UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CS. FÍSICO-MATEMÁTICAS
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

"IMPLEMENTACIÓN DE SOFTWARE EN EL AULA DE CLASES"
(USO DE GEOGEBRA COMO HERRAMIENTA DE APRENDIZAJE)

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LIC. EN CS. FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

GUSTAVO RODRÍGUEZ SÁNCHEZ

ASESOR

DR.en Ciencias Fisico-matemáticas JOSÉ CARLOS CORTÉS ZAVALA

MORELIA, MICH. SEPTIEMBRE 2014

A mis padres Roberto y Lucila

A mis hermanos Vanya y Roberto

A mi novia Erika

AGRADECIMIENTOS

Le doy gracias a mis padres Roberto y Lucila por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. Sobre todo por ser un excelente ejemplo a seguir.

A mis hermanos por ser parte importante de mi vida y representar la unidad familiar.

A Erika, por haberme apoyado siempre en las buenas y en las malas, y por brindarme su amor incondicional.

Le agradezco la confianza, apoyo y dedicación de tiempo a mi asesor, el profesor José Carlos Cortés Zavala, por haber compartido conmigo sus conocimientos y sobre todo su amistad.

A mis amigos que me estuvieron apoyando en el transcurso de la carrera.

Al director de la preparatoria EDC, el profesor Pablo Guzmán, quien gracias a su cooperación fue posible llevar a cabo éste trabajo.

A mis profesores de la carrera, que gracias a ellos ahora soy un Lic. En Cs. Físico-Matemáticas

GUSTAVO

CONTENIDOS

IMPLEMENTACIÓN DE SOFTWARE EN EL AULA DE CLASE

EL USO DE GEOGEBRA COMO HERRAMIENTA DE APRENDIZAJE

Gustavo Rodríguez Sánchez. rodrguezg@gmail.com

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH). Michoacán, México.

RESUMEN

Actualmente el integrar un software dinámico al aula de clases es de vital importancia pues les permite a los alumnos trabajar dinámicamente de diversas maneras motivando y promoviendo la interacción y participación entre ellos, potenciando el desarrollo del pensamiento variacional. Este trabajo se basa en la realización de un estudio aplicado a alumnos de preparatoria mediante la utilización de hojas de trabajo apoyadas en animaciones creadas con el software GeoGebra, en los cuales se hace referencia a conceptos de cálculo diferencial tales como coordenadas, graficación, variable dependiente e independiente, dominio y contradominio, pendiente de una recta, series y la derivada desde el punto de vista de las pendientes, como base de la experimentación.

Los resultados nos muestran que los alumnos se dieron cuenta de que se pueden ver gráficamente ciertos fenómenos que suceden cotidianamente y pueden ser analizados mediante el software, además reafirmaron conceptos. El uso de GeoGebra ayudó a los estudiantes a construir múltiples representaciones de conceptos y ayudó a evitar obstáculos algebraicos para centrarse en la comprensión del tema, permitiendo así incrementar el desarrollo de sus destrezas y habilidades mediante la estimulación e innovación, logrando una mejora en su rendimiento académico.

ABSTRACT

Actually integrate a dynamic software in classroom is vital because it allows learners to work dynamically in several ways motivating and promoting interaction and participation among them, promoting the development of variational thought. This work is based on a study applied to high school students through the use of worksheets supported by animations created with GeoGebra software, which refer to concepts of calculus such as coordinates, graphing, dependent variable is and independent domain and counter-dominance, slope of a line, series and derived from the point of view of the slopes, as a basis for experimentation.

The results show that students realized that certain phenomena can graphically see that happen daily and can be analyzed using software also reaffirmed concepts. Using GeoGebra helped students construct multiple representations of concepts and helped avoid algebraic obstacles to focus on understanding the subject, thus allowing to increase the development of their skills and abilities by stimulating and innovation, leading to improved performance academic.

Keywords: Uso de GeoGebra en el aula, software dinámico, modelación matemática, visualización matemática, preparatoria, cálculo diferencial.

Introducción

El aprendizaje de las Matemáticas y la instrucción es un proceso muy complejo, como se ha dado a conocer en más de tres décadas de investigación en educación matemática (Gutiérrez y Boero, 2006; Lesh, 2006; Lesh y Doerr, 2003).

Además, el aprendizaje matemático es un proceso social, donde las diversas formas de experiencias individuales interactúan con los elementos normativos de un campo, en los cuales hay ideas de cada concepto matemático que está conectado a otros conceptos y viceversa. Estas interconexiones entre las ideas matemáticas son frecuentemente solidificadas por sus múltiples representaciones (Goldin, 2003; Sfard, 1991).

A mediados de los años noventa, se empezó a escuchar un término denominado TIC (Tecnologías de Información y Comunicación), el cual fue el resultado de los avances en la informática, la electrónica y las telecomunicaciones.

Duncombe & Heeks (1999) denominan a las TIC como el conjunto de procesos y productos derivados de las nuevas herramientas (hardware y software), soportes y canales de comunicación relacionados con el almacenamiento, procesamiento y transmisión digitalizados de la información, que permiten la adquisición, producción, tratamiento, comunicación, registro y presentación de informaciones, en forma de voz, imágenes y datos contenidos en señales de naturaleza acústica, óptica o electromagnética.

Se ha mostrado un gran interés de incorporar las TICs en la educación, debido a que puede enriquecer el proceso de enseñanza aprendizaje, aprovechando así las herramientas tecnológicas con las que se cuentan en la actualidad. Así lo expresa Baeza de Oleza (1995) al decir que dentro del marco de las nuevas posibilidades que ofrecen los recursos hipermediales junto con dos de sus características esenciales, la visualización y la interactividad, se desarrolla uno de los factores esenciales de la enseñanza: el aprendizaje.

Según la UNESCO en sus Estándares de Competencias en TIC para docentes (2008), en la educación las Tecnologías de la Información y la Comunicación pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar las capacidades necesarias para llegar a ser:

- Competentes para utilizar tecnologías de la información
- Buscadores, analizadores y evaluadores de la información
- Solucionadores de problemas y tomadores de decisiones

- Usuarios creativos y eficaces de herramientas de productividad
- Comunicadores, colaboradores, publicadores y productores
- Ciudadanos informados, responsables y capaces de contribuir a la sociedad.

La complejidad cognitiva de las matemáticas en general relaciona la naturaleza humana y el aprendizaje de las matemáticas con la enseñanza, que se pueden caracterizar en múltiples dimensiones (Dossey, 1992; Freudenthal, 1973). Por ello, para que el proceso sea mas sencillo, es conveniente el uso de técnicas de enseñanza que sirvan como apoyo para el aprendizaje. Dentro de este marco se puede hacer uso de las TICs dentro de las cuales podemos hacer mención de los software educativos que han sido diseñado como herramienta de apoyo.

Existen diversas definiciones de software educativo a las que se han arribado luego de múltiples trabajos de investigación desarrollados a lo largo del tiempo. La formulación de estas definiciones han surgido por el análisis de ciertas características, tales como:

- Función y finalidad del software
- Modalidad
- Rol del alumno

"Con la expresión "software educativo" se representa a todos los programas educativos y didácticos creados para computadoras con fines específicos de ser utilizados como medio didáctico, para facilitar los procesos de enseñanza y de aprendizaje" (Marqués, 1996).

Según Marqués (1996), podemos incluir en esta definición a todos los programas que han sido elaborados con fines didácticos. Esto es, desde los tradicionales programas de Enseñanza Asistida por Ordenador (EAO), (programas basados en los modelos conductistas de la enseñanza), hasta los programas todavía experimentales de Enseñanza Inteligente Asistida por Ordenador (EIAO). Estos últimos, utilizando técnicas propias del campo de los Sistemas Expertos y de la Inteligencia Artificial en general, pretenden imitar la labor tutorial personalizada que realizan los profesores y presentan modelos de representación del conocimiento en consonancia con los procesos cognitivos que desarrollan los alumnos.

ANTECEDENTES

Un buen software educativo es aquel que facilita el logro de los objetivos para el cual fue creado y es eficaz en su tarea. Para alcanzar esta meta, Marqués (1998) indica algunas de las características que debe poseer el software:

- Facilidad de uso e instalación
- Versatilidad (adaptación a diversos contextos)
- Calidad del entorno audiovisual
- Calidad en los contenidos (bases de datos)
- Navegación e interacción
- Originalidad y uso de tecnología avanzada
- Capacidad de motivación
- Adecuación a los usuarios y a su ritmo de trabajo
- Potencialidad de los recursos didácticos
- Fomento de la iniciativa y el autoaprendizaje
- Enfoque pedagógico actual
- Documentación
- Esfuerzo cognitivo

Por ello se ha decidido trabajar con el software Geogebra pues cumple de manera excelente las características antes mencionadas.

Andrés Ortiz Hernández en 2012 presentó en el VIII Festival Internacional de Matemática los resultados obtenidos de realizar un curso virtual en Costa Rica, en el que se capacitaron a docentes a utilizar el software GeoGebra como una herramienta dinámica y el acota que "*GeoGebra es una herramienta dinámica y gratuita con la que le damos la oportunidad al estudiante de descubrir por sí mismos, es decir, que mediante el análisis y la exploración, y una guía adecuada, el estudiante pueda construir sus propios conocimientos*".

Alicia M. Iturbe en el 2012, en su trabajo "Uso del Geogebra en la enseñanza de la geometría en carreras de diseño", hizo uso de un applet sobre los frisos de Escher elaborados con GeoGebra con el fin de realizar construcciones geométricas en el plano que permitieran estudiar curvas, polígonos, transformaciones, relacionar rectángulos notables y razones geométricas, y ella menciona que "*GeoGebra, por su carácter dinámico, nos brinda la posibilidad de enriquecer el tratamiento de los contenidos que proponemos, como por ejemplo la vinculación entre dibujo y figura, el carácter anticipatorio y de validación que nos ofrece la geometría, la vinculación entre la aritmética y la geometría, etc. En ese sentido el GeoGebra da posibilidad de variación de problemas para que el alumno explore en forma autónoma durante el proceso de solución, permite que aparezca la búsqueda y exploración de* *relaciones matemáticas, así como visualizar y explorar el significado de esas relaciones*".

César Fabián Romero Félix de la Universidad de Sonora en su publicación "Una actividad didáctica para introducir gráficamente el concepto de transformación lineal; usando Geogebra" comenta que "*Los ambientes dinámicos diseñados con Geogebra pueden facilitar a los estudiantes la observación y comprobación de las propiedades gráficas mediante la manipulación directa en pantalla, facilitando con ello la conversión gráfico-algebraica*"

Fernando Hitt, Carlos Cortés y Myriam Rinfret en su trabajo del 2013 "Utilisation des Technologies dans la Classe de Mathématique au Secondaire: Des outils Sous-Exploités" en el cual hacen referencia a un estudio sobre los factores de influencia en la utilización de las TIC para la asignatura de Matemáticas en Quebec, encuentran que "*El enfoque de competencia a las escuelas y la resolución de situaciones problemáticas relacionadas con el proceso de modelización matemática de Quebec indica la importancia de integrar las actividades de papel-lápiz utilizando software como GeoGebra*".

Martín Ruiz Jerez en 2011 menciona en su trabajo "Geogebra en el aula" que "*GeoGebra es un programa informático de matemáticas orientado a la educación. La gran ventaja que presenta sobre otros software es la integración de diferentes tipos de vista, algebraica, gráfica y numérica, que nos permite trabajar dinámicamente de varias maneras, observando también los resultados algebraicos y geométricos al mismo tiempo*".

Francisco J. Córdoba Gómez y Pablo F. Ardila Rojo, en su estudio "El uso de Geogebra en la Solución de Algunos Problemas de Modelación en Matemática Escolar", el cual forma parte del proyecto de investigación "Estudio del impacto de la incorporación de prácticas de modelación en las clases de Matemáticas para estudiantes de tecnología e ingeniería del ITM como una forma de acercar las Matemáticas a la realidad" acotan que "*La estrategia de modelación en la clase de Matemáticas con ayuda de las representaciones que permite GeoGebra (visualización) se puede convertir en una alternativa motivadora que promueve la interacción y participación en clase de Matemáticas*".

Héctor M. Ruíz Vahos acota en su estudio "Uso de GeoGebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas" que "*El asistente matemático GeoGebra integra el trabajo en las áreas de geometría, álgebra y análisis matemático en un ambiente dinámico potenciando entre otros, el desarrollo del pensamiento variacional*"

La utilización de este software dinámico (GeoGebra) como herramienta didáctica de enseñanza nos provee una ventaja considerable respecto a los métodos de enseñanza tradicionales, pues haciendo uso de éste programa le damos al estudiante la posibilidad de aprender por sí mismos, mediante la integración de diferentes tipos de visualización, la exploración y comprobación dinámica de propiedades físicas manipulando los parámetros y poder así analizar simulaciones de procesos físicos que ocurren en la vida cotidiana motivando al estudiante a que se interese por las matemáticas.

Todo esto nos abre camino y nos inspira a la realización del presente estudio que pretende obtener resultados significativos al utilizar el software GeoGebra como herramienta de enseñanza.

JUSTIFICACIÓN

Dado que en la actualidad la tecnología está presente en todo lugar, es necesario aprovecharla en el aula de clases a nuestro favor de tal manera que nos facilite y apoye para que los estudiantes se interesen más por las matemáticas mediante el uso de simulaciones y modelación de procesos físicos cotidianos.

Para ello podemos hacer uso de software creados para tales motivos como el GeoGebra, el cual nos brinda la oportunidad de interactuar directamente con las situaciones a estudiar manipulando parámetros y observando su comportamiento.

GeoGebra es una aplicación informática dentro de los llamados Sistemas de Geometría Dinámica (DGS por sus siglas en inglés). Este término hace referencia a aquellos programas informáticos de representación geométrica que permiten al usuario modificar los elementos (por ejemplo, arrastrándolo) y observar la respuesta de otros elementos de manera dinámica o, dicho de forma, en 'tiempo real". Por ejemplo, podemos dibujar un triángulo y observar cómo varía su área si arrastramos uno de sus vértices a lo largo de la gráfica.

Es un software extraordinario y de gran alcance para la enseñanza de matemáticas y el aprendizaje. El nombre mismo sugiere una integración de geometría y álgebra, y en cierta medida se logra esta integración en el apoyo a la definición geométrica de las variables que pueden actuar en ambos contextos gráficos y geométricos.

Podemos agregar en este sentido, lo que plantean Cassina e Iturbe (2000) cuando expresan “el mismo software permite la validación inmediata de los resultados, ya que se puede observar de una manera interactiva si al variar los datos se alteran o no las condiciones establecidas”.

Los DGS permiten dibujar, de manera sencilla, "cualquier" figura geométrica, hallar áreas, distancias, elementos característicos, etc. Además, podemos observar qué ocurre con estos parámetros si modificamos las coordenadas u otras características de la figura. En el aprendizaje de la geometría facilita el ver y entender con mayor claridad los conceptos ligados a las figuras, además de permitir la formulación y comprobación de conjeturas y acercar el problema y su solución al alumno.

Un ambiente de geometría dinámica como GeoGebra nos brinda la posibilidad de enriquecer el tratamiento de los contenidos que proponemos, como por ejemplo la vinculación entre dibujo y figura, el carácter anticipatorio y de validación que nos ofrece la geometría, la vinculación entre la aritmética y la geometría, etc.

Otras de las razones por que se decidió utilizar GeoGebra es debido a su practicidad, pues es de licencia libre y de código abierto, es multiplataforma, y una gran ventaja de GeoGebra es que aúna las características de dos tipos de programas matemáticos: es, al mismo tiempo, un DGS y un CAS (Sistema de Álgebra Computacional). Esto significa que los comandos pueden ser introducidos de dos maneras: con el ratón (como en los DGS) y con el teclado (como en los CAS). Es decir, podemos dibujar una recta que pasa por dos puntos clicleando con el ratón sobre la gráfica y buscando la herramienta que crea una recta que pasa por esos dos puntos, o podemos teclear la ecuación de la recta en la línea de comandos. Su sistema de triple ventana, hoja de cálculo, geométrica y algebraica, permite visualizar al mismo tiempo lo que hagamos en alguna de las otras, de manera que introducir un punto con el ratón o tecleando sus coordenadas da el mismo resultado.

Aunque es posible realizar aplicaciones con una elaboración compleja, GeoGebra está pensado ser sencillo e intuitivo, de manera que profesores y alumnos puedan utilizarlo sin grandes conocimientos informáticos.

Por ello, es factible su uso para que el alumno comience a ver la variación como parte fundamental de su aprendizaje y se genere en él una manera distinta de raciocinio no solamente ante los problemas de clases, sino en su vida diaria.

OBJETIVOS

El presente trabajo tiene como objetivo que el alumno comience a modificar su forma de visualizar las matemáticas y aprenda a ver la variación como parte primordial en su aprendizaje, mediante la modelación de problemas físicos comunes (específicamente el movimiento de la caída de una escalera en reposo, la caída de agua desde un recipiente a cierta altura y el disparo de un cañón).

Para ello, se pretende:

- Que el alumno aprenda a manejar el programa GeoGebra y vea lo simple que es manipularlo.

- Que el alumno recuerde o reafirme los conceptos de variable dependiente e independiente.

- Que el alumno tenga conocimientos de lo que es el dominio y el contradominio tanto de una gráfica como de una función.

- Que el alumno se formule la idea de que los fenómenos físicos se pueden representar mediante funciones, y que esas funciones son posibles de graficar.

- Que el alumno pueda relacionar graficas con funciones y funciones con gráficas.

- Que el alumno comience implícitamente a hacer demostraciones y hacerlo pensar de manera distinta.

- Que el alumno entienda que el cociente de las diferencias (incrementos) $\Delta y/\Delta x$ no es mas que la pendiente de una recta.

- Que el alumno aprenda a encontrar el valor n-ésimo de una serie específica.

- Que el alumno tenga la idea que en base a las pendientes de las rectas de una función se es posible obtener la derivada de la misma.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Investigaciones recientes revelan que a los estudiantes de preparatoria se les complica comprender los temas referentes al cálculo diferencial y esto se ve reflejado porque tienen un alto índice de reprobación, y al ver esos tópicos en grados siguientes, los han olvidado o recuerdan muy poco sobre ellos.

En este estudio se hace uso de hojas trabajo aunado a archivos creados en el programa GeoGebra en los cuales se hace referencia a conceptos de cálculo diferencial, tales como coordenadas, graficación, variable dependiente e independiente, dominio y contradominio, pendiente de una recta, series y la derivada, como base de la experimentación.

Por ello surgen las inquietudes, ¿Qué hacer para que los estudiantes entiendan mejor los temas de graficación, dependencia e independencia de variables, dominio y contradominio de funciones, pendiente de una recta, series y la derivada? ¿El uso de hojas de trabajo apoyado en software dinámicos ayudan a que el estudiante comprenda mejor los conceptos mencionados? ¿El software elegido ayuda a que los estudiantes relacionen los temas en cuestión con fenómenos cotidianos? ¿Las animaciones creadas en el software motivaron al estudiante a comprender los conocimientos esperados?

Mediante este estudio, se quiere hacer una aportación en la cual se pretende comprobar que el uso de hojas trabajo apoyadas en un software dinámico (GeoGebra en éste caso) mediante modelaciones aplicado en el aula de clases permite incrementar el desarrollo de las destrezas y habilidades de los alumnos mediante la estimulación e innovación de tal manera que se logre una mejora en su rendimiento académico y así comprender mejor los conceptos de variable dependiente y variable independiente, dominio y codominio, intuyan valores de series, pendiente de una recta, derivación relacionando las pendientes y tengan noción de lo que es demostrar, obteniendo así que el uso de este software es un medio poderoso para desarrollar en el alumno sus potencialidades, creatividad e imaginación.

Marco Teórico y Exposición de las Hojas de Trabajo

Actualmente son muchas las investigaciones que estudian las diferentes formas de enseñar Matemáticas y cómo se produce el aprendizaje por parte de los alumnos. En éste estudio se hace uso de un software como apoyo de enseñanza con el fin de que el alumno comience a ver la variación como parte fundamental de su aprendizaje, pero para ello debemos tomar en cuenta los efectos que tienen en el alumno la visualización respecto al aprendizaje de las matemáticas, el uso y la practicidad al utilizar el software y la implementación de éste como apoyo a la visualización matemática mediante la modelación matemática.

Visualización en el Aprendizaje de las Matemáticas

En la búsqueda de nuevas metodologías para la enseñanza, la inclusión de tecnologías y el aporte que estas realizan a la visualización de diferentes conceptos es muy amplia. Esto se debe a que permiten que se desarrollen actividades desde más de un sistema de representación, es decir no sólo desde el enfoque algebraico sino que también logren visualizar el concepto desarrollado. Para ejemplificar la importancia de la visualización reflexionemos el ejemplo planteado por Hitt (2003):

“...podemos percibir una mosca que vuela y no prestamos atención a ese hecho, sin embargo, al querer atravesar una calle y vemos un coche que viene hacia nosotros, realizamos un acto de conocimiento directo en términos de evaluar su velocidad y decidir si es conveniente atravesar o no la calle. Esto último, visualizar, generalmente lo hacemos inconscientemente”

La visualización ha sido generalmente considerada solo como un soporte que ayuda a la intuición y formación del concepto en el aprendizaje matemático, sin embargo en los últimos años muchos matemáticos y educadores matemáticos han reconocido la importancia del razonamiento visual no solo en el descubrimiento, sino también en la descripción y justificación de resultados, ya que la visualización juega un papel importante en el desarrollo de las estructuras cognitivas del estudiante y del pensamiento matemático (Zúñiga, 2009).

Zimmermann y Cunningham (1991) indican que, para enriquecer la comprensión matemática, es necesario tomar en cuenta la visualización, la cual usualmente es asociada con representaciones gráficas, que no ocurre como un tema aislado sino dentro de un contexto matemático que además incluye representaciones numéricas y simbólicas.

También se ha considerado como una forma de razonamiento en la investigación matemática, así como en su aprendizaje. Lograr que el alumno visualice los contenidos temáticos para el aprendizaje en matemáticas es de fundamental importancia y la inclusión de tecnologías es una alternativa que puede ayudar a lograrlo.

El profesor puede en su clase proponer y desarrollar distintos ejemplos para los cuales aplicará los diferentes métodos de resolución que estén abordando. Sin duda podrá utilizar el pizarrón, diapositivas o presentaciones; pero por una cuestión de tiempo podrá explayarse sólo en un ejemplo representándolo gráficamente. Con la utilización de un software adecuado y seleccionando previamente los ejemplos correctos, podrá ilustrar su clase con tantos casos como lo crea necesario e incluso proponer nuevos ejemplos, promoviendo la participación de los alumnos. Podrá trabajar también con el mismo ejemplo, cambiando las variables implicadas para observar como se modifican los resultados que se obtienen.

La posibilidad de visualizar gráficamente conceptos teóricos así como también la de modificar las diferentes variables que intervienen en la resolución de problemas, favorece el aprendizaje de los alumnos (Aleman de Sánchez, 1998/1999 y Rivera Porto, 1997).

En relación al carácter dinámico, Arcavi y Hadas (2000) plantean que un ambiente dinámico permitiría a los alumnos construir figuras con ciertas propiedades y así poder visualizarlas, pero también les permitiría transformar aquellas construcciones en “tiempo real”, lo que contribuiría a la formación del hábito de transformar (mentalmente o por medio de un instrumento) un ejemplo particular para estudiar variaciones; visualmente sugiere invariantes y también proporciona la conformación de las bases intuitivas para justificaciones formales.

Las computadoras proveen un aprendizaje dinámico e interactivo que permiten la rápida visualización de situaciones problemáticas. Por ello, una manera de poder ver fenómenos físicos y relacionados con las matemáticas sin tener la necesidad de esperar a que éstos sucedan naturalmente, es mediante el uso de programas, software y simulaciones en la computadora.

Para ello se han desarrollado un sinfín de software que generan un ambiente que permite desarrollar cálculo numérico y simbólico, visualización y manipulación de datos, gráficos y objetos.

MODELACIÓN

En la actualidad, es de gran relevancia para los estudiantes poder observar y analizar los procesos físicos que ocurren diariamente en nuestras vidas provocando en ellos la inquietud e interés por saber qué es lo que sucede, pero esperar a que éstas situaciones se presenten para poder ser estudiadas es un proceso no tan inmediato.

Un medio adecuado para alcanzar esta meta en los alumnos es la modelación matemática, un proceso que describe situaciones del mundo real en términos matemáticos con el fin de obtener la comprensión adicional o predecir el comportamiento de estas situaciones (Lesh y Doerr, 2003; Mousoulides e Inglés, 2008).

En el uso de los modelos y el modelado de la perspectiva, los estudiantes tienen la oportunidad de crear, aplicar y adoptar modelos matemáticos y científicos para interpretar, explicar y predecir el comportamiento de problemas basados en el mundo real.

Los modelos matemáticos y el modelado se han definido de diversas formas en la literatura (Blum y Niss, 1991; Greer, 1997). Adoptamos la perspectiva de que los modelos son "sistemas de elementos, operaciones, relaciones y normas que pueden utilizarse para describir, explicar o predecir el comportamiento de algún otro sistema familiar" (Doerr & English, 2003, p.112).

La modelación matemática es un proceso involucrado en la obtención de un modelo matemático. Más específicamente, un modelo matemático de un fenómeno o situación es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión. El modelo permite no sólo obtener una solución particular, si no poder generalizarla a una solución que englobe todas las posibilidades, además de poder servir de soporte para otras aplicaciones o teoría.

Hitt & Cortés (2009) especifican en referencia a la modelación matemática y la formación de conceptos que: “la modelización matemática frecuentemente implica la búsqueda de una función como modelo matemático que permita analizar el fenómeno y explicarlo con ese modelo.. [ ] ..la modelación matemática puede ser a través de una representación gráfica de una función.. [ ] ..permite conceptualizar los resultados a través de las diferentes construcciones.

En el desarrollo de los modelos, los estudiantes normalmente se someten a un proceso cíclico de interpretar la información del problema, la selección de cantidades relevantes, identificando las operaciones y variables, y la creación de representaciones significativas (Lesh y Doerr, 2003).

El proceso de modelación involucra una serie de procedimientos, a saber, elección del tema; reconocimiento de la situación/problema o delimitación del problema; familiarización con el tema que va a ser modelado o referencial teórico; formulación del problema o hipótesis; formulación de un modelo matemático y desarrollo; resolución y validación del modelo y evaluación. Este proceso cíclico se repite hasta que la idea (modelo o diseño) cumple con las limitaciones especificadas por el problema (Zawojewski, Hjalmarson, Bowman, y Lesh, 2008).

En las actividades de modelado, los alumnos se presentan con problemas complejos del mundo real que implican el desarrollo de modelos y en la que los estudiantes expresan repetidamente, para probar y refinar o revisar sus actuales formas de pensamiento que se esfuerzan por crear modelos que permitan aportar soluciones significativas que compongan las ideas principales y procesos que se pueden utilizar en problemas estructuralmente similares (Lesh y Doerr, 2003).

Actualmente una de las principales maneras de introducir la modelación al aula de clases es mediante el uso de software que trabajen bajo la geometría dinámica con el fin de emular o simular una situación o problema tal que el alumno observe el proceso y conjeture sus propias hipótesis.

La Geometría Dinámica ofrece oportunidades para traer el mundo real en el aula de matemáticas, para añadir la visualización, el color y la animación que no es posible en un salón de clases tradicional y para profundizar el pensamiento matemático que esperamos de los estudiantes en diversos temas; y se puede proporcionar principalmente de dos maneras: mediante el uso de imágenes digitales y mediante el uso de simulaciones.

Las simulaciones, que son pequeñas aplicaciones o applets que animan una función que toma sus diferentes valores de variables, aumentan la comprensión de un proceso, pues, que los estudiantes lleguen a comprender verdaderamente un proceso o función es una de las tareas más difíciles en la educación matemática (Novak, 2011).

Por supuesto, es mucho más fácil de entender un proceso con objetos concretos que con las variables. Sin embargo, transmitiendo la idea de proceso o función con variables, sigue siendo esencial no sólo para que los estudiantes puedan aprender matemáticas, sino para que puedan desarrollar habilidades vitales como el modelado, la conexión, la crítica.

Estudios recientes reportan que la disponibilidad de herramientas tecnológicas puede influir en las exploraciones de los estudiantes, el desarrollo de modelos, y por lo tanto mejorar la comprensión matemática de los estudiantes en el trabajo con las actividades de modelado (Lesh et al, 2007;.. Mousoulides et al, 2008). Además, estos estudios han mostrado que el uso de herramientas apropiadas puede mejorar el trabajo de los estudiantes y, por tanto, dar lugar a mejores modelos y soluciones.

GEOGEBRA COMO APOYO A LA VISUALIZACIÓN MATEMÁTICA: UN SOFTWARE DE MODELACIÓN MATEMÁTICA

Existen diversos software interactivos comerciales o de características libres, que permiten utilizar herramientas de álgebra, geometría y cálculo, convirtiéndolo en una herramienta muy útil para trabajar en procesos físicos cotidianos. Con estos software se pueden hacer construcciones con puntos, segmentos, líneas y cónicas que se modifican en forma dinámica así como también poder definir funciones reales de variable real, calcular y graficar sus derivadas, integrales, y demás.

Las tecnologías para el aprendizaje de matemáticas dinámicas, como GeoGebra, proporcionan una plataforma innovadora de experimentar con los principios básicos de la Educación Matemática Realista, en particular, su enfoque en el uso de contextos realistas como fuente de conceptos matemáticos y reinvención guiada como método principal de matematización.

GeoGebra es un software matemático de código abierto que integra múltiples representaciones dinámicas, diversos campos de las matemáticas, y una rica variedad de utilidades computacionales para modelado y simulaciones de aprendizaje. Inventada en la década del 2000, GeoGebra busca implementar de una manera amistosa los resultados basados en investigaciones relacionadas con la comprensión matemática y la competencia , así como sus implicaciones para la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje: se pueden coordinar varias representaciones de una idea matemática de una manera dinámica.

En virtud de su interfaz fácil de usar y su accesibilidad, GeoGebra está abordando activamente los problemas tradicionales de la educación matemática y el desarrollo de nuevas intervenciones pedagógicas y perspectivas teóricas sobre la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje, aprovechando al mismo tiempo los dos inventos tecnológicos y teóricos. Mientras tanto, en los campos de las ciencias de aprendizaje y diseño de instrucción, los investigadores han puesto de relieve las implicaciones teóricas y prácticas de los modelos mentales y modelos conceptuales en el aprendizaje humano complejo (Milrad, Spector, & Davidsen, 2003; Seel, 2003).

Un modelo centrado en el marco del aprendizaje y la instrucción no sólo nos ayuda a entender los procesos cognitivos de los sentidos de decisiones y dificultades de aprendizaje matemático, sino también se presta a los modelos de diseño instruccional que facilita significativamente el aprendizaje y la comprensión.

La última versión de GeoGebra ofrece múltiples representaciones dinámicamente vinculadas para objetos matemáticos (Hohenwarter & Jones 2007) a través de sus vistas gráficas, algebraicas y hojas de cálculo, y también trabaja bajo un sistema de álgebra computacional (CAS).

Además, es un software innovador, práctico y “moderno” pues actualmente GeoGebra se encuentra disponible para equipos inteligentes (ipod, ipad, smartphones, android, Windows pone, tablets) lo que facilita aún más su portabilidad y uso.

Entre las diversas tecnologías de aprendizaje de matemáticas, GeoGebra ha ganado creciente reconocimiento internacional desde su lanzamiento oficial en 2006 debido a su condición de código abierto, los desarrolladores internacionales y una base de usuarios cada vez mayor de los matemáticos, educadores matemáticos y profesores de aula (J. Hohenwarter y M. Hohenwarter, 2009; Hohenwarter y Preiner, 2007).

Como una invención del siglo XXI, GeoGebra es una de varias matemáticas de próxima generación de tecnologías que están cambiando la infraestructura de representación de la educación matemática y proporcionando a la comunidad mundial un acceso fácil y gratuito a poderosos procesos y herramientas (Kaput et al aprendizaje matemático., 2002).

Visto desde la perspectiva teórica de RME (La teoría de la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1978; Gravemeijer, Cobb, Bowers, y Whitenack, 2000; Streefland, 1991; Treffers, 1987)), GeoGebra ofrece una variedad de recursos digitales que permiten a los alumnos matematizar situaciones problemáticas reales, inventar y experimentar con modelos de significado personal el uso de múltiples representaciones y herramientas de modelado y, además, proceder a formular las ideas matemáticas cada vez más abstractas.

Nuestra comprensión de un determinado fenómeno equivale a la construcción de un modelo mental de ello; nuestra interpretación depende del modelo y de los procesos involucrados en la construcción, ampliación y evaluación del modelo mental. En efecto, como afirma Johnson-Laird (1983), "todo nuestro conocimiento del mundo depende de nuestra capacidad para construir modelos de la misma" (p. 402).

GeoGebra ofrece aplicaciones integradas de modo que la geometría dinámica está perfectamente ligada a la capacidad de la calculadora científica y un graficador de funciones. También permite algún uso de texto e imágenes digitales, dar presentaciones atractivas de alta calidad sobre situaciones del mundo real que a los estudiantes les sea de interés, establecer tareas que permiten a los estudiantes explorar las regularidades matemáticas y la variación dentro de una representación matemática, establecer tareas que permiten a los estudiantes explorar los vínculos entre diferentes representaciones matemáticas de los objetos matemáticos.

Actividades escolares en las que la modelación sea la estrategia didáctica principal y en cuyo desarrollo las interacciones sean promovidas por medio de un trabajo colaborativo y en articulación con la visualización ayudada con GeoGebra, pueden motivar y estimular a los estudiantes a ver las Matemáticas desde otra perspectiva y con mayor funcionalidad de tal forma que se permita la construcción de un conocimiento matemático significativo (Córdoba y Ardila, 2012).

GeoGebra ofrece una verdadera integración de los entornos de gráficos y geometría: los objetos gráficos se pueden manipular y actuar en el uso de herramientas geométricas. Incluso existe una interacción dinámica entre la gráfica y su forma simbólica: como el gráfico se mueve y cambia, sus actualizaciones de forma algebraica son en “tiempo real” y los estudiantes construyen fácilmente una profunda comprensión de la relación entre las formas gráficas y algebraicas.

Una de las ventajas de articular la modelación con la representación que permita GeoGebra es que promueve y facilita procesos de interacción entre sujetos y entre los sujetos y el ambiente dinámico que ofrece el software, potenciando de esta manera aprendizajes colectivos en un proceso constructivo continuo (Córdoba y Ardila, 2012).

El valor de los problemas del mundo real para la enseñanza de las matemáticas ha sido bien reconocido durante muchos años (véase, por ejemplo Burkhardt, 1981). Las ventajas de proporcionar una experiencia de plan de estudios para los estudiantes que es rico en referencia a los problemas del mundo real han sido resumidos por Blum y Niss (1989) como:

- Fomento de las competencias y las actitudes (como la creencia de que la matemática es útil) de carácter general
- Preparación de los ciudadanos que tienen competencia crítica (saber, por ejemplo, la forma de analizar los datos con cuidado)
- Equipar a los estudiantes con las habilidades necesarias para utilizar las matemáticas para resolver problemas
- Dar a los estudiantes una imagen rica y amplia de las matemáticas (incluyendo sus aplicaciones)

- Motivar a los estudiantes a aprender matemáticas de tipo tradicional (por ejemplo, al mostrar cómo un objeto particular, es relevante para la carrera elegida por el estudiante)

En la era de la información actual, los estudiantes se enfrentan a una economía basada en el conocimiento más exigente y el lugar de trabajo, en la que tienen que hacer frente eficazmente a los sistemas complejos, dinámicos y de gran alcance de la información y ser hábil con las herramientas tecnológicas (Lesh y Zawojewski, 2007). La necesidad de desarrollar la capacidad del alumno para utilizar correctamente las herramientas tecnológicas en el tratamiento de resolución de problemas complejos para el éxito más allá de la escuela se ha destacado por una serie de organizaciones profesionales (National Research Council [NRC], 2001; Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas [NCTM] , 2000; Mousoulides 2011).

Exposición de Actividades

Tomando como base los principios anteriores y puesto que la constante evolución que la tecnología ha sufrido en los últimos años ha ido mermando los métodos de la enseñanza tradicional en el aula de clases, surge este trabajo a partir del cual se pretende incrementar el desarrollo de las destrezas y habilidades de los alumnos implementando la tecnología en las aulas de clase para estimular e innovar de tal manera que se logre una mejora en su rendimiento académico; aumentar además, su motivación, permitiéndoles que exploren e interactúen con el software y así obtengan un aprendizaje significativo.

Por ello, en el presente trabajo, se propone la implementación de un software educativo (GeoGebra) para facilitar y mejorar la enseñanza y el aprendizaje de un tema concerniente a Cálculo, considerando que la Informática en la Educación, sobre todo en la Educación Matemática, es un medio poderoso para desarrollar en el alumno sus potencialidades, creatividad e imaginación.

Dentro de los objetivos esperados al final del trabajo se pretende que los alumnos relacionen los conceptos de variable dependiente, variable independiente, el dominio, el contradominio, la pendiente y la derivada con fenómenos físicos cotidianos mediante animaciones y simulaciones creadas con el software GeoGebra.

Tomando en cuenta lo anterior, se crearon 4 archivos con el software, en los cuales se pudieran ejemplificar los conceptos antes mencionados.

En el primer archivo (FallingStair.ggb) se creó una escalera movible con la idea de que los alumnos la manipularan y comenzaran a familiarizarse con el programa; el archivo está relacionado con la primer hoja de trabajo. Posteriormente los alumnos manipulan el programa de tal manera que logran obtener la gráfica del lugar geométrico de las diferencias de (x's, y's) y (y's, x's)

El objetivo de ésta primer hoja de trabajo es ver que tanto los alumnos recuerdan o que tan familiarizados están con los conceptos de coordenadas, variable dependiente e independiente y graficación.

El problema N°1 de la hoja de trabajo se relaciona con el tema de las coordenadas y su ubicación en el plano cartesiano, los problemas N°2 y N°3 tratan sobre variable dependiente e independiente y por último, los problemas N°4 y N°5 se relacionan con la interpretación de datos y graficación de los mismos.

Al término de ésta hoja de trabajo, se espera que haya resultados medianamente favorables puesto que está pensada como hoja de evaluación, ya que, como en todos los grupos, no todos los alumnos ponen la misma atención o recuerdan cosas de semestres anteriores.

En el segundo archivo (FallingStair2.ggb) también se creó la animación de una escalera, pero a diferencia del archivo anterior, ésta se mueve manipulando el eje de las “y’s”, posteriormente el alumno hace uso del software para lograr obtener la gráfica del lugar geométrico de las diferencias mediante el uso de circunferencias, rectas perpendiculares y rectas tangentes; este archivo está relacionado con la segunda hoja de trabajo.

En el problema N°1 se les pregunta a los alumnos sobre la variable dependiente e independiente de la animación y se les pide que expliquen su respuesta, en el problema N°2 se pidió que eligieran, de entre un par de incisos que se les colocó, la función que mejor representa a la gráfica obtenida de los lugares geométricos de las diferencias de x’s y y’s al manipular el programa. En el problema N°3 se les colocó una imagen de la escalera y se les dio pistas a los alumnos para que pudieran demostrar la ecuación general de la gráfica obtenida anteriormente. En el problema N°4 se pretende que los alumnos encuentren la función específica (H) al darles valores de “A” y “X” para que sustituyan y puedan así despejar la incógnita. En el ejercicio N°5 los alumnos deben graficar la función H dando valores a V de 0 a 7 para que reproduzcan la gráfica de la función específica. Por último, en el ejercicio N°6 se les da la definición y se les pregunta sobre el dominio y el contradominio de la gráfica de la función específica H.

Al término de ésta hoja de trabajo se esperan resultados significantes respecto al tema de variable dependiente e independiente comparado con los resultados que se pudieran obtener de la primer hoja de trabajo. Además se harán notar las deficiencias y dificultades que los alumnos presentan al tratar de hacer demostraciones y se espera “medir” el conocimiento que los alumnos tienen respecto a los conceptos de dominio y contradominio.

En el tercer archivo (Flux.ggb) se estudia una animación de la caída de agua desde un tambo a una cierta altura, analizando el cociente de las diferencias de “*x*” y “*y*”, y está relacionado con la hoja de trabajo N°3. El alumno en sus instrucciones debe accionar “un botón de inicio” de la animación de tal manera que el flujo comience a caer hasta llegar al “suelo” mientras que al mismo tiempo se comienzan a registrar los valores de su posición en la hoja de cálculo. Posteriormente se manipula la hoja de cálculo para obtener las diferencias de las columnas de los valores obtenidos y poder graficar el cociente de las mismas.

En el primer problema de la tercera hoja de trabajo se vuelve a dar la definición y se les pregunta a los alumnos sobre los conceptos de dominio y contradominio de la animación presentada. En los problemas N°2, N°3 y N°4 se les pide a los alumnos que interpreten los valores obtenidos en la hoja de cálculo de las diferencias de las columnas D, E, y el cociente de $\Delta D/\Delta E$, respectivamente. En el problema N°5 se les vuelve a preguntar a los alumnos sobre el tema de dominio y contradominio, pero esta vez de la gráfica obtenida de las pendientes.

Al término de la tercera hoja de trabajo, se espera que a los alumnos se les reduzca al mínimo las dudas respecto a los conceptos de dominio y contradominio, además de que puedan interpretar que el cociente de las diferencias de las columnas D y E no nos mas que las distintas pendientes de las rectas involucradas.

En el último archivo realizado en el software (Canyon.ggb) se estudia una animación del disparo de un cañón y se analiza la parábola que se forma mediante el cociente de las diferencias de la distancia de "*x*" y "*y*" concluyendo que la gráfica de las pendientes de la animación da como resultado la derivada de la función asociada a la gráfica; éste archivo se relaciona con la hoja de trabajo N°4. El alumno en sus instrucciones debe accionar "un botón de inicio" de la animación de tal manera que el cañón se dispare y llegue a su punto máximo mientras que al mismo tiempo se comienzan a registrar los valores de su posición en la hoja de cálculo. Posteriormente se manipula la hoja de cálculo para obtener las diferencias de las columnas de los valores obtenidos y poder deducir una fórmula general para las diferencias.

En el primer problema de la cuarta hoja de trabajo el alumno nuevamente debe escribir el dominio y contradominio de la nueva animación, y en los problemas N°2, N°3 y N°4 el alumno debe intuir y deducir una fórmula general para el valor "n" de las diferencias de las columnas D, E, e $\Delta E/\Delta D$, respectivamente.

Al final de la cuarta hoja de trabajo se espera que el alumno conteste correctamente y no tenga duda alguna del concepto de dominio así como de contradominio, además de que se le forme un razonamiento intuitivo para que sea capaz de deducir, mediante el uso de series, la pendiente de una recta, y que realmente sepa de donde provino cada término, y por consiguiente, tengan en mente que la derivada de una función no es mas que el conjunto de pendientes cuando el $\lim_{x\to 0} \Delta x \approx 0$.

METODOLOGÍA

Después de terminada cada hoja de trabajo, se llevó a revisión con el asesor encargado de la tesis de la Facultad de Cs. Físico-Matemáticas, quien analizó cada una de las hojas e hizo comentarios y anotaciones de lo que creía conveniente fuese modificado.

La hoja de trabajo N°1, la cual fue la que más modificaciones tuvo, se llevó a revisión, el asesor la analizó e hizo sus observaciones para después regresarla. Se cambió gran parte de la estructura y los ejercicios planteados ya que se había realizado de una manera tal que los alumnos interactuaban muy poco con el software lo cual es lo opuesto a la intención que se tiene; el asesor creyó conveniente que “los alumnos fuesen los que controlaran el programa de software”. Entonces, se hicieron las modificaciones convenientes y una vez realizadas, se llevó nuevamente la hoja de trabajo a revisión con el asesor, teniendo mejores resultados, sin embargo, aún había algunos errores de “coherencia” referente a la disposición de los ejercicios. Una vez arregladas esas observaciones, la hoja de trabajo se regresó al asesor, y ésta vez se tuvieron resultados favorables.

En la hoja de trabajo N°2 sucedió algo similar que en la hoja de trabajo N°1; una vez realizada la segunda hoja de trabajo, se llevó a revisión, el asesor la analizó e hizo sus anotaciones correspondientes. Después de revisar los comentarios del asesor, se cambiaron los ejercicios y el esquema inicial, pues de igual manera que la hoja de trabajo anterior, los alumnos tenían poca interacción con el software. Una vez realizadas las modificaciones correspondientes, se presentó al asesor la hoja de trabajo, la analizó y se tuvieron buenos resultados, solo había que agregarle un par de problemas más. Una vez añadidos los ejercicios, se llevó a revisión y la hoja de trabajo quedó lista.

Una vez realizada la hoja de trabajo N°3, se llevó a revisión, el asesor la analizó e hizo las observaciones necesarias. Se realizaron las modificaciones correspondientes y se llevó de nuevo a revisión la hoja de trabajo obteniendo resultados positivos.

Tras ser realizada la hoja de trabajo N°4, ésta fue llevada al asesor para revisión, se hicieron las anotaciones necesarias y posteriormente se procedió a corregir y modificar de acuerdo a los comentarios del asesor. Terminadas las modificaciones, se llevó de nueva cuenta a revisión obteniendo buenos resultados.

Cuando se realizó la hoja de trabajo N°4 se tenía la incertidumbre si ésta debería ser la tercera hoja de trabajo o la cuarta, pero una vez revisada por el asesor se determinó que sería la cuarta, por el grado de dificultad que podría presentársele a los alumnos.

Una vez elaboradas las 4 hojas de trabajo, se procedió a evaluarlas con un grupo pequeño de alumnos de la Facultad de Cs. Físico - Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, con el fin de detectar errores tanto en la edición y en la estructura así como evaluar el grado de dificultad de las preguntas y el entendimiento de las indicaciones.

El proceso de evaluación se llevó a cabo en 2 sesiones debido a la disponibilidad de los alumnos:

La primera sesión abarcó las hojas de trabajo 1 y 2, y fue realizada en el Laboratorio de Computación de la Facultad de Cs. Físico-Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, usando el sistema operativo Linux.

Una semana antes de aplicar la evaluación se pidió prestado el Laboratorio al M.C. Edgardo Morales, el cual autorizó el uso de las computadoras necesarias sin problema alguno. Cabe mencionar que el M.C. Edgardo comentó que las computadoras, tanto las que trabajan bajo el sistema Macintosh como las de Linux, tenían ya instalado el programa de Geogebra, lo cual facilitaba en cierta manera las cosas.

Se hizo la propuesta de resolver las hojas de trabajo a varios alumnos de 2° semestre inscritos en el programa de la carrera de Cs. Físico-Matemáticas; se quedó de acuerdo en una fecha y hora de tal manera que no les afectara a ellos con sus clases y/o maestros. Cuando se hizo la invitación a los alumnos, se les preguntó si tenían conocimiento del programa Geogebra, si alguna vez habían escuchado de él o si sabían cuál era su función, a lo cual respondieron negativamente. Varios de ellos estuvieron de acuerdo en asistir a la invitación hecha, sin embargo, sólo 2 personas se presentaron el día acordado a resolver las hojas de trabajo.

Una vez que llegaron los alumnos, se procedió a copiar los archivos de trabajo del programa a cada una de las computadoras que se utilizarían y se les presentó a los alumnos las hojas de trabajo N°1 y N°2.

Ya que los alumnos no estaban familiarizados con el software Geogebra, se les dio una pequeña introducción de las funciones, opciones y manejo en general del programa mediante una exposición usando una computadora portátil y el programa Geogebra, y se les dio a los alumnos la libertad de explorar y manipular el software antes de empezar con las hojas de trabajo.

Una vez que los alumnos comenzaron con las hojas de trabajo se presentó un problema de compatibilidad al tratar de abrir los archivos, debido a que el programa Geogebra instalado en las computadoras no reconocía los archivos, probablemente porque era una versión muy antigua o estaba dañado el software; debido a esto se tuvo que instalar de nuevo el programa de Geogebra en cada computadora que se iba a utilizar, afortunadamente se previó eso y se llevaba el archivo ejecutable del software en una memoria USB.

Una vez instalado el software y copiados los archivos a cada computadora, los alumnos empezaron a contestar las hojas de trabajo; mientras avanzaban fueron surgiendo dudas, las cuales se respondían inmediatamente y se fueron haciendo anotaciones de las mismas, esto para tener control de los puntos a revisar.

Una vez que los alumnos terminaron las hojas de trabajo, se recogieron, se les preguntó a los alumnos si una semana después podrían volver a resolver otro par de hojas de trabajo a lo cual accedieron, e incluso comentaron que les dirían a otros compañeros mas, y se les dio las gracias.

Posteriormente, en esa semana antes de la segunda sesión, se procedió a analizar y evaluar las hojas de trabajo resueltas por los alumnos. Respecto a esa evaluación y analizando las anotaciones sobre las dudas de ellos, se hicieron las correcciones y modificaciones correspondientes en las hojas trabajo y en los archivos creados en el programa Geogebra, de tal manera que quedaron listas para ser presentadas ante un grupo mayor.

La segunda sesión abarcó las hojas de trabajo 3 y 4, y de igual manera que la primera sesión, se realizó en el Laboratorio de la Facultad de Cs. Físico-Matemáticas, pero esta ocasión se realizó usando el sistema operativo Windows, debido a que las computadoras bajo el sistema Linux estaban ocupadas debido a que un profesor estaba impartiendo clase.

Un par de días antes de aplicar la evaluación, como se hizo en la primera sesión, se pidió prestado el Laboratorio al M.C. Edgardo Morales quien autorizó sin problema alguno el uso de las computadoras que hubiese “disponibles” el día acordado.

Como ya se ha mencionado, los alumnos de la primera sesión comentaron que harían la invitación a otros de sus compañeros para que fueran a resolver las hojas de trabajo, sin embargo, solamente se presentaron los mismos 2 alumnos.

Cuando los alumnos llegaron, en la primera sección del laboratorio, donde se encuentran las computadoras bajo el sistema Linux, un profesor estaba impartiendo clase, por lo que se optó por escoger un par de computadoras que estuviesen en funcionamiento bajo el sistema operativo Windows en la otra sección del laboratorio, donde se encuentran las computadoras Macintosh. Se eligieron las computadoras bajo el sistema Windows debido a que no se traía el archivo de instalación del software Geogebra para el sistema operativo Macintosh.

Una vez elegidas las computadoras a usarse, se procedió a instalar el software, previendo la incompatibilidad de los archivos. En una de ellas no fue posible instalar el programa, debido a que se necesitaban privilegios de administrador y era necesario el nombre de usuario y la contraseña, por ello se determinó elegir otra computadora.

Cuando el programa quedó instalado en las computadoras, se procedió a copiar los archivos de trabajo a cada una de ellas y se les dio a los alumnos las hojas de trabajo N° 3 y 4 para que comenzaran a responderlas.

Al igual que en la primera sesión, conforme los alumnos iban avanzando en las hojas de trabajo, surgían dudas y se fueron resolviendo y haciendo anotaciones de todas ellas para tener un control de los puntos a verificar.

Una vez que los alumnos terminaron de contestar las hojas de trabajo, se recogieron, se apagaron las computadoras utilizadas y se les dio las gracias a los alumnos. Posteriormente, se procedió a analizar y evaluar las hojas de trabajo, comparando sus respuestas con las anotaciones que se habían realizado durante sus dudas; respecto a esa evaluación se hicieron las correcciones y modificaciones correspondientes en las hojas trabajo y en los archivos creados en el programa Geogebra.

Se presentaron las correcciones hechas de las cuatro hojas de trabajo al asesor de la tesis, quien las revisó y estuvo de acuerdo con las modificaciones, con lo cual, las hojas de trabajo quedaban listas para ser expuestas ante un grupo mayor y llevar a cabo la experimentación.

Debido a los temas abordados en las hojas de trabajo, se optó por presentarlas a alumnos de preparatoria que ya hubiesen visto esos temas (de 4to, 5to o 6to semestre preferentemente). Para ello fue necesario mandar algunas solicitudes a los directores de varias preparatorias pidiendo un grupo para llevar acabo la experimentación. Después de algunas respuestas en espera y otras negativas, finalmente el director de la preparatoria EDC, el profesor Pablo Guzmán Pérez, accedió a dar una entrevista para exponer las condiciones y la temática del estudio.

La entrevista se realizó en la preparatoria EDC con el director de dicha institución, se planteó la propuesta del estudio, los requerimientos para llevar a cabo la aplicación de las hojas de trabajo, los objetivos y el fin de la experimentación. Al final de la entrevista, el director de la preparatoria comentó que para poder permitir realizar la experimentación era necesario hablar con el(la) maestro(a) de algún grupo disponible a prestar sus alumnos y sus horas, además de hablar con el encargado del laboratorio de computación para comentarle lo que se pretendía hacer, por ello, el director dijo que habría que comunicarse con él una semana después y así tener una respuesta.

Pasó una semana, después se habló a la dirección de la preparatoria preguntando por el director pero no contestaron; ese día se insistió varias veces pero nadie respondió el teléfono. Al día siguiente se volvió a marcar varias veces el teléfono que el director había proporcionado pero de igual manera que el día anterior nadie respondió, debido a esto, al día siguiente se optó por ir personalmente a la preparatoria y buscar al director.

Se habló con el director y al final si logró llegar a un acuerdo con una maestra y con el encargado del laboratorio de la institución, con lo cual se permitió llevar a cabo la experimentación, sólo se acordó hacerle llegar un escrito que estuviese firmado por el asesor de la tesis donde explicara el motivo, el objetivo y las condiciones que se necesitaban para realizar el trabajo.

El estudio se aplicó en la preparatoria EDC de ésta ciudad de Morelia, a un grupo de 35 alumnos de sexto semestre con orientación a matemáticas y química, a cargo de la C. Geraldine Jassí Vega, el cual fue desarrollado en el laboratorio de computación de dicha preparatoria, equipado con 32 computadoras.

El estudio se llevó a cabo en dos sesiones de 1 hora 40 minutos cada una, esto debido a la disponibilidad del laboratorio y los horarios del grupo, ya que el estudio se aplicó en las horas asignadas de la materia de matemáticas.

Los materiales que se necesitaron para llevar a cabo la experimentación fueron: Juegos de todas las hojas de trabajo para cada alumno, los archivos de trabajo elaborados en Geogebra, una memoria USB, el laboratorio de cómputo de la preparatoria EDC, una cámara de video, una laptop y un proyector.

Un día antes de aplicarse la primera sesión del estudio fue necesario acudir al laboratorio de cómputo e instalar el software Geogebra en todas las computadoras y pasar los archivos del programa en cada una de ellas para así aprovechar el tiempo disponible al máximo.

La primera sesión se realizó con las hojas de trabajo N° 1 y 2, y se aplicó a 32 alumnos debido a que algunos tenían actividades extracurriculares a esa hora. Antes de repartir las hojas de trabajo, se les dio a los alumnos una explicación general del software Geogebra mostrando su interfaz y la función de sus opciones mediante una exposición dada por un servidor, usando un proyector y una computadora portátil.

Una vez concluida la presentación, se le pidió a los alumnos, abrieran el programa Geogebra y lo manipularan para que se familiarizaran un poco con la interfaz del software. Posteriormente, a cada alumno se le repartió un juego de hojas de trabajo y se les dijo que comenzaran a seguir las instrucciones y a contestar los ejercicios que ahí se les presentaban.

Un problema que se le presentó a todos los alumnos fue que los archivos del programa que un día anterior se copiaron a cada computadora, con los cuales se trabajarían, fueron borrados de las máquinas, probablemente por un programa de autoborrado instalado en las computadoras, por lo que se volvieron a pasar los archivos a cada una; esto tuvo repercusiones pues al final les faltó tiempo a la mayoría de los alumnos para terminar de contestar la segunda hoja de trabajo.

Tomando en cuenta la mecánica de la experimentación, cada alumno estaba usando una computadora; se supondría que trabajarían individualmente pero no se prohibió que interactuaran entre ellos mismos. Los alumnos leían y contestaban las hojas de trabajo, un servidor daba rondines por todos los pasillos del laboratorio y cuando alguien tenía una duda, acudía al lugar del alumno que levantó la mano para resolvérsela.

La maestra del grupo, la C. Geraldine, fue la encargada de grabar en video, con una cámara móvil, las dudas y preguntas que a los alumnos les fuesen surgiendo al ir contestando las hojas de trabajo, y las respuestas que un servidor les daba, por ello, también estaba dando rondas por el laboratorio.

Una vez que el tiempo concedido para la sesión se terminó, se les pidió a los alumnos que le colocaran su nombre a las hojas de trabajo y se procedió a recogerlas, aún si no las alcanzaron a terminar. Se les dio las gracias al grupo, a la maestra y al encargado del laboratorio.

Cabe mencionar que el encargado del laboratorio no estuvo presente en la sesión, sin embargo, una maestra entró al laboratorio cuando comencé el estudio, se sentó en la parte posterior del laboratorio y ahí estuvo durante la primera hora observando mi trabajo y el grupo en general; probablemente fue asignada por el director de la preparatoria.

Al término de la sesión, se estuvo platicando con la maestra del desempeño general del grupo y las personas sobresalientes del mismo, así como de la disponibilidad y actitud que mostraron ante el estudio aplicado. Un alumno, se acercó a la plática que se tenía con la maestra y mostró interés en las hojas de trabajo pues comenzó a hacer preguntas relacionadas con lo que acababa de realizar. Además, comentó que le interesaría ingresar a la carrera de Físico-Matemáticas y pidió consejos para el examen de admisión.

Finalmente se le dio las gracias al director de la preparatoria y se acordó aplicar la segunda parte del estudio una semana después, debido a la disponibilidad del laboratorio y el horario del grupo asignado.

A las hojas de trabajo se les hizo un análisis general y se detectó que la mayoría de los alumnos no pudieron terminar la segunda hoja de trabajo, pudo haber sido por el tiempo, por la complejidad de las preguntas o confusión en las instrucciones. Por ello, se decidió modificar un poco las hojas de trabajo 3 y 4; las instrucciones se simplificaron un poco mas, se redujo el número de instrucciones y se tuvo que quitar un par de problemas, todo esto sin sacrificar el objetivo y los temas involucrados en el estudio.

Una vez realizadas dichas modificaciones, se presentó al asesor los cambios hechos en las hojas de trabajo, obteniendo críticas favorables y quedando listas para ser aplicadas ante el grupo.

Todos los episodios grabados de la primera sesión por la cámara móvil, se copiaron a una computadora, se respaldaron en una memoria USB y fueron borrados de la cámara para liberar espacio y ser regresada al asesor.

La segunda sesión de la experimentación se realizó con las hojas de trabajo N° 3 y 4. Se aplicó el estudio a 28 alumnos, esto debido a que la maestra del grupo comentó que varios de ellos no se presentaron a clases ese día, y otros tantos decidieron no entrar al laboratorio a contestar las hojas de trabajo, puesto que no era obligatorio.

Antes de comenzar el estudio, se copiaron los archivos del programa a cada máquina que se utilizaría. Se les dio a los alumnos una pequeña información general de lo que realizarían en las hojas de trabajo por un servidor apoyado por una laptop y un proyector, posteriormente se les repartió un juego de hojas de trabajo a cada uno para que comenzaran a resolverlas.

De igual manera que en la primera sesión, se daban vueltas y rondines por el laboratorio y cuando algún alumno tuvo una duda y/o pregunta, un servidor acudía hasta su lugar y las resolvía. La maestra del grupo, la C. Geraldine Jassí Vega, fue la encargada de grabar en video, con una cámara móvil, las dudas y preguntas que los alumnos tuvieran y las respuestas que yo les daba.

Como el estudio no tenía valor curricular con la maestra del grupo, algunos alumnos no le tomaron interés y preferían estar revisando su correo, chateando en “Facebook” o viendo videos en “Youtube”, pero aunque no estuviesen trabajando, la maestra comentó que no tenía la autoridad para “sacar” a esos alumnos del laboratorio.

Una vez que el tiempo concedido para la sesión se terminó, se les pidió a los alumnos que le colocaran su nombre a las hojas de trabajo y se procedió a recogerlas. Se les dio las gracias al grupo, a la maestra y al encargado del laboratorio.

En este caso, la mayoría de los alumnos terminaron de contestar ambas hojas de trabajo, a excepción de 2 alumnos que no le tomaron importancia al estudio. Al término de la sesión, se platicó con la maestra del desempeño general del grupo y las personas sobresalientes del mismo, así como de la disponibilidad y actitud que mostraron, comparándolo con lo observado de la sesión anterior.

Posteriormente se le dio las gracias al director de la preparatoria, y él se mostró muy complacido de habérseme permitido llevar a cabo la experimentación, incluso comentó que si fuese necesario algún otro estudio, estaba a su disposición, lo cual se le agradeció plenamente.

Todos los episodios grabados de la segunda sesión por la cámara móvil, se copiaron a una computadora, se respaldaron en una memoria USB y fueron borrados de la cámara para liberar espacio y ser regresada al asesor.

Los episodios, tanto los de la primera sesión como los de la segunda, se clasificaron por hoja de trabajo, se filtraron por número de pregunta y se etiquetaron por alumno, todo ello para su fácil identificación y su análisis.

Al igual que los videos, todas las hojas de trabajo, tanto de la primera sesión como de la segunda, se procedieron a revisarlas individualmente y calificarlas, para posteriormente ser agrupadas por hoja de trabajo y realizar una evaluación general, y después agruparlas por alumno y así analizar el desempeño de cada uno.

Análisis de la Información Obtenida en la Experimentación

Una vez que se realizó la experimentación, se optó por seleccionar a 5 alumnos del grupo para el análisis de sus hojas de trabajo, tomando en cuenta aquellos alumnos que tuvieron dudas y/o preguntas relacionadas con las hojas de trabajo, las cuales aparecieron más veces en los videos.

Para ello, se integrarán los videos (se escribirán las conversaciones) sobre las dudas y preguntas de cada alumno seleccionado como episodios, y posteriormente se analizará cada uno comparando su duda de ese problema específico, con las respuestas de su hoja de trabajo.

Los alumnos seleccionados fueron GMGR, EVRR, CPT, SJRR, YCS y JESA, y se utilizó T (de tesista) para un servidor y M para la maestra encargada del grupo.

ANÁLISIS GMGR

HT1

EPISODIO 1: Conversación problema 2 (variable dependiente e independiente)

Aquí GMGR tiene duda sobre lo que es variable dependiente e independiente.

GMGR: Puede venir tantito profe.. En esto de aquí (señala el problema 2 de la HT), ésta pregunta que… No le entendí muy bien

T: Ahh, en tu gráfico tienes dos variables que son la variable *x* y la variable *y*, entonces una de ellas se maneja como variable dependiente y otra como independiente, ¿Cómo es una variable dependiente?

GMGR: Ahí se ocupa.. es la "*x*"

T: Es la "*x*" que..

GMGR: Es la dependiente, la independiente es la que no puede hacerse dependiente de la otra.. O sea que depende primero de la *x* que de la *y*..

T: La independiente es la que tu manejas y la dependiente es la que necesita de ese valor que tu muevas para obtener el otro

GMGR: Ok

T: Entonces de eso que te acabo de decir, en este caso cual sería tu variable dependiente y cual tu independiente..

GMGR: Ok gracias.

ANÁLISIS DEL EPISODIO 1

Mientras yo le comentaba la forma de resolver el problema, GMGR asentía con la cabeza en señal de comprensión. GMGR tenía un concepto equivocado de lo que es variable dependiente e independiente, y al final del episodio entendió el concepto:

¿Cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente? ¿Por qué? Explique.

La variable de dependiente es la "y" y la "x" es la independiente, por que no ocupa movimiento necesario para lo demas

Pero, en el problema 3 de la hoja de trabajo 1, que también se pregunta sobre variable dependiente e independiente, contestó de forma incorrecta:

¿Cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente? ¿Por qué? Explique.

ahora cambia, por que como se está en movimiento ahora depende al revés

Sin embargo, en el problema 1 de la hoja de trabajo 2 contestó correctamente, y al parecer si comprendió lo que es variable dependiente e independiente.

3. De acuerdo a lo aprendido en la hoja de trabajo N°1, en este caso, ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente? ¿Por qué? Explique.

el eje de las "y" es la independiente y "x" se manipula por la "y"

EPISODIO 2: Conversación problema 4 (Gráficas)

GMGR se encuentra confundido sobre qué es lo que se va a graficar en el problema 4.

GMGR: Profe, ¿aquí qué es lo que voy a graficar?

T: Ah, mira lo que tu tienes que hacer es manejar esto (señalo la tabla de valores del problema 1 en la HT) como coordenadas; éste sería tu punto (0,0) (señalo el valor 0 de la posición (12,0) de la tabla de valores del problema 1 en la HT), el siguiente sería (1,0.33) y así sucesivamente. Entonces éstos puntos los vas a ir poniendo acá (señalo los ejes coordenados de problema 4 de la HT) dependiendo de si aquí vas 0, 1, 2, 3, 4, 5, … (señalo el eje de las *x's* en la HT) pues aquí vas a ir (1,#), (2,$), (3,&) y así

GMGR: Uhum

T: Entonces en éste de abajo (señalo los ejes coordenados de problema 5) es al revés, las *x's* ahora van a estar de este lado (señalo el eje vertical de los ejes coordenados del problema 5)

GMGR: Va a ser lo mismo que acá (señala el problema 4 de la HT) pero invertido

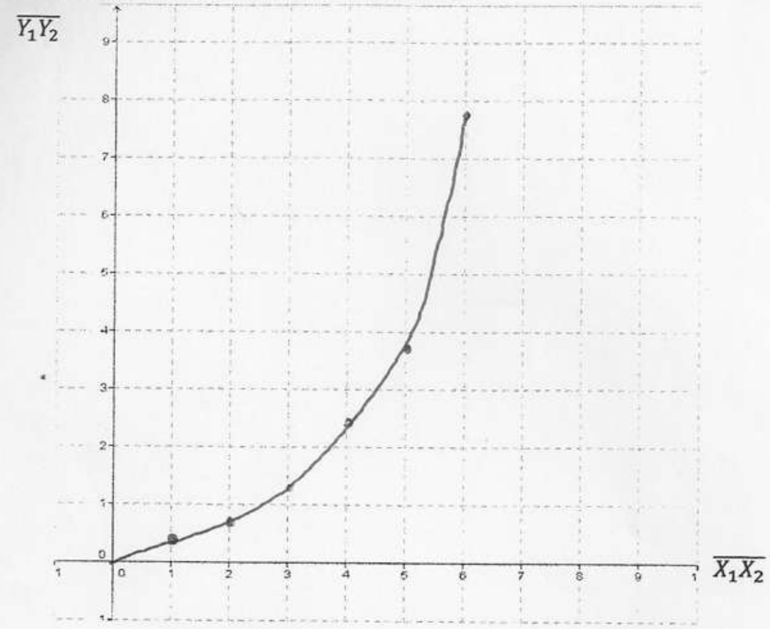
T: Ajá, y va a quedar diferente la gráfica.

GMGR: Ok

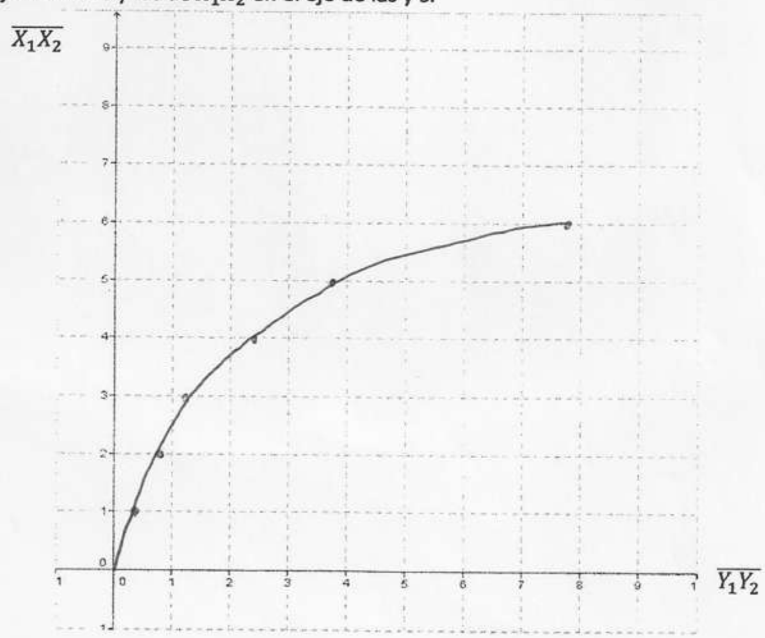
ANÁLISIS DEL EPISODIO 2:

GMGR comprendió completamente lo que debía graficar y contestó correctamente:

13. Grafique los datos de la tabla obtenidos en el punto 4 colocando los valores de $\overline{X_1X_2}$ en el eje de las x's y los de $\overline{Y_1Y_2}$ en el eje de las y's.



14. Grafique los datos de la tabla obtenidos en punto 4 colocando los valores de $\overline{Y_1Y_2}$ en el eje de las x's y los de $\overline{X_1X_2}$ en el eje de las y's.



ANÁLISIS EVRR_CPT

HT1 EVRR

EPISODIO 3: Conversación problema 4 (Gráficas)

EVRR tiene duda de si lo que va a graficar son los puntos que había colocado en la tabla del problema 1; CPT también tiene esa duda y está atenta a lo que le digo a EVRR

EVRR: Oye, aquí (señala los planos cartesianos de la HT) ¿vamos a usar las coordenadas? o sea, sería por ejemplo ¿los puntos de la recta? (señala la escalera movible en el monitor)

T: Si, los que obtuviste en el punto 4

(CPT se queda aún un poco dudosa)

CPT: ¿Cómo?

T: Vas a ubicar y poner el (0,0)..

-Interrumpe EVRR-

EVRR: cero cero y luego el (0,0.82) aquí (ubica el punto en el plano cartesiano de la HT)

T: Ajá

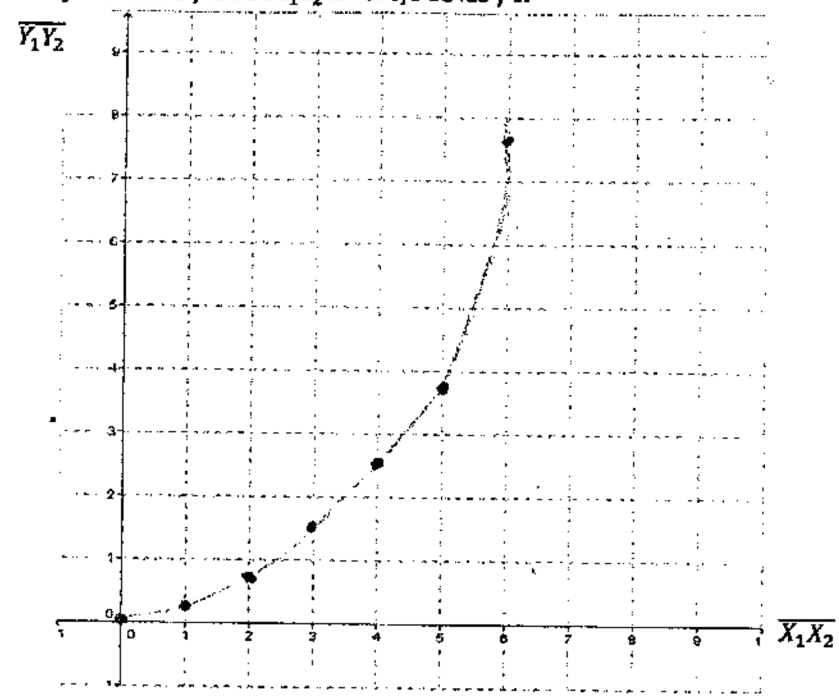
EVRR: Y así..

CPT: Ok (Asienta con la cabeza)

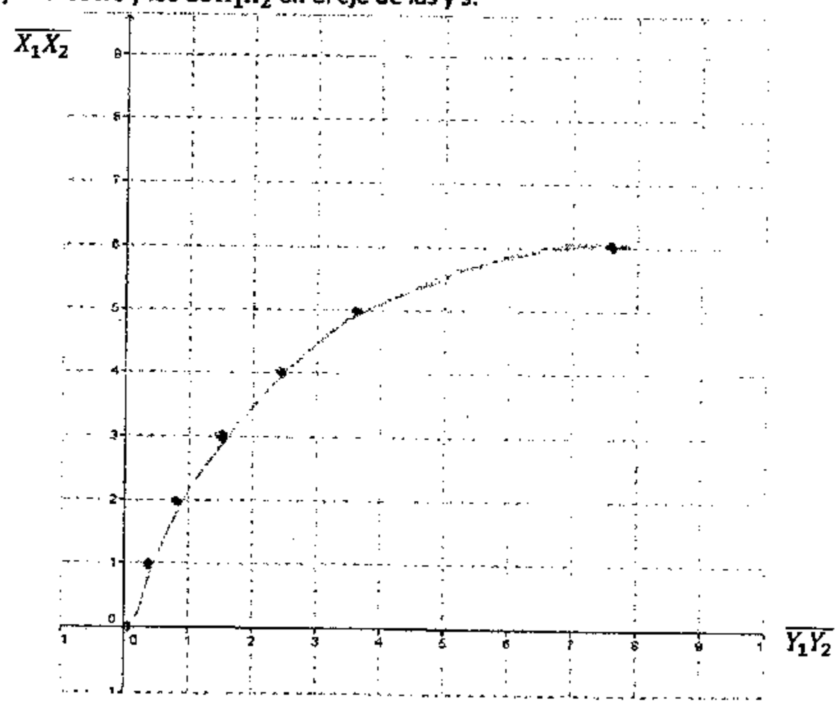
ANÁLISIS DE EPISODIO 3:

EVRR intuye lo que tiene que hacer en el problema 4, simplemente me pregunta para cerciorarse, sin embargo CPT también está en ese problema y EVRR le resuelve la duda. Al momento en que EVRR me pregunta, CPT se acerca y se queda ahí escuchando lo que contesto y al final del episodio parece comprender lo que tiene que hacer.

13. Grafique los datos de la tabla obtenidos en el punto 4 colocando los valores de $\overline{X_1X_2}$ en el eje de las x's y los de $\overline{Y_1Y_2}$ en el eje de las y's.



14. Grafique los datos de la tabla obtenidos en punto 4 colocando los valores de $\overline{Y_1Y_2}$ en el eje de las x's y los de $\overline{X_1X_2}$ en el eje de las y's.



HT2 CPT

EPISODIO 4: Conversación confusión instrucciones del programa (Origen de los ejes de coordenadas)

CPT, como varios, tuvieron el problema de identificar el origen de los ejes de coordenadas, aquí le doy indicaciones de donde debe colocar las circunferencias.

CPT: Tengo una duda

T: A ver.. (Observo que no colocó las circunferencias en el centro de los ejes coordenados) Mira aquí en los ejes de coordenadas, el (0,0) es éste (señalo el origen de los ejes de coordenadas del plano cartesiano en el monitor)

CPT: Umm

T: Entonces éstas circunferencias aquí no van (borro las circunferencias que ella había puesto)

T: Ok entonces hay que volver a empezar

-CPT asienta con la cabeza-

T: Aquí (señalo el origen de los ejes de coordenadas) pones esto: *distanciaY1Y2* (señalo *distanciaY1Y2* en el inciso 4 de la HT)

<u>ANÁLISIS DE EPISODIO 4:</u>

Cuando comienzo a decirle a CPT cuál fue su error, EVRR se asoma para ver cuál era la su duda, ella ve que tiene la misma duda que CPT y espera para poder preguntarme. CPT voltea varias veces a la computadora de EVRR como para observar si también está “atorada” en el mismo problema.

Finalmente, cuando borro las circunferencias que CPT había hecho, ella hizo una mueca como de “frustración”, tal vez porque tenía que volverlo a hacer o porque lo había hecho incorrectamente.

HT2 EVRR

EPISODIO 5: Conversación confusión en instrucciones del programa (Origen de los ejes de coordenadas)

Aquí, EVRR confundió el origen de los ejes coordenado (0,0) con el origen de la animación que estaba en (10,0); debido a ello, las circunferencias que posteriormente se le pedía que hiciera no estaban correctas.

EVRR: Profe, aquí no me sale.

T: Ah, mira lo que pasa que no tomaste el origen de las coordenadas, si lo haces así, te va a salir encimado

EVRR: Mmm si es que no me sale

T: Si, es que en el otro punto (señalo el punto 4 de la HT) dice que en el origen de los ejes de coordenadas, que es el (0,0) (lo señalo en el monitor), ¿si? Porque éste (señalo el origen de la animación) es el punto (10,0) pero no es el origen del eje de las coordenadas

T: Entonces hay que hacerlo de nuevo..

-Comienzo a borrar las circunferencias que había puesto-

EVRR: Si, es que las puse allá (señala el origen de la animación haciendo referencia a las circunferencias al momento que las borré)

T: Uhum

-Termino de borrar las circunferencias-

T: Ya, entonces, aquí (señalo el origen del eje de coordenadas en el monitor) vas poner la circunferencia y en el cuadro pones "*distanciaY1Y2*".

EVRR: Ok (Asiente con la cabeza)

-EVRR lo hace y le sale correctamente-

T: ¡Listo!

EVRR: Gracias

ANÁLISIS EPISODIO 5:

A pesar de que CPT me había preguntado lo mismo justo antes de que lo hiciera ERVV, al momento que EVRR termina de preguntarme, CPT se asoma a su computadora para ver qué era lo que ella preguntaba; antes de responderle, CPT se regresa a su computadora pero voltea varias veces a la computadora de EVRR para ver qué es lo que le señalaba.

EVRR se da cuenta de su error y comprende por qué no le había salido lo que se esperaba y al final prosigue con las indicaciones de la hoja de trabajo.

HT2 CPT

EPISODIO 6: Conversación problema 4 (Despeje de H)

CPT no entendía las instrucciones que el problema planteaba.

CPT: Aquí no entiendo.

T: Este, sustituyes valores; sustituyes el valor de "A" y el valor de "X" y necesito que me dejes solita la "H"

-CPT asienta con la cabeza-

T: ¿Sale?

CPT: Uhum

T: Tu toma la ecuación y despéjame "H"

CPT: ¿Aquí la voy a tomar? (señala el espacio en blanco para la respuesta del problema 4 en la HT)

T: Si

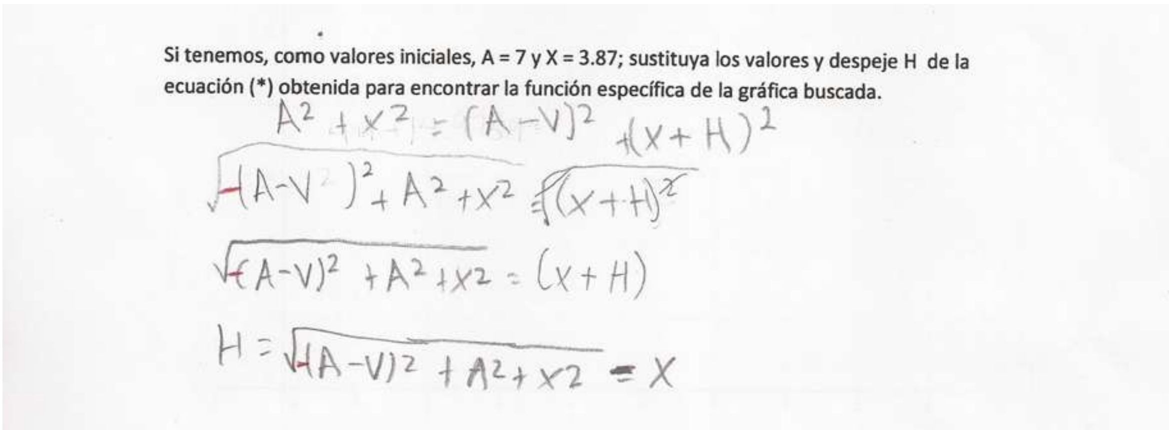
-CPT asienta con la cabeza-

T: Ahí le pones lo que vale "*A*" y lo que vale "*X*" y ya vas haciendo cuentitas para que me dejes a la "H" sola de un lado del término

ANÁLISIS DE EPISODIO 6:

Al revisar su respuesta, se observa que al principio ella sustituyó los valores de “*A*” y “*X*” en la ecuación, sin embargo lo borró e hizo el despeje con las literales.

Al analizar lo que escribió, noté que le había hecho falta un signo “-” al “pasar” un término al otro lado de la igualdad; lo marqué en tinta roja en su respuesta.


Si tenemos, como valores iniciales, A = 7 y X = 3.87; sustituya los valores y despeje H de la ecuación (*) obtenida para encontrar la función específica de la gráfica buscada.

$A^2 + x^2 = (A-V)^2 + (x+H)^2$

$-(A-V)^2 + A^2 + x^2 = (x+H)^2$

$\sqrt{-(A-V)^2 + A^2 + x2} = (x+H)$

$H = \sqrt{-(A-V)2 + A2 + x2} - X$

HT3 CPT

EPISODIO 7: Conversación confusión instrucciones (Interpretación del inciso 3 de la HT)

CPT: No me salen las tablas

T: A ver.. (Observo su monitor y a continuación leo las instrucciones del problema en voz alta)“Seleccionamos la palabra en letras azules con el nombre Flux=(0,4)”.. Ajá y “damos clic derecho sobre ella”

CPT: Ahh (Hace una expresión de saber qué es lo que había hecho mal)

T: Y te va a desplegar un menú

CPT: Ah yo lo estaba haciendo mal

T: Y ahora activamos la opción “Registro en hoja de cálculo”

CPT: Ah gracias

ANÁLISIS EPISODIO 7:

Al parecer todo fue un malentendido que CPT tuvo al leer las indicaciones pero de ahí en fuera no hubo mayor problema.

ANÁLISIS SJRR, JESA, YCS

HT1 SJRR

EPISODIO 8: Conversación problema 2 (variable dependiente e independiente)

En ésta conversación comienza preguntando SJRR sobre lo que él cree es la variable dependiente pero más adelante, cuando comienzo a explicarle, se suma JESA a la conversación.

SJRR: En la parte del segundo ejercicio yo digo que el punto *F* es la dependiente porque dependiendo de donde movamos éste (SJRR señala el punto x_2 en animación), éste se va a mover ¿no? (SJRR señala punto F en animación)

T: No mira, haz de cuenta hay que verlo desde la cuestión de lo que es variable dependiente e independiente teniendo en cuenta "*x*" y "*y*", o sea si por ejemplo (señalo eje de las "x's" en hoja de trabajo)

–Interrumpe JESA-

JESA: O sea ¿*F* no vale?

T: No es que no valga, *F* es un punto

JESA: Uhum (expresión de corroboración)

T: Entonces lo que yo te pregunto son variables, *F* no la tomamos como variable, es un punto

–Interrumpe JESA-

JESA: Eso es lo que yo te decía (le comenta a SJRR)

T: Entonces tienes que ver si la variable dependiente es tu "*x*" o es tu "*y*" en el gráfico (señalo el gráfico de la hoja de trabajo)

–Interrumpe JESA-

JESA: Sería "*x*" ¿no? porque lo tenemos que mover

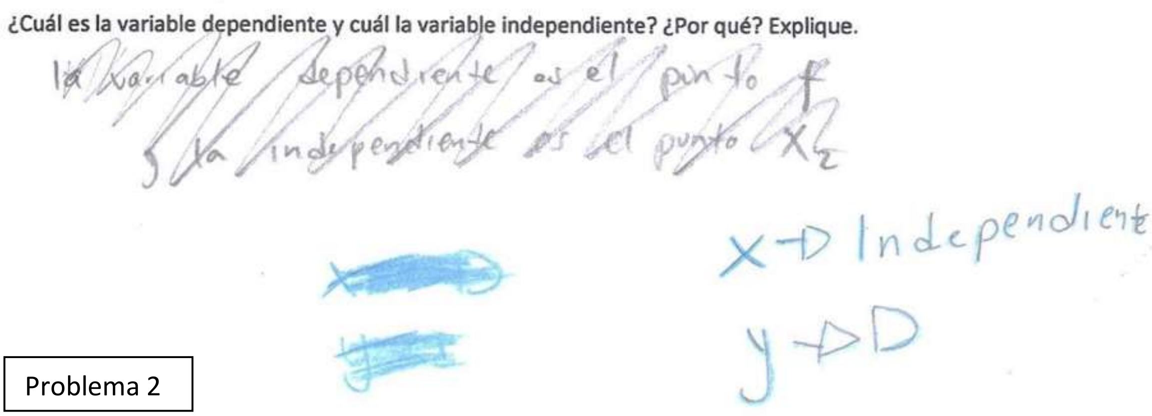
T: Precisamente es lo que les pregunto joven..

<u>ANÁLISIS DE EPISODIO 8:</u>

SJRR

A pesar de que pareciera que SJRR y JESA ya habían estado comentando el problema, en primera instancia, quien tuvo la duda fue SJRR, sin embargo, cuando comencé a explicarle a él sobre lo que pedía el ejercicio, se acercó JESA, quien me interrumpió varias veces para dar su opinión respecto a ello.

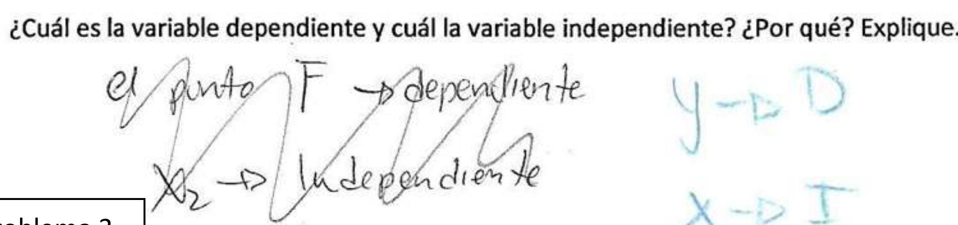
Revisando las hojas de trabajo, observé que SJRR ya había contestado el problema 2 y el problema 3 antes de preguntarme, y como lo dio a conocer en el episodio 1, pensaba que la variable dependiente era el punto F, pero después de la conversación corrigió lo que había puesto:


¿Cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente? ¿Por qué? Explique.

~~la variable dependiente es el punto F~~
~~y la independiente es el punto X_2~~

X → Independient
y → D

Problema 2

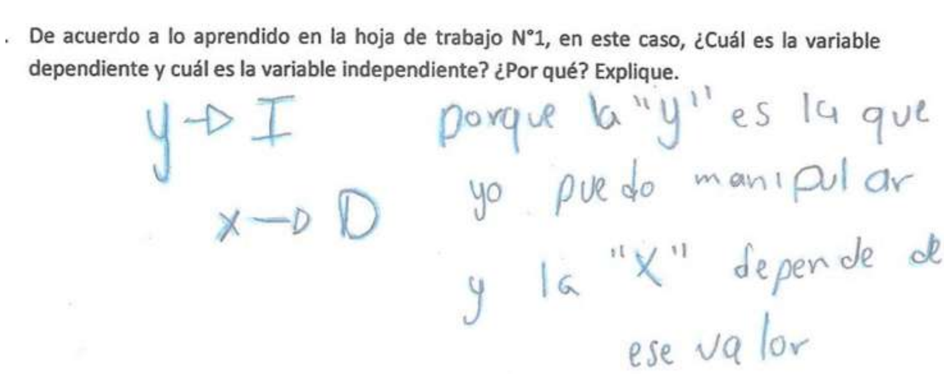

¿Cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente? ¿Por qué? Explique.

~~el punto F → dependiente~~
~~X_2 → Independiente~~

y → D
X → I

Problema 3

Posteriormente, en el problema 1 de la hoja de trabajo 2 también les pregunté sobre la variable dependiente e independiente, y SJRR contestó correctamente:

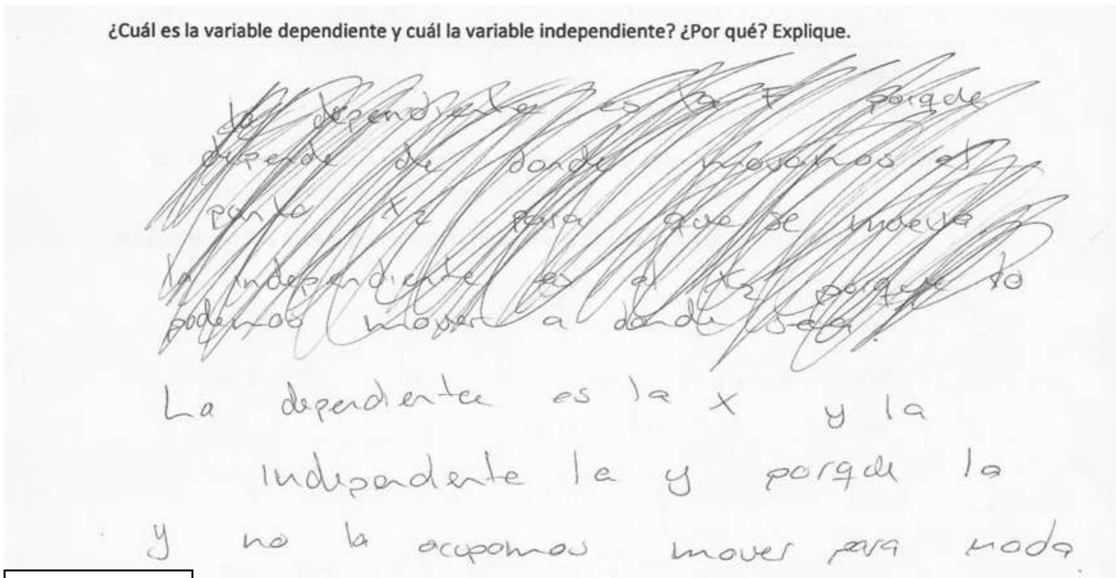

De acuerdo a lo aprendido en la hoja de trabajo N°1, en este caso, ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente? ¿Por qué? Explique.

y → I
x → D

porque la "y" es la que yo puedo manipular y la "X" depende de ese valor

JESA

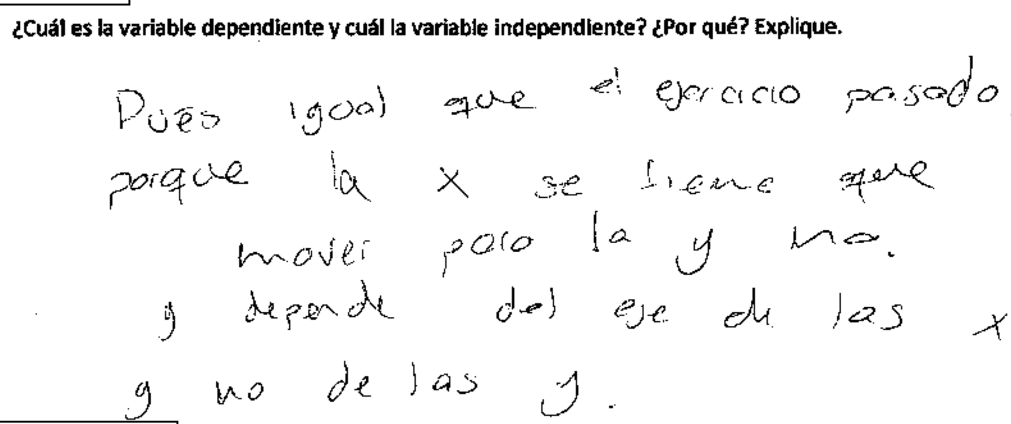
Al igual que SJRR, JESA también ya había contestado el problema 2 cuando participó en la conversación del episodio 1, sin embargo sus respuestas no eran correctas, por lo que después de la conversación trató de corregirlas, sin embargo las respondió erróneamente; parece tener la idea en su explicación pero sus respuestas son incorrectas:


¿Cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente? ¿Por qué? Explique.

~~La dependiente es la y porque depende de donde movemos el punto x para que se mueva la independiente es el x porque lo podemos mover a donde sea.~~

La dependientee es la x y la independiente la y porque la y no la ocupamos mover para nada.

Problema 2


¿Cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente? ¿Por qué? Explique.

Pues igual que el ejercicio pasado. porque la x se tiene que mover para la y no. y depende del eje de las x y no de las y.

Problema 3

Posteriormente, en el primer problema de la hoja de trabajo 2 también les pregunté sobre la variable dependiente e independiente, y analizando la respuesta de JESA, viendo sus argumentos, hace pensar que en los ejercicios anteriores tal vez se confundió un poco pero si tenía la idea de lo que se le preguntaba, puesto que en este problema sí contestó correctamente:

3. De acuerdo a lo aprendido en la hoja de trabajo N°1, en este caso, ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente? ¿Por qué? Explique.

La variable dependiente ahora es la x porque ahora la que podemos manipular es la y.

HT1 JESA

EPISODIO 9: Conversación problema 4 (Gráficas)

JESA se encuentra confundido sobre qué es lo que va a graficar.

JESA: Profe, ¿aquí que?

T: Ah, tienes estos puntos (señalo los valores de $\overline{X_1X_2}$ y $\overline{Y_1Y_2}$ del problema 1 en la HT)

-JESA asienta con la cabeza en señal de entender-

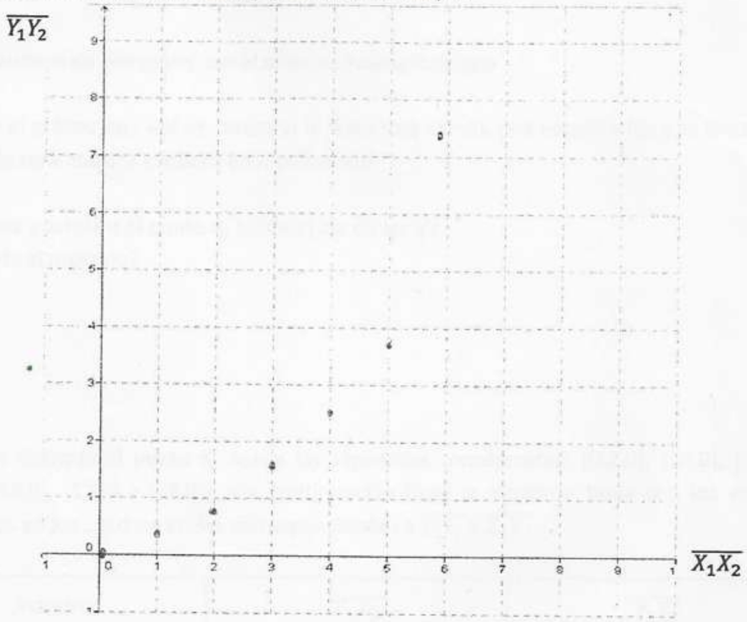
T: Si los toman así como coordenadas obtendrías tus *x's* y tus *y's*, entonces aquí están esos ejes (señalo el plano cartesiano de las gráficas del problema 4 de la HT) basta con poner, por ejemplo, digamos en el segmento X_1X_2 el primero sería 0 y del otro segmento también, entonces sería aquí en el origen. La segunda sería (1,0.33) entonces lo ubican y van poniendo puntos para ir graficando.

JESA: Ok (asienta nuevamente)

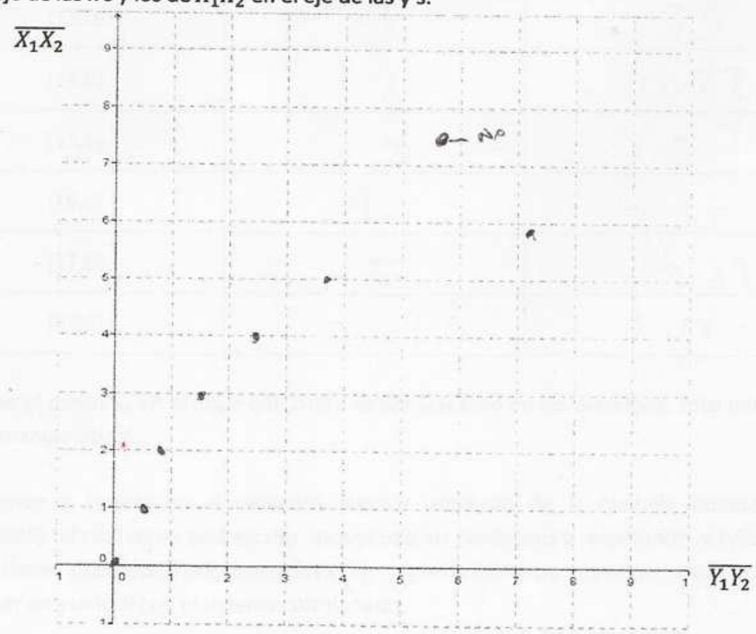
ANÁLISIS EPISODIO 9:

Una vez que se le explicó lo que debía hacer, resolvió correctamente el problema:

13. Grafique los datos de la tabla obtenidos en el punto 4 colocando los valores de $\overline{X_1X_2}$ en el eje de las x's y los de $\overline{Y_1Y_2}$ en el eje de las y's.



14. Grafique los datos de la tabla obtenidos en punto 4 colocando los valores de $\overline{Y_1Y_2}$ en el eje de las x's y los de $\overline{X_1X_2}$ en el eje de las y's.



HT2 YCS

EPISODIO 10: Conversación confusión instrucciones del programa (Origen de los ejes de coordenadas)

YCS confundió el origen de los ejes coordenados (0,0) con el origen de la animación que estaba en (10,0); debido a ello, las circunferencias que posteriormente se le pedía que hiciera no estaban correctas y las letras de los puntos no correspondían con las esperadas.

YCS: Profe, ¿Por qué no me sale como en el dibujo?

T: Ah es que el eje de las coordenadas en este caso es éste (señalo el origen (0,0) de los ejes coordenados en el monitor)

YCS: Entonces es.. el punto.. si ya ya.. Es el punto de intersección con el eje de las "*x's*"

T: No pero, a ver dale Ctrl+Z y cliquea aquí (señalo el botón de "Circunferencia (centro, radio)" del programa)..

-Interrumpe YCS-

YCS: Porque aquí ya me apareció el "G1" (señala un punto "G1" en el monitor, asociado a una circunferencia) y aquí..

T: Es que, has de cuenta, cuando haces ésta parte del círculo, éste círculo (señalo la circunferencia *distanciaY1Y2* en el monitor) lo tienes que poner en el centro del origen de las coordenadas o sea que es éste (señalo el origen (0,0) de los ejes coordenados en el monitor)

YCS: Pss Ohh! (expresión de haber entendido)

T: Entonces si puedes darle en "Elige y mueve", selecciona el punto o mejor la circunferencia. Selecciónala y elimínala.

-Mientras yo le decía las instrucciones él las iba realizando-

T: Entonces desde aquí (señalo el inciso 4 de la HT) vuelves a hacerlo pero ahora lo pones..

-YCS colocó la circunferencia en el origen de los ejes coordenados-

T: Ajá

ANÁLISIS DE EPISODIO 10:

YCS, como varios alumnos mas, confundió el origen de la figura con el origen de los ejes de coordenadas pero después de preguntarme pudo seguir adelante con las instrucciones de la hoja de trabajo 2.

HT2 SJRR

EPISODIO 11: Conversación problema 2 (Análisis de tipo de función)

En ésta conversación, se le estaba explicando a JESA sobre un error que tenía en el programa sobre los puntos (H y J) de las circunferencias, cuando SJRR le comenta a YCS sobre una pista que ahí se les colocó en la hoja de trabajo, referente al problema 2, y posteriormente le surge una duda.

JESA: Profe no me da la perpendicular

T: MM déjame ver.. Ah! Lo que pasa es que, si te fijas, el punto *H* es la misma circunferencia que tu *J*, entonces tú al momento de seleccionar la circunferencia te equivocaste porque lo hiciste en la misma circunferencia, o sea, seleccionaste la misma circunferencia y tenías que haber elegido la otra porque si te fijas ésta (señalo la circunferencia *distanciaX1X2* en el monitor) no tiene ningún punto.

-JESA asienta con la cabeza-

T: Entonces a ver regrésate al punto 6. Mira éste punto (señalo el punto *J* en el monitor) lo vamos a borrar. Entonces ahora, lo que tienes que hacer es: seleccionas ésta circunferencia (señalo la circunferencia *distanciaY1Y2* en el monitor) con el eje de las *x's,* después le damos en perpendicular, seleccionamos *H* y el eje de las *x's*.

-SJRR le comenta a YCS-

SJRR: "Ahh! Mira Yayo pues es que aquí te da para que tú las puedas ver y no me había fijado" (le comenta a YCS).

-Sigo explicándole a JESA-

T: Después vas a intersectar ésta circunferencia (señalo la circunferencia *distanciaX1X2*) con el eje de las *y's*

-Interrumpe SJRR-

SJRR: Oiga maestro y ¿Cómo ponemos aquí raíz?

T: ¿Cómo se puede representar la raíz de otra manera?

SJRR: ¿Con fracción? (yo asiento con la cabeza en señal de correcto)

-Interrumpe JESA-

JESA: A la un medio

T: Exacto

JESA: Eh “quiubo” maestra!!

-Regreso con JESA-

T: Entonces ahora damos en perpendicular y seleccionamos ésta (señalo la circunferencia distanciaX1X2) con el eje de las y’s

JESA: Ya

Mientras yo terminaba de explicarle a JESA, SJRR escribe en el programa “x^1/2” lo cual le da la gráfica de una recta, a lo que expresa:

SJRR: Ah no, entonces está mal. Ent bueno.

SJRR se queda confundido pues él tenía la idea de que la gráfica correcta sería esa, la maestra encargada de grabar se da cuenta de ello y le pregunta:

M: ¿Cuál fue lo que no te salió?

SJRR: Es que, bueno según yo iba a ser ésta (señala la opción d) de la HT), pero me salió como una recta.

M: A ver

-SJRR le muestra a la maestra lo que había escrito-

SJRR: Mire, es “*x*” a la un medio ¿no?

M: Un medio va entre paréntesis porque si lo pones así te agarra “*x*” a la uno sobre 2.

SJRR: Ohh, Ok.

-SJRR corrige en el programa y ahora escribe x^(1/2)-

M: ¿Si?
(SJRR asiente con la cabeza)

ANÁLISIS EPISODIO 11:

En la hoja de trabajo se les colocó un ejemplo de cómo debían escribir una raíz, sin embargo SJRR no se dio cuenta de ello y por eso al querer graficar la raíz no lo hizo correctamente. Al final, con la ayuda de su maestra puedo comprobar que lo que él pensaba estaba bien:

De las siguientes funciones, analice y compare su gráfica y escoja la que tenga la forma similar a la gráfica que obtuvimos. Elige la [redacted] más parecida.

a) x^2
b) x^3
c) $ln\,(x)$
d) $\sqrt{x}$
e) $x^{3/2}$

Mientras que JESA avanzó y siguió con los siguientes pasos de la hoja de trabajo.

HT2 JESA

EPISODIO 12: Conversación problema 3 (Demostración)

JESA no tenía idea de lo que debía hacer en el problema 3.

JESA: Ya no entiendo de aquí pa acá (señala problemas 3 y 4 de la HT)

T: A mira, tienes dos triángulos rectángulos (señalo el gráfico de la simulación en HT), ¿los ves?

JESA: Sip

T: Entonces..

-JESA me interrumpe y señala los triángulos-

JESA: Uno aquí así y el otro así (recalca los triángulos rectángulos en la HT)

T: Ajá, bueno en este caso tenemos que el teorema de Pitágoras nos dice que “C^2=A^2+B^2”, entonces “C^2” ¿qué es?.. (JESA se queda unos segundos en silencio, posteriormente respondo yo).. es nuestra hipotenusa

–JESA anota la letra "*C*" en las hipotenusas de los triángulos rectángulos de la gráfica-

JESA: Uhum (asienta con la cabeza)

T: En este caso nuestra hipotenusa es ésta y ésta (señalo las rectas *E* y *E'* de la gráfica de la simulación en la HT). Por eso es que ésta igualdad respeta el teorema (señalo $E'^2=A^2+X^2$) ¿si?

JESA: A^2+X^2 (Repite lo que le había dicho mientras asienta con la cabeza)

T: Entonces, yo aquí te digo que $E'=E$ (señalo la igualdad en la HT) ¿por qué? (JESA se queda unos segundos en silencio, después respondo yo) porque ésta distancia es la misma que ésta (señalo las rectas *E'* y *E* del gráfico de la animación en la HT) es decir no cambia, entonces si tú aquí elevas al cuadrado éste (señalo *E'*) tienes que elevar al cuadrado éste (señalo *E*)

JESA: Uhum (asienta con la cabeza)

T: Es decir, te daría éste (señalo $E'^2=A^2+X^2$) y éste (señalo $E^2=Y^2+B^2$), simplemente sustituye éste valor (señalo E'^2) y éste (señalo E^2) aquí (señalo $E'=E$) porque esto lo vas a elevar al cuadrado

JESA: ¿Eso lo tengo volver a elevar al cuadrado o como?

T: No, tu tienes aquí $E'=E$, si tu lo elevas al cuadrado te va a quedar $E'^2=E^2$

JESA: Uhum

T: Pero aquí sustituye; E'^2 es esto (señalo A^2+X^2) entonces te va a quedar A^2+X^2 igual a E^2, y E^2 es Y^2+B^2 –JESA completa la oración Y^2+B^2- ¿si?

JESA: Uhum

T: Ahora, de ahí tienes que sustituir "*Y*" y "*B*"; esto vale "*Y*", de aquí a acá (señalo la longitud de *Y* en el gráfico) –JESA asienta con la cabeza- pero ¿de qué otra manera se puede representar respecto a "*A*" y "*V*"?

JESA: "*Y+B*"

T: Mm no..

-Interrumpe JESA-

JESA: "*+V*"

T: No, sería "*A-V*". Lo que pasa es que "*A*" es todo esto (señalo la longitud de *A* en el gráfico)

-Interrumpe JESA-

JESA: Ah ya ya ya ya..

T: Y "*Y*" es esto (señalo la longitud de *Y* en el gráfico), entonces para obtener *Y*..

-Interrumpe JESA-

JESA: "*A-V*" (asienta con la cabeza)

T: Entonces esto lo que tienes que hacer es sustituirlo aquí (señalo Y^2 en $E^2=Y^2+B^2$) ¿si?

-JESA asienta con la cabeza-

T: Tu dices que "*Y*" es igual a "*A-V*"

JESA: Si

T: Y ahora "*B*" ¿a qué es igual?

JESA: A "*X*-.." No a "*B-H*"

T: No, ésta *B*.. (señalo la longitud de *B* en el gráfico)

-Interrumpe JESA-

JESA: A "*X+H*"

T: Si, a "*X+H*", entonces eso lo vas a sustituir aquí (señalo B^2 de $E^2=Y^2+B^2$) y al final te tiene que dar esta igualdad (señalo la ec. $A^2+X^2=(A-V)^2+(X+H)^2$ en la HT)

-JESA asienta con la cabeza-

T: Ya que la tengas, vas a dar los valores a la "*A*" y a la "*X*" y vas a empezar a despejarla para dejar a la "*H*" sola, es decir, "*H* = algo"

JESA: Ok (asienta con la cabeza)

<u>ANÁLISIS EPISODIO 12:</u>

A pesar de que a JESA se le explicó paso a paso lo que debía hacer y parecía haber entendido, al final no supo como relacionar las equivalencias, y esto lo refleja en su respuesta:

Use la igualdad anterior junto con la de cada triángulo (sustituya "Y" y "B" por sus equivalentes del gráfico) para obtener la siguiente ecuación:

$$E' = A^2 + X^2 = (A - V)^2 + (X + H)^2 \qquad (*)$$

$$E' = E.$$

$$= A^2 + B^2 = (A - y)^2 + (X + H)^2$$

$$y = A - V$$

$$B = X + H.$$

En el problema 4, el cual se toca al final del episodio 5, al resolverlo trató de elevar al cuadrado los polinomios *(7 - V)*^{2} y *(3.87 + H)*^{2} de forma equivocada, sin embargo después corrige; en el resultado final le hizo falta poner la raíz.

$$A^2 + X^2 = (A - V)^2 + (X + H)^2.$$

$$(7)^2 + (3.87 + H)^2.$$

$$7^2 \cancel{+ 3.8^2} =$$

$$7^2 + 3.87^2 = (7^2 - V)^2 + (3.87 + H)^2.$$

$$63.9769. = (49 - V^2) + (19.9769 + H^2)$$

$$(7 - V)^2 - 63.9769 = \cancel{\sqrt{}}\,(3.87 + H)^{\cancel{2}}$$

faltó raíz $\sqrt{(7 - V)^2 - 63.9769} = 3.87 + H.$

HT2 YCS

EPISODIO 13: Conversación problema 3 (Demostración de ecuación $A^2 + X^2 = (A - V)^2 + (X + H)^2$)

Aquí quien me hizo la pregunta del problema 3 fue YCS pero SJRR estuvo presente poniendo atención a lo que yo le explicaba.

YCS: ¿Cómo tomamos los triángulos rectángulos?

T: Mira, tenemos los triángulos *ΔOMN* y *ΔOPQ*, del primero, *E'* es la hipotenusa, *A* es el cateto opuesto y *X* es el cateto adyacente, entonces por el teorema de Pitágoras tenemos que $E'^2 = A^2 + X^2$(1).
Ahora, para nuestro segundo triángulo *E* es la hipotenusa, *Y* es el cateto opuesto y *B* el cateto adyacente, entonces tenemos que $E^2 = Y^2 + B^2$ (2).
Como puedes ver, *E' = E* porque la escalera en ambos casos es de la misma medida, entonces podemos decir que $E'^2 = E^2$, ¿si estás de acuerdo? elevas al cuadrado aquí (señalo *E'* en HT) y elevas al cuadrado acá (señalo *E* en HT)

YCS: Si porque es lo mismo es una igualdad

T: Entonces vas a sustituir estos valores (señalo ecs. (1) y (2)) aquí (señalo *E'=E*) y luego te dice que sustituyas *Y* y *B* por sus equivalentes del gráfico, es decir, aquí en el otro (regresamos a página anterior y señalo el gráfico de los triángulos rectángulos) tienes *Y* y *B* pero si te fijas, ¿a qué es igual *Y*?

YCS: A "*A*"

T: No

YCS: No (aceptando que se equivocó), "*Y*" es igual a..

-Interrumpe SJRR-

SJRR: A ¿"*Y + B*"?

T: No porque..

-Interrumpe YCS-

YCS: A ¿"*AB*"?, No a.. ¿todo esto no? (señala *Y* y *V* en el gráfico)

-Interrumpe SJRR-

SJRR: "*A – V*"

T: Si, a “*A – V*”, ¿Por qué? Porque *Y* vale esto (señalo la altura de *Y* en el gráfico) entonces *A* vale todo esto (señalo la altura de *A* en el gráfico) y *V* vale esto (señalo la altura de *V* en el gráfico), entonces “*A – V*” te hace la *Y* (SJRR asienta con la cabeza en señal de aceptación)

YCS: Uhum (expresión de corroboración)

T: Igual, pasa lo mismo con la *B*. La *B* ¿qué valor tiene?

YCS: “*X H*”

T: “*X”* que, ¿+ o –?

YCS: “*X* + *H*”

T: Si, “*X* + *H*” te vale *B*. Entonces eso lo vas a sustituir acá (señalo ec. <u>(2)</u>) y ya te va a quedar la ecuación que les pido.

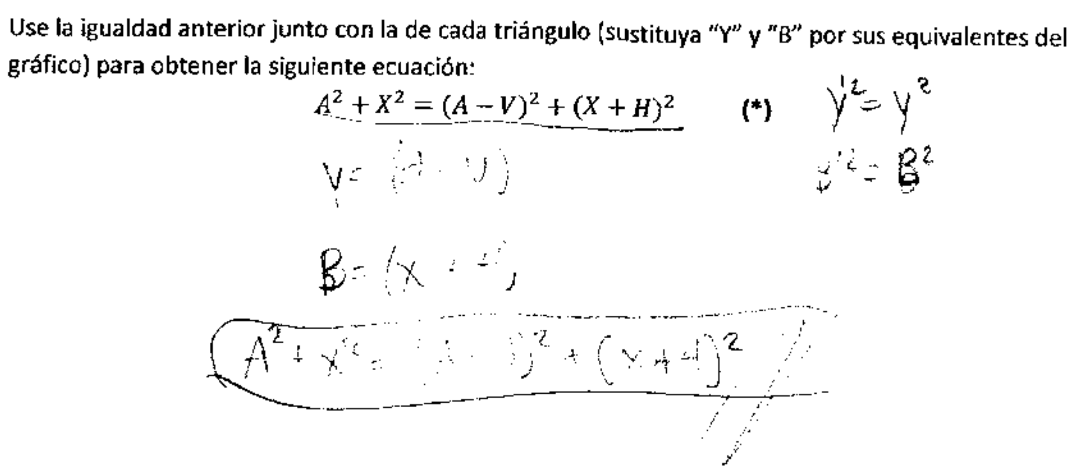
<u>ANÁLISIS EPISODIO 13:</u>

SJRR se acercó a YCS para preguntarle si tenía idea de como resolver el ejercicio, aunque estuvieron hablando un poco entre ellos no llegaron a una solución, y es ahí cuando YCS me pregunta; aunque SJRR se mantuvo detrás de YCS, siempre estuvo atento en todo momento a lo que le explicaba.

Al momento de que YCS responde “*X+H*”, SJRR asiente con la cabeza dejando ver que si está de acuerdo y que entendió lo que debía hacer.

YCS

A YCS le faltó poner la ecuación de la cual parte para hacer la demostración ($A^2+X^2=Y^2+B^2$)



Use la igualdad anterior junto con la de cada triángulo (sustituya “Y” y “B” por sus equivalentes del gráfico) para obtener la siguiente ecuación:

$$A^2 + X^2 = (A - V)^2 + (X + H)^2 \qquad (*)$$

SJRR

SJRR desarrolla mejor la demostración y deja ver que si entendió lo que se tenía que hacer.

Use la igualdad anterior junto con la de cada triángulo (sustituya "Y" y "B" por sus equivalentes del gráfico) para obtener la siguiente ecuación:

$$A^2 + X^2 = (A - V)^2 + (X + H)^2 \qquad (*)$$

$$E'^2 = E^2$$

$$A^2 + x^2 = y^2 + B^2$$

$$A^2 + x^2 = (A - V)^2 + (x + H)^2$$

HT2 SJRR

EPISODIO 14: Conversación problema 4, 1ra parte (Despeje de H)

SJRR en un principio, como la mayoría, intentó desarrollar los binomios al cuadrado para tratar de despejar *H*, entonces llegó el momento en que tenía más *H's* que al principio; el alumno me pregunta si está correcto lo que hizo.

> **SJRR:** Profe tengo una duda, ¿aquí está bien?
>
> **T:** A ver ¿cómo le hiciste?
>
> **SJRR**: Este está multiplicando, lo pasé dividiendo (tenía: $+14v - v^2 = 7.74H + H^2$)
>
> **T**: Ajá
>
> **SJRR**: Me queda esto ($\frac{+14v - v^2}{7.74} = H + H^2$), a esto lo que puedo hacer, a este que queda dividiendo sacándole raíz a todo esto (señala el cociente)..

T: No, no puedes pasar multiplicando el *7.74*, lo que puedes hacer es aumentarle un término a *7.74H + H*^{2} para que puedas factorizar pero

-Interrumpe SJRR-

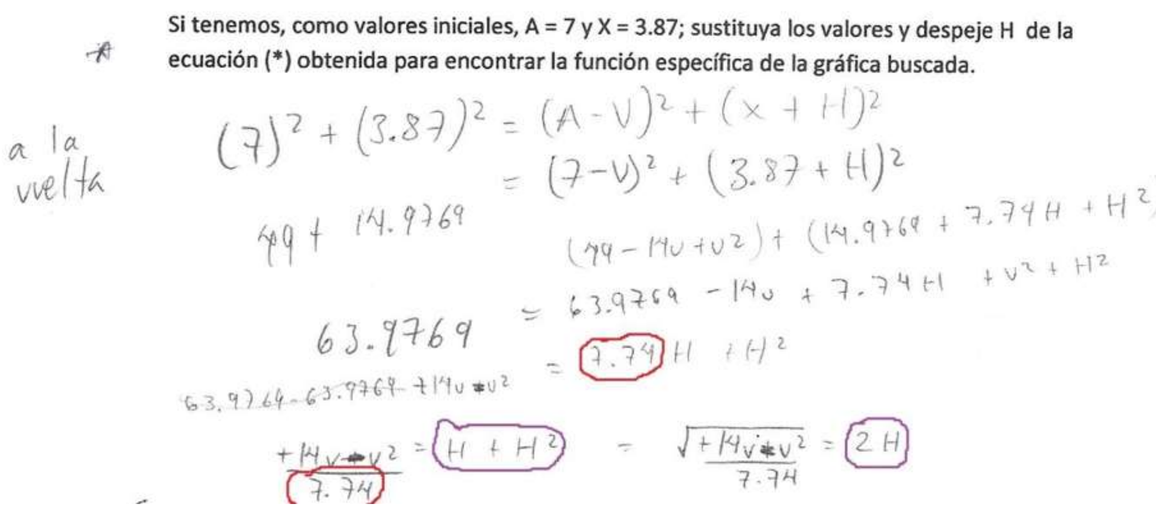
SJRR: Entonces mejor hago esto (se regresa a la ecuación inicial y pasa *(7-v)*^{2} restando para el otro lado de la igualdad) y le saco raíz en los ambos lados.

T: Si, exactamente

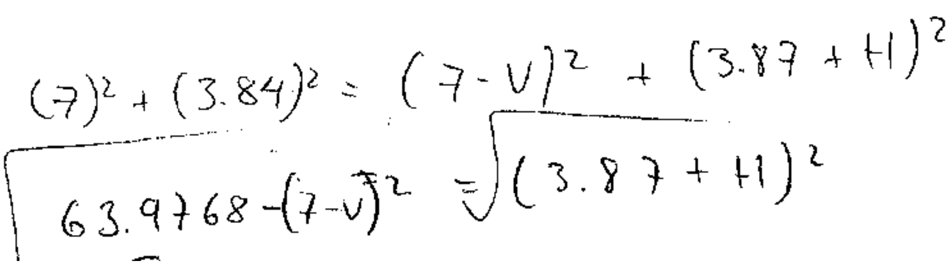
ANÁLISIS EPISODIO 14:

Como ya había mencionado, SJRR primeramente intentó desarrollar los cuadrados, y cuando llegó una solución que a él le parecía posible, me preguntó si lo que había hecho estaba bien.

En la siguiente imagen se presenta el desarrollo de los binomios que había realizado SJRR:



Pero tras responderle que lo que había hecho no era lo mas indicado, optó por tomar otro camino. En la siguiente imagen se presenta lo que SJRR concluyó que sería mejor hacer:



HT2 SJRR

EPISODIO 15: Conversación problema 4, 2da parte (Despeje de H)

SJRR sacó raíz a $63.9768-(7-v)^2=(3.87+H)^2$ en ambos lados, pero después hizo mal uso del radical porque le sacó raíz individualmente a cada término.

SJRR: Profe ¿es así?

T: ¿Cómo le hiciste?

SJRR: Pues le saqué raíz a todo y se me eliminaron los cuadrados

T: Pero ¿también le sacaste raíz a cada término?

SJRR: Ajá, por eso, le saqué raíz a todo y luego a cada uno

T: Pero no puedes eliminarlos

SJRR: ¿Por qué?

T: A menos de que estuviera multiplicando.. si este *(7 - v)*^{2} estuviera multiplicando al *63.9768*, si se puede pero en este caso tienes aquí un signo "-" entonces una propiedad de las raíces no te permite -SJRR murmura: eliminarlo- sacarle raíz a esto y a esto (señalo ambos términos), entonces esto lo tienes que dejar así en este caso

SJRR: Uhum (asienta la cabeza en señal de acuerdo)

T: O sea aquí, vas a tener

-Interrumpe SJRR-

SJRR: Entonces ¿eso lo voy a dejar representado?

T: Si, lo dejas representado, tendrías a *63.9768 - (7-v)*^{2} dentro de la raíz y eso es igual a *3.87 + H* (SJRR me iba siguiendo en cada paso)

SJRR: Y este ya nada mas lo paso (señala *3.87*)

T: Si ya nada mas lo pasas al otro lado

SJRR: Se quedaría, ¿esto quedaría fuera de la raíz? (señala *3.87*)

T: Si afuera de la raíz (asiento con la cabeza)

ANÁLISIS EPISODIO 15:

SJRR se acercó a mi cuando pensó ya había resuelto el problema, sin embargo hizo mal uso de las propiedades de los radicales obteniendo un resultado equivocado. Una vez que se le dijo la razón de su error, si comprendió por qué no podía sacarle raíz a cada término. En la siguiente imagen se ve como había procedido primero y posteriormente como corrigió:

$$(7)^2 + (3.84)^2 = (7-V)^2 + (3.87+H)^2$$

$$\sqrt{63.9768-(7-v)^2} = \sqrt{(3.87+H)^2}$$

$$\sqrt{63.9768} - (7-v) = 3.87 + H$$

$$7.9985 - 7 + v = 3.87 + H$$

$$4.12 - 7 + v = H$$

$$-2.87 + v = H$$

$$\sqrt{63.9768-(7-v)^2} = 3.87 + H$$

$$\sqrt{63.9768-(7-v)^2} - 3.87 = H$$

HT2 YCS

EPISODIO 16: Conversación problema 6 (Dominio y contradominio)

Aquí, yo le estaba explicando a JESA la parte del problema 4 sobre el despeje de *H*, cuando YCS me hizo una pregunta sobre su respuesta del dominio y contradominio de la función $H = \sqrt{63.9768 - (7 - H)^2} - 3.87$, y SJRR también se acercó.

YCS: Profe, ¿así está bien? (su respuesta era dominio: (-∞,∞) y contradominio (0,∞))

T: ¿Por qué?

YCS: Porque el “*x*” se va extendiendo hacia los dos lados

T: Del ejemplo sí, pero en nuestro caso, por ejemplo en tu gráfica ¿cuál es tu dominio y tu contradominio?

YCS: Mi dominio es de 0 a +∞

T: ¿Seguro?

YCS: Ps si porque va creciendo

T: A ver, dale un valor muy grande a ver que te da

YCS: Como ¿? (expresión de no tener la idea de cómo hacerlo)

T: Si, es que tu al estar metiendo estos valores (señalo en la tabla los valores de *V*) tienes que estar sustituyendo aquí (señalo la ecuación de *H*), entonces si tu aquí le das un valor muy muy grande, por ejemplo digamos

-Interrumpe YCS-

YCS: Mil

T: Si, le damos mil, mil al cuadrado es algo muy grande

YCS: Un millón

T: Ajá, pero antes hay un “-”, entonces,..

-SJRR murmura: “eso te va a quedar una raíz negativa”-

T: Digamos 63 punto y tantos menos un millón te va a quedar algo negativo entonces una raíz negativa no es un número real (SJRR también lo dice al mismo tiempo), es un número imaginario entonces no puede ser de 0 a ∞. O sea por ejemplo en ésta gráfica (señalo la gráfica del ejemplo $y=x^2$ que les puse en la HT) tu dominio ¿cuál es?

YCS: De -∞ a +∞

T: No, sería de -2 a 2, sólo de la gráfica tu dominio es de -2 a 2, ¿y tu contradominio?

YCS: De 0 a ∞

T: No, de 0 hasta aquí (señalo el máximo de la gráfica)

YCS: De 0 a 4

T: Si, de esta gráfica. O sea de la función si sería de 0 a ∞ pero en ésta gráfica es de 0 a 4

YCS: (Murmura) Mm y aquí..

T: Y aquí, ¿Cuál sería tu dominio y tu contradominio?, de ésta gráfica (señalo la gráfica del problema 6)

YCS: El dominio es de 0 a 7

T: Ajá

SJRR: Y el contradominio sería de 0 a 4..

T: De 0 a 4 y algo

SJRR: 4.12

T: Si 4.12. ¿Qué es lo que te da a entender esto? En este caso, tus *V's* ¿que son, tu dominio o tu contradominio? (señalo en la tabla los valores de *V*)

YCS: *V* es contradominio.. Ah no no no perdón dominio

T: Es tu dominio y *H* ¿qué viene siendo?

YCS: El contradominio

T: Si es tu contradominio

YCS: Entonces ¿ya acabamos?

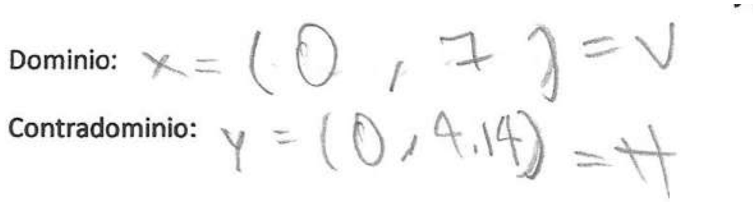
T: Si ya acabamos

ANÁLISIS EPISODIO 16:

A pesar de que YCS me hizo la pregunta, SJRR también tenía duda respecto al problema 5, por ello se acercó mientras le respondía a YCS.

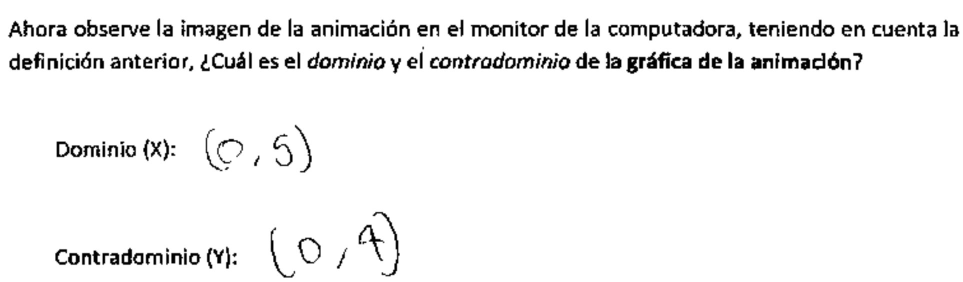
YCS

YCS al principio no sabía distinguir entre el dominio de la gráfica y el dominio de la función, una vez que se le explicó contestó correctamente el dominio, pero se equivocó al escribir el contradominio:



Posteriormente, en las hojas de trabajo 3 y 4, que se aplicaron 1 semana después que las hojas de trabajo 1 y 2, se les vuelve a preguntar sobre dominio y contradominio y YCS contesta parcialmente correcto, pues siendo cerrados los dominios y contradominios, no hace uso de corchetes.

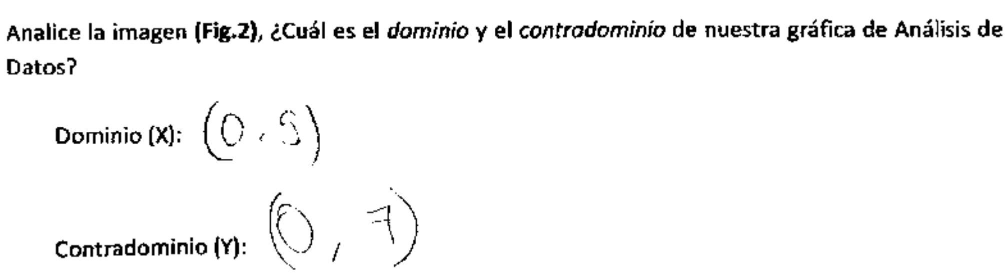
HT3: En este caso, la respuesta correcta es [0,5] y [0,4]


Ahora observe la imagen de la animación en el monitor de la computadora, teniendo en cuenta la definición anterior, ¿Cuál es el *dominio* y el *contradominio* de **la gráfica de la animación?**

Dominio (X): (0 , 5)

Contradominio (Y): (0 , 4)

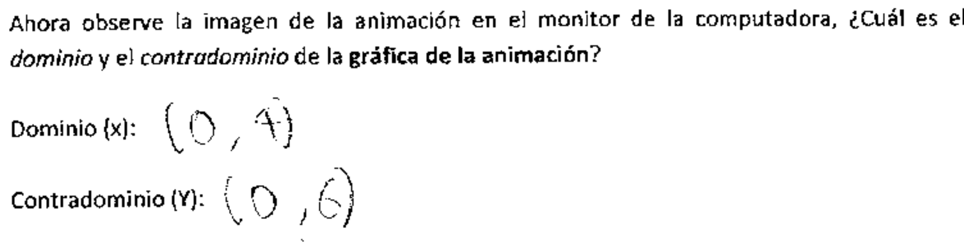
HT3: En el siguiente caso, la respuesta correcta es [0,5) y [0,7)


Analice la imagen **(Fig.2)**, ¿Cuál es el *dominio* y el *contradominio* de nuestra gráfica de Análisis de Datos?

Dominio (X): (0 , 5)

Contradominio (Y): (0 , 7)

HT4: En este caso, la respuesta correcta es [0,4] y [0,6]

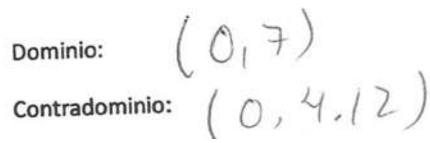

Ahora observe la imagen de la animación en el monitor de la computadora, ¿Cuál es el *dominio* y el *contradominio* de la **gráfica de la animación**?

Dominio (x): (0 , 4)

Contradominio (Y): (0 ,6)

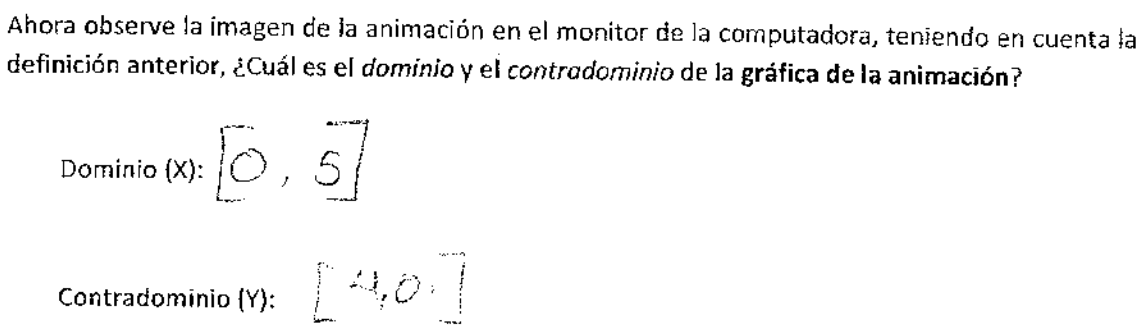
SJRR

Al igual que YCS, SJRR no hizo uso de corchetes en su respuesta del problema 5 de la hoja de trabajo 2:


Dominio: (0, 7)

Contradominio: (0, 4.12)

Sin embargo, en las hojas de trabajo 3 y 4 que se aplicaron 1 semana después que las hojas de trabajo 1 y 2, les vuelvo a preguntar sobre dominio y contradominio, y en la HT3, SJRR, a pesar de que hace uso de los corchetes, escribe correctamente el dominio pero incorrectamente el contradominio en el problema 1, pues cambia de posición los valores de *x* y *y*:


Ahora observe la imagen de la animación en el monitor de la computadora, teniendo en cuenta la definición anterior, ¿Cuál es el *dominio* y el *contradominio* de la **gráfica de la animación**?

Dominio (X): [0 , 5]

Contradominio (Y): [4,0]

Y en el problema 5 de esa misma hoja de trabajo, escribió mal el dominio y el contradominio pues la respuesta correcta es: Dominio [0,5) | Contradominio [0,7), tal vez tuvo error porque cambió de notación:

Analice la imagen **(Fig.2)**, ¿Cuál es el *dominio* y el *contradominio* de nuestra gráfica de Análisis de Datos?

Dominio (X): $0 \leq x \leq 6$

Contradominio (Y): $0 \leq y \leq 6$

Sin embargo, en el problema 1 de la hoja de trabajo 4 contestó correctamente y fue el único que usó esa notación:

Ahora observe la imagen de la animación en el monitor de la computadora, ¿Cuál es el *dominio* y el *contradominio* de la **gráfica de la animación**?

Dominio (x): $0 \leq x \leq 4$

Contradominio (Y): $0 \leq y \leq 6$

HT3

EPISODIO 17: Conversación problema 1 (Dominio-Contradominio)

YCS me comentó que el flujo de la animación había desaparecido después de un rato, a lo que le comenté que no había problema; así que pasó a lo siguiente y me contestó el problema 1.

YCS: Profe se me borró la animación..

T: A ver

YCS: Si mira, le dí en “Registro en hoja de cálculo” y “cierra” (Recreaba lo que había hecho anteriormente)

T: Si

YCS: A continuación “Animación” y haz de cuenta que después de un ratito éste flux (señala el flujo de la animación) se acabó todo esto y el flux nada mas se quedó aquí (señala el punto (5,0)) no se como..

T: Ah pues.. bueno, en todo caso no importa

YCS: Entonces aquí ¿tengo que sacar el dominio de esto y el contradominio? (señala la animación en el monitor)

T: Ajá

YCS: Ok el dominio sería de ¿0 a 5?

T: Ajá

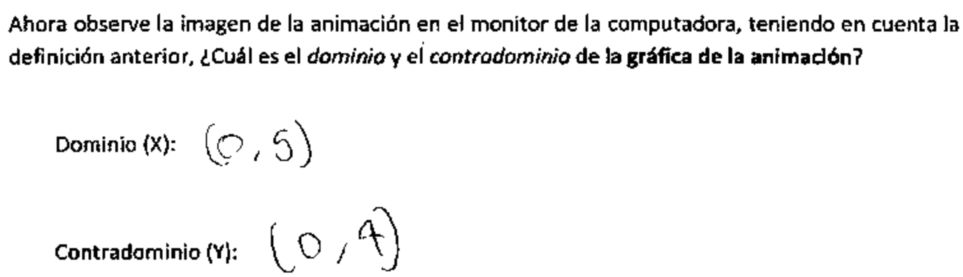
YCS: Y contradominio sería de 0 a 4

T: Uhum (asiento con la cabeza)

-YCS lo escribe en la hoja de trabajo-

ANÁLISIS EPISODIO 17:

A pesar de que YCS me pregunta sobre un problema que le sucedió con el programa, al final termina respondiendo correctamente lo que dice el problema, sin embargo, como ya se vio en el episodio anterior, YCS escribió parcialmente correcto el dominio y contradominio, pues omitió los corchetes en ambos casos.



Ahora observe la imagen de la animación en el monitor de la computadora, teniendo en cuenta la definición anterior, ¿Cuál es el *dominio* y el *contradominio* **de la gráfica de la animación?**

Dominio (X): (0 , 5)

Contradominio (Y): (0 , 4)

HT3

EPISODIO 18: Conversación problema 4 (Interpretación de la columna ∆E/∆D)

SJRR: Profe, aquí la respuesta ¿es la velocidad?

T: ¿Por qué dices que es la velocidad?

SJRR: Pues porque la *x* es todo esto (señala el eje de las *x's* en el ordenador) y se registra en la columna *D*, y la *E* registra todo *y*. No se si una será algún tiempo

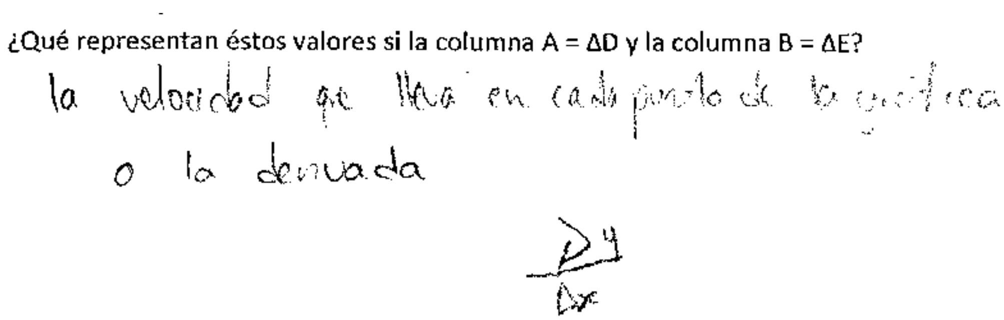
T: Bueno, digamos que el tiempo es un parámetro implícito porque no lo estamos tomando tal cual, no hay un contador aquí que diga va tal tiempo, pero en cierta manera si se puede tomar en alguna variable. Y sí, lo que se desplaza en *x* es la columna *D* y lo que se desplaza en *y* es la columna *E*, entonces el cociente de *E* sobre *D* ¿qué dices tú que es?

SJRR: La derivada porque sería el $\Delta y/\Delta x$

T: Pues para ser la derivada le hace falta algo que mas adelante te explico pero está bien.

ANÁLISIS EPISODIO 18:

SJRR ya tenía una idea de lo que representaba la columna C de la hoja de cálculo, incluso fue de los pocos que intuyó que la columna *D* representaba los valores de *x* y la columna *E* los valores de *y*, y su respuesta nos dice que razona mas a fondo.



¿Qué representan éstos valores si la columna A = ΔD y la columna B = ΔE?

la velocidad que lleva en cada punto de la gráfica

o la derivada

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ANÁLISIS FINALES

GMGR

No tuvo problema para graficar después de haberle disipado su duda.

En la hoja de trabajo número 2 contestó correctamente el problema 2, pero por falta de tiempo no resolvió el resto de la hoja de trabajo, debido a ello no contestó el problema 5 que trata sobre dominio-contradominio; en el problema 1 y el problema 5 de la hoja de trabajo 3 contestó incorrectamente el dominio e incorrectamente el dominio-contradominio, respectivamente, sin embargo, en el problema 1 de la hoja de trabajo 4, también relacionada con dominio-contradominio, contestó correctamente.

En la hoja de trabajo 3 contestó correctamente el problema 2 relacionado con la interpretación de la columna D de la hoja de cálculo del programa, sin embargo, en los problemas 3 (relacionado con la interpretación de la columna E) y el problema 4 (relacionado con la interpretación de la columna E/D) no es clara su respuesta.

En la hoja de trabajo 4 contestó correctamente todos los problemas y no tuvo problema al deducir la fórmula general para las series.

EVRR

EVRR al final no tuvo problemas para graficar.

En la hoja de trabajo 1 contestó incorrectamente el problema 2 y el problema 3 relacionados con variable dependiente-independiente, sin embargo, en la hoja de trabajo 2 contestó correctamente el problema 1 que también está relacionada con variable dependiente-independiente.

En la hoja de trabajo 2 contestó incorrectamente el problema 2 y en el problema 4 hizo mal uso de las propiedades de los radicales; no contestó ni el problema 3 ni el problema 6, además del problema 5, el cual trata sobre dominio-contradominio, sin embargo, en el problema 1 y el problema 5 de la hoja de trabajo 3 y en el problema 1 de la hoja de trabajo 4, todos relacionados con dominio-contradominio, contestó correctamente.

Fue de las pocas personas que dieron respuestas acertadas en los problemas 2, 3 y 4 de la hoja de trabajo 3, y de hecho, contestó correctamente toda la hoja de trabajo 3 y la 4.

En la hoja de trabajo 4 no tuvo problema al deducir la fórmula general para las series.
Siempre trató de dar explicaciones amplias de sus respuestas.

CPT

En la hoja de trabajo 1 contestó incorrectamente el problema 2 y el problema 3 relacionados con variable dependiente-independiente, sin embargo, en la hoja de trabajo 2 contestó correctamente el problema 1 que también está relacionada con variable dependiente-independiente. No tiene problema para graficar.

En la hoja de trabajo 2 no contestó el problema 5 el cual trata sobre dominio-contradominio, sin embargo, en el problema 1 y el problema 5 de la hoja de trabajo 3 y en el problema 1 de la hoja de trabajo 4, todas relacionadas con dominio-contradominio, contestó correctamente. No hizo los problemas 3, 5 y 6 de la hoja de trabajo 2.

CPT fue de las pocas personas que escribió, haciendo uso de corchetes, correctamente las respuestas de los problemas 1 y 5 de la hoja de trabajo 3, relacionados con el dominio y el contradominio. En las preguntas 2, 3 y 4 de la hoja de trabajo 3 tiene la idea, pero su respuesta es confusa.

En la hoja de trabajo 4 tuvo problema para deducir la fórmula general de las series.

SJRR

En general tuvo un buen desempeño, no tiene problema para graficar

Contestó correctamente las hojas de trabajo 1 y 2, exceptuando el problema 5 de la hoja de trabajo 2, referente al dominio y contradominio, analizado en el episodio 16.

En la hoja de trabajo 3 contestó incorrectamente el contradominio en el problema 1. En los problemas 2, 3 y 4 tiene idea pero no es clara su respuesta. Además, contestó mal el dominio en el problema 5.

En la hoja de trabajo 4 contestó correctamente todos los ejercicios, y no tuvo problema al deducir la fórmula general para las series, además, fue el único que representó el dominio-contradominio de la forma: $A \leq X \leq B$ y aunque tuvo algunos problemas con eso, al final respondió correctamente.

YCS

También su desempeño fue bueno, no tuvo problemas para graficar.

En la hoja de trabajo 1, tomó el punto F como variable dependiente en el problema 2 y como variable independiente en el problema 3.

En la hoja de trabajo 2 contestó correctamente todos los ejercicios, sólo le faltó un poco a la demostración del problema 3 para que estuviese completa.

En la hoja de trabajo 3 no usó corchetes en dominio y contradominio en el problema 1 y en el problema 5. Tiene idea pero no es clara su respuesta en el problema 4.

En la hoja de trabajo 4 contestó correctamente los ejercicios, excepto porque no usó corchetes en dominio y contradominio en el problema 1.

JESA

Su desempeño fue regular, no tuvo problemas para graficar.

En la hoja de trabajo 1, tiene la idea en el problema 2 y el problema 3, relacionadas con variable dependiente e independiente pero escribió lo contrario.

En la hoja de trabajo 2 dejó incompleta la demostración en el problema 3, le faltó poner la raíz en el problema 4 y no contestó los problemas 5 y 6.

En la hoja de trabajo 3 no usó corchetes en dominio y contradominio en el problema 1 y en el problema 5, en los problemas 3 y 4 tiene idea pero no es clara su respuesta, contestó incorrectamente el contradominio en el problema 5.

En la hoja de trabajo 4 contestó correctamente los ejercicios, excepto por el problema 1, relacionado con el dominio y el contradominio.

Observaciones y Conclusiones Finales

Una vez terminados los análisis de los episodios registrados y de la información obtenida de la experimentación, se procedió a examinar a fondo las respuestas de cada una de las hojas de trabajo realizadas por los alumnos y comentar los resultados obtenidos.

HT1

En la hoja de trabajo N°1 se expone una pregunta abierta sobre lo que sucede al mover el punto X_2 de la animación en el programa Geogebra, para mostrar así el razonamiento que los alumnos tienen, por lo que hubo tanto respuestas obvias como otras más elaboradas. Por ejemplo, EVRR contestó: "*Al mover el punto X_2 hacia la derecha, es decir, al aumentar, los valores del punto Y_2 disminuye, es decir, el punto se acerca o tiende a 0*", y es similar a lo que piensa CPT: "*Conforme X_2 se aumenta, Y_2 disminuye y conforme X_2 disminuye Y_2 aumenta, además de que cambian los valores en las coordenadas*", sin embargo, SJRR notó: "*Que se mueve proporcionalmente a su medida y sobre la línea negra y está dentro de un rango pero no se despega de la línea negra, rango [12,18]*". Esto ayuda para saber que hay personas que tienen razonamientos similares así como otros que piensan de forma distinta y nos da un panorama de que esperar de cada alumno, aunque en algunos casos hubo excepciones.

En el problema N°1 se tuvo la intención de que los alumnos llenaran una tabla con los valores de los puntos X_2 y Y_2 de la animación del programa, y se tuvieron resultados favorables pues los alumnos no tuvieron dudas y contestaron correctamente.

En el problema N°2 se buscó ver que tan familiarizados estaban los alumnos con los conceptos de variable dependiente e independiente mediante la identificación de éstos en la gráfica presentada en la hoja de trabajo. La mayoría (el 80% aproximadamente) tuvo confusión, en la variable dependiente porque la relacionaban con el punto F y la variable independiente con el punto X_2, tal como lo demuestran EVRR, YCS y CPT en sus respuestas. Lo mismo sucedió con SJRR y JESA, los cuales, después de preguntarme sobre éste problema (como se observa en el episodio 8 del capítulo 4) cambiaron sus respuestas, sin embargo, solamente SJRR contestó correctamente pues la respuesta de JESA está incorrecta y sus argumentos no son válidos. GMGR también tuvo duda en este problema y me preguntó antes de contestar (como se observa en el episodio 1 del capítulo 4), se le resolvió la duda y contestó correctamente.

En el problema N°3 se vuelve a tocar el tema de la variable dependiente e independiente, obteniendo de nueva cuenta resultados no favorables. EVRR, CPT y SJRR tomaron el punto F como variable dependiente y el punto X_2 como variable independiente, pero como SJRR ya había contestado éste problema antes de resolverle la duda del problema anterior, posteriormente cambió su respuesta y la escribió correctamente. GMGR y YCS contestaron que la variable dependiente es el punto X_2 y la variable independiente el punto F lo cual es incorrecto, y JESA contestó incorrectamente, sin embargo, sus argumentos reflejan que sí entiende la diferencia entre variable dependiente e independiente, pero no supo como escribirlo.

En el problema N°4 los alumnos tenían que graficar en un plano cartesiano los puntos obtenidos en la tabla del problema 1 de la hoja de trabajo. Se obtuvieron resultados favorables, a pesar de que algunos alumnos tuvieron problemas para entender las instrucciones, como es el caso de GMGR (episodio 2 del capítulo 4), EVRR y CPT (episodio 3 del capítulo 4) y JESA (episodio 9 del capítulo 4), al final graficaron correctamente.

En el problema N°5 de nueva cuenta los alumnos tienen que graficar los puntos obtenidos en el problema 1, pero en esta ocasión los ejes coordenados están invertidos. Los alumnos contestaron correctamente y no hubo problema alguno al graficar.

En general en la hoja de trabajo N°1 los alumnos tuvieron un desempeño regular pues, a pesar de que tuvieron más ejercicios correctos que incorrectos, digamos que en el tema central de la hoja de trabajo (variable dependiente e independiente) la mayoría tuvo respuestas incorrectas o confusas, aunque siempre se pensó ésta primera hoja como de evaluación para ver que tanto recordaban los alumnos de lo aprendido en sus clases. En los ejercicios 1, 4 y 5 no hubo mayores complicaciones. En los problemas 2 y 3, probablemente pudo haber ocurrido que los alumnos contestaran incorrectamente debido a un problema de apreciación o confusión de los términos “variable” y “punto”.

HT2

En el problema N°1 tocamos de nueva cuenta el tema de variable dependiente e independiente, en cierta manera para ver si habían comprendido el concepto en la hoja de trabajo anterior. Sorpresivamente a los alumnos les fue mejor en ésta ocasión ya que SJRR, GMGR y JESA contestaron similarmente: "*la variable dependiente es la "x" porque "y" es la que se puede manipular*", lo cual es correcto. EVRR tiene la idea pero su respuesta no fue la adecuada pues escribió que "*la variable dependiente es* $\overline{X1X2}$ *y la variable independiente es Y2, esto porque la variable Y2 es la que se está manipulando y dependiendo del valor de ésta, será la colocación del punto* $\overline{X1X2}$", al igual que CPT pues escribió "*la variable independiente es* y_2 *y la dependiente es* x_2 *porque al cambiar de posición de* y_2 *automáticamente tiene que cambiar* x_2*,* x_2 *depende de* y_2"

En el problema N°2 se colocaron varias funciones y se pedía que el alumno eligiera la que tuviera la forma de la gráfica obtenida en el punto anterior de la hoja de trabajo. YCS, JESA y GMGR seleccionaron la respuesta correcta. SJRR tuvo duda respecto a la respuesta (episodio 11 del capítulo 4) pero al final también contestó correctamente.

El problema N°3 presentó un porcentaje bajo de respuestas y varias de ellas están incompletas. El ejercicio trata de que los alumnos demuestren, apoyados en el teorema de Pitágoras y la geometría, como es la forma de la función que representa la escalera en movimiento. JESA, a pesar de que se le explicó lo que debía hacer (episodio 12 del capítulo 4) su respuesta está incompleta y no es correcta, al igual que YCS a quien también se le orientó lo que debía hacer (episodio 13 del capítulo 4) pero su respuesta no está completa, sin embargo, SJRR quién también tuvo participación en el episodio 13, fue el alumno que tuvo la respuesta más completa y llegó al objetivo del ejercicio.

Para el problema N°4 el índice de respuestas fue un poco mayor; los alumnos debían de despejar la incógnita H de la ecuación $A^2+X^2=(A-V)^2+(X+H)^2$. EVRR trató de despejar pero no lo realizó correctamente ya que hizo mal uso de las propiedades de los radicales pues quiso sacar raíz individualmente a cada término sin tomar en cuenta los signos, por ello, su respuesta es incorrecta. CPT no entendía lo que debía hacer, pero después de explicarle (episodio 6 del capítulo 4) intentó resolver el ejercicio obteniendo un resultado parcialmente correcto, pues al momento de colocar el término $(A-V)^2$ del otro lado de la igualdad, le hizo falta cambiar de signo. Algo similar sucedió con JESA, al final del episodio 12, se le explica lo que debe hacer y en un principio trató de elevar al cuadrado, equivocadamente, cada término haciendo mal uso de las propiedades de los exponentes, sin embargo, después trata de corregir pero al momento de pasar el término *(7-V)*^{2} al otro lado de la igualdad, no cambió de signo el término pero sí se lo cambió a *63.9769*, el cual no tenía por qué ser modificado. Finalmente, trató de sacar raíz pero no lo hizo en ambos lados de la igualdad, obteniendo así un resultado inconcluso e incorrecto. SJRR desarrolló los binomios al cuadrado y al llegar a un resultado tuvo duda si estaba correcto, lo cual no lo era pues trató de pasar dividiendo *7.74* de $7.74H+H^2$ y además de "sumar" $H+H^2=2H$ (episodio 14 del capítulo 4); posteriormente optó por hacerlo de otra manera, se regresó a la ecuación inicial y pasó $(7\text{-}V)^2$ restando para el otro lado de la igualdad y sacó raíz en los ambos lados, lo cual era correcto pero posteriormente hizo mal uso de las propiedades de los radicales pues separó $\sqrt{63.9768-(7-V)^2}$ en raíces; se le explicó que no era correcto como había resuelto (episodio 15 del capítulo 4), por ello se le indicó como debía proceder y al final respondió correctamente, al igual que YCS quien no tuvo dudas y obtuvo un resultado favorable.

En el problema N°5 en el cual debían graficar una parte de la función *H*, también hubo bajo índice de respuestas, pero las que hubo estuvieron correctas

El problema N°6 fue de los ejercicios que casi nadie contestó, y los que lo hicieron les faltó un poco para entender bien de lo que se trataba. Los alumnos debían escribir el dominio y el contradominio de la función *H*, y algunos, tal es el caso de YCS, tenían dudas de lo que se debía responder. YCS contestó bien el dominio pero se equivocó al escribir el contradominio después de haberle explicado lo que se tenía que hacer (episodio 16 del capítulo 4), pero SJRR, quien también toma parte en el episodio 16, contestó acertadamente ambos casos. Cabe mencionar que para nuestro propósito su respuesta es correcta ya que se pensó en un rango de *[0,7]*, sin embargo, el dominio y contradominio completo de la función *H* es Dominio: $(\frac{-6241}{6250},\frac{93741}{6250})$ | Contradominio: $[\frac{-387}{100},\frac{82571}{20000}]$.

En la hoja de trabajo N°2 los alumnos tuvieron un desempeño bajo pues la mayoría no alcanzó a terminar los ejercicios dejando sin contestar los últimos, que en gran parte, eran de los principales problemas a resolver. En el primer problema la mayoría contestó correctamente pero un problema aún presente es la confusión entre "variable" y "punto". En el segundo ejercicio algunos tuvieron problema al elegir la opción correcta, tal vez porque no tenían idea de como era la función, o porque no supieron escribir las opciones de las funciones en el programa Geogebra para que comprobaran cada una de ellas. El tercer problema se les complicó a los alumnos ya que no están acostumbrados a hacer demostraciones, por ello su razonamiento, en ese sentido, no está tan desarrollado. En el cuarto ejercicio, la cuestión principal que se presentó fue que los alumnos inmediatamente trataron de desarrollar los cuadrados en vez de buscar alguna manera más sencilla de despejar la incógnita H, esto aunado a los detalles como cambio de signo al pasar un término de la igualdad al otro lado, propiedades de las raíces y propiedades de los exponentes. En el quinto problema la falta de tiempo en algunos alumnos fue la principal causa por la que no contestaron el ejercicio, y por último, en el sexto problema se tuvo duda en el concepto y la definición de dominio y contradominio, tal vez porque ya no los recordaban.

HT3

Para el problema N°1 se volvió a dar la definición de dominio y contradominio, además de un ejemplo visual. Los alumnos debían escribir el dominio y contradominio de la gráfica de la animación con el fin de repasar el ejercicio que muchos no alcanzaron a resolver al final de la hoja de trabajo N°2. Hubo varias versiones sobre la respuesta, GMGR escribió incorrectamente el dominio pero correctamente el contradominio, caso contrario a SJRR quien escribió correctamente el dominio pero incorrectamente el contradominio al cambiar de lugar los valores. YCS, en el episodio 17 del capítulo 4, da la solución correcta de éste problema, sin embargo, al escribir la respuesta, tuvo problemas en la simbología pues no utilizó corchetes, siendo que el rango de la animación es cerrado, y lo mismo sucedió con JESA. CPT y EVRR contestaron correctamente el ejercicio.

En el problema N°2 los alumnos debían interpretar lo que representan los valores de la columna A en la hoja de cálculo de la animación, donde hubo distintas respuestas. SJRR y CPT contestaron similarmente que: "*Están representando el dominio*", mientras que JESA, EVRR, GMGR y YCS respondieron de manera semejante que: "*Representan la distancia de la animación del eje x*", las cuales ambas son respuestas válidas.

En el problema N°3 los alumnos ahora debían interpretar lo que representan los valores de la columna B en la hoja de cálculo de la animación, y como se esperaba hubo distintas respuestas. SJRR, CPT y EVRR respondieron similarmente que: "*Representan lo que avanza en el contradominio*", YCS escribió: "*La trayectoria del chorro en eje y*", GMGR contestó: "*La resta de los valores de la columna y*" y una respuesta peculiar fue la de JESA quien escribió: "*El tiempo de caída de la animación del eje y*", lo cual refleja las distintas formas de apreciación.

El problema N°4 sigue la idea de los ejercicios anteriores pues los alumnos debían interpretar lo que representan los valores ahora de la columna C en la hoja de cálculo de la animación. Algunas de las respuestas interesantes fueron dadas por YCS quien escribió: “*La trayectoria del vector*”, JESA contestó: “*Representa la angulación del líquido en caída como la parábola*” y EVRR respondió: “*La forma que la gráfica de la animación tendrá ya que al haber cambios en D y E la gráfica tenderá a ir hacia infinito*”. SJRR, quien tuvo duda de su respuesta (episodio 18 del capítulo 4), contestó: “*La velocidad que lleva en cada punto de la gráfica o la derivada* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$” lo cual nos indica que a pesar de no tener, en cierta manera, las herramientas necesarias para dar una respuesta concreta, tienen alguna idea de lo que representa.

En el problema N°5 de nueva cuenta, se le pregunta a los alumnos el dominio y contradominio, esta vez de la gráfica de las pendientes que se obtiene en el software. Se esperaba una mejoría respecto a los ejercicios pasados sobre los mismos conceptos sin embargo, tal vez por la diversa apreciación que tuvieron de la gráfica, no hubo respuestas contundentes. CPT contestó correctamente ambos conceptos, pero tuvo error al usar corchetes en ambos casos, siendo que en el dominio y el contradominio el límite superior es abierto. JESA contestó correctamente el dominio e incorrectamente el contradominio pues cambió de lugar los valores, además no hizo uso de corchetes, al igual que YCS. EVRR respondió correctamente, y aunque su respuesta la escribió, no la representó con simbología. Un caso particular fue el de SJRR quien contestó incorrectamente, pero lo rescatable fue su manera de representar la respuesta, de la manera $A \leq X \leq B$.

En general, se obtuvo un desempeño regular por parte de los alumnos, sin embargo, algunas de las preguntas esenciales no tuvieron el resultado esperado. En el primer ejercicio así como en el quinto, ambos relacionados con el dominio y contradominio, el problema radica en la falta de uso de corchetes y saber cuando es un rango abierto o cerrado. Además de malinterpretar los valores de los límites. En el segundo, tercer y cuarto problema hubo respuestas variadas, todas ellas válidas, lo cual nos da a entender las distintas maneras de interpretar los valores que tienen los alumnos.

HT4

En el problema N°1 se tocó por tercera vez los temas de dominio y contradominio para reafirmar conceptos y saber si se entendieron. Los alumnos debían escribir el dominio/contradominio de la gráfica de la animación del programa; EVRR, GMGR y CPT contestaron correctamente ambos casos, y tomaron en cuenta el uso de corchetes, caso contrario a la respuesta de YCS pues aunque su respuesta esta correcta, no usó los corchetes. Un caso particular fue el de SJRR, quien además de contestar correctamente el problema, lo hizo usando una simbología diferente a los demás, de la manera A≤X≤B.

En el problema N°2 los alumnos debían resolver un conjunto de diferencias de la columna A de la hoja de cálculo de tal manera que se obtuviera una "serie" hasta llegar al valor n. Previamente se les indujo como ir haciendo las diferencias para que pudieran resolver el n-valor, lo cual GMGR, JESA, EVRR y SJRR lograron plenamente. YCS también contestó correctamente, solamente se confundió de literal al cambiar D por A. Una respuesta sorprendente fue la de CPT pues ella, en lugar de escribir la diferencia del n-valor como se iba intuyendo, cambió el orden pero el resultado también es correcto, es decir en lugar de escribir como los demás $D_{n+1} - D_n$ ella contestó: $D_n - D_{n-1}$

De igual manera, en el problema N°3 los alumnos tenían que resolver un conjunto de diferencias pero esta vez de la columna B de la hoja de cálculo de tal manera que se obtuviera una "serie" hasta llegar al valor n. Como en el problema anterior, se indujo las diferencias y GMGR, YCS, JESA, EVRR y SJRR contestaron correctamente. De igual manera que en el problema anterior, CPT respondió correctamente pero lo hizo de distinta forma a los demás $(E_n - E_{n-1})$.

En el problema N°3 loa alumnos debían de resolver un conjunto de diferencias de la columna C de la hoja de cálculo de tal manera que se obtuviera una "serie" hasta llegar al valor n. SJRR, EVRR, JESA, GMGR y YCS contestaron correctamente todas las diferencias y como en los ejercicios anteriores, CPT dio una respuesta diferente pero acertada que los demás $(\frac{E_n - E_{n-1}}{D_n - D_{n-1}})$.

En la hoja de trabajo N°4 los alumnos tuvieron un desempeño efectivo pues prácticamente la contestaron completa y correctamente. En el primer problema los resultados demuestran que, a pesar de haber batallado anteriormente con los temas de dominio-contradominio, al final sí comprendieron los conceptos y aprendieron a usar los corchetes. En el segundo, tercer y cuarto problema los alumnos tuvieron un buen desempeño al trabajar con series y obtener el n-ésimo valor de cada ejercicio.

Observaciones Finales

En la primera hoja de trabajo, los resultados concluyen que los alumnos no tienen problema alguno para identificar coordenadas ni para relacionarlas en el plano cartesiano al graficar. También se puede concluir que en primera instancia, los alumnos no estaban tan familiarizados con los conceptos de variable dependiente e independiente pues la mayoría tuvo confusión al tratar de resolver los problemas relacionados con dichos temas, además de que hubo mucha incertidumbre en sus respuestas.

En la segunda hoja de trabajo los resultados demuestran que los alumnos no tienden a hacer demostraciones en sus clases y cuando se les presenta alguna, no tienen idea de que deben hacer ni como empezar a tratar de resolverla, además de que los alumnos se preguntan el “para qué hacerlo” si ya se sabe el resultado, lo cual indica que los profesores no tienen la costumbre de incluir este tipo de prácticas en sus temarios. También cabe mencionar que los alumnos tienen problemas al despejar la incógnita de una ecuación con lo que haría falta reforzar estos temas. De la primera hoja de trabajo a la segunda, hubo mejores resultados referentes a los temas de variable dependiente e independiente pues, aunque en la segunda hoja de trabajo a los alumnos aún les falta tener claros los conceptos de “variable” y “punto”, si tienen la idea de lo que es dependencia e independencia, además hubo mayores resultados positivos.

En la tercera hoja de trabajo, las observaciones demuestran que los alumnos tienen distintas formas de interpretar y concluir resultados De la segunda hoja de trabajo a la tercera, no hubo mucho avance respecto al tema de dominio y contradominio pues, a pesar de que en la segunda hoja varios alumnos no contestaron las preguntas referentes a esos temas, y en la tercera hoja de trabajo había 2 problemas sobre los mismos conceptos, no hubo respuestas contundentes, aparecieron algunas dudas y se limitaron el uso de corchetes.

En la cuarta hoja de trabajo se puede concluir que los alumnos no tienen problemas para deducir los valores en series, además de que, de la tercera hoja de trabajo a la cuarta hubo un avance significativo, respecto a los temas de dominio y contradominio, pues las observaciones demuestran que los alumnos entendieron y comprendieron los conceptos además de hacer un mejor uso de los corchetes.

Al final de la cuarta hoja de trabajo, se les presentó a los alumnos unas preguntas referentes a las hojas de trabajo y al software; algunas respuestas fueron:

1. ¿Qué te parecieron las hojas de trabajo?
   R1: *Muy entretenidas, te da conocer más fácil la forma de graficar y entender mejor las gráficas y sus valores.*
   R2: *Me explicaron muy bien la derivada gráficamente.*

2. ¿Qué cosas nuevas aprendiste?
   R1: *Qué es un dominio, un contradominio y como usar el programa Geogebra.*
   R2: *Lo de la pendiente de la recta en la forma de aplicarlo.*
   R3: *A como sustituir valores.*
   R4: *De donde salió la derivada y como se obtiene.*

3. ¿Te resultó útil o didáctico el programa Geogebra?¿Por qué?
   R1: *Si, porque te ayuda a entender mejor los temas y los gráficos son buenos.*
   R2: *Si, más fácil de entender así que en puro teórico, aquí tiende a ser un poco más práctico.*
   R3: *Muchísimo porque aquí puedes ver todo lo que ves en matemáticas, cálculo, etc. ya gráficamente lo que te permite visualizar lo que estas haciendo.*

4. ¿Te gustaría que el programa sea implementado en clases como herramienta de apoyo?
   R1: *Si, te muestra mejor y más fácil lo que es graficar.*
   R2: *Si y mucho me gustaría que esto nos ayude a comprender mejor cada uno de los temas gráfica o visualmente.*

Podemos concluir que se cumplieron los objetivos de éste estudio, pues los alumnos conocieron el software Geogebra, manipularon e interactuaron directamente con la interfaz, los alumnos se dieron cuenta de que se puede ver gráficamente ciertos fenómenos que suceden cotidianamente y pueden ser analizado mediante el software, además reafirmaron conceptos como coordenadas, graficar, variable dependiente, variable independiente, dominio y contradominio, todo apoyado en las animaciones dinámicas creadas con el programa. Se introdujo la demostración a su manera de razonar, se mostró como intuir valores de series, el concepto de pendiente mediante el cociente de series y la derivada desde el punto de vista de la pendiente de una gráfica. Se encontró que el uso de Geogebra ayudó a los estudiantes a construir múltiples representaciones de conceptos y ayudó a evitar obstáculos algebraicos para centrarse en la comprensión del tema.

Se crearon ambientes dinámicos donde se simularon fenómenos cambiantes y se presentaron objetos matemáticos en distintas formas de lenguaje (gráfico, algebraico y numérico) dinámicamente vinculados, además de que los alumnos se asombraron al ver modelados los fenómenos dinámicamente. Por otra parte, el uso de Geogebra ha influenciado estrategias de resolución de problemas de los estudiantes, pero esta influencia depende de las tareas encomendadas.

BIBLIOGRAFÍA

Alemán de Sánchez, Á. (1998/1999). *La Enseñanza Matemática Asistida por Computador.* Universidad Tecnológica de Panamá, Facultad de Ciencias y Tecnología, Directorio de artículos. Disponible en http://www.utp.ac.pa/articulos/ensenarmatematica.html

Arcavi A., Hadas N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 63-85.

Baeza de Oleza, L. (1995). Elaboración de hipertextuales, Reflexión sobre experiencias y retos. Palma de Mallorca, Belears, España.

Blum W., & Niss M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects: State, trends & issues. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37–68.

Borba M, D'Ambrosio U, Villareal M. (2006). *Visualization, Mathematics Education and Computer Environments*. (p. 79-99). En: Borba M., D'Ambrosio U., Villarreal M. (Eds). Human-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Infornation and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation. Volume 39 of Mathematics Education Library. United States of America. Springer.

Bu L., Schoen R. (2011). (ed). *GeoGebra for Model-Centered Learning in Mathematics: An Introduction.* En: Bu L., Schoen R. *Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra.* (p. 1-6). Netherlands. Sense Publishers.

Cassina, S., Iturbe, A. (2000) *Construcciones geométricas con un software.* Recuperado de http://www.educ.ar/educar/site/educar/dr.-geo.html

Córdoba Gómez F., Ardila Rojo P. (2012). *El Uso de GeoGebra en la Solución de Algunos Problemas de Modelación en Matemática Escolar*. En: Córdoba Gómez F., Cardeño Espinoza, J. (Comp). *Desarrollo y Uso Didáctico de GeoGebra*. (p. 223-236) Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas. Medellín. Fondo Editorial ITM.

Cortés, J. C. & Hitt, F. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista digital matemática, Educación* *e Internet*, Vol 10 N°1, Consultado el 12 de Julio de 2014 en http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/

Cortés Zavala J., Miranda Salazar R., Carrillo Mata G. (2012). *Modelación matemática con el uso de la calculadora TI-Nspire CAS, como una alternativa para el aprendizaje significativo de funciones*. En: Cortés Zavala J., Ulloa Azpeitia R. (Eds). *Uso de Tecnología en Educación Matemática. Investigaciones y propuestas 2012*. (p. 241-254). México. A.M.I.U.T.E.M.

Dávila Araiza M., Grijalva Monteverde A., Bravo Tapia J. (2012). *La Derivada a partir de la Resolución de Problemas de Optimización con Apoyo de Geogebra*. En: Cortés Zavala J., Ulloa Azpeitia R. (Eds). *Uso de Tecnología en Educación Matemática. Investigaciones y propuestas 2012*. (p. 212-222). México. A.M.I.U.T.E.M.

Development Informatics Working Paper Series, Working Paper . Institute for Development Policy and Management, Manchester, UK. Extraido el 26 de julio de 2014 desde http://www.man.ac.uk/idpm/idpm_dp.htm

Doerr, H.M., & English, L.D. (2003). A Modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal of Research in Mathematics Education, 34*(2), 110–136.

Dossey, J. A. (1992). The nature of mathematics: Its role and its influence. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 39–48). New York: Macmillan.

Duncombe, R. and Heeks, R. (1999). Information, ICTs and small Enterprise: Findings from Botswana´s

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Holland: D. Reidel

Goldin, G. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In

Greer, B. (1997). Modeling reality in mathematics classroom: The case of word problems. *Learning and Instruction, 7*, 293–307.

Gutiérrez, A., & Boero, P. (Eds.). (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education*. Rotterdam: Sense Publishers.

Hitt F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2

Hitt F., Cortés Zavala C., Rinfret M. (2012). *Utilisation des Technologies dans la Classe de Mathématique au Secondaire: Des Outils Sous-Exploités*. En: Dorier J.-L., Coutat S. (Eds). *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21°siécle – Actes du colloque EMF2012*. (GT6, p. 849-862). Recuperado de: http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Hohenwarter, J., & Hohenwarter, M. (2009). Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: The case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 28*, 135–146.

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra.

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and Its Applications*, 7. Retrieved from http://mathdl.maa.org/mathDL/4/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=1448

Iturbe A., et. al. (2012). *Uso del GeoGebra en la Enseñanza de la Geometría en Carreras de Diseño*. Actas de la Conferencia LatinoAmericana de GeoGebra. Universidad Nacional de Río Negro, Argentina.

J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275–285). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Karadag Z., McDougall D. (2011). *GeoGebra as a Cognitive Tool: Where Cognitive Theories and Technology Meet*. En: Bu L., Schoen R. (Eds). *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra.* (p. 169-182). Rotterdam. Sense Publishers.

Kortenkamp U., Fest A. *From CAS/DGS Integration to Algorithms in Educational Math Software*. University of Education Schwäbisch Gmünd, Germany. Recuperado de http://www.researchgate.net/publication/215908063_From_CASDGS_Integration_to_Algorithms_in_Educational_Math_Software/links/09e4150be0ec13b512000000

Learning and teaching with technology: Principles and practices (pp. 13–27). London: Kogan Page.

Lesh, R. (2006). Modeling students modeling abilities: The teaching and learning of complex systems in education. *Journal of the Learning Sciences, 15*, 45–52.

Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism: A models and modeling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R. A., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763–804). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (Eds.). (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Little C. (2011). *Approaches to Calculus Using GeoGebra*. En: Bu L., Schoen R. (Eds). *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra.* (p. 191-204). Rotterdam. Sense Publishers.

Marquès, P. (1996). *El software educativo.* Universidad Autónoma de Barcelona. http://www.lmi.ub.es/te/any96/marques_software/ . (Consultado en 08-14)

Marquès, P. (1998). *Software educativo. Algunas tipologías*. Universidad Autónoma de Barcelona. Disponible en http://www.xtec.es/~pmarques/edusoft.htm

Milrad, M., Spector, J. M., & Davidsen, P. I. (2003). Model facilitated learning. In S. Naidu (Ed.),

Mousoulides N. (2011). *GeoGebra as a Conceptual Tool for Modeling Real World Problems*. En: Bu L., Schoen R. (Eds). *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra.* (p. 105-118). Rotterdam. Sense Publishers.

Mousoulides, N. (2011). Student developments in modeling real world problems using conceptual technological tools. ACTA MATHEMATICA 13, 63-72.

Mousoulides, N., & English, L. D. (2008). Modeling with Data in Cypriot and Australian Classrooms. *The 32nd International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp 423–430). Morelia, Mexico.

Mousoulides, N., Christou, C., & Sriraman, B. (2008). A Modeling Perspective in Mathematical Problem Solving. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(3), 293–304.

Novak D., et. al. (2011). *Building Simulators with GeoGebra*. En: Bu L., Schoen R. (Eds). *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra.* (p. 73-90). Rotterdam. Sense Publishers.

Ortíz Hernández A. (2012). *GeoGebra como herramienta para la enseñanza de la matemática: Resultados de un curso de capacitación.* VIII Festival Internacional de Matemática. Junio 2012. Costa Rica.

Pierce R., Stacey K. (2011). *Using Dynamic Geometry to Bring the Real World into the Classroom*. En: Bu L., Schoen R. (Eds). *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra.* (p. 41-56). Rotterdam. Sense Publishers.

Pizarro R. (2009). *Las TICs en la enseñanza de las Matemáticas. Aplicación al caso de Métodos Numéricos*. Tesis de Mágister en Tecnología Informática Aplicada en Educación. Universidad Nacional de la Plata, Buenos Aires, Argentina.

Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, *27*(3), 126–131, University of Northampton, UK: BSRLM.

Rivera Porto, E. (1997). *Aprendizaje asistido por computadora, diseño y realización*. Disponible en http://www.geocities.com/eriverap/libros/Aprend-comp/apend1.html (Consultado 05-2014)

Romero Félix C., Soto Munguía J. (2012). *Una Actividad Didáctica para Introducir Gráficamente el Concepto de Transformación Lineal; Usando Geogebra*. En: Cortés Zavala J., Ulloa Azpeitia R. (Eds). *Uso de Tecnología en Educación Matemática. Investigaciones y propuestas 2012*. (p. 197-203). México. A.M.I.U.T.E.M.

Ruíz Jerez M. (2011). *GeoGebra en el Aula: Uso de GeoGebra en el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje de Matemáticas en 3° y 4° de la ESO*. Recuperado de http://es.scribd.com/doc/109975830/GEOGEBRA-EN-EL-AULA-Trabajo-Fin-de-Master

Ruíz Vahos H., Ávila Mejía P., Villa Ochoa J. (2013). *Uso de GeoGebra como Herramienta Didáctica dentro del Aula de Matemáticas*. En: Córdoba Gómez F., Cardeño Espinoza J. (Comp). *Desarrollo y uso didáctico de Geogebra*. (p. 446-454). Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas. Medellín. Fondo Editorial ITM. Recopilado de: http://fondoeditorial.itm.edu.co/Libroselectronicos/desarrollo-y-uso-didactico-de-geogebra/index.html

Selcuk Haciomeroglu E. (2011). *Visualization Through Dynamic GeoGebra Illustrations*. En: Bu L., Schoen R. (Eds). *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra.* (p. 133-144). Rotterdam. Sense Publishers.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1–36.

UNESCO (2008, 8 de Enero). Estándares de competencias en TIC para docentes. Extraído el 26 de abril de 2012 desde http://www.eduteka.org/pdfdir/UNESCOEstandaresDocentes.pdf

Vahey P., et. al. (2013). *Curricular Activity Systems Supporting the Use of Dynamic Representations to Foster Students' Deep Understanding of Mathematics*. En: Mouza C., Lavigne N. (Eds). *Emerging Technologies for the Classroom: A learning Sciences Perspective*. New York. Springer Press. ISBN 978-1-4614-4696-5 (e-book)

Zawojewski, J., Hjalmarson, M., Bowman, K., & Lesh, R. (2008). A modeling perspective on learning and teaching in engineering education. In J. Zawojewski, H.A. Diefes-Dux & K. Bowman (Eds.) *Models and Modeling in Engineering Education: Designing Experiences for All Students* (pp. 1–15). Sense Publishers.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). What is mathematical visualization. In W. Zimmermann, & S. Cunningham (Eds.), Visualization in teaching and learning mathematics (pp. 1-8). Washington, DC: MAA.

Zúñiga, M. (2009). Un estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización. En alumnos de un curso de cálculo I. Tesis de maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Tegucigalpa.

ANEXOS

HOJA DE TRABAJO N°1

Instrucciones:

1. Abra el archivo de Geogebra con el nombre **FallingStair.ggb**

2. Observe el gráfico que ahí se muestra; la línea roja simula una escalera fija y la línea azul punteada será nuestra escalera en movimiento.

3. Seleccione y arrastre el punto X_2 sobre el eje de las x's.
   ¿Qué nota al moverlo?

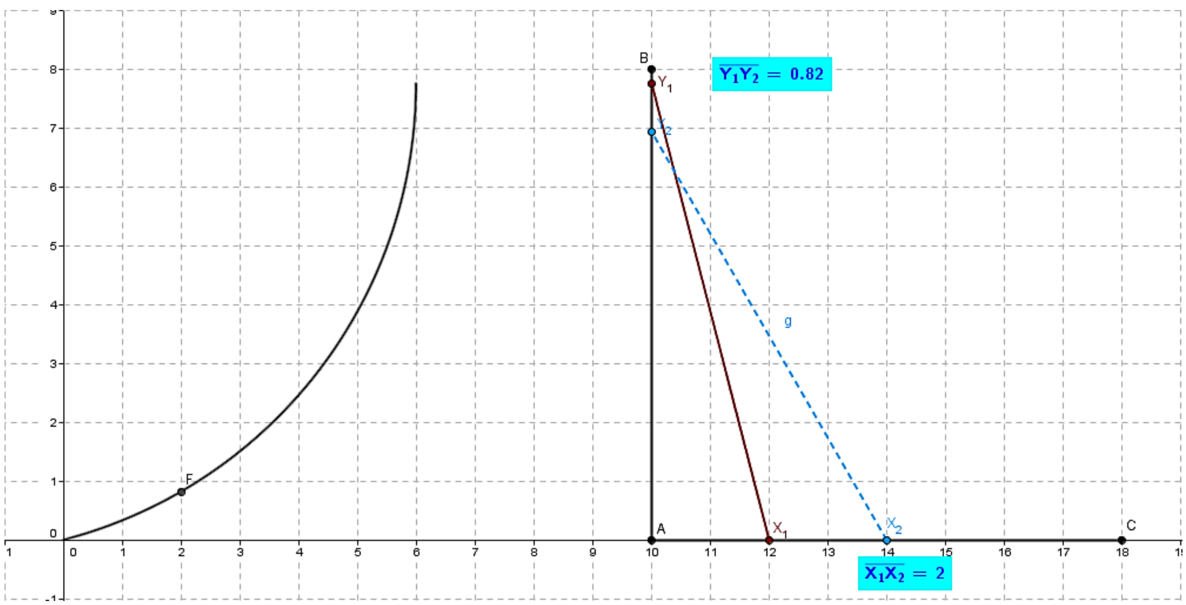
4. Deslice y coloque el punto X_2 sobre las siguientes coordenadas: {(12,0), (13,0), (14,0), (15,0), (16,0), (17,0) y (18,0)}, y a continuación llene la siguiente tabla con los valores obtenidos en los cuadros azules correspondientes a $\overline{Y_1Y_2}$ y $\overline{X_1X_2}$

Posición	$\overline{X_1X_2}$	$\overline{Y_1Y_2}$
(12,0)		
(13,0)		
(14,0)		
(15,0)		
(16,0)		
(17,0)		
(18,0)		

5. Coloque el punto X_2 en el lugar que usted desee (excepto en los extremos, esto para una mejor manipulación).

6. Seleccionar y teclear en el recuadro inferior izquierdo de la pantalla (donde dice "Entrada:") tal cual como está escrito, incluyendo los paréntesis y respetando mayúsculas, lo siguiente: ***(distanciaX1X2,distanciaY1Y2)***, y posteriormente presionar *enter*. Deberá aparecer un punto (F) en el sistema coordenado.
7. Ir a la pestaña de *"Perpendicular"*, desplegar el menú y seleccionar la opción *"Lugar Geométrico"*, hacer clic en el punto (F) que apareció anteriormente, y dar clic sobre el punto X_2 del gráfico.

   Debe obtener una gráfica como la siguiente:



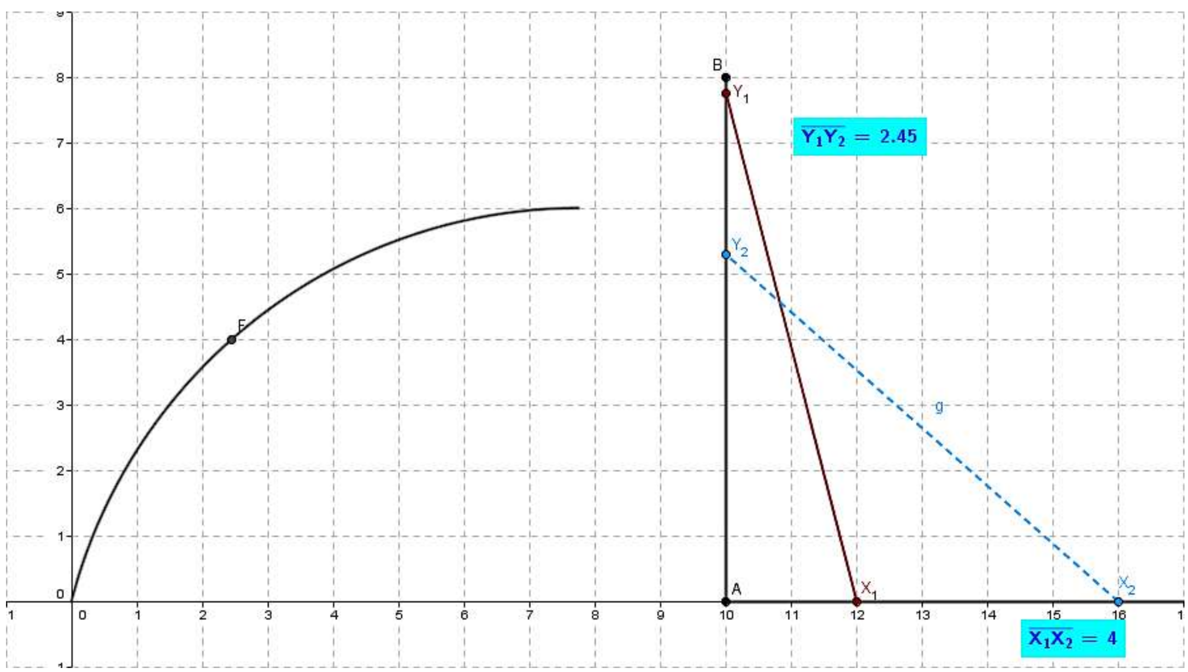
8. Ahora vaya a las pestañas del menú y seleccione la opción *"Elige y Mueve"*, a continuación seleccione y mueva el punto X_2 del gráfico y vea lo que pasa.

¿Cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente? ¿Por qué? Explique.

9. Ahora, de clic en el punto (F) del sistema coordenado y proceda a eliminarlo.

10. Seleccionar y teclear en el recuadro inferior izquierdo de la pantalla (donde dice “Entrada:”) tal cual como está escrito, incluyendo paréntesis y respetando mayúsculas, lo siguiente: ***(distanciaY1Y2,distanciaX1X2)***, y después presionar *enter*. Deberá aparecer de nueva cuenta un punto (F) en el sistema coordenado.

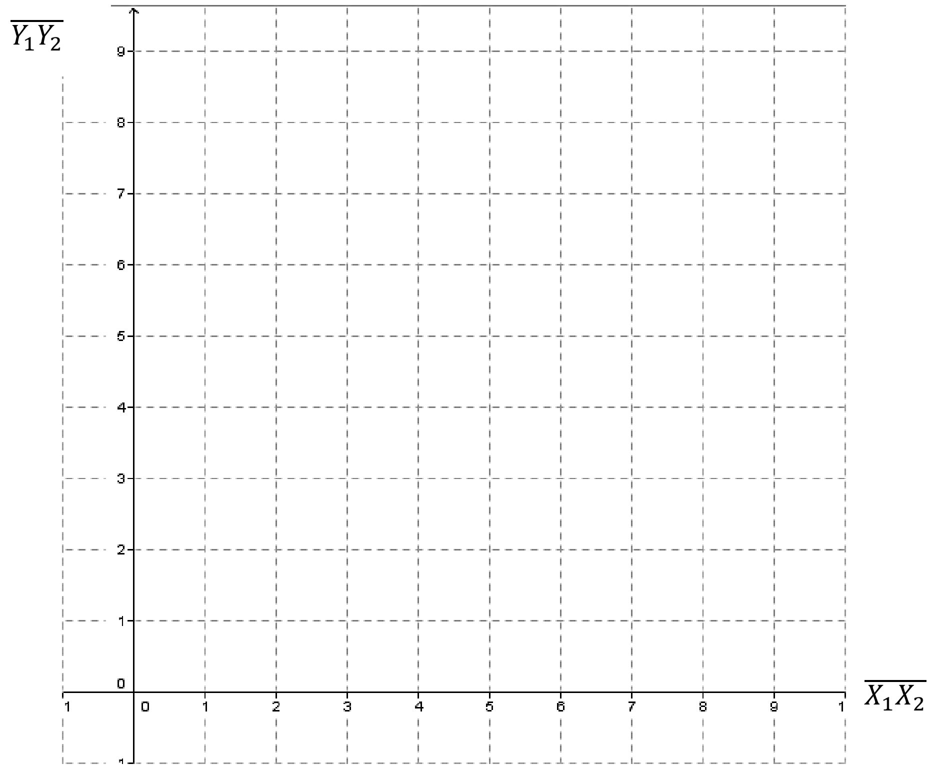
11. Ir a las pestañas y seleccionar la opción *“Lugar Geométrico”*, hacer clic en el punto (F) que apareció anteriormente, y dar clic sobre el punto X_2 del gráfico.
    Debe obtener una gráfica como la siguiente:



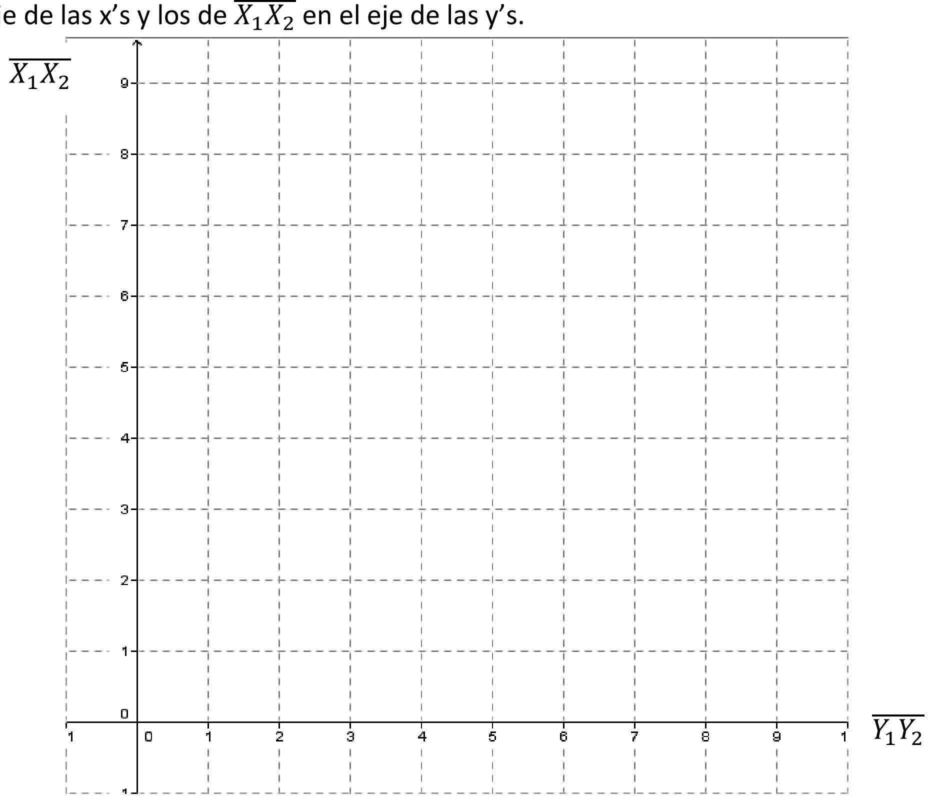
12. Vaya a las pestañas y seleccione la opción *“Elige y Mueve”*, a continuación seleccione y mueva el punto X_2 del gráfico y vea lo que pasa.

¿Cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente? ¿Por qué? Explique.

13. Grafique los datos de la tabla obtenidos en punto 4 colocando los valores de $\overline{X_1X_2}$ en el eje de las x's y los de $\overline{Y_1Y_2}$ en el eje de las y's.



14. Grafique los datos de la tabla obtenidos en punto 4 colocando los valores de $\overline{Y_1Y_2}$ en el eje de las x's y los de $\overline{X_1X_2}$ en el eje de las y's.



HOJA DE TRABAJO N°2

Instrucciones:

1. Abra el archivo de Geogebra con el nombre ***FallingStair2.ggb***

2. Mueva y coloque el punto Y_2 en el lugar que usted desee (excepto en los extremos, esto para una mejor manipulación).

3. De acuerdo a lo aprendido en la hoja de trabajo N°1, en este caso, ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente? ¿Por qué? Explique.

4. Ahora vaya a la pestaña de circunferencias y seleccione "*Circunferencia (centro, radio)*". Colóquese y dé clic en el origen de los ejes de coordenadas; a continuación aparecerá una ventana donde se tiene que indicar el tamaño del radio de la circunferencia, en el recuadro escribir ***distanciaY1Y2***. (Si lo desea, vaya a la pestaña de *"Elige y mueve",* seleccione la opción con el mismo nombre y ahora mueva el punto Y_2 y observe lo que sucede).

5. Ahora, vaya a la pestaña *"Punto"* y seleccione *"Intersección"*. Dé clic en la circunferencia y posteriormente de clic en el eje de las x's. (Aparecerán 2 puntos (G, H) que intersectan la circunferencia con el eje "x").

6. Posteriormente hacemos algo similar que los pasos anteriores, seleccione la opción *"Circunferencia (centro, radio)"*, colóquese y dé clic en el origen de los ejes coordenados y en el recuadro que aparecerá escriba ***distanciaX1X2***.

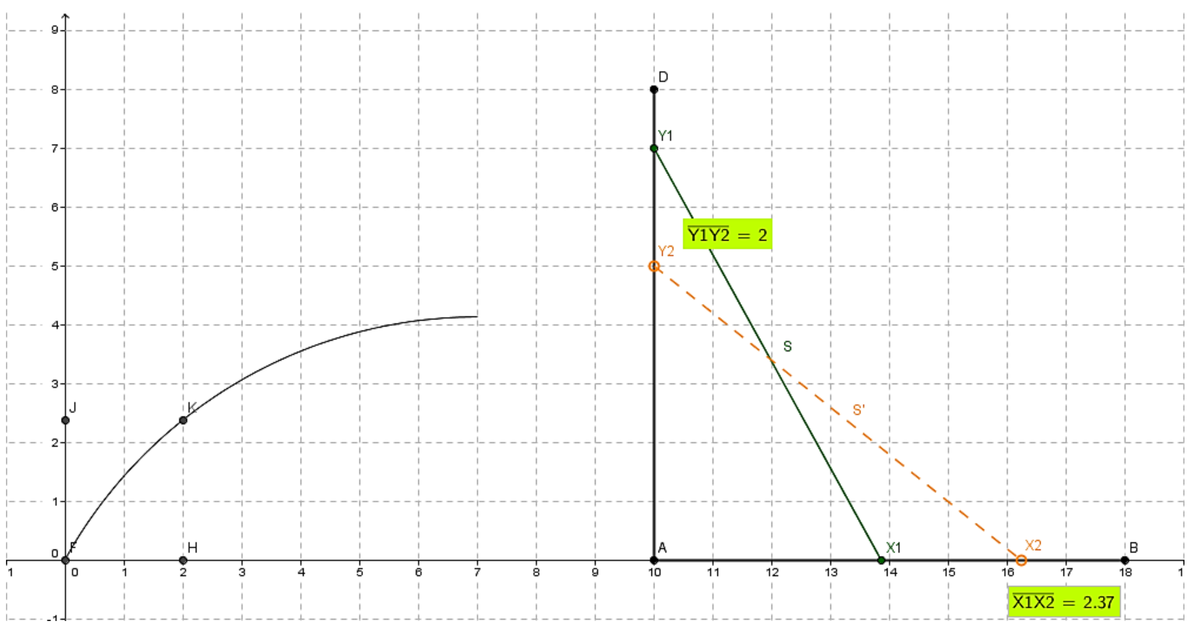
7. Seleccione la opción *"Intersección"* en las pestañas, dé clic en la nueva circunferencia y después dé clic en el eje de las y's. De igual manera aparecerán 2 puntos (I, J) que intersectan la circunferencia con el eje "y".

8. Ahora nos vamos a las pestañas y seleccionamos la opción *"Perpendicular"*, damos clic en el **punto H que intersecta el eje "x" con la circunferencia**, y después damos **clic sobre el eje de las "x´s"** (Aparecerá una recta perpendicular al eje "x" sobre ese punto). Ahora hacemos algo similar para el **punto J que intersecta el eje "y" con la otra circunferencia**, pero ahora daremos **clic sobre el eje de las "y's"** (Aparecerá una recta perpendicular al eje "y" sobre ese punto).

9. Una vez que aparecen ambas rectas perpendiculares, hay un **"punto" donde se intersectan ambas**. Vamos a las pestañas y seleccionamos la opción *"Intersección",* damos clic en una de las rectas perpendiculares y después seleccionamos la otra. Deberá aparecer el punto de intersección (K).

10. Nos vamos a las pestañas y seleccionamos *"Elige y Mueve"*, y procedemos a ocultar las circunferencias así como las rectas perpendiculares si así lo desea, esto con el fin de no tener demasiadas cosas en pantalla. Seleccionamos una circunferencia y sobre ella damos clic con el botón derecho del ratón, desactivamos la opción *"Muestra el Objeto"*, y procedemos a hacer lo mismo con la otra y las perpendiculares.

11. Una vez hecho esto, vamos a la pestaña de *"Perpendicular"*, desplegamos el menú y seleccionamos la opción con el nombre *"Lugar Geométrico"*. Damos clic en el **punto de la intersección de las rectas perpendiculares (K)** y después seleccionamos el **punto Y_2** del gráfico. Debe obtener una gráfica como la siguiente:



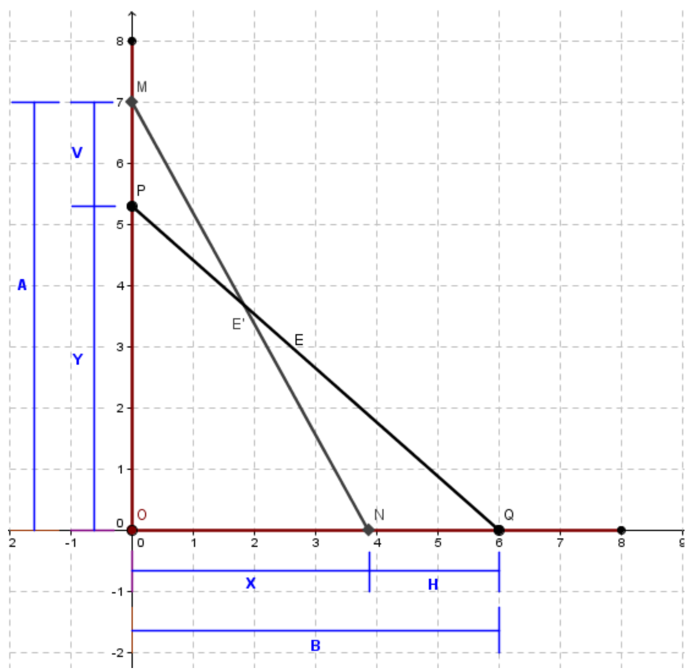
12. Vaya a las pestañas y seleccione la opción *"Elige y Mueve"* y a continuación mueva el punto Y_2 del gráfico y vea lo que pasa.

De las siguientes funciones, ¿Cuál es la que tiene la forma de la gráfica que obtuvimos? Elige la que más se parezca.

a) x^2
b) x^3
c) $ln\,(x)$
d) $\sqrt{x}$
e) $x^{3/2}$

Pista: En el programa Geogebra puedes ver la gráfica de las funciones arriba presentadas, simplemente escríbela en el recuadro inferior izquierdo ("Entrada:___") y después da *enter* para que te la muestre. Ejemplo: → Entrada: x^(3/2)
Para borrar alguna gráfica, simplemente selecciónala y presiona suprimir en el teclado.

A continuación se presenta un gráfico de la simulación:



Observe los triángulos rectángulos de la figura.

$Sea\ el\ \Delta OMN$; por el teorema de Pitágoras tenemos: $c^2 = a^2 + b^2$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{E'^2 = A^2 + X^2}$$

Ahora observemos el ΔOPQ, entonces, por el teorema de Pitágoras:

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{E^2 = Y^2 + B^2}$$

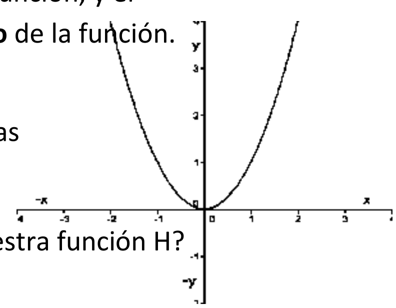
Como la escalera es de la misma medida en cualquier punto, entonces tenemos que $\boldsymbol{E' = E}$

Use la igualdad anterior junto con la de cada triángulo (sustituya “Y” y “B” por sus equivalentes del gráfico) para obtener la siguiente ecuación:

$$A^2 + X^2 = (A - V)^2 + (X + H)^2 \qquad \textbf{(*)}$$

Si tenemos, como valores iniciales, A = 7 y X = 3.87; sustituya los valores y despeje H de la ecuación (*) obtenida para encontrar la función específica de la gráfica buscada.

<u>Def</u>. El conjunto de todos los <u>valores admisibles de *x*</u> se denomina **dominio** de la función, y el conjunto de todos los <u>valores resultantes de *y*</u> recibe el nombre de **contradominio** de la función.

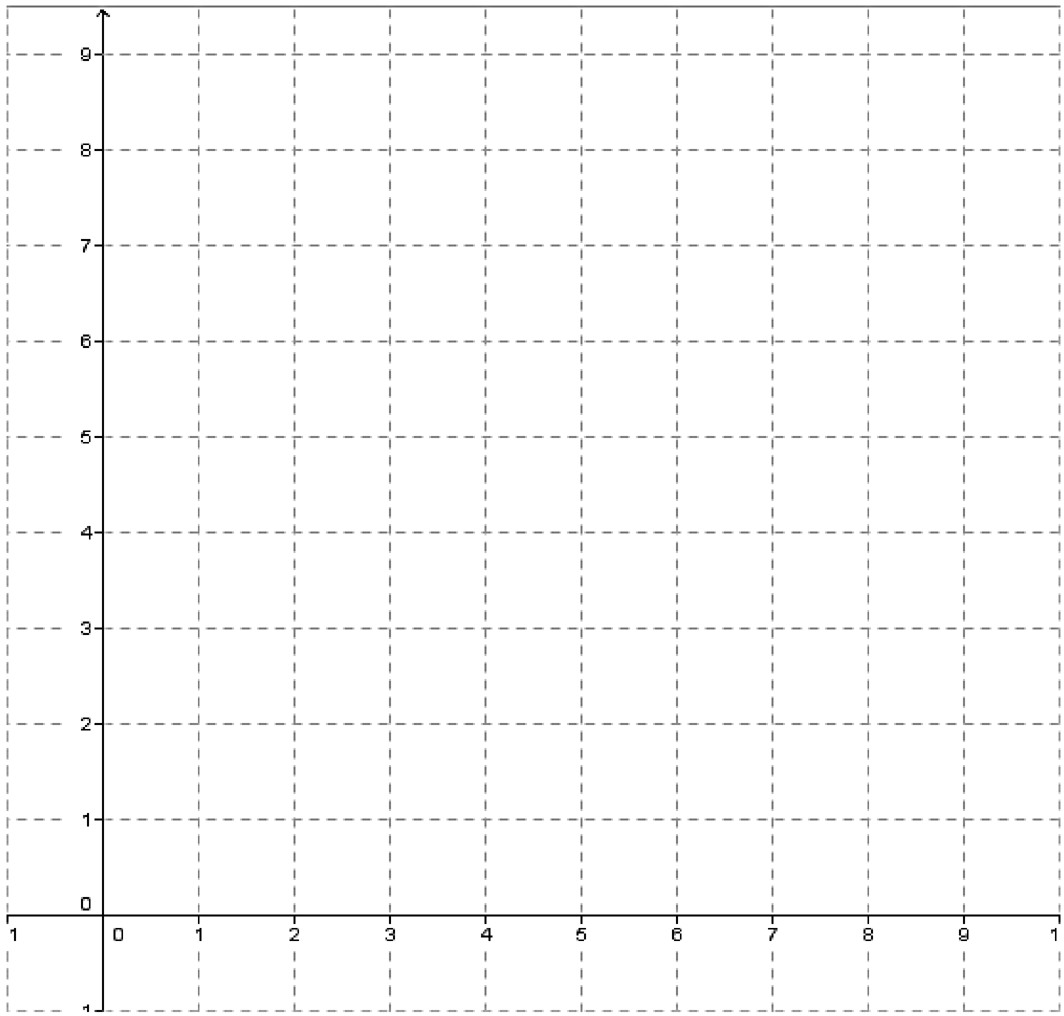


{Ejem: Sea $y = x^2 \;\Rightarrow\; Dominio: (-\infty, +\infty) | Contradominio: (0, +\infty)$.
El <u>dominio</u> se debe a que *x* puede tomar cualquier valor de $(-\infty)$ a $(+\infty)$ mientras que el <u>contradominio</u> se debe a que *y* no tiene valores negativos.}

De acuerdo a la definición anterior, ¿Cuál es el dominio y el contradominio de nuestra función H?

Nota. En nuestro caso: $H \rightarrow y | V \rightarrow x$

Ahora, grafique la ecuación específica H que se encontró para comprobar lo hecho en Geogebra.
Pista: Dé valores a V (0 a 7) y realice las operaciones para obtener H; realice una tabla [V vs H].



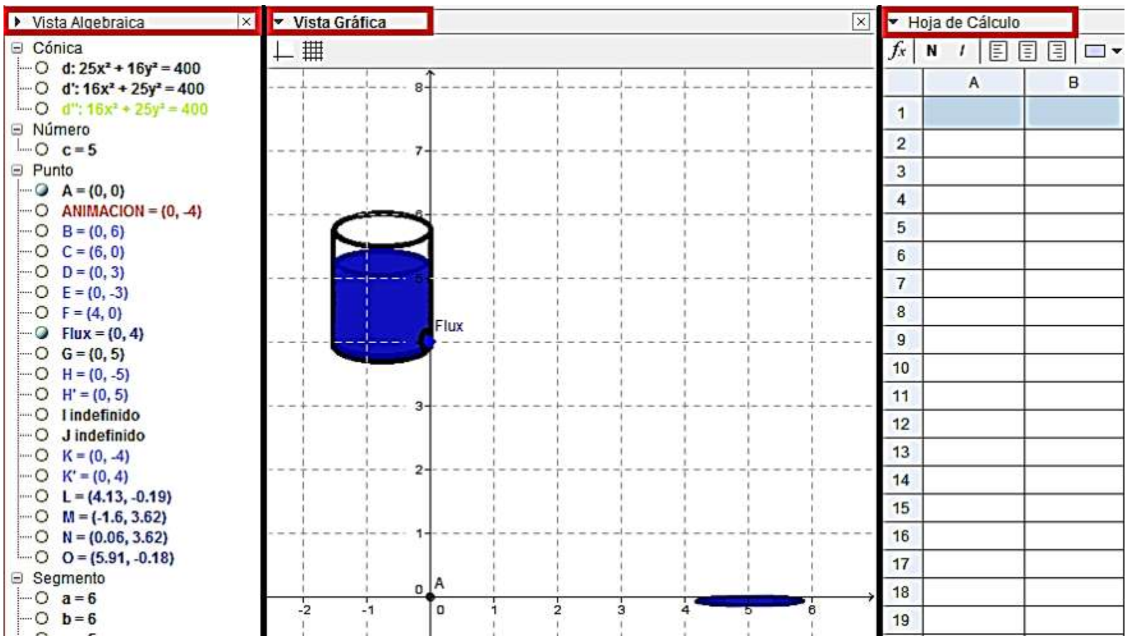
V	H
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

HOJA DE TRABAJO N°3

En ésta hoja de trabajo se estudiará una animación de la caída de agua desde un tambo a una cierta altura, analizando el cociente de las diferencias de “*x*” y “*y*”, el cual veremos no es más que la pendiente de cada recta de la gráfica.

1. Abra el archivo ***Flux.ggb***

2. Aparecerá una imagen similar a la siguiente:



La pantalla se divide en 3 partes, del lado izquierdo está la “Vista Algebraica” donde se muestra una lista de los objetos presentes en el gráfico, en el centro se presenta la “Vista Gráfica” donde aparece nuestra animación, y por último del lado derecho se muestra una “Hoja de Cálculo” que ocuparemos para capturar datos.

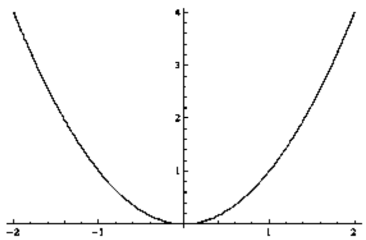
3. En la parte de la vista algebraica seleccionamos la palabra en letras azules con el nombre de “**Flux=(0,4)**”, damos clic derecho sobre ella y activamos la opción: “**Registro en Hoja de Cálculo**”; saldrá un recuadro, dar en el botón “**Cierra**”. Aparecerán en la hoja de cálculo “*x(Flux)*” y “*y(Flux)*” en las columnas “*D*” y “*E*” respectivamente.
   **Nota: “*x(Flux)*” representa los valores de la animación del eje “*x*” al transcurrir el tiempo y “*y(Flux)*” los valores de la animación del eje “*y*” al transcurrir el tiempo.

4. Ahora ubicamos y seleccionamos en la parte de la vista algebraica la palabra en letras moradas con el nombre “**ANIMACION=(0,-4)**”, damos clic derecho sobre ella y activamos la casilla “**Animación activada**”. La animación comenzará y se empezarán a registrar valores en las columnas “*D*” y “*E*” de la tabla.

***Def. El conjunto de todos los valores admisibles de "*x*" se denomina **Dominio** de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de "*y*" recibe el nombre de **Contradominio** de la función.

{Ejem1_*Recta*: Sea $y = x \;\; \Rightarrow \;\; Dominio\text{: } (-\infty, +\infty)$ | $Contradominio\text{: } (-\infty, +\infty)$.}
Tanto "*x*" como "*y*" pueden tomar valores de $(-\infty)\ a\ (+\infty)$.

{Ejem2_*Parábola*: Sea $y = x^2 \;\; \Rightarrow \;\; Dominio\text{: } (-\infty, +\infty)$ | $Contradominio\text{: } (0, +\infty)$.}
El dominio se debe a que "*x*" puede tomar cualquier valor de $(-\infty)\ a\ (+\infty)$ mientras que en el contradominio "*y*" no tiene valores negativos.
Para la función de una parábola en general aplica lo anterior, pero si nos presentaran la siguiente imagen:



El *dominio* de ésta gráfica **(Fig.1)** está dado de *[-2,2]*, mientras que nuestro *contradominio* es de *[0,4].*

FIG.1. GRÁFICA DE UNA PARÁBOLA

Ahora observe la imagen de la animación en el monitor de la computadora, teniendo en cuenta la definición anterior, ¿Cuál es el *dominio* y el *contradominio* de la **gráfica de la animación**?

Dominio (X):

Contradominio (Y):

5. En la hoja de cálculo, regrese a la parte superior de la tabla, nos colocamos en la fila "*2A*" y ahí escribimos lo siguiente: **D3-D2**; después damos *enter* y aparecerá: **0.1047** Ahora en la fila "*3A*" escribimos: **D4-D3**; damos *enter*. En la fila "*4A*" escribir: **D5-D4**; dar *enter*. En la fila "*5A*" escribir: **D6-D5**; dar *enter*. Ahora colocarse de nuevo en la fila "*5A*" y en la esquina inferior derecha del recuadro seleccionado aparece un cuadrito azul, dé clic sobre él, manténgalo presionado y bájelo con el ratón hasta la fila "*77A*".

¿Qué representan estos valores?

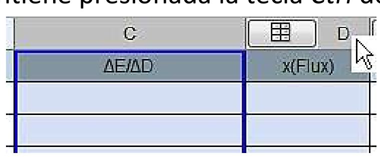
6. Regrese a la parte superior de la tabla y ahora colóquese en la fila "*2B*". Ahí escribir: **E2-E3** y dar *enter*, aparecerá un **0.0009**. En la fila "*3B*" escribir: **E3-E4** y dar *enter*. En la fila "*4B*" escribir: **E4-E5** y dar *enter*. En la fila "5B" escribir: **E5-E6** y dar *enter*; regresar al recuadro anterior, mantener seleccionado el cuadrito azul ubicado en la esquina inferior derecha del recuadro y arrastrarlo con el ratón hasta la fila "*77B*".

¿Qué representan éstos valores?

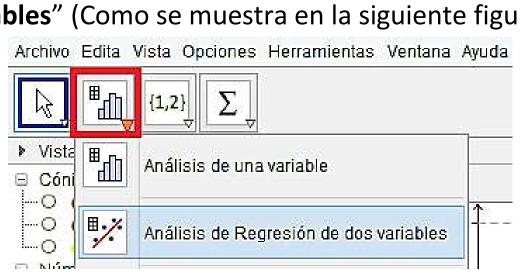
7. Vuelva a la parte superior de la tabla, y ahora colóquese en la fila "*2C*". Ahí escriba: **B2/A2** y dé *enter*; aparecerá el valor **0.0084**. En la fila "*3C*" escriba: **B3/A3** y dé *enter*. En la fila "*4C*" escribir: **B4/A4** y dar *enter*. En la fila "5C" escriba: **B5/A5** dé *enter*, regrese al recuadro anterior y mantenga presionado el cuadrito azul ubicado en la parte inferior derecha y arrástrelo con el ratón hasta la fila "*77C*".

¿Qué representan éstos valores si la columna A = ΔD y la columna B = ΔE?

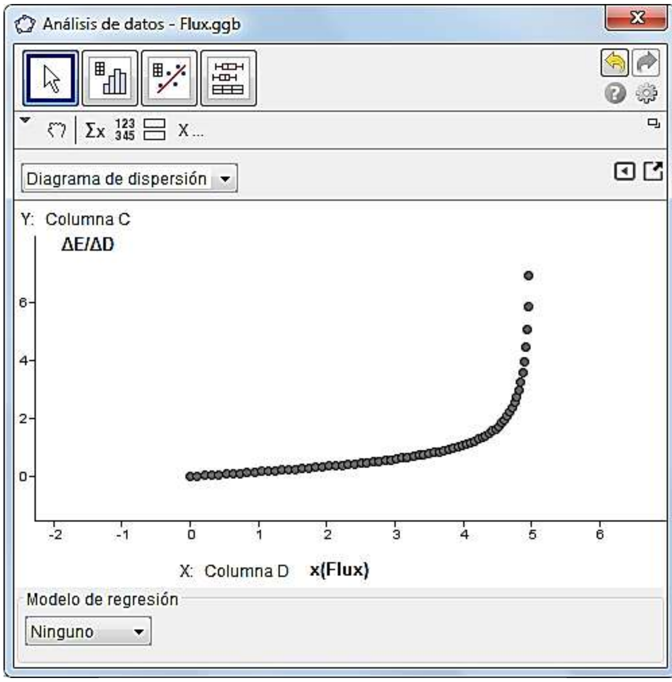
8. A continuación vaya a la parte superior de la tabla, seleccione completamente la columna "*D*" y la columna "*C*" (Dé clic en la barra de la columna *D*, posteriormente cliqueé la barra de la columna *C* mientras mantiene presionada la tecla *Ctrl* del teclado).



9. Una vez seleccionadas las 2 columnas, vaya al menú del lado izquierdo del programa, despliegue el submenú "Análisis de una variable" y seleccione la opción "**Análisis de Regresión de dos variables**" (Como se muestra en la siguiente figura)



A continuación saldrá un cuadro, dé clic en la opción "**Analiza**". Posteriormente le aparecerá una gráfica como la siguiente:



**<u>Nota</u>: En caso de que la gráfica que aparezca no sea igual a la anterior y sea como la siguiente, solamente dé clic en la X.. que ahí aparece:

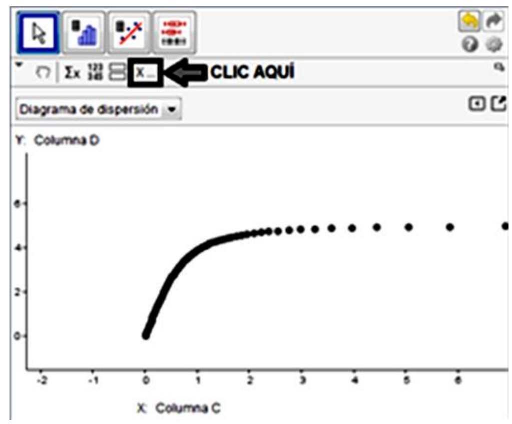


FIG.2. GRÁFICA DE LAS PENDIENTES

Analice la imagen **(Fig.2)**, ¿Cuál es el *dominio* y el *contradominio* de nuestra gráfica de Análisis de Datos?

Dominio (X):

Contradominio (Y):

Dado que en el eje "Y" de nuestra gráfica anterior de Análisis de Datos tenemos los valores de la Columna "*C*", que no es más que el cociente de las diferencias de la Columna "*E*" sobre las diferencias de la Columna "*D*", y recordado que la Columna "*D*" son los valores de la animación del eje de las "*x*" y que la Columna "*E*" son los valores de la animación del eje de las "*y*", entonces podemos deducir que:

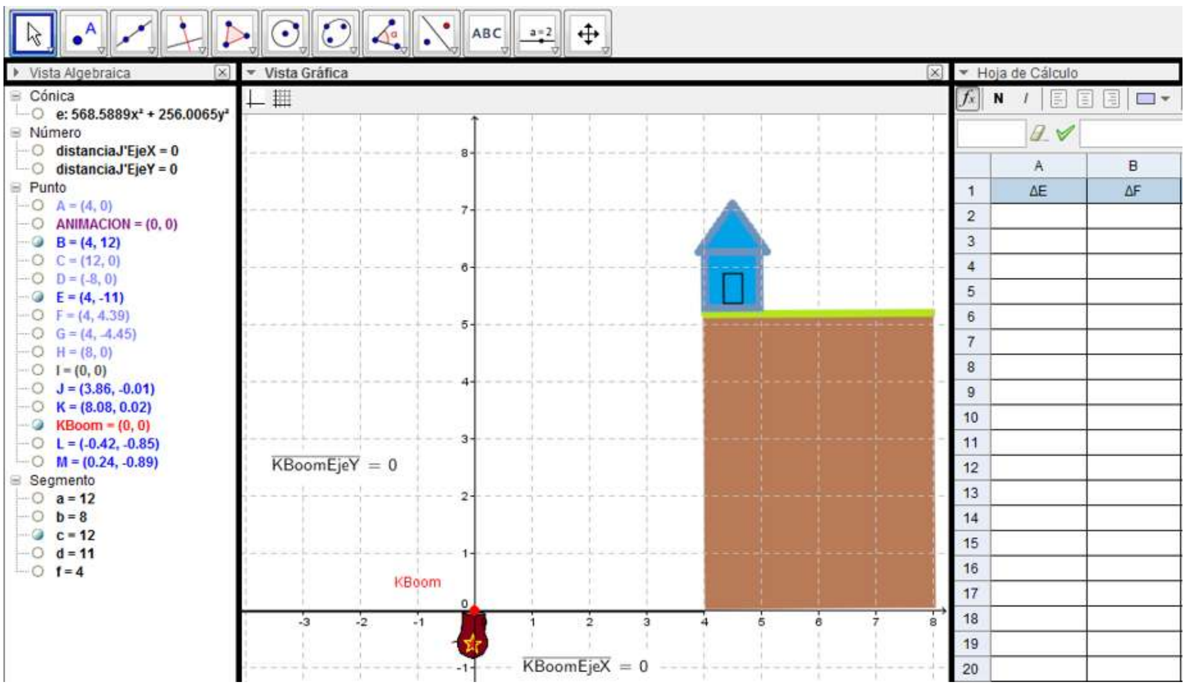
$$\frac{\Delta E}{\Delta D} = \frac{\Delta y(Flux)}{\Delta x(Flux)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m = Pendiente\ de\ una\ recta$$

HOJA DE TRABAJO N°4

En ésta hoja de trabajo se estudiará una animación del disparo de un cañón y analizaremos la parábola que se forma mediante el cociente de las diferencias de la distancia de "*x*" y "*y*", siendo éste la pendiente de la gráfica en cada par de puntos. Concluiremos además que la gráfica de las pendientes de la animación da como resultado la derivada de la función asociada a la gráfica.

1. Abra el archivo ***Canyon.gbb***

2. Aparecerá una imagen similar a la siguiente:



3. En la parte de la vista algebraica seleccionamos la palabra en letras rojas llamada "**KBoom=(0,0)**", damos clic derecho sobre ella y activamos la casilla "**Registro en Hoja de Cálculo**"; saldrá un recuadro, dar en el botón "**Cierra**". Aparecerán "*x(KBoom)*" y "*y(KBoom)*" en las columnas "*D*" y "*E*" respectivamente de la hoja de cálculo. **Nota: "*x(KBoom)*" representa los valores de la animación del eje "*x*" al transcurrir el tiempo y "*y(KBoom)*" los valores de la animación del eje "*y*" al transcurrir el tiempo.

4. Ahora ubicamos y seleccionamos en parte de la vista algebraica la palabra en letras moradas llamada "**ANIMACION=(0,0)**", damos clic derecho sobre ella y activamos la casilla "**Animación activada**". La animación empezará y se comenzarán a registrar valores en las columnas "*D*" y "*E*" de la tabla.

Ahora observe la imagen de la animación en el monitor de la computadora, ¿Cuál es el *dominio* y el *contradominio* de la **gráfica de la animación**?

Dominio (x):

Contradominio (Y):

5. En la parte de la hoja de cálculo, regrese a la parte superior de la tabla, seleccionamos y nos colocamos en la fila "*A2*" y ahí escribimos lo siguiente: **D3-D2**; después damos *enter* y aparecerá: **0.0009**. Ahora en la fila "*A3*" escribimos: **D4-D3**; damos *enter*. En la fila "*A4*" escribir: **D5-D4**; dar enter. En la fila "*A5*" escribir: **D6-D5**; dar *enter*. Ahora colocarse de nuevo en la fila "*A5*" y en la esquina inferior derecha del recuadro seleccionado aparece un cuadrito azul, dé clic sobre él, manténgalo presionado y bájelo con el ratón hasta la fila "*A76*".

Si analizamos la hoja de cálculo, en la fila "A2" tenemos la diferencia "D_3-D_2", en la fila "A3" tenemos "D_4-D_3"

en "A4" → "D_5-D_4"
en "A5" → "D_6-D_5"
en "A6" → "D_7-D_6"

Siguiendo ésta analogía, que valores tendríamos en las filas:

"A10" →	"A50" →	"A1000" →
"A20" →	"A100" →	"An" →

Si ahora cambiamos la letra "D" por "x", nuestros valores de las diferencias nos quedan de la siguiente manera:

$$x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3, x_5 - x_4, x_6 - x_5, \ldots \qquad \boxed{\textbf{Ec.1}}$$

6. Regrese a la parte superior de la tabla en la hoja de cálculo y ahora colóquese en la fila "*B2*". Ahí escriba: **E3-E2** y dar *enter*, aparecerá un **0.1256**. En la fila "*B3*" escribir: **E4-E3** y dar *enter*. En la fila "*B4*" escribir: **E5-E4** y dar *enter.* En la fila "*B5*" escribir: **E6-E5** y dar *enter*; regresar al recuadro anterior, mantener seleccionado el cuadrito azul ubicado en la esquina inferior derecha del recuadro y arrastrarlo con el ratón hasta la fila "*B76*".

De igual manera, analizando la hoja de cálculo, en la fila “B2” tenemos la diferencia “E_3-E_2”, en la fila “B3” tenemos “E_4-E_3”

en “B4” → “E_5-E_4”
en “B5” → “E_6-E_5”
en “B6” → “E_7-E_6”

Siguiendo ésta analogía, que valores tendríamos en las filas:

“B10” →   “B50” →   “B1000” →

“B20” →   “B100” →   “Bn” →

Si ahora cambiamos la letra “E” por “y”, nuestros valores de las diferencias nos quedan de la siguiente manera:

$$y_1 - y_0, y_2 - y_1, y_3 - y_2, y_4 - y_3, y_5 - y_4, y_6 - y_5, \dots \qquad \boxed{\textbf{Ec.2}}$$

7. Vuelva a la parte superior de la tabla, y ahora colóquese en la fila “*C2*”. Ahí escriba: **B2/A2** y dé *enter*; aparecerá el valor **143.1962**. En la fila “*C3*” escriba: **B3/A3** y dé *enter*. En la fila “*C4*” escribir: **B4/A4** y dar *enter*. En la fila “C5” escriba: **B5/A5** dé *enter*, regrese al recuadro anterior y mantenga presionado el cuadrito azul ubicado en la parte inferior derecha y arrástrelo con el ratón hasta la fila “*77C*”.

Si analizamos la hoja de cálculo, en la fila “C2” tenemos el cociente B2/A2 pero sabemos, por los incisos anteriores, que **B2 = E_3-E_2**, y que **A2 = D_3-D_2** entonces podemos deducir que:

$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{E_3 - E_2}{D_3 - D_2}$$

Para el caso de la fila “C3” tenemos el cociente B3/A3, pero **B3 = E_4-E_3** y **A3 = D_4-D_3**, entonces:

$$\frac{B_3}{A_3} = \frac{E_4 - E_3}{D_4 - D_3}$$

en “C4” → B4/A4 → $\frac{B_4}{A_4} = \frac{E_5 - E_4}{D_5 - D_4}$
en “C5” → B5/A5 → $\frac{B_5}{A_5} = \frac{E_6 - E_5}{D_6 - D_5}$
en “C6” → B6/A6 → $\frac{B_6}{A_6} = \frac{E_7 - E_6}{D_7 - D_6}$

Siguiendo ésta analogía, que valores tendríamos en las filas:

“C10” → $\frac{B_{10}}{A_{10}}$ =----------------------------------   “C100” → $\frac{B_{100}}{A_{100}}$ =----------------------------------

“C20” → $\frac{B_{20}}{A_{20}}$ =----------------------------------   “Cn” → $\frac{B_n}{A_n}$ =---------------------------------------

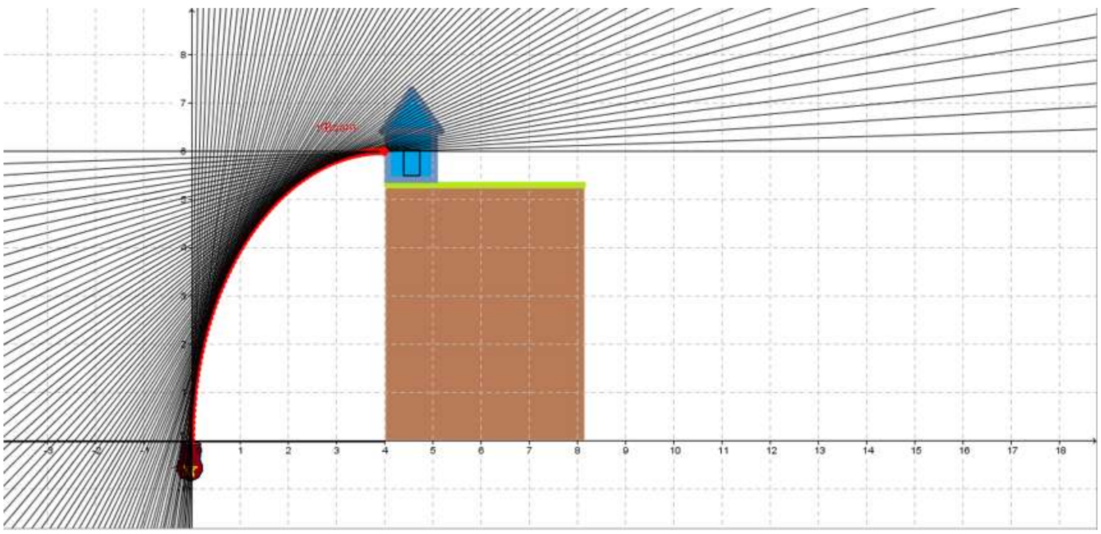
Si ahora cambiamos la "*x*" por la "*D*" y la "*y*" por la "*E*", como en la **Ec.1** y **Ec.2**, y las sustituimos en la ecuación de la fila "Cn", obtenemos:

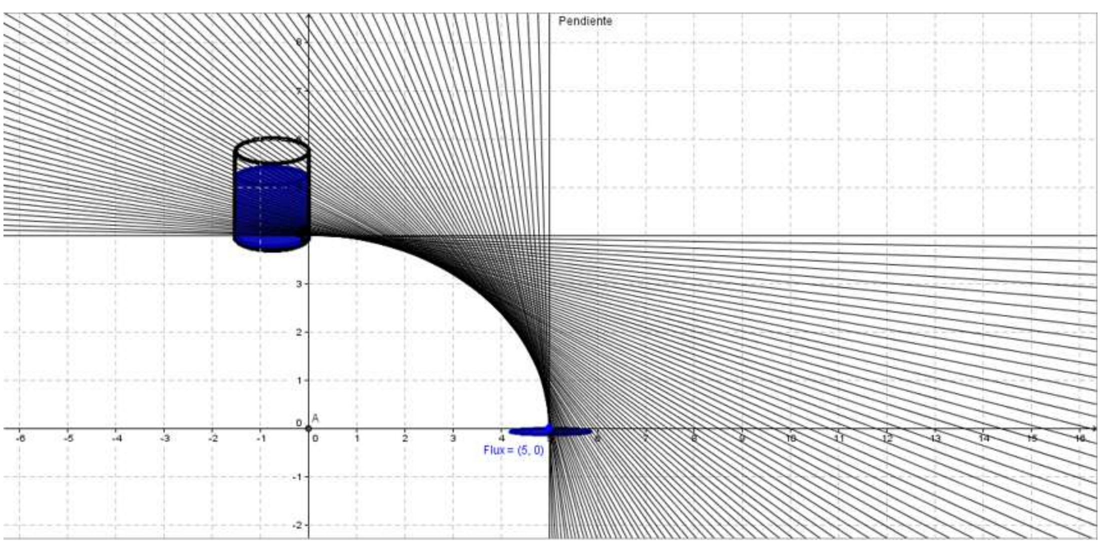
$$C_n = \frac{B_n}{A_n} = \frac{E_{n+1} - E_n}{D_{n+1} - D_n} = \frac{E_n - E_{n-1}}{D_n - D_{n-1}} = \boxed{\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = m = Pendiente}$$

La expresión obtenida es llamada la pendiente de una recta.

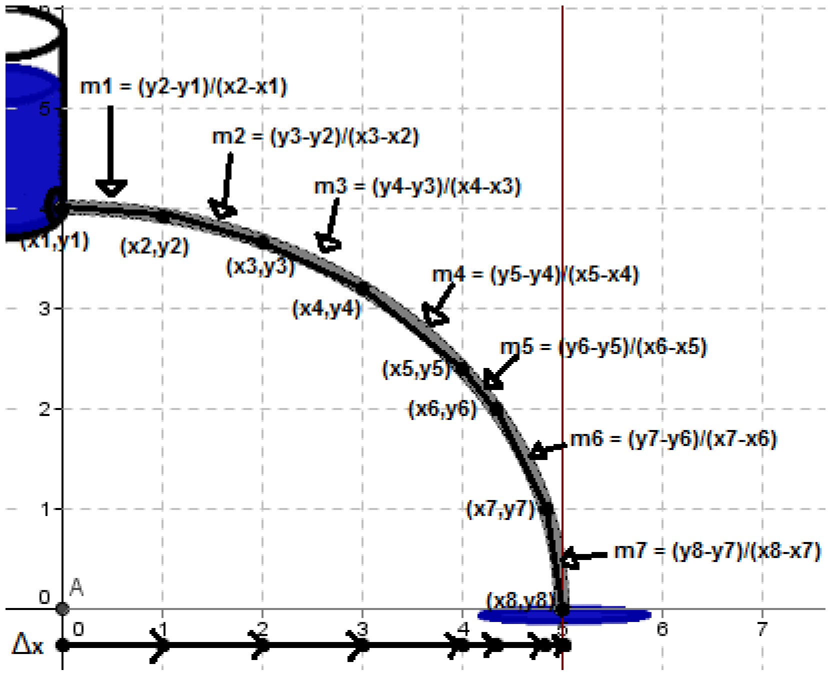
****Def.*** La *pendiente de una recta* en un sistema de representación rectangular (de un plano cartesiano), suele estar representada por la letra "*m*", y está definida como la diferencia en el eje Y dividido por la diferencia en el eje X para dos puntos distintos en una recta.

Las siguientes imágenes nos muestran las pendientes de las gráficas de las animaciones del cañón y el de la caída de agua:





Ahora observe y analice la siguiente imagen:



Como puede ver, la parábola está dividida y "remarcada" por líneas que forman las pendientes de las rectas entre dos puntos. Si nosotros hiciéramos Δx lo más pequeño que se pudiera, es decir, cuando $\lim_{x \to 0} \Delta x \approx 0$, entonces estamos hablando de la "derivada de la función" tal que:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{dy}{dx} = Derivada}$$

Para finalizar, responde atrás de la hoja las siguientes preguntas:

1.¿Qué te parecieron las hojas de trabajo?

2.¿Qué cosas nuevas aprendiste?

3.¿Te resultó útil o didáctico el programa Geogebra, porque?

4.¿Te gustaría que el programa sea implementado en clases como herramienta de apoyo?