



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO- MATEMÁTICAS
Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

Crisis de Fundamentos en la Matemática

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Cs. Físico-Matemáticas

PRESENTA:

Antón Hiquingare Valdes Gómez

DIRECTOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias Matemáticas Educativa Armando Sepúlveda
López

Morelia, Michoacán, Julio de 2014.

Índice general

Resumen	I
Abstract	II
Presentación	1
A modo de preámbulo	1
Objetivos del trabajo	2
Justificación	3
1. Introducción	5
1.1. Sobre los fundamentos	6
2. Dos primeras crisis de fundamentos	11
2.1. La crisis pitagórica	11
2.1.1. Los inconmensurables	12
2.1.2. La definicióón de proporcionalidad	15
2.1.3. El Método de exhaustión	17
2.2. La crisis euclideana	21
2.2.1. EL problema del quinto postulado	21

2.2.2.	Una “demostración” indirecta	25
2.2.3.	Esbozo histórico después de Saccheri	33
2.2.4.	Consistencia, modelos y la aceptación de nuevas geometrías	36
2.2.5.	Una nueva axiomatización de la Geometría	42
2.2.6.	Conclusión	46
3.	Tercera crisis, Teoría de conjuntos y paradojas	49
3.1.	Origen y desarrollo de la Teoría de conjuntos de Cantor	49
3.1.1.	Series trigonométricas	49
3.1.2.	Diferentes infinitos, la <i>potencia</i> de un conjunto	55
3.1.3.	Teoría de conjuntos y Filosofía de Cantor	59
3.1.4.	Teorema de Cantor y la Aritmética transfinita	72
3.1.4.1.	Tipos de orden (Ordinales)	78
3.2.	Paradojas de la Teoría de conjuntos	86
3.2.1.	Paradoja de Burali-Forti	89
3.2.2.	Paradojas de Cantor	95
3.2.3.	Paradoja de Russell	103
3.2.3.1.	Diagonal de Cantor y la clase <i>w</i> de Russell . .	106
3.2.3.2.	Descubrimiento de Zermelo de la Paradoja de Russell	109
3.2.3.3.	Repercucion en el programa de Frege	112
3.3.	Superación de las paradojas	117
3.3.1.	Soluciones de Russell	117

3.3.2. Zermelo, Axioma de separación 1908	125
3.4. A modo de un epílogo	131
3.5. Conclusión	141
Apéndices	145
A. Axiomas de Hilbert para la Geometría	145
B. Artículos de Burali-Forti, 1897	151
B.1. Artículo de Burali-Forti, 28 de marzo de 1897	153
B.2. Nota de Burali-Forti, 14 de noviembre 1897	164
C. Dos cartas de Cantor a Dedekind, 1899	165
C.1. Cantor a Dedekind, 3 de agosto de 1899	167
C.2. Cantor a Dedekind, 31 de agosto de 1899	173
D. Correspondencia Russell-Frege, 1902	175
D.1. Russell a Frege, 16 de junio de 1902	175
D.2. Frege a Russell, 22 de junio de 1902	177
E. Axiomas de Zermelo, 1908	179
Bibliografía	181

Resumen

El trabajo presente trata de tres momentos en los giros de las matemáticas, los cuales implicaron cambios trascendentales en el desarrollo de esta misma. Dichos momentos son llamados crisis de fundamentos de la matemática y son los siguientes: 1) La crisis *pitagórica* consiste, a grandes rasgos, en el descubrimiento de magnitudes irracionales, 2) La crisis *euclidiana* que deviene con el descubrimiento de otras geometrías por la negación del axioma de las paralelas. 3) Para la crisis cantoriana, provocada por el surgimiento de tres paradojas en una emergente teoría de conjuntos que son llamadas de Burali-Forti, de y de Cantor. Sobre estas crisis se presenta breve análisis historiográfico puntualizando en los contextos matemáticos de estas mismas y las implicaciones que estos tuvieron en la ciencia en si.

Palabras clave: crisis, fundamentos, incommensurables, quinto postulado y paradojas

Abstract

This paper is about three times the turns of mathematics which involved major changes in the development of the same. These moments are called crisis and foundations of mathematics, which are: 1) The crisis textit Pythagorean consists, roughly, in the discovery of irrational magnitudes, 2) The crisis textit Euclidean which becomes the discovery of other geometry by denial the axiom of parallels. 3) Cantor crisis caused by the emergence of three paradoxes in an emerging theory of sets that are called Burali-Forti, Cantor y. On these crises punctuating brief historiographical analysis in mathematical contexts of the same is presented. Also we talk about its implications for science itself.

Keywords: crisis fundamentals, immeasurable, fifth postulate and paradoxes

Presentación

A modo de preámbulo

Una de las características esenciales de la ciencia matemática es que todas sus proposiciones tienen que ser rigurosamente demostradas. Para discutir la veracidad de una demostración se tiene que analizar la validez, tanto de los razonamientos empleados, como los presupuestos a partir de los cuales se razona. En este sentido, muchos de los resultados de la matemática resultan de ciertas *verdades* ya demostradas, pero éstas *verdades* también tuvieron que ser demostradas y, si para éstas demostraciones se basaron en *verdades* o resultados previos, estos a su vez tuvieron que ser demostrados por lo que, si seguimos este razonamiento, llegamos a un punto en el que tenemos conceptos, nociones o métodos que simplemente debemos aceptar por sí mismos. Entonces se entiende que la ciencia matemática precisa de una *base* sobre la cual edificar todo su constructo, necesita de preceptos intuitivamente determinados sobre los cuales fundamentar todas las demostraciones y los conceptos matemáticos.

En un comienzo, la matemática estaba fundamentada por nociones prácticas o, en cierto grado, empíricas. La numeración y los conceptos geométricos básicas bastaban para el desarrollo de los conceptos en una época primitiva de la matemática pero, mientras el quehacer matemático se iba especializando más, los matemáticos necesitaban ya de conceptos y procedimientos más precisos para fundamentar la nueva matemática.

El desarrollo de nuestra ciencia como tal no ha cesado, pese a ciertos escenarios críticos en su historia en los que se consideró imperante, por algunos

matemáticos, una revisión de sus bases, producto de la necesidad emergente de nuevas formas de concebir en la matemática.

En lo consiguiente, se trata de enfocar la atención en algunos de estos momentos críticos de los fundamentos de la matemática, que se presentan en tres episodios del desarrollo del conocimiento matemático, llamados: la crisis pitagórica, la crisis euclidiana y la crisis cantoriana.

Objetivos del trabajo

Proporcionar un panorama general de los momentos críticos de los fundamentos de la matemática, eligiendo primero, a modo preliminar y básico, lo referente a la crisis de fundamentos pitagórica (de los irracionales) y euclidiana (de las geometrías no euclidianas); y segundo, la crisis cantoriana (de la teoría de conjuntos).

Se intenta dar un panorama general con elementos históricos, epistemológicos y matemáticos, de tal manera que la presentación no quede limitada al enfoque de solo uno de estos elementos, pero sí, sin evitar conceptos matemáticos no elementales.

El objetivo central es:

Exponer sobre la matemática en tanto a tres crisis de sus fundamentos: pitagórica, euclidiana y cantoriana de la Teoría de conjuntos, centrándonos más en esta última. En el desarrollo del trabajo se combinan los enfoques historiográfico y matemático.

Justificación

Por un lado, considero necesario presentar un material sugestivo, breve y divulgativo de estos temas o cuestionamientos, que a algunos estudiantes nos surgen a lo largo de los estudios de licenciatura en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas; por ejemplo: ¿matemáticamente, en qué consisten las paradojas que se mencionan en diversas introducciones de libros básicos de Teoría de conjuntos?

Y, por otro lado, en lo personal tengo intenciones de seguir trabajando en áreas de Filosofía de las matemáticas o Filosofía de la ciencia, por lo que creo prudente comenzar a conocer, o entender, momentos determinantes en el desarrollo del conocimiento matemático, por el momento con una visión muy parcial y limitada.

Capítulo 1

Introducción

Antes de comenzar, es conveniente dar algunas aclaraciones sobre por qué o cómo abordaremos estos temas. 1) La crisis *pitagórica* consiste, a grandes rasgos, en el descubrimiento de magnitudes irracionales; y la crisis *euclidiana* deviene con el descubrimiento de otras geometrías por la negación del axioma de las paralelas. Estos dos temas, aunque no son siempre considerados como *crisis de fundamentos* en sí, se abordan porque proporcionan una muestra de las repercusiones que puede tener un cambio en la forma de pensar los entes matemáticos, así como una introducción a la cuestión del infinito en la matemática; pero también, porque nos introducen a nociones tales como el método axiomático, los modelos, la consistencia... etc. 2) Para la crisis cantoriana, o la situación de los fundamentos a finales del siglo XIX e inicios del XX, actualmente se trabaja en dos líneas investigación que, se dice, son antagónicas. La primera es una versión llamada *canónica* u *ortodoxa*, que argumenta que efectivamente existió una crisis de fundamentos y es la que se encuentra en muchos libros de Historia o Filosofía de las matemáticas, por ejemplo los de Kleene (1952), Ladrière (1969), Bourbaki (1972), Abraham A. Fraenkel, Yehoshua Bar-Hillel, Azriel Levy (1973), Velarde (1989), Kline (1992), Collette (1993) o J. Babini, J. Pastor (1997); junto con un análisis histórico más detallado Garcíadiego (1992), entre otros. Esta versión habla del descubrimiento de las antinomias en la Teoría de conjuntos y que, a partir de ahí, para resolver la cuestión, surgieron tres escuelas de pensamiento matemático: logicista, formalista e intuicionista; situación que se desenlaza con la axiomatización de la Teoría de conjuntos y los teoremas de incompleti-

tud de Gödel. La segunda es una versión llamada *crítica*, que intenta defender que no hubo, ni hay, una *crisis de fundamentos* en la práctica matemática, sino que más bien se trata de “controversias” o “cambios” en la práctica matemática respecto a lo que se hacía con anterioridad, argumentando que no hubo una *crisis* en sí, ya que la práctica de los matemáticos es autónoma de la cuestión de los fundamentos; por ejemplo, los números reales o los complejos se *bien* utilizaban antes de entender lo que eran. Entonces, el edificio matemático no fue verdaderamente sacudido, en el caso de la crisis cantoriana, por aparición de las antinomias, ya que su construcción pudo seguir casi inalterable. En esta tesis, por limitaciones materiales y como es una primera aproximación a estos temas, se abordará la versión *ortodoxa* y se se trata de esbozar la interpretación dominante o *estandar*.

1.1. Sobre los fundamentos

Como es sabido, la matemática de las primeras civilizaciones tenían fundamentalmente un carácter *pragmática*, existían sólo para tratar de resolver los problemas cotidianos de la gente de esas épocas; más tarde, con el arribo de la civilización griega, la matemática comienza a tener un carácter *teórico*, lo cual brindó otras condiciones para el desarrollo de ella misma.

Desde un punto de vista del desarrollo del conocimiento, la matemática ha pasado por una serie de momentos cruciales, debido a que se llega a situaciones en las cuales es necesaria una forma distinta de concebir respecto a la que se tenía anteriormente.

Un primer momento de reformulación en la matemática, es lo que se conoce como crisis de fundamentos pitagórica, que consiste en el descubrimiento, alrededor de 480 a.n.e., de magnitudes inconmensurables, o sea, aquellas que no pueden ser expresadas a través de la multiplicidad de alguna unidad; en particular, el descubrimiento de que el lado y la diagonal de un cuadrado son inconmensurables. Esto debió provocar en la Filosofía pitagórica un gran desconcierto, ya que su explicación del mundo se basaba en que todo podía ser expresable a través de números (naturales), pero en lo que se refiere a la matemática, se tuvo que hacer una reformulación de los teoremas pitagóricos con una nueva definición de proporcionalidad y con el Método

de exhaución de Eudoxo, haciendo posible trabajar magnitudes inconmensurables superando así dicha crisis, que terminó poniendo en primer plano los conceptos geométricos sobre los aritméticos.

La segunda de las crisis podemos identificarla con el surgimiento de las Geometrías no euclidianas. El Postulado de las paralelas, expuesto por Euclides en *Los Elementos*, cerca del 300 a.n.e., presenta cierta controversia al no ser tan evidente como los demás, por lo que matemáticos posteriores sintieron la necesidad de ingeniar una demostración de éste, con base en los otros postulados. En una primera época todos los intentos de demostraciones resultaron fallidos ya que, de alguna u otra manera, utilizaban implícitamente proposiciones equivalentes la que querían demostrar. En una segunda época los intentos fueron en otro sentido, ahora se trataba, con la negación del Postulado de las paralelas y los demás postulados, de llegar a una contradicción para concluir como demostrado el quinto postulado.

Tal fue el proceder de matemáticos como Saccheri y Lambert, pero en ese divagar en búsqueda de la supuesta contradicción, solo se llegó a contradicciones de nuestras percepciones; no a contradicciones lógicas. Dichos trabajos que suponían la negación del Postulado de las paralelas, se convirtieron en los antecedentes de lo que hoy se conoce como Geometrías no euclidianas.

Aunque ya con ciertos desarrollo de las nuevas teorías hecho por matemáticos como Gauss, Bolyai y Lobachevski, en la primera mitad del siglo XIX, la aceptación de éstas fue tardía, era necesario la creación de modelos euclidianos en los cuales pudieran ser interpretadas dichas teorías, originándose una serie de entornos geométricos en los cuales era posible, por ejemplo, la existencia de geometrías sin paralelas y que, con estos mismos modelos, demostrar la no contradicción de dichas teorías. Finalmente, en la segunda mitad de ese siglo, se vuelve necesario un manejo más riguroso a lo que puede ser o no, un axioma, o qué características debe tener. Para ello fue menester una nueva axiomatización de la geometría y, el precedente obligado, son los Axiomas de Hilbert para la geometría, con los que, entre otras cosas, es posible fundamentar varias geometrías que no son euclidianas y hacer demostraciones sobre la independencia de estos axiomas y de su consistencia con base en la de la aritmética.

En otra dirección, pero en esa misma época (fines del siglo XIX e inicios del XX), el desarrollo de la matemática seguía engendrando teorías cada vez más

abstractas como, la Teoría de números complejos, Algebras abstractas, el desarrollo de la Teoría cantoriana de números transfinitos, entre otras, dejaban a los matemáticos de esos tiempos cada más alejados de una realidad sensible para verificar sus teorías, por lo que en muchos de los casos la matemática se restringía al estudio de colecciones de estructuras, con una axiomática concreta. Pero el tema de la consistencia, al igual que en las geometrías no euclidianas, de estos sistemas axiomáticos se hacía cada vez más relevante.

Matemáticos de cómo Peano y Frege abordaron el problema de la fundamentación de la aritmética. Más adelante el problema sobre los fundamentos se concentró en torno a la emergente Teoría de conjuntos. Russell hace notar en una correspondencia con Frege la presencia de paradojas dentro de esta teoría, paradojas de las que se dice, Cantor que ya era consciente. Esta nueva crisis de fundamentos fue una de las preocupaciones principales de los matemáticos, pero en ningún sentido detuvo la producción matemática con base en los conjuntos.

La causa de las paradojas que aparecieron en la Teoría de conjuntos, dice Russell y Whitehead (1861-1947), radica en la definición de un objeto en términos de una clase¹ que tiene como elemento al objeto que se está definiendo. Tres paradojas son las que se le suelen adjudicar a la Teoría de conjuntos; 1) la Paradoja de Cantor en la que, basándose en que para cada cardinal existe un cardinal estrictamente mayor, a saber el de su conjunto potencia, con lo que por un lado, habría un cardinal mayor que el correspondiente al conjunto cuyos elementos son todos los conjuntos y por otro lado, el conjunto potencia es subconjunto de dicho conjunto, lo cual nos lleva a una contradicción. El problema radica en que el conjunto potencia de este conjunto también es un conjunto que se contiene a sí mismo, 2) la paradoja de Burali-Forti que consiste en que el conjunto de todos los ordinales es a su vez un ordinal y tiene un sucesor inmediato. Por un lado, este sucesor está contenido en dicho conjunto por lo que le es estrictamente menor, y por otro lado le es mayor por su misma definición, lo cual es una contradicción y finalmente, 3) la paradojas más conocidas de la Teoría de conjuntos, es la planteada por Bertrand Russell; a groso modo, esta paradoja parte del axioma de compren-

¹Se puede entender aquí clase como si nomino de conjunto, en este periodo de la historia de las no hay distinción *conceptual* precisa aunque podemos decir que los matemáticos mas influenciados por la escuela italiana de Peano preferían usar el termino *clase* (*Class*), tales son los casos de Russell y Burali-Forti.

sión proveniente de la Lógica clásica aristotélica y esta implícito en el sistema Frege y de Peano. Con este axioma, dada una propiedad, es posible concebir el conjunto de todos aquellos objetos que satisfacen dicha propiedad; en particular dada una relación, existe el conjunto de los objetos que cumplen esta relación. La forma en que Russell introduce su famosa paradoja es: tomando este axioma y dando la relación de “no pertenencia a sí mismo” llega a la formulación de un conjunto (clase) que pertenece a sí mismo, si y solo si no pertenece a sí mismo. Después de aparición de las paradojas se suscita una situación que al guano han nombrado la tercera crisis de fundamentos de las matemáticas e incluso que la comunidad matemática quedo consternada después de este hecho. Las soluciones de las paradojas básicamente surgen en dos direcciones; la Teoría de tipos de Russell y la restricción al Principio de comprensión hecha por Zermelo en su primera axiomatización.

La Teoría de tipos lo que hace es que, para que una relación de pertenencia, o su negación, tengan sentido, los objetos que aparecen en ella tienen que ser necesariamente de *tipo* distinto, a saber, si un objeto y alguna clase-objeto a la que este ha de pertenecer, el primero es necesariamente de *tipo inferior* y la clase-objeto de *tipo mayor*. En esta teoría simplemente la excreción “pertener a sí mismo” carece pues de sentido. La restricción de Zermelo del principio de comprensión consiste en que los objetos que han de cumplir dicha propiedad deben estar contenidos de antemano en un conjunto ya dado. Con esto lo que se implica de la paradoja que el conjunto de *todas las cosas* o de *todos los conjuntos* no existe y, así mismo, para un conjunto donde todos sus elementos tengan la propiedad de no contenerse a sí mismos como elementos.

En la literatura de Historia de las matemáticas se encuentra que a raíz de dicha crisis de fundamos en el pensamiento matemático se da una distinción de tres corrientes, cada una con ideas distintas en tanto a la forma de fundamentar las matemáticas: 1) El *Logicismo*, encabezado por en ese tiempo por Russell y Whitehead, donde su tesis es que las matemáticas son totalmente derivables de la lógica; por lo tanto, la matemática es una rama de la lógica y no necesita para su fundamentación herramientas o conceptos distintos a los de la lógica. 2) El *Formalismo*, en el que su principal fundador fue Hilbert, aquí fundamentalmente se propone a la matemática como sistemas formales; cada teoría matemática se sostiene de una serie de axiomas de los que se deben obtener otras expresiones también formales a través de manipulaciones formales predeterminadas en cálculo lógico predeterminado. De esta manera,

al hablar sólo de formas y de procesos formales, las interpretaciones que se le den a ese sistema no afectará la *veracidad* de las deducciones dentro del sistema formal prefijado. Y 3) El *Intuicionismo*, dentro la matemática se considera como su fundador Brouwer y la idea esencial es que las ideas o los resultados matemáticos solo son considerados si proviene de nuestra *intuición fundamental*, lo que en términos matemáticos se traduce, a grandes rasgos, en que las definiciones y demostraciones de existencia han de ser *constructivas*; es decir, mostrar concretamente el procedimiento para formar o encontrar tal objeto. Ahí, el pensamiento matemático es un proceso constructivo limitado por el reconocimiento inmediato de nuestra intuición. En este sentido, esta escuela no admite el *Principio del tercer excluido* para casos infinitos, ni el Axioma de elección.

Dicho episodio en historia de las matemáticas, culmina con los resultados de *Incompletitud* de Gödel, donde demuestra que la consistencia de un sistema que incluya la lógica usual y la aritmética, no puede ser probada si nos limitamos a conceptos y métodos que pueden ser expresados en términos formales de la Teoría de números.

Así es como se suele presentar la historia sobre los fundamentos de la matemática. Como veremos en seguida, muchos de los rasgos expresados aquí en lo referente a la crisis de los fundamentos de la Teoría de conjuntos, caen dentro de lo que manejaremos como una interpretación histórica *estándar*.

Capítulo 2

Dos primeras crisis de fundamentos

2.1. La crisis pitagórica

La crisis pitagórica de fundamentos consiste en el descubrimiento de las magnitudes incommensurables, que dan como resultado la primera concepción de los números irracionales. Esta crisis provoca un vacío en esa escuela filosófica, ya que se crearía que todo podía ser representado por números y los únicos números aceptados eran los números naturales; entonces, el descubrimiento de los números irracionales crea un vacío en su interpretación del mundo, pues había cosas que no podían ser representadas en términos de números. El descubrimiento de estas magnitudes tiene implicaciones importantes: una revisión rigurosa de los trabajos matemáticos de la Escuela pitagórica y su posterior fundamentación, así como la separación de la relación entre números y la representación geométrica de magnitudes que, a su vez, propicia una visión más teórica que empírica de la matemática griega, orientando la metodología deductiva en la geometría, como puede observarse en la obra de *“Los Elementos”* de Euclides.

2.1.1. Los inconmensurables

El descubrimiento de los inconmensurables suele atribuirse a Hipasos de Metaponto hacia el año 480 a.n.e., quien pertenecía a la Escuela pitagórica. Se dice, que este descubrimiento fue ocultado por esta misma escuela, ya que la base de su pensamiento matemático e hipótesis fundamental, era que todo par de magnitudes era conmensurable; en términos modernos esto es:

Definición. Dos segmentos AB y CD son conmensurables, si existe un tercer segmento fijo UN , llamado *unidad*, tal que:

$$AB = mUN \quad y \quad CD = nUN,$$

donde m y n son números naturales. El consiente $\frac{m}{n}$ se dice razón¹ de $\frac{AB}{CD}$.

Entonces, a cada par de segmentos se les asigna un número, una razón, que para los pitagóricos solo podía ser como cociente de dos naturales. Si no existe una unidad para los segmentos AB y CD , el número asociado a su cociente se define posteriormente como *número irracional*, y a dichos segmentos se les llama *inconmensurables*.

Se tienen dos hipótesis principales sobre el descubrimiento de inconmensurables, las que surgen de la comparación de los lados y las diagonales de un cuadrado y un pentágono, relaciones que dan las razones $\sqrt{2}$ y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ respectivamente.

Aunque también se tenían algunas las demostraciones con álgebra geométrica de inconmensurabilidad, que se pueden encontrar en tratados de Aristóteles y Platón. Estas demostraciones dependían principalmente de las relaciones geométricas e, incluso, es así es como los pitagóricos se toparon con el problema, lo cual se muestra a continuación.

Teorema. *El cateto y la hipotenusa de un cuadrado son inconmensurables.*

DEMOSTRACIÓN. Sean AB y AC respectivamente el lado y la diagonal de un cuadrado, y suponga que existe la unidad UN de tal manera que:

$$AB = mUN \quad y \quad AC = nUN,$$

¹El número $\frac{m}{n}$ es desprovisto de cualquier alusión directa a las magnitudes de los segmentos, la razón también se da en cocientes de área y de volumen; la razón es, para los pitagóricos, la esencia que prevalece después del cambio.

Trácese la circunferencia de centro A y radio AB cortando a AC en D , (Figura 1). La perpendicular a AC en D corta a BC en E . De la geometría de la figura se deduce que:

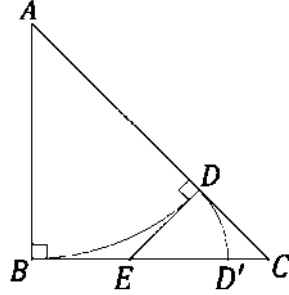


Figura 1: Inconmensurabilidad de AB y AC

$$AB = AD, BE = ED$$

$$DC = AC - AB = nUN - mUN = sUN \quad (1)$$

$$BE = DE = DC \text{ [tangentes y } \Delta ABC \sim \Delta EDC]$$

$$EC = BC - BE = BC - DC = mUN - kUN = tUN \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se deduce que EC y DC son conmensurables y tienen la misma *unidad* que AB y AC . Es en este punto donde encontramos una contradicción ya que, por un lado, se puede construir con este proceso² un triángulo cuyos catetos sean menores que la *unidad* y, por otro lado, se puede demostrar que sus catetos tienen que ser múltiplos de la misma *unidad*, concluyendo así que el cateto y la hipotenusa de ΔABC son *inconmensurables*. ■

La demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un pentágono se hace con la misma idea y a partir de su razón conocida como, el número áureo, se demuestra que $\sqrt{5}$ es un número irracional.

El descubrimiento de estos inconmensurables, debió provocar desconcierto dentro de los círculos pitagóricos, ya que entraban en controversia con las

²Para continuar este proceso hacemos centro en E y cortamos a BC en D' . Trazamos la perpendicular a EC en D' que corta a DC y forma el nuevo triángulo que es semejante a los anteriores.

bases de su filosofía, al encontrar objetos no representados por números; las implicaciones en términos matemáticos fueron en sumo relevantes, se privilegió a la geometría sobre la aritmética ya que se tiene que renunciar a la idea de medir siempre con exactitud³ y, más importante aún, se hace necesaria una revisión de todo el trabajo matemático hecho por los pitagóricos ya que, como veremos a continuación, muchas de las demostraciones pitagóricas quedan invalidadas porque subyacen en función de una proporcionalidad que sólo admite razones “*racionales*”.

Definición (Pitagórica). Dos razones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ se dice que son proporcionales: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ cuando existen enteros p, q, m, n tales que $a = mp, b = mq, c = np, d = nq$.

Notemos que la definición y el siguiente teorema admiten, sin duda alguna, que *todo par de segmentos son conmensurables*, siendo esta hipótesis la que provoca la crisis de fundamentos de la que estamos hablando.

Teorema. *Los triángulos que tienen la misma altura, son entre sí como sus bases.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$, con bases BC y DE sobre MN . BC y DE son conmensurables y tienen como *unidad* a GH que está contenido p veces en BC y q veces en DE . Marcamos los puntos de división en *unidades* de BC y DE para unirlos con un punto A (Figura 2).

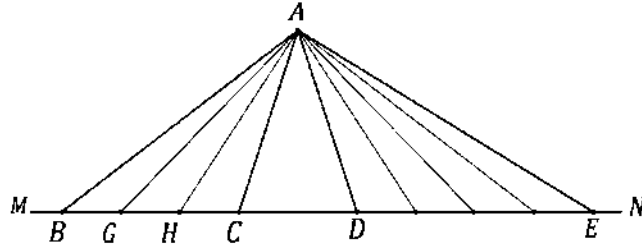


Figura 2: Los $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ son como sus bases BC y DE .

Entonces quedan divididos los $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ en p y q triángulos menores e iguales. Y con la proposición ya conocida de que “*dos triángulos con mismas bases y misma altura, son de áreas iguales*” se concluye por tanto que:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{p\triangle AGH}{q\triangle AGH} = \frac{pGH}{qGH} = \frac{BC}{DE}$$

■

³Medir en sentido de asignar una razón en términos de enteros a los objetos.

La aparición de los inconmensurables invalida obviamente esta demostración ya que, como mostramos anteriormente, no todo par de segmentos son conmensurables.

Hechos como estos son los que hacen necesaria una revisión a fondo de ciertos fundamentos de la matemática pitagórica, a este trabajo se enfocaría Eudoxo de Cnido (390-337 a.n.e), uno de los matemáticos más importantes de la Academia platónica, a quien se le atribuye la Teoría de las proporciones contenida en el libro V de *Los Elementos*, y el *Método de exhaustión*, con el que se demuestran algunos teoremas del libro XII.

La forma en la que supera los problemas generados por la crisis de los inconmensurables es con la introducción de una nueva *definición de proporcionalidad*, que permite hacer demostraciones rigurosas de proposiciones pitagóricas con método de demostración, llamado *Método de exhaustión*, que permite el manejo de magnitudes que tiene que ver con irracionales.

2.1.2. La definición de proporcionalidad

La definición pitagórica de proporción basada en la suposición de que todo par de segmentos son conmensurables conduce a contradicciones; Eudoxo evita la suposición, como se muestra en el libro V de los *Elementos*, dando una definición de igualdad de razones en términos de relaciones de orden; previamente fija las condiciones para que dicha igualdad se pueda dar. Las condiciones se encuentran en las definiciones⁴ V.3 y V.4 de *Los Elementos* y restringen a que las razones sólo tienen sentido si son entre magnitudes del mismo tipo; además, no son admisibles magnitudes *infinitamente pequeñas* o *infinitamente grandes*. Ya con estas condiciones, la definición de igualdad entre razones, la proporcionalidad, queda expresada en la definición V.5 de *Los Elementos* lo que con notación moderna sería:

Definición. (Eudoxo) Dos razones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ se dice que son *proporcionales*:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, cuando para todo entero m y n , se tiene que:

$$na > mb \rightarrow nc > md \quad \text{ó} \quad na = mb \rightarrow nc = md \quad \text{ó} \quad na < mb \rightarrow nc < md.$$

⁴En lo siguiente al referirnos a definiciones o proposiciones de *Los elementos* de Euclides se pondrá el número de libro en romano seguido por el de la proposición o definición.

Se puede demostrar que esta definición de Eudoxo, es la generalización de la noción de proporcionalidad pitagórica, pero lo más importante es que ésta hace posible una demostración rigurosa de teoremas en los que pueden intervenir segmentos inconmensurables como, por ejemplo, la demostración del teorema anterior:

Teorema. *Los triángulos que tienen la misma altura, son entre sí como sus bases.*

DEMOSTRACIÓN (EUDOXO). Sean $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$, con bases BC y DE sobre MN y sean n y m enteros. Sobre MN trácese a partir de B y en dirección a M , $m-1$ segmentos iguales a BC dando así los puntos $B_1, B_2, \dots, B_m$, unamos estos puntos con el punto A formando así m triángulos $\triangle AB_iC$ con $i = 1, 2, \dots, m$. De forma análoga se construyen los n triángulos $\triangle AE_jD$ con $j = 1, 2, \dots, n$ (Figura 3).

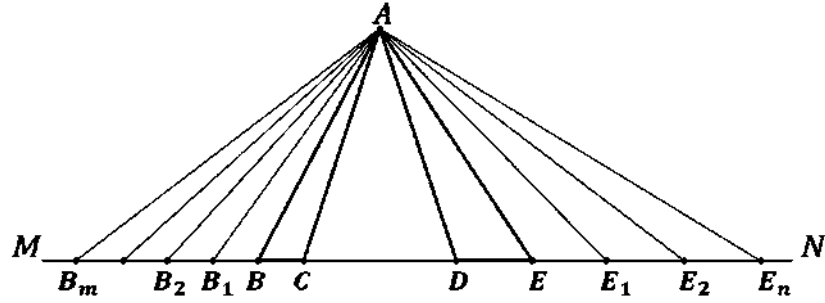


Figura 3: Demostración de Eudoxo

Se tiene que $CB_m = m(BC)$, $\triangle AB_mC = m(\triangle ABC)$, $E_nD = n(ED)$, $\triangle AE_nD = n(\triangle AED)$; y si:
 $m(BC) > n(ED) \rightarrow CB_m > E_nD \rightarrow \triangle AB_mC > \triangle AE_nD \rightarrow m\triangle ABC > n\triangle AED$

La segunda implicación se deduce de la misma proposición “*dos triángulos con mismas bases y mismas alturas, son de áreas iguales*”. Las implicaciones para los casos “=” y “<” son análogas. Por lo tanto $\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{BC}{DE}$. ■

Vemos que en ningún momento se hace necesario que las magnitudes sean conmensurables, esta prueba es pues un buen ejemplo de cómo la definición de Eudoxo hace posible que cualesquiera magnitudes geométricas se pueden comprar a través de razones, incluso si son inconmensurables.

2.1.3. El Método de exhaustión

La forma en que Eudoxo hace manejables geoméricamente los inconmensurables, es con la introducción de una noción de “acercarse tanto como se quiera” a magnitudes prefijadas, o sea que si se quiere decir algo de una curva cualquiera se tiene que decir también de la sucesión de polígonos que se “acercan tanto como se quiera” a la curva. Para manejar con rigor la noción de “acercarse”, Eudoxo introduce lo que hoy llamamos “Axioma de Eudoxo”, “Postulado de Arquímedes” o “Axioma de continuidad” que es la definición V.4 de *Los Elementos*.

Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, puede exceder una a la otra.

Esta definición cumple un papel fundamental en la demostración del “Principio de Eudoxo”⁵ el cual dice:

Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Con esta proposición se da pie al “Método de exhaustión” que se usa para demostrar rigurosamente teoremas sobre áreas de círculos, volúmenes de pirámides y conos⁶. Este método se presenta por primera vez en la demostración de la proposición XII.2 de *Los Elementos* de Euclides en la que ilustra la una forma indirecta de demostrar la proporcionalidad entre razones, como se esquematiza a continuación:

⁵Proposición X.1 de *Los Elementos* de Euclides.

⁶Proposiciones XII.2, XII.5 y XII.10 de *Los Elementos* de Euclides.

Para demostrar que $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, suponemos primero que no es así, por lo que debería de existir X tal que $\frac{A}{X} = \frac{C}{D}$, después suponemos que $X < B$ y procedemos a encontrar una magnitud P de tal manera que $X < P < B$. Para encontrar dicha magnitud P se hace uso de el “*Principio de Eudoxo*” y con la *Teoría de las proporciones* se llega a contradicción, por lo que no puede ser que $X < B$. De manera similar se demuestra que es imposible que $X > B$; por lo que se concluye que $X = B$ y se obtiene así la proporcionalidad buscada. Para ejemplificar veamos un esbozo de la demostración de la proposición XII.2 de *Los Elementos* de Euclides que dice:

Proposición (XII.2). *Los círculos son el uno al otro como los cuadrados de sus diámetros.*

DEMOSTRACIÓN. Sea γ y σ las circunferencias (Figuras 4 y 5), Γ y Σ sus áreas y, BD y FH sus diámetros respectivamente. Supongamos primero que la proporcionalidad no se da; por lo que deberá existir X diferente de Σ de tal manera que $\frac{\Gamma}{X} = \frac{BD^2}{FH^2}$, supongamos después que $X < \Sigma$. Ahora procederemos inscribir en σ un polígono regular de área Π_σ , la cual nos conducirá a una contradicción. Inscríbese en σ el cuadrado $EFGH$ cuya área llamaremos Π_1 .

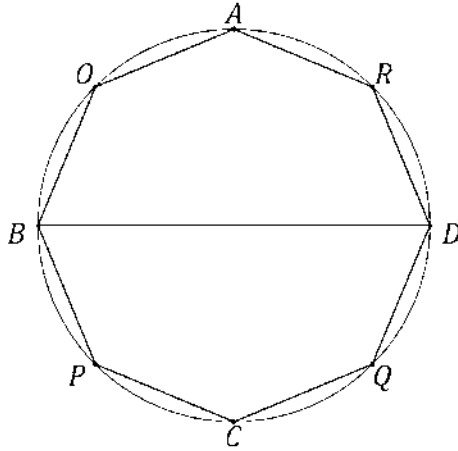


Figura 4: Circunferencia γ .

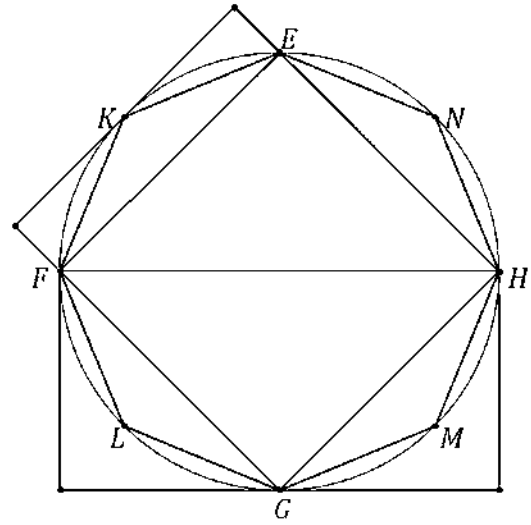


Figura 5: Circunferencia σ .

Si a Σ se le quita el área del cuadrado, lo que queda es claramente menor que la mitad de Σ , para esto basta ver que el área del rectángulo que tiene como

lado a FH es igual que la de $EFGH$. Ahora si a este primer resto $\Sigma - \Pi_1$ le quitamos los triángulos isósceles EKF , FLG , GMH y HNE donde K , L , M y N están en la circunferencia, obtenemos un segundo resto $\Sigma - \Pi_2$, donde Π_2 es el área del octágono $EKFDGMHN$, que es menor que la mitad de $\Sigma - \Pi_1$ lo cual se deduce de que el área del rectángulo de lado EF es dos veces la del triángulo EKF y así, para cada triángulo.

Si seguimos sucesivamente este proceso, por el Principio de Eudoxo el área Π_i de algún polígono construido de esta manera cumplirá con que $\Sigma - \Pi_i < \Sigma - X$, por lo que $X < \Pi_i$.

Por otro lado, constrúyase en γ un polígono semejante con el mismo procedimiento y sea Π_j su área, la proposición XII.1 dice:

Los polígonos semejantes inscritos en círculos son el uno al otro como los cuadrados de sus diámetros.

O sea que $\frac{\Pi_j}{\Pi_i} = \frac{BD^2}{FH^2}$ y como $\frac{\Gamma}{X} = \frac{BD^2}{FH^2}$, se tiene que $\frac{\Gamma}{X} = \frac{\Pi_j}{\Pi_i}$. Pero $\Pi_j < \Gamma$, entonces $\Pi_i < X$ y esto es una contradicción por lo que Π_i es el Π_σ buscado. Entonces no puede ser que $X < \Sigma$.

Ahora si $X > \Sigma$, hágase Y de tal manera que $\frac{Y}{\Sigma} = \frac{BD^2}{FH^2}$, entonces se tiene que $\frac{Y}{\Sigma} = \frac{\Gamma}{X}$, tenemos que $\Gamma > Y$. Después procédase de la misma manera, construyendo un polígono regular de área Π_σ que nos llevará a una contradicción análoga a la anterior. Entonces concluimos que no puede ser $X > \Sigma$. Por lo tanto $X = \Sigma$ y $\frac{\Gamma}{\Sigma} = \frac{BD^2}{FH^2}$. ■

Por un lado, la definición de igualdad de razones de Eudoxo, logró la reconstrucción de pruebas de los teoremas pitagóricos que podían involucrar segmentos inconmensurables, dándoles así el rigor necesario para su validación y, por otro, el Método de Exhaución se convirtió en un procedimiento fundamental dentro de la matemática griega para el manejo, a través de aproximaciones, de magnitudes que tienen que ver con curvas como puede verse en *Los Elementos*.

La imposibilidad de poner a $\sqrt{2}$ como cociente de dos enteros propició la aceptación de una separación entre la geometría y la aritmética, ya que se tenía que aceptar la existencia de figuras geométricas que no podían ser

expresadas por números; la dualidad número-magnitud se hace insostenible. Para los matemáticos griegos posteriores a Pitágoras, y ésta división se da en sentido de que los número serán considerados sólo como una multitud o una pluralidad de unidades, por lo que eran finitamente divisibles; mientras que las magnitudes, como se muestra en demostraciones de inconmensurabilidad, son indefinidamente divisibles, entonces si decimos que a toda magnitud le corresponde un número, la unidad de este número pasaría del “*ser*” (unidad) al “*no ser*” (unidad); o sea dividirse, lo que es una contradicción.

Esta crisis también pone en un primer plano la cuestión del infinito en la matemática. Por ejemplo, si se inicia el procedimiento⁷ en busca la supuesta “*unidad*” que deberían tener los segmentos inconmensurables, éste se tendría que hacer indeterminadamente, lo que implicaría que la “*unidad*” tendría que ser infinitamente pequeña. Con el Método de exhaustión se evade la cuestión del infinito al ser suficiente, en términos de demostración, acercarse tanto como se quiera, a estos entes matemáticos que aluden al infinito. Por ejemplo, de la proposición XII.2 anterior, obtenemos una relación entre las circunferencias y sus diámetros que, como ya se sabía, son inconmensurables. En este aproximarse tanto como se quiera también subyace la idea posterior de límite, sugiriendo que basta con el infinito potencial de Aristóteles para las matemáticas.

Después de esta crisis y con la superación del un misticismo pitagórico, la matemática se convierte en una ciencia abstracta, la inconmensurabilidad no es comprobable de forma empírica, la única forma de comprobarla es a través de un acto intelectual puro y de forma teórica; entonces como no todos los entes matemáticos son accesibles a nosotros, a través de muestras comprobaciones empíricas, la demostración teórica surge como la naturaleza misma de la matemática y el axiomático-deductivo, será su método.

⁷El proceso es el algoritmos de la división.

2.2. La crisis euclideana

2.2.1. EL problema del quinto postulado

La tendencia de la matemática griega debida al descubrimiento de los incommensurables es, como ya se mencionó, hacia la geometría. Los tratados más importantes son *Los Elementos* de Euclides; que consisten en trece libros que contienen gran parte del conocimiento matemático de la época; son los primeros tratados en presentarse como un sistema que implementa el método axiomático-deductivo. Este método consiste en, primero presentar definiciones de los términos más elementales; después se hacen afirmaciones o relaciones sobre esos términos que son llamados postulados o axiomas, los cuales son tomados como verdaderos por sí mismos, sin necesidad de demostración previa y tienen que ser evidentes a la intuición o demostrables empíricamente. Posteriormente, se procede a desarrollar la matemática deduciendo cada una de las afirmaciones posteriores con el solo uso de las definiciones, los postulados o resultados ya demostrados.

Entre los elementos más importante de esta obra clásica de la matemática, están los cinco postulados. Los tres primeros se refieren métodos de construcción con regla y compás, el cuarto habla de la igualdad entre los ángulos rectos, pero el quinto, el que nos concierne, es enunciado de la siguiente manera y puede verse en la Figura 6:

QUINTO POSTULADO. *Si una línea recta incide sobre dos líneas rectas, hace ángulos internos por un mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas prolongadas indefinidamente se encuentran por el lado en que están los ángulos menores que dos ángulos rectos.*

La cuestión sobre este postulado, que fue usado hasta la proposición I.29 de *Los Elementos* de Euclides, es que se llegó a plantear la hipótesis de que en realidad se trataba de un teorema que tenía que ser demostrado, por lo que su clasificación como postulado era incorrecta.

Las razones para plantear esta hipótesis es que, a diferencia de los primeros cuatro postulados, el quinto es de naturaleza distinta: puede no ser compro-

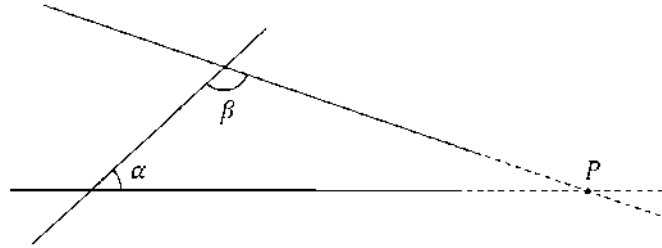


Figura 1: Postulado quinto de Euclides, $\alpha - \beta < 180^\circ$ y P punto de intersección.

babl con la experiencia sensorial; esta es siempre local, y el quinto podía implicar razonamientos o visualizaciones fuera del alcance sensorial; o sea, hace alusión a la extensión infinita de la línea recta, por lo que no es tan evidente y no es comprobable empíricamente. Pero también notemos que, en cierto sentido, se presenta como el recíproco de una proposición demostrada, la proposición I.17 de *Los Elementos* de Euclides que dice:

En cualquier triángulo, la suma de cualquiera de los dos ángulos es menor que dos ángulos rectos.

La duda causada entre los matemáticos generó durante los próximos siglos la necesidad de resolver este problema, procediendo a dar numerosas “demostraciones” que, inicialmente fueron en forma directa; en éstas se partían de los primeros cuatro postulados y se intentaba demostrar directamente, y sólo con ellos, el quinto. Todas ellas eran erróneas, ya que usaban implícitamente afirmaciones equivalentes al quinto postulado, ejemplo de ellas están en la lista siguiente:

1. **Postulado de Playfair.** *Por un punto exterior a una recta dada pasa una única recta paralela a ella.*
2. *Si una recta interseca una de dos paralelas, debe intersecar a la otra también.*
3. *La suma de los ángulos de un triángulo es de dos ángulos rectos.*
4. *Si dos paralelas son cortadas por una recta transversal, los ángulos alternos internos son iguales.*

5. *Las rectas paralelas son equidistantes.*
6. *Existen triángulos semejantes que no son congruentes.*
7. *En todo cuadrilátero que tenga tres ángulos rectos, el cuarto ángulo también es recto.*
8. *Se puede construir un triángulo cuya área sea mayor que cualquier área dada.*
9. *Dados tres puntos no alineados, siempre será posible construir un círculo que pase por todos ellos.*

La contribución de estas equivalencias (o sus negaciones lógicas) radica que fueron de gran utilidad para los trabajos posteriores de geometría. Por ejemplo, el postulado de John Playfair⁸ que es, como veremos a continuación, equivalente al quinto postulado y fue usado en la formulación de la nueva geometría de Lobachevski en 1823.

Teorema. *El postulado de John Playfair es equivalente al quinto postulado de Euclides.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que se cumple el quinto postulado, sea r (Figura 2) una recta dada y M un punto fuera de r . Tracemos la perpendicular a r desde M intersectando a r en N , después trácese la perpendicular r' a MN que pasa por M . Las rectas r y r' son paralelas ya que si P es su punto de intersección, entonces la suma de los ángulos internos del triángulo $\triangle MNP$ sería mayor que dos rectos, lo cual es imposible⁹.

Para ver que la paralela es única, suponga que existe otra recta r'' paralela a r y que pasa por M , ahora uno de los ángulos que forma r'' con MN tiene que ser agudo. Por el postulado quinto de Euclides r y r'' se intersectarían lo cual hace imposible que la paralela r'' exista.

Ahora supongamos el postulado de Playfair, para demostrar que se da el postulado quinto, sean l y m rectas cortadas por una secante r de tal manera

⁸Aunque es conocido desde la época de Proclo (410-485), éste se conoce como postulado de Playfair después de que John Playfair en 1795 estableciera su equivalencia con el quinto postulado.

⁹Proposición I.16 de *Los Elementos* de Euclides.

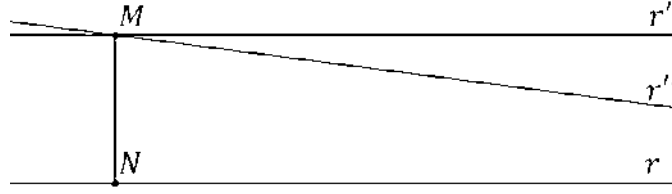


Figura 2: Postulado de Playfair.

que la suma los ángulos α y β , formados con l y m en el mismo lado de r , suman menos que dos rectos. Tracemos después m' de tal manera que α y δ sean alternos internos iguales y haciendo que l y m' sean paralelas¹⁰ (Figura 3).

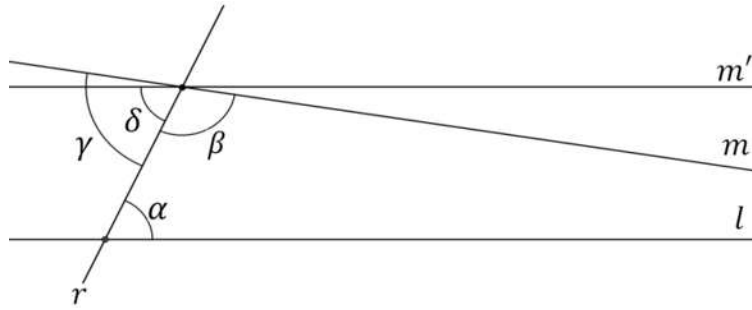


Figura 3: Postulado de Playfair.

Ahora por el postulado de Playfair m no es paralela ya que si lo fuera m sería m' por lo que α y β serían suplementarios lo cual es una contradicción. Entonces las rectas m y l se cortan en algún punto P . Solo falta ver que m y l se encontrarán en el lado de r donde están α y β . Para esto suponga que se cortan en el lado donde está γ , entonces los ángulos γ , $180^\circ - \alpha$ y el ángulo formado en la interacción de l y m , serán los ángulos interiores de un triángulo. Por la proposición I.17 se tiene que $\gamma + 180^\circ - \alpha < 180^\circ$ y como $\gamma = 180^\circ - \beta$ tenemos que $\alpha + \beta > 180^\circ$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto l y m se encontrarán en el mismo lado que α y β concluyendo que se da el quinto postulado. ■

¹⁰Esto es por la proposición I.27 de *Los Elementos* de Euclides demostrada sin el uso del quinto postulado.

2.2.2. Una “demostración” indirecta

En una segunda etapa, los matemáticos intentaron demostrar el quinto postulado de forma indirecta: es decir, si con la negación dicho postulado y junto con los otros cuatro de la geometría euclidiana se llega a una contradicción, se concluye demostrado el quinto postulado. Uno de los primeros matemáticos en proceder de esta forma fue el italiano Girolamo Saccheri (1667-1733) quien en su trabajo titulado *Euclides ab omni naevo vindicatus* (*Euclides vindicado de toda falla*) razona en torno a lo que él llamó cuadrilátero birrectángulo (Figura 4). La construcción de estos cuadriláteros consiste en, dado un segmento AB se levantan dos perpendiculares en A y B , sobre ellas se trazan los segmentos AC y BD de la misma longitud y del mismo lado de AB para, finalmente, unir los puntos A , B , C y D y formar el cuadrilátero, después Saccheri prueba que los ángulos interiores $\angle ACD$ y $\angle BDC$ son iguales y a continuación considera tres hipótesis sobre estos ángulos:

$$\angle ACD = \angle BDC = 90^\circ$$

$$\angle ACD = \angle BDC > 90^\circ$$

$$\angle ACD = \angle BDC < 90^\circ$$

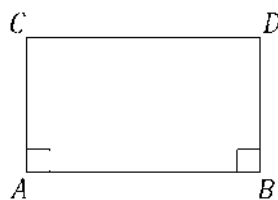


Figura 4: Cuadrilátero de Saccheri.

De estas hipótesis, llamadas respectivamente del ángulo recto, del ángulo obtuso y del ángulo agudo, intenta demostrar que la única aceptable es la del ángulo recto que, naturalmente, es equivalente al quinto postulado, por lo que se tienen que desechar las otras dos.

La forma en que Saccheri, en la proposición XIV de su *Euclides*, descarta la hipótesis del ángulo obtuso, es demostrando, con base en esta, el quinto postulado, lo que es contradictorio debido a que en proposiciones previas de su libro prueba que cada hipótesis excluye a las otras dos.

Para entender mejor el paralogismo o error en el razonamiento de esta proposición, esbozaremos un recorrido de las proposiciones XII a la XIV, y sus respectivas demostraciones, en el *Euclides* de Saccheri.¹¹

Proposición (XII). *Sea AP una prolongación arbitraria de AB , sea PL un segmento perpendicular a AP , sea AD un segmento de tal manera que $\angle DAP$ sea agudo, entonces bajo la hipótesis del ángulo obtuso las prolongaciones de PL y de AD se intersectarán a una distancia finita (Figura 5).*

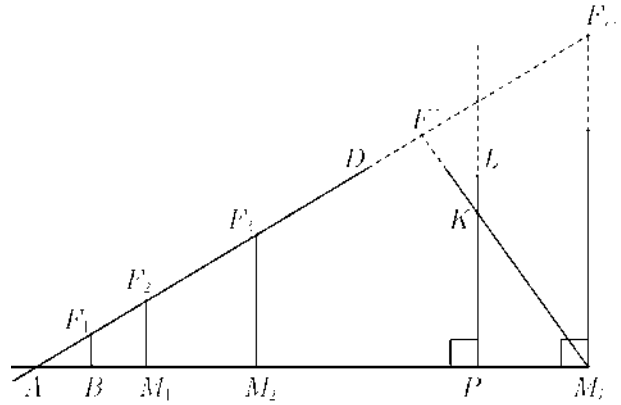


Figura 5: AD y PL se intersectaran a una distancia finita.

Para la demostración, Saccheri primero demuestra que bajo la hipótesis del ángulo obtuso, $AB < BM_1$ siendo $AF_1 = F_1F_2$ y tanto B como M_1 pies de perpendicular.

Después si $AM_1 < AP$, toma en la recta AD el punto F_3 de tal modo que $AF_2 = F_2F_3$ y se traza la perpendicular a AP que pasa por F_3 dando el pie de perpendicular M_2 . Así, si $AM_2 < AP$ se toma el F_4 de la misma manera que F_3 , dando el pie de perpendicular M_3 , siguiendo este procedimiento se puede encontrar AM_i de tal manera que $AM_i > AP$ ya que AP es finito. En este punto, Saccheri dice que la recta PL cortará a la recta AF_{i+1} ya que de no ser así el segmento AF' cortaría a la recta PL en algún punto K , formando el triángulo PM_iK ; con lo cual no se cumple la proposición I.17 de *Los Elementos* y concluye así que la recta PL contará a la recta AD .

¹¹Las citas a proposiciones del trabajo de Saccheri no todas se presentan en los mismos términos del *Euclides* pero naturalmente son equivalentes y simplifican la lectura del trabajo.

Proposición (XIII). *Si una recta XA interseca a otras dos, AD y XL , formando ángulos XAD y AXL que sumados son inferiores a dos rectos, estas dos líneas se intersectarán a una distancia finita, esto, en las hipótesis del ángulo obtuso y en la del ángulo recto (Figura 6).*

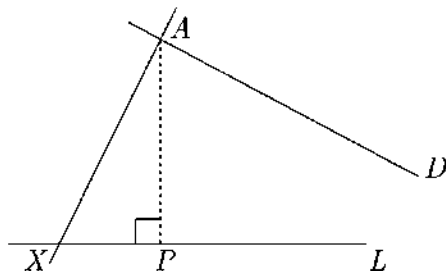


Figura 6: El quinto postulado bajo la hipótesis del ángulo obtuso.

La demostración consiste en reducirla al caso de la proposición anterior. Se toma al ángulo XAD como agudo, se traza una recta perpendicular a XL que pase por A , obteniendo P , el pie de perpendicular, y se demuestra que el ángulo PAD es agudo; y así llega al caso de la proposición anterior¹².

Proposición (XIV). *La Hipótesis del ángulo obtuso es absolutamente falsa porque se arruina a sí misma.*¹³

Esta proposición, que no es más que el descarte de la hipótesis del ángulo obtuso, la demuestra sólo haciendo notar que, por la proposición XIII del *Euclides*, las proposiciones posteriores a la I.28 de los *Elementos* serán verdaderas también bajo la hipótesis del ángulo obtuso, pero, como Saccheri ya demostró en la proposición IX de su libro, dichas hipótesis son excluyentes.

La cuestión sobre esta demostración, sin más detalle, es que sería imposible sin el axioma de la longitud infinita ya que la proposición I.17 de los *Elementos*, que es necesaria en la proposición XII de Saccheri, depende de este axioma. En efecto, Saccheri llega a demostrar que en la hipótesis del ángulo obtuso se demuestra el quinto postulado de la geometría euclidiana, pero el

¹²En la versión original de la proposición XIII es para el caso de las hipótesis del ángulo obtuso y del recto. La proposición XI es la misma que XII sólo que se hace bajo la hipótesis del ángulo recto por lo que los argumentos de la demostración de XIII son transferibles.

¹³*Hypothesis anguli obtusi est absolute falsa, quia se ipsam destruit.*

paralogismo consiste en que dicha demostración; insistimos, es imposible si no hacemos necesario que las líneas rectas sean infinitas¹⁴, lo cual, sabemos que pasa en la Geometría elíptica. Por lo tanto, a lo que llegó Saccheri fue a una contradicción de sus las ideas intuitivas que admitían de manera implícita la siempre infinitud de la recta, no es pues una contradicción en términos lógicos.

Ahora para descartar la hipótesis del ángulo agudo procede de la misma forma, pero el trabajo fue más profundo y elaborado. En las proposiciones siguientes a la XIV, Saccheri llega a varios resultados no intuitivos en los que repite que si se pudiera demostrar que son falsos, la hipótesis del ángulo agudo sería refutada; como ejemplos veamos las proposiciones XVII, XXVII y XXXII. La última es necesaria para entender el siguiente paralogismo que comente.

Proposición (XVII). *Sea AB un segmento tan pequeño como se quiera y sea AH perpendicular a AB . Entonces bajo la hipótesis del ángulo agudo, se puede trazar una recta BD de tal manera que $\angle ABD$ sea agudo y tal que, por más que se prolongue, nunca cortará la recta AH (Figura 7).*

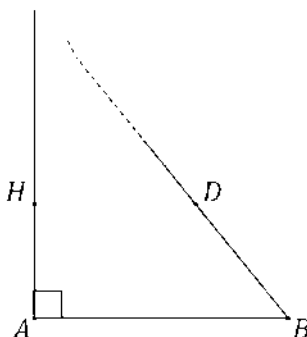


Figura 7: Proposición XVII

¹⁴Al respecto Dou, que toma a la geometría de los *Elementos* como la axiomatización de Hilbert (ver Apéndice A) y comenta en (Dou, 1994): “Si no fuera por el axioma de la longitud infinita de la recta y consecuentemente por los axiomas de intermediedad, y no sólo por los de separación propios de la geometría elíptica, tal demostración sería imposible”. Concretamente Dou dice que Saccheri comete el mismo paralogismo de la demostración de la proposición I.16 de los *Elementos*. Más aún, en las proposiciones III a la XIII Saccheri usa en varias partes las proposiciones I.16 y I.17 de los elementos, las cuales no son generalmente validas en la hipótesis del ángulo obtuso y dependen de la infinitud de la recta. Al respecto se puede leer (Dou, 1970b).

Proposición (XXVII)¹⁵. *Si una recta AX (Figura 8) forma un ángulo pequeño en A con AB , debe intersectar a toda perpendicular elevada sobre el punto B' de la recta AB a cualquier distancia del punto A . Entonces, queda completamente demostrada la imposibilidad de la hipostasis del ángulo agudo.*

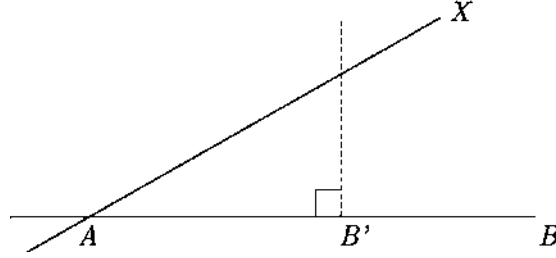


Figura 8: Proposición XXVII

Proposición (XXXII). *En la hipótesis del ángulo agudo, dos rectas o bien como se cortan, como CA y BX (Figura 9)¹⁶; o tienen una perpendicular común MN , como AD y BX ; o son asintóticas, como AX y AX' son asintóticas a XX' .*

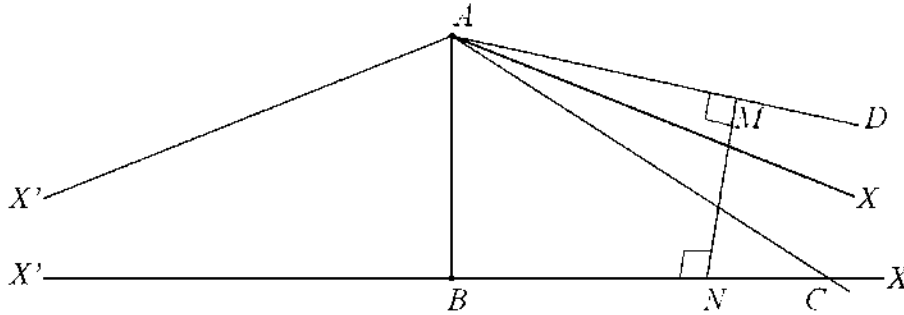


Figura 9: Proposición XXXII y XXXIII.

¹⁵Decimos que no es intuitiva más en el sentido de su contrarecíproca: *Bajo la hipótesis del ángulo agudo se cumple que: para todo ángulo tan pequeño como se quiera existe un punto, sobre alguno de los lados del ángulo, de tal manera que la perpendicular en este punto a ese mismo lado nunca cotara al otro lado.*

¹⁶Se repite en la nomenclatura la letra X al igual que lo hacía Saccheri en sus imágenes, esto ha hecho pensar a algunos que el mismo Saccheri concebía al punto X con un ya como un punto ideal.

Proposición (XXXIII). *La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque repugna a la naturaleza de la línea recta.*

La larga prueba de esta proposición se hace con cinco lemas y dos corolarios y el paralogismo, que se encuentra en el primer párrafo donde se hace la inserción indebida de un punto en el plano, a saber, un punto X que es la intersección de dos rectas asintóticas AX y BX las cuales, a su vez, tienen que admitir una perpendicular común en el punto X . Saccheri toma la recta AX asintótica a BX (Figura 10) y dice que la recta AX es el límite de las rectas AC que intersecan a BX . Pero también la misma recta AX asintótica es el límite de las AD , cuando los puntos N (que están sobre BX) de la perpendicular común MN se alejan de B .

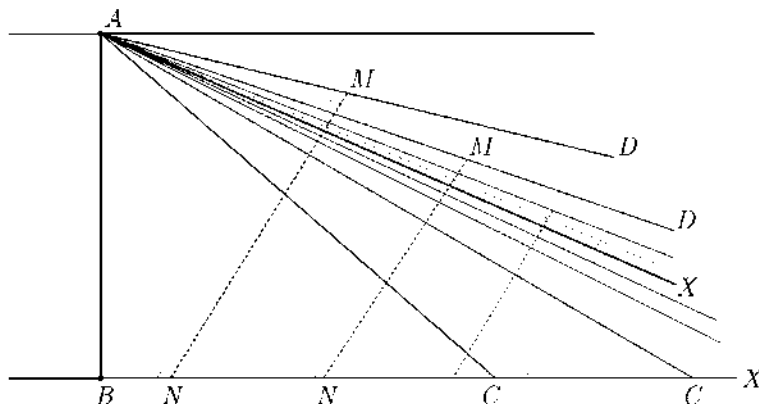


Figura 10: La línea AX vista como límite de las AD y AC .

Sobre lo que ya dicho Saccheri argumenta:

existen dos rectas AX , BX , que tendidas al infinito hacia los mismos lados donde los puntos X , debe reunirse juntas en una misma línea recta. Y a su vez deben recibir, en uno y en el mismo punto infinitamente distante X , una perpendicular común en el mismo plano¹⁷.

¹⁷ *existentes rectas AX, BX , quae in infinitum protractae frente eas contradictorio punctorum X en la urtynam tándem eandemque rectam lineam coire debeant, nimirum recipiendo, en uno eodemque infinita dissito puncto X , comuna de eodem cum ipsis de piano perpendicularum* (Saccheri 1992, p. 173).

Saccheri prueba con los cinco lemas que tal conclusión está en contra la “naturaleza” de la línea recta, por lo que la hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa.

El paralogismo aquí consiste en que dicho puto no cumple con los axiomas de congruencia¹⁸, pero por otro lado, para llegar a la contradicción él debe recurrir a algún axioma de congruencia, lo que hace en varias partes de su libro al insistir en que todos los ángulos rectos deben ser congruente. Respecto al paralogismo sigamos con Dou:

El paralogismo de Saccheri radica en el supuesto de la existencia de dos límites sin pruebas. Ciertamente existe la recta AX asintótica por causa del axioma de continuidad, pero no los puntos X , ni como límite de C , ni como límite en el infinito de las perpendiculares comunes NM . El punto X que es introducido en varias figuras del *Euclides* se ha introducido sólo nominalmente por considerar la claridad y se puede introducir realmente como un “*punto del infinito*”, pero Saccheri no se da cuenta de que no puede ser introducido como un punto *ordinario* del plano geométrico. Saccheri cuando prolonga la recta incluye al punto X y aún más, por así decirlo, a los puntos ideales, pero considera todos estos puntos como elementos comunes de la geometría plana, lo cual no se pueden hacer. Saccheri es aquí una víctima, a pesar de sus mismas advertencias, de la confusión entre lo nominal y las definiciones reales en el caso de un proceso de limitación en el infinito. Él no se da cuenta del punto X y la perpendicular común en el infinito, precisamente porque ellos lo conducen a una contradicción con los axiomas admitidos, no puede ser introducido como los puntos ordinarios del plano; y por otro lado, la geometría del ángulo agudo puede ser perfectamente desarrollada sin ellos. (Dou 1970b, p. 391)

El paralogismo mencionado se comprende mejor con el Modelo de Beltrami-Klein para la Geometría hiperbólica (Figura 11). En este modelo, que más adelante lo retomaremos, las rectas son las cuerdas de la circunferencia pero

¹⁸El grupo de axiomas IV de los *Fundamentos de la Geometría* de Hilbert (ver Apéndice A).

sin los extremos, que son los puntos ideales o puntos al infinito; los puntos ordinarios son los que están en el interior. El punto X puede introducirse como punto ideal, pero no como punto ordinario.

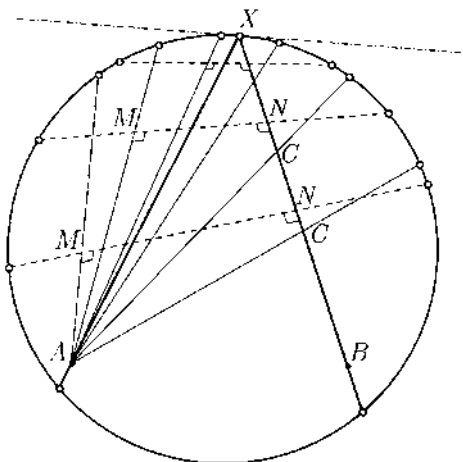


Figura 11: Modelo de Beltrami-Klein. Si comparanos con la Figura 10, notamos que el punto X , que es intersección AX y BX , es un punto en el infinito y no un punto ordinario.

Ahora las razones por las que se piensa que Saccheri cometió dichos paralogismos son varias: a) desde antes y durante la realización de su libro, él estaba convencido de la veracidad del quinto postulado; b) obviamente su contexto histórico, científico y filosófico; c) su ignorancia sobre el paralogismo cometido por Euclides en la proposición I.16 de *Los Elementos*; y d) su confianza en la experiencia empírica que lo hace considerar que la línea representa solo a un objeto de la realidad empírica. También vale la pena notar que en la segunda parte de su libro, de la proposición XXXIV en adelante, pretende dar otra prueba para refutar la hipótesis del ángulo agudo, ciertamente en esta prueba también comete otro paralogismo, aunque aborda el problema de manera distinta.

Finalmente, sobre Saccheri decimos que la importancia de sus trabajos y la razón por la cual lo abordamos tan a detalle, consiste en que con la intención de demostrar el quinto postulado, sentó las bases de una nueva geometría, que fue descubierta posteriormente por Lambert, Gauss, Bolyai y Lobachevski, en quienes él influyó.

Su *Euclides* se considera como el primer tratado de geometría hiperbólica aunque no se considera a Saccheri como un creador de dicha teoría, ya que sus intenciones con este libro no era la de crear otra rama de la geometría sino justificar a Euclides. Este libro pese a que no cumplió su cometido, constituye un buen ejemplo de la metodología empleada, un gran razonamiento por *reducción al absurdo*. Saccheri es el primero en aplicar una metodología adecuada para lograr el esclarecimiento de este tipo de cuestiones.

A grandes rasgos y con abuso de simbología, su método consiste en que para demostrar $S \vdash Q$, siendo S los axiomas de la geometría euclidiana¹⁹ quitando Q el postulado de las paralelas, comienza introduciendo $\neg Q$ y pretende demostrar $S, \neg Q \vdash Q$ para esto procede a buscar una contradicción suponiendo $\neg Q$, o sea $S \vdash (\neg Q \rightarrow (\gamma \vee \neg \gamma))$, para que con reducción al absurdo llegar a $S \vdash Q$. Así pues Saccheri supuso $\neg Q$ y se dedicó a hacer un bagaje muy extenso (gran parte de su libro) deduciendo nuevos teoremas necesarios para llegar a la supuesta contradicción²⁰. El abordar el problema de forma distinta sobre lo que ahora son cuestiones de consistencia, produjo un impacto que condujo hasta la creación del método axiomático formal o existencial y, en consecuencia, una nueva interpretación de las matemáticas mismas (Dou, 1970b).

2.2.3. Esbozo histórico después de Saccheri

Después de Saccheri, los matemáticos continuaron trabajando el problema del quinto postulado; al que más influyó fue Johann Heinrich Lambert (1728-1777), filósofo y matemático alemán quien hace sus aportaciones en su libro *Theorie der Parallellinien* de 1766, donde elige un camino similar al de Saccheri pero sobre cuadriláteros trirectángulos y con las mismas tres hipótesis.

Lambert descarta rápidamente la hipótesis del ángulo obtuso; lo notable es que indica, por una parte, que dicha hipótesis es válida en la geometría de la

¹⁹Los axiomas de la geometría euclidiana denotados por S son los de incidencia, de orden, continuidad y congruencia de la axiomatización de Hilbert (Apéndice A) junto con el axioma de la longitud infinita de la recta.

²⁰Alberto Dou describe el método como: para lograr demostrar $S \vdash Q$ primero el pretende demostrar $S, \neg Q \vdash Q$ para que con la ley de Clavius $(\neg Q \rightarrow Q) \rightarrow Q$ y el teorema de deducción de teorías de primer orden, el resultado $S \vdash Q$ se sigue de $S, \neg Q \vdash Q$.

esfera aunque, por otra parte, comete el mismo pecado que su predecesor al suponer de manera implícita la infinitud de la línea recta. Sobre la hipótesis del ángulo agudo, trabaja con mucha más detalle que Saccheri y llega a importantes resultados y conclusiones, entre ellas, que dicha geometría del ángulo agudo puede ser válida en una esfera de radio imaginario. También se le atribuye ser el primero que considerar seriamente la posibilidad, por los menos en términos lógicos, de que la geometría del ángulo agudo sea la verdadera en nuestro mundo (Dou, 1992). Naturalmente, como en el caso de Saccheri, su demostración de la imposibilidad de la hipótesis de ángulo agudo es falsa.

Después, el problema de las paralelas empezaba a tener otro giro; ahora ya se comenzaba a aceptar que el quinto postulado era independiente de los demás axiomas. Al respecto el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) quien desde los 15 años estaba interesado en el problema de las paralelas, se dice que fue el primero en tener una idea clara sobre una geometría independiente del quinto postulado, pero en un inicio no publica al respecto por temor a la crítica y, en parte, por su perfeccionismo.

En correspondencias con Gauss, Karl Schweikart (1780-1859) presenta sus hallazgos sobre lo que llama *Geometría astral*; a lo que Gauss le contesta que él también ya había desarrollado una teoría muy similar con anterioridad.

Adolph Taurinus (1794-1874), sobrino de Schweikart, aborda el problema y publica dos libros importantes, *Theorie der Parallelliniende* 1825 y *Geometriae prima elementa* de 1826. En el primero contribuye con nuevos teoremas en la misma línea que Saccheri y Lambert, notándose una diferencia con sus antecesores al hacer la afirmación explícita y rotunda de que la geometría del ángulo agudo no contiene en sí misma ninguna contradicción²¹ (Dou, 1992); y en el segundo libro desarrolla una trigonometría válida en la geometría del ángulo agudo. Otras de sus contribuciones importantes son las condiciones para que la geometría del ángulo agudo tienda a la euclidiana, además de encontrar el ángulo del paralelismo, sólo por comentar algunas.

²¹ Acerca de esta afirmación Dou dice: “Saccheri estaba convencido de lo contrario, Lambert había manifestado seriamente sus dudas, pero es Taurinus quien lo afirma públicamente por primera vez.” (Dou, 1992)

Farkas Bolyai (1802-1860) le manda a su profesor y amigo Gauss sus hallazgos sobre el tema, a lo que Gauss le hace notar los errores que había cometido, aunque posteriormente ya no siguió su correspondencia sobre el tema. El hijo de Farkas, János Bolyai abordó también el problema y a pesar de los consejos de su padre para que no lo hiciera, años más adelante publica sus trabajos, respecto a lo que Gauss comenta que ya había obtenido esos resultados con anterioridad, pero que le alegraba que fuera el hijo de su amigo quien los publicara. Sobre esto János siente que Gauss no valora adecuadamente su trabajo. En sus investigaciones se plantea también la idemostrabilidad del quinto postulado, aunque no acierta en ese cometido.

Ahora bien, ni Bolyai, ni Gauss tenían noticias sobre los trabajos de Nikolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856), quien era profesor de la Universidad de Kazán y también estaba interesado en la cuestión de las paralelas. A él se le da el mérito de ser el primero en publicar resultados referentes a una geometría en la cual se admitía que por un punto fuera de una recta pasen dos paralelas. En 1823 presenta un manual de geometría, el cual no fue bien recibido por su academia, donde expresa que no ha sido descubierta una verdadera prueba del quinto postulado y que todas las anteriores solo podían ser llamadas explicaciones. Después presenta un libro en el que expone los principios de su llamada Geometría imaginaria; en un inicio la publicación de este trabajo fue desaprobada y recibió fuertes críticas, pero posteriormente tuvo la oportunidad de publicarlo. Pese a esas reacciones Lobachevski no desistió y en 1840, insistiendo en aumentar la divulgación de su trabajo, publica otro libro titulado en alemán “*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*”, el cual permitió que los matemáticos tuvieran contacto con sus ideas.

El alumno de Gauss, Bernard Riemann (1826-1866) trabaja para la elaboración de generalizaciones a las ideas de Gauss. Como se sabe, Riemann aborda la investigación de las geometrías desde un punto vista más abstracto, en su trabajo “*Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría*”, se remite a un espacio acotado en que supone tres condiciones: que sus puntos son una multiplicidad²² continua de tres dimensiones; que en lo infinitamente pequeño la geometría euclidiana se vale; y que el espacio es aplicable sobre sí mismo sin modificación de longitudes. Con estas condiciones sólo tres geometrías de las que hemos hablado son posibles (Cavaillés, 1992).

²²Entiendase aquí multiplicidad como conjunto.

Aunque en esa primera etapa el trabajo sobre las Geometrías no euclidianas se habían sesgado a desarrollar la geometría del ángulo agudo, a Riemann se le atribuye el desarrollo una geometría del ángulo obtuso hoy conocida, gracias a Klein, como Geometría elíptica.

2.2.4. Consistencia, modelos y la aceptación de nuevas geometrías

Aunque en algunos círculos de matemáticos se contaba ya con cierta aceptación de estas nuevas geometrías, quedaba abierta la cuestión de si no se encontraba contradicción alguna en sí mismas, Lobachevski y Bolyai intentaron en cierta manera demostrar la consistencia de sus geometrías, buscando una confirmación en la naturaleza; matemáticos posteriores abordaron el problema de otra forma.

Para demostrar la consistencia de estas teorías, a grandes rasgos, lo que se hizo fue: asumiendo la consistencia de la Geometría euclidiana, se correlacionan los objetos y relaciones de la Geometría hiperbólica o de la elíptica con objetos y relaciones de la Geometría euclidiana, y se demuestra que bajo esta correlación se satisfacen los postulados o axiomas de esas Geometrías no euclidianas²³. Entonces, si está dada la consistencia de la euclidiana, se le trasmite este carácter a la otra teoría por medio de dicha correlación.

Aquí es importante notar que la idea fundamental para la resolución del problema de la consistencia vino dada con los inicios de una nueva forma de concebir los axiomas y los objetos matemáticos. Estos axiomas y objetos comenzaban a no tener que hacer estricta alusión a las descripciones ordinarias o habituales de los mismos bastará, en cierto sentido, solo con suponer la existencia de objetos que nominalmente usan esas palabras y que entre estos objetos existen relaciones, igualmente sin alusión estricta a sus descripciones, con las que se puedan ya estructurar los axiomas.

La correlación entre objetos se hace por medio de un *modelo*, que es la elección de objetos de algún “universo”, en el que las relaciones sobre ese “universo”

²³Ejemplos de cómo se hacen estas demostraciones son: basándose en los axiomas de Euclides y con herramientas de geometría diferencial (Galván, 2004), con los axiomas de Hilbert y el Modelo del disco de Poincaré (Eves, 1969 pp. 391-397).

satisfacen los axiomas. Un modelo es pues una representación de la estructura de dicha teoría, por lo que la demostración de la consistencia de las nuevas geometrías consiste en la construcción de modelos, digámosles euclidianos, en donde los axiomas, y por tanto los teoremas, de las Geometrías no euclidianas puedan ser *comprendidos* dentro de la Geometría euclidiana. Teniendo un modelo euclidiano de alguna Geometría no euclidiana, el argumento para la demostración de no contradicción es el siguiente: si hubiera un teorema contradictorio en la dicha geometría, también lo sería en la geometría de su modelo, o sea en su representación euclidiana, lo que no puede pasar si se supone previamente la no contradicción de la Geometría euclidiana.

Entonces para resolver el problema se vuelve necesaria la búsqueda de modelos en los cuales podían ser interpretadas estas geometrías. De los primeros y más importantes trabajos son los de Eugenio Beltrami (1835-1900) en su *Saggio di interpretazioni della geometria non-euclidean* (*Ensayo de Interpretación de la Geometría No Euclidiana*) y en su “*Teoría fondamentale degli spazii di curvatura costante*” (*Teoría Fundamental de los Espacios de Curvatura Constante*), ambos de 1868, donde aborda el problema con ayuda de una geometría intrínseca de una superficie, y los de Félix Klein (1849-1925) en su “*Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*” (*Sobre la llamada Geometría no Euclidiana*) de 1871 donde sitúa esta cuestión en el contexto de la Geometría proyectiva. Esto sin omitir las posteriores contribuciones de Henry Poincaré (1854-1912) o de David Hilbert (1862-1943) entre otras. A continuación se da una muestra de los modelos más usuales.

Los modelos de la geometría

La esfera. En la búsqueda de modelos, el referenciado para la geometría del ángulo obtuso o elíptica es la esfera euclidiana (Figura 12). En este modelo, que cumple con que los ángulos interiores de los triángulos es mayor de dos rectos, las “rectas elípticas” se interpretan como los círculos máximos sobre la esfera e identifiquemos los puntos diametrales opuestos de la esfera como un único objeto.

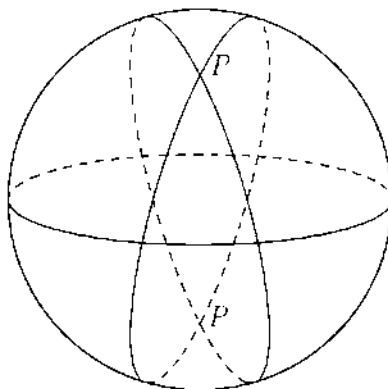


Figura 12: Modelo de la esfera para la geometría del ángulo obtuso.

Para la prueba de la consistencia de la Geometría elíptica, en 1869, Beltrami observa que ésta es satisfecha en la superficie de la esfera euclidiana, por lo que el mismo argumento es válido para este modelo.

La mayoría de los modelos hiperbólicos fueron establecidos entre 1868 y 1881 y se cuenta con variedad de ellos, todos son equivalentes y cada uno de los cuales cuenta con ventajas y desventajas respecto a los otros. A continuación solo haremos una breve descripción de ellos.

La pseudoesfera²⁴. Uno de los primeros modelos es la pseudoesfera (Figura 13) y su creación se atribuye a Beltrami. Este modelo consiste en la superficie de revolución de la curva tractriz²⁵ sobre su asíntota, aquí los “puntos hiperbólicos” se identifican con los puntos sobre dicha superficie y las “rectas hiperbólicas” son las curvas que determinan la mínima distancia entre dos puntos (geodésicas). La forma de medir la distancia entre dos puntos es la magnitud euclidiana de la curva que los une.

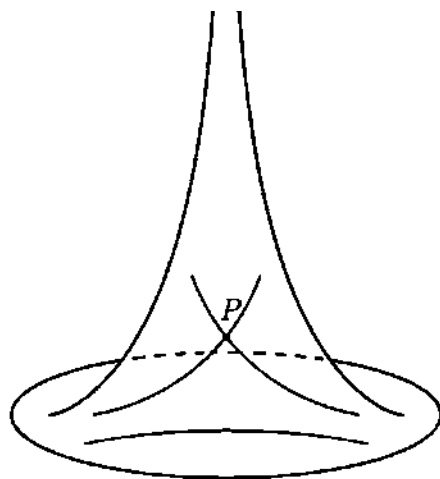


Figura 13: Pseudoesfera.

Este modelo aunque cumple naturalmente con la negación del quinto postulado al estilo Lobachevski, no es incompleto ya que después se hizo notar que sobre la pseudoesfera no se puede “acercar” tanto como se quiera a sus bordes²⁶. Este modelo lo mencionamos por el papel fundamental que tuvo para la aceptación de esta nueva geometría.

²⁴Beltrami utiliza en general la palabra pseudoesfera para referirse a superficies de curvatura constante negativa restringidas a un círculo. Incluso en sus memorias propone llamar “pseudoesférica” a la Geometría no euclidiana.

²⁵La tractriz es la curva con la propiedad de que la distancia de uno de sus puntos, medida solo sobre las rectas tangentes a la misma, a los puntos de una recta dada, se mantiene constante.

²⁶No existe ninguna superficie regular (sin singularidades) analítica en la cual la geometría de Lobachevski–Bolyai sea completamente válida. Este es un teorema de Hilbert; dicho en otras palabras: No existe en $\mathbb{R}^3$ ninguna superficie cerrada de curvatura constante negativa.

Modelo de Beltrami-Klein:²⁷ El matemático Félix Klein completa un modelo que ya había sido concebido por el mismo Beltrami. Este modelo (Figura 14) consta de un disco K ; aquí las “rectas hiperbólicas” coinciden con las cuerdas euclidianas. Los puntos son solo los del interior de dicho disco; la forma de medir los ángulos y las magnitudes es distinta a la euclidiana. Este modelo puede correlacionar con un hiperboloide por medio de una proyección.

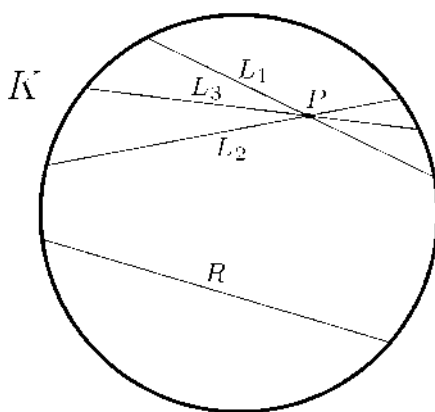


Figura 14: Modelo de Beltrami-Klein.

Disco de Poincaré: Aunque se dice que también fue ideado por Beltrami (Amilibia, 1994), este modelo consiste en un disco D , los puntos son los puntos del interior del disco y las rectas son los círculos ortogonales a la frontera del disco y también los diámetros de esta misma. Las “rectas hiperbólicas” así interpretadas tienen la propiedad de que, si se cortan, solo lo hace en un único punto y si no se cortan se dice que son paralelas, con lo que es fácil ver que en este modelo se cumple la negación del quinto postulado al estilo Lobachevski (Figura 15).

Los ángulos entre dos de estas rectas se miden de forma euclidiana (el ángulo formado por las tangentes en su punto de intersección) y la forma de medir la

²⁷Según J.M. Montesino ya desde 1867 José Battaglini estaba en posesión de la parte sustancial del modelo proyectivo (Beltrami-Klein) de la geometría hiperbólica, pero no lo desarrolló a la perfección, incluso concluye que puede considerársele a él como un “precursor” de Beltrami y de Klein (Amilibia, 1994).

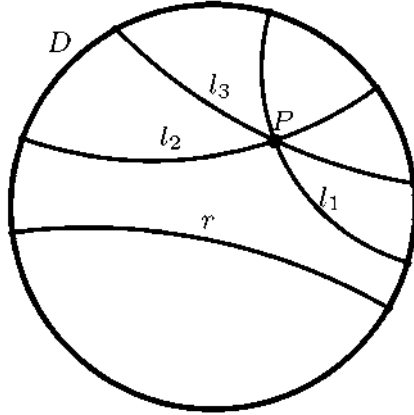


Figura 15: Los arcos dentro de D son “rectas hiperbólicas”. Por P pasan l_1 , l_2 y l_3 que son paréelas a r .

distancia es distinta a la euclidiana. Los triángulos en este modelo tienen la propiedad de que la suma de sus ángulos interiores es menor que dos rectos.

Semiplano de Poincaré: Otro modelo para la Geometría hiperbólica resulta ser el semiplano superior definido como el conjunto H (Figura 16) de los puntos (x,y) del plano cuya coordenada en y sea mayor que cero.²⁸

Aquí los puntos serán aquellos que tengan coordenada y estrictamente mayor que cero y las rectas hiperbólicas serán las semicircunferencias ortogonales al eje x junto con las rectas perpendiculares a este que estén sobre el semiplano. Los ángulos se miden como en D y las distancias en el modelo H se dan en términos de logaritmos.

Con esta variedad de modelos y con las primeras demostraciones de consistencia relativa de las geometrías, terminaremos este apartado presentando el argumento general para demostrar la independencia del quinto postulado: Si la Geometría euclidiana es consistente y si suponemos que se puede demostrar Q a partir de los axiomas restantes, entonces alguna Geometría no euclidiana sería inconsistente, ya que si de los primeros axiomas se deduce

²⁸Como se relacionan el disco y el semiplano de Poincaré es: trabajando sobre $\mathbb{R}^2$ tomamos el disco D como el centrado en el origen y de radio 1, después se construye el círculo C de centro en $(0,-1)$ y de radio raíz de 2. Finalmente la forma en que se relacionan es por medio de la inversión en C .

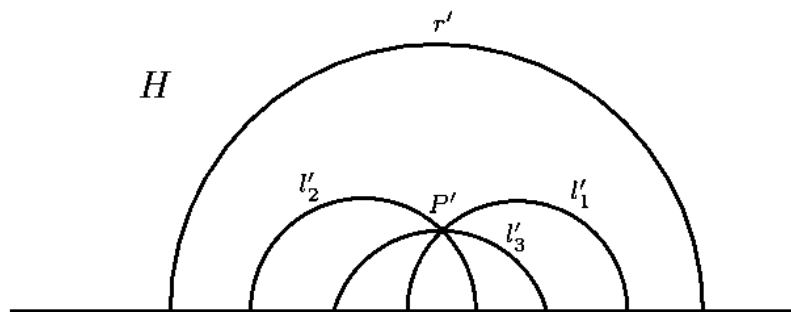


Figura 16: Las semicircunferencias son “rectas hiperbólicas”. Por P' pasan l'_1 , l'_2 y l'_3 que son paréelas a r' .

Q , al unir $\neg Q$ seguirá siendo posible deducir a Q por lo que tendríamos a la vez Q y $\neg Q$, lo cual no puede ser ya que con la misma consistencia de la Geometría euclidiana se demuestra, gracias a los modelos, la consistencia de esa Geometría no euclidiana.

2.2.5. Una nueva axiomatización de la Geometría

Una vez demostrada la consistencia de estas nuevas teorías, no es sorprendente que surgiera la necesidad de un manejo más riguroso de ellas. Uno de los primeros más importantes y completos intentos de sistematización fue hecho por Moritz Pasch (1843-1930), quien en 1882 publica “*Lecciones sobre la Geometría Nueva*” donde presenta la disciplina de un manera novedosa y basada en un minucioso y claro examen axiomático; intenta no hacer referencia a los diagramas o las figuras, sino que procura seguir cuidadosamente las inferencias deductivas de los axiomas, aunque para Pasch el significado de los axiomas es netamente geométrico (Corry, 2002).

Al respecto leamos a Cavaillés (1903-1944) quien hablando sobre el fundamento filosófico de Pasch, cita su mencionada obra:

La matemática, en tanto que ciencia, no es sino un encadenamiento lógico; “el proceso de demostración debe ser en todo momento independiente del *sentido* de los conceptos, como debe serlo

también de las figuras: solo las relaciones establecidas en los principios o en las definiciones deben ser tomadas en cuenta”. Pero las relaciones fundamentales fueron tomadas de la experiencia: es la unidad de ésta, la “representación incesante las observaciones desde tiempos inmemoriales” la que garantiza la posibilidad de la geometría como ciencia; la que impone también las posibilidades *naïves*. (Cavaillés 1992, p. 67).

Esta posición empirista de Pasch es la que limita por una parte, la trascendencia de su trabajo pero, por otra parte, las nuevas axiomatizaciones de la geometría continuaron un rumbo hacia la no dependencia estrictamente de las intuiciones geométricas, sino más de una estructura lógica; una nueva axiomática sin necesaria referencias a percepciones como en el caso de Euclides. Es en este sentido que interviene David Hilbert (1862-1943) con su “*Grundlagen der Geometrie*” (*Fundamentos de la Geometría*). Este libro fue publicado por vez primera en 1899 y es considerado como una versión moderna de *Los Elementos* de Euclides, pretende fundamentar la geometría a través de un nuevo sistema axiomático basado, en gran medida, en el trabajo de Pasch. En este nuevo sistema, los entes u objetos geométricos juntos con las relaciones entre estos, ahora se entenderán más como aquellas “cosas” que satisfacen el sistema axiomático.

En los *Grundlagen*, primero se hace referencia a la distinción de tres tipos de cosas (*Dingen*): los *puntos*, las *rectas* y los *planos*, para después concebirlos en ciertas relaciones recíprocas, expresadas por palabras tales como «estar situado», «entre», «congruente», «paralelo», «continuo»; donde la completa y exacta descripción de éstos se hará mediante los *Axiomas de la geometría* (Hilbert, 1950).

Divide los axiomas en cinco grupos llamados de conexión, orden, las paralelas, congruencia y continuidad o arquimedianas; que describen las relaciones anteriores; así como un axioma de completitud²⁹, este último no es propiamente de naturaleza geométrica. Estos grupos de axiomas, según Hilbert,

²⁹ Este axioma no apareció en la primer edición de 1899 del libro, sino hasta la traducción al francés de 1900 y básicamente dice que: *no es posible añadir al sistema de puntos, líneas y planos otro sistema de objetos, de modo que en el sistema obtenido por esta composición los (grupos de) axiomas I–V.1 sean válidos*. (Giovannini, 2013). En adelante para ver los axiomas o grupos de axiomas de Hilbert, recurra al Apéndice A.

tendrán que cumplir con ciertas propiedades:

*Compatibilidad*³⁰ (*Consistencia*). Que no es posible deducir de estos axiomas, por ningún proceso lógico de razonamiento, una proposición que sea contradictoria con ninguno de ellos

*Independencia*³¹. Que ninguno de ellos puede ser deducido del resto por ningún proceso lógico de razonamiento.

*Compleitud*³². Que permita derivar todos los teoremas o resultados conocidos.

Simplicidad. Que un axioma contenga “no más de una sola idea”.

De estas cuatro condiciones, solo aborta explícitamente a las primeras dos, dedicándose a ello en el segundo capítulo de su libro. Ahí Hilbert demuestra la compatibilidad o no contradicción de sus grupos de axiomas, reduciéndola a la de cierto *dominio*³³ de números reales, con técnicas de Geometría analítica, lo que hace es construir un modelo, una geometría basada en ese *dominio*, en la que demuestra la validez de los cinco grupos de axiomas, concluyendo que: “*Toda contradicción en las consecuencias de los axiomas I-V necesitara verse, según esto en la Aritmética del sistema de números reales.*” (Hilbert 1996, p. 41); lo cual no pasará si se supone de antemano la no contradicción de esa aritmética.

En tanto a la independencia, lo primero que hace es asumir la independencia de los grupos de axiomas de conexión y de orden argumentando que forman

³⁰Hilbert 1950, p. 17.

³¹Hilbert 1950, p. 19. Sobre esta condición posteriormente E. H. Moor demostró en 1902 que el axioma cuatro del grupo de orden es consecuencia de los demás postulados por Hilbert.

³²La completitud aquí no debe confundirse con los con el concepto de la posterior en Teoría de Modelos, ni con lo referente a su axioma de completitud, sino que tiene un intención meramente pragmática. Esta propiedad, así como la siguiente, Hilbert las toma de concepciones expuestas por Hertz para el tratamiento axiomático de las teorías físicas. (Corry, 2002)

³³ Hilbert lo define así: *el dominio Ω de todos aquellos números algebraicos que salen del número 1 al aplicar un número finito de veces las cuatro operaciones de cálculo, suma, resta, multiplicación, división y la quinta $\sqrt{1+\omega}$, donde ω , en cada caso significa un numero, el cual, a su vez, puede haberse originado de esas cinco operaciones.* (Hilbert, 1996 pág. 38).

la base para los restantes. Después, para el axioma de las paralelas, recurre al argumento ya mencionado pero aplicado a su demostración de compatibilidad y, en sus términos, a una versión espacial del Modelo de Beltrami para la Geometría no euclidiana.

Para el grupo de axiomas de congruencia expone una geometría en la que no se cumple, en particular, su primer teorema de congruencia de triángulos³⁴, que es producto de dicho grupo, pero que si cumpla con el resto de los grupos de axiomas. Llegando así las mismas condiciones de contar con modelos de una “*geometría no congruente*” y de una geometría congruente, que es la ordinaria.

En tanto al axioma de continuidad procede de la misma manera, obtiene modelos o “*geometrías no arquimedianas*”. En forma parecida al modelo construido para demostrar la compatibilidad solo que ahora su dominio será una especie de números complejos sin la propiedad no arquimediana.

Después de los trabajos de Hilbert, siguieron numerosas axiomatizaciones para la geometría como los de O. Veblen (1880-1960), Gilbert de B. Robinson (1906-1992), E. V. Huntington (1974-1952), H. G. Forder (1889-1981) y a nivel pedagógico los de G.D. Birkhoff (1884 –1944).

Por el momento no abundaremos más en la cuestión de los sistemas axiomáticos. Sólo comentamos que los *Grundlagen* es un importante precedente de la *axiomática formal* que, posteriormente, desarrolla Hilbert, en lo que hoy se conoce como el Programa de Hilbert para los Fundamentos de la matemática. Subrayamos que la axiomática formal de la Geometría de Hilbert en esa época no es la de su formalismo tal y como la desarrolla a inicios del siglo XX, él mismo en un inicio concebía a la geometría como una ciencia natural³⁵ pero, reiteramos, que si es un precedente.

³⁴El criterio LAL para verificar congruencia de triángulos.

³⁵Al respecto se puede ver (Corry, 2002) o (Giovannini, 2011)

2.2.6. Conclusión

En un inicio la matemática nació como necesidad de medir o cuantificar objetos concretos (terrenos, costales, hombres o en una astronomía primitiva) y su única intención era eso. Los resultados que se podían obtener por medio de generalizaciones por analogía, sólo eran corroborables empíricamente; o sea, si efectivamente eran aplicables a los objetos sobre los que se trabajaba, se consideraban como ciertos. La matemática comenzaba como una ciencia con carácter meramente pragmático.

Después de la crisis pitagórica, la matemática se enfoca a la geometría para convertirse en una ciencia abstracta; se trabajó con ciertas proposiciones emanadas, una de otras, mediante deducciones basadas en la lógica, separando así los axiomas o postulados³⁶, que son de carácter apodíctico y referidos a entes inmediatos a nuestra intuición, de los teoremas o proposiciones obtenidos de estos solo por medio de deducciones. Se pasó de una corroboración necesariamente empírica a una basada en el análisis lógico de las deducciones por las cuales se llega a cierto resultado matemático.

Este método es identificado naturalmente, pese numerosos detalles³⁷, en *Los Elementos* de Euclides, como una axiomática material en el sentido de que los axiomas se refieren ineludiblemente a entes evidentes y su corroboración es por percepción física.

Podemos decir que la geometría de esa época teoriza sobre el mundo material tangible, que en el sistema euclídeo los postulados y nociones comunes son tomados como verdades, que se desprendían de una experiencia que describen en cierto modo propiedades del espacio físico, tal y como era entendido en esa época, que los conceptos en la Geometría de Euclides son una idealización de figuras en la naturaleza y, finalmente, que el concepto de verdad en esa matemática no es tanto como una propiedad lógica, sino una propiedad aparentemente observada o corroborada en el mundo físico alcanzable por nuestra intuición.

³⁶Originalmente la diferenciara radica en que el primero tiene la cualidad de evidente; la diferencia se ha ido diluyendo prevaleciendo el termino axioma.

³⁷La intersección de circunferencias o la suposición implícita de la infinitud de la recta.

Con este enfoque el Quinto postulado posee, inherentemente, una naturaleza distinta al referirse a lugares inalcanzables cuando se busca su corroboración como antes lo señalamos, esto desencadenó en la emergencia de nuevas geometrías que, a su vez, generó el estudio de las propiedades que tiene, o que debe de tener, un sistema de axiomas.

En particular la cuestión del Quinto postulado y la emergencia de las Geometrías no euclidianas dirigieron la atención, en lo referente al método axiomático en la geometría, hacia lo que es o podía tener la categoría de axioma, definiendo así otras orientaciones en lo que concierne a las nominaciones en la matemática. Por ejemplo: en términos de la geometría, ahora podemos bien nombrar como recta a lo que puede *verse* o *ser* como una circunferencia. De alguna manera la idea de la recta queda vacía de contenido o referencia material como tal; ya no se hace necesario que la recta en sí preserve su cualidad “intuitiva” de ser *derecha*, ahora una recta es solo algo que cumplé ciertas propiedades. A esto es a lo que nos referimos con otras orientaciones.

Estas nuevas formas de entender los entes o a la matemática misma, naturalmente tuvo repercusiones en lo que concierne al Método axiomático en sí. Como se mencionó en un inicio, la naturaleza de los objetos matemáticos son los que determinan a los axioma de la matemática, pero después son los axiomas los que determinan la naturaleza de los objetos; los objetos matemáticos ahora son simplemente aquellas cosas o los entes que cumplen los axiomas. De este modo o con estas nuevas libertades, por ejemplo, fue posible el desarrollo de Geométricas abstractas, satisfactoriamente lógicas.

Siguiendo esta línea, la axiomática como método sufre un cambio radical en el sentido de que ya no se centraliza en la “verdad” que hereda de los axiomas, sino ahora solo en la “no contradicción” de los axiomas, que ya no son estrictamente referenciales a una realidad material. Con lo anterior queremos decir que el mismo concepto de “verdad” en matemática sufre un cambio; si nos preguntamos ¿es “verdad” que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos? Ahora solo podríamos decir que depende de la geometría en que estemos; entonces, ¿qué significa “verdad” en matemáticas? El cuestionamiento queda abierto, pero podemos pedir, como exigencia mínima para estas geometrías, la consistencia aunque no sea absoluta.

Lo dicho en párrafos anteriores es en lo relativo a la matemática, pero la crisis euclidiana repercutió también en otras áreas del conocimiento.

En un inicio la Geometría euclidiana se pensaba como *la* representación idealizada de las relaciones espaciales en las que se basa la física, pero si ahora ya se concebían otras geometrías igualmente “validas”, ¿cómo es que podemos saber cuál de estas es la que representa realmente? Por consiguiente, en términos de la física se planteó un problema relacionado con la curvatura del espacio; o sea qué tipo de geometría es la que mejor representa al espacio físico. Estos cuestionamientos, junto con la contribución de estas nuevas geometrías, resultan en que la *Teoría de la relatividad* nos dice que la que más acertada no es la euclidiana.

Finalmente, otra de las consecuencias de esta crisis, aunque discutible, es una revaloración de la filosofía kantiana en tanto a su concepción del espacio. Kant propuso al espacio como una de las condiciones *a priori* que posibilitan nuestro conocimiento sensible y considera a la Geometría euclidiana como un sistema inamovible pero, si las Geometrías no euclidianas reflejan en cierta manera propiedades del espacio que no corresponden a la Geometría euclidiana, entonces la concepción del espacio es la que dependería de las cualidades existentes de tal geometría y no viceversa, como se pretendía en el pensamiento de Kant.

Para Kant nuestras representaciones del espacio y el tiempo no sólo son inherentes a nuestra conciencia, *a priori*, sino que constituyen las formas absolutamente necesarias del pensamiento o posibilidad de conocimiento, fuera de las cuales éste sería imposible, pero si las Geometrías no euclidianas tienen el mismo nivel de verdad, ¿con qué espacio es con el que conocemos según Kant?

Capítulo 3

Tercera crisis, Teoría de conjuntos y paradojas

3.1. Origen y desarrollo de la Teoría de conjuntos de Cantor

3.1.1. Series trigonométricas

Los estudios sobre el desarrollo de la Teoría de conjuntos suelen basarse, inicialmente, en las obras pioneras de Cantor pero, según Ferreirós, se asocia la noción de conjunto exclusivamente con la de Teoría de conjuntos cantoriana, lo cual en términos históricos supone una confusión: la obra de Cantor es el origen en de la Teoría de conjuntos *en cuanto rama autónoma e independiente de la matemática*, pero esto no quiere decir que sea *también* el origen de la orientación conjuntista de las matemáticas; del concepto de conjunto (Ferreirós, 1998).

Usualmente se dice que la noción de conjunto tiene su origen, por un lado, en el estudio de la representación de funciones continuas por medio de series de Fourier, lo que llevó a Cantor a analizar con más detalle los puntos de discontinuidad y, por otro lado, en 1873 con su descubrimiento de que los reales no son numerables, que lo condujo a nociones de cardinalidades infinitas de

distintos tamaños. Es así como generalmente se entiende el nacimiento de la Teoría de conjuntos; nosotros trataremos de desarrollarlo de esta manera, previo mencionando algunas contribuciones de Riemann y Dedekind.

Cronológicamente las primeras contribuciones sobre el concepto de conjunto fueron hechas por Riemann en sus trabajos de 1854, donde presenta una primer noción de *variedad*, de las que distingue discretas y continuas; aunque también ya en sus estudios doctorales de 1851 había introducido las *superficies de Riemann*, para analizar de forma abstracta las funciones complejas multivaluadas. Posteriormente, esos conceptos se verían como variedades continuas, o sea conjuntos continuos. En 1868 publica un trabajo sobre las series trigonométricas, donde presenta su concepción de integral y la intención de realizar un estudio serio de las funciones discontinuas.

Un segundo aporte con una visión conjuntita de las matemáticas, la podemos encontrar en los trabajos de Dedekind en 1871, donde expone la Teoría de los ideales en términos de conjuntos de números o en los 1872 sobre los números reales, donde fundamenta el análisis con sus conocidas cortaduras, las que también están basadas en conjuntos. En ese mismo año se dan a conocer las principales definiciones de los números reales, las de Cantor y Weierstrass; las tres se basan en el “conjunto” de los números racionales. La importancia de estas definiciones se debe a que para la rigorización propuesta por Cauchy, hacía falta establecer con solidez la continuidad de los reales.

Tratar a los conjuntos como objetos de estudio es sí, como ya se mencionó, tiene su origen en George Cantor (1845-1918) quien, abordando el problema de la representación de funciones mediante las series trigonométricas de Fourier, se topa con esta necesidad.

Joseph Fourier (1768-1830) anunciaba en 1807 que cualquier función f definida en un intervalo, digamos $[-\pi, \pi]$, puede representarse mediante una serie trigonométrica de la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

donde los coeficientes a_n y b_n son, para $n \geq 0$, dados por:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (3)$$

Fourier sólo logro demostrar este hecho para algunos casos particulares y esbozó una demostración general, pero con falta de rigor ya que no se preocupó de la convergencia de las series. Dirichlet (1805-1859) fue el primero en dar una demostración satisfactoria de que la serie de Fourier de una función $f(x)$ convergía en un intervalo dado si la función estaba definida y acotada, el número de máximos y mínimos era finito y la función era continua, salvo en un número finito puntos. Riemann continuó con la investigación de Dirichlet debilitando la hipótesis de la continuidad; lo esencial era que la función fuera integrable en todo el dominio.

Cantor aborda el problema tratando de encontrar las condiciones para la unicidad de dichas representaciones; esto lo hace en una serie de artículos publicados de 1870 a 1872.

En lo que sigue no nos detendremos en la demostración rigurosa de los teoremas que citamos, ya que nuestro interés es dar el contexto en el cual surge el análisis de los conjuntos en Cantor y, para ello, haremos un recorrido por los teoremas que lo llevaron a concebir a los conjuntos como objeto de estudio en sí. Si hay interés en abundar en las demostraciones de forma más precisa, contenidas en los artículos publicados en ese periodo se puede ver Dauben (1971), los originales en alemán contenidos en Cantor (1932), o bien las traducción de dichos artículos al castellano hecha por J. Bares y J. Climent (Cantor, 1972).

En el artículo de abril de 1870, Cantor aborda el problema de la unicidad de dicha representación con el siguiente teorema.

Teorema (C1). *Si una función de variable real $f(x)$ está dada por una serie trigonométrica convergente para todo valor de x , entonces no hay otra serie de la misma forma que converja igualmente para todos los valores de x y represente la función $f(x)$.*¹

Notemos que no presupone que f sea integrable, que los coeficientes estén dados por (2) y (3), ni que la serie (1) converja uniformemente. Para demostrar la unicidad, se basa en el siguiente teorema:

¹Dauben 1990, p. 34.

Teorema (C2). *Si dos sucesiones infinitas $a_1, a_2, \dots a_n$ y $b_1, b_2, \dots b_n$ están constituidas de manera que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0 \quad (4)$$

para todo x dado en el intervalo $(a > x > b)$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

De aquí obtiene el siguiente corolario, con el cual demuestra la unicidad de la serie de Fourier.

Corolario (C3). *La serie trigonométrica representa a la función constante $f(x) = 0$ si y solo si $a_n = b_n = 0$, para todo número no negativo n .*

Son estos los términos con los que Cantor, a partir de los artículos de 1871, comienza a hacer generalizaciones de **C2** (y consecuentemente del teorema de unicidad) para los casos en los que la sucesión del límite (4) no converja o tenga un límite distinto de 0. Aquí justamente, es donde Cantor comienza a analizar los conjuntos de puntos en los cuales se puede establecer **C2** haciendo una primera extensión, en ese mismo año, para los casos en los que los puntos excepcionales sean finitos y posteriormente para casos infinitos.

Ya desde finales de 1871, Cantor había logrado su extensión al caso infinito en un artículo publicado en los *Mathematische Annalen*, a inicios de 1872. Dicho artículo consta básicamente de tres partes, la primera dedicada a una construcción de los números reales, la segunda a una exposición sobre los conjuntos *derivados* y la tercera a la demostración del teorema en sí. Aquí sólo expondremos sobre las primeras dos partes, ya que en ellas es donde comienza a manejar los conceptos de conjuntos; sobre la tercera parte, solo mencionaremos el resultado final.

Para su definición de los reales o *magnitudes numéricas*, parte de los números racionales (incluyendo el cero) y los llama dominio A . Sobre estos, obtiene una sucesión $a_1, a_2, \dots a_n$ mediante una *ley* tal que la diferencia de $a_{n+m} - a_n$ se haga infinitamente pequeña mientras aumenta n [una sucesión de Cauchy o fundamental] y, de este modo, llama b al límite de la sucesión. Después, si se tiene dos sucesiones identificadas con b y b' se definen las relaciones $b = b'$,

$b > b'$ y $b < b'$ y también el dominio B que consta de todos los límites b , de las sucesiones así identificadas, llamando a los términos de B *magnitudes numéricas*. Después sobre este mismo dominio B define las operaciones suma, resta, producto, y cociente como los límites de esas operaciones sobre las sucesiones fundamentales en el dominio A .

Así como el dominio A engendra a B , tomado a miembros de ambos dominios para formar sucesiones, es posible hacer un nuevo dominio C donde las operaciones y relaciones se extiende de manera análoga a su precedente. Continuando con este proceso, iterativamente se pueden formar los dominios D , E , F , etc. Sobre estos dominios hace dos distinciones, nota que, por un lado, todos los elementos a de A se pueden corresponder con los b dentro B , pero lo contrario no y, por otro, si se tiene un dominio L diferente de A , se podrá siempre corresponder la magnitud numérica l a cualquier b , c , d , $\dots$, j, k de los dominios precedentes, haciéndolos a estos equivalentes.

En la segunda parte Cantor, pone en correspondencia a los puntos de la línea recta con las magnitudes numéricas de alguno de los dominios (distinto de A) admitiendo que lo inverso se tiene que considerar como axioma.² En este punto es importante notar que Cantor nombra como “conjunto de valores” (*Werthmenge*) a un número dado, finito o infinito de magnitudes numéricas y como “conjunto de puntos” (*Punktmenge*) a un número, igualmente finito o infinito, de puntos de la línea recta, sobre los que argumenta que: lo que se diga de los conjuntos de puntos puede aplicarse inmediatamente a los conjuntos de valores.

Ya con una definición adecuada de los números reales y con su correlación biunívoca con la línea recta, Cantor procede a definir primero lo que es punto límite en términos de puntos y distancias, para después introducir el concepto de “conjunto derivado” (*abgeleitete Punktmenge*). La definición de este es: dado un conjunto de puntos P en un intervalo acotado, el primer conjunto derivado es el conjunto de los puntos límite de P que es denotado por P' . De la misma manera se define a P'' como el conjunto de los puntos límite de

²Ahora es conocido como el Axioma de Cantor que dice:

A cada magnitud numérica le corresponde también, recíprocamente, un punto determinado de la recta, cuya coordenada es igual a esta magnitud numérica (Cantor, 1872b, p. 5).

P' , y así sucesivamente a $P^{\nu+1}$ como el derivado de P^ν . Finalmente, si un el conjunto de puntos original P después de ν operaciones se tiene que P^ν está compuesto por un número finito de puntos, se dice que P es de ν -ésima especie.

La tercera parte del artículo consta de la extensión del teorema de unicidad para el caso en que el conjunto de puntos excepcionales sea infinito, esto lo hace a través del siguiente teorema, que es una extensión de **C3**.

Teorema (C4).³ *Si una ecuación que tiene la forma:*

$$0 = C_0 + C_1 + \dots + C_n + \dots$$

donde $C_0 = \frac{1}{2}d_0$; $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$, es satisfecha por todos los valores de x , con la excepción de aquellos que corresponden a los puntos de un sistema de puntos P de ν -ésima especie dado en el intervalo $[0...(2\pi)]$, donde ν designa un número entero tan grande como se quiera, entonces digo que se tendrá:

$$d_0 = 0, c_n = d_n = 0$$

Para la demostración de **C4**, recurre a estos nuevos conceptos, muestra que **C2** sigue siendo válido aún cuando las condiciones de convergencia no se cumplan en un conjunto de ν -ésima especie dentro de cierto intervalo finito.

Es así como, con base en el estudio de las series trigonométricas, George Cantor desarrolla nuevas herramientas matemáticas que después ganarían autonomía propia, para formular una emergente Teoría de conjuntos que marcará una nueva era en el desarrollo de las matemáticas.

³Cantor, 1872b, p. 6

3.1.2. Diferentes infinitos, la *potencia* de un conjunto

En 1874 y 1878 Cantor presenta dos artículos que dejan ver la dirección de las próximas investigaciones. Estos trabajos son de gran relevancia, ya que ahí Cantor se pregunta si se pueden poner en correspondencia biunívoca dos conjuntos, lo que será el precedente del concepto de equipotencial y, consecuentemente, también el de cardinalidad.

En el primer artículo, Cantor plantea dos cuestiones:

P1: Si se pueden poner en correspondencia *uno a uno* los números de los conjuntos (ω) , el conjunto de los números reales algebraicos, y (ν) los números enteros positivos. O sea que el conjunto de los números algebraicos, es numerable.

P2: Si se puede considerar a un conjunto de reales como una sucesión $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$; entonces en cada intervalo (...) dado de antemano, se puede encontrar un número η de tal manera que no está contenido en dicha sucesión. En otras palabras, que un intervalo de los reales no es numerable.

Con la demostración de estas dos proposiciones Cantor concluye, por un lado, que existe una infinidad de números trascendentales en un intervalo dado y, por otro, y más relevante aún, que no se puede hacer corresponder uno a uno a los números enteros de la sucesión (ν) y los números reales que constituyen un sistema continuo de números (Cantor, 1874). Llegando así a encontrar una diferencia esencial entre los números naturales y los reales.

En tanto que su objetivo principal del artículo de 1878 es:

P3: Demostrar la existencia de una correspondencia biunívoca entre superficies continuas y una línea continua.

Para esto, introduce varios elementos ya con un lenguaje propio de una Teoría de conjuntos para llegar a dicho objetivo. A continuación se mencionan dichos elementos y se cita el teorema final.

Lo primero que hace es introducir el concepto de *potencia* diciendo que si se pueden hacer corresponder elemento por elemento a dos conjuntos bien definidos mediante una operación unívoca y completa⁴, entonces se dice que los dos conjuntos tienen la misma potencia o también que son equivalentes. Después escribe las condiciones para que un conjunto sea *parte integrante* (subconjunto propio o parte propia) de otro para, con todo esto, definir cuándo se tiene *mayor* o *menor* potencia.

Más adelante, al considerar que la noción de *potencia* en los conjuntos finitos corresponde a la de *número* con el significado de *enumeración*. Con esto, Cantor comenta que la parte integrante de un conjunto finito siempre es menor que el conjunto mismo, mientras que en los conjuntos infinitos no lo es necesariamente.

Después menciona que la mínima de las potencias infinitas es la de la sucesión de los enteros positivos y a los conjuntos equipotentes a éste, los llama de *primera clase*. Continúa con varios ejemplos y resultados de conjuntos de ésta clase y más adelante se propone examinar, con el concepto de potencia, los conjuntos continuos y *n*-ples.

Como él dice, esta investigación trata de contribuir a los trabajos de Riemann y Helmholtz (1821-1894) sobre las hipótesis que sirven de base a la geometría en las que parten de la noción de conjuntos que dependen de *n* variables reales, continuas e *independientes* entre sí. Al respecto, lo que hace Cantor es mostrar que la dependencia de un conjunto continuo de extensión *n*, se puede hacer mediante una *única* coordenada real y continúa; según eso Cantor dice:

una *superficie continua* puede ser llevada completamente mediante una operación unívoca [biunívoca] a una *línea continua*; la misma cosa es verdadera para los *cuerpos continuos* y los *conjuntos continuos geométricos* de cualquier número de dimensiones.
(Cantor, 1878, p. 25).

En otras palabras, Cantor demuestra que la *potencia* de un conjunto continuo de extensión *n* es igual a la de un segmento continuo y limitado de recta, lo que se deduce fácilmente del siguiente teorema:

⁴Cantor usa *eindeutig and vollständig*, pero se entiende como una operación (función) biyectiva.

Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$, n magnitudes reales, variables, independientes entre sí, de las que cada una puede tomar todos los valores ≥ 0 y ≤ 1 , y sea t otra variable incluida en los mismos límites ($0 \leq t \leq 1$), entonces se puede hacer corresponder esta magnitud t al sistema de las n magnitudes $x_1, x_2, \dots, x_n$ de tal modo que a cada valor determinado de t pertenece un sistema de valores determinados $x_1, x_2, \dots, x_n$ y, viceversa, a cada sistema de valores determinados $x_1, x_2, \dots, x_n$ un cierto valor de t . (Cantor, 1878, p. 26).

Siguiendo con este artículo, una vez hecha la larga demostración de esta proposición, Cantor hace la generalización para el caso en que la extensión de dichos conjuntos sea *simplemente infinita* (de primera clase o numerable) llegando igualmente a notar que eran biyectables con un conjunto lineal de números reales. Entonces, teniendo en cuenta que gran cantidad de conjuntos se podían poner en correspondencia con la línea real, él se comienza a plantear importantes cuestiones sobre la naturaleza de la clase de las potencias de los conjuntos infinitos imaginables, dentro de los continuos lineales; a saber, Cantor se pregunta:

¿en qué clases se dividen los conjuntos lineales, y cuál es el número de estas clases, si se agrupan en clases diferentes los conjuntos de diferente potencia, y en la misma clase los conjuntos de la misma potencia? (Cantor, 1878, p. 34).

Él mismo termina conjeturando que no habrá más que *dos especies de potencias*; y esto, como es bien sabido, será la célebre *Hipótesis del Continuo* que Cantor intenta demostrar.

Terminamos esta sección siguiendo los comentarios de Torretti sobre las demostraciones de las proposiciones **P1**, **P2** y **P3**. Él distingue una diferencia sustancial entre la demostración de **P1** y **P2**, la diferencia consiste en que para la demostración de **P1** no es menester que los enteros positivos formen una totalidad dada de antemano, basta con concebirlo *potencialmente*.

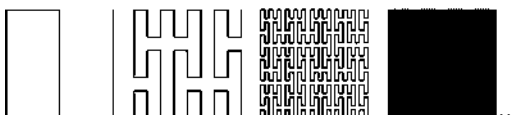
La proposición **P3**, agregada a la exposición de la “curva sin dirección”⁵ de Weierstrass y a la “curva que llena una superficie”⁶ de Peano, lo cual vino a agravar lo que él llama, la crisis de la intuición matemática en el último tercio del siglo XIX. Intuitivamente parecía haber una diferencia irreductible entre una recta y una superficie o un volumen, diferencia que se relacionaba con el número de coordenadas necesario para identificar un punto en uno de los “continuos”, pero **P3** muestra que basta con una sola coordenada para identificar cada uno de los puntos de cualquier continuo con cualquier número de dimensiones (Torretti 1998, p. 24 y 25).

Finalmente, se ha llegado a decir que la Teoría de conjuntos en sí, nació en el momento en que Cantor demostró que la cardinalidad de los reales es estrictamente mayor a la de los naturales.

⁵Curva publicada en 1872 con la propiedad de ser continua en todos sus valores pero en ninguno derivable:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x), \text{ donde } b > 1 \text{ y } ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

⁶En 1879 E. Netto (1848 -1919) probó que no podía existir una biyección continua entre un intervalo y un cuadrado. En 1890, Guiseppe Peano (1858-1932) dió el primer ejemplo de una curva no inyectiva y continua que rellena completamente el cuadrado. La curva de naturaleza fractal que se obtiene como el límite de curvas que van rellenando homogéneamente todo el cuadrado.



3.1.3. Teoría de conjuntos y Filosofía de Cantor

Hasta este momento, los trabajos de Cantor contienen la concepción de, por lo menos, dos tipos distintos de infinitos, que son los correspondientes a las potencias de los números naturales y el continuo. En trabajos posteriores, Cantor admitirá la necesidad de extender el concepto de número mas allá de lo acostumbrando; o sea de ampliar dicho concepto hacia lo *transfinito*.

Como ahora se sabe, este paso “más allá de lo infinito” se dio en el sentido de la generación de los números ordinales y cardinales; los primeros como una continuación transfinita de la sucesión ordenada de los números naturales que surgió con el estudio de los conjuntos derivados y, los segundos a través de las comparaciones por medio de su *potencia* con lo que se podrán concebir conjuntos cada vez más *numerosos*, dando como resultado diferentes clases de infinitos.

En el periodo de 1879 a 1883 Cantor publicó varios artículos reunidos en la serie llamada *Sobre los conjuntos lineales de puntos*⁷

En la sección I, presenta nuevamente la noción de conjunto derivado que los separa en dos partes; los de *primer género*, aquellos conjuntos P para los cuales existe n de tal manera que $P^{(n)}$, el n -ésimo derivado de P , contiene cantidad finita de puntos; y los de *segundo género*, aquellos para lo que $P^{(n)}$ puede ser calculado (diferente de $\emptyset$) para cualquier n . Así mismo, también introduce la noción de un conjunto P condensado (denso) en todo el intervalo $(\alpha \dots \beta)$ como en que todo $(\gamma \dots \delta)$ contenido en $(\alpha \dots \beta)$ se encuentran puntos de P y dice, estos son necesariamente de segundo género.

Otro modo de clasificar los conjuntos lineales de puntos, es el correspondiente a la noción de potencia. Si son o no de la misma potencia, son o no de la misma clase, como veremos más adelante, será esencial para la generación de nuevas clases de números. Si un conjunto perteneciente a una determinada clase puede ser tomado como representante de esa clase a la que pertenece. Por ejemplo (ν) representa a la *primera* clase y $(1 \dots 2)$, un intervalo continuo, a la *segunda* clase a la que pertenecen los intervalos o colecciones de estos,

⁷ *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten* contenido en (Cantor 1932, pp. 139-246), también existe una traducción comentada en castellano hecha por J. Bares y J. Climent, que consta de 6 secciones, en las que presenta varios resultados sobre el tipo de conjuntos que pueden ser relacionados biunívocamente con un segmento de la recta real.

así como los intervalos a los que se les suprime un conjunto finito o uno de primer clase, etc. Termina esta sección con la demostración de que estas dos clases son distintas, con la misma idea de la demostración de **P2** en 1884.

La sección II, es considerada de gran relevancia ya que ahí Cantor presenta una continuación *transfinita* de una sucesión ordenada de enteros, necesaria para la extensión del orden de los conjuntos derivados, con lo cual analiza su relación con los conjuntos continuos, dando así origen a los ordinales trans-finitos.

En este artículo Cantor comienza usando la simbología $A \equiv B$ para expresar la identidad entre dos conjuntos A y B . Dice que dos conjuntos P , Q están *sin conexión* si no tiene puntos en común. Después expresa que si un conjunto P está compuesto por la reunión (unión) de varios conjuntos $P_1, P_2, P_3, \dots$ donde estos son tomados de dos a dos sin conexión, se escribirá:

$$P \equiv (P_1, P_2, P_3, \dots).$$

Si P está *contenido* en Q se dice que P es divisor de Q o bien que Q es múltiplo de P . Define para $P_1, P_2, P_3, \dots$ el *mínimo común múltiplo* como el conjunto compuesto por todos los puntos distintos de $P_1, P_2, P_3, \dots$ que designa con:

$$\mathfrak{M}(P_1, P_2, P_3, \dots)$$

y al *máximo común divisor* como todos los puntos comunes de todos los $P_1, P_2, P_3, \dots$ denotado por:

$$\mathfrak{D}(P_1, P_2, P_3, \dots)$$

También utiliza el símbolo 0 para representar la ausencia de puntos, o sea $P \equiv 0$ significa que el conjunto P no contiene ni un solo punto, pero hace notar que éste, rigurosamente hablando, no es un verdadero conjunto; finalmente utiliza el símbolo $P \sim Q$ para decir que estos dos conjuntos tienen la misma potencia.

Cantor dice que para los sistemas de puntos de primer género, la noción de conjunto derivado, desarrollado hasta ahora, es suficiente para caracterizarlos completamente, pero no es así para los de segundo género.

Si tenemos un conjunto P de segundo género, su primer derivado $P^{(1)}$ se compondrá de dos conjuntos Q y R , esencialmente distintos, de tal manera que $P^{(1)} \equiv (Q, R)$ donde Q se compone de los puntos de $P^{(1)}$ que desaparecen mientras la sucesión $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, \dots$ avanza y R son los que se conservan en la misma sucesión; o sea:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, \dots).$$

Con estos términos Cantor designa con el símbolo⁸ $P^{(\omega)}$ al conjunto R formado de esta manera y lo llama conjunto derivado de orden ω ; también con $P^{(\omega+1)}$ al derivado de $P^{(\omega)}$ y así sucesivamente llega a $P^{(\omega+n)}$, pero a su vez $P^{(\omega)}$ también tendrá un derivado de orden ω que denota como $P^{(2\omega)}$; y así sigue más lejos y forma el conjunto:

$$\mathfrak{D}(P^{(\omega)}, P^{(2\omega)}, P^{(3\omega)}, \dots)$$

que se designara con $P^{(\omega^2)}$. Continuando con estas operaciones y combinándolas con las anteriores, llega a considerar el conjunto:

$$P^{(\omega^\omega)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(\omega)}, P^{(\omega^2)}, P^{(\omega^3)}, \dots).$$

Y obtiene la noción de los sistemas derivados de orden superiores:

$$P^{(n\omega^\omega)}, P^{(\omega^{\omega+1})}, P^{(\omega^{\omega+n})}, P^{(\omega^{n\omega})}, P^{(\omega^{\omega^n})}, P^{(\omega^{\omega^\omega})} \text{ etc.}$$

De esta manera, Cantor presenta la continuación transfinita de enteros, con lo cual $P^{(\omega)} \equiv 0$ si y solo si P es de *primer género* y por consiguiente, estos conjuntos quedan completamente caracterizados por esta ecuación.

Termina esbozando un ejemplo de un conjunto P de tal manera que $P^{(\omega)}$ esté compuesto de un solo punto p predeterminado. Con esto, aparte de dar sentido a su paso al transfinito, resuelve negativamente a la cuestión de que si para un conjunto de puntos de segundo género siempre debe existir un intervalo, el cual sea denso en todas partes (Cantor 1932, p. 148). Además, menciona que todos estos sistemas pertenecen a la primera clase.

⁸En el original Cantor utiliza el símbolo ∞ en vez de ω , por ejemplo $P^{(2\infty)}$ en vez de $P^{(2\omega)}$, ω aparece en trabajos posteriores (en el V de esta serie), al parecer, para evitar la ambigüedad. También nótese que 2ω y demás superíndices que usan ω aún son solo símbolos para el orden de cierto derivado.

Entonces la continuación transfinita surge gracias al estudio de los conjuntos derivados que, según su *especie*, necesita de ir más allá de ω para manejar los conjuntos de segundo género, por lo que este símbolo surge como el primer índice transfinito de la serie de derivaciones de un conjunto dado.

En la sección III abunda un poco más sobre dos nociones que, aparte de aplicaciones que la primera pueda tener en el análisis de funciones, sirven en ese momento de fundamento para esta Teoría de conjuntos lineales. Las nociones son las de conjunto *derivado* que, a su vez, depende de la de *punto límite* y la de *potencia*, que tienen como casos particulares los números enteros; y no se restringe necesariamente a los conjuntos de puntos lineales, sino más en general a cualquier conjunto *bien definido* que en términos de Cantor lo expresa así:

Digo que un conjunto de elementos pertenecientes a una esfera abstracta cualquiera, está *bien definido* cuando, como consecuencia del principio lógico del tercero excluido, se le puede considerar determinado de tal manera que 1°) siendo elegido un objeto cualquiera perteneciente a esta esfera abstracta, se pueda considerar como *intrínsecamente* determinado si pertenece o no al sistema en cuestión; y que 2°) estando dados dos objetos pertenecientes al conjunto se pueda considerar como *intrínsecamente* determinado si son iguales o no, a pesar de las diferencias que puedan presentarse en la manera como están dados. (Cantor, 1879/82, p. 45).

Recordando sus resultados de 1874 encuentra que con la noción de potencia, varias ramas de la matemática encontrarán una medida común y después de presentar varios resultados sobre potencias, termina el artículo argumentando que sus teoremas, o esta Teoría de conjuntos, sirve como base para las explicaciones del mundo físico real, ya que este es, en general, considerado como un continuo de tres dimensiones, aunque estas consideraciones las expresa como una suposición.

En la sección número IV, enuncia y demuestra varios teoremas relacionados con sus resultados anteriores; por ejemplo, demuestra que si el primer derivado de un conjunto P es numerable, entonces el mismo P es numerable, o que si P es de segundo género en el que $P^{(\alpha)}$ es numerable, siendo α cualquiera de

los símbolos del ínfimo introducidos en II, entonces P también es numerable, entre otros resultados.

La sección V de esta serie es considerado como el texto filosófico más importante que nos ha dejado Cantor, es sus *Fundamentos para una Teoría General de Conjuntos; una investigación matemático-filosófica*⁹ de 1883, el cual fue publicado por separado¹⁰ bajo ese nombre debido a que, según Cantor, es de *carácter fundamental* y representa la madurez y autonomía de la Teoría de conjuntos transfinitos. Comienza ese trabajo diciendo:

La precedente exposición de mis investigaciones en la teoría de conjuntos ha llegado a un punto en el que su continuación depende de una extensión del verdadero concepto de número más allá de los límites conocidos (Cantor, 1883b, p. 85).

Sin esa extensión, que es ir más allá del infinito, dice Cantor, no podría dar ni un paso más con naturalidad en su Teoría de conjuntos y esto lo usa como justificación para la introducción de ideas aparentemente extrañas en sus consideraciones. Trata de dar el paso de su misma concepción precedente en la que llama o concibe a “los siguientes infinitos” solo como “símbolos de infinitud definidos” hacia concebirlos como verdaderos “números infinitos”.

Distingue entre dos tipos de infinito que igualmente se presentan en la matemática: 1) el *infinito impropio*, que aparece como algo finito variable, por ejemplo una cantidad que, o bien crece más allá de todo límite, o bien se hace tan pequeña como se desee; y 2) el *infinito propio*, dado como un infinito completamente determinado, ejemplo de este es un único punto situado en el infinito del plano empleado en el análisis de funciones complejas.

Los *verdaderos números infinitos* que definirá posteriormente, dice que no tienen nada que ver con la primer forma del infinito; más bien poseen el carácter de determinación que encontramos en el punto en el infinito del plano complejo, aunque difieren de este en el sentido que se podrá manjar

⁹Contenido en (Cantor 1932, pp. 165-209), nosotros usaremos la traducción de Ferreirós y Emilio Gómez en (Cantor, 2006), a la hora de citar solo los *Fundamentos* de Cantor, o sea el número V de la serie *Sobre los Conjuntos Lineales De Puntos*, aparecerá (Cantor, 1883b).

¹⁰Tendría que haber aparecido primero en *Mathematische Annalen* como continuación de la serie pero se editó por separado en Leipzig.

no solo uno, sino una sucesión infinita y determinada de nuevos números infinitos, los cuales podrán ser claramente diferenciados unos de los otros; tienen pues, la forma del infinito propio.

Estos verdaderos números infinitos se definirán a partir de tres principios de generación que, en términos modernos y a groso modo, son: 1) la generación del *ordinal sucesor* $\alpha+1$ dado α ; 2) la generación del *ordinal límite* α dada una sucesión sin máximo, el cual será mayor a toda la sucesión; y 3) la formación de la *segunda clase numérica* como la totalidad de los ordinales α formados con los dos principios anteriores de manera que la potencia de sus predecesores sea igual a la *primera clase numérica*, la totalidad de los números finitos. Estos principios se exponen más adelante con terminología de Cantor; pero antes, siguiendo el orden de su trabajo, damos los elementos necesarios para seguir sus argumentos filosóficos a favor de la introducción de estos nuevos conceptos más allá de lo infinito.

Uno de los primeros elementos que da, es el concepto de *enumeración* para los conjuntos bien ordenados, a los que define de la siguiente manera:

Entendemos por conjunto *bien ordenado* todo conjunto bien definido en el cual los elementos están enlazados unos con otros por medio de una sucesión determinada, según la cual exista un *primer* elemento del conjunto, y a cada uno de los elementos (supuesto que no sea el último de la sucesión) le seguirá otro elemento determinado, e igualmente todo subconjunto arbitrario de elementos, finito o infinito, le corresponda un elemento determinado que es el *inmediato* sucesor a todos ellos en la sucesión (a menos que no haya absolutamente ninguno en la sucesión que los siga a todos ellos)¹¹ (Cantor, 1883b, p. 89).

¹¹Cantor en una carta a Dedekind da la siguiente definición equivalente:

Un conjunto [multiplicidad] es *bien ordenado* si satisface la condición de que cada una de las *partes* de él tiene un *primer* elemento. (Cantor 1932, p. 444; o en Apéndice C.1).

Estas dos definiciones son equivalentes si se admite al dicho conjunto $M \neq \emptyset$. Puede que Cantor haya omitido esta restricción ya al $\emptyset$ no lo considera tal como conjunto. Una demostración de esta equivalencia se encuentra en (Torretti 1998, pp. 456-460). Así mismo, Cantor dará otras definiciones, naturalmente equivalentes en sus trabajos de 1895/97, más adelante las presentamos.

Después de presentar su definición de isomorfismo que caracteriza la igualdad entre *enumeraciones*, designa con α a un número de su sistema extendido, a una dicha enumeración común a varios conjuntos. Con esto menciona que la diferencia sustancial entre los conjuntos finitos e infinitos es que el *enumerador* de los primeros es siempre el mismo, mientras que en los segundos no necesariamente.

En otro sentido, entre la *potencia*, que es independiente de la ordenación, y la *enumeración* hay una conexión de estos dos conceptos; por ejemplo: si tomamos un conjunto con la primer potencia que es la de la *primer clase numérica*, entonces siempre cualquier enumeración que tenga, será un número de la *segunda clase numérica* y nunca de otra; pero también, si tenemos un conjunto de esa misma potencia, puede dársele una sucesión [ordenación] de sus elementos de manera que le corresponda un número de la segunda clase arbitrariamente elegido. Y así mismo para conjuntos de clases superiores.

Este concepto, el de conjunto bien ordenado, resulta ser fundamental para la Teoría de conjuntos de Cantor ya que, incluso, llega a postular como *ley del pensamiento* de validez general la siguiente proposición:

Siempre es posible poner cualquier conjunto *bien definido* en la *forma* de un conjunto *bien ordenado*¹²(Cantor, 1883b, p. 91).

Limitándose a este concepto y su respectiva ley, las operaciones con los enteros, finitas o infinitos, resultan de manera natural. Si M y M_1 conjuntos bien ordenados con α y β sus respectivos enumeradores entonces $M + M_1$ (la unión disjunta) es un conjunto que también puede ser bien ordenado, poniendo primero a los elementos M y a continuación de él los de M_1 , a este enumerador lo llama la suma de α y β denotada por $\alpha + \beta$. Ahora, si se toma una sucesión con enumeración β de varios conjuntos semejantes e igualmente ordenados con una enumeración α , entonces también se obtiene un conjunto

¹²Esta frase que es la formulación de Cantor del Teorema del buen orden; en un inicio, él mismo la considera como “ley del pensamiento”, años más tarde se planteó demostrarlo. En una carta a Dedekind en 1899 presentó una “demostración” de dicha proposición pero no del todo satisfactoria (ver Apéndice C.1). Como se sabe, este teorema fue demostrado años más tarde por Ernst Zermelo (1871-1953) con base en el Axioma de elección.

bien ordenado de manera que proporciona la definición de $\alpha\beta$ ¹³ donde a β lo llama el multiplicador y a α el multiplicando. De estas operación resalta que, en general, no son conmutativas pero si asociativas.

Después procede a la argumentación, ya en un sentido más filosófico, sobre la introducción de sus nuevas concepciones acerca del infinito. Por ejemplo, el pensamiento de Aristóteles, retomado en la Edad media, daba por sentado que *no existe un infinito en acto*, a lo que Cantor dice, que esa aseveración se debe a la presuposición de que solo existía números finitos pero, como él ha mostrado, se pueden hacer enumeraciones tanto para conjuntos finitos como infinitos, dada de antemano la *ley* que los convierta en conjuntos *bien ordenados*. Que, sin tal sucesión (ordenamiento) conforme a la *ley*, no pueda ser enumerado, está en la naturaleza misma del concepto de *contar*. Un conjunto finito puede ser *contado* sólo si están en una sucesión determinada los elementos enumerados, pero es aquí, siguiendo a Cantor, donde encontramos una propiedad particular de los conjuntos finitos que, a saber, el resultado de *contar -la enumeración-* es independiente de la ordenación, mientras que para los conjuntos infinitos esta independencia no se da necesariamente; la enumeración de un conjunto infinito es un *entero infinito* codeterminado por la ley según la cual se *cuenta*. Es aquí pues, donde radica la diferencia entre lo infinito y lo finito, diferencia que está fundada, como él dice, en la naturaleza misma y, por tanto, nunca será abolida. O sea, de esta diferencia bien fundada, no se debe implicar la inexistencia del infinito, mientras que se mantiene la existencia de lo finito. Si no existe lo uno, no existe el lo otro. (Cantor, 1883b, pp. 96-97).

Cantor menciona que otro de los argumentos de Aristóteles, referente a la realidad del infinito en acto es, que si este existiera absorbería lo finito y lo destruiría (Cantor, 1883b, pág. 97) a lo que Cantor contesta que efectivamente es así pero no es en todo caso, si a un infinito se le agrega, después de este, un finito, este último no sufre cancelación alguna, antes bien el infinito es modificado; pero si hacemos la operación en sentido contrario, poner primero el finito y después el infinito efectivamente el primero es cancelado¹⁴.

¹³Esta notación para el producto, distinta a la actual, Cantor la cambia (Cantor, 1895/97, p. 26) supuestamente para guardar analogía con la operación suma; con esta notación $\omega \cdot 2 = \omega$, pero con la actual $\omega \cdot 2 = \omega + \omega \neq \omega$. Tratando de ser fieles a los escritos originales, seguiremos usando la primera notación en lo que resta de esta sección.

¹⁴Más adelante Cantor da el ejemplo con simbolismo:

Lo que Cantor afirma y cree haber demostrado, es que detrás de lo finito hay un *transfinito*, que es:

una jerarquía ilimitada de modos determinados que según su naturaleza no son finitos sino infinitos, pero que, igual que lo finito, pueden ser determinados por números bien definidos y distinguibles entre sí (Cantor, 1883b, p. 99).

Está convencido de que el dominio de las cantidades definibles no se agota en las finitas; los límites de nuestro conocimiento, en tanto a estas cantidades, pueden ser extendidos sin violencia a nuestra naturaleza. Propone en lugar de la aseveración aristotélica sobre la inexistencia del infinito que “todas las cosas, ya finitas ya infinitas, son *definidas* y, exceptuando a Dios, pueden ser determinadas por el intelecto”.

Agrega con esto otra de las razones por la cuales se niegan al infinito propio, esta es: si se da por sentado que el *entendimiento humano es finito* entonces solo pueden ser pensados números finitos. Pero si se mostrara, como él ya lo hizo, que la mente humana puede concebir números transfinitos, entonces el concepto de *entendimiento finito* debe: o no concluir la limitación humana a los números infinitos; o bien, debe concedérsele al entendimiento humano el predicado *infinito* en ciertos respectos. Esta última posibilidad es la que Cantor cree como único procedimiento correcto (Cantor, 1883b, p. 100).

En otro sentido, los argumentos para la inexistencia de los infinitos de Cantor consiste en que las características mutuamente excluyentes con que cuentan los números tradicionales, deberían de tener también esta relación en los nuevos números. Pero aquí el paralogismo, según Cantor, consiste en que toda generalización o extensión de un concepto, como sus nuevos números, va ligada al abandono de particularidades e incluso no pueden ser pensadas sin este abandono. O sea, si dos características mutuamente excluyentes, ser par o impar, se dan juntas en un objeto, se sigue que este es inexistente, pero estas características se pueden dar juntas sin contradicción o ni siquiera

Si ω es el primer número de la segunda clase numérica, entonces $1 + \omega = \omega$, pero $\omega + 1 = (\omega + 1)$, donde $(\omega + 1)$ es un número enteramente distinto de ω (Cantor, 1883b, p. 100).

darse en alguna cierta manera, ω es par ($\omega = \omega \cdot 2$), es impar ($\omega = 1 + \omega \cdot 2$) o ninguna, ya que no existe α tal que ω esté en la forma $2 \cdot \alpha$ o $2 \cdot \alpha + 1$.

Otra parte de este mismo título, y muy relevante en sentido filosófico, es la §8 en la que comienza distinguiendo dos sentidos en los cuales podemos hablar de la realidad o existencia de los números, sean finitos o infinitos, por un lado dice:

podemos considerar a los números como existentes en tanto que, al ocupar un lugar completamente determinado en nuestro entendimiento, en virtud de las definiciones, quedan perfectamente diferenciados de todos los demás elementos de nuestro pensamiento, guardan con ellos relaciones determinadas y pueden, por consiguiente, modificar la sustancia de nuestra mente¹⁵ de una forma determinada (Cantor, 1883b, p. 105).

Cantor llama a esta clase de realidad como *realidad inmanente* o *intrasubjetiva*, pero por otro lado también se les puede atribuir una *realidad transubjetiva* o *transiente* cuando:

en tanto que deben ser tenidos por expresiones o representaciones de eventos y relaciones del mundo exterior que se contraponen al intelecto (Cantor, 1883b, p. 105).

Para Cantor estas dos realidades, en un carácter más personal, se dan siempre juntas y, con esta conexión, deriva la importante consecuencia de que la matemática, para su desarrollo, solo debe considerar *única* y *exclusivamente* la realidad *inmanente* de sus conceptos, no tiene pues *ninguna* obligación de comprobar su realidad *transiente* (Cantor, 1883b, p. 106). De esta manera, siguiendo la paráfrasis, la matemática es libre en su desarrollo, pero claro, sus conceptos tienen que ser consistentes consigo mismos y estar en relaciones fijas y determinadas, mediante definiciones, con los conceptos precedentes y ya acreditados. El proceso para la formación de conceptos, descrito en uno de sus notas, es: se pone un objeto en un principio carente de propiedades,

¹⁵El término original es *Geistes*, aquí Ferreirós y Gómez lo traducen como *mente*; pero en la traducción de J. Bares y J. Climent (Cantor, 1883a) y en (Torretti 1998, p. 58) aparece como *espíritu*.

que puede ser solo un nombre o un signo A , al que se le asignan de manera ordenada ciertos predicados cuyo significado se puede conocer en base a ideas ya disponibles y no pueden contradecirse entre sí; para que así, queden determinadas las relaciones de A con los conceptos ya disponibles. Terminando este proceso, según Cantor, se dan todas las condiciones para despertar el concepto A , que domina en nuestro interior, y éste accede listo a la existencia, dotado la realidad intrasubjetiva, única que debe exigirse siempre a los conceptos (Cantor, 1883b, p. 141 y 142).

Esta libertad para la formación de conceptos, que naturalmente puede aplicarse a sus nuevos números, lleva en sí misma un correctivo necesario el cual consiste en que si es estéril o inconveniente, en lo posterior se abandonará. En este sentido, terminamos esta parte sobre su filosofía con su reconocida cita: “*la esencia de la matemática radica precisamente en su libertad*”.

Mostraremos ahora cómo se dan las definiciones de los nuevos números y de manera más detallada cómo surgen, lo que llama clases numéricas y esto, como se menciona en un principio, depende de tres principios generadores.

Primero, la sucesión (I) de los números enteros positivos $1, 2, 3, \dots, \nu, \dots$ tiene como principio de formación, la repetida posición y unión de unidades que se consideran como iguales. Esta operación también tiene su papel en la generación de los números enteros superiores (ordinales transfinitos), dando así el primer principio de generación:

PG1: Agregar una unidad a un número ya formado y disponible.¹⁶

La clase (I) así formada es infinita y dentro de ella no hay uno que sea mayor a todos pero, no hay nada objetable en concebir un *nuevo* número ω que será expresión de que la colección (I) está dada de forma completa conforme a su sucesión, también se puede ver a ω como el *primer* número entero que sigue a todos los ν . Con esto después se puede aplicar **PG1** para dar la sucesión.

$$\omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \nu, \dots;$$

la cual no tiene, en ella misma, un mayor número, por lo que se concebirá uno nuevo llamado 2ω que, de la misma manera, será el primero que siga a los

¹⁶Cantor, 1883b, p. 123.

anteriores ν y $\omega + \nu$. Para la generación de ω y 2ω se usa una “función lógica”, distinta a **PG1** y ejemplifican el segundo principio de generación:

PG2: Dada una determinada sucesión de verdaderos números enteros definidos, entre los cuales no hay uno que sea el mayor de ellos, en virtud de este segundo principio de generación se crea un nuevo número que se concibe como el *límite* de aquellos números; esto es, se define como el número inmediatamente mayor a todos ellos.¹⁷

Combinado los dos principios se obtienen las siguientes continuaciones:

$$\begin{aligned} &2\omega, 2\omega + 1, \dots, 2\omega + \nu, \dots; \\ &\quad \dots \\ &3\omega, 3\omega + 1, \dots, 3\omega + \nu, \dots; \\ &\quad \dots \\ &\mu\omega, \mu\omega + 1, \dots, \mu\omega + \nu, \dots; \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

De la misma manera, todos los números $\mu\omega + \nu$, sin ninguno de ellos como el mayor, por **PG2** se les puede introducir un sucesor inmediato denotado por ω^2 y siguiendo así, con estos dos principios se pueden generar los nuevos números que oportunamente se designarán con:

$$\dots, \omega^3, \dots, \omega^\nu, \dots, \omega^\omega, \dots$$

Entonces **PG1** y **PG2** son los que nos capacitan para *traspasar cualquier frontera* en la formación de verdaderos números enteros, y a estos agrega un tercer principio llamado de *limitación* o *restricción*, que lo usa, en un inicio, solo para la restricción de los números de la clase numérica (II), en virtud del concepto de potencia:

PG3: Definimos la segunda clase numérica (II) como *la colección de los números α que se pueden construir con la ayuda de los dos*

¹⁷Cantor, 1883b, p. 124.

principios de generación y que se suceden en sucesión determinada:

$$\omega, \omega + 1, \dots, \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu+1} + \dots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu, \dots, \omega^\omega, \dots, \alpha, \dots$$

*la cual está sometida a la condición de que todos los números que preceden al número α , de 1 en adelante, forman un conjunto de la potencia de la clase numérica (I).*¹⁸

Después, en este mismo artículo, Cantor aborda varios teoremas con la terminología introducida en las secciones precedentes, como por ejemplo, que su nueva clase numérica (II) tiene potencia distinta a la de (I). Concluye el trabajo con un esbozo de las leyes algebraicas de sus nuevos números pero en cierta manera con base en la intuición y anuncia que en un trabajo posterior hará una exposición más detallada, la cual tardaría más de diez años para ser publicada y reconocida; se llama “*Contribuciones a la Fundamentación de la Teoría de los Conjuntos Transfinitos*”¹⁹, de 1895 y 1897 que, según Ferreirós, constituyen el testamento científico de Cantor. En este trabajo basamos la exposición sobre la Aritmética transfinita, pero antes esbozamos el artículo donde presenta lo que ahora conocemos como Teorema de Cantor, debido a la relevancia que tendrá en el capítulo siguiente.

¹⁸Cantor, 1883b, p. 126.

¹⁹*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. Se encuentra en (Cantor 1932, pp. 282-351).

3.1.4. Teorema de Cantor y la Aritmética transfinita

Antes de iniciar con la exposición de la Aritmética transfinita que Cantor presenta en una forma más acabada en dos artículos, uno de 1895 y otro de 1897, esbozamos su artículo de 1890/91 en el que demuestra el famoso teorema que ahora lleva su nombre²⁰. Las razones son, como veremos en secciones posteriores, que con este teorema se relacionan dos de las paradojas que se le imputan a la Teoría de conjuntos.

En este trabajo, Cantor comienza con otra demostración de que los reales no son numerables, el cual lo considera como un conjunto M cuyos elementos son de la forma:

$$E = (x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots),$$

Pidiendo ser cada uno de los $x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots$ solo entre dos distintos símbolos m o w por ejemplo, $E' = (m, w, m, w, m, m, \dots)$ tiene la forma de un elemento de M .

Después, supone que si todos los elementos de M se pudieran poner como una sucesión $E_1, E_2, \dots, E_\nu, \dots$ cuyos índices son los naturales, entonces siempre existe un elemento E_0 de M que no está en dicha sucesión. Para esto, suponga la sucesión dada como:

$$\begin{aligned} E_1 &= (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,\nu}, \dots) \\ E_2 &= (a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,\nu}, \dots) \\ &\dots \dots \dots \\ E_\mu &= (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \dots, a_{\mu,\nu}, \dots) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Donde todos los $a_{\mu,\nu}$ son un determinado m o w . Con esto E_0 queda determinado como la sucesión $b_1, b_2, \dots, b_\nu, \dots$ donde cada $b_\nu = m$ si $a_{\nu,\nu} = w$ y $b_\nu = w$ si $a_{\nu,\nu} = m$. De aquí sigue que si $E_0 = E_\mu$ para un determinado μ entonces, $b_\nu = a_{\mu,\nu}$ para todo ν y en particular $b_\mu = a_{\mu,\mu}$ que, por definición no

²⁰Este muy importante resultado no aparece en la obra magna de 1895 y 1897; al parecer Cantor no lo considera como un teorema elemental de la Teoría de conjuntos ya que él probablemente considera a un conjunto de funciones como algo distinto de, supongamos, un conjunto de números (Ferreirós 2000, p. 56)

esta en E_0 . El razonamiento anterior se puede clarificar con el siguiente ejemplo de sucesión de elemento de M :

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & \dots & \nu & \dots \\
 \hline
 E_1 = & (\mathbf{m}, & m, & m, & \dots, & m, & \dots) \\
 E_2 = & (w, & \mathbf{w}, & m, & \dots, & w, & \dots) \\
 E_3 = & (w, & m, & \mathbf{m}, & \dots, & m, & \dots) \\
 & \vdots & & & & \ddots & \\
 E_\mu = & (m, & w, & m, & \dots, & \mathbf{w}, & \dots) \\
 & \vdots & & & & & \ddots
 \end{array}$$

Siendo este el caso, E_0 se define como sigue:

$$E_0 = (b_1, b_2, \dots, b_\nu, \dots) = (\mathbf{w}, \mathbf{m}, \mathbf{w}, \dots, \mathbf{m}, \dots)$$

Entonces si, E_0 fuera, por ejemplo igual a E_3 , se tendría necesariamente que, como $\mathbf{w} = b_3 = a_{3,3} = \mathbf{m}$, una contradicción y así mismo para todo μ .

Finalmente tenemos que M no puede escribirse como una sucesión $E_1, E_2, \dots, E_\nu, \dots$, ya que de lo contrario E_0 pertenecería y no a M .

Después pasa a la generalización de dicho resultado; o sea que, para un conjunto bien definido L se puede construir otro M de tal manera que tenga potencia superior.

Para demostrar este resultado, toma como ejemplo a L como el conjunto todos los reales $z \geq 0$ y $z \leq 1$ y llama M al conjunto de todas la funciones $f(x)$ sobre dicho intervalo cuyos valores solo pueden ser 0 o 1. Primero demuestra que M no tiene potencia inferior a la de L , dando un subconjunto de M determinado por todas las funciones que tienen el valor de 1 para un único valor x_0 y 0 para todos los demás x del intervalo.

Después demuestra que M no puede tener potencia igual a la de L ya que, si esto pasa, se puede pensar a M como una función de dos variables $\varphi(x, z)$ de manera que para cada z de L se obtiene un elemento $f(x) = \varphi(x, z)$ y, recíprocamente, cada elemento de M se puede obtener a partir de $\varphi(x, z)$ con una única determinación de z . Pero esto, argumenta Cantor, conducirá a una contradicción ya que si tomamos a $g(x)$ como una función que toma los valores

de 0 o 1 de modo que para todo x es diferente de $\varphi(x, x)$ ²¹. Por una lado $g(x)$ está claramente en M , pero por otro, no puede ser obtenida a partir de $\varphi(x, z)$ sea cual sea el valor prefijado z_0 pues se tendrá que $\varphi(z_0, z_0) \neq g(z_0)$; de este modo demuestra que la potencia de M es superior a la de L .

Concluye este trabajo diciendo:

Las “potencias” constituyen la única y necesaria generalización de los “números cardinales” finitos; no son otra cosa que números cardinales infinitamente grandes actuales, y tienen la misma realidad y la misma determinación que los cardinales finitos; difieren de éstos por el hecho de que las reglas de su “aritmética” se distancian parcialmente de las que se usan en el dominio de lo finito.²²

Con esta expectativa se dedica a la exploración de la aritmética de cardinales infinitos en sus trabajos de 1895 y 1897. Aquí se dan sólo las principales definiciones y resultados.

Comienza definiendo “conjunto” como toda agrupación M en un todo de objetos determinados y bien definidos m de nuestra intuición y nuestro pensamiento²³ para, después de abordar los conceptos de *unión* (disjunta) y de *parte* o *subconjunto*, dar la siguiente definición de los cardinales:

*Llamamos “potencia” o “número cardinal” de M al concepto general, que con la ayuda de nuestra capacidad activa del pensamiento surge del conjunto M , al hacer abstracción de las características de sus diferentes elementos m y del orden en que se dan.*²⁴

²¹O sea, $g : [0, 1] \rightarrow 2$ dada por:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi(x, x) = 0 \\ 0 & \text{si } \varphi(x, x) = 1. \end{cases}$$

²²Cantor, 1890/91, p. 3.

²³Posteriormente agregará la condición de que dicha agrupación sea *disponible* o *consistente*, o sea, no contradictoria (ver Apéndice C).

²⁴Cantor, 1895/97, p. 3.

Denota con $\overline{\overline{M}}$ a dichos números que, a su vez, son conjuntos compuestos solo de unidades; además, si dos conjuntos son equivalentes, escribe M a N , con lo que da un criterio necesario e infalible para la igualdad de números cardinales; es decir:

$$M \sim N \text{ si y solo si } \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$$

Ahora, si para dos conjuntos denotamos $\mathfrak{a} = \overline{\overline{M}}$ y $\mathfrak{b} = \overline{\overline{N}}$ se puede determinar una relación de orden para los cardinales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ de tal manera que si cumplen que:

- 1) *No hay ninguna parte de M que sea equivalente a N ,*
- 2) *Hay una parte de N_1 de N , tal que $N_1 \sim M$,*

se puede expresar a esa relación diciendo que $\mathfrak{a}$ es menor que $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$. Y menciona, que las relaciones $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ y $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ no se dan simultáneamente; y deja para otro momento la demostración de que entre dos números cardinales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ cualesquiera deba realizarse alguna de estas tres relaciones.²⁵

Continuando con la notación introducida por Cantor, con unión (M, N) de dos conjuntos (disjuntos) se define la suma de cardinales como el número cardinal de dicha unión que solo depende de los respectivos $\mathfrak{a} = \overline{\overline{M}}$ y $\mathfrak{b} = \overline{\overline{N}}$; o sea:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \overline{\overline{(M, N)}}.$$

En tanto a la multiplicación, si cada m , un elemento de M , puede enlazarse (componerse) con cada elemento n de N , de manera que formen un nuevo elemento (m, n) y obtener así el “conjunto de composiciones de M y N ” denotado por $(M \cdot N)$. Como de la misma manera el número cardinal de dicho conjunto solo depende de los respectivos cardinales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, definimos la multiplicación de estos como:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \overline{\overline{(M \cdot N)}}.$$

²⁵Cantor no lo demuestra. Ahora se sabe que esta proposición (en términos modernos) no se puede demostrar sin el Axioma de elección.

Estas operaciones de potencias así definidas cumplen con las leyes conmutativa, asociativa y distributiva.

Para la exponenciación de cardinales introduce lo que llama “*recubrimiento del conjunto N con M* ” entendido como una *ley* por la cual, en cada caso, un determinado elemento de M está asociado con cada elemento n de N , donde uno y el mismo elemento de M puede ser usado repetidamente, denotado por $f(N)$. También dice que dos recubrimientos, $f_1(N)$ y $f_2(N)$ son *iguales*, si para $f_i(n)$, el elemento de M asociado a n de N , se da que $f_1(n) = f_2(n)$; y *diferentes* en caso de que difieran en algún n .

Ahora, a la totalidad de los recubrimientos de N con M , o sea, el conjunto con elementos $f(N)$, lo denota como $(N|M)$ y con el número cardinal de este conjunto, que depende solo de los $\mathfrak{a} = \overline{\overline{M}}$ y $\mathfrak{b} = \overline{\overline{N}}$, define la potencia de cardinales como:

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \overline{\overline{(M|N)}}.$$

Sobre estos principios fundamenta la teoría de los números naturales finitos que, posteriormente, se extenderán a los números naturales transfinitos.

Primero, si a una sola *cosa* e_0 la concebimos en conjunto E_0 que lo contiene, le corresponde el número cardinal que llamamos *uno*, y lo denotamos $1 = \overline{\overline{E_0}}$, ahora si unimos a E_0 con otra cosa e_1 formamos el conjunto E_1 de manera que:

$$E1 = (E_0, e_1) = (e_0, e_1),$$

de la misma manera el número cardinal de E_1 es el *dos* y escribimos $2 = \overline{\overline{E_1}}$, y así sucesivamente hacemos

$$E_2 = (E_1, e_2), E_3 = (E_2, e_3), \dots,$$

esta sucesión nos proporcionan los números cardinales finitos que, en general, se denotarán:

$$\nu = \overline{\overline{E_{\nu-1}}}$$

Cantor continúa con la presentación de varios resultados como por ejemplo:

Si K es un conjunto cualquiera de diferentes *números cardinales finitos*, hay entre ellos un κ_1 , que es menor que los demás, y que

por lo tanto es el mínimo de todos.²⁶

Este resultado es la característica esencial de los conjuntos *bien ordenados* que veremos más adelante. Si denotamos como $\{\nu\}$ al conjunto de la totalidad de los números finitos definidos anteriormente, el cardinal de dicho conjunto nos ofrece el mínimo número cardinal transfinito llamado “*Aleph-cero*” quedando definido como:

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\{\nu\}}}$$

Este primer número cardinal que, siguiendo a Cantor, tiene la propiedad de ser mayor a cualquiera de los cardinales finitos ya definidos, y ser el *mínimo* de los números cardinales transfinitos, entendidos estos últimos como aquellos diferentes de los finitos.

Después de introducir a $\aleph_0$ y deducir algunos resultados inmediatos, se pregunta por los cardinales superiores a este, sobre los que asevera: pueden ordenarse según su magnitud y en esta ordenación forman, como los números finitos, un “*conjunto bien ordenado*”, aunque en un sentido más amplio de las palabra²⁷ (Cantor, 1895/97, p. 19). De $\aleph_0$ se sigue, mediante una *ley determinada*²⁸, el número cardinal siguiente mayor $\aleph_1$ y así sucesivamente se tendrá la sucesión:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_\nu, \dots$$

la cual no agota el concepto de cardinal, con lo que se puede continuar hasta obtener $\aleph_\omega$, *el siguiente mayor a todos* los $\aleph_\nu$, y de este procede $\aleph_{\omega+1}$, y

²⁶Cantor, 1895/97, p. 15.

²⁷No está muy claro si Cantor en este punto considera como uno de sus conjuntos a la totalidad de los números cardinales, o si ya desde este momento no lo concibe como *disponible*, pudiendo ser este el “sentido más amplio” al que se refiere. Cabe decir también que en correspondencia con Hilbert en 1897, Cantor enuncia el siguiente teorema:

La totalidad de los alefs no puede ser concebida como un conjunto determinado y a la vez *disponible* (Cantor 2006, p. 253).

También a dicha totalidad se le suele relacionar con la Paradoja de Cantor.

²⁸Se entiende que a las *leyes* y el *modo* al que se refiere a los principios de generación expuestos en la parte V de sus “*Fundamentos para una teoría general de conjuntos*” de 1883.

así sucesivamente, sin fin. En general, para cada cardinal transfinito α hay un número siguiente mayor procedente de él, según una *ley* unitaria; y también para cada conjunto creciente bien ordenado $\{\alpha\}$ de números cardinales transfinitos α , hay uno *siguiente mayor* procedente de ése conjunto de *modo* unitario (Cantor, 1895/97, p. 19).

3.1.4.1. Tipos de orden (Ordinales)

Denomina a un conjunto M como *simplemente ordenado*²⁹ al que; 1) en cada par de elementos suyos m_1 y m_2 , uno toma el rango de *inferior* y otro el de *superior*; y 2) de tres lamentos m_1 , m_2 y m_3 , uno de ellos m_1 es inferior a m_2 , y éste inferior a m_3 , entonces m_1 es inferior a m_3 . Si M es un conjunto ordenado, le corresponde un determinado *tipo de orden* que se denota con $\overline{M}$ entendido como el *concepto general que se obtiene de M , cuando hacemos abstracción de las propiedades de los elementos m [de M], conservando la jerarquía [el orden] entre ellos*. (Cantor, 1895/97, p. 21). $\overline{M}$ es él mismo un conjunto cuyos elementos son *puras unidades* que guardan el mismo orden que los elementos contenidos en M . Llama *semejantes* a un par de conjuntos M y N , si se pueden poner en correspondencia recíproca y unívocamente, de tal manera que el orden se mantenga; y llama a esta correspondencia una *aplicación*³⁰. A la relación así descrita la denota por:

$$M \simeq N$$

y así define la igualdad entre tipos de orden como:

$$M \simeq N \text{ si y sólo si } \overline{M} = \overline{N}$$

Hace notar también que si $\overline{M} = \overline{N}$ implica que $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, aunque el inverso no necesariamente se tiene ya que, naturalmente, para conjuntos con número cardinal finito, sus tipos de orden son siempre semejantes; pero con los números cardinales transfinitos no sucede lo mismo. Para uno de ellos

²⁹Lo que vendría siendo un *orden total* o *lineal*. En lo que sigue, por simplicidad y al igual que Cantor, diremos solo *conjunto ordenado* cuando refiramos a un conjunto *simplemente ordenado*.

³⁰Un isomorfismo pues.

puede existir más de un *tipo de orden transfinito* que en su totalidad constituyen, según Cantor, una “*clase de tipos*” especial. En este sentido, una de estas *clases de tipos* está determinada por el cardinal transfinito $\mathfrak{a}$ que es común en todos los tipos que pertenecen a la clase y denomina a esta clase de tipos por $[\mathfrak{a}]$.

Adelanta que, así como los tipos de orden finitos, los tipos de orden de los *conjuntos bien ordenados*, que más adelante llamará “*números ordinales transfinitos*”, son tales que admiten una única *aplicación* sobre sí mismo.

Notemos que los conceptos relacionados con los tipos de orden son hasta ahora aplicados en general para conjuntos *simplemente ordenados* (totalmente ordenados), las operaciones con conjuntos *bien ordenados* expuestas anteriormente, se retomarán en términos de nuevas definiciones.

La definición de la suma y el producto de tipos de orden, como ya se mencionó, viene de concebir a la unión (M, N) de dos conjuntos ordenados M y N , como un conjunto ordenado de tal manera que si dos elementos pertenecen solo a M o solo a N , heredan el respectivo orden; y si no, los elementos de M son siempre inferiores a los de N . Destaca que dicho tipo de orden solo depende de $\overline{M} = \alpha$ y $\overline{N} = \beta$, con lo que define:

$$\alpha + \beta = \overline{(M, N)}$$

como la suma de α el *sumando* y β el *sumador*.

Para el producto forma otro conjunto S a partir de los mismo M y N , sustituyendo en N a cada uno de sus elemento n por un conjunto ordenado M_n , donde $\overline{M} = \alpha = M_n$. El orden del conjunto $S = (M_n)$ lo establece como:

- 1) Si dos elementos de S perecen a un mismo M_n , estos mantienen en S el mismo orden que en M_n .
- 2) Cada par de elementos de S que pertenecen a dos distintos M_{n_1} y M_{n_2} mantienen en S el mismo orden que n_1 y n_2 mantiene en N .

Con este tipo de orden de S , que depende solo de α y β , se define:

$$\alpha \cdot \beta = \overline{S}$$

como el producto de α el *multiplicando* y β el *multiplicador*.³¹

En general, las operaciones hasta ahora definidas son para tipos de orden de conjuntos simplemente ordenados, enseguida Cantor aplica éstas a tipos de orden de conjuntos bien ordenados.

A los *tipos de orden* de conjuntos *bien ordenados* los denomina como “*números ordinales*” y a un conjunto *bien ordenado* lo define, de manera equivalente a la ya presentada: Si F es un conjunto ordenado, de manera que sus elementos f desde un mínimo f_1 en adelante *ascienden en una sucesión determinada*, de tal modo que se cumplan las siguientes condiciones:

- 1) *Hay en F el elemento f_1 mínimo según el rango [orden]*
- 2) *Si F' es un subconjunto cualquiera de F y F posee uno o varios elementos de rango superior a todos los elementos de F' , entonces existe un elemento f' de F , que sigue inmediatamente a la totalidad de los elementos de F' , de manera que no se da ningún elemento en F que caiga entre F' y f' según el rango.*³²

Con esta definición demuestra varios teoremas y prepara el terreno para trabajar con la aritmética transfinita de ordinales. Comienza definiendo como sección (segmento) inicial de un conjunto bien ordenado F determinado por f , que no es el mínimo de F , como el conjunto A de todos los elementos de F que son *inferiores* a f . Con esto desarrolla una breve teoría del buen orden en la que por ejemplo, demuestra el siguiente, relevante y conocido teorema:

*Si F y G son dos conjuntos bien ordenados arbitrarios, entonces o bien son 1) F y G semejantes entre sí, o hay 2) una sección determinada B_1 de G , que es semejante a F , o hay 3) una sección A_1 de F , que es semejante a G : y cada uno de estos tres casos excluye la posibilidad de los otros dos.*³³

Siguiendo a Cantor, los números ordinales son los tipos de orden de los conjuntos bien ordenados, y a estos tipos particulares de orden por un lado, se

³¹Note que aquí ya se hace el cambio $\beta \cdot \alpha$ por $\alpha \cdot \beta$ a en la notación anunciada en la nota 13.

³²Cantor, 1895/97, p. 36.

³³Cantor, 1895/97, p. 44.

les puede proporcionar, gracias a los casos del teorema anterior, la propiedad de tricotomía; o sea, si tenemos que $F = \alpha$ y $G = \beta$ con el caso 1) se da que $\alpha = \beta$, con 2) $\alpha < \beta$ y con 3) $\alpha > \beta$ y, por otro lado, la transitividad o sea; dados tres ordinales α, β, γ , si $\alpha < \beta$ y $\beta < \gamma$, entonces $\alpha < \gamma$. Dichas propiedades no dependen los conjuntos F y G sino que solo de sus números ordinales α y β . Con esto Cantor hace el siguiente comentario:

Lo números ordinales forman por lo tanto, en su ordenación por magnitud, un conjunto simplemente ordenado; después se mostrará que éste es un conjunto *bien ordenado*.³⁴

Las operaciones de *suma* y *producto* definidas para órdenes simples son naturalmente aplicables a los números ordinales, pero el caso de la exponenciación implica otros conceptos que más adelante desarrollaremos, antes de eso describiremos lo que es el “límite” de una *sucesión fundamental* de números ordinales la *segunda clase*, que corre sobre índices de la *primera clase*, para después dar uno de los resultados sobre la segunda clase numérica y terminaremos esta sección con la exponenciación de ordinales.

Cantor remarca que siempre es posible sumar una cantidad [simplemente] infinita de ordinales, de manera que la suma sea un número ordinal determinado. Por ejemplo si $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu, \dots$ es una sucesión arbitraria de ordinales de manera que $\overline{G_\nu} = \beta_\nu$ entonces se tendrá que:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu + \dots = \overline{(G_1, G_2, \dots, G_\nu, \dots)} = \overline{G} = \beta$$

Ahora si tomamos a:

$$\alpha_\nu = \overline{(G_1, G_2, \dots, G_\nu)} = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu$$

³⁴Cantor, 1895/97, p. 45. De forma parecida a lo que refiere la nota 27, Cantor nos puede dar a entender que concebía como uno se sus conjuntos a la totalidad de los números ordinales. En una carta con Dedekind a inicios de agosto de 1899, Cantor enuncia el siguiente teorema (ver Apéndice C.1):

El sistema Ω de todos los números es una multiplicidad inconsistente, absolutamente infinita. (Cantor 2006, p. 261)

O sea, no puede ser *disponible*. A dicha totalidad se le suele relacionar con la Paradoja de Burali-Forti.

La sucesión de números ordinales $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \dots$ con la propiedad de que $\alpha_\nu + 1 > \alpha_\nu$ la denomina *sucesión fundamental* de números ordinales, con las propiedades de que $\beta > \alpha_\nu$ para cada ν y que si $\beta' < \beta$ entonces existe un α_ν de tal modo que $\beta' < \alpha_\nu$. Ya con esto, β es el número ordinal inmediatamente siguiente en magnitud a todos los α_ν y lo denomina por eso como el *límite* de los α_ν , y escribe:

$$\lim_{\nu} \alpha_\nu$$

En este contexto establece que, por un lado, a $\{\nu\}$, la totalidad de los números ordinales finitos, como la primera clase numérica y, por otro, a $Z(\aleph_0)$ como la totalidad $\{\alpha\}$ de los tipos de orden α de conjuntos bien ordenados de número cardinal $\aleph_0$.

Restringiéndose a la segunda clase numérica, Cantor demuestra varios teoremas de los cuales enunciamos solo uno de ellos en el que retoma la esencia, o en cierto modo es la rigorización, de los dos principios de generación de los números transfinitos.

Cada número α de la segunda clase numérica es, o bien tal que se produce a partir de uno inmediatamente menor α_{-1} al añadir el 1:

$$\alpha = \alpha_{-1} + 1,$$

o bien se puede indicar una sucesión fundamental $\{\alpha_\nu\}$ de números de la primera o la segunda clase numérica, tal que:

$$\alpha = \lim_{\nu} \alpha_\nu$$

Con esto, los números de $Z(\aleph_0)$ se obtienen a partir de números menores de dos diferentes modos, y estos modos de producirse los denomina “nuevamente” como, el primer y el segundo principio de generación de números de la segunda clase numérica.

El siguiente resultado responde a la cuestión sobre el número cardinal que le corresponde a la segunda clase numérica; con ello, Cantor demuestra:

La potencia de la clase numérica de la segunda clase numérica $\{\alpha\}$ es el segundo número cardinal transfinito Aleph-uno.

Por lo que $Z(\aleph_0)$ resulta ser el representante natural para el segundo número cardinal transfinito. En otro sentido, para la exponenciación de números ordinales, definida solo en el dominio de los números de la segunda clase numérica, comienza designando con ξ a una variable que corre solo sobre la primera o la segunda clase incluyendo al cero y tomando a dos constantes $\gamma > 1$ y $\delta > 0$, para proceder a fundamentar la siguiente función por medio del siguiente teorema:

Hay una única función $f(\xi)$ completamente determinada de variable ξ que cumple las siguientes condiciones:

- 1) $f(0) = \delta$
- 2) Si ξ' y ξ'' son dos variables arbitrarias de ξ y tenemos que

$$\xi' < \xi''$$

entonces tenemos

$$f(\xi') < f(\xi'')$$

- 3) Para cada valor de ξ tenemos que

$$f(\xi + 1) = f(\xi)\gamma$$

- 4) Si $\{\xi_\nu\}$ es una sucesión fundamental arbitraria, entonces lo es también $\{f(\xi_\nu)\}$, y [si] se tiene que

$$\xi = \lim_{\nu} \xi_\nu$$

entonces tenemos que

$$f(\xi) = \lim_{\nu} f(\xi_\nu)$$

Si se le asigna a δ el valor de 1 y se denota a $f(\xi)$ como γ^ξ entonces se puede reformular el resultado anterior, dando la definición de la exponenciación de ordinales de la segunda clase.

Si γ es una constante > 1 arbitraria perteneciente a la primera o la segunda clase numérica, entonces hay una función completamente determinada γ^ξ , de tal modo que

1. $\gamma^0 = 1$.
2. Si $\xi' < \xi''$, entonces tenemos que $\gamma^{\xi'} < \gamma^{\xi''}$.
3. Para todo valor de ξ se da que $\gamma^{\xi+1} < \gamma^\xi \gamma$.
4. Si $\{\xi_\nu\}$ es una sucesión fundamental arbitraria, entonces lo es también $\{f(\xi_\nu)\}$, y se tiene en el caso en que

$$\xi = \lim_{\nu} \xi_\nu$$

también

$$\gamma^\xi = \lim_{\nu} \gamma^{\xi_\nu}.$$

Aquí terminamos la exposición de la aritmética de Cantor basada en los dos artículos de 1895 y 1897.

Finalizamos esta sección comentando la reacción, ante esta emergente Teoría de conjuntos de dos de los matemáticos y lógicos más influyentes en el desarrollo de la matemática; en particular en los fundamentos de los lenguajes formalizados, quienes son Gottlob Frege y Giuseppe Peano.

Las principales críticas de Frege surgen alrededor del año 1890 y consisten esencialmente en objetar el uso de conceptos *lógicos* o referentes a *nuestras capacidades mentales* en el desarrollo de la teoría de Cantor lo cual peca de subjetividad.

Por ejemplo, en las definiciones cantoriana de conjunto y número cardinal (ver página 74) se hace uso explícito de las palabras *intuición* y *pensamiento*, así mismo se evoca *nuestra capacidad de abstracción*. Pero, ¿será que todos contamos con las mismas capacidades de abstracción, intuición y pensamiento?, o sea, si tomamos el conjunto $A = \{\text{una pluma, una goma, un gis}\}$ y hacemos el doble acto de abstracción ¿obtenemos su *número cardinal* «3» o, alguna otra cosa? (Garcíadiego, 1992, p. 50) y, ¿todos obtenemos el mismo resultado de la abstracción, incluso en el caso transfinito? Es en este el sentido en que se dirigen las críticas de Frege.

Por otro lado, según Peano, la mayor parte de las dificultades que se encontraban en los fundamentos de la matemática se reducen a la ambigüedad del lenguaje. Para eliminar esto, creó un simbolismo que resultó ser de sus más

grandes aportes a la matemática en general. Pero sus principales impugnaciones se dirigen al uso implícito del *principio de inducción* en la construcción cantoriana de los números naturales y que no fue enunciado como postulado. Al respecto Cantor insistía en que este postulado era consecuencia directa de su construcción.

3.2. Paradojas de la Teoría de conjuntos

La interpretación *estándar* de la historia de la “crisis” de fundamentos de la Teoría de conjuntos, la entendemos como un compendio, con énfasis en los acuerdos, de las distintas versiones que se en centran en libros de Historia o Filosofía de las matemáticas, así como en secciones introductorias de textos de Teoría de conjuntos o de Lógica matemática. De la misma forma trataremos de referirnos a los escritos originales (encontrados en los Apéndices B.1, C, D.1) donde, bajo esta interpretación, aparecieron por primera vez las paradojas de la Teoría de conjuntos que provocaron dicha “crisis”.

Los términos *paradoja* y *antinomias*, incluso el de *contradicción*, suelen encontrarse como sinónimos¹, nosotros no entraremos en la discusión a detalle en la discusión sobre las diferencias², solo mencionaremos que se puede entender como *antinomia* a una proposición que se puede ver como una equivalencia entre una proposición y su negación; y como *paradoja* un resultado contradictorio al cual se llega por un impecable razonamiento lógico dando como resultado un error sobre la base en la cual se razona. En lo personal optamos por este último término por ser el más habitual para referirse al tema, pero respetaremos estrictamente al citar la terminología de cada uno de los autores usa al respecto.

Se suele iniciar la exposición en torno a las contradicciones con la distinción que hace Ramsey³ entre lógicas y semánticas. Las contradicciones más conocidas quedan agrupadas como sigue:

¹Por ejemplo, Curry los considera como términos equivalente. Para él, ‘paradoja’ es algo que no es acuerdo con la opinión predominante; esta formado por $\pi\alpha\rho\acute{\alpha} + \delta\acute{o}\xi\alpha$, donde $\delta\acute{o}\xi\alpha$ significa ‘opinión’ o ‘expectativa’ y $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}$ generalmente significa ‘fuera de’ o ‘yendo más allá’; mientras que, ‘antinomia’, significa contrario ($\acute{\alpha}\nu\tau\acute{\iota}$) a la ley o la costumbre $\nu\acute{o}\mu\omicron\varsigma$. Pese a la sutil diferencia él no ve justificación etimológica para preferir un término sobre el otro (Curry 1977, p. 4).

²Una breve discusión al respecto se puede ver en (Tomasini, 2002).

³En la fuente que cito; Ramsey en particular se refiere las paradojas mencionadas en los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead publicada entre 1910 y 1913 en tres volúmenes cargados de cálculos lógicos y matemáticos. En lo posterior dicha obra no debe confundirse con *The principles of mathematics* que Russell publica en 1903 y que se compone solo de un libro de carácter discursivo.

Lógicas:

1. La clase de las clases que no son elementos de si mismas (Russell).
2. La relación que existe entre dos relaciones cuando una de ellas no se guarda con la otra.⁴
3. La contradicción de Burali-Forti sobre el mayor ordinal.
4. La contradicción de Cantor del mayor cardinal.⁵

Semánticas:

1. “Yo estoy mintiendo”.
2. El menor entero no designarle con menos de diecinueve silabas.
3. El menor ordinal definible.
4. La contradicción de Richard.

El primer grupo contiene exclusivamente términos u objetos puramente matemáticos o lógicos, clase, relación, etc y, siguiendo a Ramsey, muestran que algo no funciona bien en la lógica o matemática en que se basan. Las del segundo grupo no son puramente lógicas, sino que involucran referencias al lenguaje humano o a un tipo de escritura, al significado en el pensamiento y estos no son formales sino empíricos, son errores del lenguaje o del pensamiento, y dice:

no incumben a la matemática o a la lógica, si por “lógica” se entiende un sistema simbólico, aunque ciertamente incumben a la lógica en cuanto análisis del pensamiento.

⁴Sea T una relación que subsiste entre dos relaciones R y S siempre que R no tiene la relación R con S . Entonces, de cualquiera relaciones R y S se da que, “ R tiene la relación T con S ” es equivalente a que “ R no tiene la relación R con S ”. Por lo tanto, si damos el valor de T a R y S resulta que “ T tiene la relación T con T ” es equivalente a que “ T no tenga la relación T con T ” (Whitehead y Russell, 1910, p. 63).

⁵Está no viene en la lista original de Ramsey, la agregamos conforme la interpretación estándar.

Siguiendo con las contradicciones semántica podemos dar un primer ejemplo que puede caer dentro de lo que se refiere como interpretación *estándar*. Siguiendo con las paradojas semánticas J. Babini y J. Pastor dicen:

En estas paradojas los conceptos lógicos o matemáticos están cubiertos por palabras. No ocurre lo mismo con las que dieron origen a la “crisis” de fundamentos de la matemática: la de Cesare Burali-Forti, que en 1897 observó que el conjunto bien ordenado formado por todos los números ordinales era contradictorio, así como resulta contradictorio el “conjunto de todos los conjuntos que no se pretenden a sí mismos como elementos” (paradoja de Russell de 1905).

Las cuestiones que sucintaron estas paradojas desataron la polémica, que culminó hacia 1930; en ella se perfilaron tres tendencias: logicismo, formalismo e intuicionismo (Babini, Pastor, 1997, p. 198).

Otro ejemplo que puede ser acorde a esta interpretación, es la de Nicolas Bourbaki quien dice:

Burali-Forti hizo ver en 1897 que no puede considerarse la existencia de un conjunto formado por *todos los ordinales*, ya que dicho conjunto estaría bien ordenado y sería por tanto isomorfo a uno de segmentos distinto del total, lo que es absurdo. En 1899 Cantor observa que, en una carta a Dedekind, que puede decirse que los ordinales formen un conjunto ni hablar del «conjunto de todos los conjuntos» sin llegar a una contradicción (el conjunto de las partes de este último «conjunto» Ω sería equipotente a una parte de Ω , lo que estaría en contradicción con la desigualdad $m < 2^m$). En 1905, finalmente, Russell, analizando la demostración de esta desigualdad, muestra que el mismo razonamiento que se usa para demostrarla demuestra también (sin usar la teoría de los cardinales) que la noción del «conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos» es también contradictoria (Bourbaki 1972, pp. 51-52).

Esta forma en que se trata de presentar una interpretación *estándar* en lo

referente a la historia de las paradojas de la Teoría de conjuntos se debe al trabajo de A. Garciadiego Dantan, quien resalta en ella que Burali-Forti encontró su inconsistencia en 1897, que Cantor encontró un resultado similar y se lo comunicó a Dedekind en 1899 y que, ya antes de la publicación de su libro *Los principios de la matemática* en 1903 Russell, en 1901 había descubierto su propia inconsistencia, y al año siguiente se la comunicó a Frege por medio de una misiva. Así mismo nota que, en las interpretaciones dominantes, se coincide en que es una actitud crítica hacia las ideas de Cantor la que desemboca en el surgimiento de las paradojas y que, dichos argumentos, revelaron la necesidad de un análisis de los fundamentos de las matemáticas y la creación de tres escuelas de pensamiento filosófico referentes a la matemática (Garciadiego, 1992, p. 53).

Hay discrepancia sobre estas fechas específicas, para los comentarios sobre ello nos basaremos en el mismo trabajo de Garciadiego, quien cuenta con un minucioso análisis histórico al respecto, en particular en el caso de Russell.

3.2.1. Paradoja de Burali-Forti

Cantor no fue salvo de críticas hacia sus nuevas teorías, tal vez por eso se ha señalado que uno de sus detractores fue el italiano Burali-Forti e incluso, que debido a esto, él mismo estaba interesado en encontrar fallas en la nueva teoría de Cantor, dando así como resultado la conocida Paradoja de Burali-Forti. Pero estudios recientes han demostrado que lejos de esto, el italiano contribuyó a ésta teoría y que además él mismo no creyó haber encontrado una contradicción, sino que más bien es sólo un paso en una demostración por *reductio ad absurdum*, sobre este último punto regresaremos mas tarde.

Peano, como ya se mencionó, no estaba en total acuerdo con la construcción cantoriana de los números finitos, pero si aceptaba los principios y resultados generales de la teoría de números transfinitos. Burali-Forti, como discípulo de Peano y basados en sus trabajos previos, es probable que tuviera estas mismas opiniones.

En 1894 Burali-Forti publica un artículo en el que «expresa la teoría de los números transfinitos de Cantor en simbolismo de Peano»⁶, más adelante, en

⁶(G. Moor, A Garciadiego 1981, p. 321) refiriéndose a (Burali-Forti, 1894).

1896, Burali-Forti estaba intentando solucionar uno de los problemas fundamentales de la teoría cantoriana: *la ley de la tricotomía para los números trasfinitos* y más adelante, el 27 de marzo de 1897, es cuando leyó en la reunión del *Circolo Matematico di Palermo*, un ensayo que según la interpretación estándar es donde aparece la primer «paradoja» de la Teoría de conjuntos.

Más adentre abordaremos el verdadero contenido de dicho ensayo, por ahora solo daremos unos ejemplos de cómo es formulada la paradoja en varias fuentes secundarias. Comencemos con la presentación de Julián Garrido quien dice:

La paradoja de Burali-Forti es la tesis:

el ordinal Ω es menor y no es menor que el ordinal $\Omega + 1$

En símbolos:

PBF) $\Omega < \Omega + 1 \wedge \Omega \not< \Omega + 1$ siendo $\Omega =_{\text{df}} \{x : x \text{ es ordinal}\}$

Esta paradoja que de modo más simple se expresa $\Omega \in \Omega' \wedge \Omega \notin \Omega'$, tiene su clave demostrativa en los lemas (*) $\Omega \text{ es ordinal}$ y (**) $\forall x(x \text{ es ordinal} \rightarrow x' \text{ es ordinal})$. (Garrido, 2003, p. 153)

Otra formulación de esta paradoja la presenta Jean-Paul Collette, quien la expresa como:

Si el conjunto Ω de todos los ordinales está bien ordenado, también es un ordinal. Entonces, para cada ordinal α se tiene que $\alpha < \Omega$, y en particular $\Omega + 1 < \Omega$, lo que es absurdo. (Collette 1998, p. 553)

Una formulación que presenta Irving M. Copi que, a diferencia de las dos citas anteriores, no tiene la necesidad de considerar la formación $\Omega + 1$, es la siguiente.

Asignando el nmero ordinal Ω a la serie de todos los ordinales, y entoces, ya que Ω debe ser un elemento de esa misma serie,

tiene que estar en el tipo de orden de la sección de todos los ordinales $< \Omega$. Aquí tenemos el resultado que la serie de todos los números ordinales es similar a una de sus secciones propias, el cual es imposible (Copi 1958, p. 284).

Ahora, contrastando este sentido paradójico del artículo de Burali-Forti de 1897⁷, notemos que en palabras de él mismo la intención de su trabajo era:

Probar que de hecho existen *números transfinitos* o (*tipos de orden*) a y b de tal modo que a no es igual a b , no es menor que b , y no es mayor que b (Burali-Forti, 1897, p. 154).

A pesar de que los números transfinitos, en particular Ω , de Burali-Forti no son los mismos que los Cantor, efectivamente en su argumento aparecen de formulas contradictoriamente las $\Omega < \Omega + 1$ y $\Omega + 1 \leq \Omega$, pero esto, solo en un paso de se demostración por *reductio ad absurdum* el que requiere llegar a una contradicción. Para entender mejor lo dicho por Burali-Forti se hara un esbozo de su trabajo, resaltando la diferencia entre los conceptos de *buen orden* de Cantor y *orden perfecto* de Burali-Forti.

Comienza dando un orden a las clases⁸ de manera equivalente al orden simple de Cantor (ver página 78) y denota con **Ko** a la clase de las clases ordenada cuyos elementos son genéricamente los (u, h) , una clase u ordenada bajo el criterio h . Ahora, de **Ko** Burali-Forti distingue las que son *perfectamente ordenadas* como aquellas clases (u, h) que cumplen:

BO₁: Existe en u un elemento de que ocupa el primer lugar respecto al orden dado.

BO₂: Todo elemento de u que tiene un sucesor, tiene un sucesor inmediato.

BO_{B-F}: Para cualquier elemento arbitrario x de u , x no tiene un predecesor inmediato; o existe un predecesor y de x que no tiene predecesor

⁷Para toda posterior referencia a este artículo se pueden ver el original (Burali-Forti, 1897), una traducción comentada al inglés en (Heijenoort, 1967, pp. 104-112) o la traducción al castellano contenida en este trabajo en el Apéndice B.1.

⁸En la terminología de la escuela de Peano “clase” es sinónimo de conjunto.

inmediato y es tal que los elementos de u , que son al mismo tiempo sucesores de y y predecesores de x , forman una clase finita.

Por otro lado, la definición de Cantor de un conjunto *bien ordenado* (ver página 64) se puede dividir en tres condiciones que son precisamente **BO₁** y **BO₂** más una tercera:

BO_C: Si u' es una parte no vacía -finita o infinita- del conjunto u y los elementos del conjunto que siguen a todos los elementos de u' forman otra parte no vacía u'_1 , entonces u'_1 tiene un primer elemento.

La cuestión es que Burali-Forti cometió un error al decir que un conjunto *buen orden* de Cantor es aquel que cumple solo **BO₁** y **BO₂**, incluso da el conjunto:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, b_3, b_2, b_1$$

como ejemplo de un *buen orden* (según Burali-Forti) que no es un *orden perfecto*.

Efectivamente todo conjunto *bien ordenado* de Cantor es un conjunto *perfectamente ordenado* pero en viceversa no sucede.⁹

Burali-Forti prosigue definiendo el *tipo de orden* de una clase ordena (u, h) como aquel *objeto abstracto* $\mathbf{T}'(u, h)$ que es común a todas las clases ordenadas equivalentes (semejantes o isomorfas) a (u, h) y a la clase de los tipos de orden la denota con $\mathbf{T}$. Después de definir un orden, de forma análoga a la de Cantor, sobre sus *tipos de orden*, él se plantea la cuestión principal de su artículo: “Si A es la proposición: para todo *tipo de orden* se da la tricotomía; entonces A no es generalmente verdadera”.

Define a los *números ordinales* como la clase **No** de los tipos de orden de las clases *perfectamente ordenadas* y se dispone a analizar las proposiciones que

⁹Si X es bien ordenado las condiciones **BO₁** y **BO₂** se dan trivialmente, veamos que cumple **BO_{B-F}**. Sea $x \in X$, si x tiene predecesor inmediato, supongamos que es y_1 y que a su vez también tiene predecesor inmediato y_2 (de no tenerlo y_1 es el elemento buscado). Definimos así recursivamente la sucesión $\{y_i\}$ de consecutivos predecesores la cual, como X es bien ordenado, tiene un mínimo elemento con el que se satisface la condición **BO_{B-F}**.

Por otro lado $\omega(1 + {}^*\omega)$ es un conjunto *perfectamente ordenado* que no es *bien ordenado*.

se siguen lógicamente de suponer que A es verdadera; o sea, inicia su *reductio ad absurdum*.

Primero se propone demostrar que:

- 1) Si $\alpha \in \mathbf{No}$ entonces, $\alpha + 1 > \alpha^{10}$ y que $\alpha + 1$ es inmediato a α .

Para esto toma a (u, h) una clase *perfectamente ordenada* cuyo tipo de orden es α y un objeto arbitrario v_0 fuera de u , en la clase $v = A \cup \{v_0\}$ la dota del orden k como sigue: xky si, xhy o si $y \in u$ y $x = v_0$. Con esto (v, k) es una clase *perfectamente ordenada* con tipo de orden mayor a α y debido a su misma construcción el inmediato sucesor $\alpha + 1$. A continuación nota que $\mathbf{No}$ es una clase *perfectamente ordenada* por $\bar{\varepsilon} >$,¹¹ (el orden por magnitud ya definido entre los ordinales) con esto, si $\Omega = \mathbf{T}'(\mathbf{No}, \bar{\varepsilon} >)$ tenemos que $\Omega \in \mathbf{No}$. Después pretende demostrar que:

- 2) Si $\alpha \in \mathbf{No}$ entonces, $\alpha \leq \Omega$.

Para demostrar esto, sea (u, h) una clase *perfectamente ordenada* con su número ordinal α y con ella constrúyase la clase (v, k) de la siguiente manera; para cada $x \in u$ sea la clase $u_x = \{z \in u : \neg zhx\}$ y tomemos la clase $v = \{u_x : x \in u\}$ que dotamos con el orden k determinado como; u_xku_y si y solo si xhy . La clase (v, k) claramente es isomorfa a (u, h) y por ende *perfectamente ordenada* con tipo de orden α .

¹⁰Aquí $\alpha + 1$ tiene el mismo sentido que es los trabajos de Cantor, yuxtaponer un elemento al orden dado.

¹¹Para ver esto nótese que $(\mathbf{No}, \bar{\varepsilon} >)$ cumple $\mathbf{BO}_1$ si consideramos a 1 como el tipo de orden de una clase unitaria que es perfectamente ordenada, para $\mathbf{BO}_2$ se construye el sucesor de forma análoga a la ya descrita para demostrar 1). Finalmente para demostrar que $(\mathbf{No}, \bar{\varepsilon} >)$ cumple con $\mathbf{BO}_{\mathbf{B-F}}$, sea $\alpha \in \mathbf{No}$ el número ordinal de una clase (u, h) que por definición cumple la condición $\mathbf{BO}_{\mathbf{B-F}}$; ahora, si α tiene un predecesor inmediato en $(\mathbf{No}, \bar{\varepsilon} >)$ hay en u un x de tal modo que el predecesor inmediato de α sea el tipo de orden de la clase $(u - \{x\}, h)$. Ahora, como (u, h) es un orden perfecto, si x tiene predecesor inmediato, existe x_0 sin predecesor inmediato de modo que la sucesión $\{x_0, x_1, \dots, x_n = x\}$ es finita y x_i es predecesor inmediato de x_{i+1} para $(0 \leq i \leq n)$. Con esto, cada una de las clases $(u - \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\}, h)$ es perfectamente ordenada y sean sus respectivos números ordinales β_i ; con esta construcción, β_0 no puede tener predecesor inmediato y la sucesión $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n\}$ forma una clase finita de sucesores de β_0 que a su vez son predecesores de α .

Ahora, si tomamos a $[\alpha]$ como la clase de los tipos de orden de (u_x, h) ordenada por el criterio k ; tenemos que $([\alpha], k)$ es una clase de números ordinales menores que α , que es *perfectamente ordenada* con número ordinal α . Con esto, $([\alpha], k)$ es isomorfa a una parte de $(\mathbf{No}, \bar{\varepsilon} >)$ y por lo tanto $\alpha \leq \Omega$.

La conclusión a la que llega es que; si escribimos Ω en lugar de α en 1) y $\Omega + 1$ para el α de la proposición 2) tenemos que:

$$\Omega + 1 > \Omega \quad y \quad \Omega + 1 \leq \Omega,$$

las cuales son contradictorias, por lo tanto, dice Burali-Forti:

Si asumimos la proposición A , esto nos lleva a un absurdo, y por lo tanto, ha sido rigurosamente comprobado que existen al menos dos tipos de orden a y b (y ciertamente existen algunos entre los números ordinales) tal que a no es igual a b , no es mayor que b y no es menor que b (Burali-Forti 1897, p. 164).

Con ello, termina su demostración por *reductio ad absurdum*.

Lo que reitero es que Burali-Forti al elaborar su artículo mencionado, no era presentar un punto en oposición a las ideas de Cantor, más bien fue un intento de contribuir al grueso de su teoría. De hecho, con una leve modificación a sus argumentos él pudo haber obtenido la paradoja en cuestión, pero en ese tiempo nunca afirmó haber encontrado una inconsistencia en la teoría. Para él, la aparición de la contradicción es sólo un paso en su demostración por reducción al absurdo.

Dentro de la interpretación *estándar*, después de este trabajo vinieron numerosas reacciones; no hay acuerdo si fueron inmediatas o tardías pero sí se coincide en que Burali-Forti descubrió su inconsistencia con anterioridad a que Russell publicara la suya (Garciadiego, 1992, p. 59) y varias de ellas las que sugerían la necesidad de un análisis de los fundamentos de la Teoría de conjuntos o incluso una crisis en la matemática debida este descubrimiento.

Evidentemente hubo una rápida transformación del argumento original, paso de un procedimiento por *reductio ad absurdum* a una «contradicción» real es su propio derecho, como dice Garciadiego, quien también acusa a Russell de este hecho ya que fue el primero en acreditar a Burali-Forti el descubrimiento de dicha inconsistencia en la Teoría de los números transfinitos.

Otro hecho que puedo haber contribuido a esto fue la confusión del mismo Burali-Forti al entender mal la definición de Cantor de *buen orden*. A finales de 1897 sale la segunda parte de “Contribuciones a la Fundamentación de la Teoría de los Conjuntos Transfinitos” (ver página 71), en la que Cantor demuestra la tricotomía para sus tipos de orden de conjuntos bien ordenados y después de esto Burali-Forti creyó conveniente aclarar en una nota¹² su omisión de la concisión $\mathbf{BO}_C$. Pero se dice que esta nota desafortunadamente pasó desapercibida, por lo que la confusión respecto a estos trabajos continuó.

La mencionada nota puede contribuir al aserto de que Burali-Forti, pese a sus intenciones iniciales, no creyó haber encontrado una inconsistencia en la Teoría de conjuntos, ya que de ser así, se pregunta Garciadiego, ¿por qué no lo aseguró así en su segundo artículo de 1897?

3.2.2. Paradojas de Cantor

Continuando con el encuadre de la interpretación *estándar* se dice que, aunque Burali-Forti es considerado como el primero en publicar una paradoja en la Teoría de conjuntos, es al mismo Cantor a quien se le atribuye ser el primero en *descubrir* una.

La relación de Cantor con tal descubrimiento se puede hacer en dos direcciones: la primera, en sentido cronológico, concierne a la “inconsistencia” del sistema de todos los alefs implicada de que el sistema de todos los ordinales no es consistente; la segunda, que es el más conocido y replicado argumento referente Teorema de Cantor aplicado al “conjunto de todo lo pensable” (entendido este como el conjunto de *todos* los conjuntos). Cada uno de estos sentidos se puede relacionar directamente con dos misivas que Cantor envía a Dedekind en 1899, no obstante, el año de *descubrimiento* aun se disputa entre 1883, 1895, 1896 y 1899; sobre las fechas regresaremos más adelante.

La primera de las direcciones de puede construir, basándonos en la carta a Dedekind del 3 de agosto de 1899, la cual abordaremos en lo ulterior, del hecho que el sistema Ω de todos los ordinales es una multiplicidad inconsistente.

¹²Esta nota se puede ver Apéndice B.2 página 164.

Teniendo esto en mente, si $\aleph$ es el sistema de todos los *alefs*:

$$\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_\omega, \dots, \aleph_\alpha, \dots$$

forma en su orden por magnitud una sucesión similar (isomorfa o equivalente) a Ω , por tanto también es inconsistente.¹³

La segunda dirección es la que mayormente aparece en la literatura, tanto de historia de la matemática como de lógica o de teoría de conjuntos en sí. Como ejemplo podemos empezar con Haskell B. Curry, quien en su libro sobre Fundamentos lógica matemática pone:

El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto M tiene un número cardinal más alto que M . Esto es una contradicción si M es el conjunto de todos los conjuntos (Curry, 1977, p. 5).

También en el trabajo sobre Fundamentos de la teoría de conjuntos Fraenkel, Bar-Hillel y Levy dicen que dicha antinomia era conocida por Cantor ya en 1899 e incluso que irónicamente fue publicada hasta 1932¹⁴. Su presentación es la siguiente:

Acorde con el teorema de Cantor, el conjunto C_s de todos los subconjuntos de cualquier conjunto dado s tiene un cardinal más grande que el de s . Considere ahora el conjunto de *todos* los conjuntos, llamémosle U . Su “conjunto-potencia” CU , i.e. el conjunto de todos los subconjuntos de U , tiene entonces un cardinal más grande que el de U , lo cual es paradójico en vista de que U por definición, es mayor, inclusive de conjuntos de conjuntos (Fraenkel, Bar-Hillel, Levy 1973, p. 7).

¹³Ya antes, en una carta a Hilbert del 10 de octubre de 1898 Cantor había dicho:

Si de dos multiplicidades equivalentes una es un C disponible [consistente], entonces también lo es la otra (Cantor, 2006, p. 256).

¹⁴Se refieren a *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Ed. por Ernst Zermelo, (Cantor, 1932) de nuestra bibliografía.

Un tercer ejemplo lo proporciona Alberto Duo quien señala el año de 1899 cuando aparece esta paradoja, la que formula como:

Demostró Cantor que $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{S(M)}}$, donde $S(M)$ es el conjunto de los subconjuntos de M . Ahora bien, sea U el conjunto universal, o sea el conjunto de todos los conjuntos; por ser $S(M)$ un subconjunto de U se tiene que $\overline{\overline{S(U)}} \leq \overline{\overline{U}}$, pero por el teorema de Cantor que acabamos de mencionar se tiene también $\overline{\overline{U}} < \overline{\overline{S(U)}}$. Pero, además, Bernstein demostró que si $\overline{\overline{M}} \leq \overline{\overline{N}}$ y $\overline{\overline{N}} \leq \overline{\overline{M}}^{15}$ a de ser $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$; por tanto se deduce que ha de ser $\overline{\overline{U}} \leq \overline{\overline{S(U)}}$ en contradicción con el teorema de Cantor que implica que $\overline{\overline{U}} < \overline{\overline{S(U)}}$ (Dou 1970a, pp. 65-66).

Habiendo ya visualizado estas dos direcciones en las que se ha abordado la Paradoja de Cantor y acorde con la interpretación *estándar*, pasemos a analizar los documentos donde aparecen dichas evidencias para esta. Primero, bosquejaremos la ya mencionada carta de Cantor a Dedekind de 3 de agosto de 1899, la que elegimos por el hecho de que en ella es donde aparecen más explícitamente los argumentos sobre los cuales se da la primera dirección de su paradoja, pero también por que en está, Cantor aclara su posición respecto a los conjuntos inconsistentes; y segundo, delinearemos los principales argumentos que Cantor envía al mismo Dedekind el 31 del mismo mes, es dicho escrito el que más se adapta a la interpretación habitual, como ya se dieron varios ejemplo.

En la primera carta a la que nos referimos, Cantor retoma su distinción a partir de la *disponibilidad* de una multiplicidad, pero ahora con miras a utilizarla para demostrar que todo cardinal o potencia es algún alef. Para lo cual le será necesario mostrar que el sistema de todas las potencias es una multiplicidad *inconsistente* (no disponible).

Para el indicado propósito, primero remarca su definición de *orden simple* y da la versión corta de cuando una multiplicidad es *bien ordenada* (ver nota 11, página 64) y la llama «sucesión»; también al *tipo* de cada sucesión lo designa como *número ordinal* o sólo *número*.

¹⁵ Aquí Dou pone $\overline{\overline{U}} \leq \overline{\overline{M}}$.

Después, pone en vista al sistema Ω de *todos los números* del cual nota rápidamente que es un orden simple pero también un *buen orden*¹⁶, por lo que, en su orden por magnitud, también una sucesión.⁴

A Ω le antepone como primer elemento al 0 y así forma la multiplicidad Ω' que tiene la propiedad de que para todo número γ en ella, es el *tipo* de la sucesión de los elementos que la preceden¹⁷. En consecuencia Ω' no puede ser, y por ende Ω tampoco, una multiplicidad *consistente* (disponible). Ya que, si Ω' lo fuese y sea considerado tal como *conjunto*, sería bien ordenado con su respectivo número ordinal δ , el cual sería mayor que todos los del sistema Ω , pero también δ pertenece a Ω por su misma definición; y con esto δ es mayor que δ .

Notemos dos cosas del argumento anterior: que Cantor sólo “demuestra” que Ω es *inconsistente* y que, dicho argumento es achacado como la versión cantoriana de la Paradoja de Burali-Forti.

Después de una breve explicación acerca de la formación de el sistema $\aleph$ de *todos los alefs*, como ya antes la mencionamos, pasa a decir simple y llanamente que, como $\aleph$ es isomorfa a Ω , es por tanto también inconsistente. Es en este punto donde surgen los argumentos de la Paradoja de Cantor en la primera de las direcciones. Redoremos que Cantor en verdad pretendía demostrar que *todos los números cardinales o potencias están contenidos en $\aleph$* y advirtamos desde ahora que esta proposición puede verse como una “demostración fácil” del Teorema del buen orden.

Inicia tal demostración tomando una multiplicidad V cuyo cardinal no es ningún alef y dice entonces que es fácil ver que existe un $V' \subset V$ de tal modo que V' es equivalente a Ω y por tanto V' es inconsistente porque Ω lo es y por ello también V . Por lo tanto, $\aleph$ es el sistema de todos los números cardinales transfinitos y con esto, continua, se tiene a su vez la tricotomía para los cardinales.

En el argumento del párrafo anterior, Cantor no explica todos los pormenores

¹⁶Para estas afirmaciones cita el apartado §13 de sus “*Contribuciones*”, (Cantor G. 1895/97, p. 40). En particular nota el teorema N. Para nuestro podemos agregar los primeros tres teoremas del apartado §16 del mismo trabajo de Cantor.

¹⁷Recuérdese que Cantor no consideraba al *vacío* como conjunto, y que su construcción de los números finitos inicia en 1.

de su deducción, sobre todo en la formación de V' ; veamos un modo como lo puedo haber definido¹⁸, con motivo de dilucidar su relación con el Teorema del buen orden y el Axioma de elección.

Sea V es una multiplicidad de manera que para todo ordinal μ se tiene que $\overline{\overline{V}} \neq \aleph_\mu$. En particular, como V es infinito, existe una inyección $f_\omega : \omega \rightarrow V$ que no es una biyección (de serlo $\overline{\overline{V}} = \aleph_0$) y por tanto, también un elemento $v_\omega \in V$ que no pertenece a la imagen de f_ω que denotaremos con $f_\omega[\omega]$. A partir de f_ω formaremos una sucesión transfinita para todo ordinal $\alpha > \omega$ de funciones f_α de manera que dado α y β , con $\omega \leq \beta < \alpha$, que cumplan las condiciones: (i) $f_\beta \subset f_\alpha$, (ii) f_α sea inyectiva y (iii) f_α no sea biyectiva.

Para dicha formación sea $\alpha > \omega$, y supongamos que f_β ha sido definida para todo $\beta < \alpha$, veamos primero el caso en que α es un sucesor:

Si es así, existe $\beta_0 < \alpha$ tal que $\alpha = \beta_0 + 1$ y un elemento $v_{\beta_0} \in (V \setminus f_{\beta_0}[\beta_0])$ con lo que definimos $f_\alpha : \alpha \rightarrow V$ como:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} f_{\beta_0}(x) & \text{si } x < \beta_0 \\ v_{\beta_0} & \text{si } x = \beta_0 \end{cases}$$

Ahora, si α es un ordinal límite se define para cada ordinal $\beta < \alpha$ así¹⁹:

$$f_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} f_\beta$$

De todo esto se puede ver que las f_α así definidas cumplen (i), (ii) y (iii). Y si definimos $\mathcal{F} : \Omega \rightarrow V$ de modo que:

$$\mathcal{F}(\alpha) = f_\delta(\alpha)$$

donde $\delta = \min\{\mu \in \Omega : \mu > \alpha\}$ (existe porque Ω es bien ordenado), se tiene fácilmente que si $V' = \mathcal{F}[\Omega]$, $\mathcal{F} : \Omega \rightarrow V'$ es una biyección entre Ω y $V' \subseteq V$.

Cantor había notado antes dos cosas: si dos multiplicidades se tiene que $X \subseteq Y$ y X es inconsistente, entonces Y también lo es; y que cualquier conjunto biyectable con una multiplicidad X inconsistente, también es inconsistente.²⁰ Con esto, en nuestro caso, se deduce que V es inconsistente.

¹⁸Esta idea fue tomada de tomada de (Torretti 1998).

¹⁹Torreti la define para cada ordinal $\beta < \alpha$, $f_\alpha|_\beta = f_\beta$.

²⁰Se puede ver la ya mencionada carta a Hilbert.

Resumiendo, si a una multiplicidad no le corresponde un alef como cardinal, este es inadmisibile, o sea, no es un conjunto en sí.

Si damos por sentada la demostración de Cantor, esta es una prueba *fácil* de que todo conjunto es bien ordenado, ya que toda multiplicidad cuyo cardinal ya vimos, es un alef se deja biyectar, por la misma definición los alefs, con un número ordinal y por tanto *bien ordenar* por este mismo, y una pluralidad que no se puede *bien ordenar*, según lo anterior, no es un conjunto (Torretti 1998, p. 54).

Zermelo hace una compilación de los trabajos de Cantor, y se muestra insatisfecho por dicha “demostración” implícita del Teorema del buen orden; y sus objeciones van en dos sentidos: primero, que opera con multiplicidades inconsistentes, lo que para la él es lógicamente inadmisibile; y segundo, que para la formación de la biyección de Ω en V , Cantor tubo que haber hecho una secuencia transfinita de selecciones sucesivas, lo que implica usar nuestra intuición del tiempo a un proceso que rebasa toda intuición.

En nuestro caso, dicha secuencia transfinita, como hace notar Torretti, está envuelta en la selección sucesiva de los objetos $v_\alpha \in V$, uno para cada $\alpha \in \Omega$ que se producen debido a la imposibilidad de que f_α sea una biyección.

Pasamos a esbozar la carta de Cantor a Dedekind del 31 de agosto de 1899 concorde acorde con la interpretación habitual. El objetivo del escrito es conducirlo en un argumento que lo llevara a la existencia de de *multiplicidades* que no son *unidades*, o sea conjuntos.

Inicia poniendo en consideración al sistema *S de todas las clases pensables* y entiende por **a** el número cardinal de algún determinado conjunto $M_{\mathbf{a}}$.

Con esto, su primer argumento es, si S fuera un conjunto lo sería también

$$T = \sum M_{\mathbf{a}},$$

suma que corre sobre las clases **a**, dando a su vez el cardinal $\mathbf{a}_0 = \overline{\overline{T}}$.

Después comenta que, con base en su artículo de 1890/91 (ver página 72), siempre es posible concebir un cardinal mayor que un **a** dado, resultado que se puede expresar por la fórmula:

$$2^{\mathbf{a}} > \mathbf{a}.$$

Con lo que se tiene pues un cardinal $\mathfrak{a}'_0 = 2^{\mathfrak{a}_0}$, estrictamente mayor que $\mathfrak{a}_0$. Con esto, por su misma definición, T tiene como una de sus partes al conjunto $M_{\mathfrak{a}_0}$ el cual es de cardinalidad $\mathfrak{a}'_0$, y esto es una contradicción.

Concluye pues que, el conjunto T y, por ende, también S *no son* conjuntos [disponibles o consistentes].²¹ De estas dos cartas podemos concluir que Cantor era consiente de la existencia de “multiplicidades” que llevaban a contradicciones y que la existencia de estas no le era fatal en la fundamentación de su emergente teoría; en cambio, él intento utilizar este hecho de forma positiva (su demostración del Teorema del buen orden). También vemos que Cantor sabía distinguir entre lo que sí es un conjunto *disponible* en y para su teoría y lo que no es; por ejemplo el conjunto de todo lo pensable.

Regresemos a la cuestión del año de *descubrimiento* de dicha paradoja; los documentos en los que se basa para suponer el año de 1883 son, por un lado, la correspondencia de Cantor con Grace Young, donde dice que *via claramente* la necesidad de la distinción entre multiplicidades *consistentes* e *inconsistentes* desde el año en que escribió sus *Fundamentos* (ver página 63) y, por otro, en las cartas que envía a Hilbert en 1897 y 1899²² se sugiere lo mismo. De los argumentos que apoyan el año de 1895 están los de Dauben, quien dice que la definición de conjunto de la primer parte sus *Contribuciones* (ver páginas 71 y 74) pudo haber estado calculada para evitar los casos paradójicos.

Pero la fecha más conviene puede ser la de 1896 en torno la preparación de sus *Contribuciones* de 1895/97. Una prueba es que, de haber hecho la distinción entre multiplicidades *consistente* e *inconsistentes*, antes de 1895, no habría definido libremente a $\aleph_0$, ya que la consistencia de ésta no estaba demostrada.²³

²¹En otra parte de la carta a Hilbert del 10 de octubre del 1898, Cantor afirma:

Si C es un conjunto disponible[consistente], entonces también cada subconjunto de C es un conjunto disponible (Cantor, 2006, p. 256).

²²Son las cartas del 26 de septiembre de 1897 y 15 de noviembre de 1899, se pueden ver en (Cantor G. , 2006)

²³En otra carta a Dedekind de 1899, se pregunta sobre la consistencia de cada uno de los *alefs* a lo que contesta:

La pregunta debe *extenderse igualmente a las multiplicidades finitas*, (...) para las multiplicidades finitas *no es* posible llevar a cabo una demostración de su

Por último también se piensa que dicho *descubrimiento* fue en 1899 en el momento en que comunicó a Dedekind sus pensamientos respecto a dicha distinción. Aunque, como vimos, el objetivo de ese trabajo era un intento de demostrar el Teorema de buen orden.

En tanto a la publicación de dicha paradoja, las cartas mencionadas fueron publicadas formalmente por Zermelo hasta 1932, pero según Garciadiego, ya había referencia a la Paradoja de Cantor antes de ese año, por lo que atribuye a Bertrand Russell ser el primero en *publicar*, en 1903 dentro de su libro *Los principios de las matemática*, el argumento de Cantor y también el de Burali-Forti como *contradicciones*, así como la más conocida de las paradojas, la Paradoja de Russell.

«consistencia » (...) es en verdad simple e indemostrable, es «el axioma de la aritmética». (...) Y del mismo modo, la «consistencia» de las multiplicidades a las que les adjudico los alefs como números cardinales es «el axioma de la aritmética ampliada transfinita»(Cantor, 2006, pp. 265-266).

3.2.3. Paradoja de Russell

La Paradoja de Russel, también conocida como *La clase de las clases que no son elementos de si mismas* es, quizá, la más popular de todas que, a diferencia de las dos anteriores, no involucra conceptos o resultado ya obtenidos dentro de la Teoría conjuntos en sí (como ordinales o el Teorema de Cantor), sino que consta sólo de la relación de pertenencia y conceptos lógicos básicos. Su formulación más simple es: dada la clase $w = \{x : x \notin x\}$, la paradoja surge cuando nos preguntamos si w pertenece o no a ella misma. Si suponemos que $w \in w$ entonces w cumple con $x \notin x$, o sea $w \notin w$; y si, por otro lado, suponemos que $w \notin w$ entonces w cumple $x \notin x$ por lo que $w \in w$, con lo que se concluye que $w \in w$ si y solo si $w \notin w$. Tratando de seguir el esquema de las dos exposiciones anteriores, presentaremos una formulación como “comúnmente” se presenta esta paradoja, para después profundizar en el contexto, tanto matemático como histórico, en que esta se desarrolla. Comencemos viendo como la enuncia Oskar Becker, quien señala que:

El trasfondo de esta consideración [la paradoja] se encuentra en el llamado “principio de comprensión”, que se puede expresar en símbolos del modo siguiente:

$$(Ez)(x)(x \varepsilon z = H(x))$$

Existe un z tal que para todo x se verifica que: x pertenece al conjunto z si y solo satisface la condición H .

Si en particular se propone $\overline{x \varepsilon x}$ por la condición $H(x)$, es decir, “ x no pertenece a sí mismo”, entonces se llega a una contradicción. Puesto que se tiene:

$$(Ez)(x)(x \varepsilon z = \overline{x \varepsilon x})$$

y como (x) expresa la validez general, “para todo x ”, se puede sustituir en particular x por z y se obtiene la contradicción:

$$z \varepsilon z = \overline{z \varepsilon z}$$

Con el fin de eliminar esta contradicción han llevado a cabo dos diferentes intentos principalmente (Becker 1966, p. 154 y 155).

Sobre las soluciones a esta paradoja y la trascendencia que tiene el Principio de comprensión, hablaremos más adelante, aquí baste sólo como una presentación común del argumento de dicha paradoja. ¿Cómo y cuándo es que surge este argumento?, es lo que ahora nos concierne. Retomemos lo que hemos manejado como interpretación *estándar*; sobre lo que respecta a este caso se suele decir que en 1905 Russell produjo su paradoja analizando el Teorema de Cantor²⁴, se menciona 1903 como el año de la publicación (en *Los principios*) de esta paradoja; también 1902 es señalado como el año del descubrimiento mismo en que se la comunica a Frege. A pesar de esto, se tiene evidencia de que ya en 1901 Russell contaba con dichos argumentos, incluso un año antes. Es notable que, bajo esta interpretación no hay acuerdo en las fechas específicas²⁵. Al respecto, nosotros nos concentramos en el hecho de la publicación de *Los principios* y en lo concerniente a la reacción, en la correspondencia, que Russell mantiene con Frege.

Ya desde 1898 Russell estaba intentado escribir un libro en el que se plasmaran sus estudios y pensamientos sobre los *fundamentos de las matemáticas*, texto que se convertiría en *Los principios de las matemáticas*. En ese camino, tres matemáticos produjeron gran influencia en él: Giuseppe Peano, Gottlob Frege y, en el tema que nos toca, George Cantor. Frecuentemente, en la interpretación que estamos describiendo, se indica que las paradojas surgen de una actitud negativa hacia las ideas de Cantor, esto último, como hemos visto, no es del todo cierto.

Pese a que en un inicio Russell no admitía del todo las ideas de Cantor, en particular el supuesto de la existencia de « ω », ya que para él no había un último término en la sucesión de los naturales; después de considerar la discusión filosófica de los números transfinitos, terminó fluidamente aceptando la doctrina de Cantor, y su « ω », en términos generales, pero siempre mantuvo una actitud crítica. Russell creía que había resultados dentro de la Teoría de Cantor a los que en un momento llamó «errores», específicamente en uno: en el Teorema de Cantor. Este resultado implica la inexistencia de un cardinal máximo y a su vez la imposibilidad de considerar un *conjunto universal* que

²⁴Se hace referencia al artículo de Russell “On denoting”, (Russell, 1905).

²⁵Esto se pudo propiciar, aparte de las distintas *interpretaciones* históricas, porque el mismo Russell ha propuesto fechas alternativas, ver Garcíadiego (1992, p. 53).

Russell si concebía²⁶. Más aún, creía que la clase de los “individuos” debe ser el máximo absoluto de los números, ya que toda otra clase es propia de esta. Ahora, congruentes con que la actitud de Russell no era negativa hacia las ideas de Cantor, sino más bien conciliadora, señalamos que él mismo se dispuso mostrar que sus respectivos puntos de vista no eran contradictorios, para lo cual procedió a examinar lo que podían ser las dificultades iniciales. Al respecto veamos la siguiente cita de Russell.

Cantor ha dado dos demostraciones [...] de que no existe el número ordinal máximo. Si estas demostraciones fuesen validas, perecería aún haber una contradicción. Pero tal vez encontraremos que las demostraciones [de Cantor] solamente se aplican a los números de las clases que no contienen a todos los individuos [...]. Es esencial, sin embargo, examinar este punto con cuidado, antes de proclamar que el infinito esta libre de contradicciones.²⁷

Con esta orientación, Russell analizó cuidadosamente las dos demostraciones de Cantor, dicho análisis lo plasma el capítulo sobre *filosofía del infinito* del libro en cuestión. La primer demostración a la que se refiere, es la que tiene como argumento básico “la existencia de una correlación biunívoca entre los ordinales y los cardinales”, la cual no admite. Una de las razones de esto es que, si se da la representación de dicha correlación partiendo del primer cardinal infinito como:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \omega & \omega + 1 & \omega + 2 & \dots & \omega + n & \dots \end{array}$$

Donde $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ “sería” la serie de los cardinales para la cual debe suponerse la existencia de un cardinal para todo ordinal y que no hay clases que pueda tener tantos términos(elementos) que nunca serie ordenada pueda tener un número mayor que ellos. Para Russell, cualquiera de estas suposiciones es falta de fundamento y más aún, en ese momento creía que puede

²⁶En ese momento, el pensamiento filosófico de Russell, un realismo metafísico proveniente del rechazo de las teorías neohegelianas, le hace creer que dicha clase si existe (Garcíadiego 1992, p. 132).

²⁷Apunte de Russell del año 1900 para la elaboración de *Los principios*, citado en (Garcíadiego 1992, p. 133).

haber dos clases donde sus respectivas cardinalidades no se pueden comparar. Pero de gran relevancia para nuestro trabajo es el análisis que Russell hace del argumento de la segunda demostración, el argumento diagonal de Cantor.

3.2.3.1. Diagonal de Cantor y la clase w de Russell

La relevancia de este último aspecto, es que en dicho análisis es donde se nace la idea de *la clase de clases que no se contienen a si mismas*, veremos esto a más detalle. Después del descarte de esa primera demostración, en ese mismo capítulo, Russell sigue con una presentación de los lineamientos generales del argumento diagonal que Cantor presento entre 1890 y 1891 (ver página 72); después menciona variaciones de este mismo argumento aplicados a otro tipo de “objetos”, concluyendo resultados semejantes. Pero mas adelante hace referencia a determinados casos en los que “la conclusión resulta aparentemente falsa” (Russell, 1903, p. 417). Uno de esos casos, como veremos, es el de *la clase de todas las clases* que, al aplicarle el argumento de la diagonal de Cantor, se origina a la idea de la clase contradictoria de Russell. Para puntualizar esto versemos el argumento de Cantor pero ahora, no con “ M ” que contiene las funciones de un conjunto L en 2, sino en términos de “ $\mathcal{P}(L)$ ”, que consta de los subconjuntos de L , lo que es naturalmente equivalente.

Cantor, en el citado artículo, había dicho que para el conjunto L hay otro conjunto M de cardinalidad estrictamente mayor, cuyos elementos son las “sucesiones” del tipo $E_k = (a_{k,x}, a_{k,y}, a_{k,z}, \dots)$ cuyos subíndices derechos corren en L y cada $a_{k,x}$ es igual a m o a w . Cada sucesión así definida se caracteriza con un determinado subconjunto e_{E_k} de L , que contiene los índices donde cada $a_{k,x}$ de E toma el valor de m . Por ejemplo: Si $E_k = (a_{k,x}, a_{k,y}, a_{k,z}, \dots) = (m, w, m, \dots)$, ésta fija el subconjunto $e_{E_k} = \{x, z, \dots\}$. Y así cada sucesión E_k queda unívocamente determinada por un subconjuntos e_{E_k} y viceversa.

Dicho esto, el argumento diagonal de Cantor para encontrar una sucesión E_0 de M , dada cualquier una sucesión $E_x, E_y, E_z, \dots$ de elementos de M cuyos índices son los elementos de L , de manera que $E_0 \neq E_x$ para todo x en L , queda equivalentemente transformado en el siguiente:

- 1) Dada la sucesión $E_x, E_y, E_z, \dots$ de elementos M determina también una

sucesión $e_{E_x}, e_{E_y}, e_{E_z}, \dots$ subconjuntos de L .

2) Tomar $E_0 = (b_x, b_y, b_z, \dots)$ donde $b_x = m$ si $a_{x,x} = w$, o $b_x = w$ si $a_{x,x} = m$, equivale a determinar que $x \in e_{E_0}$ si y solo si $b_x = m$, lo que se cumple si y solo si $a_{x,x} = w$, lo que equivale a que $x \notin e_{E_x}$, o sea:

$$e_{E_0} = \{x \in L : x \notin e_{E_x}\}$$

Para ilustrar esto, veamos el siguiente esquema:

$$M \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{x \ y \ z \ \dots \ \mu \ \dots}^L \\ E_x = \{\mathbf{m}, m, m, \dots, m, \dots\} \\ E_y = \{w, \mathbf{w}, m, \dots, w, \dots\} \\ E_z = \{w, m, \mathbf{m}, \dots, m, \dots\} \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \\ E_\mu = \{m, w, m, \dots, \mathbf{w}, \dots\} \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \end{array} \right. \Leftrightarrow \mathcal{P}(L) \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{x \ y \ z \ \dots \ \mu \ \dots}^L \\ e_{E_x} = \{\mathbf{x}, y, z, \dots, \mu, \dots\} \\ e_{E_y} = \{_, _, z, \dots, _, \dots\} \\ e_{E_z} = \{_, y, \mathbf{z}, \dots, \mu, \dots\} \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \\ e_{E_\mu} = \{x, _, z, \dots, _, \dots\} \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \end{array} \right.$$

Producen respectivamente a:

$$E_0 = \{\mathbf{w}, \mathbf{m}, \mathbf{w}, \dots, \mathbf{m}, \dots\} \quad \text{y} \quad e_{E_0} = \{_, y, _, \mu, \dots\}$$

3) Y deducimos que para todo $x \in L$, $e_{E_0} \neq e_{E_x}$, ya que de lo contrario, si $x \in e_{E_x}$ se tiene, por la definición de e_{E_0} , que $x \notin e_{E_0}$, y viceversa, si $x \in e_{E_0}$ implica que $x \notin e_{E_x}$.

4) Finalmente, se concluye que los elementos de $\mathcal{P}(L)$ no se pueden poner bajo la forma $e_{E_x}, e_{E_y}, e_{E_z}, \dots$, donde los índices inferiores son los elementos de L , ya que de lo contrario, el subconjunto e_{E_0} es y no elemento de $\mathcal{P}(L)$.

Así se demuestra, con el argumento de Cantor, que $\overline{\overline{\mathcal{P}(L)}} \neq \overline{\overline{L}}$. En sí, lo que se hace es suponer la existencia de una biyección $f : L \rightarrow \mathcal{P}(L)$ de manera que todo $x \in L$ se corresponde unívoca y recíprocamente con un subconjunto de L , de manera que $f(x) = e_{E_x}$. Después, dada tal biyección f se presenta un elemento $e_{E_0} \in \mathcal{P}(L)$ que ahora podemos escribir como:

$$e_{E_0} = \{x \in L : x \notin f(x)\}, \quad (1)$$

resultando que $f(x) \neq e_{E_0}$ para todo x , lo que constituye una contradicción y por lo tanto $\overline{\overline{\mathcal{P}(L)}} \neq \overline{\overline{L}}$. Si a esto agregamos, con las mismas ideas de Cantor, que $\overline{\overline{L}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(L)}}$ dando la inyección $h : L \rightarrow \mathcal{P}(L)$ de manera que para todo $x \in L$ se tiene que $h(x) = \{x\}$, se tiene finalmente que $\overline{\overline{L}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(L)}}$.

La cuestión surge cuando consideramos como conjunto de partida al “conjunto universal” V y a su “correspondiente” $\mathcal{P}(V)$.

Russell al intentar examinar la aplicación del argumento de Cantor para una correlación (biyección) realizada, presenta en sus términos el siguiente caso:

Partiendo de que V contiene a V' , formado por todas las clases como miembros y que es a su vez $\mathcal{P}(V')$, tomemos la biyección obvia $f : V' \rightarrow \mathcal{P}(V')$ de manera que $f(x) = x$, en estas condiciones la clase e_{E_0} queda definida a partir de (1) como:

$$e_{E_0} = \{x \in V' : x \notin x\}, \quad (2)$$

la cual es contradictoria ya que, como $e_{E_0} \in V'$; si $e_{E_0} \in e_{E_0}$ implica que $e_{E_0} \notin e_{E_0}$ y si $e_{E_0} \notin e_{E_0}$ tenemos que $e_{E_0} \in e_{E_0}$. De aquí, se pasa fácilmente a concebir la *clase* w como la de las clases que no se contiene a sí mismas que se suele escribir como:

$$w = \{x : x \notin x\}$$

Recordemos que en un principio, cuando concibe la *idea* de la *clase* w , a finales de 1900 o inicios de 1901, la expone en sentido, no como contradicción, ni como paradoja, sino como de error o falacia en las ideas de Cantor. El proceso en que el mismo Russell la acepta como una *clase contradictoria* o *paradójica* no fue espontáneo. Reconstruyamos un poco el momento en que la concepción de la paradoja como *tal*, o sea, cuando Russell da al mencionado argumento la calidad de «contradicción» dentro de las lógicas de las clases. Veamos cómo hace esto manifiesto en lo que es la *enunciación más temprana* de la contradicción de Russell:

vimos que algunos [predicados] pueden ser predicables de sí mismos. Considérese ahora a aquellos de los cuales éste no es el caso.[...]Para este predicado, será ya sea predicable o no predicable de sí mismo. Si es predicable de sí mismo, es uno de esos referentes

por relación con los cuales fue definido y, por lo tanto, en virtud de su definición, es predicables de sí mismo. Recíprocamente, si no predicable de sí mismo, entonces otra vez uno de los referentes dichos, de todos los cuales (por hipótesis) es predicable y, por lo tanto, otra vez predicable de sí mismo. *Esta es una contradicción*, la cual muestra que todos los referentes considerados no tienen predicado exclusivo común y, por lo tanto, si los predicados que definen son esenciales para las clases, no forman una clase [...]. se sigue de lo anterior, que no toda colección definible de términos forma una clase definida por un predicado común.²⁸

Notemos que esta cita sugiere la necesidad de una limitación para la formación de clases de forma similar a las multiplicidades *disponibles* de Cantor. Y también, en un sentido historiográfico, que esto aparece en sus notas-boceto de mediados de 1901 para la elaboración de *Los principios*, en particular de la Parte I en lo que será el Capítulo IX.-*Relaciones*. Bajo esta misma línea, aludiendo a estos elementos, vemos una prueba sobre el año del descubrimiento russeliano de su contradicción. Esto es; en una boceto de la tabla de contenido los *Los principios* de mayo de 1901, la Parte I sólo llega hasta el Capítulo VIII en el que platea un resumen de esa parte. Pero poco después, en el siguiente boceto agrega el Capítulo IX ya mencionado y, entre otros, el Capítulo X.- *La Contradicción*, manteniéndose estos dos hasta la versión final del libro.

3.2.3.2. Descubrimiento de Zermelo de la Paradoja de Russell

Otro de los elementos que se puede agregar a lo que hemos manejado como interpretación *estándar* es que, Ernst Zermelo descubrió de manera independiente la Paradoja de Russell, antes de que se publicaran *Los principios*, incluso antes que Russell la concibiera.

Para tratar de esclarecer esto, veamos las fuentes en las cuales se basa esta aserción: 1) el comentario que Zermelo hace en su artículo de 1908, en el que presenta su segunda demostración de Teorema del buen orden, 2) una carta

²⁸Cita tomada de Garciadiego (1992, pp. 139-141).

que Hilbert manda a Frege en 1903 y 3) una nota de Husserl (1859-1938) de 1902 en donde detalla la exposición de Zermelo de dicha paradoja.²⁹

La primera fuente se encuentra en el trabajo de Zermelo llamado *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*³⁰ donde presenta una segunda demostración del Teorema del buen orden, respondiendo a las críticas dentro la gran polémica que causó su previa demostración de 1904; no estraremos en detalle sobre esta cuestión, lo que nos interesa por el momento es lo que él dice en una nota de este trabajo. Él se encuentra comentando que la antinomia de Burali-Forti ha provocado en algunos matemáticos un profundo escepticismo hacia la Teoría del buen-orden y que, sin embargo, pueden ser resueltas no con abandono del buen-orden, sino con una *adecuada restricción de la noción de conjunto*, incluso en la forma elemental que Russell tiene de las antinomias. Es en este contexto donde Zermelo comenta:

Sin embargo, yo mismo había descubierto esta antinomia independiente de Russell y ya antes de 1903, entre otros, la comuniqué al profesor Hilber (Zermelo, 1908a, p. 119).

Una segunda fuente es la carta que Hilbert escribe a Frege el 7 de noviembre del 1903. Aunque que no tenemos acceso al contenido de esta carta, podemos comentar que Hilbert le dice básicamente a Frege que: *—yo creo que el Dr. Zermelo la descubrió [la paradoja] hace 3 o 4 antes* (Rang y Thomas, 1981, p. 18). Este documento se puede considerar como el primario en cuestión de fecha, sugiere que el descubrimiento de Zermelo se remonta a 1899 o 1900, pero respecto al agumento original de este último, la nota de Husserl del 16 de abril de 1902, es más ilustrativa.

Esta nota, no solo confirma que Zermelo “conocía” la paradoja de Russell antes de su publicación en *Los principios*, sino que da prueba de cómo Zermelo la concibió.

El escenario de tal comunicado es que Husserl se encontraba analizando la un trabajo de Schröder (1841-1902) en donde intentaba demostrar que la

²⁹Para el trazo de la siguiente exposición y en particular para el esbozo de la que hace Zermelo de esta paradoja nos basamos en Rang y Thomas (1981). Este trabajo también contiene un facsímil la nota original de Husserl.

³⁰*Nueva Demostración de la Posibilidad de un Buen-Orden*, (Zermelo, 1908a) o (Heijenoort 1967, p. 183)

interpretación que Boole (1779-1848) hace de “la clase universal” lleva a una contradicción. Al respecto, es probable que Zermelo le quería comunicar a Husserl que lo que planteaba Schröder era correcto, mas no su método para demostrarlo. Por lo tanto, Zermelo plantea el método que, a nuestro interés, contiene su versión de la paradoja en cuestión como sigue:

Un “conjunto” M , que contiene como elementos cada uno de sus subconjuntos $m, m', \dots$, es *inconsistente*, o sea, si todo es tratado como un conjunto, conduce a contradicciones. La demostración es la siguiente: Consideremos aquellos subconjuntos m que no se contiene a sí mismo como elementos, estos constituyen en su totalidad un conjunto M_0 que puede “definirse” como:

$$M_0 = \{m \in M : m \subset M \wedge m \notin m\}$$

Con esto, Zermelo se propone a demostrar 1) $M_0 \notin M_0$ y que 2) $M_0 \in M_0$.

Para 1) dice, como $M_0 \subset M$, entonces $M_0 \in M$. Pero no M_0 no es elemento de sí mismo, ya que si lo fuese, M_0 contendría como elemento a un subconjuntos de M que se contiene a sí mismo (a saber el mismo M_0), lo que contradice la definición de M_0 . Por lo tanto $M_0 \notin M_0$.

Respecto 2), argumenta que de ahí mismo, como M_0 es un subconjunto de M que a su vez no se contiene a sí mismo como elemento, éste es por consiguiente elemento de M_0 ; es decir, $M_0 \in M_0$.

Aunque la conclusión en la nota es un difusa³¹, se nota claramente que su clase M_0 es en esencia la misma clase paradójica w de Russell.

Las implicaciones que darán Russell y Zermelo de sus “descubrimientos” son distintas, el primero, como veremos en la siguiente sección, remarcara el efecto que tiene sobre un fundamento lógico (el de Frege) y el segundo lo pudo haber

³¹La nota termina enunciando: *por supuesto, un “conjunto” con la definición como la de M es el “conjunto de todos los conjuntos”, este es también un ejemplo de un conjunto que se puede contener a sí mismo como elemento: El conjunto de todos los conjuntos es de hecho un conjunto.* Rang y Thomas hacen notar que lo anterior en el facsímil seguramente lo agrego Husserl y no forma parte de la prueba de Zermelo.

considerado *sólo* como otra dificultad a superar de la teoría de conjuntos de Cantor que puede ser, como ya se mencionó, con una restricción adecuada de lo que es un conjunto. Sobre las soluciones que dan ambos autores se hablará más adelante.

3.2.3.3. Repercucion en el programa de Frege

La causa de la Paradoja de Russell está en la aceptación, implícita o explícita, de un principio para la formación de clases o conjuntos, llamado *Principio de comprensión*, que corrientemente se puede expresar como: dada una “propiedad” $P(x)$, existe un conjunto $\{x : P(x)\}$ donde cada uno de sus elementos y sólo ellos poseen tal propiedad. Dicho principio surge de la lógica clásica aristotélica en donde se solía asociar a cada “concepto” la clase de “objetos” correspondientes y, si bien, se puede encontrar en matemáticos como Bolzano y Riemann, nos interesan las suscripción a este de Peano y Frege; en particular este último.

En *Los principios* Russell dice que para Peano todas las *funciones proposicionales*³² con una sola variable se pueden expresar bajo la forma « x es un a » siendo a una clase constante. Esto lo podemos encontrar como una formulación de principio de comprensión, pero también lo podemos ver en su *Formulaire de mathématiques* en el que, al significar su notación dice:

- 3 «**Cls**» significa «clase ».
- 4 Sea a una **Cls**; $x\epsilon a$ significa « x es un a ».
- 5 Sea p una proposición que contiene una letra x ; $x\exists p$ representa «la clase de las x que satisfacen la condición p ».

En general, Russell no se muestra en total acuerdo con lo anterior y recalca que existen ciertas limitaciones al respecto, ya que su *contradicción* negaba

³²Podemos entender aquí *funcione proposicional* como la “explica” Russell:

φx es una función proposicional si, para todo valor de x , φx es una proposición, determinada cuando se da x . (Russell 1903, p. 45)

Dicha función será verdadera para unos valores x y falsa para otros.

ese principio de Peano para la formación de clases, de hecho le escribió una carta³³ en 1902, pero este no le contestó.

Así, a finales de mayo de ese año, al no llegar respuesta de su maestro Peano, Russell decide escribir a Gottlob Frege (ver Apéndice D.1) donde le comunica, a groso modo, que antes compartía su opinión en tanto que una *función* también puede actuar como *elemento determinado*, pero que ahora esto ya le parece dudoso debido a la contradicción que conlleva la clase w ya mocionada.

La respuesta por parte de Frege no tardó, una semana después le comunicaba a Russell su consternación ya que, al parecer, el hecho de la contradicción suponía, básicamente, que su axioma V es falso. Y termina enunciando que abordará esta cuestión en el segundo volumen de sus *Grundgesetze*³⁴ que estaban a punto de ser publicado. Efectivamente, así sucede y en un apéndice de dicho trabajo Frege comienza diciendo:

No hay nada más ingrato para un escritor científico, el que uno de los fundamentos de su edificio sea sacudido después de terminado su trabajo.

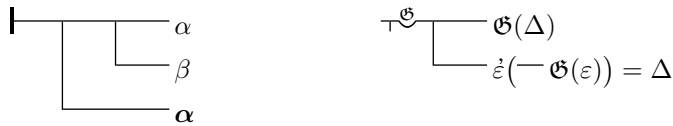
He sido puesto en esta posición por una carta que el señor B. Russell justo antes de que este volumen estuviera casi impreso. Eso es por causa de mi axioma V (Frege, 1903, p. 253).

Pasaremos a expresar dicho axioma V, pero antes comentemos lo siguiente; la propuesta lógica de Frege la expresa a través de un peculiar sistema simbólico bidimensional³⁵, para nuestros propósitos en lo siguiente no creemos necesario su total uso, excepto símbolos del tipo $\dot{\epsilon}\Phi(\epsilon)$ que explicaremos adelante. Para

³³Ver Apéndice D.1

³⁴(Frege, 1903)

³⁵Por ejemplo el axioma (1) de su *Begriffsschrift* y la expresión “ Δ es una clase que no se pertenece a sí misma” de sus *Grundgesetze II*, las escribe respectivamente como:



la primera se “traduce” como $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$ y la segunda como $\neg\forall\epsilon(\dot{\epsilon}\Phi(\epsilon) = \Delta \rightarrow \Phi(\Delta))$ o $\exists\epsilon(\dot{\epsilon}\Phi(\epsilon) = \Delta \wedge \neg\Phi(\Delta))$.

la siguiente exposición de lo dicho por Frege se hará pues, una “traducción” a notación actual.³⁶

Si Φ expresa un *concepto* que podemos entender, sin entrar en detalles, como una *expresión predicativa* vista como una función que asigna a cada objeto x del *universo*, un valor veritativo, falso o verdadero. A $\dot{\epsilon}\Phi(\epsilon)$ la podemos pensar llanamente como la *extensión* del concepto Φ ³⁷; con ello, el axioma V de Frege se puede escribir como:

$$\dot{\epsilon}f(\epsilon) = \dot{\alpha}g(\alpha) \leftrightarrow \forall a(f(a) \leftrightarrow g(a))^{38} \quad (V)$$

Mostremos ahora un esbozo de la deducción fregiana de la Paradoja de Russell. Para ello nos valdremos de reglas de inferencia y teoremas lógicos generalmente validos en una lógica proposicional.

La clase de las clases que no se pertenecen a sí mismas puede expresarse, como la *extensión* de la función $\Phi(\xi) = \neg\forall G(\dot{\epsilon}G(\epsilon) = \xi \rightarrow G(\xi))$, o sea $\dot{\epsilon}(\Phi(\xi))$. Ahora, si hacemos $f = H$ y $g = \Phi$ en el axioma (V) tenemos que:

$$\dot{\epsilon}H(\epsilon) = \dot{\epsilon}(\Phi(\epsilon)) \leftrightarrow \forall u(H(u) \leftrightarrow \Phi(u))$$

Abreviemos $\dot{\epsilon}(\Phi(\xi))$ con k y $(H(u) \leftrightarrow \Phi(u))$ con $\Psi(u)$ para obtener:

$$\dot{\epsilon}H(\epsilon) = k \leftrightarrow \forall u\Psi(u)$$

eliminando el generalizador de la derecha, sustituyendo u por k tenemos:

$$\dot{\epsilon}H(\epsilon) = k \leftrightarrow \Psi(k)$$

³⁶El trazo general de lo siguiente se debe a Torretti en su libro citado.

³⁷Un caso simple que da Frege es:

$\dot{\epsilon}(\epsilon^2 = 4)$ es la serie de valores de la función $\xi^2 = 4$, también podemos decir, la extensión [[Umfang]] del concepto *raíz cuadrada de cuatro* (Frege 1893, p. 15).

³⁸La formulación original es:

$$\vdash (\dot{\epsilon}f(\epsilon) = \dot{\alpha}g(\alpha)) = (\neg^{\mathfrak{A}} (f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))) \quad (V)$$

y aparece en la página 36 de sus *Grundgesetze der Arithmetik I*. El símbolo $\neg^{\mathfrak{A}}$ es el actual $\forall \mathfrak{a}$, nosotros hemos cambiado el signo ‘=’ por ‘ $\leftrightarrow$ ’ cuando figura entre *expresiones predicativas* y lo mantenemos cuando está entre *objetos*.

recordado nuestras abreviaturas $\Psi(k)$ equivale a $(H(k) \leftrightarrow \neg \forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k)))$ por lo que:

$$\dot{\varepsilon}H(\varepsilon) = k \leftrightarrow (H(k) \leftrightarrow \neg \forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k)))$$

De esto se deduce que:³⁹

$$\neg \forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k)) \rightarrow (\dot{\varepsilon}H(\varepsilon) = k \rightarrow H(k))$$

Ahora notemos que H se eligió como una viable predicativa arbitraria por lo que es lícita la introducción del cuantificador universal sobre esta para poder llegar a poner:

$$\neg \forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k)) \rightarrow \forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k)) \quad (i)$$

Por otro lado, partiendo de $\forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k))$ podemos alminar el cuantificador sustituyendo G por H ; es decir:

$$\forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k)) \rightarrow (\dot{\varepsilon}H(\varepsilon) = k \rightarrow H(k))$$

Pero notemos que H es arbitraria, por lo que podemos poner $H = \Phi$ resultando:

$$\forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k)) \rightarrow (\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = k \rightarrow \Phi(k))$$

y equivalentemente:

$$\begin{aligned} &\forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k)) \rightarrow \\ &(\dot{\varepsilon}(\neg \forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = \varepsilon \rightarrow G(\varepsilon))) = k \rightarrow \neg \forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k))) \end{aligned}$$

Sustituyendo k por $\dot{\varepsilon}(\neg \forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = \varepsilon \rightarrow G(\varepsilon)))$ llegamos a:

$$\forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k)) \rightarrow (k = k \rightarrow \neg \forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k)))$$

y por consiguiente a:

$$\forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k)) \rightarrow \neg \forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k)) \quad (ii)$$

³⁹Si ponemos a $\dot{\varepsilon}H(\varepsilon) = k$, $H(k)$ y $\neg \forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k))$ respectivamente como α , β y γ ; se tiene que de $\alpha \rightarrow (\beta \leftarrow \gamma)$ se deduce $\gamma \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$. Note que en la primera fórmula la implicación remarcada ' $\rightarrow$ ' es precisamente la necesidad en el axioma V.

Si representamos a $\forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k))$ con δ y tomando en cuenta el teorema lógico $(\delta \rightarrow \neg\delta) \rightarrow \neg\delta$, de aplicar *modus ponens* con la premisa (ii) se deduce:

$$\neg\forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k)) \quad (iii)$$

Volviendo a aplicar *modus ponens* con esta última como premisa y junto a (i) obtenemos:

$$\forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k)) \quad (iv)$$

Finalmente la contradicción:

$$\forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k)) \quad \wedge \quad \neg\forall G(\dot{\varepsilon}G(\varepsilon) = k \rightarrow G(k))$$

Al final de esta exposición Frege detecta dicha contradicción se deriva de la necesidad en su axioma V, es decir:

$$\dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\alpha}g(\alpha) \rightarrow \forall a(f(a) \leftrightarrow g(a)) \quad (Vb)$$

La “solución” que propone, en esa misma sección es la siguiente una especie de restricción a su axioma:

$$\dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\alpha}g(\alpha) \rightarrow \forall a(a \neq \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) \rightarrow (f(a) \leftrightarrow g(a))) \quad (Vb')$$

Pese a esto, años más tarde se demostró que esta “restricción” conduce nuevamente a contradicciones, B. Sobociński (1906-1980) informó que S. Leśniewski (886-1939) en 1938 había obtenido una contradicción usando el Vb’ reformulado⁴⁰, W. V. Quine (1908-2000) logró probar, independientemente, otra contradicción en su artículo *On Frege’s Way Out*⁴¹ de 1955; así mismo, en 1956, P. T. Geach generalizó dicho resultado⁴².

⁴⁰(Sobociński, 1949)

⁴¹(Quine, 1955)

⁴²(Geach, 1956)

3.3. Superación de las paradojas

3.3.1. Soluciones de Russell

En el Capítulo X de *Los principios* es donde se presenta la dichosa contradicción y en el Apéndice B se esboza una manera de resolverla, esto a través de una versión primitiva de la Teoría de tipos que Russell, junto a Whitehead, formularan en la monumental obra *Principia Mathematica*, publicada desde 1910 hasta 1913. En lo siguiente exhibiremos algunas generalidades de dicha teoría, enfocándonos en el papel que juega como solución de las paradojas mencionadas, primero en su versión de *Los principios*.

Quizá su primer intento de solución es la distinción entre *clases como unidad* y *clases como pluralidad*. Ya desde el Capítulo X, Russell anuncia esta solución.

Russell dice que si una colección de términos sólo puede definirse por medio de una función proposicional, entonces aunque debe admitirse la *clase como pluralidad* debe negarse como *unidad*, así formulada, la colección resultante no debe transformarse en *objeto* de la función proposicional original. Se ha tomado como axioma que siempre que se presenta la *clase como pluralidad* debe hallarse la *clase como unidad*, pero este axioma no debe admitirse universalmente ya que parece haber sido la fuente de la contradicción; por consiguiente, negarlo soluciona la dificultad. Concretamente la solución consiste en la distinción de varios tipos de objetos, a saber: términos, clases de términos, clases de clases, ... y que una función φx proposicional requiere, para que tenga sentido, que x deba pertenecer al algún tipo (inferior que ella). Así, $x \varepsilon x$ carece de sentido por que la relación ε requiere que el relato deba ser una clase de objetos de tipo diferente (Russell, 1903, p. 139 y 142).

Aclaremos algunas definiciones de Russell (1903); φx es una función proposicional si, para todo valor de x , φx es una proposición, determinada cuando se da x , una clase puede definirse como todos los valores x que satisfacen una función proposicional. La doctrina de tipos que expone, la enuncia con carácter de prototipo que, aunque es una posible solución, necesita tomar una forma de manera que pueda salvar todas las dificultades. Salvo esto, Russell explica las características esenciales de la siguiente manera:

Toda función proposicional $\varphi(x)$ -así se sostiene- tiene, además de su rango de la verdad, un rango de significado, es decir, un rango dentro del cual debe estar x si $\varphi(x)$ ha de ser una proposición, ya sea verdadera o falsa. Éste es el primer punto de la teoría de los tipos; el segundo es que los rangos de significado forman *tipos*, es decir, si x pertenece al rango de significado de $\varphi(x)$, entonces hay una clase de objetos, el *tipo* de x , todos los cuales deben permanecer también al rango de significado de $\varphi(x)$, aunque φ puede variar. El rango de significado es, o bien de un solo tipo, una suma de varios tipos completos... (Russell, 1903, p. 594).

Con esto en mente comienza una clasificación, con una idea preliminar y burda, de objetos caracterizada por el *tipo* al que pertenece. Los *términos* o *individuos* son cualesquiera objeto que no es un rango y constituyen el *tipo* mínimo de objetos⁴³. El siguiente tipo consiste en *rangos* o *clases de individuos* y el siguiente a éste en las *clases de clases de individuos* y así, habrá una progresión de tales tipos.

Ahora, si u es un rango [de verdad] determinado por la función proposicional $\varphi(x)$, *no- u* consistirá en todos los objetos para los cuales $\varphi(x)$ es falso de modo que *no- u* está contenido en el rango de significancia de $\varphi(x)$ y sus objetos son del mismo tipo que u y en vista de “la contradicción” Russell dice:

no- u debe ser el rango de falsedad de « x es un u » y « x es un x » ha de carecer en general de significado; consecuentemente « x es un u » debe requerir que x y u sean de diferentes tipos.

Esto es, con las dificultades que el mismo admite, la solución que propone en *Los principios*.

Russell retoma el tema de las paradojas hasta 1905 y distingue entre dos tipos de funciones proposicionales (de una variable); las *predicativas* y las *no predicativas*, las primeras definen clases y las segundas no, por lo que la cuestión es cómo saber cuáles funciones proposicionales son predicativas

⁴³En esta parte Russell considera a la *clase como unidad* como un *individuo*, siempre que sus miembros sean *individuos* (Russell 1903, p. 594).

y cuales no. En un artículo de 1906, titulado *Sobre algunas dificultades en la Teoría de los números transfinitos y Tipos de órdenes*⁴⁴ en el cual da las siguientes soluciones a la cuestión: la Teoría del zig-zag, la Teoría de la limitación de tamaño y la Teoría sin clases.

Teoría del zig-zag. La descripción que Russell hace de dichas teorías es muy superficial, en particular para esta teoría supone que si $\varphi(x)$ es una función predicativa, entonces su negación $\sim \varphi(x)$ también lo es. Ahora si $\psi(x)$ es una función proposicional no predicativa, o sea que no determina una clase, entonces la extensión o ámbito de verdad de $\psi(x)$ tiene que diferir de toda clase *dada* u .

Pero para el total desarrollo de esta idea es necesario saber qué funciones si son predicativas. Él intuía que las funciones proposicionales “simples” eran predicativas y solo algunas “complicadas” y “extrañas” no lo son. La conclusión y razón del posterior abandono de esta teoría es que para resolver la distinción se vio en la necesidad de formular axiomas, cada vez mas complicados e implausibles; sumado a esto, que su única guía era a necesidad de evitar las paradojas conocidas, lo cual disminuyó su objetividad.

Teoría de limitación de tamaño. La cuestión básica en ésta teoría es que si el “tamaño” de las clases es demasiado grande, éstas no pueden ser consideradas tales como *una cosa* u *objeto lógico* en sí; por ejemplo las clases de todos los ordinales o todos los cardinales.

Así pues, una propiedad designa verdaderamente a una clase, solo cuando ella no se aplica a “demasiadas cosas”, por lo tanto si una función proposicional es predicativa, su negación no lo es. Por ejemplo, si ‘ $x \in x$ ’ es predicativa la clase w de Russell no tiene cabida y viceversa. También, nótese que en este enfoque la clase universal es inadmisibile, lo que podría contravenir la filosofía de Russell.

Teoría de no clases. Ya desde inicios de 1906, Russell se ve convencido de que la completa solución a las paradojas debe ser enfocada a una teoría sin clases. Esta alude a un método de sustitución de expresiones con el fin de eliminar elementos del “lenguaje” que hacen referencia a las *clases*; o sea, evitar en el uso explícito de las clases como entes en el discurso sin que este pierda el sentido original o se preste a confusión.

⁴⁴(Russell, 1906)

El proposito es obtener un método en el cual se puedan expresar “hechos” sobre las clases sin suponer que estas son entes propios. En este sentido, una proposición significativa en la que intervenga la mención de *clases* debe ser equivalentemente significativa a otra que puede hacerse sobre sus miembros. Con esto, según Russell, las proporciones que no pueden concebirse así, son las que llevan a contradicciones y dice *por lo tanto es natural suponer que las clases son meras abreviaciones lingüísticas o simbólicas*⁴⁵. Por ejemplo, la afirmación de que -la clase de árboles es una subclase de la clase de seres vivos- se puede reformular simplemente diciendo que -todos los árboles son seres vivos- lo que es equivalente.

Una manera técnica de entenderlo puede ser, como lo explica Torretti, tomando una proposición p , $p(x/a)$ es lo que se obtiene de remplazar a por x en todos los lugares donde figura a en p . Variando x , $p(x/a)$ nos da una especie de función proposicional. Si tomamos b , un ente cualquiera que no aparezca en p y definimos $q = p(b/a)$, tenemos que $q(x/b)$ es verdadera para todos los valores de x si y solo si $p(x/a)$ es verdadera para todo valor de x . Es de decir, según Russell, que $p(x/a)$ sea verdadera para todo valor de x no depende del sujeto a , solo de la forma de p y su propuesta es que se usen solo aseveraciones de este tipo.

En la obra más madura de Russell y Whitehead, *Principia Mathematica* se encuentran remanentes de esta teoría. Allí, una clase se considera como “símbolos incompletos” que pueden ser interpretadas como componentes de del significado de las frases en las que aparecen. Inician el apartado *20 (Whitehead, Russell 1910, pp. 196-197) sobre su Teoría general de clases mencionado que, aunque cuentan con una notación para representar las clases, se evita la suposición de que hay cosas tales como las clases, pero si cada función proposicional determina una clase.

Una proposición en la que aparece una función proposicional φ , puede depender, para sus valores de verdad, de la función particular φ o de la extensión denotada con $\{\hat{z}(\psi z)\}$. En el primer caso, a las proposiciones las llama función *intencional* de φ y las segundas función *extensional* de φ . Y después ve la necesidad de tener un método con el cual obtener una función *extensional*, dada una función de una función. Lo que realiza mediante la siguiente

⁴⁵Russell citado en Torretti (1998, p. 185).

definición:

$$f\{\hat{z}(\psi z)\} =_{Df}. \exists \varphi ((\forall x(\varphi!x \equiv \psi x) \wedge f\{\varphi!\hat{z}\}))^{46}$$

Donde $\varphi!\hat{z}$ es una función predicativa de variable z y dice que $f\{\hat{z}(\psi z)\}$ es en realidad una función de $\psi\hat{z}$ que es definida siempre que $f\{\varphi!\hat{z}\}$ sea significativa. Con esto, valga como último ejemplo⁴⁷: si ‘Sócrates $\epsilon\hat{z}$ (z es humano)’ , o sea *Sócrates pertenece a la clase de todos humanos*, se puede poner como:

$$\exists \varphi ((\forall x(\varphi!x \equiv x \text{ es humano}) \wedge \varphi!\text{Sócrates})$$

Lo que quiere decir es que hay una función predicativa que la satisfacen todos los humano y Sócrates la satisface, es decir; una aserción sobre la *clase de todos los humanos* pero sin el supuesto del término ‘ $\hat{z}$ (z es humano)’.

La solución acotada en esta teoría, cae llanamente en que el argumento sobre la clase w no puede ser formulado. La afirmación, una “clase” es miembro de si misma carece de sentido.

Así, lo que resulta en la teoría anterior es una reinterpretación de la proposiciones, sin pérdida del sentido original pero no nos proporciona una reinterpretación de la proposiciones sobre los mismos sentidos (ya reinterpretados). Continua abierta la cuestión de que si, aún cuando halla sido reinterpretado hablar de “clases”, es posible una reformulación (reinterpretada) de la clase paradójica de Russell o proposición en esencia equivalente, de manera que, pese a la ausencia de “clases” en el discurso, resurja la contradicción. Es justo en este punto donde figura la *Teoría de tipos* como baluarte.

Teoría de tipos (simple). En 1908 Russell presenta una versión madura de la doctrina que había sugerido como solución a las paradojas en 1903. Esto lo hace a través del artículo llamado *La lógica matemática basada en la teoría de tipos*⁴⁸ donde ofrece una solución a las paradojas y es también base

⁴⁶Esta definición fue “traducida” lo mas fiel posible para nuestros fines de la original contenida en *Principia Mathematica*:

$$f\{\hat{z}(\psi z)\} . = : (\exists \phi) : \phi!x . \equiv_x . \psi x : f\{\phi!\hat{z}\} \quad Df$$

⁴⁷Tomado de (Klement 2010, p. 35)

⁴⁸(Russell, 1908)

para el desarrollo que hará en *Principia Mathematica*. Para esto solo vamos a ver algunos aspectos generales⁴⁹.

Ahí se indica que el trasfondo de las paradojas surge de una especie de *círculo vicioso* al suponer que una colección de objetos que deba contener miembros solo definibles con la concepción, *como un todo*, de la colección en cuestión. Por lo tanto, hablando de colecciones (totalidades) en general, lo que envuelve *todo* de una colección no puede ser miembro de ella misma. Eso, llamado *Principio del círculo vicioso* es precisamente lo que se propone evitar la Teoría de tipos.

Ahora, por “función proposicional” debemos entender cualquier cosa (ϕ) con una variable x que se convierte en una “proposición” cuando se le asigna un valor determinado a x . En este sentido se comprende como un concepto ambiguo en tanto que adquiere un valor distinto según se varía el argumento.

ϕx denota *ambiguamente* a ϕa , ϕb , ϕc , que son así mismo los valores variables de ϕx la cual solo tendrá un significado bien-definido si los objetos ϕa , ϕb , ϕc , son bien-definidos, o sea sus valores tienen que ser previamente bien-definidos, de lo que se desprende que:

ninguna función puede tener entre sus valores algo que presuponga la función, ya que si lo tuviera, de hecho, no podríamos considerar como definidos a los objetos denotados ambiguamente por la función hasta que la función fuera definida, mientras que, a la inversa, como acabamos de ver, la función no puede ser definitiva hasta que sus valores no lo sean. Este es un caso particular, pero tal vez el más fundamental, el principio del círculo vicioso (Whitehead, Russell 1910, p. 39).

Es necesario, por tanto, distinguir entre la función misma y un valor determinado de ella. Primero, Russell y Whitehead designan ahora por ‘ ϕx ’ a un indeterminado valor de la función y escriben por la función misma ‘ $\phi \hat{x}$ ’, ‘ ϕx es una proposición’ (indeterminada) y ‘ $\phi \hat{x}$ es una función proposicional’ (*ambiguamente* ϕa , ϕb , ϕc ,). Se sigue que si es dada una función $\phi \hat{x}$ y sus valores como todas las proposiciones de la forma ϕx , acorde con el *principio*

⁴⁹En particular nos bastará con los Capítulos II y III de la introducción en *Principia Mathematica*, (Whitehead, Russell 1910, pp. 37-84)

del círculo vicioso, en $(\phi\hat{x})$, no hay proposición de la forma ϕx en la que x tenga un valor que involucre $\phi\hat{x}$.

Entonces, siguiendo con estos autores, no hay tal cosa como el valor de $\phi\hat{x}$ con argumento $\phi\hat{x}$; es decir, el símbolo $\phi(\phi\hat{x})$ ⁵⁰ no expresa proposición alguna o no es significante.

Con esto claro, regresando al argumento de la paradoja de Russell en forma de predicados. Si ψ simboliza el predicado "... es un predicado que no es predicable de sí mismo", la definición de este sería:

$$\forall\phi\hat{x}(\psi\phi\hat{x} \leftrightarrow \sim\phi\phi\hat{x})$$

donde la fórmula de la derecha de ' $\leftrightarrow$ ', no es significante.

Posterior a esto, retoman los términos generales para la distinción de objetos según su tipo de la forma presentada en 1903 por Russell. Específicamente, el *ámbito de significación* de un a función proposicional $\phi\hat{z}$ serán los objetos $a, b, c, \dots$ de su respectiva definición *ambigua* $\phi a, \phi b, \phi c, \dots$, dichos objetos formaran el *tipo* del cual $\phi\hat{z}$ no es miembro. Así también la función proposicional $\phi\hat{z}$ junto con otras forma el ámbito de significado de funciones que constituyen a su vez un tercer tipo y así sucesivamente. A muy grandes rasgos, estas son las ideas fundamentales de la *Teoría de tipos (simple)*.⁵¹

Expuestas las generalidades de la Teoría de tipos (simple) contenida en *Principia Mathematica*, los autores pueden pasar a la cuestión de las paradojas o contradicciones.

⁵⁰Es decir el resultado se sustituir x por $\phi\hat{x}$ en ϕx . Esa es la notación original, aunque tal vez sería mas correcto escribir $\phi\phi\hat{x}$.

⁵¹Mas elaborada es la llamada *Teoría ramificada de tipos*, un breve sentido de esta puede ser que, si dada una colección de funciones proposicionales $\phi\hat{z}, \varphi\hat{z}, \chi\hat{z}, \dots$ cuyo ámbito de significación sea, para todas, la colección $a, b, c, \dots$; con ellas se puede determinar otra función $\Phi\hat{z}$ como aquella en la que Φa equivale a que a satisface todas las funciones proposicionales de la colección $\phi\hat{z}, \varphi\hat{z}, \chi\hat{z}, \dots$. Entonces la determinación de $\Phi\hat{z}$ no solo depende de su ámbito de significación (que es el mismo que el toda la colección de funciones) sino que también de la previamente determinación de las $\phi\hat{z}, \varphi\hat{z}, \chi\hat{z}, \dots$; esto propone considerar que no basta con que dos fusiones compartan el mismo ámbito de significación para pertenecer al mismo tipo *indistintamente*, sino que dicho tipo al que pertenecen esas funciones debe *ramificarse* en distintos *niveles* que se caractericen bien según lo necesario para que una función pertenezca a tal *nivel*.

Como mencionamos, un elemento común en las paradojas es que involucran círculos viciosos. Russell y Whitehead, después de anunciar una lista de *contradicciones* que incluye *lógicas* y *semánticas*, según la caracterización de original Ramsey, enmarcan sus respectivas soluciones.

Una clase es un objeto derivado de una función proposicional y la presupone, para su correcta determinación. Entonces una clase no puede ser, por el principio del círculo vicioso, significativamente el argumento de la función que la define; esto es, si $\hat{z}(\phi z)$ es la clase definida por $\phi \hat{z}$, el símbolo $\phi\{\hat{z}(\phi z)\}$ no tiene sentido. Entonces, según Russell y Whitehead, una clase ni satisface ni no satisface la función que la define, por lo tanto ni es miembro ni no es miembro se sí misma. Para abundar más, las características que requiere una clase para ser bien definida son:

1. Toda función proposicional debe determinar una clase, la cual se considera como todos los argumentos que satisfacen la función en cuestión.
2. Dos funciones proposicionales que son formalmente equivalentes, determinan la misma clase.
3. Dos funciones proposicionales que determinan una misma clase son formalmente equivalentes.
4. En el mismo sentido que debe haber clases, análogamente hay clases de clases.
5. Debe ser, en toda circunstancia, carente de sentido suponer una clase es idéntica a uno de sus miembros.

Respecto al ultimo punto, dicen que tal suposición significa que si $\alpha \in \alpha$ sería una función proposicional con significado, y por lo tanto también $\alpha \sim \epsilon \alpha$; por 1. y 4. debe existir la clase de las clases que satisfacen la función proposicional $\alpha \sim \epsilon \alpha$, y la nombran con κ . Es decir:

$$\alpha \in \kappa \equiv_{\alpha} \alpha \sim \epsilon \alpha$$

Entonces por nuestra hipótesis $\kappa \in \kappa$ es significativa, y por la definición anterior se tendrá que:

$$\kappa \in \kappa \equiv \kappa \sim \epsilon \kappa$$

lo que es una contradicción; por lo que $\alpha \in \alpha$ y $\alpha \sim \epsilon \alpha$ son siempre carentes de significado. Así pues, por ejemplo, las clases respectivas de las paradojas mencionadas en las secciones anteriores, $w \sim \epsilon w$, $w \in w$, **No** $\in$ **No**, $\Omega \in \Omega$ y $S \in S$ son insignificantes en esta teoría.

3.3.2. Zermelo, Axioma de separación 1908

En esta última sección es importante hacer una delimitación de lo que pretendemos mostrar. La intención aquí es sólo mostrar la solución, digamos inmediata, que se desprende en la *primera* axiomatización que hace Zermelo en 1908, en particular lo concerniente al Axioma III (de Separación), así como mantenernos claros sobre que las motivaciones de Zermelo para su axiomatización, a diferencia que Russell, no van persuadidas estrechamente por la idea de evitar las paradojas de la Teoría de conjuntos, pero si se maneja con cierta precaución al respecto. Sus motivación van más en sentido a esclarecer su demostración del Teorema del buen orden y su axiomatización es, en cierta medida, influenciada por las ideas de Hilbert sobre la fundamentación de las matemáticas.

En 1904 Zermelo formula lo que se considera como la primera demostración del Teorema de buen orden; en ella, naturalmente hace uso explícito del Axioma de elección⁵². Ese hecho provocó una gran controversia en algunos de matemáticos, por ejemplo Borel (1871-1956) y Lebesgue (1875-1941), pese a que habían usado ese principio en sus respectivos trabajos, lo consideraron inverosímil. En respuesta a críticas, Zermelo publica el escrito *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*⁵³ que se divide básicamente en dos partes; en la primera presenta la nueva demostración en la que evita cuidadosamente el uso de resultados de la Teoría de conjuntos cantoriana iniciando enunciando algunos supuestos no demostrados. La segunda da respuesta directa a las críticas de su primera demostración.

⁵²Zermelo en ese momento declara textualmente que esa demostración:

se basa en la suposición de que, incluso para una totalidad infinita de conjuntos, hay siempre un mapeo que asocia a cada uno de los conjuntos con uno de sus elementos... (Zermelo, 1904, p. 516).

⁵³*Nueva demostración de la posibilidad de una buena ordenación*, (Zermelo, 1908).

Entonces para exponer los principios mencionados más sistemáticamente, formuló el primer sistema de axiomas de la Teoría de conjuntos, dicha exposición la hace a través del artículo *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*⁵⁴, en ese mismo año.

Notemos en este momento que, en diversas ocasiones, se hace la suposición directa de que dicha axiomatización es producto de los esfuerzos de Zermelo por contestar y superar la situación de las paradojas, hecho que se enmarca en nuestra interpretación *estándar*, pero últimamente se le ha dado más peso a la argumentación de que, en realidad, es la motivación por *reforzar* su demostración del Teorema del buen orden, la que lo condujo a elaborar los axiomas influenciado con el desarrollo de las ideas de Hilbert en esa época y su respectivo apego a su programa. Pero de lo anterior no se sigue que Zermelo menospreciaba la situación sucintada por las paradojas, solo que sus intenciones principales eran otras, en este sentido veamos como lo aborda en el inicio de su exposición:

En la actualidad, sin embargo, la existencia misma de esta disciplina parece estar amenazada por ciertas contradicciones, o “antinomias”, que se pueden ser derivadas de sus principios —principios que rigen necesariamente nuestro pensamiento, eso parece— y para la que no se le ha encontrado todavía ninguna solución totalmente satisfactoria. En particular, en vista de la “Antinomia Russell” del conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos, hoy ya no parece admisible; para asignar a una arbitraria noción lógicamente definible, un conjunto o una clase, como su extensión. La definición original de Cantor [...] sin duda requiere alguna restricción, no ha sido, sin embargo, sustituida con éxito por una que sea tan simple y no de lugar a dichas reservas. [...] En la solución la problema, por un lado, debemos restringir estos principios lo suficiente como para excluir todas las contradicciones y, por otro, tomarlos lo suficientemente amplios como para mantener todo lo que es valioso en esta teoría. (Zermelo, 1908a p. 261)

⁵⁴*Estudios sobre los fundamentos de la Teoría de conjuntos I*, (Zermelo, 1908a).

Zermelo continúa y establece que la Teoría de conjuntos concierne a un dominio $\mathfrak{B}$ conformado por lo que simplemente llamaremos *objetos*, de entre los cuales están los conjuntos (Zermelo, 1908a, p. 262); después introduce la *relación fundamental* ‘ ε ’ y la noción de subconjuntos con el símbolo $\in$ y así también esboza lo que en ese trabajo se entiende como una proposición *bien definida*:

Una cuestión o proposición $\mathfrak{E}$, cuya validez o invalidez la deciden, sin arbitrariedad, las relaciones básicas $[\varepsilon]$ en el dominio en virtud de los axiomas y las leyes lógicas universalmente válidas, es llamada “*bien definida*” [*definit*]. Así también, una función proposicional [Klassenaussage] $\mathfrak{E}(x)$, en la cual el término variable es todo individuo recorriendo la clase $\mathfrak{K}$, se dice *bien definida* si lo es para cada uno de los individuos de la clase $\mathfrak{K}$.

Posteriormente enunciar su lista de siete axiomas, los cuales mencionaremos brevemente remitiendo al Apéndice E de este trabajo. El axioma I establece la igualdad para conjuntos, II permite la formación de los conjuntos $\emptyset$, $\{a\}$ y $\{a, b\}$; III es el Axioma de separación que a continuación abordaremos, IV asegura la formación del conjunto potencia y V el conjunto *unión*, VI es el Axioma de elección; y finalmente, VII certifica que dentro del dominio $\mathfrak{B}$ hay un conjunto *infinito*. Sobre esta axiomatización, regresando al caso de las soluciones a las paradojas, el que nos concierne es el Axioma III, ya que es donde expresa la *restricción* en tanto a la formación de conjuntos relacionada con los valores de una función proposicional, el axioma es:

Axioma III. Si una función proposicional $\mathfrak{E}(x)$ es *bien definida* para todos los elementos de un conjunto M , entonces M tiene un subconjunto de $M_{\mathfrak{E}}$, que contiene todos y solo los elementos x de M para los cuales $\mathfrak{E}(x)$ es verdadera.

Notemos que el axioma anterior depende la definición de función proposicional *bien definida* que anteriormente citamos, dicha definición *literal* no estuvo exenta de análisis⁵⁵, baste en entender $\mathfrak{E}(x)$ como un *propiedad* en la

⁵⁵Por ejemplo, Hermann Weyl para 1910 considera que cuando Zermelo dice “*decidir sin arbitrariedad* la validez o invalidez de una proposición” es una ceberacion algo vaga

que, para cualquier objeto x es posible decir, sin ambigüedad, si x la verifica (satisface) o no.

Dicho axioma, siguiendo lo dicho por Zermelo, proporciona un sustituto a la forma tradicional de definirlos ($\{x : \phi(x)\}$), la restricción va en sentido de que deben ser *separados* como subconjuntos de un conjunto dado y por lo tanto excluye nociones contradictorias tales como “el conjunto de todos los conjuntos” o “el conjunto de todos los ordinales” (Zermelo, 1908a, p. 264). Veamos ahora cómo introduce en materia la paradoja de Russell con el siguiente teorema contenido en este artículo:

Teorema: Todo conjunto M posee al menos un subconjunto M_0 que no es elemento de M .

Demostración: Para cada elemento de x de M está bien definido si $x \in x$ o no; la posibilidad de $x \in x$ no es excluida en sí misma por nuestros axiomas. Si ahora M_0 es el subconjunto de M que, de acuerdo con III, incluye a todos los elementos de M para los que *no* es el caso $x \in x$, entonces M_0 no es elemento de M . En cualquier caso se tiene que $M_0 \in M_0$ o no. En el primer caso, M_0 tiene un elemento $x = M_0$ por lo cual $x \in x$ lo que contradice la definición de M_0 . Así, ciertamente M_0 no es elemento de M_0 y en consecuencia, si M_0 es elemento de M también tendría que ser elemento de M_0 que acaba de ser excluido.

Se deduce del teorema que no todos los objetos x del dominio $\mathfrak{B}$ pueden ser elementos de uno y el mismo conjunto; i. e. *el dominio $\mathfrak{B}$ no es él mismo un conjunto* y esto dispone, a nuestro punto de vista, que la “Antinomia de Russell” queda eliminada (Zermelo, 1908a, p. 265).

y en cambio propone un método recursivo. Abraham Fraenkel en la demostración de independencia del axioma de elección de 1922 ve la necesidad de reformular el axioma III de manera que dependa de un objeto $\phi(x)$ formado por la aplicación de un número finito de veces los Axiomas II-VI (ver Apéndice E) a un objeto variable x perteneciente a un determinado conjunto y posiblemente también a una cantidad finita de objetos constantes, por ejemplo $\phi(x) = \bigcup \{ \{x\}, \{\emptyset\}, \mathcal{P}x, x \}$. Zermelo en 1929 retoma su Axioma III y lo complementa con una caracterización axiomática de su término *bien definido* de una manera recursiva parecida a la propuesta por Skolem en 1922 y une a esta una especie *axioma de completitud* al modo hecho por Hilbert (ver final de Apéndice A).

Y es así como en términos de Zermelo, se elimina dicha paradoja. Lo que se acaba de decir en sí, es que si identificamos $\mathfrak{B}$ a la clase universal, digamos el universo del discurso, este no es un conjunto en el sentido especificado por los axiomas y ambién, si consideramos a $\mathfrak{C}$ la colección de todos los conjuntos, tampoco lo es, ya que en ambos casos M_0 es un “subconjunto” de estos que lleva a una contradicción. Otra forma de tomar este mismo argumento es, si suponemos que la clase w de Russell es un conjunto, por el Axioma III deberá contener el subconjunto $w_0 = \{x \in w : x \notin x\}$, y de ello pasa que $w_0 \in w_0$ o $w_0 \notin w_0$, en el primer caso, como $w_0 \in w_0$ entonces $w_0 \in w$ y $w_0 \notin w_0$ (por definiciónde w_0), y entonces $w_0 \in w_0 \rightarrow w_0 \notin w_0$. Por otro lado si $w_0 \notin w_0$ por la “definición” de w tenemos que $w_0 \in w$, entonces tenemos que $w_0 \in w$ y $w_0 \notin w_0$, por lo tanto (por definiciónde w_0) $w_0 \in w_0$; en suma $w_0 \in w \leftrightarrow w_0 \notin w$, lo que es una contradicción que proviene de suponer que w es un conjunto.

El Axioma III de Zermelo, con sus respectiva refinación, se mantiene ahora en las axiomatizaciones usuales (**ZF** y **BG**) de la Teoría de conjuntos y es de esta misma manera con la que se hace referencia a las paradojas; en resumen, el uso que ahora se le da a las paradojas es en dirección a demostrar la inexistencia de conjuntos tales como el universal, el de todos los ordinales, cardinales y aquel cuyos elementos son los conjuntos que no se contienen a ellos mismos como electos o que estas mismas son clases propias, o sea que no existe conjunto tal que los contenga.

En los tratados actuales de Teoría de conjuntos, dada con los axiomas de **ZF**, se formaliza la noción de propiedad que interviene el Axioma III introduciendo las llamadas *fórmulas* y desarrollando la Teoría de conjuntos en cálculo deductivo de primer orden. Con esto, el axioma de separación se enuncia así:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z)))$$

De la misma manera de Zermelo, si suponernos a lo que llegamos es a que todo conjunto tiene un subconjuntos que no es elemento de dicho conjunto. Sea x_0 un conjunto y $\varphi(z)$ la fórmula $z \notin z$, entoces:

$$\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x_0 \wedge z \notin z))$$

y se sigue entonces que si suponemos $y \in x_0$ en caso de que $y \in y$ tenemos

$$y \in x_0 \wedge y \notin y$$

llegamos $y \notin y$ y de ahí nuevamente a $y \in y$, o sea:

$$y \in y \leftrightarrow y \notin y$$

Que es una contradicción, por lo que $y \notin x_0$.

Como este argumento es válido para todo conjunto x_0 , Tenemos que dicho conjunto es una clase propia. Del mismo modo, el suponer que la clase de todos los ordinales y la clase de todos los cardinales son clases propias, estas dos posiciones se deducen de las contradicciones respectivas, al suponerlos como conjuntos, análogas a las paradojas de Cantor y Burali-Forti que ya hemos mencionado.

3.4. A modo de un epílogo

En la interpretación *estándar* se da por sentada una relación directa de la *crisis de fundamentos* propiciada por el descubrimiento de las paradojas y la dilucidación de tres escuelas del pensamiento filosófico en matemáticas. Por ejemplo, el grupo Bourbaki refiere a que en situación engendrada por las paradojas había unanimidad entre los matemáticos por la urgencia en la revisión de los fundamentos pero que, sin embargo, inmediatamente sugieron divergencias radicales en la manera de llevar a cabo tal revisión (Bourbaki, 1972, pág. 52).

Dichas divergencias, que incluso las han denominado programas de superación de las paradojas, surgen de las polémicas establecidas por la emergente teoría de conjuntos y la nueva forma de concebir lo que refiere al infinito, pero también de un análisis de los métodos lógicos que emplea la matemática. De estas enmarcaremos tres principales escuelas del pensamiento *filosófico* en matemáticas, logicismo, formalismo e intuicionismo de manera breve tratando de presentar las tesis generales enfocándonos en sus respectivos discursos filosóficos, así como los principales actores de tales escuelas; y la supuesta clausura del debate entre ellas propiciada por los teoremas de Gödel . Todo esto sin ninguna intención de profundizar, en este trabajo, a lo su respectiva matemática requiere. La intención aquí es solo dar cierre al episodio que, según la interpretación *estandar*, tiene la tercera *crisis* de fundamentos de las matemáticas.

Logicismo: Su tesis fundamental es que la matemática es derivable exclusivamente de la lógica y, en consecuencia, es una extensión de esta misma. Sus orígenes se principales fundadores fueron Bertrand Russell y Alfred North Whitehead quienes sostenían que las matemáticas puras no requieren nociones ni proposiciones primitivas diferentes a las de la lógica.

Las bases de dichas ideas se presentaron en los *Principia Mathematica* (tres vols. 1910-1913) donde se da un sistema completo de las matemáticas puras fundamentado solamente en la lógica. En este trabajo se parte de un conjunto de 6 postulados lógicos, de los cuales se pueden deducir los silogismos aristotélicos, posteriormente se expone una primera versión de la Teoría de tipos, que se creó con el fin de evitar las paradojas desencadenadas por las definiciones impredicativas; o sea, se exige (en términos lógicos de esta Teoría

de tipos) que “aquello que supone previamente todos los elementos de una colección, no han de ser elementos de dicha colección”.

La Teoría de tipos nos lleva a clases de afirmaciones que hay que distinguir claramente según su tipo; tanto el tránsito entre tipos como la construcción de la matemática en esta teoría, se vuelve muy compleja. Para evitar esta complejidad Russell y Whitehead introducen el llamado “Axioma de reducibilidad” el cual afirma que para cada función proposicional de cualquier tipo, existe una de tipo cero equivalente.

Ya con un estudio de las funciones proposicionales los autores se ocupan consecutivamente de la Teoría de clases, los números cardinales y naturales, con lo que es posible construir todo el análisis.

Según Morris Kline (Kline, 1992) en el programa de la Escuela logicista, todos los postulados de la lógica tienen carácter artificial y además formal, por lo que la matemática misma hereda estas características; sin embargo, dicho programa cumplió los objetivos planteados sin quedar exento de críticas.

Concretamente, del Axioma de reducibilidad se ha dicho que no tiene lugar en la matemática y que lo que no puede demostrarse sin él, no puede considerarse como demostrado en absoluto. A nivel filosófico, la discusión ha ido en torno a que si la matemática es una ciencia solo lógico-deductiva-formal; o sea, deducciones del puro pensamiento, ¿cómo se explica que tal creación mental tenga un alto nivel de representación de los hechos puramente naturales?, entre otras cuestiones.

Intuicionismo: Otro grupo de matemáticos llamado intuicionista surgido supuestamente a raíz de la existencia de las paradojas, plantearon un enfoque radicalmente distinto. Su base, a grandes rasgos, residen en la afirmación de que las teorías matemáticas no son significativas a menos de que se refieran a entidades construidas a partir de una cosa dada por la *intuición* entendiendo como construcciones intuitivas a aquellas que se dejan aprehender como universales y necesarias sin la aplicación de la noción de *exactitud* y por ende sin el empleo de los principios lógicos [clásicos] (Körner, 1967, 152). Así, las definiciones en matemáticas han de ser constructivas y en las demostraciones de existencias deben mostrar concretamente cómo obtener el elemento.

De los primeros intuicionistas se considera a Leopold Kronecker (1823-1891)

ya que consideraba prescindible la Teoría de los números irracionales y las funciones continuas debido a que, al igual que varias partes de la matemática, no daban métodos o criterios constructivos para determinar, en una serie de pasos finitos, los objetos que se manejan. Así mismo se opuso ferozmente a la Teoría de conjuntos cantoriana, porque no aceptaba que, con tal que “la lógica” se respetara, las proposiciones sobre el infinito actual eran significativas. A pesar de que sus trabajos en álgebra no se acoplaban precisamente a su filosofía y de que no contó con partidarios, por más de veinticinco años, Kronecker fue uno de los que sentaron las bases de esta escuela del pensamiento matemático.

Otro enérgico defensor de esta escuela fue H. Poincaré (1854-1912), quién rechazaba tanto la Teoría de conjuntos cantoriana porque engendraba contradicciones, como el programa logicista ya que, para él, la lógica sola es estéril y la matemática no sería más que una inmensa tautología, si no fuera por la intuición. Al igual que Kronecker, exigía que las definiciones y las demostraciones de existencia tuvieran que ser constructivas; consideraba como inaceptables las definiciones no finitarias, como por ejemplo un conjunto construido con ayuda del Axioma de elección. En sus estudios sobre *La intuición y La lógica matemática* compara el papel de la lógica con el de la intuición diciendo que la primera es el instrumento de la demostración y la segunda es el instrumento de la invención. Pero al igual que Kronecker sus trabajos matemáticos, particularmente en Topología, no reflejan totalmente su filosofía de las matemáticas, pero de ello no se debe concluir que pensamiento filosófico no fuese serio.

La crítica intuicionista en torno a la situación de la matemática de la época, también fue plasmada en un intercambio epistolar entre Baire, Borel, Hadamard y Lebesgue. Para ellos no era aceptable el Axioma de elección ya que implicaba una elección simultánea e infinita de elementos, lo cual no era claro para la intuición, en este sentido pensaban que, si uno simplemente “piensa” en una elección simultánea e infinita, entonces ¿no puede cambiar la elección ya hecha a través del razonamiento en torno al problema a resolver? Por lo que, según Lebesgue, se requiere de la “existencia” y la “presentación” explícita de la elección hecha, incluso si se habla solo de un objeto seleccionado de un conjunto infinito.

Hasta este momento las objeciones hechas por estos intuicionistas eran es-

porádicas y no sistematizadas. El primer intuicionista moderno fue Jan Brouwer (1881-1966) quien desde su tesis doctoral *Sobre los Fundamentos de la Matemática* de 1907 comenzó la construcción de esta filosofía.

Para Brouwer la situación de la matemática, ya desde sus predecesores, consta de dos partes; una en la que se considera la matemática como autónoma y la otra en la que es dependiente, para su crédito, del lenguaje y la lógica.

La tesis fundamental de su filosofía intuicionista él la describe en “dos actos” que podemos designar también como “intuiciones”.

El “primer acto del intuicionismo” separa por completo la matemática del lenguaje matemático, en particular del lenguaje de la lógica teórica y da por sentado que la matemática es una actividad sin lenguaje de la mente y que tienen su origen en la percepción de un *movimiento en el tiempo* que es a su vez una separación de un momento de la vida en dos cosas distintas donde una precede a la otra y es retenida por la memoria. Ahora, si esta dualidad concebida en el tiempo se le despoja de toda cualidad específica, queda la forma vacía del sustrato de todas las *dualidades* (paridades o duo-unidades) que, para Brouwer, es la *intuición básica de la matemática*.

Así por ejemplo, la experiencia de trepar un monde no depende ni debe confundirse con la comunicación lingüística de este hecho; esto, en el caso de la experiencia de las intuiciones y construcciones matemáticas significa que las reglas de la lógica clásica, si bien quien las adopte como principios puede ser *bien* guiado lingüísticamente a esa experiencia, se usan en la descripción y comunicación pero no necesariamente en la actividad misma del construir. O sea, para el intuicionismo brouweriano la matemática es pues independiente, no solo del lenguaje humano, sino también de la lógica. De esta separación de la actividad de construcción matemática y la actividad lingüística se sigue el cuestionamiento de que si una representación lógico-lingüística es siempre adecuada a la construcción, es decir, si va más allá de esta y el lenguaje desborde el estudio en cuestión o si es muy pequeño para expresarlo completamente. Con el primer caso, Brouwer considera como ley del tercer excluido, aplicado a sistemas infinitos de objetos matemáticos, como un ejemplo en que el lenguaje desborda y deforma la realidad matemática. Sobre el principio del tercer excluido regresaremos mas adelante.

El “segundo acto de intuicionismo” reconoce la posibilidad de engendrar

nuevas entidades matemáticas; primero en la forma de una *sucesión infinita* $p_1, p_2, \dots$ cuyos todos sus términos se puede escoger con *cierta libertad* pero respecto a entidades previamente adquiridas y segundo, en forma de *especies matemáticas*, esto es, de propiedades presumibles en relación con entidades matemáticas previamente adquiridas, que si son ciertas para una determinada entidad matemática también lo serán para todas las que han sido defiendas como iguales aquella; las entidades matemáticas previamente adquiridas para las cuales la propiedad resulta cierta se denominan elementos de la especie.

Sentadas en lo anterior las bases, a nivel filosófico, el intuicionismo como programa fundacional, consiste en la construcción de objetos matemáticos abaluartada en la intuición pura y no tiene como objeto en si, mostrar la legitimidad de dichas construcción ya que, bajo este esquema, son en sí mismas autoevidentes. Todo lo anterior, en términos de la practica matemática se traduce en que la *existencia matemática* debe significar lo mismo que la *constructibilidad real*, sea lo que fuese esto ultimo, se aclara, para el intuicionista, en la practica matemática. La matemática intuicionista parte en base a la sucesión natural de los números, la cual no necesita justificación ya que es claramente intuitiva, esto es, engendrada en la *intuición básica matemática* que es la intuición de la *duo-unida* o *paridad*. Al respecto Brouwer dice:

La matemática surge cuando la cuestión de la *paridad*, que resulta del paso del tiempo, se abstrae de todas las apariciones concretas. La forma vacía que permanece [la relación de n a $n+1$] del contenido común a todas estas *paridades* se convierte en la intuición original de la matemática, y repetida indefinidamente crea los objetos matemáticos.⁵⁶

Dado esto por sentado, la secesión natural de números $1, 2, 3, \dots$ proporciona pues un prototipo de construcción a un conjunto infinito a través de la repetición, de forma ilimitada, de la forma vacía en los paso; es decir, la etapa de n a $n + 1$. Con ello podemos diferenciar la noción de sucesión de Cauchy “clásica” de la “intuicionista”, ambas esenciales para las respectivas teorías del continuo esto, solo con fin de mostrar de manera ilustrativa el espíritu de esta filosofía en su matemática.

⁵⁶Citado en Kline 1992, pág. 1586.

Suponiendo que se ha desarrollado una teoría de los números racionales, la sucesión $\{a_n\}$ de números racionales se dice de Cauchy si para todo natural k podemos encontrar un $n = n(k)$ natural de modo que $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{k}$ para todo natural p . En estos términos, la diferencia de las nociones clásica e intuicionista consiste en el respectivo significado que se le da a “podemos encontrar”, en el primero de los casos coincide con el usual *existe*, en el segundo es ser capaces de *presentar de manera efectiva* tal elemento. De esta manera, la sucesión $a_n = \{2^{-n}\}$ es de Cauchy y si suponemos la sucesión $\{b_n\}$ definida como: si el n -ésimo dígito de del desarrollo decimal de π es el 9 en la primera secuencia 0123456789 que aparece en este desarrollo, en tal caso $b_n = 1$ y en todos los demás $b_n = 2^{-n}$. Entonces, b_n difiere de a_n en a lo mas un termino, y constituye una sucesión de Cauchy clásica pero, mientras no sepamos si tal secuencia aparece o no en π , no se podrá encontrar *efectivamente* un n tal que $|b_{n+p} - b_n| < \frac{1}{2}$ para todo p , luego no se tendrá derecho a afirmar que $\{b_n\}$ es de Cauchy en sentido “intuicionista”.⁵⁷

Ahora, la lógica clásica, según los intuicionistas, no es un instrumento totalmente seguro para el *descubrimiento* de las verdades matemáticas y no puede deducir aquellas que no se puedan obtener de alguna otra manera así mismo argumentan que los progresos más importantes de la matemática, no se obtienen perfeccionando la forma lógica sino modificando la teoría básica misma.

Brouwer constantemente no reconoce la obligación de ningún principio lógico *a priori*, los principios lógicos clásicos tienen que ser analizados y se debe retener solo aquellos con que se pueda expresar adecuadamente las intuiciones. En concreto, el “Principio del tercer excluido” (PTE), que históricamente surgió como abstracción de razonamientos sobre colecciones finitas y fue aceptado *a priori* para colecciones infinitas, o sea, en el caso de los conjuntos finitos es posible decir si todos los elementos tienen dicha propiedad comprobándolo uno por uno, mientras que en los infinitos es imposible.

Argumentando lo anterior, Brouwer considera un tipo contraejemplos para mostrar que ciertas afirmaciones calsecas son constructivamente insostenibles, esto reduciéndolas a afirmaciones no demostradas. Veamos el caso de la ley

⁵⁷Interpretado de Heyting 1976, pp 25-26. La posición de la secuencia 0123456789 en el desarrollo de π era recurrente como ejemplo de los “intuicionistas”, ahora se sabe que dicha secuencia se encuentra por vez primera cerca del 17.38×10^9 -ésimo dígito. En semejantes términos se puede poner otros problemas aún no resueltos.

clásica de la tricotomía para los reales, $\forall x \in \mathbb{R}(x < 0 \vee x = 0 \vee x > 0)$.⁵⁸

Calculando simultaneamente al expiación decimal de π y, abreviando por $N(k)$ por –los dígitos decimales $p_{k?89}, \dots, p_k$ de π son todos 9–, la sucesión de Cauchy como sigue:

$$a_n = \begin{cases} (-2)^{-n} & \text{si } \forall k \leq n \neg N(k) \\ (-2)^{-k} & \text{si } k \leq n \text{ y } N(k) \end{cases}$$

Dicha sucesión esta bien definida, para cada n se puede comprobar si $N(n)$ o $\neg N(n)$ y, dado el caso, se hace constante en cuanto aparecen noventa nueve consecutivos en π . La sucesión a_n satisface la condición de Cauchy (clásica) por lo tanto determina un numero real a pero la cuestión es que *no podemos decir* si es positiva, negativa o cero. Ya que:

$$\begin{aligned} a > 0 &\leftrightarrow N(k) \text{ se da por primera vez para un numero par} \\ a < 0 &\leftrightarrow N(k) \text{ se da por primera vez para un numero impar} \\ a = 0 &\leftrightarrow N(k) \text{ no se da para ningún } k \end{aligned}$$

Y por con siguiente, como no tenemos aún una construcción que determine la condición de $N(k)$, no podemos afirmar $x < 0 \vee x = 0 \vee x > 0$, y por tanto no podemos decir que tenemos una prueba de la ley de la tricotomía. Así mismo, tampoco a es irracional porque entonces $N(k)$ nunca se aplicaría, y entonces $a = 0$, lo que es una contradicción con lo que se demuestra que $\neg\neg(a \text{ es racional})$. Por otro lado, el argumento anterior no es un a demostración de que a sea racional. De este modo $\neg\neg A \rightarrow A$ falla. Y así mismo, $a = 0 \vee a \neq 0$ no tienen prueba.

Asi vemos que de las características de la Escuela intuicionista es que las demostraciones de existencia tienen que ser constructivas, por lo que adherirse a esta escuela significa abandonar muchas demostraciones del análisis clásico. Pero los intuicionistas no se han limitado a ejercer solo la crítica, sino que tratan de hacer una nueva matemática basada en las construcciones que aceptan. Lo que se ha logrado con éxito, es salvar parte del cálculo infinitesimal con sus procesos de límite y también han reconstruido partes elementales del Algebra y la Geometría, pero sus construcciones son en sumo complicadas.

⁵⁸En esencia este es el primer contraejemplo al PTE que Brouwer presenta en 1923. Aquí se toma la versión que se da en (M. van Atten; D. van Dalen, 2002).

Heyting, seguidor de Brouwer, ha publicado obras importantes sobre la axiomatización de las teorías intuicionistas y acerca de una lógica intuicionista a manera de la metamatemática de Hilbert.

Formalismo: En el formalismo se considera que los enunciados matemáticos tienen solo la *forma* exterior de sentencias que declaran y carecen de *contenido genuino* que pueda ser falsado o afirmado. La forma en la que esta escuela intenta resolver el problema de la fundamentación es utilizando sentencias formales, carentes de significado que puedan ser deducidas de un cálculo lógico predeterminado. Esto con la intención de evitar el uso explícito de términos como “todo” o “conjunto” y hablar solo de la “forma”. Entonces esta escuela propone a la matemática como sistemas formales, unidos a una colección de axiomas específicos para cada teoría matemática, de los cuales se obtienen otras expresiones (formales) a través de manipulaciones (formales) predeterminadas, de tal manera que al hablar solo de formas y procesos formales las interpretaciones que se den de este sistema no afectan a la veracidad de lo demostrado dentro del sistema prefijado.

El principal fundador de esta escuela filosófica es David Hilbert (1862-1943), aunque siguiendo la idea de que cualquier fundamentación de la matemática requiere indudablemente la lógica, los formalistas diferencian de los logicistas en el sentido de que la lógica debe tratarse simultáneamente que la matemática. La lógica es un lenguaje puramente simbólico en el que las proposiciones matemáticas son expresadas a través de sucesiones de símbolos llamadas fórmulas y el razonamiento es un mero proceso formal en el que unas fórmulas se siguen de otras a través de reglas deductivas específicas y partiendo de un conjunto de axiomas lógicos predeterminados.

En este programa una proposición matemática se considera demostrada si puede obtenerse como la última de una sucesión de proposiciones, cada una de las cuales se obtienen a partir de los axiomas del sistema formal o se deriva de otras anteriores a través de las reglas de deducción.

Pero aún queda abierta la cuestión de que si estos sistemas formales son exentos de contradicciones, para esto Hilbert y sus discípulos desarrollaron lo que se conoce como “teoría de la demostración” o “metamatemática”. En esta teoría se pretende razonar no en el interior del sistema, sino sobre el sistema; es decir, razonar sobre las fórmulas mediante las cuales se expresa el sistema. Hilbert en la metamatemática propone usar un tipo de lógica básica

y libre de toda objeción con razonamientos concretos, finitos y de admisión universal, y las demostraciones de existencia tenían que ser constructivas.

En este nivel, Hilbert está de acuerdo con Brouwer en la primacía de la intuición, pero no duda en afirmar su admiración por la teoría de los números transfinitos, en conservar el Principio del tercero excluido, en aceptar el infinito actual, en pretender que todos los problemas matemáticos pueden resolverse y en recurrir a proposiciones “ideales”, inaccesibles mediante métodos finitarios. Ahora bien, aunque teniendo ya toda la metateoría necesaria para abordar el problema de la consistencia, ya sea de la aritmética según los Axiomas de Peano porque a la consistencia de ésta se reducía gran parte la consistencia de Matemática clásica, o la de una Teoría de conjuntos lo suficientemente rica como para probar dichos axiomas; finalmente, no se lograron conseguir dichas demostraciones, Hilbert y su escuela sólo consiguió demostrar, en esa época, la consistencia de sistemas formales sencillos y consistencias relativas.

Teoremas de incompletitud de Gödel: El programa de Hilbert tenía fallas intrínsecas, Kurt Gödel (1906-1978), en uno de sus primeros trabajos, demuestra que la consistencia de un sistema que incluya la lógica usual y la aritmética, no puede ser probada si nos limitamos a conceptos y métodos que pueden ser expresados en términos formales por un sistema de Teoría de números.

El resultado anterior es un corolario de uno de sus más importantes resultados, el *Teorema de incompletitud*. Lo que este teorema afirma es que si una teoría formal axiomatizable que incluya a la aritmética es consistente, entonces dicha teoría es incompleta, o sea que si tenemos una afirmación dentro del sistema, ni esta ni su negación, son demostrables dentro del sistema por lo que, finalmente, como una de las dos es verdadera, entonces tenemos dentro la teoría axiomática una afirmación verdadera que no es demostrable. Los anteriores resultados aplican tanto al sistema logicista, al de Zermelo-Fraenkel, como a la axiomatización de la teoría de números de Hilbert.

La incompletitud en los sistemas formales es un defecto importante, ya que implica que estos sistemas son inadecuados para demostrar correctamente “todas” las afirmaciones que podrían serlo dentro del sistema. Para empeorar las cosas, hay afirmaciones indecidibles pero intuitivamente verdaderas en algún modelo del sistema y la incompletitud no puede remediarse añadi-

endo la indecidible sentencia o su negación como axioma, ya que el mismo Gödel demostró que *cualquier* sistema que incluya a la aritmética contiene intrínsecamente una sentencia indecidible. Pero desde luego, los argumentos anteriores no excluyen que otros métodos de demostración que permitan ir más allá de la metamatemática de Hilbert.

Terminamos con esta introducción diciendo que en tanto a la fundamentación ninguna de las tres escuelas vistas ha logrado el objetivo de establecer un planteamiento universalmente aceptado. Pero el desarrollo de la matemática sigue; por ejemplo se ha demostrado la consistencia de la Aritmética y de algunas partes del Análisis clásico utilizando la inducción transfinita, por otro lado Gödel y Paul Cohen demostraron que el Axioma de elección y la Hipótesis del continuo son independientes de la Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Junto con estos, otros resultados de consistencia relativa han sido demostrados quedando aún abierta la cuestión de la consistencia absoluta de la Teoría de conjuntos (con otras metodologías) y la de la construcción de una matemática sobre una base intuicionista.

3.5. Conclusión

El hecho de que si fuese inevitable el desarrollo de una teoría cuyos objetos sean los conjuntos y en particular el manejo de cantidades transfinitas, es aún cuestionable. Lo que si es que el nacimiento de la Teoría cantoriana apartir del estudio de la convergencia de las series trigonométricas y su posterior paso *más alla* del infinito al concebir los conjuntos derivados de orden transfinito y la concepción de distintas potencias infinitas, marcaron los antecedentes de la teoría de ordinales y cardinales que representa un antes y un después en el desarrollo y fundamentación de la matemática actual. Por otro lado, las implicaciones filosóficas de las consideraciones de Cantor para la introducción de nuevos conceptos *más allá* de lo infinito potencial contraviniendo a la concepción clásica de la inexistencia o inaccesibilidad del infinito en acto, y su consiguiente distinciones entre tipos de realidades matemáticas, *inmanente* y *transubjetiva*, siendo solo las segundas prescindibles (o sea, las relacionadas con expresiones el mundo exterior) para el desarrollo cabal y *libre* de la matemática como ciencia abstracta; marcaron un cambio en la forma de concebir el infinito en filosofía “en general” y también, en filosofía matemática da un precedente en tanto a la *libertad* del quehacer del matemático.

Cuestionamos fuertemente que el surgimiento de las paradojas se debe a incorrecciones u omisiones en el desarrollo original de Cantor, consideramos más bien que era una teoría emergente no a salvo de refinaciones, así como el desarrollo de cualquier *nuevo* o primitivo conocimiento humano. También, a diferencia de las presentaciones habituales del tema en las que se omite la distinción de Cantor, tal vez vaga o incipiente pero consciente, de las multiplicidades *consistentes* o *inconstantes*, basta para salvar del adjetivo *ingenua* a su teoría, que si más bien no acabada, si conforma un complejo de ideas sin precedentes bien elaboradas y profundamente reflexionadas por su autor acorde a su época.

También, varios hechos son repetidamente enunciados, el primero de ellos es que las paradojas surgen, en particular en los tres casos vistos, como una actitud crítica negativa hacia las ideas de Cantor; como vimos, en ninguna de las tres es el caso. La paradoja que se le atañe a Cantor en sus dos acepciones mencionadas no le surgen como una falla, sino más bien son consistentes con su marco de ideas, tanto así, que las convierte en herramientas, incipientes tal vez, de demostración para resultados fundamentales en su teoría.

En el caso de Burali-Forti es similar; se le ha considerado como detractor de esa teoría y que su paradoja es producto de la búsqueda de fallas en Cantor. Lejos de esto, Burali-Forti fue contribuidor, su fin era mostrar algo que consideraba como *corrección* en la teoría de los números ordinales; como se ve en su artículo en cuestión y en sus trabajos precedentes. También resaltamos el hecho de que, con referencia en los tratados originales, las contradicciones que fueron transformadas en paradojas subyacen en un paso de una demostración por *reducción al absurdo* en la que se busca una contradicción. Sin mas, ninguno de los dos casos, los respectivos autores le dieron la connotación casi cataclísmica a las contracciones intrínsecas en esa teoría, sus conclusiones fueron otras y en sentido positivo. Lo último deja abierta la cuestión de interpretaciones históricas, restringiéndonos a estos dos autores, sobre la *crisis* de fundamentos.

En tanto a Russell, su idea era conciliar de su creencia en la existencia de la clase universal y el Teorema de Cantor. Para ese propósito se dedicó a analizar cuidadosamente el argumento diagonal de Cantor y es en el momento de considerar su aplicación a la clase universal, donde se topa con la idea de su clase *w* contradictoria. A diferencia de los dos autores anteriores, Russell si la anuncia como una contradicción en la matemáticas, tal vez confiado por la afectación en su maestro Frege y su programa. Este hecho y su respectiva publicación en *Los principios* de Russell y así como en los *Grundlagen II* de Frege, fue lo que pudo haber despertado interés en la comunidad matemática, pero también destacamos el hecho de la paradoja, que ahora tambien me inclino a nombrar de Zermelo-Russell, era de conocimiento general en la escuela de Göttingen, debido a que este la había comunicado a su maestro Hilbert, alrededor de 1900, quien declara su efecto como catastrófico.

En cuanto a las soluciones aquí enmarcadas, notamos que Zermelo vio con claridad que el enunciado clásico del Principio de comprensión, originaba las paradojas, y su respuesta fue la restricción o relativización de dicho principio. Esta solución, a diferencia de la de Russell ha, superado en términos prácticos la prueba del tiempo tal y como ahora podemos ver en los tratados de teorías de conjuntos. La Teoría de tipos de Russell se ha considerado como complicada, el transito o seguimiento del *tipo* de la variables, para el quehacer matemático, se torna inapropiado; pese a esto, claros remanentes de esta teoría se ven en la distinción entre clases (propia) y conjuntos en **BG** y en lógicas de órdenes superiores.

A mi ver, no tuvo lugar la mencionada crisis de fundamentos que se enmarca bajo la acepción la interpretación *estándar*, por otro lado la parraba *crisis* me parece exagerada si lo que vemos es una corrección o refinación a una teoría matemática emergente y revolucionaria para su época, el hecho lo veo más como un *cambio* en la forma de concebir en matemáticas. Acepto que esta opina posiblemente peque de anacronismo de mi parte.

Apéndice A

Axiomas de Hilbert para la Geometría

Hilbert considera tres tipos de cosas o entes, los *puntos* identificados con las letras $A, B, C, \dots$; las *rectas* con las letras $a, b, c, \dots$; y los *planos* con α, β, γ , sobre estos entes se conciben cinco relaciones primitivas, *estar situado, entre, paralelo, congruente* y *continuo* donde su completa y exacta descripción es consecuencia de los siguientes grupos de axiomas:

- I 1-7 Axiomas de conexión
- II 1-5 Axiomas de orden
- III Axioma de las paralelas (Axioma de Euclides)
- IV 1-6 Axiomas de congruencia
- V Axioma de continuidad (Axioma de Arquímedes)

Grupo I. Axiomas de conexión

- I. 1. Dos puntos distintos A y B determinan completamente una línea recta a . Escribimos $AB = a$ o $BA = a$.
- I. 2. Dos puntos cualesquiera de una línea recta determina por completo a la línea; es decir, si $AB = a$ y $AC = a$, donde $B \neq C$, entonces $BC = a$.
- I. 3. Tres puntos A, B y C no situados en la misma línea recta determinan completamente un plano α . Escribimos $ABC = \alpha$.

- I. 4. Cualesquiera tres puntos A , B y C de un plano α , que no se encuentran en la misma línea recta determinan completamente ese plano.
- I. 5. Si dos puntos A , B de una línea recta a están en el plano α , todo punto de a está en el plano α .
- I. 6. Si dos planos α , β tienen un punto A en común, entonces tienen al menos un segundo punto B en común.
- I. 7. Sobre cada línea recta existen al menos dos puntos, en cada plano al menos tres puntos que no están sobre la misma línea recta, y en el espacio existen al menos cuatro puntos que no están en la misma línea recta.

Grupo II. Axiomas de orden

- II. 1. Si A , B , C son tres puntos de una recta y B está entre A y C , entonces B está situado entre C y A .
- II. 2. Si A y C son dos puntos de una línea recta, entonces existe al menos un punto B situado entre A y C , y al menos un punto D situado de modo que C este entre A y D .
- II. 3. De cualesquiera tres puntos situados en una línea recta, siempre hay uno y solo uno que se encuentra entre los otros dos.
- II. 4. Cualesquiera cuatro puntos A , B , C , D de una línea recta pueden ser dispuestos de manera que B deberá de estar entre A y C y también entre A y D , y, además, C deberá estar entre A y D , y también entre B y D .
- II. 5. Sean A , B , C , tres puntos no situados sobre la misma línea recta y sea a una línea recta en el plano ABC y que no pasa sobre ninguno de los puntos A , B , C . Entonces, si la línea recta a pasa sobre el segmento AB , también pasará sobre un punto del segmento BC o un punto del segmento AC .

Grupo III. Axioma de las paralelas

- III.1. En un plano α puede ser trazada sobre un punto A , fuera de una línea dada a , una y solo una línea recta que no intersecará a la línea a esta línea recta es llamada la paralela de a sobre un punto dado A .

Grupo IV. Axiomas de congruencia

- IV.1. Si A, B son dos puntos de una línea recta a , y si A' es un punto sobre la misma u otra línea recta a' , entonces, en un lado de A' de la línea recta a' nosotros podemos encontrar un y solo un punto B' de tal manera que el segmento AB (o BA) es congruente con el segmento $A'B'$. Nosotros indicamos esta relación escribiendo:

$$AB \cong A'B'$$

Todo segmento es congruente con sí mismo, nosotros siempre tenemos:

$$AB \equiv BA$$

- IV.2. Si un segmento AB es congruente con el segmento $A'B'$ y también con un segmento $A''B''$, entonces, el segmento $A'B'$ es congruente con el segmento $A''B''$; esto es, si $AB \equiv A'B'$ y $AB \equiv A''B''$, entonces $A'B' \equiv A''B''$.
- IV.3. Sean AB y BC dos segmentos de una línea recta a que no tienen puntos en común aparte de B y, además, sea $A'B'$ y $B'C'$ dos segmentos de esa misma u otra línea recta a' , teniendo igualme ningún otro punto en común distinto de B' . Entonces, si $AB \equiv A'B'$ y $BC \equiv B'C'$ tenemos que $AC \equiv A'C'$.

En lo posterior denotaremos con las letras h, k a rayos que se intersecan en un vértice O , y escribiremos $\angle(h, k)$ para referirnos al ángulo(cónca-vo) formado por esos dos rayos.

- IV.4. Sea un $\angle(h, k)$ dado en el plano α y sea una línea recta a' en un plano α' . Supóngase además que en plano α se asigna uno de los lados de

α' . Denotemos además con h' uno de los rayos de α' emanado de un punto O' de la misma línea. Entonces en el plano α' hay un y solo un rayo k' tal que $\angle(h, k)$, o $\angle(k, h)$ es congruente con el ángulo $\angle(h', k')$ al mismo tiempo todos los puntos en el interior del ángulo $\angle(h', k')$ se encuentran en el lado de A' . Expresamos esta relación con la notación:

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$$

Todo ángulo es congruente con sí mismo, esto es:

$$(h, k) \equiv (h, k) \quad \text{ó} \quad (h, k) \equiv (k, h)$$

.

IV.5. Si un ángulo $\angle(h, k)$ es congruente con el ángulo $\angle(h', k')$ y también con el ángulo $\angle(h'', k'')$, entonces $\angle(h', k')$ es congruente con $\angle(h'', k'')$; es decir si $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$ y $\angle(h, k) \equiv \angle(h'', k'')$ entonces $\angle(h', k') \equiv \angle(h'', k'')$.

IV.6. Si en dos triángulos ABC y $A'B'C'$ se tienen las congruencias:

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

También se tiene las congruencias:

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \quad \text{y} \quad \angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

.

Grupo V. Axiomas de continuidad

1. Sea A_1 un punto sobre una línea recta situado entre dos puntos arbitrario A y B . Tomemos $A_2, A_3, A_4, \dots$ de tal manera que A_1 esté entre A y A_2 , A_2 entre A_1 y A_3 , A_3 entre A_2 , A_4 etc. Por otra parte los segmentos:

$$AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$$

son iguales uno con el otro. Entonces, entre esta serie siempre existe un cierto punto A_n , tal que B se encuentra ente A y A_n .

AXIOMA DE COMPLETITUD. *A un sistema de puntos, líneas rectas y planos, es imposible agregarle otros elementos de manera que el sistema así generado forme una nueva geometría que obedezca a los cinco grupos de axiomas. En otras palabras, los elementos de la geometría forman un sistema no susceptible a extensión, si nosotros consideramos que los cinco grupos de axiomas son válidos.*

Sobre este axioma Hilbert expresa:

Desde un punto de vista teórico, el valor de este axioma es que conduce indirectamente a la introducción de puntos límite y, por lo tanto, hace que sea posible establecer una relación uno a uno entre los puntos de un segmento y el sistema de números reales (Hilbert, 1950, p.16).

Apéndice B

Artículos de Burali-Forti, 1897

Este artículo se publica en febrero de 1897 durante la reunión de marzo del *Circolo matematico Di Palermo* en Turín Italia. Se dice que en este trabajo es donde aparece la primera paradoja de la Teoría de conjuntos. La discusión de este trabajo en torno a dicha paradoja ya se hizo, aquí damos una traducción basada en la compilación de trabajos originales traducidos al inglés de Jean Van Heijenoort encontrada en Heijenoort (1967, pp. 104-112), así como en el original con referencia Burali-Forti (1897). También agregamos la nota en la que Burali-Forti aclara las diferencias entre su *orden perfecto* y el *buen orden* de Cantor. Burali-Forti como perteneciente a la escuela de Peano, utiliza la simbología que a continuación describiremos, para esto nos basamos en Bocheński (1985) y en Peano (1894).

Los puntos $.$, $:$, $∴$, $::$, $∴∴$ sirven para saber como deben ser unidos los símbolos, primero se unen los que son separados por ningún punto, después los que están separados por uno, después los que por dos y así sucesivamente; por ejemplo:

$$ab.cd : e.fg ∴ hk.l$$

Equivale a

$$\{[(ab)(cd)][e(fg)]\}[(hk)l]$$

También se pueden utilizar paréntesis $()$.

El símbolo **K** significa *clase*, se entiende a $u \in \mathbf{K}$ como u es una *clase* y a

$\mathbf{Ku}$ con la *clase* de las *subclases* de u , también $\mathbf{Kfin}$ es la clase de las clases finitas. Además $\overline{h\varepsilon}\{\dots\}$ denota el h tal que $\{\dots\}$.

Se usa $\mathbf{afb}$ para referir a una relacion que trasforma los a en b , $(\mathbf{Ku})\mathbf{fu} \cap h$ quiere decir que h es una relación que a un $x\varepsilon u$ le asigna un $y\varepsilon \mathbf{Ku}$ y, así mismo, $(\mathbf{afb})\mathbf{rcp}$ representa que la trasformación es recíproca.

Se lee *no* cuando aparece $-$, si a es una proposición, $-a$ se entiende como la negación de a . El símbolo Λ significa *falso* o *absurdo*, por ejemplo $(x - = x) = \Lambda$ se entiende como $(x - = x)$ es *falso*. El símbolo ι se puede leer cuando aparece ιx como *igual a* x .

La implicación se denota con $\supset$, si a y b son proposiciones y $x, y, \dots$ son letras de a ; si cualesquiera que sean los valores de $x, y, \dots$, si la condicion a es verdadera implica que b también es verdadera se escribe:

$$a \supset_{x,y,\dots} b,$$

se escribe al pie de $\supset$ las letras sobre las cuales se hace la deducción que, a su vez, es independinete de estas letras como subíndices.

Se utiliza $a =_{x,y} b$ como abreviación de $a \supset_{x,y} b.b \supset_{x,y} a$, también $a =_{x,y} \Lambda$ significa “no hay ningún valor de x e y que cumplan la condicion a ” y su negación $a - =_{x,y} \Lambda$ que “hay valores de x e y que satisfacen la condición a ”

Por último, para consulta de las referencias bibliograficas hechas por Burali-Forti se puede remitir a los documentos en lo que se basa esta traducción.

B.1. Artículo de Burali-Forti, 28 de marzo de 1897

Una cuestión en los números trasfinitos Cesare Burali-forti (1897)

El principal objetivo de esta nota es probar que de hecho existen *números transfinitos*¹ o *tipos de orden* a y b de tal modo que a no es igual a b , no es menor que b , y no es mayor que b .

Con base en los resultado ya conocidos, nosotros podemos probar en unas pocas palabras lo que hemos afirmado; pero, para remover cualquier duda de los lectores y para la validación de nuestra prueba, hemos considerado necesario establecer exactamente (en §§1-8) el significado de los términos que usamos², repitiendo -tal vez en una forma diferente- asuntos ya presentados por nosotros en *Rendiconti* (1894).

§1. *Orden en los elementos de una clase.* Sea u una clase. Nosotros decimos que h es un orden de u si³:

- (a) h es una correspondencia entre los elementos de u y las clases formadas por elementos de u ;
- (b) La correspondencia h es transitiva; esto es, si x, y, z son elementos de u , si x es un elemento de la clase hy , y si y es un hz , entoces x es un elemento de hz ;
- (c) Si x e y son elementos de u , entonces no puede ser que al mismo tiempo, x es un hy y que y un hx ;
- (d) Si x e y son arbitrarios elementos de u , entonces siempre x es idéntico con y , o x es un hy , o y es un hx .

En símbolos, escribimos **Ordu** para referirnos al “orden de u ”, tenemos

¹Cantor 1895; traducción italiana, 1895a. para los trabajos previos de Cantor en este tema consultar la *lista bibliográfica* de Vivanti anexa a la parte IV de el *Formulaire* publicado por la *revista di matematica*[[1893]].

²Para el significado de los términos clase, correspondencia, clase finita, nosotros referimos al lector Burali-Forti, 1896.

³Para futuras explicaciones revisar los temas contenidos en §1-8, ver Burali-Forti, 1894.

$$1. u \in \mathbf{K}. \supset . \mathbf{Ord} u = (\mathbf{K}u) \mathbf{f}u \cap \overline{h\varepsilon} \{x, y, z \in u. x\varepsilon hy. y\varepsilon hz \supset_{x,y,z} . x\varepsilon hz \therefore x, y \in u. x\varepsilon hy. y\varepsilon hx. =_{x,y} . \Lambda \therefore x, y \in u. \supset_{x,y} : x = y. \cup . x\varepsilon hy. \cup . y\varepsilon hx\} \quad (\mathbf{Def}).$$

Si x es un elemento de u , llamamos a los elementos de la clase hx “sucesores de x en u con respecto al orden h ”; fácilmente vemos que las propiedades (a)-(d) atribuidas a h son ordinariamente ligadas a la idea de *orden*.

Invertimos la relación $y\varepsilon hx$ (y es un sucesor de x), escribiendo $x\varepsilon h|y$, y a partir de ahora $h|y$ puede ser usado para “predecesor de y en u con respecto al orden h ”. Llamamos al elemento x de u no tiene predecesores ($h|x = \Lambda$) “el primer elemento de u con respecto al orden h ” y al elemento y de u que no tiene sucesores ($hy = \Lambda$) “el últimos elemento de u con respecto al orden h ”. Si x es un elemento de u , usamos el término “sucesor inmediato de x ” para el elemento y de u que es un sucesor de x y tal que no existe ningún elemento de u que sea al mismo tiempo sucesor de x y predecesor de y ($y\varepsilon hx. u \cap hx \cap h|y = \Lambda$). El primer o el último elemento de u , así como o el sucesor inmediato de un arbitrario elemento de u no necesariamente existe; pero si existe, está unívocamente determinado (esto se sigue fácilmente de las condiciones (a)-(d)).

§2. *Clases ordenadas*.⁴ Sean u y v clases arbitrarias; sea h un orden de u y k un orden de v . Escribimos (u, h) para referirnos a “la clase u cuyos elementos son ordenados por h ”, o “la clase u ordenada por el criterio h ”.

No es posible ahora definir (u, h) poniendo (u, h) igual (idéntico) a un complejo de signos con un significado conocido. Definimos (u, h) como un *objeto abstracto* indicando la condición bajo la cual dos clases ordenadas tienen que ser consideradas como idénticas.

Escribimos

$$2. u, v \in \mathbf{K}. h \varepsilon \mathbf{Ord} u. k \varepsilon \mathbf{Ord} v. \supset . (u, h) = (v, k). =: u = v. h = k$$

⁴Cantor (1895, p.496[[o 1934, p.296]]) declara: “nostros decimos que un conjunto M es *simplemente ordenado* si existe entre sus elementos un *orden por rango* definido acorde al cual, para cualesquiera dos elementos m_1 y m_2 uno ocupa el rango menor y el otro el mayor, y esto de tal modo que, si de tres elementos m_1 , m_2 y m_3 , m_1 es menor en rango que m_2 y m_2 es menor que m_3 , entoces m_1 es también menor que m_3 .”

esto es, asumimos que (u, h) es idéntico a (v, k) si u es idéntico a v y la correspondencia h es idéntica a la correspondencia k .

Si u es una clase que contiene sólo un elemento x ($u \in \mathbf{Un}$), entonces todo orden h de u es tal que $hx = \Lambda$. Podemos indicar de aquí en adelante por el signo Λ cada orden de u y consecuentemente (u, Λ) representara la clase ordenada u .

Escribiendo **Ko** para “clases ordenadas”, ponemos

$$3. \mathbf{Ko} = \overline{(u, h) \in \{u \in \mathbf{K}. h \in \mathbf{Ordu}\}}.$$

Esto es, decimos que (u, h) es una clase ordenada si u es una clase y h es un orden de u .

§3. *Clases perfectamente ordenadas.* Sea u una clase no vacía (una que efectivamente contiene algunos elementos) y sea h un orden de u .

Decimos que (u, h) es una clase perfectamente ordenada si:

- (a) Existe un elemento de u que ocupa el primer lugar con respecto al orden h ;
- (b) Todo elemento de u que tiene un sucesor, tiene un sucesor inmediato.
- (c) Para cualquier elemento arbitrario x de u , x no tiene un predecesor inmediato, o existe un predecesor y de x que no tiene predecesor inmediato y es tal que los elementos de u , que son al mismo tiempo sucesores de y y predecesores de x , forman una clase finita.

En símbolos, escribiendo **Kpo**, tenemos

$$4. \mathbf{Kpo} = \mathbf{Ko} \cap \overline{(u, h) \in \{u \vdash \Lambda : \vdash x \in u. h|x = \Lambda \vdash_x \Lambda : \vdash x \in u. h y \vdash \Lambda. \supset_x : y \in h x. u \cap h x \cap h|y = \Lambda. \vdash_y \Lambda : \vdash x \in u. \supset_x : y \in h|x. u \cap h y \cap h|x = \Lambda. =_y \Lambda : \vdash u \cap h y \cap h|x : m \in h|y. u \cap h m \cap h|y = \Lambda. =_m \Lambda : (u \cap h y \cap h|x) \in \mathbf{Kfin} : \vdash_y \Lambda\}}^5$$

⁵La definición dada aparece en una simbología algo complicada porque no quisimos introducir signos para *predecesor inmediato* o *sucesor inmediato* de x , para el *primer* o *último* de u , etcétera. Sería conveniente introducir tales signos si quisiéramos dar un tratamiento de la teoría de clases ordenadas.

G. Cantor llama a una clase ordenada que satisface las condiciones (a) y (b) “clase bien-ordenada”. Hay una marcada diferencia entre clases bien-ordenadas y perfectamente ordenadas. Sea, por ejemplo, $a_1, a_2, a_3, \dots$ y $b_1, b_2, b_3, \dots$ los elementos de dos clases numerables; si consideramos la clase ordenada

$$a_1, a_2, a_3, \dots, b_3, b_2, b_1$$

nosotros fácilmente vemos que es una clase bien-ordenada, pero no perfectamente ordenada, mientras

$$a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3$$

es una clase perfectamente ordenada, por lo tanto bien-ordenada.

§4. *Relaciones entre clases ordenadas.* Sean (u, h) y (v, k) clases ordenadas. Escribimos $(u, h)\mathbf{f}(v, k)$ para “correspondencia ordenada entre los elementos de u y los elementos de v ordenados por los criterios h y k ”. Decimos que f es tal correspondencia cuando: f es una correspondencia unívoca y recíproca entre los elementos de u y v , y es tal que, si x y y son elementos de u y x es sucesor de y con respecto a h , fx es un sucesor de fy con respecto a k . En símbolos tenemos

$$5. (u, h), (v, k) \varepsilon \mathbf{Ko}. \supset .(u, h)\mathbf{f}(v, k) = (ufv)\mathbf{rcp} \cap \overline{f\varepsilon}\{x, y \varepsilon u. x\varepsilon hy. \supset_{x,y} .fx\varepsilon k(fy)\} \quad (\mathbf{Def}).$$

Decimos que (u, h) es equivalente⁶ a (v, k) y escribimos $(u, h) \sim (v, k)$, si una correspondencia ordenada puede establecerse entre (u, h) y (v, k) . Decimos que (u, h) es *menor* que (v, k) y escribimos $(u, h) < (v, k)$, si existe una clase w contenida en v tal que $(u, h) \sim (w, k)$.⁷ En símbolos tenemos

$$6. (u, h), (v, k) \varepsilon \mathbf{Ko}. \supset: (u, h) \sim (v, k). = .(v, k)\mathbf{f}(u, h) \vDash \Lambda \quad (\mathbf{Def}).$$

$$7. \dots \supset: .(u, h) < (v, k). =: w \varepsilon \mathbf{K}v. (u, h) \sim (w, k). \vDash_w \Lambda \quad (\mathbf{Def}).$$

⁶Cantor dice que las dos clases ordenadas son *similares* (ähnlich). Nosotros mantenemos el término *equivalente* definido para dos clases (ver Apéndice B.1), actualmente no tiene significado para dos clases ordenadas. Lo mismo podemos decir acerca del signo $<$ introducido por nosotros en el mismo artículo.

⁷Observamos que cada orden de los elementos de v es también un orden de cada clase contenida en v (§1); por lo tanto si w es una parte de v , entonces (w, k) es también una clase ordenada.

De las proposiciones 6 y 7 lo siguiente se deduce fácilmente

$$(u, h), (v, k), (w, l) \varepsilon \mathbf{Ko}. \supset \cdot.$$

8. $(u, h) \sim (u, h),$
9. $(u, h) \sim (v, k). = .(v, k) \sim (u, h)$
10. $(u, h) \sim (v, k). (v, k) \sim (w, l). \supset .(u, h) \sim (w, l)$
11. $(u, h) \sim (v, k). \supset .(u, h) < (v, k)$
12. $(u, h) \sim (v, k). (v, k) < (w, l). \supset .(u, h) < (w, l)$
13. $(u, h) < (v, k). (v, k) < (w, l). \supset .(u, h) < (w, l)$
14. $(u, h) \sim (v, k). \supset .u \sim v$
15. $(u, h) < (v, k). \supset .u < v$

§5. *Operación S.* Sean (u, h) y (v, k) clases ordenadas tales que u y v no tienen elementos en común. Para el símbolo $(u, h)S(v, k)$, el cual leemos “clase ordenada (u, h) seguida por la clase ordenada (v, k) ”, debemos denotar la clase $u \cup v$ (suma lógica de u y v) cuando ordenados por un criterio l tal que , x y y siendo elementos $u \cup v$ la sentencia $x \varepsilon l y$ equivale a decir: x y y son elementos de u y $x \varepsilon h y$, o x y y son elementos de v y $x \varepsilon k y$, o x es un elemento de v y y es un elemento u . En símbolos tenemos

$$16. (u, h), (v, k) \varepsilon \mathbf{Ko}. u \cap v = \Lambda. \supset .(u, h)S(v, k) = \overline{l[(u \cup v, l)]} \varepsilon \{l \varepsilon \mathbf{Ord}(u \cup v) : \cdot : x, y \varepsilon (u \cup v). \supset_{x, y} :: x \varepsilon l y . = \cdot : x, y \varepsilon u. x \varepsilon h y : \cup : x, y \varepsilon v. x \varepsilon k y : \cup : x \varepsilon v. y \varepsilon u\} \quad (\mathbf{Def}).$$

Es fácil probar que $(u, h)S(v, k)$ una clase ordenada unívocamente determinada. De forma análoga tenemos

$$17. (u, h), (v, k) \varepsilon \mathbf{Kpo}. u \cap v = \Lambda. \supset .(u, h)S(v, k) \varepsilon \mathbf{Kpo}.$$

§6. *Tipo de orden.* Si (u, h) es una clase ordena, tenemos $\mathbf{T}^{\mathbf{t}}(u, h)$ para “tipo de orden de elementos de u ordenado por el criterio h ”. Consideramos $\mathbf{T}^{\mathbf{t}}(u, h)$ como un *objeto abstracto* en función de (u, h) y que (u, h) tiene en común con todas las clases equivalentes al mismo; esto es

$$18. (u, h), (v, k) \varepsilon \mathbf{Ko}. \supset : \mathbf{T}^{\mathbf{t}}(u, h) = \mathbf{T}^{\mathbf{t}}(v, k). = .(u, h) \sim (v, k)$$

Escribiendo $\mathbf{T}$ para “tipo de orden”, ponemos

$$19. \mathbf{T} = \overline{x \varepsilon} \{(u, h) \varepsilon \mathbf{Ko}. x = \mathbf{T}^{\mathbf{t}}(u, h). - =_{(u, h)} \Lambda\} \quad (\mathbf{Def}).$$

De las proposiciones 8, 9, y 10, se sigue inmediatamente que para los tipos de orden la igualdad definida por la proposición 18 tiene las propiedades *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*; esto es si a y b son tipos de orden arbitrarios, tenemos

$$a = a; \quad a = b. = .b = a; \quad a = b.b = c. \supset .a = c$$

§7. *Mayor y menor en los tipos de orden.* Sean (u, h) y (v, k) clases ordenadas. Decimos que $\mathbf{T}'(u, h)$ es menor que $\mathbf{T}'(v, k)$, o que $\mathbf{T}'(v, k)$ es mayor que $\mathbf{T}'(u, h)$ y escribimos

$$\mathbf{T}'(u, h) < \mathbf{T}'(v, k) \quad \text{ó} \quad \mathbf{T}'(v, k) > \mathbf{T}'(u, h)$$

si existe una parte v_1 de v tal que $(u, h) \sim (v_1, k)$, y no existe una parte u_1 de u tal que $(u_1, h) \sim (v, k)$. En virtud de la proposición 7 tenemos

$$20. (u, h), (v, k) \varepsilon \mathbf{Ko}. \supset \therefore \mathbf{T}'(u, h) < \mathbf{T}'(v, k) := \mathbf{T}'(v, k) > \mathbf{T}'(u, h) := (u, h) < (v, k). (v, k) - < (u, h). \quad (\mathbf{Def}).$$

Tenemos las siguientes proposiciones:

$$a, b, c \varepsilon \mathbf{T}. \supset:$$

- 21. $a = b.a < b. = .\Lambda$,
- 22. $a < b.a > b. = .\Lambda$,
- 23. $a = b.b < c. \supset .a < c$,
- 24. $a < b.b < c. \supset .a < c$.

Las proposiciones 21 y 22 expresan el hecho que, de los tres casos $a = b$, $a > b$, $a < b$, dos no pueden ocurrir al mismo tiempo; ellas son consecuencias inmediatas de las proposiciones de §4. La proposición 23 es también una consecuencia inmediata de estas proposiciones. Ahora probamos la proposición 24. Sean (u, h) , (v, k) y (w, l) clases ordenadas. De la proposición 13 obtenemos

$$(u, h) < (v, k). (v, k) < (w, l). (w, l) < (u, h). \supset: (v, k) < (u, h). \cup .(w, l) < (v, k)^8$$

trasfiriendo los dos términos de la tesis en la hipótesis y el tercer factor de la hipótesis en la tesis, tenemos

$$(u, h) < (v, k). (v, k) - < (u, h). (v, k) < (w, l). (w, l) - < (v, k). \supset .(w, l) - < (u, h);$$

⁸Porque si a , b , y c son proposiciones, tenemos que $b. \supset .b \cup c$ y por lo tanto $a \supset b. \supset: a. \supset .b \cup c$.

poniendo a la tesis el factor $(u, h) < (w, l)$, lo cual es una consecuencia de la hipótesis y recalcando la proposición 20, obtenemos al proposición 24.

Sin embargo, no podemos probar que

$$A. a, b \varepsilon \mathbf{T}. \supset: a = b. \cup .a < b. \cup .a > b,$$

eso es, que para dos tipos arbitrarios uno de los tres casos $a = b$, $a < b$, $a > b$ debe ocurrir siempre. Procediendo como en nuestro 1986a, reducimos al proposición A al producto lógico de las siguientes dos

- I. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathbf{Ko}. \supset (u, h) < (v, k). \cup .(v, k) < (u, h),$
- II. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathbf{Ko}. (u, h) < (v, k). (v, k) < (u, h). \supset .(u, h) \sim (v, k).$

Si asumimos por un momento que la proposición A, o por lo menos la proposición II es verdadera, partiendo de la proposición 20, después de algunas simples trasformaciones lógicas tenemos que

$$B. (u, h), (v, k) \varepsilon \mathbf{Ko}. \supset: \mathbf{T}'(u, h) < \mathbf{T}'(v, k). =: (u, h) < (v, k). (u, h) \sim (v, k);$$

esto es, $\mathbf{T}'(u, h)$ es menor que $\mathbf{T}'(v, k)$ ⁹, si no son iguales y existe una parte v_1 de v talque $(u, h) \sim (v_1, k)$. Es en esta forma en la que Cantor (1887) da la definición de la relación conteniendo el signo $<$. Nuestra proposición 20 y la proposición B son equivalentes si la proposición A, o por lo menos la proposición II se mantienen. Si asumimos la proposición B como una definición, no sabríamos como probar la proposición 24 a menos que asumamos la proposición II.

De la proposición 20 y la proposición B se sigue fácilmente que

$$C. (u, h), (v, k) \varepsilon \mathbf{Ko}. (u, h) < (v, k). \supset .\mathbf{T}'(u, h) \leq \mathbf{T}'(v, k).$$

§8. *Números ordinales y suma.* Decimos “número ordinal”¹⁰, y escribimos

⁹[[Aquí el texto dice, “il $\mathbf{T}'(u, h)$ è minore del $\mathbf{T}'(v, k)$ ”, que es un error de impresión]]

¹⁰Cantor dice *número ordinal* para “tipo de orden de una clase bien ordenada”. Sin embargo las propiedades de nuestros números ordinales nos parecen acordes con los números ordinales de Cantor. Además esto no afecta nuestras conclusiones; para esto basta probar que nuestro $\mathbf{T}$ es precisamente los tipos de orden de Cantor.

No para los “tipos de orden de clases perfectamente ordenadas”;

$$25. \mathbf{No} = \mathbf{T'Kpo}. \quad (\mathbf{Def}).$$

Ponemos

$$26. \mathbf{1} = \bar{t}\mathbf{T'}\{\mathbf{Ko} \cap \overline{(u, h)} \varepsilon (u \varepsilon \mathbf{Un})\}. \quad (\mathbf{Def}).$$

Esto es, decimos que *uno* es el tipo de orden de las clases ordenadas (u, h) tal que u contiene justamente un elemento. Se sigue inmediatamente que

$$27. \mathbf{1} \varepsilon \mathbf{No}.$$

definimos la suma de dos tipos de orden, y por lo tanto también para dos números ordinales, escribimos

$$28. (u, h), (v, k) \varepsilon \mathbf{Ko}. u \cap v = \Lambda. \supset .\mathbf{T'}(u, h) + \mathbf{T'}(v, k) = \mathbf{T'}\{(u, h)S(v, k)\} \quad (\mathbf{Def}).$$

Si observamos que dos clases ordenadas equivalentes seguidas por la misma clase son todavía equivalente, tenemos el resultado que la suma ahora definida es equivalente de u , v , h y k ; por otra parte, de la proposición 17 se sigue que

$$29. a, b \varepsilon \mathbf{No}. \supset .a + b \varepsilon \mathbf{No},$$

y esta proposición todavía se mantiene si ponemos **T** para **No**.¹¹

§9. *Cosecuencias de la proposición A.* Partiendo de que la proposición *A* es verdadera, veamos qué proposiciones se siguen lógicamente de ella.

$$30. a \varepsilon \mathbf{No}. \supset .a + 1 > a.$$

Demostración. Sea (u, h) una clase perfectamente ordenada teniendo a a como su número ordinal y sea v una clase que contiene un solo elemento. Si escribimos

$$P = (u, h) \quad y \quad Q = (u, h)S(v, \Lambda),$$

tenemos que $P < Q$. La proposición 30 será probada si, usando la proposición *B*, podemos probar que $P \sim Q$. Si P no tiene un último elemento $P \sim Q$,

¹¹Se entiende que tenemos que asumir la existencia de por lo menos una clase infinita (ver *Burali-Forti 1896*). Además, si no existen clases infinitas, los *tipos de orden* son *enteros*.

porque Q tiene último elemento llamado $\bar{v}$. Si P tiene un último elemento, x , entonces existe (§3) un elemento y de u que no tiene un predecesor inmediato, tal que los elementos $(u \cap hy) \cup \iota y$ forman una clase finita de n elementos; entonces si $P \sim Q$, las clases P_1 y Q_1 que obtenemos cuando removemos los últimos n elementos de P y Q , también serán equivalentes; pero esto es absurdo porque P_1 no tiene un último elemento y Q_1 tiene a y como último elemento.¹² por lo tanto $P \not\sim Q$ y consecuentemente la proposición 30 se mantiene. Si siguiendo a Cantor, nosotros llamamos tipo de orden de una clase bien ordenada un número ordinal, observamos que la proposición 30 no es generalmente verdadera, como inmediatamente se sigue se sigue del ejemplo dado al final de §3.

$$31. a \varepsilon \mathbf{No}. \supset: x \varepsilon \mathbf{No}. a < x.x < a + 1. =_x \Lambda \quad (\text{A}).$$

Esta proposición -la cual dice que no existe número ordinal entre a y $a + 1$ - se deduce fácilmente de la proposición C.

Si a es un número ordinal, podemos denotar por $\bar{\varepsilon} > a$ el número ordinal mayor que a , porque la relación $x > a$ es equivalente a la relación $x \varepsilon (\bar{\varepsilon} > a)$. Consecuentemente, $\bar{\varepsilon} >$ es un criterio de orden para números ordinales, $(\mathbf{No}, \bar{\varepsilon} >)$ denota la clase de números ordinales ordenados de este modo. Ahora queremos probar que

$$32. (\mathbf{No}, \bar{\varepsilon} >) \varepsilon \mathbf{Kpo} \quad (\text{A}).$$

Demostración. Ya que $(\mathbf{No}, \bar{\varepsilon} >)$ es un número ordenado, porque las condiciones (b) y (c) de §1 se mantienen por virtud de la proposición 24. 21 y 22, la condición (d) es equivalente a la proposición A. Las proposiciones 27, 30 y 31 prueban que las condiciones (a) y (b) de §3 son satisfechas por la clase ordenada $(\mathbf{No}, \bar{\varepsilon} >)$. Sea ahora (h, k) una clase perfectamente ordenada cuyo número ordinal es a ; Ya que (u, h) satisface la condición (c) de §3, ya sea que a no tiene predecesor inmediato (esto bajo el criterio $\bar{\varepsilon} >$), o que existe un número ordinal x menor que a que no tiene predecesor inmediato tal que, obtenemos a si repetimos la operación $+1$ un número finito de veces en x . Por lo tanto $(\mathbf{No}, \bar{\varepsilon} >)$ también satisface la condición (c) de §3.

Ya que $(\mathbf{No}, \bar{\varepsilon} >)$ es una clase perfectamente ordenada, ponemos

¹²Este entendido que hacemos uso aquí de el *principio de inducción matemático* proveniente de *Burali-Forti 1896*.

$$33. \Omega = \mathbf{T}'(\mathbf{No}, \bar{\varepsilon} >) \quad (\mathbf{Def}).$$

y tenemos que

$$34. \Omega \in \mathbf{No}. \quad (\mathbf{A}).$$

Podemos ahora probar que

$$35. a \in \mathbf{No}. \supset .a \overline{\overline{<}} \Omega \quad (\mathbf{A}).$$

Demostración. Se (u, h) una clase perfectamente ordenada teniendo número ordinal a . Sea (v, k) la clase ordenada obtenida por las especificaciones siguientes: para cualquier elemento x de u , sea la clase $(u \cap \neg hx)$ un elemento de v , y sea que v tenga únicamente esos como elementos (v resulta ser una clase de clases); si x y y son elementos de u y si $x \varepsilon hy$, ponemos $(u \cap \neg hx) \varepsilon k(u \cap \neg hy)$.

Inmediatamente sigue que $(u, h) \sim (v, k)$ y por lo tanto (v, k) es una clase perfectamente ordenada teniendo como número ordinal a . De las proposiciones anteriores obtenemos fácilmente que, las clases de los números ordinales de los elementos de v , siendo ordenada esta clase por el criterio k , es una clase de números ordinales menores que a , perfectamente ordenada en sentido creciente, y a su vez tiene un número ordinal a , pero de que una clase sea menor que $(\mathbf{No}, \bar{\varepsilon} >)$ tiene en consecuencia, que la proposición 35 que se sigue de C .

§10. *Conclusión.* Si escribimos Ω para a en proposición 30 y $\Omega + 1$ para a en proposición 35, tenemos por virtud de las proposiciones 34, 26 y 29,

$$\Omega + 1 > \Omega \quad y \quad \Omega + 1 \leq \Omega$$

y estas, por las proposiciones 21 y 22, llegan a ser contradictorias.

Entonces, si asumimos la proposición A , esto nos lleva a un absurdo, y por lo tanto, ha sido rigurosamente comprobado que existen al menos dos tipos de orden a y b (y ciertamente existen algunos entre los números ordinales) tal que a no es igual a b , no es mayor que b y no es menor que b .

Por consiguiente, es imposible ordenar los tipos de orden en general, o incluso los números ordinales en particular; es decir, los tipos de orden no pueden proporcionar una clase estándar para las clases ordenadas, como la clase de enteros, ordenada acorde a la magnitud, hacen para las clases finitas

y las clases numerables [[esto es, la clase de tipo de orden ω]].¹³ Por lo tanto, parece que los tipos de orden no alcanzan uno de sus objetivos más importantes.

Torino, febrefo 1897.

C. BURALI-FORTI

¹³No puede la clase de tipos de orden que no son números ordinales formar una clase ordenada estándar de las clases ordenadas que no son perfectamente ordenadas. Puede, de hecho, ser probado fácilmente que, para **T-No**, la proposición A no es verdad, o la siguiente proposición no es verdad: “Dando **Ko -Kpo** existen dos **T-No**, x y y , tal que los tipos de orden no son menores que x y no son mayores que y , ordenados en orden creciente, forma una clase ordenada equivalente a las clases dadas”. Naturalmente esta proposición debe ser verificada junto con la A , si la clase de **T-No** es una clase estándar para **Ko -Kpo**.

B.2. Nota de Burali-Forti, 14 de noviembre 1897

SOBRE LAS CLASES BIEN-ORDENADAS (1897a)

En mi nota *Una cuestión sobre en números transfinitos* digo que, acorde con Cantor, una clase u es bien-ordenada si satisface las siguientes dos condiciones:

(a) Hay un primer elemento en u ; (b) Cada elemento de u que tiene un sucesor, tiene un sucesor inmediato.

En un artículo reciente (1897) y también, como yo pude verificar en el volumen 21 de *Mathematische Annalen* (1883, p. 548) Cantor; para definir una clase bien-ordenada, añade a las condiciones (a) y (b) lo siguiente:

(c) Si u_1 es una clase incluida en u , tal que existen en u elementos mayores que cualquier elemento de u_1 , entonces existe un elemento a de u , tal que no existe un elemento menor que a y mayor que cada elemento de u_1 .

Creí conveniente indicar explícitamente que esta omisión involuntaria es mía, aunque yo no hice uso de las clases bien ordenadas de Cantor, ni de las clases ordenadas que satisfacen las condiciones (a) y (b), sólo de las clases que yo llamé *perfectamente ordenadas* y que, además de satisfacer las condiciones (a) y (b), también son tales que:

(c') Para cualquier elemento arbitrario x de u , cumple que; x no tiene predecesor inmediato, o existe un predecesor y de x que no tiene un predecesor inmediato y es tal que, existe un número finito de elementos de u que son, al mismo tiempo, sucesores de y y predecesores de x .

Fácilmente se sigue que cada clase bien-ordenada es también perfectamente ordenada, pero no a la inversa. El lector puede checar cuales de las proposiciones mencionadas anteriormente en mi nota son verificadas también por las clases bien-ordenadas.

Torino, octubre 1897.

C. BURALI-FORTI

Apéndice C

Dos cartas de Cantor a Dedekind, 1899

En 1897 Cantor mantenía correspondencia, tanto con Hilbert como con Dedekind sobre diversos asuntos elementales de su Teoría de conjuntos. En sus comunicaciones se trataba de elucidar cuestiones tales como si *todas las potencia o cardinales están contenidos en todos los alefs* (Cantor, 2006, p. 251). A esto Cantor respondería afirmativamente y para ello, ve la necesidad de utilizar una distinción entre las *totalidades* (multiplicidades) *disponibles* y las que no. La definición que Cantor da a este término es la siguiente:

Se entiende por *conjunto disponible* toda multiplicidad en la cual todos los elementos pueden ser pensados *sin contradicción* como *coexistentes*, por lo tanto como una *cosa en sí* (Cantor, 2006, p. 255).

Con eso, incluso a llega “demostrar” que el continuo líneal es *disponible* basándose en que la *disponibilidad* de las multiplicidades numerables es una proposición *axiomáticamente válida*; así mismo, sugiere que es esta propiedad es también demostrable para cada uno de los alefs.

Ahora, de estos intercambios, los que lleva a cabo con Dedekind el 3 y 31 de agosto de 1899, Cantor expresa más a detalle sus pensamientos sobre las multiplicidades *no disponibles* así como su manera de utilizarlas de forma positiva para su teoría.

Un análisis de estos documentos se realizó en lo anterior, pasaremos a transcribir la traducción de dichas cartas al castellano cuyo crédito es de José Ferreirós y Emilio Gómez-Caminero, contenidas en Cantor (2006).

C.1. Cantor a Dedekind, 3 de agosto de 1899

Cantor a Dedekind:

Halle, 3 de agosto. 1899

Tal y como le escribí hace más de una semana, es para mí muy importante conocer su juicio acerca de ciertos puntos fundamentales de la teoría de conjuntos, y le ruego que me disculpe el trabajo que con ello le causo.

Si partimos del concepto de una multiplicidad determinada (un sistema, una colección) de cosas, se me ha hecho evidente la necesidad de distinguir entre dos tipos de multiplicidades (y me refiero siempre a multiplicidades *determinadas*).

Pues una multiplicidad puede ser de tal naturaleza que el supuesto de una «coexistencia» de *todos* sus elementos conduzca a una contradicción, de manera que es imposible concebir la multiplicidad como una unidad, como «una cosa disponible». A tales multiplicidades las denomino *multiplicidades absolutamente infinitas o inconsistentes*.

Resulta fácil convencerse de que, por ejemplo, la «colección de todo lo pensable» es una de esas multiplicidades; más abajo se nos presentarán otros ejemplos.

Si en cambio la totalidad de los elementos de una multiplicidad puede ser pensada sin contradicción como «coexistente», de manera que sea posible reunirlos en «una cosa», la denomino una *multiplicidad consistente* o un «conjunto». (En francés y en italiano este concepto puede expresarse acertadamente por medio de las palabras «ensemble» e «insieme»)

Dos multiplicidades equivalentes son o bien ambas «conjuntos» o ambas inconsistentes.

Toda submultiplicidad de un conjunto es un conjunto.

Todo conjunto de conjuntos, si se resuelve esos últimos en sus elementos, es de nuevo un conjunto.

Dado un conjunto C , llamo a aquel concepto general bajo el que cae C y además sólo los conjuntos equivalentes con él, su *número cardinal* o también su *potencia*, y lo denoto por c . Nos vemos conducidos al sistema de todas las potencias, del que más tarde se mostrara que es una multiplicidad *inconsistente*, de la manera siguiente.

Se dice que una multiplicidad esta «ordenada simplemente» cuando entre sus elementos se da una jerarquización tal, que dos cualesquiera de sus elementos uno es el anterior y otro el posterior, y de tres cualesquiera de sus elementos uno es el anterior, otro el medio, y el restante es el ultimo en rango de entre ellos.

Si la multiplicidad ordenada simplemente es un *conjunto* entonces entiendo por su tipo μ el concepto general bajo el que cae, junto con todos y solo los conjuntos ordenados *similares* a él. (Empleo el concepto *similitud* en un sentido más limitado de lo que sucede en su caso; llamo *similares* a dos multiplicidades dadas ordenadas simplemente, cuando se pueden relacionar entre si biunívocamente de tal manera que el rango jerárquico de elementos correspondientes es siempre el mismo.)

Una multiplicidad se llama *bien ordenada* cuando satisface la condición de que toda *submultiplicidad* tiene un *primer* elemento; para abreviar, llamo a tal multiplicidad una «sucesión».

Toda parte de una «sucesión» es una «sucesión» .

Si ahora una sucesión S es un conjunto, llamo al tipo de S su «*número ordinal*» o brevemente su «*número*»; de modo que, si en lo sucesivo hablo sin más de números, sólo tendré en mente números ordinales, esto es, tipos de conjuntos bien ordenados.

Pongo ahora la vista en el sistema de *todos los números* y lo designo por Ω .

En los *Math. Annalen*, tomo 49, p.216,¹ quedó demostrado que de dos números cualesquiera α y β siempre uno es el menor, y el otro el mayor, y que si de tres números es $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, entonces también $\alpha < \gamma$

Por lo tanto Ω es un sistema ordenado simplemente.

¹*Beiträge* (1897), en los *Abhandlungen* (Cantor 1932), p. 320. [*N. del ed.*]

Más de los teoremas demostrados en el §13 sobre conjuntos bien ordenados se deduce también con facilidad que toda multiplicidad de números, estos es, toda parte de Ω contiene un *menor* número. *El sistema Ω forma pues, en su orden natural de magnitud, una «sucesión»*. Si a dicha sucesión le añadimos como elemento el 0, poniéndolo en primer lugar, entonces obtenemos una sucesión Ω' :

$$0, 1, 2, 3, \dots, \omega_0, \omega_0 + 1, \dots, \gamma, \dots$$

respecto a la cual es fácil convencerse de que *todo* número γ que aparece en ella es el *tipo* de la *sucesión de todos los elementos que le pertenecen* (incluyendo al 0). (La sucesión Ω sólo tiene esta propiedad a partir de $\omega_0 + 1$.)

Ω' *no* puede ser una magnitud *consistente* (ni por tanto Ω tampoco), si Ω' fuera consistente, al ser un conjunto bien ordenado le correspondería un número δ que sería mayor que todos los números del sistema Ω ; pero en el sistema Ω debe constar también el número δ , dado que contiene a *todos* los números; de manera que δ sería mayor que δ , lo que constituye una contradicción. Así pues:

A. *El sistema Ω de todos los números es una multiplicidad inconsistente, absolutamente infinita*

Dado que la *similitud* de conjuntos bien ordenados establece el mismo tiempo su *equivalencia*, a todo número γ le corresponde un determinado número cardinal $\aleph(\gamma) = \overline{\gamma}$, a saber, el número cardinal del conjunto bien ordenado cuyo tipo es γ .

A los números cardinales que corresponden a los números *transfinitos* del sistema Ω en este sentido, los denomino «alefs» y llamo al sistema de todos los alefs $\aleph$ (*taw* la última letra del alfabeto hebreo).

Al sistema de todos los números γ que corresponden a uno y el mismo número cardinal $\mathfrak{c}$ lo denomino una «*clase numérica*», la clase numérica $Z(\mathfrak{c})$. Es fácil ver que en toda clase numérica hay un menor número γ_0 , y que existe un número γ_1 que cae fuera de $Z(\mathfrak{c})$, tal que la condición

$$\gamma_0 \leq \gamma < \gamma_1$$

dice lo mismo que la pertenencia de γ a la clase $Z(\mathfrak{c})$. Toda clase numérica es pues una determinada «sección» de la sección Ω .²

Ciertos números del sistema Ω forman *cada uno por sí mismo* una clase numérica, con los números «*finitos*»

1, 2, 3, ..., ν , ..., a los que corresponden los diferentes números cardinales «finitos» $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, ..., $\bar{\nu}$, ...

Sea ω_0 el menor número transfinito, su alef correspondiente lo denomino $\aleph_0$ de modo que:

$$\aleph_0 = \bar{\omega}_0;$$

$\aleph_0$ es el *menor* alef y determina la clase numérica

$$Z(\aleph_0) = \Omega_0.$$

Los números α de $Z(\aleph_0)$ satisfacen la condición

$$\omega_0 \leq \alpha < \omega_1$$

y quedan caracterizados por ella; aquí ω_1 es el menor número transfinito cuyo cardinal no es igual a $\aleph_0$. Si ponemos

$$\bar{\omega}_1 = \aleph_1,$$

entonces no sólo $\aleph_1$ es distinto de $\aleph_0$, sino que es el alef inmediatamente mayor, ya que es posible demostrar que no hay absolutamente ningún cardinal que estuviera entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$. Y así se obtiene la clase $\Omega_1 = Z(\aleph_1)$ que sigue inmediatamente a Ω_0 ; abarca todos los números β que satisfacen la condición

$$\omega_1 \leq \beta < \omega_2,$$

donde ω_2 es el menor número transfinito cuyo número cardinal es diferente de $\aleph_0$ y $\aleph_1$. $\aleph_2$ es el alef que sigue inmediatamente a $\aleph_1$, y determina la clase numérica que sigue a Ω_1 inmediatamente, $\Omega_2 = Z(\aleph_2)$ la cual consta de todos los números γ que son $\geq \omega_2$ y $< \omega_3$, siendo ω_3 , el menor número transfinito cuyo número cardinal es diferente de $\aleph_0$, $\aleph_1$ y $\aleph_2$, etc. Resaltaré todavía que:

$$\bar{\bar{\Omega}}_0 = \aleph_1, \bar{\bar{\Omega}}_1 = \aleph_2, \dots, \bar{\bar{\Omega}}_\nu = \aleph_{\nu+1},$$

²Aquí se plantea nuevamente el teorema ya mencionado de que *toda* colección de números, o sea *toda* submultiplicidad de Ω , tiene un *mínimo*, un *menor número*. [N. del a]

$$\sum_{\nu'=1, 2, \dots, \nu} \aleph_{\nu'} = \aleph_{\nu};$$

todo lo cual es fácil de demostrar.

De los números transfinitos del sistema Ω a los que no les corresponde como número cardinal ninguno de los $\aleph_{\nu}$ [con ν finito], de nuevo hay uno que es el menor, y que llamaremos $\aleph_{\omega_0}$, con el cual obtenemos un nuevo alef

$$\aleph_{\omega_0} = \overline{\omega}_{\omega_0},$$

que también es definible por medio de la ecuación

$$\aleph_{\omega_0} = \sum_{\nu=1, 2, \dots,} \aleph_{\nu}$$

y que reconocemos como el número cardinal *inmediatamente mayor* que todos los $\aleph_{\nu}$.

Uno puede convencerse de que este proceso de formación de los alefs, y de las clases numéricas del sistema Ω que les corresponde, es a *absolutamente* ilimitado.

B. *El sistema $\aleph$ de todos los alefs*

$$\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_{\omega_0}, \aleph_{\omega_0+1}, \dots, \aleph_{\omega_1}, \dots$$

constituye, en su orden de magnitud, una sucesión similar al sistema Ω y por tanto igualmente una sucesión inconsistente, absolutamente infinita.

Surge ahora la cuestión de que si el sistema $\aleph$ están contenidos *todos los números cardinales transfinitos*. Con otras palabras, ¿existe un *conjunto* cuya potencia no sea *ningún alef*?

Esta pregunta debe responderse *negativamente*, y la razón de ello esta en la *inconsistencia* que hemos reconocido en los sistemas Ω y $\aleph$.

Demostración. Tomemos una cierta multiplicidad M y supongamos que no le corresponde *ningún alef como número cardinal*, de ahí podremos deducir que M debe ser *inconsistente*.

Pues resulta fácil advertir que, bajo el supuesto de que hemos establecido, todo sistema Ω deberá ser proyectable sobre la multiplicidad M , esto es, que

debe existir una submultiplicidad M' de M , que es equivalente al sistema Ω .³

M' es *inconsistente* porque Ω lo es, de manera que lo mismo debe afirmarse de M .⁴ Con lo cual toda multiplicidad *consistente transfinita*, todo conjunto transfinito, debe tener un *determinado alef* como número cardinal. Así pues,

C. *El sistema $\aleph$ de todos los alefs no es otra cosa que el sistema de todos los números cardinales transfinitos.*

Todos los conjuntos son por tanto, en un *sentido ampliado*, «*enumerables*», y en particular todos los «*conjuntos*». Además podemos advertir a partir de C la correlación de la proposición formulada en, *Math. Annalen*, tomo 46:⁵ «*Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son números cualquiera, entonces o bien $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, o bien $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, o bien $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$* ».

Pues los alefs tienen, tal y como hemos visto, el carácter de magnitudes.

³Al igual como hacen Ferreirós y Gómez-Caminero, resaltamos que Zermelo, en las notas editoriales que hace en la su compilación de los trabajos de Cantor, dice que: es este el punto donde estriba la debilidad de la demostración donde, no *demuestra* que Ω es proyectable en M , «sino que lo toma de una “baga intuición”, una la intuición temporal para un proceso que va más allá de toda intuición, y se imagina un ser que podría realizar elecciones arbitrarias *sucesivas* para con ellas definir al subconjunto M' de M que precisamente no es definible en las condiciones establecidas. Solo aplacando el “Axioma de Elección”, que postula la posibilidad de una elección *simultánea*, y que Cantor emplea en todas partes de modo inconsciente e insistido, si bien nunca lo formula expresamente, sería posible definir M' como subconjunto de M . Pero incluso entonces seguiría en pie la objeción de que la demostración opera con multiplicidades “inconsistentes”, quizá incluso con conceptos contradictorios, y ya por esto resulta inadmisibles». Objeciones de este tipo fueron las que llevaron a Zermelo a establecer su propia demostración del teorema del buen orden.

⁴Aquí Ferreirós y Gómez-Caminero nos remiten a una correspondencia de Cantor a Hilbert en la que presenta, en forma de teoremas, resultados referentes a la multiplicidades *inconsistentes*.

⁵*Beiträge* (1895), en *Abhandlungen* (Cantor 1932), p. 285. [N. del ed.], [[En nuestra bibliografía ver (Cantor, 1895/97) y (Cantor 1932, pp. 284-285)]]

C.2. Cantor a Dedekind, 31 de agosto de 1899

Cantor a Dedekind:

Hahnenklee, 31 de agosto. 1899

Habría recibido Ud. mi carta de ayer. Si me ve Ud. tan celoso por convencerle de la necesidad de la división que estamos discutiendo de los «sistemas» [en dos clases], espero que con ello quede probado mi agradecimiento por los múltiples estímulos y las ricas enseñanzas que he recibido de sus escritos clásicos.

Reconocerá Ud. de la manera más rápida la distinción esencial, profunda y rica en significado entre los sistemas «consistentes» e «inconsistentes», si admite Ud. que le conduzca en la siguiente consideración simple, que es enteramente independiente del aparato descrito el 3 de agosto.

Vamos a asignar los «conjuntos» equivalentes a una misma *clase* de potencia, y los conjuntos no equivalentes a distintas clases, y vamos a considerar el sistema

S de todas las cosas pensables.

Entendido por **a** también [además de la clase misma] el número cardinal o potencia de los conjuntos de la clase de que se trate, ya que es uno y el mismo para todos estos conjuntos.

Sea $M_{\mathbf{a}}$ cualquier conjunto concreto de la clase **a**. Afirmando que el sistema S , completamente determinado y bien definido, *no es ningún «conjunto»*.

Demostración. Si S fuera un conjunto, también lo sería un conjunto

$$T = \sum M_{\mathbf{a}},$$

realizando esta suma sobre todas las clases **a**, de manera que T debería permanecer a una cierta clase, sigamos $\mathbf{a}_0$. Pero tenemos el siguiente teorema:

«Si M es cualquier conjunto de número cardinal **a**, de él puede siempre derivarse otro conjunto M' cuyo número cardinal **a'** es mayor que **a**».

He demostrado este teorema para los dos casos que nos resultan más inmediatos, que $\mathbf{a}$ sea igual a $\aleph_0$ (enumerabilidad en el sentido habitual de la palabra) y que sea igual a $\mathbf{c}$, donde $\mathbf{c}$ del continuo aritmético, por un *procedimiento uniforme* en el *primer* tomo de las noticias de la «Deutsche Mathematiker-Vereinigung». Dicho procedimiento admite ser traspuesto *sin dificultades de ningún tipo* a un $\mathbf{a}$ arbitrario. El significado de este método puede expresarse simplemente mediante la formula:

$$2^{\mathbf{a}} > \mathbf{a}.$$

Sea pues $\mathbf{a}'_0$ cualquier número cardinal mayor que $\mathbf{a}_0$. T que es de potencia $\mathbf{a}_0$ contiene pues como parte el conjunto $M_{\mathbf{a}_0}$, que tiene la potencia mayor $\mathbf{a}'_0$, lo que constituye una contradicción.

El sistema T , y con ello también el sistema S , *no son* pues *conjuntos*. *Existen por tanto* determinadas multiplicidades que *no son también unidades*, esto es, multiplicidades tales que en su caso una verdadera «coexistencia de todos sus elementos » resulta *imposible*. Éstas son las que llamo «sistemas inconsistentes », y las otras en cambio «conjuntos».

Apéndice D

Correspondencia Russell-Frege, 1902

D.1. Russell a Frege, 16 de junio de 1902

Russell a Frege

Haslemere, Viernes 16 de junio 1902

Estimado colega

Durante un año y medio me he familiarizado con su trabajo *Fundamentos de Aritmética*, pero es sólo ahora que he sido capaz de encontrar el tiempo para el minucioso estudio que tenía la intención de hacer respecto su trabajo. Me encuentro totalmente de acuerdo con usted en todo lo esencial, sobre todo cuando rechaza cualquier elemento psicológico en la lógica [[Momento]] y cuando da un alto valor a una conceptografía [[Begriffsschrift]] para los fundamentos de las matemáticas y la lógica formal que, por cierto, casi no se puede distinguir. Respecto a muchas cuestiones particulares encuentro que usted, discusiones de trabajo, distinciones y definiciones que uno busca en vano en las obras de otros lógicos. Especialmente sobre las funciones (§9 de su *Begriffsschrift*), me he llevado, por mi cuenta, a los mismos puntos de vista, incluso en los detalles. Sólo hay un punto en el que me he encontrado con

una dificultad. Usted establece que una función, también puede actuar como elemento indeterminado. Anteriormente creía eso, pero ahora este punto de vista me parece dudoso por lo siguiente contracción. Sea w un predicado: ser predicado y no puede predicar sobre sí mismo. ¿Puede ser w predicado de sí mismo? De cada respuesta se sigue lo contrario. Por lo tanto debemos concluir que w no es un predicado. Asimismo, no existe la clase (como totalidad) de las clases que, cada una tomada como totalidad, no pertenece a sí mismas.

De esto concluyo que, en determinadas circunstancias, una colección [[Menge]] definible no la hace una totalidad. Estoy a punto de terminar un libro sobre los principios de las matemáticas y en él me gustaría discutir muy bien sobre su trabajo. Ya tengo tu libro o voy a comprarlo pronto, pero le estaría muy agradecido, si le parece, que me pudiera enviar por separado reimpressiones de sus artículos en publicaciones periódicas. En caso de que esto le sea imposible, sin embargo, los obtendría de una biblioteca.

El tratamiento exacto de la lógica en cuestión fundamental, donde los símbolos fallan, anteriormente ha permanecido variando, en sus obras me parece conocer lo mejor de nuestro tiempo y, por lo tanto, me he permitido expresar mi profundo respeto a usted.

Es muy lamentable que no se haya llegado a publicar el segundo volumen de sus *Fundamentos*, espero que esto todavía se haga.

Muy respetuosamente suyo.
Bertrand Russell

La contracción de arriba, cuando se expresa con la conceptografía de Peano dice lo siguiente:

$$w = \mathbf{cls} \cap x \exists (x \sim \varepsilon x). \supset: w \varepsilon w. = .w \sim \varepsilon w$$

He escrito a Peano sobre esto, pero todavía me debe una respuesta.

D.2. Frege a Russell, 22 de junio de 1902

Frege a Russell

Hena, 22 de junio 1902

Estimado colega

Muchas gracias por su interesante carta del 16 de junio. Me place que usted este de acuerdo conmigo en muchos puntos y que tenga la intención de discutir mi trabajo a fondo. En respuesta a su solicitud, yo le he enviado las siguientes publicaciones:

1. “Kritische Beleuchtung” [[1895]]
2. “Ueber die Begriffsschrift des Herrn Peano” [[1896]]
3. “Über Begriff und Gegenstand” [[1892]]
4. “ Ueber Sinn und Bedeutung” [[1892a]]
5. “ Ueber formale Theorien der Arithmetik” [[1895]]

Recibí un sobre vacío que parece estar dirigido de su parte. Supongo que usted pretendía enviarme algo que se ha perdido por accidente. Si este es el caso, te doy las gracias por su pura intención. Le adjunto el frente del sobre.

Cuando ahora leo mi *Begriffsschrift* de nuevo, me parece que he cambiado mis puntos de vista sobre muchos aspectos, como se verá, si se compara con mi *Grundgesetze der Arithmetik*. Les pido que se elimine el párrafo que comienza con “Nicht minder erkennt man” en la página 7 de mi *Begriffsschrift*, ya que es incorrecta; dicho sea de paso, este no tuvo efectos perjudiciales en el resto del contenido del cuadernillo.

Su descubrimiento de la contradicción me causó la mayor sorpresa y, casi diría, consternación, ya que ha sacudido a la base sobre la que yo intentaba construir la aritmética. Parece entonces, que la transformación de la generalización de una igualdad en la igualdad de recorridos de valores [[die Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Werthverlaufsgleichheit]] (§9 de mis *Grundgesetze*) no es siempre permisible, que mi Regla V (§ 20, p. 36) es falsa y que, mis explicaciones en §31 no son suficientes para asegurar una significación [[bedeutung]] para mis combinaciones de signos en todos los

casos. Tengo que reflexionar más sobre el asunto. Es de la mayor seriedad, ya que, con la pérdida de mi regla V , no sólo mis fundamentos de la aritmética, sino también los únicos fundamentos posibles, parecen desvanecerse. Sin embargo creo, debe ser posible establecer las condiciones para la transformación de la generalización de una igualdad en la igualdad de los recorridos valores de tal manera que lo esencial de mis pruebas se mantenga intancto. En cualquier caso, su descubrimiento es muy importante y resultara quizás, como un gran avance en la lógica, no siendo bienvenida como puede parecer a primera vista.

Por cierto, me parece que la expresión “un predicado es predicado de sí mismo” no es exacta. Un predicado es, por regla, una fusión de primer-nivel la cual requiere un objeto como argumento y no puede, por lo tanto, tenerse a ella misma como argumento (sujeto). Por consiguiente, yo preferiría decir: ‘una concepto predica su propia extensión’. Si la función ‘ $\Phi(\xi)$ ’ es un concepto, yo denotan su extensión (o la correspondiente clase) con ‘ $\dot{\epsilon}\Phi(\epsilon)$ ’ (por cierto, la justificación de este se ha convertido en cuestionable para mí). En ‘ $\Phi(\dot{\epsilon}\Phi(\epsilon))$ ’ o ‘ $\dot{\epsilon}\Phi(\epsilon) \cap \dot{\epsilon}\Phi(\epsilon)$ ’¹ tenemos entonces un caso en que el concepto $\Phi(\xi)$ es predicado de su extensión.

El segundo volumen de mis *Grundgesetze* aparce dentro de poco. No tendré ninguna duda en añadir un apéndice en el que se tome en cuenta su descubrimiento. Si solo yo tuviera el punto de vista adecuado para esto!

Suyo sinceramente,
G. Frege

¹[[“ $\cap$ ” es usado por Frege para reducir funciones de segundo-nivel a funciones de primer-nivel, ver *Frege 1893*, §34.]]

Apéndice E

Axiomas de Zermelo, 1908

El artículo con título *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I* (Estudios sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos I) se considera como la primera axiomatización de la Teoría de conjuntos. Zermelo la publica en la revista alemana Mathematische Annalen donde es fechado 30 de julio de 1907 pero su publicación es en 1908. En la primera parte inicia determinando que los conjuntos son algunos de los *objetos* de un cierto *dominio* $\mathfrak{B}$, que un objeto a se dice existente si pertenece al dominio $\mathfrak{B}$ y de la misma manera lo es la clase $\mathfrak{K}$ siempre que todos sus elementos perezcan a $\mathfrak{B}$. Después significa de modo habitual a los símbolo $=$, ε y $\in$, este ultimo equivalente al actual $\subset$. Por ultimo establece cuando una proposición o función proposicional esta bien definida (ver página 127). En su notacion, Zermelo usa 0 en lugar de $\emptyset$, $\mathfrak{U}T$ para la potencia $\mathcal{P}(T)$ de T y $\mathfrak{S}T$ por $\bigcup T$.

A continuación pasamos a escribir una traducción de dichos axiomas, tomados de dicho artículo (Zermelo, 1908):

Axioma I. Si cada elemento de un conjunto M es también elemento de N y viceversa, es decir, $M \in N$ y $N \in M$, entonces siempre $M = N$. O sea : Un conjunto está determinada por sus elementos.

(Axioma de Determinación)

Axioma II. Existe un conjunto (impropio), el “*conjunto nulo*” 0 , que no contiene elemento en absoluto Si a es cualquier objeto del dominio, existe un conjunto $\{a\}$ que contiene a a y sólo a a como elemento; Si a y b son dos objetos cualquiera del dominio, siempre existe un conjunto a, b que contiene como elementos a y b , pero no hay ningún objeto x distinto de ambos.

(Axioma de Conjuntos Elementales)

Axioma III. Si una función proposicional $\mathfrak{E}(x)$ es *bien definida* para todos los elementos de un conjunto M , entonces M tiene un subconjunto de $M_{\mathfrak{E}}$, que contiene todos y solo los elementos x de M para los cuales $\mathfrak{E}(x)$ es verdadera.

(Axioma de separación)

Axioma IV. A cada conjunto T le corresponde un segundo conjunto $\mathcal{U}T$ (el *conjunto potencia* de T) que contienen como elementos a todos los subconjuntos de T y solo a ellos.

(Axioma del Conjunto potencia)

Axioma V. A cada conjunto T le corresponde un conjunto $\mathfrak{S}T$ (el *conjunto unión* de T) que tiene como elementos todos los elementos de los elementos de T y solamente a ellos.

(Axioma del Conjunto Unión)

Axioma VI. Si T es un conjunto cuyos elementos son conjuntos diferentes de 0 son ajenos unos entre otros, su unión $\mathfrak{S}T$ contiene al menos un subconjunto de S_1 , que tiene en común con todos los elementos de T , uno y sólo un elemento.

(Axioma de elección)

Axioma VII. El dominio contiene al menos un conjunto Z que tiene al conjunto vacío como elemento y esta construido de manera que a cada uno sus elementos a le corresponde otro de la forma $\{a\}$, o sea, junto con cada elemento a contiene también como elemento al conjunto $\{a\}$.

(Axioma del infinito)

Bibliografía

Amilibia, J. M.

1994—*La Cuestión de la Consistencia de la Geometría Hiperbólica*. Historia de la Matemática en el Siglo XIX. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid 1994 pp. 213-232

Babini J. & Pastor J.

1997—*Historia de la Matemática*. (Vol. II). Barcelona: Gedisa, S.A.

Becker, O.

1966—*Magnitudes y Limites del Pensamiento Matemático*. (M. D. Gusmán, Trad.) Madrid: Ediciones Rialp.

Bourbaki, N.

1972—*Elementos de historia de las matemáticas*., (Jesús Hernández, Trad.), Madrid: Alianza.

Burali-Forti.

1894—*Sulle Classi Ordinate e i Numeri Transfiniti*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 169-179.

1897—*Una questione sui numeri transfiniti*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 11, 154-164.

1897a— *Sulle Classi Ben Ordinate*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 11, 260

Cantor, G.

1872—*Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*. Math. Annalen Vol 5, 123-132.

1872a—*Una extensión de un Teorema de la Teoría de las Series Trigonométricas*. Math. Annalen Vol 5 123-132, (Bares J. y Climent J., Trad.).

1874—*Sobre un Propiedad del Sistema de todos los Números Reales Algebraicos*. Journal de Borchardt, t. 77, (Treducido en (Cantor 2006)).

1878—*Una Contribución a la Teoría de Conjuntos*. Extracto de la Revista de Borchardt, vol. 84, (Bares J. y Climent J., Trad.).

1879/82—*Sobre los Conjuntos Infinitos y Linales de Puntos*. Extracto de los Anales matemáticos de Leipzig, vol. 20. (I-IV), 35-57, (Treducido en (Cantor 2006)).).

1883a—*Fundamentos de una Teoría General de las Multiplicidades: una Investigación Matemático-Filosófica en la Teoria del Infinito*. (Bares J. y Climent J., Trad.) Math. Annalen, Vol 21 pp. 545-591.

1883b—*Fundamentos para una Toría General de Conjuntos una Investigación Matemático-Filosófica sobre la Teoría del Infinito.*, (Treducido en (Cantor 2006)).

1890/91—*Sobre una Cuestión Elmental de la Teoría de las Multiplicidades*. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Vol 1, 75-78, (Bares J. y Climent J., Trad.).

1895/97—*Contribuciones a la Fundamentación de la Teoría de los Conjuntos Transfinitos*. (Bares J. y Climent J., Trad.), Math. Annalen, Vol 46 pp. 481-512 y Vol 49 pp 207-246.

1932—*Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind; herausgegeben von Ernst Zermelo. Nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel . Berlin: Nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel.

2006—*Fundamntos para una Teoria General de Conjutos—Escritos y Correspondencia Selecta.*. Ed. Crítica, (J. Ferreirós y Gómez-Caminero E., Trad.)

Cavaillés, J.

1992—*Método Axiomático y Formalismo.*, (Alvarez C. y Ramírez S., Trad.), México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

Collette, J. P.

1998—*Historia de las matemáticas*. (Vol. II). Naucalpan,edo. de México: Siglo veintiuno editores.

Copi, I. M.

1958—*The Burali-Forti Paradox*. Philosophy of Science , 25 (4), 281-286.

Corry, L.

2002—*David Hilbert y su Filosofía Empiricista de la Geometría*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana , Vol. IX, (1), 27-43.

Curry, H. B.

1977—*Foundations Of Mathematical Logic*. New York: Dover Publications.

Dauben, J. W.

1971—*The trigonometric background to Georg Cantor's theory of sets*. Archive for History of Exact Sciences (Vols. Volume 7, Issue 3, 26. V. 1971, pp. 181-216).

1990—*Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton University Press.

Dou, A.

1970a—*Fundamentos de la matemática*. Barcelona: Labor.

1970b—*Logical and Historical Remarks On Saccheri's Geometry*. Notre Dame Journal of Formal Logic , XI (4).

1992—*Orígenes de la geometría no euclidiana: Saccheri, Lambert y Taurinus*. En Historia de las matemáticas en el siglo XIX. Madrid: Real Academia de Ciencias, Madrid.

1994—*Observaciones Lógicas al Euclides de Saccheri*. En D. F. Santiago Darma, Contra los titanes de la rutina.

Euclides.

300 a.n.e—*Elementos* (Vols. I,II y III). (M. L. Castaños, Trad.) Alejandría: Gredos.

Espitia C.

2009—*La Hipótesis del Ángulo Obtuso en Saccheri*. Sigma, Vol. 9, Núm. 1, pp1-6

Eves, H.

1969—*Estudio de las Geometrías* Vol. Tomo I; (S. B. Siperstein, Trad.)
Union Tipográfica Editorial Hispano Americana.

Ferreirós, J.

1998—*El enfoque conjuntista de las matemáticas*. LA GACETA, Vol. 1
(no. 3), 389-412.

2000—*¿Antnomia o trivalidad? La paradoja de Russell*. Números; (Ejem-
plar dedicado a: Las matemáticas del siglo XX: una mirada en 101
artículos) (43-44), 59-64.

Fraenkel A, Bar-Hillel Y & Levy A.

1973—*Foundations of Set Theory*, Series: Studies in Logic and the Foun-
dations of Mathematics (Book 67), North Holland Publisher; segunda
edition.

Frege, G.

1879—*Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache*.
Halle a.S.: Louis Nebert.

1893—*Grundgesetze der Arithmetik I*, Jena.

1903—*Grundgesetze der Arithmetik II*, Jena.

Garciadiego, A.

1992—*Bertrand Russell y los orígenes de las "paradojas" de la teoría de
conjunto*. México: Alianza Editorial.

Garrido, J. G.

2003—*Verdad Matemática; Introducción a los fundamentos de la matemática*.
España: Nivola.

Geach, P. T.

1956—*On Frege's Way Out*. (P. b. Press, Ed.) Mind , 65 (259), 408-409.

Giovannini, E. N.

2011—*Intuición y Método Axiomático en la Concepción Temprana de
la Geometría de David Hilbert*. Revista Latinoamericana de Filosofía, ,
XXXVII (1).

2013—*Compleitud y Continuidad en "Fundamentos de la Geometría"
de Hilbert: acerca del Vollständigkeitsaxiom*. THEORIA (76), 139-163.

Heijenoort, J. V.

1967—*From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Massachusetts: Harvard University.

Heinz-Dieter E. & Volker Peckhaus (colaborador).

2007—*Ernst Zermelo; An Approach to His Life and Work*. Berlin: Springer.

Heyting A.

1976—*Introducción al intuicionismo*. Madrid, Editorial Teconos.

Hilbert, D.

1996—*Fundamentos de la Geometría (2 ed.)*, Madrid: Editorial CSIC, (F. Cebrián, Trad.).

Hilbert, D.

1950—*The Foundations of Geometry*. (Townsend E. J., Trad.) Illinois: The Open Court Publishing Company.

Kleene, S. C.

1952—*Introduction to Metamathematics*. Amsterdam: Wolters-Noordhoff.

Klement, K. C.

2010—*Russell, His Paradoxes, and Cantor's Theorem: Part II*. Philosophy Compass , 5 (1), 29-41.

Kline, M.

1992—*El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. (Vol. III). Madrid: Alianza.

Körner S.

1967—*Introducción a la filosofía de la matemática*. Siglo XXI Editores Traducción de Carlos Gerhard, México.

Ladrière, J.

1969—*Limitaciones internas de los formalismos*. Madrid: Técno.

Martín, C. M.

1998—*Eudoxo y la Matemática*. Seminario "Protava" De Historia De La Ciencia - Año VII (págs. 235-250). España: I.B. Viera y Clavijo.

- Mir, F.**
2006—*La proposición XXXIII de Saccheri*.
- Moor, G. & Garciadiego, A.**
1981—*Burali-Forti's paradox: A reappraisal of its origins*. *Historia Mathematica* (8), 319-350.
- Peano, G.**
1894—*Notations de logique mathématique*. Turin, Göttingen.
- Pereña, N. L.**
2008—*La Matemática Moderna: Entre el "Formalismo Modificado" de Cavaillès y el "Platonismo Estructural" De Lautman*. Sevilla.
- Quine, W. V.**
1955—*On Frege's Way Out*. *Mind* , 64 (254), 145-156.
- Rang B & Thomas W.**
1981—*Zermelo's Discovery of the Russell Paradox*". *Historia Mathematica* (8), 15-22.
- Russell, B.**
1903—*Los Principios de la Matemática*. (M.-C. Carlos Grimberg, Trad.) Cambridge: Cambridge University Press.
1905—*On Denoting*. *Mind* , 14 (56), 479-493.
1906—*On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types*. *London Mathematical Society Proceedings*. , 4 (1), 29-53.
1908—*Mathematical Logic as Based on the Theory of Types*. *American Journal of Mathematics*, Vol. 30, No. 3, 222-262.
- Sabaté, F. M.**
2006—*La Polémica Intuicionismo-Formalismo En Los Años 20.El Principio De Tercio Excluso*. Barcelona
- Saccheri, G.**
1733—*Euclides Vindicatus* George Bruce Halsted. ed. (G. B. Halsted, Trad. 1992).
- Salas, M. D.**
1999—*Sobre la fundamentación discontinua de las matemáticas*. Saga, Vol. II No.1, 53-64.

Sánchez, A. & Sagarreta, J.

2011—*Estudio epistemológico de las geometrías no-euclidianas*. Educación e Historia , Vol.XIX No.2, 117-132.

Sobociński, B.

1949—*L'analyse de l'antinomie russelliana par Leśniewski*. Methodos , I, 94-107, 220-228, 308-316.

Stonek, B.

2011—*El proceso de formalización de la lógica matemática. La crisis de la geometría euclídea*. Universidad de la República, Facultad de Ciencias.

Tomasini, A.

2002—*Russell y Wittgenstein sobre Contradicciones y Paradojas*. Theoría (13), 83-99.

Torretti, R.

1998—*El paraíso de Cantor: la tradición conjuntista en la filosofía matemática*. Editorial Universitaria, Santiago de Chile.

Urbaneja, P. M.

2008—*La Solución de Eudoxo a la Crisis de los Inconmensurables*. La teoría de la proporción y el método de exhaustión. SIGMA (33), 101-129.

van Atten M. y van Dalen D.

2002— *Intuitionism*, A Companion to Philosophical Logic. Ed. D. Jaquette. Blackwell, Oxford, 513-530.

Whitehead A., Russell B.

1910—*Principia Mathematica* (Vol. I), Cambridge University Press.

Zermelo, E.

1904—*Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann*. Mathematische Annalen , 59, 514-516.

1908—*Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*. Mathematische Annalen , 65 (1), 107-128 .

1908a—*Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*. Mathematische Annalen , 65, 261-281.