UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
"Matemático Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

"TEORÍA ESCALAR Φ^4 PARA N GRANDE EN LA RED"

TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Presenta:

CARLOS ARTURO PÉREZ ALANIS

ASESOR:

DOCTOR EN FÍSICA EDUARDO SALVADOR TUTUTI HERNÁNDEZ

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
"Matemático. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"
U.M.S.N.H

MORELIA, MICHOACÁN, Agosto de 2014

Índice general

1. Introducción **4**

2. Teoría de Campos **8**
2.1. Integrales de camino 8
2.2. Calculo Funcional: Diferenciación 13
2.3. Teoría Cuántica De Campos Integrales de trayectoria de Feynman 15
2.3.1. Teoría Escalar 15
2.3.2. Funcional generatriz 15
2.4. Formulación Euclidiana 19
2.5. Funcional Generatriz 21

3. Campos en la red **23**
3.1. Discretizacion 24
3.2. Teoría escalar con auto-interacción con N campos 29
3.2.1. Autointeracción 30

4. Funciones de Green de dos puntos **31**
4.1. Método de Monte Carlo 35
4.1.1. Integración por Monte Carlo 35
4.1.2. Números aleatorios 36
4.1.3. Ejemplos 37
4.2. Evaluación numérica de la función de Green 40

5. Conclusiones **44**

A. **45**

Resumen

El objetivo general de de esta tesis es la hacer un estudio básico de la teoría de lattice recurriendo a la teoría escalar real en el limite N grande. A pesar de que el trabajo desarrollado en esta tesis dista de ser un estudio avanzado de la teoría de lattice, el desarrollo de esta tesis nos indica el camino para llevar a cabo estudios numéricos que requieren de cómputo de alto rendimiento. Después de la introducción sobre lattice QCD, técnica de estudio no perturbativa de la interacción fuerte a bajas energías, se realiza un estudio breve del formalismo de Integrales de Camino de Feynman, estableciendo la funcional generatriz en el espacio-tiempo euclidiano para la teoría escalar sin interacción. En el siguiente capitulo se lleva a cabo la discretización de la funcional generatriz y se define la acción S con interacción y se realiza su discretización. Posteriormente, estudiamos la función de Green de dos puntos, uno de los objetivos de esta tesis. Encontramos una fórmula general de la función de Green de dos puntos para la teoría escalar con un solo campo ($N = 1$). Esta fórmula es la que se debe utilizar para llevar a cabo el cálculo numérico mediante técnicas de Monte Carlo (ésta es una las principales contribuciones de la tesis). Después se realiza el cálculo de integrales en una dimensión del tipo de integrales que se deben calcular mediante las técnicas de Monte Carlo (las integrales que se deben calcular en la función de Green discretizada son de $D \sim 10^4$ dimensiones).

Palabras clave: Teoría de redes, Teoría escalar, Cálculo numérico

Abstract

The purpose of this thesis is to carry out a basic study of lattice theory by using the scalar theory at large N. Even when the work developed in the thesis is far from being a complete study of lattice theory, our results give the path to carry out high performance numerical studies. After the introduction on lattice theory, which is the technique used to perform non perturbative studies of the strong interactions at low energies, a brief study of path integrals is realized. It is established the generating functional in the Euclidean formalism for the free scalar theory. In the next chapter, it is discretized the generating functional and it is introduced the action S and it is discretized. After of that we studied the two-point Green function, one of the main concerns in this thesis. We found a general formula for the two-point Green function for the scalar theory with $N = 1$. This formula is the one to be used to carry out numerical studies through Monte Carlo techniques (one of the main contributions in this thesis). After of that it is calculated integrals in one dimension by means of Monte Carlo (the integral to be calculated are of $D \sim 10^4$ dimensions).

Keywords: Lattice theory, Scalar theory, Numerical computation

Capítulo 1

Introducción

La cromodinámica cuántica (o simplemente QCD por sus siglas en inglés) [1] forma parte del Modelo Estándar (ME) de las partículas elementales que estudia las interacciones fuertes entre quarks y gluones. Como es conocido, el ME es un modelo teórico, basado en el grupo de simetría de norma $SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ que estudia las interacciones electromagnéticas débiles y fuertes entre las partículas fundamentales que conforman la materia (quarks y leptones) [2]. El entendimiento de las tres fuerzas fundamentales de la naturaleza mencionadas anteriormente,[1] se desarrolló desde finales de los años sesentas e inicios de los setentas con la finalidad de tener una teoría básica de las interacciones fundamentales en general y de las interacciones fuertes en particular. La QCD es una teoría cuántica de campos renormalizable en la que las partículas de la materia son representadas por espinores de Dirac que describen partículas de espín 1/2 (quarks) y los mediadores de las interacciones los cuales son representados a través de campos de norma correspondientes a partículas de espín 1 (gluones). Los gluones al ser descritos por la teoría de norma $SU_C(3)$ poseen características similares a la de los fotones (los mediadores de la interacción electromagnética). La diferencia estriba en que los gluones, a diferencia de los fotones, tienen un número cuántico extra que los diferencia y que hace que interaccionen entre sí: la llamada carga de color (y quizás de allí el nombre de cromodinámica).

El ME ha sido ampliamente corroborado con los experimentos que se llevan a cabo en los aceleradores de partículas a altas energías, y por ello podemos decir que el ME es una teoría correcta (aunque no acabada) de las interacciones entre las partículas elementales. En particular, cabe mencionar que en 2013 se otorgó el premio Nobel de Física a los físicos Peter Higgs y François Englert, por haber anticipado (en 1964) la existencia de la partícula llamada bosón de Higgs, la cual es parte fundamental del ME y hace que la teoría sea consistente con la renormalizabilidad de la misma. La existencia del bosón de Higgs se evidenció en 2012 en el Gran Colisionador de Hadrones

[1] La fuerza gravitacional no está incorporada en este modelo.

(LHC) que se encuentra en la frontera franco-suiza.

Como parte del modelo estándar, gran parte del éxito de la teoría de QCD consiste en que la misma reproduce correctamente el comportamiento de libertad asintótica de los quarks a muy poca distancia y la esclavitud infrarroja a bajas energías. También QCD describe correctamente los fenómenos de hadronización que ocurre en los procesos de colisión de iones pesados a altas energías y el fenómeno de la ruptura de la simetría quiral, estos fenómenos no son, en general, posibles de tratar de manera perturbativa puesto que los métodos analíticos se complican bastante; conforme la energía aumenta, la constante de acoplamiento fuerte α_s va disminuyendo gradualmente y viceversa, esto último provoca que la teoría de perturbaciones se vuelva un método impráctico a la hora de realizar cálculos ya que en el régimen de bajas energías (donde se pone de manifiesto la esclavitud infrarroja la cual consiste en que los quarks se mantengan confinados dentro de los hadrones) la constante de acoplamiento $\alpha_s \approx 1$, surge entonces la necesidad de desarrollar técnicas no-perturbativas eficientes que permitan extraer información física necesaria para poder estudiar los fenómenos de QCD en la región de bajas energías. A fin de comprender el comportamiento de los quarks y los gluones dentro de los hadrones se han desarrollado diferentes técnicas o métodos de estudio, podemos mencionar por ejemplo el modelo de la bolsa del MIT [3] o el método de la expansión $1/N$, donde N es el número de colores [4] o el método de la regla de las sumas (QCD sum rules) [5]. En esencia el modelo de la bolsa del MIT consiste en asumir que los quarks están confinados dentro de una región con la función de onda asociada al sistema que satisface condiciones de frontera adecuadas que simulan las fuerza que confinan a los quarks. En el método de la expansión $1/N$ se pretende tener una teoría que respete las propiedades básicas de QCD donde las correcciones sean del orden de $\mathcal{O}(1/N)$, el problema es que ni siquiera se ha podido establecer el término dominante de $\mathcal{O}(0)$. En el método de la regla de la suma se pretende separar las contribuciones que son perturbativas de las no-perturbativas describiendo a las no-perturbativas mediante un conjunto fenomenológico de reglas efectivas de Feynman. Existen también teorías efectivas que estudian QCD a bajas energías tales como el modelo de Nambu-Jona-Lasinio, teoría de perturbaciones quiral, o la solución de las ecuaciones de Schwinger-Dyson que ofrecen un amplio panorama para este estudio, o aplicaciones más directas como resolver el problema de preservar importantes propiedades tales como quiralidad la cual está presente en la Teoría Cuántica de Campos, no discutiremos más estos estudios ya que los mismos quedan fuera del interés de esta tesis.

Otra de las técnicas para estudiar QCD de manera no-perturbativa es la teoría de redes o lattice theory, dentro del argot de la teoría, la cual es un método útil para el estudio de QCD a bajas energías, con una cota superior de algunos pocos GeV, esta técnica es uno de los objetos de interés en esta tesis. lattice nos permite calcular numéricamente muchas cantidades físicas y provee un camino claro y simple (hasta donde la capacidad de cómputo nos permite) para estudiar QCD no perturbativa [6]. El modelo de lattice originalmente se desarrolló en el contexto de la física de la materia condensada, donde los átomos de un cristal forman automáticamente una red discreta.Para llevar a cabo las simulaciones numéricas usualmente se recurre a el método de Monte Carlo el cual

ha sido el más fructífero, lattice conjuntamente con el método de Monte Carlo nos permite atacar distintos problemas, algunos ejemplos son: la posibilidad de estudiar Yang-Mills QCD (es decir QCD sin la presencia de quarks [7]), calcular el espectro de energía de los gluones [8] así como las masas de los mesones y bariones mas ligeros [9] y calculo de las masas de los quarks [10], explicar porque los nucleones pueden existir por debajo de la escala de Planck [11], investigar la estructura topológica en el vacío de QCD [12], así como los mecanismos responsables del confinamiento[13] y ruptura espontanea de simetría quiral [14], también es posible analizar el desarrollo de QCD a altas temperaturas y tratar la naturaleza de las transiciones de fase [15], así como un obtener un resultado más preciso de la constante de acoplamiento α_s. En general, debido a la discretización del modelo a estudiar mediante técnicas numéricas, cualquier problema de la física computacional, se convierte automáticamente en un modelo de lattice.

Lattice QCD en los últimos años se ha sido el método mas empleado para estudiar QCD en el régimen no-perturbativo, sin embargo, se encuentran ciertas dificultades numéricas durante el estudio. Por un lado se encuentran los errores numéricos acumulados que puede arrojar el método de Montecarlo durante los ciclos de cálculo y se hace necesario un poder de cómputo bastante grande para obtener resultados precisos. En el cálculo de ciertas masas de partículas también se presentan dificultades técnicas, esto debido a que los valores típicos del espaciamiento son de entre $a \sim 0.05$-0.1 fm (1 fm$=1 \times 10^{-15}$), es decir, $2 - 4$ GeV y en promedio la longitud espacial de lattice es L $\sim 1 - 2$ fm, es decir, $L^{-1} \sim 100 - 200$ MeV, a fin de obtener resultados significativos, los cálculos se realizan con un conjunto de parámetros tales que $L^{-1} \ll m \ll a^{-1}$; cálculos con masas del orden de a^{-1} muestran errores sistemáticos fuera de control, consecuentemente, para resultados óptimos con los quarks, se acotan las masas desde ~ 50 MeV hasta ~ 2.5 GeV, significa entonces que solamente los quarks charm y strange pueden ser considerados directamente para lattice y para estudiar los quarks up, down y bottom, es necesario hacer una extrapolación [7]. Aun así lattice ha sido un método bastante efectivo ya que gracias a ello se han podido confirmar algunas propiedades de los hadrones dentro los experimentos, tales como masas, constantes de decaimiento, números cuánticos, etc, [9, 13] con bastante precisión, así como predecir estados hadrónicos que aún no han sido observados experimentalmente. Tales resultados pueden proveer ayuda para los físicos teóricos dedicados a la fenomenología y para futuros experimentos.

El estudio de lattice en QCD está basado en la formulación de integrales de trayectoria de Feynman, para ello se pasa de un espacio-tiempo continuo 4-dimensional a un hipercubo discreto de volumen V de igual dimensión formando así una red donde a es el espaciamiento que existe entre dos puntos de la red, y en general, se imponen condiciones de periodicidad en las fronteras del hipercubo, los resultados físicos se obtienen tomando $a \to 0$, y cuando $V \to \infty$, para esto se requiere un gran poder de computo. Cabe mencionar que existen distintas maneras de discretizar el espacio-tiempo, [16, 17], pero estas se descartan ya que presentan un gran reto computacional. Recientemente se ha planteado la idea de considerar hipercubos con diferente espaciamiento entre cada uno de los puntos con el fin de reducir el margen de error en los cálculos.

En esta tesis se hace un estudio breve de la teoría de lattice, mediante la teoría escalar $\lambda\phi^4$ en el límite de N grande. Comenzamos en el capitulo 2 con la formulación de la funcional generatriz $\mathcal{Z}$, base crucial para el ulterior estudio de las funciones de Green, utilizamos el formalismo de las integrales de trayectoria de Feynman en el contexto de la Teoría Cuántica de Campos y haciendo uso del cálculo diferencial funcional determinamos la función de Green de dos puntos. Posteriormente, se continua con un estudio de la formulación pseudo-euclidiana de la Teoría Cuántica de Campos aplicado a las funcionales generatrices, esto último con el fin de evitar en la funcional generatriz, exponenciales con fases complejas, que pueden arruinar la convergencia de las integrales de camino, ya que en el espacio de Minkowski resultan exponenciales complejas en las integrales de camino. En el capitulo 3 se procede a discretizar el espacio-tiempo euclidiano y se toman en cuenta aproximaciones de diferencias finitas y se define la Lagrangiana para la teoría escalar $\lambda\phi^4$ con N campos. Todo esto como un estudio introductorio a la teoría de lattice.

En el capitulo 4, con el fin de obtener las funciones de Green de dos puntos se introducen N fuentes en la Lagrangiana, con el objetivo de tener una expresión definitiva del propagador.

Por último en el capitulo 5, mostramos los resultados y conclusiones que se obtuvieron en este trabajo de tesis.

Capítulo 2

Teoría de Campos

2.1. Integrales de camino

La formulación de Integrales de Caminos o de Trayectoria (Path Integrals por su nombre en Inglés) de la Mecánica Cuántica fue desarrollada por Richard Feynman en 1948, la cual es una descripción de la Teoría Cuántica que expresa la amplitud de probabilidad de un estado inicial a un estado final en términos de la acción clásica. En la formulación de Feynman, la noción de una sola historia única para un sistema o partícula se reemplaza por la suma (integral funcional) sobre todas las historias posibles para tal sistema. El observable básico de este enfoque de mecánica cuántica es la probabilidad de que una partícula se propague entre dos puntos espaciales en un tiempo dado, mediante la integral de caminos. Esta cantidad es calculada asignando una amplitud a cada trayectoria que une ambos puntos en ese tiempo, y sumando todas estas.

Consideremos la función de onda $\psi(q_i, t_i)$, la cual nos da la amplitud de probabilidad de encontrar la partícula a una posición q_i a un tiempo t_i, entonces podemos construir una función de onda a un tiempo posterior y a una posición distinta introduciendo una transformación con el nombre de propagador. Es aquí donde introducimos la idea de que todos los caminos son posibles para ir de

$$(q_i, t_i) \longrightarrow (q_f, t_f),$$

y con esta idea se construye el propagador con el cual podemos describir la evolución del sistema. Entonces, dada $\psi(q_i, t_i)$, construimos esta misma función de onda a un tiempo posterior con una posición distinta

$$\psi(q_f, t_f) = \int_{-\infty}^{\infty} k(q_f, t_f; q_i, t_i)\psi(q_i, t_i)dq_i, \tag{2.1}$$

donde $k(q_f, t_f; q_i, t_i)$ es llamado el propagador de Feynman o la amplitud de probabilidad de tran-

sición de $(q_i, t_i) \longrightarrow (q_f, t_f)$. Podemos calcular la norma al cuadrado obteniendo

$$\begin{aligned} P(q_f, t_f; q_i, t_i) &= \mid k(q_f, t_f; q_i, t_i) \mid^2 \\ &\equiv \text{probabilidad de transición } (q_i, t_i) \longrightarrow (q_f, t_f). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ahora, dividamos el intervalo de tiempo en dos sub-intervalos, introduciendo un tiempo t arbitrario contenido en el intervalo de tiempo inicial:

$$[t_i, t_f] = [t_t, t] \cup [t, t_f],$$

y aplicando a la función de onda, obtenemos

$$\begin{aligned} \psi(q_f, t_f) &= \int k(q_f, t_f; q, t) k(q, t; q_i, t_i) \psi(q_i, t_i) dq dq_i \\ &= \int k(q_f, t_f; q, t) \psi(q, t) dq. \end{aligned} \tag{2.3}$$

De esta forma, la transición $(q_i, t_i) \longrightarrow (q_f, t_f)$, puede ser tomada como el resultado de la transición de (q_i, t_i) a todo tiempo intermedio, seguido por la transición $(q, t) \longrightarrow (q_f, t_f)$. Para ilustrar un poco mas, tomemos el siguiente ejemplo muy sencillo: consideremos una fuente que emita partículas situada en la posición 1, delante de esta se encuentra una barrera en la posición 2 con un par de rendijas etiquetadas como 2A y 2B respectivamente, y delante de esta, en la posición 3, una pantalla el cual se va mostrando un patrón de interferencia cada vez que pasan las partículas.

Con el formalismo visto anteriormente, podemos calcular la amplitud de probabilidad de la partícula de un punto a otro:

$$\begin{aligned} k(2A; 1) &\equiv \text{amplitud de probabilidad de que la partícula pase de la fuente a la rendija 2A,} \\ k(3; 2A) &\equiv \text{amplitud de probabilidad de que la partícula pase de la rendija 2A a la pantalla,} \end{aligned}$$

La amplitud de probabilidad de que la partícula pase de la posición 1 a la pantalla dada por

$$k(3, 1) = k(3; 2A) k(2A; 1) + k(3; 2B) k(2B; 1), \tag{2.4}$$

donde la probabilidad de transición resulta

$$\mid P(3, 1) \mid = \mid k(3, 1) \mid^2 = \mid k(3; 2A) k(2A; 1) \mid^2 + k^*(3; 2B) k^*(2B; 1), \tag{2.5}$$

donde los términos $k^*(3; 2B) k^*(2B; 1)$, se interpretan como fenómeno de interferencia. Este ejemplo es nada menos que el principio de Fresnel-Huygens de caminos, el cual Feynman relaciono con su integral de caminos, lo formulo de la siguiente manera [22]: "Si se conoce la amplitud de una onda

en una superficie dada, la amplitud en un punto cercano puede obtenerse como la suma de las contribuciones de todos los puntos de la superficie, donde cada contribución sufre un desfase proporcional al tiempo que le costara a la luz llegar de la superficie al punto siguiendo el rayo luminoso en óptica geométrica". Enunciemos un lema que nos será de gran utilidad.

Lema: Dada la amplitud de probabilidad $k(q_f, t_f; q_i, t_i)$, es equivalente tener

$$k(q_f, t_f; q_i, t_i) = \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle. \tag{2.6}$$

La demostración es muy simple. Tenemos que la función de onda se puede expresar como el producto interno de un vector en el espacio de Hilbert (bra) por otro vector (ket) en ese mismo espacio en el esquema de Schrödinger

$$\psi(q, t) = \langle q | \psi, t \rangle_s. \tag{2.7}$$

El ket en el esquema de Schrödinger se relaciona con un ket en el esquema de Heisenberg. La transición de un esquema al otro se realiza mediante una transformación unitaria:

$$|\psi, t\rangle_s = e^{\frac{iHt}{\hbar}} |\psi\rangle_H, \tag{2.8}$$

donde los subíndices S y H se refieren a los kets en el esquema de Schödinger y de Heisenberg respectivamente. De esta forma el estado de una partícula en la posición q al tiempo t se puede expresar equivalentemente en el esquema de Heisenberg o en el de Schrödinger. Definiendo ahora los vectores dentro del esquema de Heisenberg

$$|q, t\rangle = e^{iHt/\hbar} |q\rangle, \ \langle q, t| = \langle q | e^{iHt/\hbar}. \tag{2.9}$$

Entonces, de esta manera, tenemos que la función de onda se puede representar en un esquema y otro como:

$$\begin{aligned} \psi(q, t) &= \langle q, t | \psi \rangle_H \\ &= \langle q | \psi, t \rangle_S. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Tomando en cuenta la completes de los vectores del espacio de Hilbert, la función de onda se puede escribir como

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | \psi \rangle &= \int \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle \langle q_i t i | \psi \rangle dq_i \\ &= \int \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle \psi(q_i, t_i) dq_i \\ &= k(q_f, t_f; q_i, t_i) \psi(q_i, t_i) dq_i. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Lo que tenemos básicamente es la suma de todas las posibles trayectorias que puede tomar la partícula desde una posición inicial a un tiempo inicial hasta una posición y tiempo final. La integral correspondiente se toma sobre todas las posibles trayectorias de la partícula.

Puesto que cada segmento $(q_j, t_j; q_{j-1}, t_{j-1})$ puede ser dividido en segmentos mas pequeños, debido a los "quiebres" en las trayectorias en estos pequeños intervalos, a pesar de que las trayectorias son continuas no se puede definir la derivada y, consecuentemente, las trayectorias son realmente cadenas de Markov. Definamos ahora el intervalo de tiempo entre dos tiempos consecutivos

$$\tau = \Delta t = t_{j+1} - t_j. \tag{2.12}$$

Se tiene entonces

$$\langle q_{j+1} t_{j+1} | q_j t_j \rangle = \langle q_{j+1} | e^{-\frac{i\hat{H}\tau}{\hbar}} | q_j \rangle, \tag{2.13}$$

Haciendo un desarrollo en series de potencias de la la exponencial y manteniendo hasta términos lineales obtenemos

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} t_{j+1} | q_j t_j \rangle &= \langle q_{j+1} | 1 - \frac{i\hat{H}\tau}{\hbar} + O(\tau^2) | q_j \rangle \\ &= \delta(q_{j+1} - q_j) - \frac{i\tau}{\hbar} \langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Por otro lado, suponemos que el operador de energía del sistema se puede expresar como:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}), \tag{2.15}$$

y sustituyendo en el segundo termino de la Ec. (2.14) obtenemos

$$\langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle = \langle q_{j+1} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | q_j \rangle + \langle q_{j+1} | \hat{V}(\hat{q}) | q_j \rangle. \tag{2.16}$$

Para el primer termino, usamos la completez de los vectores en el espacio de Hilbert

$$\int |p\rangle\langle p| dp = 1, \int |q\rangle\langle q| dq = 1.$$

Entonces, al sustituir, se obtiene

$$\langle q_{j+1} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | q_j \rangle = \int dp' dp \langle q_{j+1} | p' \rangle \langle p' | \frac{\hat{p}^2}{2m} | p \rangle \langle p | q_j \rangle, \tag{2.17}$$

pero sabemos que

$$\langle q | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipq}{\hbar}}, \tag{2.18}$$

por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned}\langle q_{j+1}|\frac{\hat{p}^2}{2m}|q_j\rangle &= \int dp' \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{iq_{j+1}p'}{\hbar}} \frac{p^2}{2m}\delta(p'-p)\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{-iq_jp}{\hbar}} \\ &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i(q_{j+1}-q_j)p}{\hbar}} \frac{p^2}{2m}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Para el segundo termino en la Ec. (2.16), utilizamos el hecho que la variable dinámica $\hat{q}$ esta dada

$$\hat{q} = \frac{q_{j+1}+q_j}{2} = \bar{q_j}, \tag{2.20}$$

entonces

$$\langle q_{j+1}|\hat{V}(\hat{q})|q_j\rangle = V(\bar{q}_j)\langle q_{j+1}|q_j\rangle = V(\bar{q}_j)\delta(q_{j+1}-q_j), \tag{2.21}$$

y utilizando la representación Delta de Dirac en su forma integral y los resultados que obtuvimos previamente, tenemos finalmente que:

$$\begin{aligned}\langle q_{j+1}t_{j+1}|q_jt_j\rangle &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{(q_{j+1}-q_j)\frac{p}{\hbar}} - \frac{i\tau}{\hbar}\int \frac{dp}{2\pi} V(\bar{q}) e^{i(q_{j+1}-q_j)\frac{p}{\hbar}} - \frac{i\tau}{\hbar}\int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{i(q_{j+1}-q_j)\frac{p}{\hbar}}\frac{p^2}{2m} + O(\tau^2) \\ &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{(q_{j+1}-q_j)\frac{p}{\hbar}}\left[1 - \frac{i\tau}{\hbar}\left(V(\bar{q}) + \frac{p^2}{2m} + O(\tau^2)\right)\right], \end{aligned} \tag{2.22}$$

donde el termino entre paréntesis corresponde al desarrollo de la exponencial $e^{\frac{i\tau}{\hbar}H(p,\bar{q})}$. De manera mas simplificada, obtenemos

$$\langle q_{j+1}t_{j+1}|q_jt_j\rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}[(q_{j+1}-q_j)p - \tau H(p,\hat{q})]}. \tag{2.23}$$

Por otro lado regresamos a la relación de completez utilizada repetidas veces y tomando el limite cuando $n \longrightarrow \infty$, al sustituir en la ecuación (2.22), obtenemos

$$\langle q_ft_f|q_it_i\rangle = \lim_{n\to\infty}\int \Pi_{j=1}^n dq_j \Pi_{j=0}^n \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\left[\sum_{j=0}^n((q_{j+1}-q_j)p_j - \tau H(p_j,\bar{q_j}))\right]}. \tag{2.24}$$

A fin de simplificar mas la expresión anterior, tomamos las siguientes consideraciones: Las coordenadas q_0 y q_{n+1} las tomamos como $q_0 = q_i$ y $q_{n+1} = q_f$, las cuales por supuesto son funciones dependientes del tiempo, $q_i = q(t_i)$ y $q_f = t(t_f)$, y tomamos el limite $n \to \infty$ y $\tau \to 0$. Entonces la Ec. (2.24) se convierte en

$$\langle q_ft_f|q_it_i\rangle = \int \frac{Dp(t)Dq(t)}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt(p\dot{q} - H(p,q))}, \tag{2.25}$$

la cual nos da una expresión para la probabilidad de transición de una partícula de un estado con posición inicial q_i y tiempo inicial t_i a un estado final con posición final q_f y tiempo posterior final $(t_f > t_i)$, que se expresa como una integral de camino de Feynman y se toma en cuenta todas las posibles trayectorias clásicas que van del punto inicial (q_i, t_i) al punto final (q_f, t_f) .

2.2. Calculo Funcional: Diferenciación

Desde un punto de vista de la mecánica Newtoniana, podemos pensar que existen dos tipos sistemas mecánicos: aquellos con un número finito (pequeño) de grados de libertad y aquellos con un número muy grande (del orden del número de Avogadro) e incluso un número infinito de grados de libertad. Como ejemplo del primer caso podemos mencionar el movimiento de una partícula (con tres grados de libertad) o de un cuerpo rígido (con seis grados de libertad) en el espacio. Por otro lado, los sistemas físicos con un gran número de grados de libertad son descritos por campos vectoriales donde asocia un vector a cada punto del espacio. Un ejemplo de esto es la velocidad hidrodinámica de un fluido. También, junto con este campo vectorial existen también campos escalares donde asocia un valor a cada punto del espacio, por ejemplo la distribución de masa en el mismo fluido o la temperatura o la presión que pueden variando punto a apunto en el fluido. Otros ejemplos de algunos campos clásicos familiares son los campos electromagnéticos ($\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$) o el movimiento de una cuerda vibrante en una dimensión descrito por el campo $\phi(\mathbf{x}, t)$, el cual describe el desplazamiento de la cuerda. Entonces, mientras las coordenadas de una partícula dependen solamente del tiempo, los campos dependen de las coordenadas espaciales y del tiempo.

Es claro entonces que al tratar con sistemas mecánicos con muchos grados de libertad, estamos tratando con variables de funciones continuas. Estos sistemas mecánicos pueden ser estudiados mediante principios variacionales, donde se trata de minimizar la acción. La acción, al ser una regla de asociación entre funciones y números reales resulta ser lo que se llama una funcional. Tomemos por ejemplo el caso de un sistema con un solo grado de libertad, la regla de asociación entre las trayectorias y los números reales es mediante la siguiente expresión

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt, \tag{2.26}$$

donde se mantiene fijo los tiempos inicial y final t_i y t_f y la restricción de que todas las trayectorias pasen por estos puntos. A diferencia de una función usual, cuya regla de asociación es entre números el valor de la acción depende de la función $q(t)$ que se sustituya en la integral en la Ec. (2.26) .

La noción de derivada de funciones que dependen de una o varias variables puede extenderse al caso de funcionales de forma natural. Consideramos una funcional $F[f(x)]$. La derivada funcional

queda definida mediante el proceso:

$$\frac{\delta F}{\delta f(y)} \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F[f(x) + \epsilon\delta(x-y)] - F[f(x)]}{\epsilon}. \tag{2.27}$$

Con esta definición somos capaces de mostrar algunos ejemplos.

1. $$F[f(x)] = \int f(x)dx, \tag{2.28}$$

   calculando la derivada funcional dada por (2.27), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int \left(f(x) + \epsilon\delta(x-y)\right) dx - \int f(x)dx}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon \int \delta(x-y)}{\epsilon} \\ &= \begin{cases} 1 & : \text{ y } \epsilon \text{ al dominio de integración} \\ 0 & : \text{ otro caso} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.29}$$

2. $$F[J(x)] = \int G(z,x)J(x)dx, \tag{2.30}$$

   de igual manera aplicando la definición obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta J(y)} &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int G(z,x)\left[J(x) + \epsilon\delta(x-y)\right] dx - \int G(z,x)J(x)dx}{\epsilon} \\ &= G(z,y). \end{aligned} \tag{2.31}$$

3. Y por ultimo

   $$F[J(x)] = J(x), \tag{2.32}$$

   de igual manera obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta J(y)} &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(J(x) + \epsilon\delta(x-y)) - J(x)}{\epsilon} \\ &= \delta(x-y). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Con esto damos por terminado este breve estudio al calculo diferencial funcional ya que posteriormente nos sera da gran utilidad para calcular la función de Green de dos puntos.

2.3. Teoría Cuántica De Campos Integrales de trayectoria de Feynman

2.3.1. Teoría Escalar

En física teórica, la teoría escalar puede referirse a una teoría cuántica o clásica de campos escalares. Un campo que es invariante bajo transformaciones de Lorentz es llamado escalar, en contraste con un campo vectorial o tensorial que se transforman como tales bajo las transformaciones de Lorentz. Los campos escalares son característicos de partículas de spin cero, un ejemplo muy claro es el famoso bosón de Higgs (partícula neutra) y hasta el momento ha sido la primera partícula escalar elemental en ser descubierta en la naturaleza.

Hasta este momento no hemos tomado en cuenta la posibilidad de la creación y aniquilación de partículas en el vació mediante cuantización por integrales de trayectoria de Feynman. Para esta cuestión, por allá en el año de 1969 Schwinger introdujo un método para considerar la posibilidad de creación y aniquilación de partículas. Con esta finalidad hacemos el siguiente cambio en la Lagrangiana del sistema

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + J(t)q(t), \tag{2.34}$$

donde el termino extra contiene la fuente, J, que da origen a posibilidad de tener la creación y aniquilación de partículas. A partir de la Lagrangiana definida en la Ec.(2.34) podemos pasar de la mecánica cuántica a la teoría cuántica de campos, pasando de la variable de un solo grado de libertad q al campo ϕ (que representa un número infinito de grados de libertad) mediante la sustitución $q(t) \longrightarrow \phi(x)$. Debemos mencionar que este proceso es solo esquemático pero que está bien estudiado en diferentes textos especializados (ver, por ejemplo[1]) y no discutiremos más este punto que se sale del alcance de esta tesis y solo usamos el resultado de la funcional generatriz que se muestra enseguida.

2.3.2. Funcional generatriz

Consideremos la funcional generatriz para campos escalares [1]:

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\phi(x) e^{i\int d^4x \left[\mathcal{L}(\phi)+J(x)\phi(x)+\frac{i}{2}\epsilon\phi^2(x)\right]}, \tag{2.35}$$

donde el término $\frac{i}{2}\epsilon\phi^2(x)$ nos asegura la convergencia de la funcional generatriz. Ahora consideramos el término $\int d^4x(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)$ e integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned}\int d^4x(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) &= \int d^4x(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \int d^4x\phi\Box\phi \\ &= \int_{hipersuperficie} ds_\mu(\phi\partial^\mu\phi) - \int d^4x\phi\Box\phi, \end{aligned} \tag{2.36}$$

donde hemos usado el teorema de la divergencia para pasar de la primera integral a una integral de hipersuperficie, y estamos suponiendo que cuando $x \to \pm\infty$, el campo $\phi \to 0$, es decir, se anula en el infinito, por lo tanto resulta:

$$\int d^4x(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) = -\int d^4x\phi\Box\phi. \tag{2.37}$$

Podemos ahora re-escribir la funcional generatriz de la siguiente manera:

$$\mathcal{Z}_0[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-i\int\left[\frac{1}{2}\phi(\Box+m^2-i\epsilon)\phi-\phi J\right]d^4x}, \tag{2.38}$$

donde el subíndice 0 en la funcional generatriz $\mathcal{Z}_0$ indica que se trata de la funcional generatriz para un campo libre. Para poder evaluar $\mathcal{Z}_0$ hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned}\phi(x) \to \phi^{'}(x) &= \phi(x) + \phi_0(x) \\ \phi(x)\left(\Box + m^2 - i\epsilon\right)\phi(x) &\to \phi^{'}(x)\left(\Box + m^2 - i\epsilon\right)\phi^{'}(x) \\ &= \left(\phi(x) + \phi_0(x)\right)\left(\Box + m^2 - i\epsilon\right)\left(\phi(x) + \phi_0(x)\right), \end{aligned} \tag{2.39}$$

donde uno de los términos, por ejemplo, el que se muestra cumple con la igualdad:

$$\int d^4x\phi_0(x)\left(\Box + m^2 - i\epsilon\right)\phi(x) = \int d^4x\phi(x)\left(\Box + m^2 - i\epsilon\right)\phi_0, \tag{2.40}$$

y al aplicarlo a todo el termino del exponencial de la ecuación (2.38), obtenemos

$$\int d^4x\left(\frac{1}{2}\phi(x)\left[\Box + m^2 - i\epsilon\right]\phi(x) - \phi(x)J(x)\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{2}\phi(x)\left(\Box + m^2 - i\epsilon\right)\phi d^4x \\
&+ \int \frac{1}{2}\phi_0\left(\Box + m^2 - i\epsilon\right)\phi_0 \\
&+ \int d^4x\phi(x)\left(\Box + m^2 - i\epsilon\right)\phi_0(x) \\
&- \int d^4x\phi(x)J(x) - \int d^4x\phi_0(x)J(x). \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

Elegimos ahora $\phi_0(x)$ tal que satisfaga la ecuación

$$\left(\Box + m^2 - i\epsilon\right)\phi_0(x) = J(x), \qquad (2.42)$$

y entonces la ecuación (2.41) se puede escribir como

$$
\begin{aligned}
\int d^4x\left(\frac{1}{2}\phi(x)\left[\Box + m^2 - i\epsilon\right]\phi(x) - \phi(x)J(x)\right) &= \int d^4x\frac{1}{2}\phi(x)\left[\Box + m^2 - i\epsilon\right]\phi(x) \\
&- \int d^4x\frac{1}{2}J(x)\phi(x). \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

La solución particular para $\phi_0(x)$ es

$$\phi_0(x) = -\int d^4y\triangle_f(x-y)J(y), \qquad (2.44)$$

donde $\triangle_f(x-y)$ es el propagador de Feynman que satisface la ecuación

$$\left(\Box - m^2 - i\epsilon\right)\triangle_f(x) = -\delta^{(4)}(x). \qquad (2.45)$$

Regresando a la ecuación (2.38), con estos resultados obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}_0 &= \int \mathcal{D}\phi(x)e^{-i\left[\int \frac{1}{2}\phi(x)\left(\Box + m^2 - i\epsilon\right)\phi(x) + \frac{1}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\triangle(x-y)J(y)\right]} \\
&= e^{-\frac{1}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\triangle(x-y)}\int \mathcal{D}\phi(x)e^{-i\int d^4x\frac{1}{2}\phi(x)\left[\Box + m^2 - i\epsilon\right]\phi(x)}. \qquad (2.46)
\end{aligned}
$$

Si definimos el factor (de normalización) como

$$N = \int \mathcal{D}\phi(x)e^{-i\int d^4x\frac{1}{2}\phi(x)[\Box + m^2 - i\epsilon]\phi(x)}, \qquad (2.47)$$

entonces finalmente obtenemos

$$\mathcal{Z}_0 = Ne^{-\frac{1}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\triangle(x-y)}. \tag{2.48}$$

La solución de la ecuación (2.45) se puede expresar como

$$\triangle_f(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2-m^2+i\epsilon}, \tag{2.49}$$

donde el integrando contiene un polo, llamado el polo del propagador y este da origen a la relación de energía-momento:

$$k_0 = \pm\sqrt{k^2+m^2} \mp i\delta = \pm E \mp i\delta.$$

Ahora calculemos la derivada funcional de la funcional generatriz

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{Z}_o}{\delta J(z)} &= \mathcal{Z}_o[J]\lim_{\epsilon\to\infty}\frac{1}{\epsilon}\left[1-\frac{i}{2}\epsilon\int d^4xd^4y\delta_4(x-z)\triangle_F(x-y)J(y)+O^2(\epsilon)\right] \\
&\times \left[1-\frac{i}{2}\epsilon\int d^4xd^4yJ(x)\triangle_F(x-y)\delta(y-z)\right] \\
&\times \left[1-\frac{i}{2}\epsilon^2\int d^4xd^4y\triangle_F(x-y)\delta(x-z)\delta(y-z))-1\right] \\
&= \mathcal{Z}_o[J]\left[-\frac{i}{2}\int d^4y\triangle_F(z-y)J(y)-\frac{i}{2}\int d^4xJ(x)\triangle_F(x-z)\right] \\
&= \left(i\int d^4x\triangle_F(z-x)J(x)\right)\mathcal{Z}_o[J],
\end{aligned} \tag{2.50}$$

re-acomodando términos obtenemos finalmente

$$\frac{1}{i\mathcal{Z}_o[J]}\frac{\delta\mathcal{Z}_o[J]}{\delta J[z]} = \int d^4x\triangle_F(z-x)J(x). \tag{2.51}$$

Sacamos una vez mas la derivada funcional de la funcional generatriz , obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2\mathcal{Z}_0[J]}{\delta J[w]\delta J[z]} &= \frac{\delta}{\delta J[w]}\left[\left(i\int d^4x\triangle_F(z-x)J(x)\right)\mathcal{Z}_0[J]\right] \\
&= \left(i\triangle_F(z-w)\mathcal{Z}_0[J]+i\int d^4x\triangle_F(z-x)J(x)\right)|_{J=0},
\end{aligned} \tag{2.52}$$

donde es claro que evaluando en $J(x)=0$, el segundo termino resulta ser nulo y obtenemos una expresión final

$$\frac{1}{i\mathcal{Z}_0[J]}\frac{\delta^2\mathcal{Z}_0[J]}{\delta J[w]\delta J[z]}|_{J=0} = \triangle_F(w-z). \tag{2.53}$$

Esta ultima ecuación nos define la función de Green de dos puntos. Es importante señalar que estos cálculos son llevados a cabo en el espacio de Minkowski, donde la funcional generatriz contiene exponenciales complejas como argumentos de las integrales de camino. A fin de evitar esto y con la ventaja para nuestro propósito, continuaremos nuestro estudio con una formulación pseudo-euclideana de la Teoría Cuántica de Campos. Este estudio se aplica a las funcionales generatrices con el fin de evitar en la funcional generatriz, exponenciales con fases complejas, que pueden arruinar la convergencia de las integrales de camino.

2.4. Formulación Euclidiana

Consideremos la métrica de Minkowski

$$ds_M^2 = (dx^o)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \tag{2.54}$$

para fines prácticos definamos

$$x^4 \equiv it = ix^0 \Rightarrow dx^0 = -idx^0,$$

entonces, la nueva métrica con esta nueva variable resulta:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{4} (dx^i)^2 \\ &= -ds_E^2. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Definimos ademas

$$k^4 = ik^0, \tag{2.56}$$

$$k^i = k_E^i, \tag{2.57}$$

el cual el tetra-vector resulta

$$\begin{aligned} k_\mu^2 &= (k^0)^2 - (k_x)^2 - (k_y)^2 - (k_z)^2 \\ &= k_4^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 \\ &= -k_E^2, \end{aligned} \tag{2.58}$$

notemos ademas

$$x_E^\mu = x_\mu^E,$$

es decir, no hay distinción entre componentes covariantes y contravariantes de los tetra-vectores. Con esto en mente el diferencial de volumen del espacio-tiempo resulta:

$$\begin{aligned} d^4x &= dx_0 dx dy dz \\ &= -id^4x_E. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Mientras que el hiper-volumen en el espacio de momentos resulta:

$$d^4k = -id^4k_E. \tag{2.60}$$

Podemos entonces escribir los términos de la siguiente manera

$$k^2 - m^2 + i\epsilon \longrightarrow -k_E^2 - m^2 + i\epsilon$$

$$\begin{aligned} k \cdot x &= k_o x_o - \vec{k} \cdot \vec{x} \\ &= (ik_4)(ix_4) - k_i x^i \\ &= -\vec{k}_E \cdot \vec{x}_E. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Entonces, el propagador de Feynman en el espacio euclidiano en función de estas nuevas variables resulta ser

$$\triangle_F(x) = i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_E \cdot x_E}}{k_E^2 + m^2}. \tag{2.62}$$

Notemos que el polo del propagador se encuentra ahora en

$$k_o = \pm i\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \tag{2.63}$$

Enseguida analicemos como cambia el campo $\phi(\vec{x})$ en el espacio euclidiano

$$\phi_M(x^o, \vec{x}) \quad \longrightarrow \quad \phi(-ix^4, \vec{x}) \longrightarrow \phi_E(\vec{x}, x^4). \tag{2.64}$$

de la misma forma las derivadas parciales se transforman como

$$\begin{aligned} \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \\ &\Rightarrow \left(\frac{\partial}{i\partial x_4}, \nabla\right). \end{aligned} \tag{2.65}$$

Entonces el DAlambertiano aplicado a $\phi(\vec{x})$ resulta:

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\right) \\ &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_o}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^o}\right) - (\nabla\phi)\cdot(\nabla\phi) \\ &= -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^4}\right) - (\nabla\phi)\cdot(\nabla\phi) \\ &= -\left(\partial_\mu\phi\right)_E\left(\partial_\mu\phi\right)_E, \end{aligned} \tag{2.66}$$

entonces resulta

$$(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) \to (\partial_\mu\phi)^2_E. \tag{2.67}$$

Con estos cambios podemos determinar la funcional generatriz en el espacio euclidiano.

2.5. Funcional Generatriz

Re-escribiendo la funcional generatriz en (3.28) en términos de las variables euclideas obtenemos

$$\mathcal{Z}_{0E}[J] = \int \mathcal{D}\phi(x) e^{-\int\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2+\frac{1}{2}m^2\phi^2-J\phi\right)d^4x_E}. \tag{2.68}$$

Con la finalidad de calcular esta integral funcional para el campo escalar, primero se regresa al caso en que los campos están evaluados en un conjunto finito pero muy grande de puntos espacio-temporales, en estar caso los campos son considerados como variables de integración [1]. Para ello primero tomamos en cuenta el resultado conocido

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \tag{2.69}$$

y generalizando esta ultima integral obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\cdots dx_n e^{\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j} = \sqrt{\frac{\pi^n}{detA}}, \tag{2.70}$$

donde hemos definimos la matriz A cuyas entradas son $[A]_{ij} = a_{ij}$ y $a_{ii}<0, \forall i$. Notemos que el argumento de la exponencial del integrando en (2.70) es una forma cuadrática. Podemos entonces hacer una cambio de coordenadas mediante una transformación de similaridad, tal que

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots. \tag{2.71}$$

Con la transformación de similaridad en cuestión es

$$XU^{-1}UAU^{-1}UX \text{ con } Y = UX.$$

El Jacobiano de la transformación es simplemente

$$dy_1 \cdots dy_n = dx_1 \cdots dx_n, \tag{2.72}$$

Debido a que el determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de su diagonal. Regresando a la Ec. (2.68) y utilizando esto últimos resultados obtenemos la funcional generatriz en el espacio euclidiano

$$\mathcal{Z}_{\prime E} = \int \mathcal{D}\phi e^{\int \frac{1}{2}\phi(\Box + m^2)\phi d^4x_E - \int J\phi d^4x_E|_{0=0}}. \tag{2.73}$$

Notemos que al tomar el limite cuando $N \to \infty$, por supuesto que el segundo termino es nulo, llegamos a una expresión semejante a la Ec. (2.70)

$$\mathcal{Z}_{\prime E} = \lim_{N\to\infty} \sqrt{\frac{\pi^N}{det\frac{1}{2}(\Box + m^2)}}. \tag{2.74}$$

En el siguiente capitulo procederemos a definir los campos en términos de la discretización y redefinir la acción S en el espacio euclidiano.

Capítulo 3

Campos en la red

Consideremos un subconjunto del espacio-tiempo cuya región en las cuatro coordenadas (x, y, z, t) están acotadas por rectas mutuamente perpendiculares de longitud L. En esta región supongamos que cada punto (x, y, z, t) esta igualmente equi-espaciado, a esta separación entre puntos lo llamaremos $a \equiv$ parámetro de la red. Primero partamos de un eje (x), la separación entre un punto a otro es

$$a_x = \frac{L_x}{n_x}, \tag{3.1}$$

donde L_x es la longitud de la región acotada en el eje x, y n es el numero impar de puntos que hay, cada punto tendrá una distancia respecto al origen, dado por

$$x_i = \frac{L_x}{n_x}, \tag{3.2}$$

con $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, y el subíndice etiqueta a cada punto en la red por lo tanto

$$x_i = \pm a_i. \tag{3.3}$$

Generalizando a las otras coordenadas obtenemos el correspondiente análogo

$$y_j = \tfrac{L_y}{n_y},\ z_k = \tfrac{L_z}{n_z},\ t_l = \tfrac{L_t}{n_t}.$$

Entonces el campo en la discretización tomara la siguiente forma

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &\rightarrow \phi(x_i, y_j, z_j, t_l) \\ \phi(a_{n_x}, a_{n_y}, a_{n_z}, a_{n_t}) &\rightarrow \phi(n_x, n_y, n_z, n_t), \end{aligned} \tag{3.4}$$

y la derivada del campo sera

$$\partial_\mu \phi \rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right), \tag{3.5}$$

Con $\mu = 1, 2, 3, 4$, y en la discretización tenemos que la derivada parcial estará dada por

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \to \frac{\phi(x_{i+1}, y_j, z_k, t_l) - \phi(x_i, y_j, z_k, t_l)}{a_x}, \tag{3.6}$$

por lo tanto en general tendremos

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mu} \to \frac{1}{a_\mu} \left(\phi(x + a_\mu \hat{\mu}) - \phi(x)\right). \tag{3.7}$$

Hemos obtenido una seria de ecuaciones las cuales describen el campo ϕ dentro de la discretización. A continuación mostraremos la expresión de la acción en la discretización.

3.1. Discretizacion

Queremos ver como resulta la acción en la discretización que hemos estado manejando, la acción esta dada por:

$$S_E = \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - J\phi\right) \tag{3.8}$$

Notemos primero que las diferenciales estarán dados por la separación en cada coordenada

$$d^4x = d_x d_y d_z d_t \longrightarrow a_x a_y a_z a_t, \tag{3.9}$$

y entonces la acción en este esquema estará dada por:

$$S_E = \sum_{i,j,k,l} \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2|_{i,j,k,l} + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \ |_{i,j,k,l} - J\phi|_{i,j,k,l}\right] a_i a_j a_k a_l, \tag{3.10}$$

donde, por supuesto, el campo $\phi(\vec{x})$ esta valuado en algún punto de la red

$$\phi_{i,j,k,l} = \phi(x_i, y_j, z_k, t_l). \tag{3.11}$$

A continuación imponemos condiciones periódicas con periodo $2L_i$ sobre el campo $\phi(x)$, obviamente a lo largo de cada dirección x_i, por ejemplo sobre el eje x se tiene

$$\phi(x_i + 2L, y_j, z_k, t_l) = \phi(x_i), \tag{3.12}$$

se procede con estas condiciones de periodicidad para todas las coordenadas y_j, z_k y t_l, Expresamos el campo $\phi(x)$ (una sola variable) de la coordenada x en series de Fourier obtenemos

$$\phi(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1} \left[a_n cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right], \tag{3.13}$$

donde los coeficientes a_n y b_n están dados por

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\phi(x) cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\ b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\phi(x) sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$. En nuestro caso el campo $\phi(x)$ lo expresaremos como:

$$\phi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{ik_{n_x}}, \tag{3.14}$$

donde k_{n_x} y C_n están dados por

$$k_{n_x} = \frac{n_x\pi}{L},\ C_n = \frac{1}{2L_x}\int_{-L_x}^{L_x} dx\phi(x)e^{-ik_n x}.$$

Cabe mencionar que estas expresiones son en la dirección x_i, resulta lo análogo para las coordenadas restantes. Finalmente en $4D$ resultará:

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_{n_x n_y n_z n_t} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \tag{3.15}$$

donde los vectores de onda, $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z, k_t)$, para cada coordenada están dados por

$$k_x = \frac{n_x\pi}{L_x}, k_y = \frac{n_y\pi}{L_y}, k_z = \frac{n_z\pi}{L_z}, k_t = \frac{n_t\pi}{L_t},$$

Tomando el conjunto de funciones ortonormales

$$\int_{-L}^{L} dx e^{ik_n x} e^{-ik_m x} = 2L\delta_{nm}, \tag{3.16}$$

y nombramos las funciones $u_n(x)$ como

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{ik_n x}, \tag{3.17}$$

entonces en $4D$ este conjunto de funciones ortonormales se expresan como

$$\int_{hipercubo} d\vec{x} u^*_{n_x n_y n_z n_t}(x, y, z, t) u_{n'_x n'_y n'_z n'_t}(x, y, z, t) = \delta_{n_x n'_x}\delta_{n_y n'_y}\delta_{n_z n'_z}\delta_{n_t n'_t}, \tag{3.18}$$

donde

$$u_{n_x n_y n_z n_t}(x,y,z,t) = \frac{1}{\sqrt{2^4 L_x L_y L_z L_t}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \tag{3.19}$$

Regresando a la ecuación (3.10) donde se describe la acción S_E. Con la finalidad de facilitar el calculo y la de aclarar la notación usada en lattice, re-escribimos el primer término $(\partial_\mu \phi)^2$ en la acción en notación matricial .

En una dimensión notemos que las derivadas parciales (usaremos la representación simétrica de la derivada) están dadas como

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}|_{x_i} = \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i-1})}{2a}, \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}|_{-x_n} = \frac{\phi(-x_{n+1}) - \phi(-x_{n-1})}{2a}, \tag{3.21}$$

valuadas en el punto i-ésimo y en el punto enésimo respectivamente, ahora definiendo las siguientes matrices

$$D = \frac{1}{2a} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi(-x_n) \\ \phi(-x_{n-1}) \\ \vdots \\ \phi(x_0) \\ \vdots \\ \phi(x_n) \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

podemos escribir la primera derivada en función de estas matrices, por lo tanto obtenemos lo siguiente

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x}|_{-x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}|_{x_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}|_{x_n} \end{pmatrix} = \frac{1}{2a} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(-x_n) \\ \phi(-x_{n-1}) \\ \vdots \\ \phi(x_0) \\ \vdots \\ \phi(x_n) \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Para la segunda derivada hacemos procedemos deforma similar para obtener la correspondiente representación

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\phi(x_i - a) - 2\phi(x_i) + \phi(x_i + a)}{a^2}, \tag{3.25}$$

y escribimos la segunda derivada en notación matricial, obteniendo

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}|_{-x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}|_{x_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}|_{x_n} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(-x_n) \\ \phi(-x_{n-1}) \\ \vdots \\ \phi(x_0) \\ \vdots \\ \phi(x_n) \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Debemos tener encienta que, en mecánica cuántica la derivada debe ser un operador hermítico, por lo tanto se requiere que la representación matricial sea hermítica, la representación usada cumple con este requerimiento. Las matrices definidas anteriormente tendrán la misma forma para las coordenadas restantes (y, z, t)

$$\mathbf{\Phi_y} = \begin{pmatrix} \phi(-y_n) \\ \vdots \\ \phi(y_0) \\ \vdots \\ \phi(y_n) \end{pmatrix}, \mathbf{\Phi_z} = \begin{pmatrix} \phi(-z_n) \\ \vdots \\ \phi(z_0) \\ \vdots \\ \phi(z_n) \end{pmatrix}, \mathbf{\Phi_y} = \begin{pmatrix} \phi(-t_n) \\ \vdots \\ \phi(t_0) \\ \vdots \\ \phi(t_n) \end{pmatrix}.$$

Ahora expresemos la acción S_E de acuerdo a la definición de la segunda derivada vista anteriormente, (ver Ec. 3.25)

$$\begin{aligned} \int d^4x_E \frac{1}{2}\phi(\Box_E + m^2\phi) &= \sum_{\mu=x,y,z,t} \sum_{n_x,n_y,n_z,n_t}^{-N} a_x a_y a_z a_t \left[\frac{1}{2}\phi(\vec{x}_{\vec{n}}) \left(\frac{\phi(\vec{x}_{\vec{n}} - a_\mu) - 2\phi(\vec{x}_{\vec{n}}+)\phi(\vec{x}_{\vec{n}} + a_\mu)}{a_\mu^2}\right)\right. \\ &+ \left.\frac{1}{2}m^2\phi^2(\vec{x}_{\vec{n}})\right]. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Expresando al campo $\phi(\vec{x}_{\vec{n}})$ en series de Fourier, se obtiene

$$\phi(\vec{x}_{\vec{n}}) \to \sum_{k_{\vec{n}}}^{\infty} C_{k_{\vec{n}}} e^{i\vec{k}_{\vec{n}}\cdot\vec{x}_{\vec{n}}},$$

que al sustituir en la segunda derivada de la acción S_E, por ejemplo en la coordenada x, obtenemos

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x}_{\vec{n}})\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(\vec{x}_{\vec{n}}) &= \phi(\vec{x}_{\vec{n}})\left[\frac{\phi(x_{n_i}-a_x,y_{n_j},z_{n_k}t_{n_l})-2\phi(x_{n_i},y_{n_j},z_{n_k},t_{n_l})+\phi(x_{n_i}+a_x,y_{n_j},z_{n_k}t_{n_l})}{a_x^2}\right] \\
&= \frac{1}{a_x^2}\left[\sum_{k_{\vec{n}}}^{\infty}C_{k_{\vec{n}}}^2 e^{2i\vec{k}_{\vec{n}}\cdot\vec{x}_{\vec{n}}}e^{-ik_xa_x}-2\sum_{k_{\vec{n}}}^{\infty}C_{k_{\vec{n}}}^2 e^{2i\vec{k}_{\vec{n}}\cdot\vec{x}_{\vec{n}}}+\sum_{k_{\vec{n}}}^{\infty}C_{k_{\vec{n}}}^2 e^{2i\vec{k}_{\vec{n}}\cdot\vec{x}_{\vec{n}}}e^{ik_xa_x}\right] \\
&= \frac{1}{a_x^2}\left[e^{-ik_xa_x}\sum_{k_{\vec{n}}}^{\infty}C_{k_{\vec{n}}}^2 e^{2i\vec{k}_{\vec{n}}\cdot\vec{x}_{\vec{n}}}-2\sum_{k_{\vec{n}}}^{\infty}C_{k_{\vec{n}}}^2 e^{2i\vec{k}_{\vec{n}}\cdot\vec{x}_{\vec{n}}}+e^{ik_xa_x}\sum_{k_{\vec{n}}}^{\infty}C_{k_{\vec{n}}}^2 e^{2i\vec{k}_{\vec{n}}\cdot\vec{x}_{\vec{n}}}\right] \\
&= \frac{1}{a_x^2}\left[e^{-ik_xa_x}\phi^2(\vec{x}_{\vec{n}})-2\phi(\vec{x}_{\vec{n}})+e^{ik_xa_x}\phi^2(\vec{x}_{\vec{n}})\right] \\
&= \frac{1}{a_x^2}\phi^2(\vec{x}_{\vec{n}})\left[e^{ik_xa_x}+e^{-ik_xa_x}-2\right] \\
&= \frac{2}{a_x^2}\phi^2(\vec{x}_{\vec{n}})\left[cos(k_xa_x)-1\right]. \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Tomamos ahora el limite donde el espaciamiento $a_x \to 0$, tenemos que

$$\phi(\vec{x}_{\vec{n}})\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(\vec{x}_{\vec{n}}) = \frac{2}{a_x^2}\phi^2(\vec{x}_{\vec{n}})[1-\frac{(k_xa_x)^2}{2!}+\frac{(k_xa_x)^4}{4!}-\cdots-1]. \qquad (3.29)$$

Si nos quedamos hasta segundo orden en la expansión de la función coseno, ya que a ordenes superiores el espaciamiento es despreciable, resulta que

$$\phi(\vec{x}_{\vec{n}})\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(\vec{x}_{\vec{n}}) = -\phi^2(\vec{x}_{\vec{n}})k_x^2. \qquad (3.30)$$

Notemos que para las direcciones restantes seria lo mismo, entonces el termino $\phi(\vec{x}_{\vec{n}})\Box_E\phi(\vec{x}_{\vec{n}})$ resultaría como

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x}_{\vec{n}})\Box_E\phi(\vec{x}_{\vec{n}}) &= \phi^2(\vec{x}_{\vec{n}})(k_x^2+k_y^2+k_z^2+k_t^2) \\
&= \phi^2(\vec{x}_{\vec{n}})(\vec{k}^2+w^2), \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

y con esto ultimo escribimos el termino completo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\phi(\vec{x}_{\vec{n}})(\Box_E+m^2)\phi(\vec{x}_{\vec{n}}) &= \frac{1}{2}\phi^2(\vec{x}_{\vec{n}})(\vec{k}^2+w^2+m^2) \\
&= \frac{1}{2}\phi^2(\vec{x}_{\vec{n}})(\vec{k}^2+E^2+m^2), \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

la cual nos da la relación usual (en el espacio euclideo) de energía-momento. Con los resultados vistos anteriormente podemos escribir la funcional generatriz $\mathcal{Z}_{0E}[J]$ en el esquema de la discretizacion.

3.2. Teoría escalar con auto-interacción con N campos

Supongamos ahora que tenemos N campos reales, entonces definimos la acción libre S_0 como

$$S_0 = \int d^4x \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i)(\partial^\mu \phi_i) - \frac{1}{2} m \phi_i^2 \right], \tag{3.33}$$

y para fines prácticos en la notación y el desarrollo algebraico definimos el vector columna

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

donde tenemos en cuenta que tenemos campos reales, es decir, $\phi_i^\dagger = \phi_i$, y es obvio entonces que

$$\sum_{i=1}^{N} \phi_i^2 = \mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi}, \tag{3.35}$$

y por lo tanto la acción libre S_0 resultara como

$$S_0 = \int d^4x \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \mathbf{\Phi}^\dagger)(\partial^\mu \mathbf{\Phi}) - m \mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi} \right]. \tag{3.36}$$

3.2.1. Autointeracción

En este caso la acción S estará dada por la acción libre S_0 mas un termino extra

$$S = S_0 + \int d^4x \frac{\lambda_0}{4!} \frac{3}{N+2} (\mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi})^2, \tag{3.37}$$

el cual va a representar el termino perturbativo. Finalmente expresamos la funcional generatriz con interacción

$$\mathcal{Z}_{0_E}[J] = \int \mathcal{D}\mathbf{\Phi} e^{-\int d^4_{x_E} \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \mathbf{\Phi}^\dagger)(\partial^\mu \mathbf{\Phi}) + \frac{1}{2} m^2 \mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi} - \frac{\lambda_0}{4!} \frac{3}{N+2} (\mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi})^2\right]}. \tag{3.38}$$

Ahora, nos resta definir las funciones de Green de dos puntos base crucial para nuestro estudio y descrito en el capitulo siguiente.

Capítulo 4

Funciones de Green de dos puntos

Para fines de obtención de las funciones de Green, se introducen N fuentes reales

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{J} + \mathbf{J}^\dagger \mathbf{\Phi}, \tag{4.1}$$

donde el vector $\mathbf{J}$ esta dado por las N fuentes reales

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_N \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

y es obvio que

$$\mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{J} = \sum_{i=1}^{N} J_i \phi_i, \tag{4.3}$$

y con estas modificaciones la funcional generatriz resulta como

$$\mathcal{Z}_{0_E}[J] = \int \mathcal{D}\mathbf{\Phi} e^{-\int d^4_{x_E}\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \mathbf{\Phi}^\dagger)(\partial^\mu \mathbf{\Phi}) + \frac{1}{2}m^2 \mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi} - \frac{\lambda_0}{4!}\frac{3}{N+2}(\mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi})^2\right] - \int d^4_{x_E}(\mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{J} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{\Phi})}, \tag{4.4}$$

debemos de ser cuidadosos de expresar la medida $\mathcal{D}\mathbf{\Phi}$ de forma adecuada ya que ahora estamos considerando N campos, entonces la medida resultara como:

$$\mathcal{D}\mathbf{\Phi} = \prod_{n=1}^{N} \prod_{i,j,k,l=1}^{N_x,N_y,N_z,N_l} d\phi_n(x_i, y_j, z_k, t_l), \tag{4.5}$$

donde los indices N_x,N_y,N_z,N_l y N los tomamos todos por igual, ahora estamos en condiciones de calcular la función de Green de dos puntos.

Sabemos por la Ec. (2.53), la función de Green es equivalente a la segunda derivada de la funcional generatriz, primeramente obtenemos la primera derivada de la funcional generatriz, que resulta

$$\frac{\delta \mathcal{Z}_E[J]}{\delta J_k(x)} = \int \prod_{i=1}^{N} \mathcal{D}\phi_i \phi_k(x) e^{-S_E + <J|\phi>} \equiv < \Phi k >_J, \tag{4.6}$$

donde se tiene entendido que

$$< J \mid \phi > \equiv \int J_i(x)\phi_i(x) d^4 x_E, \tag{4.7}$$

notemos que si no hay rompimiento espontaneo de la simetría, es decir, si nos tomamos el cambio

$$\phi_i \to \phi_0^i + \zeta_i(x), \tag{4.8}$$

donde ϕ_0^i es una constante y $\zeta_i(x)$ es una función, se trata que debido a que la integración funcional es par en $\phi_k(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{Z}[J_i]}{\delta J_k(x)} \mid_{J_i=0} &= < \phi_k(x) >_J |_{J=0} \\ &= \int \prod_{i=1}^{N} \mathcal{D}\phi_i \phi_k(x) e^{-S_E} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

y de forma semejante, para la segunda derivada funcional

$$\frac{\delta^2 \mathcal{Z}[J_i]}{\delta J_l(y) \delta J_k(x)} = \int \prod_{i=1}^{N} \mathcal{D}\phi_i(x)\phi_k(x)\phi_l(y) e^{-SE + <J|\phi>}, \tag{4.10}$$

y una vez mas, no hay rompimiento espontaneo de la simetría y tenemos en cuenta que la integración funcional de funcionales son pares, por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}[J_i]}{\delta J_l(y) \delta J_k(x)} \mid_{J_i=0} &= \delta_{kl} \int \prod_{i=1}^{N} \mathcal{D}\phi_i(x)\phi_k(x)\phi_l(y) e^{-S_E} \\ &\equiv \delta_{kl} G_{kl}(x,y), \end{aligned} \tag{4.11}$$

y donde la función de Green esta dada por

$$G_{kl}(x,y) = \int \prod_{i=0}^{N} \mathcal{D}\phi_i \phi_k(x)\phi_l(y) e^{-S_E}. \tag{4.12}$$

Las expresiones (4.11) y (4.12) nos dan la función de Green de dos puntos.
Recordando la acción en el espacio euclidiano en presencia de N campos

$$S_E = \int d^4x_E \left[\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} [(\partial_\mu \phi_\alpha)^2 + m_0^2 \phi_\alpha^2] + \frac{\lambda_0}{4!} \frac{3}{N+2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \phi_\alpha^2 \phi_\beta^2 \right], \tag{4.13}$$

donde es claro que esta compuesta por la acción libre S_0 y la acción con interacción S_{int}

$$S_E = S_0 + S_{int}, \tag{4.14}$$

donde

$$S_0 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} \int d^4x_E \left[(\partial_\mu \phi_\alpha)^2 + m_0^2 \phi_\alpha^2 \right], \tag{4.15}$$

$$S_{int} = \frac{\lambda_0}{4!} \frac{3}{N+2} \sum_{\alpha,\beta}^{N} \int d^4x_E \phi_\alpha^2 \phi_\beta^2, \tag{4.16}$$

ya que consideramos N campos, entonces la acción resultaría de una sumatoria de N acciones asociadas a cada campo, es decir

$$S_0 = \sum_{\alpha=1}^{N} S_0^{(\alpha)}, \tag{4.17}$$

$$S_{int} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} S_{int}^{(\alpha)(\beta)}. \tag{4.18}$$

Ahora para fines prácticos y para un mejor aprovechamiento de almacenamiento de memoria por parte del calculo numérico, es conveniente definir un vector columna en lugar un tensor de 4 entradas el cual va a representar a cada campo $\phi^\alpha(\vec{x})$ en cada uno de los puntos de la red, entonces tenemos el campo en función de las cuatro coordenadas

$$\phi_q^{(\alpha)} = \phi^{(\alpha)}(\vec{x}_q) = \phi^{(\alpha)}(x_i, y_j, z_k, t_l), \tag{4.19}$$

donde q va a estar dado por cuatro variables indexadas de la siguiente manera

$$q = i + (j-1)n_x + (k-1)n_x n_y + (l-1)n_x n_y n_z, \tag{4.20}$$

donde los subíndices $i = 1, 2, ..., n_x$, $j = 1, 2, ..., n_y$, $k = 1, 2, ..., n_z$, $l = 1, 2, ..., n_t$, y a su vez, las variables n_x, n_y, n_z y n_t van a tomar un numero fijo, determinado por el numero de puntos dentro de la red en cada una de las direcciones. De esta forma obtenemos de una manera explicita de como

va a estar determinado $\phi^{\alpha}(\vec{x})$ en cada uno de los puntos de la red. Ahora estamos en condiciones de tener una expresión definitiva de la acción S_E en el campo euclidiano en su forma discretizada y tomando en cuenta la expresión dada por la Ec. (3.25) la cual es la derivada parcial dentro de la discretizacion, escribimos la acción S_E de manera individual.
La acción libre de interacción

$$S_0^{\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\int d^4x_E\left[(\partial_\mu\phi_\alpha)^2 + m_0^2\phi_\alpha^2\right] \tag{4.21}$$

y en el campo de la discretizacion

$$\begin{aligned} S_{0_d}^{\alpha} &= \frac{V}{8}\sum_{i,j,k,l=1}^{N}\frac{1}{a_x^2}\Big[(\phi^{(\alpha)}_{i+1,j,k,l} - \phi^{(\alpha)}_{i-1,j,k,l})^2 \\ &+ \frac{1}{a_y^2}\,(\phi^{(\alpha)}_{i,j+1,k,l} - \phi^{(\alpha)}_{i,j-1,k,l})^2 + \frac{1}{a_z^2}\,(\phi^{(\alpha)}_{i,j,k+1,l} - \phi^{(\alpha)}_{i,j,k-1,l})^2 \\ &+ \frac{1}{a_y^2}\,(\phi^{(\alpha)}_{i,j+1,k,l} - \phi^{(\alpha)}_{i,j-1,k,l})^2 + \frac{1}{a_z^2}\,(\phi^{(\alpha)}_{i,j,k+1,l} - \phi^{(\alpha)}_{i,j,k-1,l})^2\Big], \end{aligned} \tag{4.22}$$

y la acción con interacción

$$S_{int}^{\alpha,\beta} = \frac{\lambda_0}{4!}\frac{3}{N+2}\int d^4x_E\phi^{(\alpha)2}\phi^{(\beta)2} \tag{4.23}$$

igualmente discretizada

$$S_{int} = \frac{V}{8}\frac{\lambda_0}{N+2}\sum_{i,j,k,l}^{N}{\phi^{(\alpha)}_{i,j,k,l}}^2{\phi^{(\beta)}_{i,j,k,l}}^2, \tag{4.24}$$

donde

$$V = a_x a_y a_z a_t, \tag{4.25}$$

entonces reedefinimos la acción S_E en términos ya de la discretizacion de la acción mostradas en las Ecs. (4.22) y (4.24) como

$$S_E^d = S_{0_d}^{\alpha} + S_{int} \tag{4.26}$$

y al igual que la acción S_E obtenemos una expresión de la función de Green de dos puntos dentro del esquema de la discretizacion dada de la siguiente forma

$$G^{\alpha\alpha}(x,y) = \int\prod_{\alpha=1}^{N}\mathcal{D}\phi^{\alpha}(\vec{x})\phi^{(\alpha)}(x)\phi^{(\alpha)}(y)e^{-S_E}, \tag{4.27}$$

$$G^{\alpha\alpha}(x_q,x_r) \rightarrow \sum\prod_{\alpha,p}^{N}\mathcal{D}\phi_p^{\alpha}\phi_q^{(\alpha)}\phi_p^{(\alpha)}e^{-S_E}. \tag{4.28}$$

Concluimos de esta manera un estudio introductorio a la teoría de lattice aplicado a la teoría escalar, mostrando una forma explicita de la función de Green de dos puntos dentro del esquema de la discretizacion en el espacio euclidiano. Para tener un camino claro de las soluciones de la función de Green, en el capitulo siguiente haremos una introducción al método de Monte Carlo, herramienta útil para la solución de la función de Green, así como ejemplos ilustrativos que representaran soluciones aproximadas o semejantes a la función de Green de dos puntos.

4.1. Método de Monte Carlo

El método de Monte Carlo provee soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas matemáticos que se pueden definir en general con métodos de simulación estadística. Básicamente este método utiliza secuencias de números aleatorios para realizar la simulación, el proceso implica la realización de muchas simulaciones utilizando números aleatorios y, considerar la probabilidad de que los números aleatorios tomen valores en una cierta región del espacio en consideración.

Uno de los usos mas importantes del método de Monte Carlo es el de evaluar integrales cuyo integrando puede ser funciones complicadas en muchas dimensiones cuyo cálculo numérico no se pueden llevar a cabo a través de los algoritmos usuales como el de trapecios o el de cuadratura Gaussiana . En este contexto, el método de Monte Carlo se convierte en una herramienta valiosa ya que es capaz de obtener una aproximación bastante razonable en un tiempo de computo mucho mas rápido en comparación con otras técnicas formales. La rapidez de convergencia del error es muy lenta con este método: proporcional a $\frac{1}{\sqrt{N}}$, pero tiene la gran ventaja de que la convergencia es independientemente del número de dimensiones por lo que es ideal para integrales de muchas dimensiones.

4.1.1. Integración por Monte Carlo

Consideramos la integral de una función $f(x_1, \cdots, x_d)$, donde las variables $x_1, \cdots, x_d$ se encuentran definidas en el hipercubo unitario $[0,1]^d$, asumimos por supuesto que $f(x_1, \cdots, x_d)$ es cuadrática-integrable. El método de Monte Carlo estima que la integral

$$I = \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_d f(x_1, \cdots, x_d) = \int_k d\vec{x} f(\vec{x}), \tag{4.29}$$

donde $k = [0,1]^d$, tiene como solución aproximada el valor E dado

$$E = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\vec{x}_n). \tag{4.30}$$

La ley de los grandes números asegura que el método de Monte Carlo estima la convergencia del valor real de la integral

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = 1. \tag{4.31}$$

Para calcular la solución E dada por la ecuación (4.30), generamos números aleatorios $x_1, x_2 \cdots$ todos independientes y uniformemente distribuidos sobre el intervalo $[0, 1]$ y definiendo los vectores $\mathbf{X_1} = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$, $\mathbf{X_2} = (x_{d+1}, x_{d+2}, \cdots, x_{2d})$, $\cdots$, $\mathbf{X_N} = (x_{2d+1}, x_{2d+2}, \cdots, x_{Nd})$,
los cuales son independientes y uniformemente distribuidos sobre el hipercubo $[0, 1]^d$ y que serán fundamentales para definir iterativamente el conjunto de valores

$$\begin{aligned} S_1 &= f(\mathbf{X_1}) \\ S_2 &= f(\mathbf{X_1}) + f(\mathbf{X_2}) \\ &\vdots \\ S_n &= S_{n-1} + f(\mathbf{X_N}) = \sum_{n=1}^{N} f(\mathbf{X_n}), \end{aligned} \tag{4.32}$$

el cual nos dará una aproximación a la integral a resolver.

4.1.2. Números aleatorios

En la práctica, para llevar a cabo el cálculo aproximado de la integral en la Ec. (4.29), lo que se necesita en primer lugar es generar de algún modo un conjunto adecuado de números aleatorios. Esta tarea no es simple. En efecto, no existe algoritmo (los cuales son deterministas ya que están basados en reglas que no tienen forma de incorporar el factor de aleatoriedad de una manera conveniente) que genere números genuinamente aleatorios. No obstante, los números que se generan mediante un proceso algorítmico determinista se llaman números pseudo-aleatorios y el factor de aleatoriedad se puede incorporar con un agente externo como el reloj de la computadora.

En este trabajo utilizamos las librerías que están incorporadas en el compilador de fortran llamado gfortran [18], el cual es software de distribución libre y que es parte del proyecto Fortran GNU. Estas librerías contienen un función que genera dichos números pseudo-aleatorios (que llamaremos por simplicidad aleatorios), los cuales tienen una distribución uniforme en el intervalo (0,1). En la Fig. 4.1 mostramos 1000 números aleatorios generados por este software. Estos números están distribuidos uniformemente.

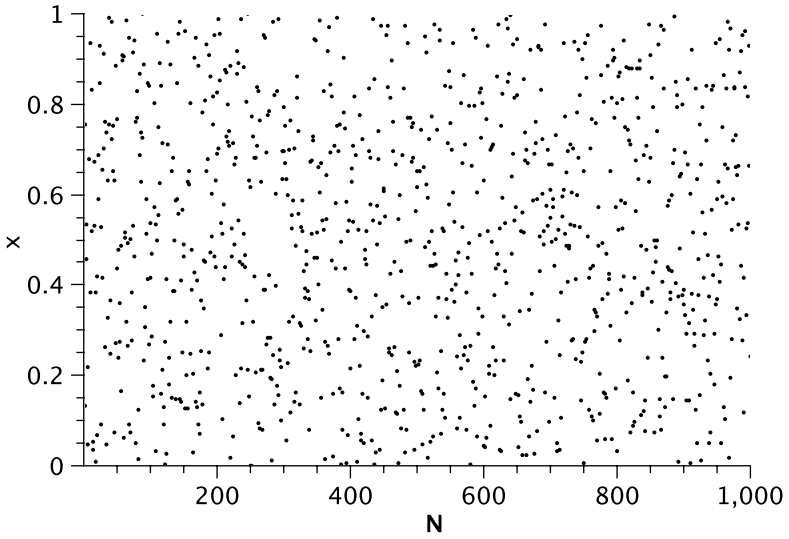

Figura 4.1: Conjunto de 1000 números pseudo-aleatorios generados con las librerías del programa de distribución libre gfortran.

4.1.3. Ejemplos

A continuación mostraremos algunos ejemplos que ilustran el método de Monte Carlo y haremos una comparación con las soluciones que encontramos analíticamente dada en el apéndice. Como hemos mencionado, el conjunto de números aleatorios empleados en este método son los que se generan con las librerías de gfortran. Los ejemplos que se muestran son tomados de los tipos de integrales que resultan de llevar a la lattice la teoría escalar estudiada en este trabajo.

A fin de comprobar el grado de exactitud que da como resultado del cálculo de las integrales, hemos procurado, en el caso de que se puedan solucionar analíticamente, realizar el calculo por series y truncar a los primeros términos de las serie resultante esto se muestra en el apéndice. Lo interesante de esto es que el desarrollo de series de potencias en la variable $\frac{b}{a^2}$ que hacemos en el cálculo de las integrales que vamos a ejemplificar es una mímica del desarrollo perturbativo en la teoría de campos $\lambda\phi^4$ en cuyo caso el desarrollo se hace en potencias del acoplamiento λ.

1. Una de las integrales de interés en el cálculo de lattice es de la formula

$$I_0(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2-bx^4}. \tag{4.33}$$

Donde a y b son parámetros enteros, con el fin de aplicar el método de acuerdo al método de Monte Carlo para encontrar el valor de esta integral, primero es necesario hacer un cambio

de variable: de la variable x cuyo rango es $(-\infty, \infty)$ a una variable u definida en el intervalo $[0, 1]$, que es el rango de los números aleatorios. Notemos que la integral se debe sustituir por una suma como se indica a continuación:

$$I_0(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2 - bx^4} \longrightarrow \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(u), \tag{4.34}$$

donde N es la cantidad total de números aleatorios y la nueva función, una vez que se ha realizado el cambio de variable, es

$$g(u) = \frac{2}{(1-u)^2} e^{-a(\frac{u}{1-u})^2 - b(\frac{u}{1-u})^4}, \tag{4.35}$$

con

$$u = \frac{x}{1+x}, \tag{4.36}$$

la variable aleatoria.

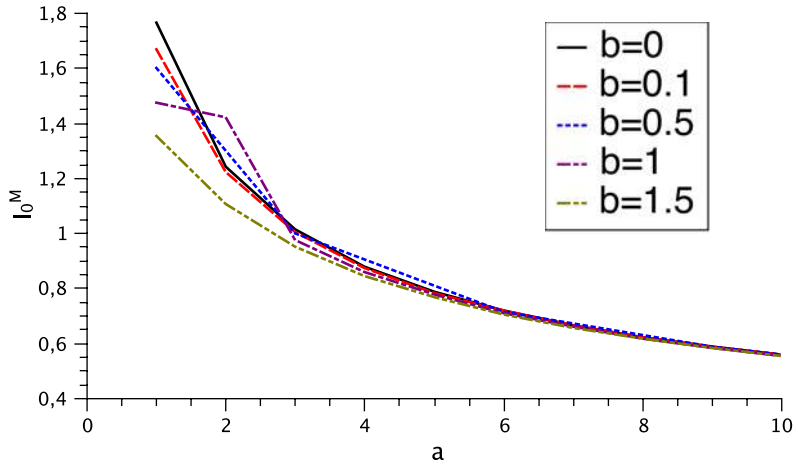

Figura 4.2: Gráfica de la ecuación (4.34) para distintos valores de b.

La gráfica en la Fig. 4.2 ilustra los valores de la integral dada en la ecuación (4.33) resuelta por Monte Carlo.

Ahora resolviendo esta misma integral analíticamente obtenemos

$$I_0(a, b) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \left[1 - \frac{b}{a^2} \frac{3 \cdot 1}{2^2} + \frac{b^2}{a^4} \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^4} - \cdots \right], \tag{4.37}$$

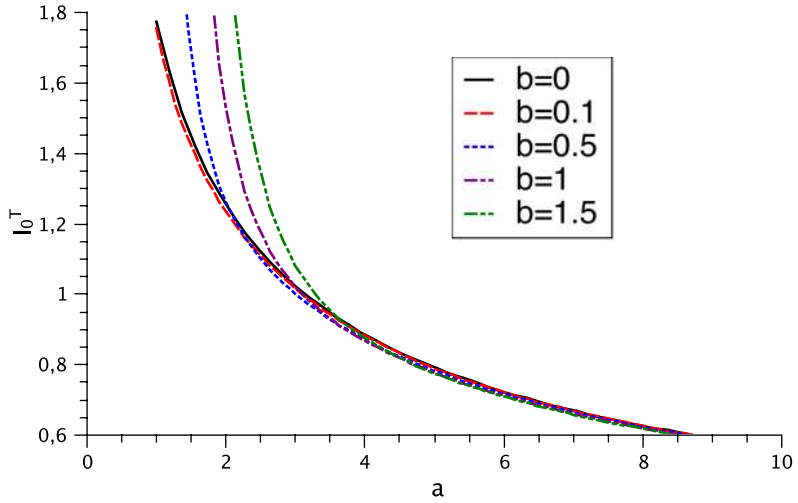

Figura 4.3: Gráfica de la ecuación (4.37) truncada hasta tres términos.

y su respectiva gráfica en la Fig. 4.3. Como se puede observar los resultados mostrados en las Figs. 4.2 y 4.3, el resultado analítico y por el método de Monte Carlo dan valores similares o aproximadamente iguales para diferentes valores de los parámetros, pero difieren cuando el parámetro a es suficientemente grande.

2. Consideremos ahora la siguiente integral

$$I_2(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2-bx^4}. \tag{4.38}$$

De igual manera, la solución, de acuerdo al método de Monte Carlo, es

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-ax^2-bx^4} \longrightarrow \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(u), \tag{4.39}$$

donde

$$g(u) = \frac{2}{(1-u)^2}\left(\frac{u}{1-u}\right)^2 e^{-a(\frac{u}{1-u})^2-b(\frac{u}{1-u})^4}. \tag{4.40}$$

Procediendo de manera análoga al caso anterior, el resultado de la integral en la Ec. (4.38) calculada mediante el de Monte Carlo, para diferentes valores de los parámetros se muestra en la Fig. 4.4.

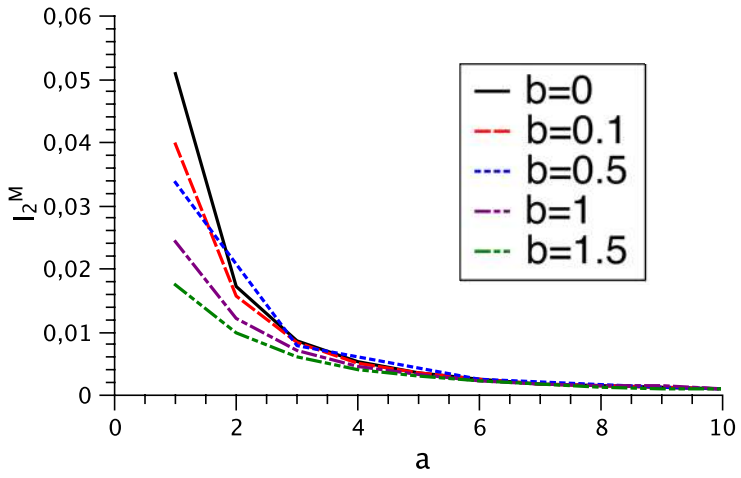

Figura 4.4: Gráfica de la ecuación (4.38) para distintos valores de b.

Resolviendo ahora la integral en la Ec. (4.38) de manera analítica, obtenemos

$$I_2(a,b) = \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\left[\frac{1}{2} - \frac{b}{a^2}\frac{5\cdot 3\cdot 1}{2^3} + \frac{b^2}{a^4}\frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^5} + \cdots\right]. \tag{4.41}$$

Los resultados numéricos de la integral en la Ec. (4.41) se muestran en la Fig. 4.6. Como se puede apreciar de los resultados analíticos y mediante el método de Monte Carlo, el comportamiento de la integral como función de los parámetros, a y b, es semejante. Sin embargo los valores numéricos obtenidos difieren aproximadamente en un orden de magnitud.

3. Hasta este momento hemos considerado al parámetro b de nuestras ecuaciones muy pequeño con respecto al parámetro a. Para estudiar los caso en que $b \gtrsim a^2$, sería necesario tomar en cuenta todos los términos de la serie en la Ec. (4.41), lo cual es impráctico porque la serie obtenida no converge, esto es, no posible determinar analíticamente el resultado de la integral en cuestión. Sin embargo, esta se puede calcular de manera numérica con el método de Monte Carlo tal y como lo hemos hecho en los casos anteriores. La gráfica en la Fig. 4.5 muestra los diferentes valores de la integral como función de los parámetros

4.2. Evaluación numérica de la función de Green

A manera de ir esclareciendo el camino a seguir y por simplicidad, en este trabajo evaluamos integrales de una sola dimensión del tipo que resultan en el caso general de la teoría escalar

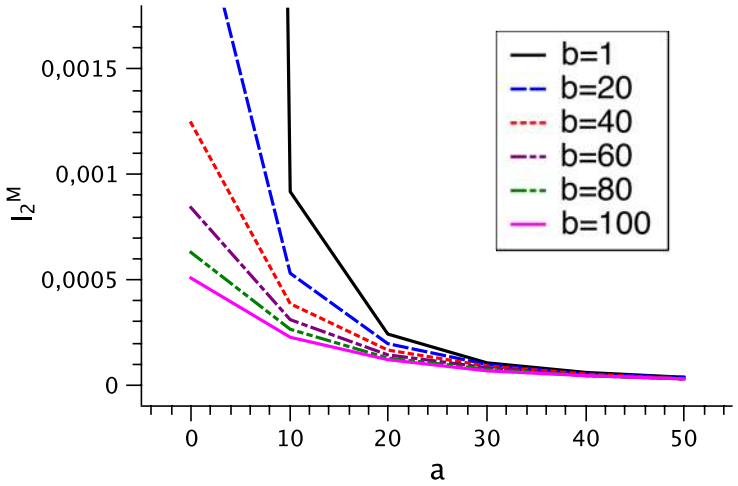

Figura 4.5: Gráfica de la ecuación (4.38) cuando $b \gtrsim a^2$.

bajo estudio. Como ya lo mencionamos, las integrales en cuestión las calculamos primeramente de manera aproximada pero analíticamente y después mediante el método de Monte Carlo con el fin de comparar el grado de exactitud de los resultados arrojados por el método de Monte Carlo.

La idea de hacer el cálculo en una dimensión es por el hecho de que la función de Green de dos puntos involucra términos en los campos de forma cuadrática evaluados en cada uno de los puntos de la red y cada uno de los campos es una variable de integración. A fin de ilustrar esto, retomemos la acción discretizada en las Ecs. (4.22)-(4.24) para el caso de un solo campo $(N = 1)$

$$\begin{aligned} S_E &= \frac{V}{8} \sum_{i,j,k,l=1}^{N} \frac{1}{a_x^2} \left[(\phi_{i+1,j,k,l} - \phi_{i-1,j,k,l})^2 \right. \\ &+ \frac{1}{a_y^2} (\phi_{i,j+1,k,l} - \phi_{i,j-1,k,l})^2 + \frac{1}{a_z^2} (\phi_{i,j,k+1,l} - \phi_{i,j,k-1,l})^2 \\ &+ \left. \frac{1}{a_y^2} (\phi_{i,j+1,k,l} - \phi_{i,j-1,k,l})^2 + \frac{1}{a_z^2} (\phi_{i,j,k+1,l} - \phi_{i,j,k-1,l})^2 \right] \qquad (4.42) \\ &+ \frac{V}{4!} \lambda_0 \sum_{i,j,k,l}^{N} {\phi_{i,j,k,l}}^4. \qquad (4.43) \end{aligned}$$

Si usamos la forma de etiquetar a los campos evaluados en cada uno de los puntos de la red

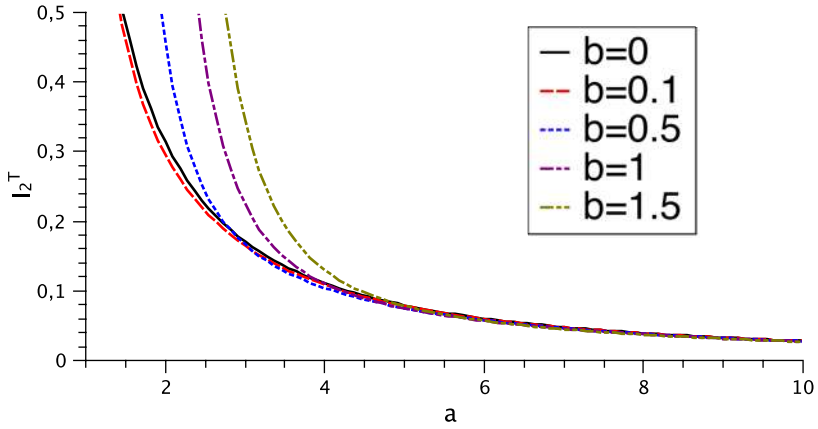

Figura 4.6: Gráfica de la ecuación (4.41) truncada hasta tres términos.

de acuerdo a la Ec. en (4.19), y en vez de utilizar las variables ϕ_q las expresamos como un vector columna como sigue:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{n_x n_y n_z n_t} \end{pmatrix}, \tag{4.44}$$

entonces la acción en la Ec. (4.43) se puede expresar como:

$$S_E = \frac{V}{8}\left[(\mathbf{D}\,\mathbf{X})^T\mathbf{D}\mathbf{X} + m_o^2\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right] + \frac{\lambda_0 V}{4!}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^2 \tag{4.45}$$

donde la matriz $\mathbf{D}$ es el producto directo de matrices que representan a la derivada: $\mathbf{D} = \mathbf{D}_x \otimes \mathbf{D}_\mathbf{y} \otimes \mathbf{D}_\mathbf{z} \otimes \mathbf{D}_\mathbf{t}$ y $\mathbf{D}_x, \ldots \mathbf{D}_t$ son matrices de $n_x \times n_x, \ldots n_t \times n_t$, respectivamente, cuya forma general está dada en la Ec. (3.22) . En estos términos, la función de Green de dos puntos, evaluada en dos puntos particulares de la red q y r, se expresa como:

$$G_{q\,r} = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{X}\ \phi_q\phi_r \exp\left(-\frac{V}{8}\left[(\mathbf{D}\,\mathbf{X})^T\mathbf{D}\mathbf{X} + m_o^2\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right] - \frac{\lambda_0 V}{4!}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^2\right), \tag{4.46}$$

la cual es una integral en $n_x n_y n_z n_t$ variables. Notemos que en el caso de una sola variable esta integral se reduce a:

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi\ \phi^2 \exp\left(-\frac{V}{8}(D + m_0^2)\phi^2 - \frac{\lambda_0 V}{4!}\phi^4\right), \tag{4.47}$$

la cual es una integral de la forma dada en la Ec. (4.38). Para determinar la función de Green de dos puntos es necesario calcular la integral en la Ec. (4.46), lo cual requiere de computo avanzado. Por ejemplo, para redes cúbicas de solo 10 nodos, se requieren realizar 10^4 integrales de exponenciales de formas cuadráticas y cuárticas. Esta tarea queda para futuros trabajos y aquí solo se indica el camino a seguir para realizar dicha tarea. Para ello solo evaluaremos la integral en (4.47) la cual simula la función de Green de dos puntos, pero no representa a esta. Una integral de este tipo ya la calculamos en la sección anterior, la cual resolvimos en series de potencias de forma analítica y consideramos solo los primeros términos de la serie (el símil del desarrollo perturbativo) y también la calculamos de manera numérica mediante el método de Monte Carlo y comparamos ambos resultados. Lo que obtuvimos fueron resultados similares en el caso de lo que llamaríamos acoplamiento débil ($b/a^2 << 1$), pero diferentes en el caso que llamaríamos de acoplamiento fuerte ($b/a^2 << 1$). Tomando esto en cuenta notemos que en el régimen perturbativo cuando $b << a$ la integral I_2 converge tal y como lo esperaríamos, ahora en el régimen no-perturbativo cuando $b >> a$ el sentido común nos dicta que la integral I_2 seria divergente pero de acuerdo al método de Monte Carlo el cual nos ofrece una solución bastante aproximada y en base a lo mostrado en la gráfica (4.5) muestra un comportamiento convergente.

Capítulo 5

Conclusiones

La finalidad de este trabajo de tesis fue la de hacer un estudio básico a la teoría de lattice recurriendo a una de las teorías de campos simplista como lo es la teoría escalar real. Una de los objetivos de la teoría de lattice es la de estudiar QCD de manera no-perturbativa, mediante técnicas numéricas. Aunque el trabajo desarrollado en esta tesis dista de ser un estudio avanzado de lattice con cálculo numérico, el trabajo desarrollado abre una puerta para el ulterior estudio numérico tanto de la teoría escalar en el límite de N grande como de la misma QCD utilizando las nuevas tecnologías en computo como lo son las tarjetas gráficas llamadas GPU's.

A fin de realizar los cálculos (al menos para tener indicios de como llevar el cálculo numérico avanzado) hemos recurrido a las técnicas de Monte Carlo. El cálculo de las integrales las realizamos con una computadora convencional, con el propósito de trasladar estas experiencias al caso de computo de alto rendimiento. Para ir esclareciendo el camino a seguir y por simplicidad, en este trabajo evaluamos integrales de una sola variable del tipo que resultan en el caso general de la teoría escalar bajo estudio. En los ejemplos dados mostramos los resultados, ilustrados mediante parejas de gráficas, donde se muestran los resultados analíticos y numéricos. Las gráficas muestran que los resultados obtenidos tanto mediante el método de Monte Carlo como mediante el método analítico, arrojan resultados similares.

Cabe señalar que los resultados del método analítico no son soluciones exactas sino aproximaciones a las soluciones exactas cuando $b << a^2$ (algo semejante a un desarrollo perturbativo en el caso de la teoría cuántica de campos) y cuyo resultado se puede conocer a priori tomando en cuenta solo los primeros términos del desarrollo en series de potencias; estos resultados fueron contrastados con los obtenidos mediante el método de Monte Carlo. Sin embargo, para el caso $b \gtrsim a^2$ (caso no-perturbativo en la teoría cuántica de campos), las integrales resultantes ya no se pueden determinar de manera analítica y es aquí donde entra el poderío del método de Monte Carlo, con el cual dichas integrales se pueden calcular de manera numérica.

Apéndice A

Estamos interesados en resolver la siguiente integral gaussiana

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx^4}, \tag{A.1}$$

con $a, b > 0$, tomando al cambio de variable siguiente

$$u^2 = ax^2 \rightarrow u = \sqrt{a}x, \tag{A.2}$$

y los diferenciales respectivos

$$du = \sqrt{a}dx \rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{a}}du, \tag{A.3}$$

con este cambio de variable tenemos que

$$bx^4 = b\left(\frac{u}{\sqrt{a}}\right)^4 = \frac{b}{a^2}u^4, \tag{A.4}$$

y entonces la integral gaussiana en términos de las nuevas variables y tomando la serie de potencias de la función exponencial obtenemos

$$\begin{aligned} I_0(a,b) &= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} du e^{u^2-\frac{b}{a^2}u^4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u2}\left[e^{-\frac{b}{a^2}u^4}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2}\left[1-\frac{b}{a^2}u^4+\frac{b^2}{a^4}u^8+\cdots\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{\pi}-\frac{b}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty} duu^4e^{-u^2}+\frac{b^2}{a^4}\int_{-\infty}^{\infty} duu^8e^{-u^2}+\cdots\right) \end{aligned} \tag{A.5}$$

para poder resolver las integrales resultantes en la ecuación (6.5), consideremos la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} duu^{2n}e^{-u^2} = 2\int_{0}^{\infty} duu^{2n}e^{-u^2}, \tag{A.6}$$

para $n = 1, 2$, hacemos el cambio de variable

$$x = u^2 \rightarrow u = \sqrt{x}, \tag{A.7}$$

y los diferenciales resultan

$$dx = 2udu = 2\sqrt{x}du, \tag{A.8}$$

y entonces la integral dada por la ecuación (6.6) en función de la nueva variable resulta

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} duu^{2n}e^{u^2} &= 2\left(\frac{1}{2}\right)\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}x^n e^{-x} \\ &= \int_{0}^{\infty} dx x^{n-\frac{1}{2}}e^{-x}, \end{aligned} \tag{A.9}$$

notando que esta ultima integral es la representación integral de la función Gamma, entonces la podemos escribir de la siguiente manera

$$\int_{0}^{\infty} dx x^{n-\frac{1}{2}}e^{-x} = \Gamma\left(n - \frac{1}{2} + 1\right) = \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right), \tag{A.10}$$

para $n = 2$ tenemos lo siguiente

$$\Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1 + (1 + \frac{1}{2})\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \tag{A.11}$$

utilizando una de las propiedades de la funcion Gamma

$$\Gamma\left(x + 1\right) = x\Gamma\left(x\right), \tag{A.12}$$

entonces

$$\Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \tag{A.13}$$

y tomando el hecho que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \tag{A.14}$$

y finalmente obtenemos

$$\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}. \tag{A.15}$$

De forma mas general, podemos expresar la integral dada en la ecuación (A.6) de la siguiente manera

$$\int_{-\infty}^{\infty} duu^{2n}e^{-u^2}=\sqrt{\pi}\frac{1}{2^n}(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-(2n-1))\,, \tag{A.16}$$

entonces la integral que inicialmente que estábamos inicialmente interesados en resolverla $I(a,b)$ dada por la (A.1), la reescribimos en función de las funciones Gamma

$$I(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\sqrt{\pi}-\frac{b}{a^2}\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)+\frac{b^2}{a^4}\Gamma\left(4+\frac{1}{2}\right)-\frac{b^3}{a^6}\Gamma\left(6+\frac{1}{2}\right)+\cdots\right], \tag{A.17}$$

pero

$$\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \tag{A.18}$$

$$\Gamma\left(4+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^4}7\cdot 5\cdot 3\cdot 1\sqrt{\pi}, \tag{A.19}$$

y finalmente

$$\Gamma\left(6+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}11\cdot 4\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1, \tag{A.20}$$

y con estos resultados renombramos la integral $I(a,b)$ dada en la ecuación (6.1) y obtenemos una expresión definitiva

$$I_0(a,b)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\left[1-\frac{b}{a^2}\frac{3\cdot 1}{2^2}+\frac{b^2}{a^4}\frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^4}-\frac{b^3}{a^6}\frac{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^6}\right]. \tag{A.21}$$

Ahora, de forma análoga de la integral anterior resolvamos la siguiente integral gaussiana

$$I_2(a,b)=\int_{-\infty}^{\infty} dxx^2e^{-ax^2-bx^4} \tag{A.22}$$

tomándonos el cambio de variable

$$u=\sqrt{a}x\rightarrow x=\frac{u}{\sqrt{a}} \tag{A.23}$$

y el diferencial respectivo

$$dx=\frac{du}{\sqrt{a}} \tag{A.24}$$

y reescribiendola en términos de la nueva variable tenemos

$$\begin{aligned} I_2(a,b) &= \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} duu^2 e^{-u^2-\frac{b}{a^2}u^4} \\ &= \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} duu^2 e^{-u^4}\left(1-\frac{b}{a^2}u^4+\frac{b^4}{a^4}u^8-\frac{b^3}{a^6}u^{12}+\cdots\right)\right], \end{aligned} \tag{A.25}$$

calculando las integrales resultantes tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} duu^2 e^{u^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \tag{A.26}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} duu^6 e^{-u^2} = \frac{5\cdot 3\cdot 2}{2^3}\sqrt{\pi}, \tag{A.27}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} duu^8 e^{-u^2} = \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^4}\sqrt{\pi}, \tag{A.28}$$

y finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} duu^{12} e^{-u^2} = \frac{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^4}\sqrt{\pi}, \tag{A.29}$$

con estos resultados obtenemos una expresión final de la integral dada en al ecuación (A.22)

$$I_2(a,b) = \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\left[\frac{1}{2}-\frac{b}{a^2}\frac{5\cdot 3\cdot 1}{2^3}+\frac{b^2}{a^4}\frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^5}+\cdots\right] \tag{A.30}$$

De acuerdo al método de Monte Carlo

$$f_s(x) = e^{ax^2-bx^4}, \tag{A.31}$$

y con el cambio de variable

$$x = \frac{u}{1-u}, \tag{A.32}$$

la ecuación (A.31) resulta como

$$f_s\left(\frac{u}{1-u}\right) = e^{-a(\frac{u}{1-u})^2+b(\frac{u}{1-u})^4}, \tag{A.33}$$

y entonces la función a considerar de acuerdo al método de Monte Carlo seria

$$g(u) = \frac{2}{(1-u)^2}e^{-a(\frac{a}{1-a})^2+b(\frac{u}{1-u})^4}, \tag{A.34}$$

que obedece a la ecuación

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_s(x)dx = \int_0^1 g(u)du, \tag{A.35}$$

y con el método de Monte Carlo

$$\rightarrow \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(u_n) \tag{A.36}$$

Bibliografía

[1] W. Greiner, S. Schramm, and E. Stein, *Quantum Chromodynamics*, Spronger, Berlin, 2002.

[2] F. Halzen, and A.D. Martin, *Quarks and Leptons*, NY, Wiley 1984.

[3] R. L. Jaffe and F. E. Low, Phys. Rev. **D19**, 2105 (1979).

[4] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B72**, 461 (1974).

[5] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharow, Nucl. Phys **B147**, 385 (1979).

[6] J. Smith, *Introduction to quantum fields on a lattice*, Cambridge University Press, Cambridge 2006.

[7] Olivier Pène, Phys. Rev. (1995)

[8] Massimo Di Pierro, 2008

[9] Marc Wagner, Stefan Diehl, Till Kuske, Johannes Weber, Phys. Rev. (2013)

[10] Rajan Gupta, Phys. Rev. (1998)

[11] Uwe-Jens Wiese, (2009)

[12] P. van Baal, Nucl. Phys. (Proc. Suppl) **B63** (1998) 124

[13] Stephen R. Sharpe, Phys. Rev. (1994)

[14] S Chandrasekharan, U.J. Wiese, Phys. Rev. (2008)

[15] C. Detar, To appear in "Quark Gluon Plasma 2", edited by R. Hwa. World Scientific, 1998 (hep-ph79504325); A. Ukawa, Lectures at INT, Published in Ref. [5].
J-P. Blaizot, J. Korean Physical Society **25** (1992) S65-S98; J. Kapusta, Finite Temperature Field Theory, Cambridge University Press, 1989

[16] R. Celmaster, Phys. Rev **D26** (1982) 2955

[17] N.H Christ. R.Friedberg, and T.D. Lee, Nucl. Phys. **B202** (1982) 89; Nucl. Phys. **B210** (1982) 310, 337.

[18] Para mayor información ver pagina web: https://gcc.gnu.org/wiki/GFortran

[19] Rafael G. Campos, Eduardo S. Tututi, Phys. Lett. **A 297** (2002)

[20] A. G. Kurosh, *The theory of groups*, 2nd English Ed. Chelsea Publish. Co. New York, 1956.

[21] Morton Hamermesh *Group Theory*, Dover Publications, Inc., USA, 1962.

[22] Feynman, R.P. (1948), *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*, Reviews of Modern Physics 20 (2).