [3] CONWAY, JOHN B: *A Course in Functional Analysis*. Graduate Studies in Mathematics 141, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [4] FRIEDRICH, THOMAS: *Dirac Operators in Riemannian Geometry*. Graduate Studies in Mathematics, 25. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [5] FRIEDRICH, THOMAS: *Zur Abhängigkeit des Dirac-Operators von der Spin-Struktur*. Colloquium Mathematicum. 48 (1984), p. 57 - 62.
- [6] JOST, JÜRGEN: *Riemannian Geometric Analysis*. Universitext, Springer, Heidelberg, 2011.
- [7] KREYSZIG, ERWIN: *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library, New York, 1978.
- [8] LEE, JEFFREY M: *Manifolds and Differential Geometry*. Graduate Studies in Mathematics Volume 107, America Mathematical Society, Providence RI, 2009 .
- [9] LAWSON, HERBERT B. AND MICHELSON, MARIE L.: *Spin Geometry*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.
- [10] LOPES DE LIMA, LEVI: *The index formula for Dirac operators: an introduction*. Publicações Matemáticas do IMPA, Rio de Janeiro, 2003.
- [11] MILNOR, JOHN W. AND STASHEFF, JAMES: *Characteristic Classes*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1974.

- [12] NAKAHARA, MIKIO: *Geometry, Topology and Physics*. Graduate Student Series in Physics, Brinstol, 2003.
- [13] PERDIGAO DO CARMO, MANFREDO: *Geometria riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.