



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE  
SAN NICOLAS DE HIDALGO**

---

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

TEOREMAS GENERADORES DE  
SOLUCIONES PARA OBJETOS CARGADOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

GABINO CORONA PATRICIO

ASESOR

Doctor en Ciencias. Joaquín Estévez Delgado

MORELIA, MICHOACAN, SEPTIEMBRE DE 2014





Universidad Michoacana de  
San Nicolás de Hidalgo

---

Facultad de Ciencias Físico  
Matemáticas

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

TEOREMAS GENERADORES DE  
SOLUCIONES PARA OBJETOS CARGADOS

T E S I S

para obtener el título de:

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

P r e s e n t a :

Gabino Corona Patricio

Asesor:

Dr. Joaquín Estevez Delgado

*Morelia Michoacán, Septiembre de 2014*



# Índice general

|                                                                                          |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Resumen</b>                                                                           | <b>v</b>   |
| <b>Abstract</b>                                                                          | <b>vii</b> |
| <b>Introducción</b>                                                                      | <b>ix</b>  |
| <b>1. Relatividad Especial</b>                                                           | <b>1</b>   |
| 1.1. Sistemas de Referencia Inerciales y el Principio de Relatividad . . . . .           | 1          |
| 1.1.1. Geometría Newtoniana del espacio y tiempo . . . . .                               | 2          |
| 1.2. La geometría del espacio-tiempo de la Relatividad Especial . . . . .                | 3          |
| 1.3. El elemento de línea del espacio-tiempo de Minkowski . . . . .                      | 4          |
| 1.3.1. Rumbo a la relatividad especial: Albert Einstein . . . . .                        | 6          |
| 1.3.2. Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento por A.<br>Einstein. . . . . | 6          |
| <b>2. Herramientas de Geometría Diferencial</b>                                          | <b>9</b>   |
| 2.1. Campos escalares sobre variedades . . . . .                                         | 9          |
| 2.2. Campos Vectoriales sobre variedades . . . . .                                       | 10         |
| 2.3. Vector tangente a una curva . . . . .                                               | 11         |
| 2.4. Vectores base . . . . .                                                             | 12         |
| 2.5. Subir y bajar índices . . . . .                                                     | 15         |
| 2.6. Vectores base y transformaciones de coordenadas . . . . .                           | 16         |
| 2.7. Derivadas de vectores base y la conexión afín . . . . .                             | 17         |
| 2.8. Derivada intrínseca de un vector a lo largo de una curva . . . . .                  | 18         |
| 2.9. Transporte paralelo . . . . .                                                       | 20         |
| 2.10. Calculo tensorial sobre variedades . . . . .                                       | 22         |
| 2.10.1. Campos Tensoriales sobre variedades . . . . .                                    | 22         |
| 2.10.2. Componentes de tensores . . . . .                                                | 23         |
| 2.10.3. Simetrías de tensores . . . . .                                                  | 24         |
| 2.10.4. El tensor métrico . . . . .                                                      | 25         |
| 2.10.5. Mapeo de tensores a tensores . . . . .                                           | 26         |

## ÍNDICE GENERAL

---

|                                                                                                        |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.10.6. Operaciones con tensores . . . . .                                                             | 27        |
| 2.10.7. Tensores como objetos geométricos . . . . .                                                    | 28        |
| 2.10.8. Tensores y transformación de coordenadas . . . . .                                             | 29        |
| 2.10.9. Derivada covariante de un tensor . . . . .                                                     | 31        |
| 2.10.10. Derivada intrínseca de un tensor a lo largo de una curva . . . . .                            | 33        |
| 2.10.11. Electromagnetismo . . . . .                                                                   | 34        |
| 2.10.12. La fuerza electromagnética sobre una carga en movimiento . . . . .                            | 34        |
| 2.10.13. La 4-densidad de corriente . . . . .                                                          | 35        |
| 2.11. Las ecuaciones de campo electromagnético . . . . .                                               | 37        |
| 2.12. Campos Eléctrico y Electromagnético en sistemas de referencia inerciales . . . . .               | 38        |
| <b>3. Relatividad General: Solución a las Ecuaciones de Einstein</b>                                   | <b>41</b> |
| 3.1. El principio de equivalencia y la curvatura del espacio-tiempo . . . . .                          | 41        |
| 3.1.1. Gravedad newtoniana . . . . .                                                                   | 41        |
| 3.1.2. El principio de equivalencia . . . . .                                                          | 42        |
| 3.1.3. La gravedad como la curvatura del espacio-tiempo . . . . .                                      | 45        |
| 3.1.4. Coordenadas locales inerciales . . . . .                                                        | 46        |
| 3.2. Observadores en un espacio-tiempo curvado . . . . .                                               | 47        |
| 3.2.1. Electromagnetismo en un espacio-tiempo curvado . . . . .                                        | 48        |
| 3.2.2. El tensor de curvatura . . . . .                                                                | 49        |
| 3.2.3. Propiedades del tensor de curvatura . . . . .                                                   | 51        |
| 3.2.4. El tensor de Ricci y el escalar de curvatura . . . . .                                          | 52        |
| 3.3. Las ecuaciones de campo gravitacional . . . . .                                                   | 53        |
| 3.3.1. El tensor momento-energía . . . . .                                                             | 54        |
| 3.3.2. El tensor momento energía de un fluido perfecto . . . . .                                       | 55        |
| 3.3.3. Conservación del momento y la energía para un fluido perfecto . . . . .                         | 56        |
| 3.3.4. Las ecuaciones de Einstein . . . . .                                                            | 57        |
| 3.3.5. Las ecuaciones de Einstein en el vacío . . . . .                                                | 59        |
| 3.4. La geometría de Schwarzschild . . . . .                                                           | 60        |
| 3.4.1. La métrica general estática e isotrópica . . . . .                                              | 60        |
| 3.4.2. Solución de las ecuaciones de campo para el vacío . . . . .                                     | 62        |
| 3.5. El teorema de Birkhoff . . . . .                                                                  | 65        |
| 3.6. Geometrías esféricamente simétricas . . . . .                                                     | 66        |
| 3.6.1. La forma de la métrica para una solución estelar interior . . . . .                             | 66        |
| 3.6.2. Ecuaciones relativistas para una estructura estelar . . . . .                                   | 69        |
| 3.6.3. Teorema de Buchdahl . . . . .                                                                   | 71        |
| 3.6.4. La métrica en el exterior de una distribución esféricamente simétrica de masa y carga . . . . . | 71        |
| 3.7. espacio-tiempo estático (vectores de Killing) . . . . .                                           | 74        |
| 3.7.1. Espacios tiempo esféricamente simétricos . . . . .                                              | 75        |
| <b>4. Teoremas Generadores de Soluciones</b>                                                           | <b>77</b> |
| 4.1. Ecuaciones de Campo Einstein-Maxwell . . . . .                                                    | 77        |
| 4.2. Propiedades de los teoremas . . . . .                                                             | 85        |

---

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| 5. Aplicación del Teorema 1 | 87 |
|-----------------------------|----|



# Resumen

Los objetos compactos estelares se encuentran dispersos a lo largo del universo y son el resultado de algunas estrellas luminosas, luego de que se ha agotado su combustible nuclear, por lo que ya no generan la presión térmica suficiente para contrarrestar la fuerza gravitacional y evitar un colapso. Las propiedades para este tipo de objetos ya no resultan tan sencillas de predecir debido en parte a que la densidad es superior a la densidad nuclear, dando origen a la aparición de materia extraña para la que se desconoce el tipo de ecuaciones de estado.

En algunos casos es necesario tener en cuenta el efecto de la carga eléctrica que genera una fuerza repulsiva que contrarrestar la fuerza atractiva gravitacional, lo cual permite representar objetos compactos. Una forma de obtener algún tipo de ecuación de estado teórico es mediante la construcción de soluciones estelares exactas, con propiedades físicamente aceptables, que permita obtener relaciones entre la densidad y la presión. Así que es de suma importancia tener un mecanismo para generar nuevas soluciones exactas que representen modelos de estrellas cargadas. En esta tesis presentamos cuatro teoremas, los primeros dos teoremas generan, por medio de sus composiciones, otros dos y éstos nos sirven para construir soluciones cargadas a partir de otras soluciones ya conocidas. Finalmente, damos una aplicación del teorema 1 para el caso de una solución construida por Gupta-Kumar que generaliza la solución interior de Schwarzschild con carga.

## Palabras clave

Solución Estática Cargada y Esféricamente Simétrica (*SECES*), teoremas, estrellas.





# Abstract

Compact stellar objects at the universe are due some luminouse stars which have used up all their nuclear fuel and then do not generate thermal pressure enough to make up for the gravitational force to avoid a colapse. The properties for this kind of objects are not easy to describe because their densities are greater than nuclear density, so, we obtain something known as *strange matter* whose kind of equation of state is unknown.

In some cases, it is necessary to consider the efect of the electric charge that generates a repulsive force to counteract the attractive gravitational force, which allows us to represent compacts objects. One way to obtain some kind of theorical equation of state is by constructing of stellar exact solutions with properties physically acceptable to get relations between pressure and density. So, it is important to have a method to get new exact solutions that represent charged stars. In this thesis we present four solutions generating theorems for charged compact objects, the composition of the first two theorems give us two new theorems. Finally, we apply the first theorem for the case of the solution obtained by Gupta-Kumar that generalizes the interior Schwarzschild solution with charged.

## Key words

Static charged perfect fluid spheres (*SCPFS*), generating theorems, stars.



# Introducción

Los objetos compactos que se encuentran dispersos a lo largo del universo son el resultado de algunas estrellas luminosas, luego de que se ha agotado su combustible nuclear, por lo que ya no generan la presión térmica suficiente para contrarrestar la fuerza gravitatoria y evitar un colapso gravitacional. En el caso de que se tenga un colapso se puede tener un núcleo con densidad mayor a la densidad nuclear  $(2,0 - 4,5) \times 10^{14} gr/cm^3$  [1]. Las propiedades para este tipo de objetos ya no resultan tan sencilla de predecir, además, existe la posibilidad de transiciones de fase como resultado de la aparición de materia extraña. Así que es desconocido el tipo de ecuaciones de estado. Una forma de obtener algún tipo de ecuación de estado teórico, es mediante la construcción de soluciones exactas. Para obtener éstas, es necesario imponer simetrías sobre la geometría [2, 3]

Objetos estelares pueden ser representados si tomamos como base la teoría de la relatividad general, con geometría estática y esféricamente simétrica y con fuente de materia descrita por un fluido perfecto únicamente o también con el tensor de Maxwell.

Éstos describen a una gran cantidad de objetos compactos. Aunque los modelos sin carga fueron abordados varios años antes que los modelos con carga, la cantidad de soluciones y aplicaciones presentadas es mayor en el caso cargado, por ejemplo para la solución de Durgapal [4, 5], al menos existen con carga. Una de las razones de lo anterior es que si tomamos un modelo sin carga su generalización al caso cargado admite varias maneras de realizarlo, otra es que su aplicación para describir objetos con propiedades físicamente aceptables es más fácil de conseguir si se considera el efecto de la carga. Así que es de suma importancia tener un mecanismo de generar nuevas soluciones exactas que representan modelos de estrellas cargadas.

En esta tesis presentamos una serie de teoremas que permiten construir soluciones cargadas a partir de otras soluciones conocidas llamadas “semillas”. Y son una generalización de los teoremas probados por Petarpa [6, 7, 8, 9, 10] presentados en su tesis de maestría, el trabajo que se presenta aborda algunas, no sólo de la parte de relatividad general y su vinculación con geometría diferencial, sino también tenemos la oportunidad de hacer contacto con la teoría de grupos y su relación con ecuaciones diferenciales ordinarias. De manera específica en el siguiente capítulo daremos una descripción de los fundamentos de la relatividad general y las herramientas básicas de geometría diferencial requeridas para la propuesta de tensores y simetrías que serán consideradas en el capítulo 3, donde describiremos la forma del espacio-tiempo, estático y esférica-

## CAPÍTULO 0. INTRODUCCIÓN

---

mente simétrico, junto con el contenido de la materia para un fluido perfecto y del tensor electromagnético (tensor de Maxwell) asociado a la carga estelar. El capítulo 4 está enfocado a la formulación y prueba de los teoremas basados en ideas básicas de ecuaciones diferenciales ordinarias y teoría de grupos. En el capítulo 5 daremos una aplicación del teorema 1 para el caso de una solución construida por [11] que generaliza la solución interior de Schwarzschild con carga.

# Capítulo 1

## Relatividad Especial

Empecemos nuestra discusión de la teoría relativista de gravedad revisando algunas nociones básicas haciendo hincapié en algunos puntos de vista de la relatividad Newtoniana y la especial del espacio y tiempo. Para especificar un *evento* de manera única, debemos asignarle tres coordenadas espaciales y una coordenada temporal, definida con respecto a un sistema de referencia. Por el momento, definamos tal sistema  $S$ , usando un conjunto de tres ejes cartesianos mutuamente ortogonales, teniendo así las coordenadas espaciales  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , y un sistema asociado de relojes sincronizados en reposo en el sistema, el cual nos da la coordenada tiempo  $t$ . Las cuatro coordenadas  $(t, x, y, z)$  etiquetan eventos en el espacio-tiempo.

### 1.1. Sistemas de Referencia Inerciales y el Principio de Relatividad

Uno tiene la libertad de etiquetar los eventos, no sólo con respecto a un sistema de referencia  $S$ , sino también con respecto a cualquier otro sistema  $S'$ , el cual puede estar orientado y/o moviéndose con respecto a  $S$  en una forma arbitraria. Sin embargo, existe una clase de sistemas de referencia con mayor preferencia llamados *Sistemas de Referencia Inerciales*, definidos como aquellos en los que se cumple la primera ley de Newton: una partícula aislada en donde la fuerza resultante sobre ella sea nula permanecerá en reposo o en movimiento con velocidad constante, es decir, en línea recta con velocidad fija [12]. En coordenadas cartesianas esto significa que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad (1.1)$$

Se sigue que, en la *ausencia de gravedad*, si  $S$  y  $S'$  son dos sistemas de referencia inerciales, entonces  $S'$  puede diferir de  $S$  solo por *a*) una traslación, y/o *b*) una rotación y *c*) un movimiento de un sistema con respecto a otro a una velocidad constante (de otro modo la primera ley de Newton no se cumpliría). El concepto de sistema de referencia inercial es fundamental para el principio de relatividad, el cual establece que

## CAPÍTULO 1. RELATIVIDAD ESPECIAL

---

las leyes de la física *tienen la misma forma en cualquier sistema de referencia*. No hay excepción a este principio general, éste se aplica tanto en la teoría Newtoniana como a la relatividad especial.

Las descripciones newtoniana y relativista difieren en cómo están relacionadas las coordenadas de un evento  $P$  en dos sistemas de referencia inerciales. Consideremos dos sistemas de referencia inerciales  $S$  y  $S'$  en *configuración estándar*, donde  $S'$  se mueve a lo largo del eje- $x$  de  $S$  y con velocidad constante  $v$  de modo que los ejes de  $S'$  y  $S$  coincidan en  $t = t' = 0$  como se muestra en la figura 1.1. Es claro que las coordenadas de un evento  $P$  con respecto a  $S'$  (primadas) están relacionadas con las coordenadas de  $S$  (no primadas) por medio de una transformación lineal de la forma

$$\begin{aligned}t' &= At + B, \\x' &= Dt + Ex, \\y' &= y, \\z' &= z.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Además, dado que requerimos que cuando  $x' = 0$  se tenga que  $x = vt$  y que cuando  $x = 0$  se cumpla que  $x' = -vt'$ , encontramos inmediatamente que  $D = -Ev$  y  $D = -Av$ , y por tanto  $A = D$ . Entonces debemos tener

$$\begin{aligned}t' &= At + B, \\x' &= A(x - vt), \\y' &= y, \\z' &= z.\end{aligned}\tag{1.3}$$

### 1.1.1. Geometría Newtoniana del espacio y tiempo

La teoría Newtoniana se basa en la suposición de que existe un tiempo absoluto, el cual es el mismo para cada observador, y por tanto  $t' = t$ . Bajo esta suposición,  $A = 1$  y  $B = 0$ , y obtenemos la *transformación galileana* que relaciona las coordenadas de un evento  $P$  en dos sistemas de referencia cartesianos e inerciales  $S$  y  $S'$ :

$$\boxed{\begin{aligned}t' &= t, \\x' &= x - vt, \\y' &= y, \\z' &= z.\end{aligned}}\tag{1.4}$$

Por simetría, las expresiones para las coordenadas no primadas en términos de las primadas tienen la misma forma pero con  $v$  reemplazada por  $-v$ .

La primera ecuación en 1.4 es claramente válida para cualquiera de los dos sistemas de referencia inercial  $S$  y  $S'$  y muestra cómo la coordenada temporal de un evento  $P$  es la

misma en todos los sistemas de referencia inerciales. La segunda ecuación nos conduce a la noción del "sentido común" de la adición de velocidades. Si una partícula se mueve en la dirección del eje- $x$  a una rapidez  $u$  en  $S$  entonces su rapidez en  $S'$  está dado por

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v = u_x - v.$$

Derivando una vez más, tenemos que la aceleración de una partícula es la misma en  $S$  y  $S'$ , es decir,  $\frac{du'_x}{dt'} = \frac{du_x}{dt}$ .

Si consideramos dos eventos  $A$  y  $B$  que tienen coordenadas  $(t_A, x_A, y_A, z_A)$  y  $(t_B, x_B, y_B, z_B)$  respectivamente, es fácil ver que para  $\Delta t = t_B - t_A$  y la cantidad

$$\boxed{\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

son por separado *invariantes* bajo cualquier transformación galileana. Significa que debemos considerar el espacio y tiempo como dos entes ajenos. Sin embargo, la invarianza de  $\Delta r^2$  nos dice que es una propiedad geométrica del espacio por si mismo. De hecho, podemos reconocer  $\Delta r^2$  como el cuadrado de la distancia entre dos eventos en el espacio tridimensional euclidiano. Ésto define la *geometría* del espacio y tiempo en el marco newtoniano.

## 1.2. La geometría del espacio-tiempo de la Relatividad Especial

En relatividad especial, Einstein abandonó el postulado de tiempo absoluto y lo reemplaza por el postulado que afirma que *la rapidez de la luz  $c$  es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales*. Aplicando este nuevo postulado junto con el principio de relatividad, podemos obtener las *transformaciones de Lorentz*, transformaciones que conectan las coordenadas de un evento  $P$  en dos sistemas de referencia inercial  $S$  y  $S'$ . Consideremos de nuevo  $S$  y  $S'$  con la configuración estándar de la Figura 1.1), y consideremos un fotón emitido desde los orígenes de  $S$  y  $S'$  al tiempo  $t = t' = 0$  y viajando a una dirección arbitraria. Entonces, las coordenadas de espacio y tiempo del fotón en cada sistema debe satisfacer [13]

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$$

Sustituyendo las relaciones 1.3 en estas expresiones y resolviendo para las constantes  $A$  y  $B$ , tenemos

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x), \\ x' &= \gamma(x - \beta ct), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{1.5}$$



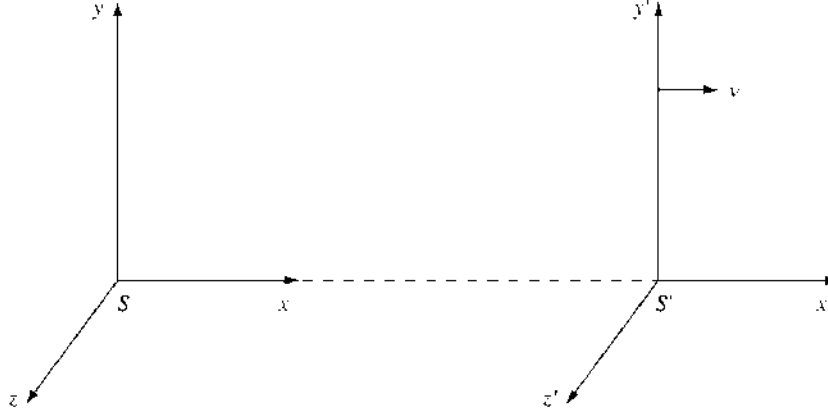


Figura 1.1: Dos sistemas de referencia inerciales  $S$  y  $S'$  en una configuración estándar (los orígenes de  $S$  y  $S'$  coinciden en  $t = t' = 0$ ). Fuente [35].

donde  $\beta = v/c$  y  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . Esta transformación de Lorentz, también conocida como *boost* en la dirección- $x$ , se reduce a la transformación de Galileo (1.4) cuando  $\beta \ll 1$ . Una vez más, por la simetría, podemos relacionar las coordenadas no primadas en términos de las primadas reemplazando  $v$  por  $-v$ .

De las ecs. (1.5), vemos que las coordenadas de tiempo y espacio están *mezcladas* por una transformación de Lorentz. Además, si consideramos dos eventos  $A$  y  $B$  con coordenadas  $(t_A, x_A, y_A, z_A)$  y  $(t_B, x_B, y_B, z_B)$  en  $S$ , un cálculo directo muestra que el *intervalo* (al cuadrado)

$$\Delta s = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

es invariante bajo la transformación de Lorentz. Como propuso Minkowski, estas observaciones nos conducen a considerar el espacio y tiempo como un sistema y no como entes ajenos; unidos en un espacio tetradimensional conocido como *espacio-tiempo*, cuya geometría está caracterizada por (1.2). Notemos que el espacio-tiempo de la relatividad especial no es euclidiano, por los signos menos de , y se le suele llamar *pseudo-euclidiano* o *geometría de Minkowski*. Sin embargo, para cualquier valor fijo de  $t$  la parte espacial de la geometría permanece euclidiana.

### 1.3. El elemento de línea del espacio-tiempo de Minkowski

Veamos más a fondo el significado del intervalo entre dos eventos  $A$  y  $B$  en el espacio-tiempo. Dado sistema de referencia inercial  $S$ , vimos que

$$\Delta s = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

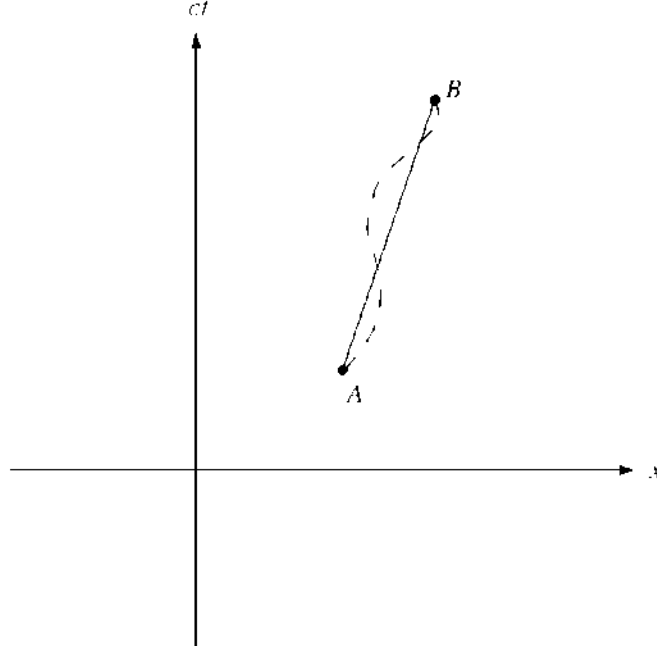


Figura 1.2: Dos trayectorias en el espacio-tiempo conectando los eventos  $A$  y  $B$ . Fuente [35]

donde  $\Delta t = t_B - t_A$ , etc. Este intervalo es invariante bajo la transformación de Lorentz y corresponde a la 'Distancia' en el espacio-tiempo medido a lo largo de la línea recta que une  $A$  y  $B$ . Esta línea puede ser interpretada como la línea de mundo de una partícula que se mueve a velocidad constante relativa a  $S$  entre los eventos  $A$  y  $B$ . Sin embargo, surge la pregunta natural de qué intervalo es medido entre  $A$  y  $B$  a lo largo de alguna curva en el espacio-tiempo, por ejemplo la línea ondulada (ver Figura 1.2). Para dar respuesta a esta pregunta, debemos expresar la geometría intrínseca del espacio-tiempo de Minkowski en forma infinitesimal. Es fácil ver que, si dos eventos infinitesimalmente separados entonces el cuadrado de el intervalo infinitesimal entre ellos está dado por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.6)$$

la cual se conoce como el *elemento de línea* del espacio de Minkowski. De consideraciones anteriores, es claro que  $ds^2$  es invariante bajo cualquier transformación de Lorentz. El intervalo invariante entre  $A$  y  $B$  a lo largo de una curva arbitraria en el espacio-tiempo está dada por

$$\Delta s = \int_A^B ds \quad (1.7)$$

donde la integral está evaluada a lo largo de la curva. Para representar esta integral, debemos tener un conjunto de ecuaciones que describan la curva de espacio-tiempo.

### 1.3.1. Rumbo a la relatividad especial: Albert Einstein

La mayoría de los libros de relatividad especial comienzan con algún orden de descripción de el experimento de Michelson-Morley y entonces introducen la transformación de Lorentz. De hecho, Einstein afirmó que el no había sido influenciado por este experimento. Esto ha sido discutido por varios historiadores de ciencia y autores de biografías de Einstein. Uno puede pensar que estos investigadores están sobre un terreno delicado, especialmente porque el experimento había sido referido (aunque indirectamente) en las publicaciones de Einstein. Recordemos que Einstein fue un *téorico*- y uno de los más grandes teóricos que ha vivido- y el tuvo una forma teórica de ver la física. Un buen teórico desarrolla una intuición acerca de como funciona la naturaleza, el cuál ayuda en la formulación de las leyes físicas. Por ejemplo, simetrías posibles y cantidades que se conservan fueron consideradas. Podemos darnos una idea acerca de el pensamiento de Einstein desde el título de su famosa publicación de 1905 sobre la relatividad especial. A continuación, mostramos el primer parrafo [33].

### 1.3.2. Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento por A. Einstein.

Es bien sabido que la Electrodinámica de Maxwell- como usualmente se entendía en ese entonces- cuando se aplicaba a cuerpos en movimiento, nos conducía a antisimetrías que no parecían ser inherentes en el fenómeno. Tómese, por ejemplo, la acción recíproca electrodinámica de un imán y un conductor. El fenómeno observable depende sólomente del movimiento relativo del conductor y el imán, mientras que la experiencia nos da una distinción entre los dos casos en los cuales o uno o el otro de estos cuerpos está en movimiento. Si el imán está en movimiento y el conductor en reposo, surge en el espacio que rodea al imán un campo eléctrico con cierta energía, produciendo una corriente en las zonas donde las partes del conductor esté situado. Pero si el imán está fijo y el conductor en movimiento, no aparece un campo eléctrico en la zona que rodea al imán. En el conductor, sin embargo, encontramos una fuerza electromagnética, para la cual en sí misma no hay energía correspondiente, pero que aumenta- suponiendo igualdad de movimiento relativo en los dos casos discutidos- las corrientes eléctricas de la misma región e intensidad como la producida por las fuerzas eléctricas en el primer caso.

Podemos ver que en la publicación de Einstein no hay mención de “Transformación entre sistemas de referencia inerciales” o ‘Una teoría en la cual la rapidez de la luz se suponga una constante universal’. La electrodinámica está en el corazón del pensamiento de Einstein; Einstein se dio cuenta que las ecuaciones de electromagnetismo de Maxwell *requerían* relatividad especial.

Las ecuaciones de Maxwell son

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.9)$$

donde  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  y  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ ,  $\vec{P}$  y  $\vec{M}$  son la polarización y la magnetización del medio en el cual los campos están presentes. En el vacío podemos ver que  $\vec{j} = 0$  y  $\rho = 0$ , y entonces, obtenemos las ecuaciones simétricas más obvias

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.11)$$

Tomando el rotacional de  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ , aplicando la identidad

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}$$

y, aplicando la misma identidad para  $\vec{B}$  en  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ , derivamos las ecuaciones de onda electromagnéticas

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Estas tienen la forma de una ecuación de onda con una rapidez de propagación  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ . Ahora, las constantes  $\mu_0$  y  $\epsilon_0$  son propiedades del ‘vacío’:

- $\mu_0$  es la permeabilidad de un vacío, igual a  $4\pi \times 10^{-7} Hm^{-1}$
- $\epsilon_0$  es la permitividad de un vacío, igual a  $8,85 \times 10^{-12} Fm^{-1}$

Esta relación entre las constantes  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  y la velocidad de la luz, fue una de las más relevantes consecuencias de la teoría de Maxwell. Pero, ¿Qué queremos decir con ‘un vacío’? ¿Define un absoluto sistema en reposo? Si rechazamos la existencia de un sistema absoluto de reposo, entonces ¿cómo formular una teoría de electromagnetismo? ¿Cómo aparecen las ecuaciones de Maxwell en sistemas que se mueven con respecto a otro? ¿Necesitamos cambiar el valor de  $c$ ? Si así fuera, ¿Qué pasaría con los valores  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$ ?

Einstein resolvió todos estos problemas de un solo golpe, diciendo que las ecuaciones de Maxwell toman la misma forma matemática en todos los sistemas de referencia inerciales. La velocidad de la luz  $c$  es entonces la misma en todos los sistemas inerciales. La teoría de la relatividad especial (incluyendo las sorprendentes conclusiones como  $E = mc^2$ ) se siguen de una generalización de esta simple, teórica y emocionante suposición. *Las ecuaciones de Maxwell requieren relatividad especial.* Vemos que para un gran teórico como Einstein, la disputa con el experimento de Michelson-Morley pudo bien haber sido de menor importancia. Einstein pudo ver la relatividad especial merodeando en las ecuaciones de Maxwell.



# Capítulo 2

## Herramientas de Geometría Diferencial

La noción de vector es extremadamente útil para describir procesos físicos y es empleado en casi todas las ramas de la Física Matemática. El concepto de vectores es también muy útil en la relatividad especial y general, y ahora consideramos como generalizar nuestras ideas familiares Euclidianas para definir vectores en una variedad pseudo-Riemanniana y en un sistema arbitrario de coordenadas. Frecuentemente consideramos variedades Riemannianas bidimensionales, las cuales podemos verlas como superficies incrustadas en un espacio euclidiano tridimensional. Un ejemplo es la superficie de una esfera como la superficie de la Tierra (¡y nosotros seríamos como hormigas limitados a movernos en dos dimensiones!) <sup>1</sup>

### 2.1. Campos escalares sobre variedades

Antes de estudiar los espacios escalares sobre variedades, discutamos brevemente los campos escalares. Un campo escalar (real o complejo) definido sobre una variedad (o en una región de)  $\mathcal{M}$  asigna un valor real (o complejo) a cada punto  $P$  en  $\mathcal{M}$  (o en una región de); un ejemplo es la temperatura sobre la superficie de la Tierra. Si uno etiqueta los puntos en  $\mathcal{M}$  usando algún sistema de coordenadas  $x^a$  entonces uno puede expresar el valor en cada punto como una función de las coordenadas  $\phi(x^a)$ . El valor del campo escalar en cada punto  $P$  no depende de la elección del sistema de coordenadas. Entonces, bajo una transformación en sistemas arbitrarios de coordenadas  $x^a \rightarrow x'^a$ , el campo escalar es descrito por una *función diferente*  $\phi'(x'^a)$  en el nuevo sistema de coordenadas, de manera que

$$\boxed{\phi'(x'^a) = \phi(x^a)} \quad (2.1)$$

Ésta es la definición de un campo escalar.

---

<sup>1</sup>El contenido del capítulo 2 es de acuerdo al libro Hobson M. P. Efstathiou, A. N. Lasenby. General Relativity: An introduction for Physicists

## 2.2. Campos Vectoriales sobre variedades

Un campo vectorial definido sobre una variedad  $\mathcal{M}$  (o en una región de) asigna uno y sólo un vector a cada punto  $P$  en  $\mathcal{M}$  (o en la región de). El vector en  $P$  se suele dibujar como un segmento de línea dirigido que empieza en  $P$ , pero esta convención requiere una interpretación cuidadosa sobre variedades generales. Una vez más, es conveniente ilustrar nuestra discusión considerando una variedad de dimensión dos como la superficie esférica de la Tierra. Consideremos, por ejemplo, el campo vectorial definido por la velocidad del viento (a nivel del suelo). La velocidad del viento es medida en un punto dado de observación y se refiere únicamente a ese punto, a pesar de la conveniencia visual de mostrarlo sobre un cuadro como una flecha aparentemente extendida por una larga distancia. Es un ejemplo de un vector *local*. Otros ejemplos son el momentum, la densidad de corriente y velocidad en general. Tales vectores son definidos en un punto dado  $P$ . Más precisamente, pueden ser medidos por un observador en un laboratorio cubriendo una región *pequeña* sobre la variedad en una vecindad de  $P$ .

En un punto arbitrario  $P$  de la variedad, cualquier vector local  $\mathbf{v}$  está en el *espacio tangente*  $T_P$  de la variedad en  $P$ . Así,  $T_P$  (ver Fig. 2.1) consiste en el conjunto de todos los vectores (locales) en el punto  $P$ . Además, en un punto arbitrario  $P$ , vectores locales satisfacen las reglas usuales de álgebra vectorial en la geometría (pseudo-) euclidiana. Es importante tomar en cuenta que, sin embargo, los vectores locales definidos en diferentes puntos  $P$  y  $Q$  en la variedad pertenecen a espacios tangentes *diferentes*. Entonces, no hay modo de sumar vectores locales en diferentes puntos.

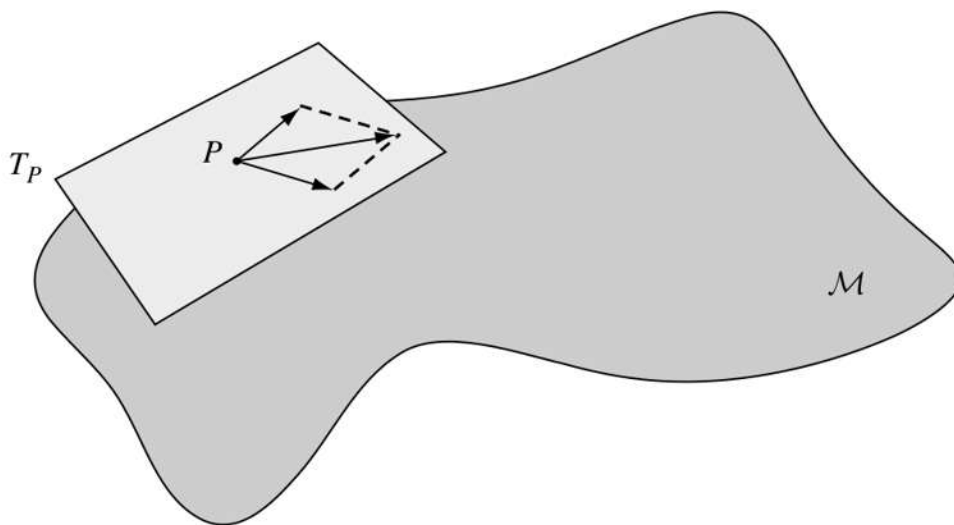


Figura 2.1: Vectores locales definidos en el punto  $P$ , están en el espacio tangente  $T_P$  de la variedad en ese punto. Fuente [35]

Debemos tener más cuidado con la noción de vector posición y vector desplazamien-

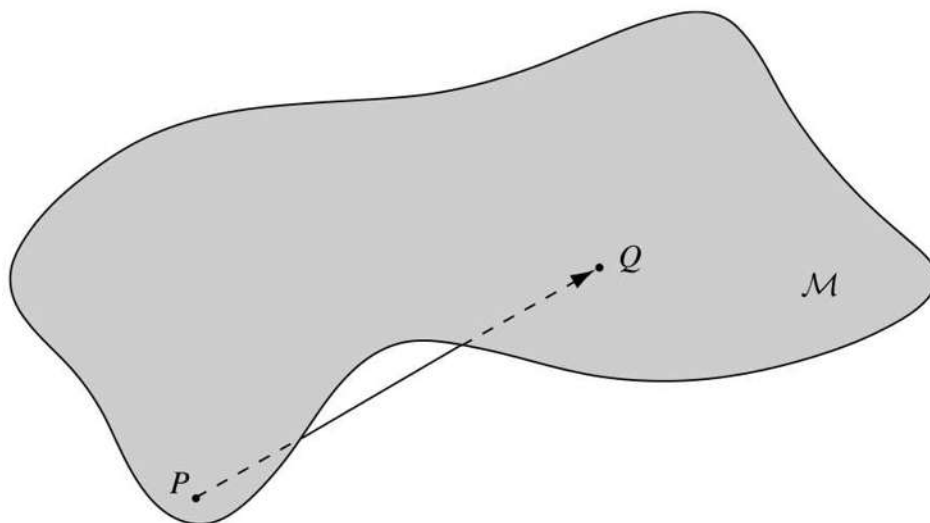


Figura 2.2: El vector desplazamiento entre los puntos  $P$  y  $Q$  no está en la variedad, al menos que la variedad sea por sí misma euclidea. Fuente [35].

to, pues claramente están localmente definidos. Esto lo podemos visualizar con ayuda de la Fig 2.2. El ‘vector desplazamiento’ que conecta los puntos  $P$  y  $Q$  no pertenece a la variedad y entonces no tiene un significado geométrico intrínseco. Heurísticamente, sin embargo, podemos definir el vector desplazamiento  $\delta\vec{s}$  entre dos puntos cercanos  $P$  y  $Q$ , de manera que sea una entidad local. En el límite  $Q \rightarrow P$ , el vector  $\delta\vec{s}$  está en el espacio tangente de  $P$ .

Si la variedad original es por sí misma (pseudo-) euclidiana, entonces el espacio tangente en cualquier punto coincide con la variedad. Así pues, los vectores definidos en diferentes puntos de la variedad pertenecen al mismo espacio, y las nociones de vectores posición y desplazamiento son válidas. Esto refleja nuestra experiencia común de álgebra vectorial.

### 2.3. Vector tangente a una curva

El ejemplo más sencillo de campo vectorial definido en una variedad (o región de) es el *vector tangente* a una curva  $C$  definido en cada punto a lo largo de  $C$ . La noción de vector tangente a una curva es también central para nuestro siguiente desarrollo de vectores base.

Consideremos una curva  $C$  en una variedad  $N$ -dimensional. Esta curva puede ser descrita por las  $N$  ecuaciones paramétricas  $x^a(u)$ , donde  $u$  es un parámetro general que varía a lo largo de la curva. En cualquier punto  $P$  a lo largo de  $C$ , el vector tangente  $\mathbf{t}$  a la curva, con respecto al valor del parámetro  $u$ , está definido como



$$\mathbf{t} = \lim_{\delta u \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta u} \quad (2.2)$$

donde  $\delta \mathbf{s}$  es la separación vectorial infinitesimal entre los puntos  $P$  y algún punto cercano  $Q$  sobre la curva correspondiente a el valor del parámetro  $u + \delta u$ . Vemos que  $\mathbf{t}$  pertenecerá en el espacio tangente  $T_P$ .

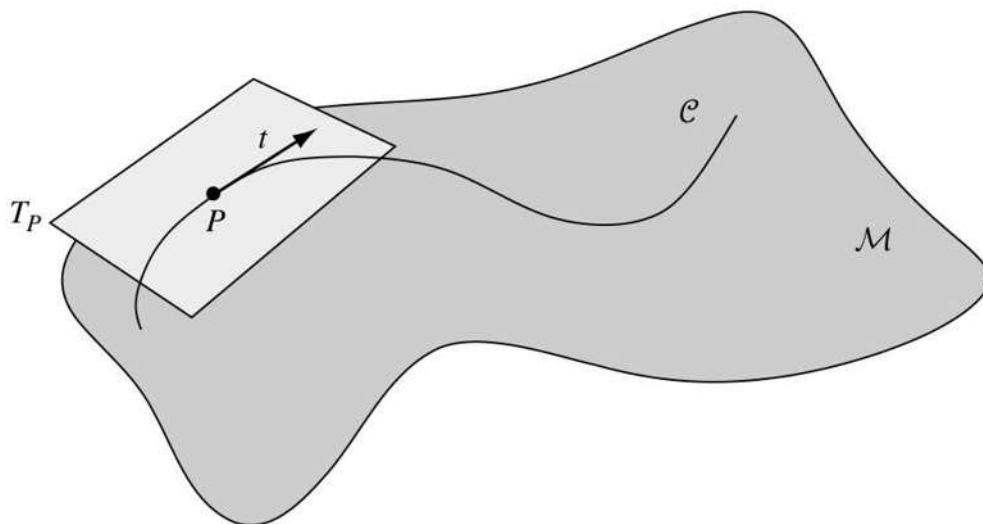


Figura 2.3: El vector  $\mathbf{t}$  tangente a la curva  $\mathcal{C}$  en el punto  $P$ . Fuente [35].

A pesar de que hemos adoptado una aproximación heurística, aquí es perfectamente adecuada para nuestros propósitos, en una variedad general la estrategia matemática formal para la construcción del vector tangente en algún punto  $P$  es identificar  $\mathbf{t}$  con el operador *derivada direccional* a lo largo de la curva en ese punto.

## 2.4. Vectores base

Como hemos visto, un campo vectorial aplicado en una variedad es definido proponiendo un vector  $\mathbf{v}(x)$  en cada punto de la variedad. En cada punto  $P$  el vector vive en el espacio tangente  $T_P$  en ese punto. Este vector es una ente geométrico, definido *independientemente* de cualquier sistema de coordenadas elejidos para etiquetar puntos en la variedad. Sin embargo, en cada punto  $P$ , podemos definir un conjunto de *vectores base*  $\mathbf{e}_a$  para cada espacio tangente  $T_P$ , el número de tales vectores es igual a la dimensión del espacio  $T_P$  y por tanto, de  $\mathcal{M}$ . Cualquier vector en  $P$  se puede expresar como una combinación lineal de estos vectores base, los cuales son linealmente independientes. Entonces, podemos expresar el vector local  $\mathbf{v}(x)$  en cada punto en términos de los vectores base  $\mathbf{e}_a(x)$  definidos en cada punto

$$\mathbf{v}(x) = v^a(x) \mathbf{e}_a(x).$$

---

## CAPÍTULO 2. HERRAMIENTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

---

Los números  $v^a(x)$  se conocen como las *componentes contravariantes* del campo vectorial en la base  $\mathbf{e}_a(x)$ .

Para cualquier conjunto de vectores  $\mathbf{e}_a(x)$ , podemos definir un segundo conjunto de vectores conocido como *base dual de vectores*. En vez de denotar la base dual de vectores por medio de otra letra en negrita, por convención un vector de esta segunda base se denota por  $\mathbf{e}^a(x)$ . A pesar de que la posición del índice parece extraña (entre otras razones por la posible confusión con exponentes), permite un efectivo uso de convención de suma que adoptaremos. En cualquier punto  $P$ , la base dual de vectores se define por la siguiente relación:

$$\mathbf{e}^a(x) \cdot \mathbf{e}_b(x) = \delta_a^b \quad (2.3)$$

así,  $\mathbf{e}^a(x)$  y  $\mathbf{e}_a(x)$  forman un sistema *recíproco* de vectores. La base dual de vectores en  $P$  también pertenece al espacio tangente  $T_P$  y forma una base alternativa para él. Entonces, podemos también expresar el campo vectorial local  $\mathbf{v}(x)$  en cada punto como una combinación lineal de los vectores base  $\mathbf{e}^a(x)$  definido en dicho punto:

$$\mathbf{v}(x) = v_a(x) \mathbf{e}^a(x).$$

los números  $v_a(x)$  se conocen como las *componentes covariantes* de un vector  $\mathbf{v}$ . Por ejemplo,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^a = v^b \mathbf{e}_b \cdot \mathbf{e}^a = v^b \delta_a^b = v^a,$$

donde hemos usado el hecho de que  $\delta_a^b$  puede ser usado para reemplazar un índice por otro. Podemos escribir  $v^a = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^a$ . Similarmente, podemos mostrar que  $v_a = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_a$ .

### *Sistema de coordenadas alrededor de un punto*

En cualquier sistema de coordenadas  $x^a$ , podemos definir en cada punto  $P$  de la variedad un conjunto de  $N$  vectores base del *sistema de coordenadas locales*

$$\mathbf{e}_a = \lim_{\delta x^a \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta x^a} \quad (2.4)$$

donde  $\delta \mathbf{s}$  es el vector desplazamiento infinitesimal entre  $P$  y un punto próximo  $Q$  cuya separación de  $P$  es  $\delta x^a$  a lo largo de la coordenada  $x^a$  de la curva. Entonces,  $\mathbf{e}_a$  es el *vector tangente* a la dirección de la coordenada  $x^a$  en el punto  $P$ . Este conjunto de vectores constituye una base para el espacio tangente  $T_P$  en el punto  $P$  ver Figura 2.4.

De la definición, vemos que si dos puntos próximos  $P$  y  $Q$  tienen coordenads  $x^a$  y  $x^a + dx^a$  respectivamente, donde  $dx^a$  es distinto de cero para toda  $a$  y su separación vectorial infinitesimal será

$$d\mathbf{s} = \mathbf{e}_a(x) dx^a. \quad (2.5)$$

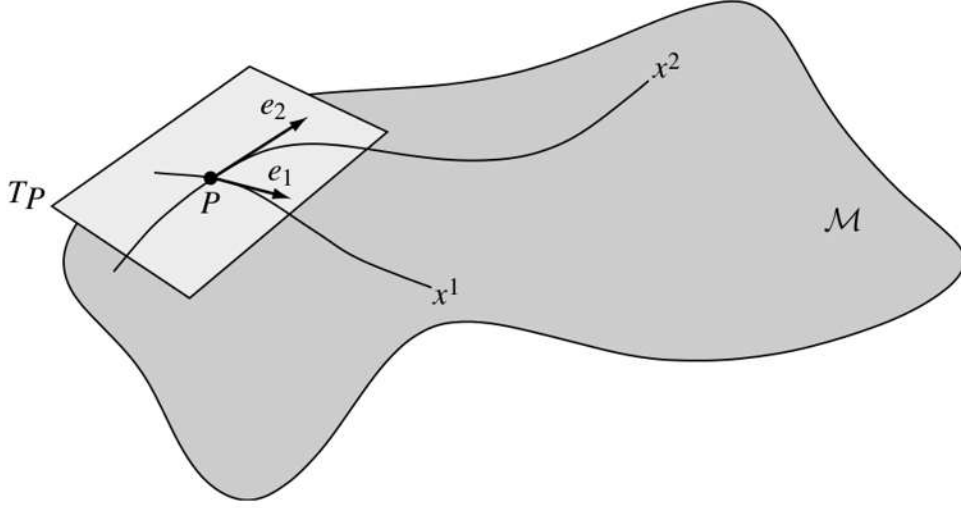


Figura 2.4: Los vectores base  $e_a$  en el punto  $P$  de la variedad son tangentes a las curvas de la variedad y forman una base para el espacio tangente en  $P$ . Fuente [35].

Podemos usar esta expresión para relacionar el producto interno de los vectores base en algún punto arbitrario  $P$  con los valores de las funciones métricas  $g_{ab}(x)$  en ese punto. De, tenemos

$$ds^2 = d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s} = (dx^a \mathbf{e}_a) \cdot (dx^b \mathbf{e}_b) = (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b) dx^a dx^b.$$

Comparando esto con la expresión estándar  $ds^2 = g_{ab}(x) dx^a dx^b$  para el elemento de línea, encontramos que

$$\mathbf{e}_a(x) \cdot \mathbf{e}_b(x) = g_{ab}(x). \quad (2.6)$$

Entonces, de forma más general, en un sistema de coordenadas de dos vectores el producto escalar de dos vectores está dado por

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v^a \mathbf{e}_a) \cdot (w^b \mathbf{e}_b) = g_{ab} v^a w^b.$$

Si la base que se tiene es la dual  $\mathbf{e}^a(x)$  en un sistema de coordenadas locales  $\mathbf{e}_a(x)$  entonces la distancia en la coordenada- $a$  entre dos puntos próximos separados por un desplazamiento  $d\mathbf{s}$  está dado por

$$dx^a = v^a \mathbf{e}^a \cdot d\mathbf{s}.$$

Además, en este caso podemos usar la base dual para definir las cantidades

$$g^{ab}(x) = \mathbf{e}^a(x) \cdot \mathbf{e}^b(x), \quad (2.7)$$

que, como demostraremos, forman las *componentes contravariantes del tensor métrico* y en general son diferentes a las cantidades  $g_{ab}$ .

En cualquier punto  $P$  de una variedad, es útil definir un conjunto de vectores base *ortogonormales*  $\hat{e}_a$  en  $T_P$ , es decir, con módulo unitario y ortogonales entre sí. La condición necesaria expresada matemáticamente es que en  $P$

$$\hat{e}_a \cdot \hat{e}_b = \eta_{ab}, \quad (2.8)$$

donde  $[\eta_{ab}] = \text{diag}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \dots \pm 1)$  es el elemento de línea cartesiano de el espacio tangente  $T_P$  y depende de los signos (en general) de la variedad pseudo-riemanniana.

## 2.5. Subir y bajar índices

A menos que se mencione lo contrario, supondremos que estamos tratando con un sistema de coordenadas locales como discutimos antes y su base dual. Las componentes contravariantes y covariantes en estas bases son igual de buenas para expresar un vector. El vínculo entre ellas se encuentra considerando las diferentes formas en las que podemos escribir el producto  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ . Primero, podemos escribir

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v^a \mathbf{e}_a) \cdot (w^b \mathbf{e}_b) = (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b) v^a w^b = g_{ab} v^a w^b,$$

donde hemos usado las componentes contravariantes de los dos vectores. Del mismo modo, usando componentes covariantes, podemos escribir el producto escalar como

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v_a \mathbf{e}^a) \cdot (w_b \mathbf{e}^b) = (\mathbf{e}^a \cdot \mathbf{e}^b) v_a w_b = g^{ab} v_a w_b.$$

Finalmente, podríamos expresar el producto escalar en términos de las componentes contravariantes de un vector y las componentes covariantes del otro.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v^a \mathbf{e}_a) \cdot (w_b \mathbf{e}^b) = (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}^b) v^a w_b = \delta_a^b v^a w_b = v^a w_a,$$

análogamente, podríamos escribir

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v_a \mathbf{e}_a) \cdot (w^b \mathbf{e}_b) = (\mathbf{e}^a \cdot \mathbf{e}_b) v_a w^b = \delta_a^b v_a w^b = v_a w^a.$$

Comparando estas cuatro expresiones alternativas para el producto escalar de dos vectores, podemos deducir una de las propiedades más útiles de las cantidades  $g_{ab}$  y  $g^{ab}$ . Como  $g_{ab} v^a w^b = v^a w_a$  se cumple para cualquier vector arbitrario  $\mathbf{v}$ , se sigue que

$$g_{ab} w^b = w_a$$

que ilustra el hecho de que las cantidades  $g_{ab}$  pueden ser usadas para *bajar un índice*. En otras palabras, podemos obtener las componentes covariantes de un vector de sus componentes contravariantes. Con un argumento similar, concluimos

$$g^{ab} w_b = w^a,$$

---

## CAPÍTULO 2. HERRAMIENTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

---

de manera que las cantidades  $g^{ab}$  pueden ser usadas para realizar el proceso iinverso de *subir un índice*. Es fácil demostrar que el sistema de coordenadas y su base dual están relacionadas de una forma análoga

$$\boxed{\mathbf{e}_a = g_{ab} \mathbf{e}^b \quad \text{y} \quad \mathbf{e}^a = g^{ab} \mathbf{e}_b}.$$

Ahora, probaremos otro resultado útil, la matriz  $[g^{ab}]$  que contiene las componentes contravariantes del tensor métrico es la inversa de la matriz  $[g_{ab}]$  que contiene sus componentes covariantes. Bajando y subiendo índices con  $g_{ab}$  y  $g^{ab}$  de las componentes de un vector arbitrario  $\mathbf{v}$ , vemos que

$$\delta_c^a v^c = v^a = g^{ab} v_b = g^{ab} g_{bc} v^c,$$

pero, como  $\mathbf{v}$  es arbitrario, se debe cumplir que

$$\boxed{g^{ab} g_{bc} v^c = \delta_c^a.} \quad (2.9)$$

Denotando la matriz  $[g_{ab}]$  por  $G$  y la matriz  $[g^{ab}]$  por  $\tilde{G}$ , esta ecuación puede ser escrita en forma matricial como  $G\tilde{G} = I$ . Por tanto,  $G$  y  $\tilde{G}$  son matrices inversas.

### 2.6. Vectores base y transformaciones de coordenadas

Consideremos una transformación de coordenadas  $x^a \rightarrow x'^a$  en una variedad. Existe una relación simple entre la base de vectores  $\mathbf{e}_a$  asociado con el sistema de coordenadas  $x'^a$ . Y se puede encontrar considerando vectores desplazamiento infinitesimales  $d\mathbf{s}$  entre dos puntos muy próximos  $P$  y  $Q$ . Evidentemente, este desplazamiento no puede depender del sistema de coordenadas que se use, por tanto, debemos tener que

$$d\mathbf{s} = dx^a \mathbf{e}_a = dx'^a \mathbf{e}'_a.$$

Al ver que  $dx^a = (\partial x^a / \partial x'^b) dx'^b$ , encontramos que en cualquier punto  $P$  los vectores base están relacionados por

$$\boxed{\mathbf{e}'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \mathbf{e}_b,} \quad (2.10)$$

donde la derivada parcial está evaluada en el punto  $P$ . El mismo cálculo, pero con la base dual, nos da

$$\mathbf{e}'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \mathbf{e}^b \quad (2.11)$$

Usando (2.10) y (2.11), podemos ahora calcular cómo las componentes de cualquier vector se deben transformar bajo un cambio de coordenadas. Debido a que un vector es un ente geométrico, es independiente del sistema de coordenadas, tenemos (por ejemplo)

$$v = v^a e_a = v'^a e'_a$$

Así, las nuevas componentes contravariantes están dadas por

$$v'^a = e'^a \cdot v = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} e^b \cdot v \implies \boxed{v'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} v^b.}$$

Del mismo modo, las nuevas componentes covariantes están dadas por

$$v'_a = e'_a \cdot v = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} e_b \cdot v \implies \boxed{v'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} v_b}$$

## 2.7. Derivadas de vectores base y la conexión afín

Como hemos dicho, vectores locales en diferentes puntos  $P$  y  $Q$  en una variedad viven en diferentes espacios tangentes, así que no hay modo de sumarlos o restarles. Para definir la derivada de un vector, sin embargo; debemos comparar vectores de diferentes puntos, no obstante, en el límite donde la distancia entre los puntos tiende a cero. Adoptaremos una aproximación intuitiva que sea suficiente para nuestros propósitos en el desarrollo de cálculo de vectores en curvas de variedades y genere una imagen geométrica simple. Específicamente, supondremos que la variedad vive en un espacio de mayor dimensión (pseudo-)euclidiano, el cual nos permite comparar vectores en diferentes puntos. En un sistema de coordenadas  $x^a$  de una variedad, consideremos la base de vectores  $e_a$  en dos puntos muy próximos  $P$  y  $Q$  figura 2.5. En general, la base de vectores en  $Q$  diferirá infinitesimalmente de los que están en  $P$ , así

$$e_a(Q) = e_a(P) + \delta e_a.$$

La derivada parcial estándar de los vectores base está dada por  $\delta e_a / \delta x^c$  en el límite cuando  $\delta x^c \rightarrow 0$ . En general, sin embargo, el vector resultante no vivirá en el espacio tangente de  $P$ . Entonces, definiremos la derivada *en la variedad* del sistema de coordenadas locales proyectando con el espacio tangente de  $P$

$$\frac{\partial e_a}{\partial x^c} = \left( \lim_{\delta x^c \rightarrow 0} \frac{\delta e_a}{\delta x^c} \right)_{\parallel T_P} \quad (2.12)$$

Ahora, podemos expandir esta derivada del vector en términos de los vectores base  $e_a(P)$  en el punto  $P$  y escribimos <sup>2</sup>

$$\boxed{\frac{\partial e_a}{\partial x^c} = \Gamma^b_{ac} e_b,} \quad (2.13)$$

---

<sup>2</sup>Es importante mencionar que aquí se está denotando la derivada covariante con la derivada parcial y que éstas coinciden sólo en el caso (pseudo)-riemanniano, por ello, más adelante usaremos  $D/Dx^c$  para denotar la derivada covariante para espacios-tiempo curvados.

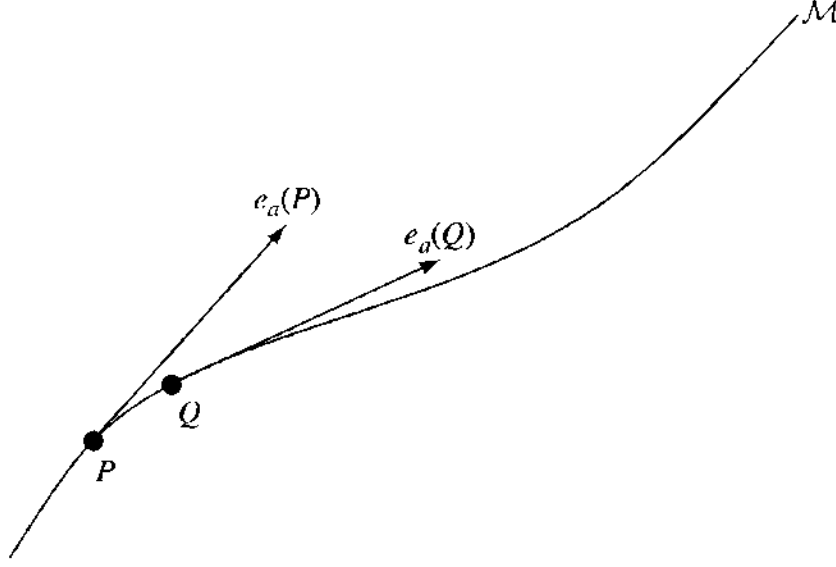


Figura 2.5: Los vectores base  $e_a(P)$  y  $e_a(Q)$  están en el espacio tangente de la variedad  $M$  en los puntos  $P$  y  $Q$  respectivamente. Fuente [35].

donde los  $N^3$  coeficientes  $\Gamma_{ac}^b$  se conocen como concección afín o en libros más viejos, símbolos de Christoffel(de segunda clase) en el punto  $P$ . De (2.12) , es claro que el operador derivada satisface el teorema de Leibnitz. Tomando el producto escalar de (2.13) con la base dual  $e^d$  y usando la relación recíproca  $e^a(x) \cdot e_b(x) = \delta_a^b$ , podemos también escribir la conexión afín como

$$\Gamma_{ac}^b = e^b \cdot \partial_c e_a \quad (2.14)$$

Derivando la relación recíproca  $e^a(x) \cdot e_b(x) = \delta_a^b$  con respecto la coordenada  $x^c$ , vemos que

$$\partial_c (e^a \cdot e_b) = (\partial_c e^a) \cdot e_b + e^a \cdot (\partial_c e_b) = 0$$

Entonces, usando (2.14), encontramos que las derivadas de los vectores de la base dual con respecto a las coordenadas están dadas por

$$\partial_c e^a = -\Gamma_{bc}^a e^b. \quad (2.15)$$

## 2.8. Derivada intrínseca de un vector a lo largo de una curva

Normalmente, pensamos en campos vectoriales como funciones de las coordenadas  $x^a$  definidos en alguna región de la variedad. Sin embargo, también podemos encontrar campos vectoriales que se definan solo en algún subespacio de la variedad, y un ejemplo extremo sería cuando el campo vectorial  $v(u)$  se define solo a lolargo de alguna curva

## CAPÍTULO 2. HERRAMIENTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

---

$x^a(u)$  en la variedad; un ejemplo puede ser el 4-vector spin  $\mathbf{s}(\tau)$  de una partícula a lo largo de una línea de mundo en el espacio-tiempo. Veamos como calcular la derivada de un vector con respecto al parámetro  $u$  a lo largo de la curva.

Comencemos escribiendo el campo vectorial en cualquier punto a lo largo de la curva  $\mathcal{C}$  como

$$\mathbf{v}(u) = v^a(u)\mathbf{e}_a(u)$$

donde los vectores  $\mathbf{e}_a(u)$  son un sistema de coordenadas locales en el punto de la curva correspondiente al valor del parámetro  $u$ . Entonces, la derivada de  $\mathbf{v}$  a lo largo de la curva  $\mathcal{C}$  está dado por

$$\frac{d\mathbf{v}}{du} = \frac{dv^a}{du}\mathbf{e}_a + v^a \frac{d\mathbf{e}_a}{du} = \frac{dv^a}{du}\mathbf{e}_a + v^a \frac{\partial \mathbf{e}_a}{\partial x^c} \frac{dx^c}{du}$$

donde hemos usado la regla de la cadena para reescribir el último término del miembro derecho; este procedimiento es válido porque los vectores base  $\mathbf{e}_a$  están también definidos afuera de la curva  $\mathcal{C}$ . Usando (2.14) para escribir las derivadas parciales de los vectores base en términos de la conexión, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{v}}{du} = \frac{dv^a}{du}\mathbf{e}_a + \Gamma^b_{ac} v^a \frac{dx^c}{du} \mathbf{e}_b$$

Intercambiando los índices  $a$  y  $b$  del último término, podemos factorizar

$$\frac{d\mathbf{v}}{du} = \frac{dv^a}{du}\mathbf{e}_a + \Gamma^a_{bc} v^b \frac{dx^c}{du} \mathbf{e}_a.$$

así

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{du} = \left( \frac{dv^a}{du} + \Gamma^a_{bc} v^b \frac{dx^c}{du} \right) \mathbf{e}_a \equiv \frac{Dv^a}{Du} \mathbf{e}_a.} \quad (2.16)$$

El término en paréntesis es llamado derivada *intrínseca* (o *absoluta*) de las componentes  $v^a$  a lo largo de la curva  $\mathcal{C}$  y se suele denotar por  $Dv^a/Du$  como se indica. Del mismo modo, la derivada intrínseca de las componentes covariantes  $v_a$  de un vector está dada por

$$\frac{Dv_a}{Du} \equiv \frac{dv_a}{du} - \Gamma^b_{ac} v_b \frac{dx^c}{du} \quad (2.17)$$

Una forma conveniente de recordar la forma de la derivada intrínseca es pretender que el vector  $\mathbf{v}$  esté definido a través (o de alguna región de) la variedad, es decir, no solo a lo largo de la curva  $\mathcal{C}$ . En algunos casos de interés, esto puede ser de todos modos cierto; Por ejemplo,  $\mathbf{v}$  puede ser la 4-velocidad de la distribución de algún fluido. Podemos derivar las componentes  $v^a$  con respecto a las coordenadas  $x^a$

$$\frac{dv^a}{du} = \frac{\partial v^a}{\partial x^c} \frac{dx^c}{du}$$

Sustituyendo ésto en (2.16), podemos factorizar  $dx^c/du$  y reconocer el otro factor como la derivada covariante ( $\nabla_c v^a$ )



$$\frac{Dv^a}{Du} = (\nabla_c v^a) \frac{dx^c}{du} \quad (2.18)$$

y similarmente para las derivadas intrínsecas de las componentes.

## 2.9. Transporte paralelo

Consideremos de nuevo una curva  $\mathcal{C}$  en la variedad, parametrizada en un sistema de coordenadas  $x^a(u)$ . Sea  $O$  un punto inicial de la curva con  $u = u_0$  y  $\mathbf{v}$  un vector definido en dicho punto. Podemos ahora pensar en *transportar*  $\mathbf{v}$  a lo largo de  $\mathcal{C}$  de manera que

$$\frac{d\mathbf{v}}{du} = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

se satisfaga en cada punto de la curva. El resultado es un *campo de vectores paralelos en cada punto de a lo largo de  $\mathcal{C}$* , generado por el *transporte paralelo* de  $\mathbf{v}$ .

En una variedad (pseudo-)euclídeana, el transporte paralelo de un vector tiene la interpretación geométrica de que el vector  $\mathbf{v}$  es transportado sin modificar su magnitud o dirección. Ésto se ilustra en la figura 2.6 para una curva  $\mathcal{C}$  en un espacio euclídiano dos-dimensional (es decir, el plano). Si las coordenadas  $x^a$  son cartesianas, es claro que las *componentes*  $v^a$  del campo vectorial satisfacen

$$\frac{dv^a}{du} = 0. \quad (2.20)$$

Sin embargo, (2.20) no es válido en un sistema arbitrario de coordenadas en el plano, y de (2.16) vemos que se debe generalizar a

$$\boxed{\frac{Dv^a}{Du} \equiv \frac{dv^a}{du} + \Gamma^a_{bc} v^b \frac{dx^c}{du} = 0.} \quad (2.21)$$

De la condición (2.19), es claro que (2.21) es igualmente válido para el transporte paralelo de vectores a lo largo de la curva en cualquier variedad (pseudo-)riemanniana en algun sistema arbitrario de coordenadas  $x^a$ , apesar de la interpretación geométrica es más sutil en este caso. Si uno está dispuesto a adoptar la idea de que la variedad (pseudo-Riemanniana) está embebida en una variedad (pseudo-) euclídeana de espacio de mayor dimensión, entonces podemos recuperar una simple interpretación geométrica de transporte paralelo. Consideremos una curva  $\mathcal{C}$  en la variedad (pseudo-)riemanniana dada en un sistema de coordenadas  $x^a(u)$ . Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos muy cercanos en la curva con valores de parámetros  $u$  y  $u + \delta u$  respectivamente. Empecemos con el vector  $\mathbf{v}$  en  $P$ , que vive en el espacio tangente  $T_P$ , pospongamos el vector, acercándolo al punto  $Q$  manteniéndolo paralelo consigo mismo. En un espacio euclídiano, esto significa transportar el vector sin modificar su dirección ni magnitud. En el punto  $Q$  el vector no vivirá en el espacio tangente  $T_Q$  por el efecto de la curvatura de la variedad embebida. Sin embargo, considerando solo la parte del vector que es tangencial a la

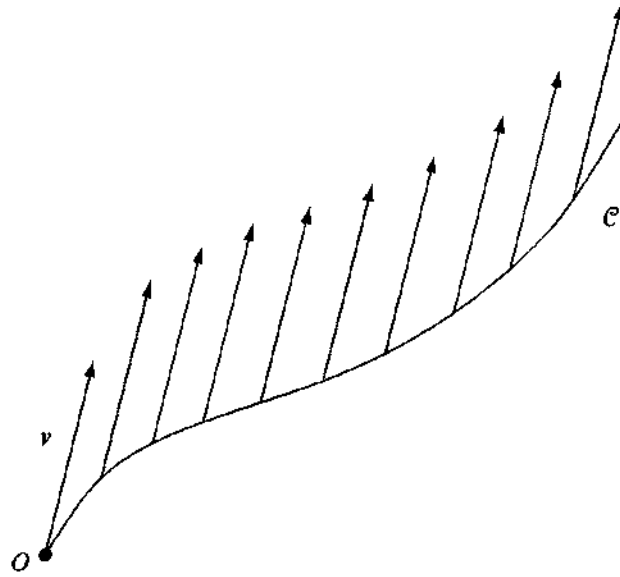


Figura 2.6: Un campo de vectores  $\mathbf{v}(u)$  paralelo generado por un transporte paralelo a lo largo de la curva  $\mathcal{C}$  parametrizada por  $u$ . Fuente [35].

variedad embebida en  $Q$ , obtenemos un cierto vector que sí vivirá en  $T_Q$ . Un cálculo directo muestra que dicho vector coincide con el transporte paralelo del vector en  $Q$  de acuerdo a (2.21).

Si escribimos (2.21) como

$$\frac{dv^a}{du} = -\Gamma^a_{bc} v^b \frac{dx^c}{du}, \quad (2.22)$$

entonces podemos ver que, si especificamos las componentes  $v^a$  en *algún punto arbitrario* de la curva, la ecuación fija las componentes de  $v^a$  *a lo largo de toda la longitud de la curva*. Para convencernos de que el transporte es realmente paralelo, consideremos un desplazamiento infinitesimal del vector desde algún punto  $P$ . Para un desplazamiento pequeño, podemos elegir un sistema de coordenadas localmente Cartesiano en  $P$ , en el cual las  $\Gamma$ 's desaparezcan, y así logramos que la derivada covariante sea cero, y ésta describe un desplazamiento infinitesimal que mantiene el vector paralelo ( $dv^a = 0$ ). Vemos que para que  $\mathbf{v}$  sea un campo de vectores paralelo, su derivada covariante debe ser cero, es decir, *el campo vectorial debería ser constante y así, los vectores deberían ser paralelos*.

Notemos que, el transporte paralelo a lo largo de curvas en una variedad (pseudo-)riemanniana difiere del transporte a lo largo de curvas en un espacio (pseudo-)euclidiano, en que es *dependiente de la trayectoria*: el vector obtenido al transportar un vector desde punto  $P$  a  $Q$  depende de la ruta tomada de  $P$  a  $Q$ . Esta dependencia de la trayectoria es también evidente en el transporte de un vector a lo largo de una curva cerrada,

donde el vector con el que se comienza y termina en el mismo punto no coincide en dirección con el que terminamos después de hacer el transporte. Esta dependencia de la trayectoria puede demostrarse sobre una curva en una superficie bidimensional, y en general puede expresarse matemáticamente en términos del *tensor de curvatura* de la variedad.

### 2.10. Cálculo tensorial sobre variedades

Los sistemas de coordenadas con los que uno etiqueta puntos en una variedad son totalmente arbitrarios. Por ejemplo, podríamos elegir parametrizar la superficie de una esfera en términos de las coordenadas  $(\theta, \phi)$ , tomando cualquier punto como polo norte, o podríamos usar cualquier número de sistemas de coordenadas alternativos. Es también claro, sin embargo, que nuestra descripción de cualquier proceso físico que ocurra sobre la superficie de la esfera no debería depender de nuestro sistema de coordenadas elegido. Por ejemplo, en cualquier punto  $P$  de la superficie uno puede decir que, por ejemplo, la temperatura del aire tiene un valor o que el viento tiene una cierta rapidez en una dirección dada. Estas cantidades escalar y vectorial respectivamente, no dependen de cual sistema de coordenadas se usa para etiquetar puntos en la superficie. Entonces, para describir estos *campos* físicos sobre la superficie, debemos formular nuestras ecuaciones de manera que sean válidas en todos los sistemas de coordenadas. Ya habíamos dado la descripción para cantidades escalares y vectoriales sobre la superficie, pero ahora volveremos a una generalización de estas ideas para cantidades que no se pueden describir como escalares ni como vectores. Esto requiere que se introduzca el concepto de *tensores*.

#### 2.10.1. Campos Tensoriales sobre variedades

Empecemos considerando a los campos vectoriales de una manera ligeramente diferente. Supongamos que tenemos un campo vectorial, sea  $\mathbf{t}$  un vector definido en cada punto de una variedad. ¿Cómo podemos obtener un escalar de  $\mathbf{t}$ ? Una manera sencilla sería tomando el producto escalar de  $\mathbf{t}$  con otro vector  $\mathbf{v}$  de algún otro campo vectorial. Entonces, en cada punto  $P$  de la variedad podemos ver a  $\mathbf{t}$  en  $T_P$  como una *función lineal*  $\mathbf{t}(\cdot)$  que toma otro vector de  $T_P$  como su argumento y produce un número real, podemos denotar dicho número producido bajo la acción de  $\mathbf{t}$  sobre un vector  $\mathbf{v}$  de la siguiente forma

$$\boxed{\mathbf{t}(\mathbf{v}) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}}. \quad (2.23)$$

De una manera similar, podemos generalizar la noción de vector: en el espacio tangente  $T_P$ , podemos definir un *tensor*  $\mathbf{t}$  como un mapeo lineal de algún número de vectores a números reales, es decir  $\mathbf{t} : T_P M \times T_P M \times T_P M \dots \times T_P M \longrightarrow \mathbb{R}$ . El *rango* del tensor es el número de vectores que toma éste en su argumento. Por ejemplo, podemos escribir un tensor de tercer-rango como  $\mathbf{t}(\cdot, \cdot, \cdot)$ . Una vez más, denotaremos el número

que produce el tensor  $\mathbf{t}$  dados los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , y  $\mathbf{w}$  por

$$\mathbf{t}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

El tensor se define por el conjunto de operaciones aplicadas a los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , y  $\mathbf{w}$  para producir un escalar. Notemos que, sin embargo, que la definición de un tensor no menciona las componentes de los vectores; un tensor debe dar el mismo número real independientemente del sistema de referencia en el cual se den las componentes de los vectores. Si en cada punto  $P$  en alguna región de la variedad se tiene un tensor definido, entonces el resultado es un *campo tensorial* en esta región.

Por ejemplo, cualquier vector es un tensor de primer-rango. Tensores de un rango más alto constituyen una generalización del concepto de vector. Por ejemplo, un tensor importante de segundo rango es el *tensor métrico*  $\mathbf{g} : T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$ . Esto define un mapeo lineal de dos vectores a un número que es su producto interno, es decir

$$\boxed{\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.} \quad (2.24)$$

Veremos las propiedades de este tensor especial más adelante. Finalmente, notemos también que una función *escalar* de posición  $\phi(x)$  es una función  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y no de vectores a reales en general, y por tanto, se clasifica como un *tensor de rango cero*.

Que un tensor sea un mapeo *lineal* de vectores a reales es particularmente útil. Linealidad significa que, para vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  y escalares  $\alpha$  y  $\beta$ ,

$$\boxed{\mathbf{t}(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{t}(\mathbf{u}) + \beta \mathbf{t}(\mathbf{v}).}$$

Las expansiones para tensores de mayor rango son similares a ésta. Por ejemplo, para un tensor de segundo rango, podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} + \gamma \mathbf{w} + \epsilon \mathbf{z}) &= \alpha \mathbf{t}(\mathbf{u}, \gamma \mathbf{w} + \epsilon \mathbf{z}) + \beta \mathbf{t}(\mathbf{v}, \gamma \mathbf{w} + \epsilon \mathbf{z}) \\ &= \gamma \alpha \mathbf{t}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \alpha \epsilon \mathbf{t}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) + \beta \gamma \mathbf{t}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \beta \epsilon \mathbf{t}(\mathbf{v}, \mathbf{z}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

### 2.10.2. Componentes de tensores

Cuando se evalúa un tensor con combinaciones de bases y bases duales se generan sus componentes en una base particular. Por ejemplo, las componentes covariantes y contravariantes del tensor de rango uno (vector) en (2.23) en la base  $\mathbf{e}_a$  están dados por

$$\boxed{\mathbf{t}(\mathbf{e}_a) = t_a \quad \mathbf{t}(\mathbf{e}^a) = t^a.}$$

Ahora, consideremos un tensor de segundo rango  $\mathbf{t}(\cdot, \cdot)$ . Sus componentes contravariantes están dadas por

$$\boxed{\mathbf{t}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = t_{ab} \quad \text{y} \quad \mathbf{t}(\mathbf{e}^a, \mathbf{e}^b) = t^{ab}}$$

---

## CAPÍTULO 2. HERRAMIENTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

---

Para un tensor de rango dos, este conjunto de componentes no son necesariamente iguales. las componentes contravariantes, covariantes y mixtas de tensores de mayor rango se pueden obtener de manera análoga. Las componentes de un tensor en una base particular especifica la acción del tensor sobre cualesquiera que sean otros vectores en términos de *sus* componentes. Por ejemplo, usando la linealidad, vemos que

$$\mathbf{t}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{t}(u^a \mathbf{e}_a, v^b \mathbf{e}_b) = t_{ab} u^a v^b.$$

Para obtener este resultado, expresamos  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  en términos de sus componentes contravariantes. Podríamos haber escrito el vector en sus componentes contravariantes o covariantes. Por tanto, encontramos que hay numerosas expresiones equivalentes para  $\mathbf{t}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ :

$$\boxed{\mathbf{t}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = t_{ab} u^a v^b = t^{ab} u_a v_b = t_a{}^b = t^a{}_b u_a v^b.}$$

Esto ilustra la regla general en la que *los subíndices y superíndices de índices mudos pueden intercambiarse sin afectar el resultado*.

### 2.10.3. Simetrías de tensores

Se dice que un tensor de segundo rango es *simétrico* o *antisimétrico* si, para cada par de vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ ,

$$\boxed{\mathbf{t}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \pm \mathbf{t}(\mathbf{v}, \mathbf{u}),}$$

con los signos más para un tensor simétrico y menos para un tensor antisimétrico. Haciendo  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_a$  y  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_b$ , vemos que las componentes covariantes de un tensor simétrico o antisimétrico satisface  $t_{ab} = \pm t_{ba}$ . Usando diferentes combinaciones de bases y bases duales también vemos que, para cada tensor,  $t^{ab} = \pm t^{ba}$  y  $t_a{}^b = \pm t^b{}_a$ . Un tensor arbitrario de segundo rango siempre se puede descomponer de manera única en la suma de dos tensores, uno simétrico y otro antisimétrico. Por ejemplo, para componentes covariantes  $t_{ab}$  de algún tensor, siempre podremos escribir:

$$t_{ab} = \frac{1}{2}(t_{ab} + t_{ba}) + \frac{1}{2}(t_{ab} - t_{ba}),$$

el cual es claramente la suma de dos tensores simétricos y antisimétricos. Una notación frecuente usada para denotar las componentes de las partes simétricas y antisimétricas es

$$t_{(ab)} \equiv \frac{1}{2}(t_{ab} + t_{ba}) \quad \text{y} \quad t_{[ab]} \equiv \frac{1}{2}(t_{ab} - t_{ba}).$$

De una forma análoga, un tensor de rango  $-N$   $\mathbf{t}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots \mathbf{w})$  es simétrico o antisimétrico con respecto alguna permutación de los vectores de su argumento si su valor después de permutar sus argumentos es igual a más o menos respectivamente su valor original. Sin embargo, de un tensor de rango  $-N$ , siempre podremos obtener un tensor que sea simétrico con respecto a todas las permutaciones de los vectores de su argumentos

---

## CAPÍTULO 2. HERRAMIENTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

---

y uno que sea antisimétrico con respecto a todas las permutaciones. En términos de componentes covariantes, las partes simétricas y antisimétricas están dadas por

$$t_{(ab\dots c)} = \frac{1}{N!} (\text{Suma de todas las permutaciones de los índices } a, b, \dots, c)$$

$$t_{[ab\dots c]} = \frac{1}{N!} (\text{Suma y resta alternadas de todas las permutaciones de los índices } a, b, \dots, c)$$

Por ejemplo, las componentes covariantes de la parte *totalmente antisimétrica* de un tensor de tercer rango está dada por

$$t_{[abc]} = \frac{1}{3!} (t_{abc} - t_{acb} + t_{cab} - t_{cba} + t_{bca} - t_{bca})$$

Se puede extender esta notación para tensores que son simétricos o antisimétricos a permutaciones sólo con respecto a ciertos índices. Para ilustrar ésto, consideremos las componentes covariantes  $t_{abcd}$  de un tensor de cuarto rango. Expresiones típicas podrían ser

$$t_{(ab)cd} = \frac{1}{2} (t_{abcd} - t_{bacd}),$$

$$t_{a[b|d|d]} = \frac{1}{2} (t_{abcd} - t_{adcb}),$$

$$t_{(a|b|cd)} = \frac{1}{6} (t_{abcd} + t_{abdc} + t_{dbac} + t_{cbda} + t_{cbad})$$

$$t_{[ab](cd)} = \frac{1}{2} [t_{ab(cd)} - t_{ba(cd)}] \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (t_{abcd} + t_{abdc}) - \frac{1}{2} (t_{bacd} + t_{badc}) \right] \\ &= \frac{1}{4} [t_{abcd} + t_{abdc} - t_{bacd} - t_{badc}] \end{aligned} \tag{2.27}$$

las barras  $|$  nos sirven para excluir los símbolos con los cuales no hay simetría ni antisimetría.

### 2.10.4. El tensor métrico

El tensor más importante que uno puede definir sobre una variedad es el *tensor métrico*  $\mathbf{g}$  (primera forma fundamental). Esto define un mapeo lineal de dos vectores a uno real que es su producto punto, es decir

$$\boxed{g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.} \tag{2.28}$$

## CAPÍTULO 2. HERRAMIENTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

---

De esta definición, es claro que  $\mathbf{g}$  es un tensor de segundo rango. Y sus componentes covariantes y contravariantes están dadas por

$$\boxed{g_{ab} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b} \quad \text{y} \quad g^{ab} = \mathbf{g}(\mathbf{e}^a, \mathbf{e}^b) = \mathbf{e}^a \cdot \mathbf{e}^b, \quad (2.29)$$

Como vimos en el capítulo 4, la matriz  $[g^{ab}]$  contiene las componentes contravariantes del tensor métrico y es la matriz *inversa* de la matriz  $[g_{ab}]$  que contiene sus componentes covariantes. Las componentes mixtas de  $\mathbf{g}$  están dadas por

$$\boxed{\mathbf{g}(\mathbf{e}^b, \mathbf{e}_a) = \mathbf{g}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}^b) = \delta_a^b},$$

donde la última cantidad es resultado de la relación recíproca de los vectores base y sus duales.

### 2.10.5. Mapeo de tensores a tensores

Los tensores pueden verse no sólo como mapeos entre vectores y números reales, sino también como mapeos entre tensores y otros tensores. Consideremos por ejemplo, un tensor de tercer rango  $\mathbf{t}$ , pero sin llenar su argumento con vectores. Si, por ejemplo, colocamos en la última entrada algún vector fijo  $\mathbf{u}$ , tenemos el objeto

$$\mathbf{t}(\cdot, \cdot, \mathbf{u}). \quad (2.30)$$

¿Pero, qué tipo de objeto es éste? Si en las otras entradas pusiéramos vectores a este objeto, obtendríamos un número real. El objeto (2.30) es por sí mismo un tensor de segundo rango que podemos denotar por  $\mathbf{s}$ . El tensor de tercer rango  $\mathbf{t}$  ha “mapeado” al vector  $\mathbf{u}$  en un tensor de segundo rango  $\mathbf{s}$ . Las componentes covariantes de  $\mathbf{s}$  están dadas por

$$s_{ab} = \mathbf{s}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = \mathbf{t}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b, \mathbf{u}) = t_{abc}u^c$$

donde, en la última entrada, hemos expresado  $\mathbf{u}$  como  $u^c \mathbf{e}_c$ . Expresando este vector como  $u^c \mathbf{e}_c$ , obtenemos la expresión equivalente  $s_{ab} = t_{ab}{}^c u_c$ .

Para ver otro ejemplo de mapeo entre tensores, agreguemos en la primera y última entrada de  $\mathbf{t}$  con vectores fijos  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{u}$  respectivamente para obtener el objeto

$$\mathbf{t}(\mathbf{v}, \cdot, \mathbf{u}).$$

Vemos que este objeto es un tensor de primer rango (o vector), el cual podemos denotar por  $\mathbf{w}$ . Las componentes covariantes de  $\mathbf{w}$  son

$$w_b = \mathbf{w}(\mathbf{e}_b) = \mathbf{t}(\mathbf{v}, \mathbf{e}_b, \mathbf{u})$$

las cuales pueden escribirse en diferentes formas, es decir

$$w_b = t_{abc}v^a u^c = t^a{}_{bc}v_a u^c = t_{ab}{}^c v^a u_c = t^a{}_b{}^c v_a u_c$$

El número de índices libres en las expresiones es el rango del tensor resultante.

### 2.10.6. Operaciones con tensores

En el cálculo tensorial son de mucha importancia las *operaciones tensoriales*, es decir, operaciones sobre tensores que dan como resultado cantidades que también son tensores. Consideremos algunas operaciones elementales.

*Suma (y resta)*

Es claro de la definición de tensor que la suma y diferencia de dos tensores de rango  $N$  son también tensores de rango  $N$ . Por ejemplo, las componentes covariantes por decir la suma y resta

$$\boxed{\begin{aligned} s_{ab} &= \mathbf{s}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = \mathbf{t}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) + \mathbf{r}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = t_{ab} + r_{ab} \\ d_{ab} &= \mathbf{d}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = \mathbf{t}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) - \mathbf{r}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = t_{ab} - r_{ab} \end{aligned}} \quad (2.31)$$

Si  $\mathbf{t}$  es un tensor de rango  $N$ , entonces también  $\alpha\mathbf{t}$ , donde  $\alpha$  es un número real constante. Y claramente sus componentes serán todas multiplicadas por  $\alpha$ .

Producto exterior

El *producto tensorial o exterior* de dos tensores produce un tensor de mayor rango. El ejemplo más simple de un producto externo es el de dos vectores. Éste se define como un tensor de segundo rango, denotado por

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{p})\mathbf{v}(\mathbf{q}),$$

donde  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  son vectores del argumento (esta notación no se debe confundir con el producto cruz de dos vectores  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , el cual es un vector). Notemos que el producto externo no es conmutativo en general, así  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  y  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$  son tensores de segundo rango distintos. las componentes covariantes de  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  en alguna base está dada por

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{e}_a)\mathbf{v}(\mathbf{e}_b) = u_a v_b$$

El producto exterior de tensores de mayor rango es una generalización del producto exterior de dos vectores. Por ejemplo, el producto exterior de un tensor de segundo rango  $\mathbf{t}$  con un tensor de primer rango se define por

$$(\mathbf{t} \otimes \mathbf{s})(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \equiv \mathbf{t}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathbf{s}(\mathbf{r}). \quad (2.32)$$

Éste es un tensor de tercer rango, el cual podríamos llamarlo  $\mathbf{h}$ . Las componentes mixtas de este tensor, por ejemplo, están dadas por

$$h^a{}_{bc} = \mathbf{t}(\mathbf{e}^a, \mathbf{e}_b)\mathbf{s}(\mathbf{e}_c) = t^a{}_b s_c. \quad (2.33)$$



---

## CAPÍTULO 2. HERRAMIENTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

---

En general, el producto externo de un tensor de rango  $N$  con uno de rango  $M$  dará como resultado un tensor de rango  $M + N$ .

### *Contracción (y producto interior)*

La contracción de un tensor se realiza sumando sobre la base y la base dual en dos de sus argumentos, dando como resultado un tensor de menor rango. Tomemos como ejemplo un tensor de tercer rango  $\mathbf{h}$  y consideremos la cantidad

$$\boxed{q(\cdot) = \mathbf{h}(\mathbf{e}^a, \cdot, \mathbf{e}_a)}.$$

Claramente, este es un tensor de primer rango con componentes covariantes dadas por

$$q_b = \mathbf{h}(\mathbf{e}^a, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_a) = h^a_{ba}. \quad (2.34)$$

En términos de sus componentes, la contracción equivale a hacer un subíndice igual a otro superíndice y sumar, de acuerdo a la convención de la suma. En general, realizar una contracción sobre un tensor de rango  $N$  producirá un tensor de rango  $N - 2$ . La contracción puede ser combinada con multiplicación de tensores para obtener el *producto interno* de dos tensores. Por ejemplo, si  $h^a_{bc}$  estuviera dado por (2.33), entonces (2.34) se podría escribir como

$$q_b = \mathbf{t}(\mathbf{e}^a, \mathbf{e}_b) \mathbf{s}(\mathbf{e}_c) = t^a_b s_a,$$

el cual es el producto interno de dos tensores  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{s}$ . De forma alternativa, uno puede ver a  $q_b$  como una contracción de los tensores de tercer rango con componentes  $t^a_b s_c$ , el cual es el producto exterior  $\mathbf{t} \otimes \mathbf{s}$ .

Si dos tensores  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{s}$  son de rango 2 o menos entonces podemos denotar su producto interno sin confusión por  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{s}$ . Sin embargo, en general, tal producto interno *no* es conmutativo. Por ejemplo, si  $\mathbf{t}$  es un tensor de rango 2 y  $\mathbf{s}$  es de rango 1, entonces las componentes contravariantes de los vectores  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{s}$  y  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}$  son respectivamente

$$t^{ab} s_b \quad \text{y} \quad t^{ab} s_a.$$

### 2.10.7. Tensores como objetos geométricos

Hemos visto que los tensores de primer rango  $\mathbf{t}(\cdot)$  puede ser identificado como un vector. Las componentes covariantes y contravariantes de este vector en alguna base están dadas por

$$\mathbf{t}(\mathbf{e}_a) = t_a \quad \text{y} \quad \mathbf{t}(\mathbf{e}^a) = t^a.$$

## CAPÍTULO 2. HERRAMIENTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

---

Estamos pensando en un vector  $\mathbf{t}$  como un objeto geométrico que puede construirse por medio de una combinación lineal de vectores base,

$$\mathbf{t} = t^a \mathbf{e}_a = t_a \mathbf{e}^a. \quad (2.35)$$

Los tensores de mayor rango son generalizaciones del concepto de un vector y también se pueden ver como entidades geométricas. En alguna base, un tensor general puede ser expresado como una combinación lineal de una *base de tensores* construida por medio de sus vectores base y sus duales.

Consideremos el producto exterior  $\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b$  de dos vectores base de algún sistema de coordenadas. Las componentes contravariantes de este tensor de segundo rango *en esta base* son:

$$(\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b)(\mathbf{e}^c, \mathbf{e}^d) = \mathbf{e}_a(\mathbf{e}^c) \mathbf{e}_b(\mathbf{e}^d) = \delta_a^c \delta_b^d.$$

Supongamos que tenemos algunos tensores generales de segundo rango  $\mathbf{t}$ , cuyas componentes contravariantes en nuestra base son  $t^{ab}$ . Consideremos la cantidad  $t^{ab}(\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b)$ . Este es la suma de dos tensores de segundo rango, y por tanto, también debe ser de segundo rango. Si consideramos su acción sobre dos vectores base, encontramos que

$$\boxed{\mathbf{t} = t^{ab}(\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b).}$$

Considerando diferentes tensores base, contruidos por medio de otras combinaciones de las bases y bases duales de vectores, podemos también escribir  $\mathbf{t}$  de diferentes maneras:

$$\mathbf{t} = t_{ab}(\mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b) = t_a^{\phantom{a}b}(\mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}_b) = t^a_{\phantom{a}b}(\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}^b).$$

Esta idea se extiende para tensores de un rango mayor.

### 2.10.8. Tensores y transformación de coordenadas

La descripción de tensores como objetos geométricos se presta de forma natural a una discusión del comportamiento de las componentes de un tensor bajo una transformación de coordenadas  $x^a \rightarrow x'^a$  en una variedad. Como habíamos visto, hay una relación simple entre la base  $\mathbf{e}_a$  asociada al sistema de coordenadas  $x^a$  y la base  $\mathbf{e}'_a$  asociada al sistema de coordenadas  $x'^a$ . Encontramos que para cada punto  $P$  los dos conjuntos de vectores base están relacionados por

$$\mathbf{e}'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \mathbf{e}_b, \quad (2.36)$$

donde las derivadas parciales están evaluadas en el punto  $P$ . Una relación similar se satisface para los dos conjuntos de las bases duales:

$$\mathbf{e}'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \mathbf{e}^b. \quad (2.37)$$

## CAPÍTULO 2. HERRAMIENTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

---

Usando (2.36) y (2.37), podemos calcular cómo las componentes de cualquier tensor general debe transformarse bajo un cambio de coordenadas.

De la sección de cálculo vectorial sobre variedades, tenemos que las componentes contravariantes de un vector  $\mathbf{t}$  en la nueva base de coordenadas están dadas por

$$t'^a = \mathbf{t}(\mathbf{e}'^a) = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \mathbf{t}(\mathbf{e}^b) = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} t^b.$$

Similarmente, las componentes covariantes de  $\mathbf{t}$  están dadas por

$$t'_a = \mathbf{t}(\mathbf{e}'_a) = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \mathbf{t}(\mathbf{e}_b) = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} t_b.$$

Es importante recordar que las componentes no primadas y primadas describen el *mismo* vector  $\mathbf{t}$  e términos de *diferentes* vectores base, es decir,  $\mathbf{t} = t^a \mathbf{e}_a = t'^a \mathbf{e}'_a$ . El vector  $\mathbf{t}$  es una entidad geométrica que no depende de la elección del sistema de coordenadas.

Las propiedades de la transformación de las componentes de tensores de mayor rango se pueden encontrar de una manera similar. Por ejemplo, si  $\mathbf{t}$  es un tensor de segundo rango

$$\boxed{\begin{aligned} t'_{ab} &= \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} t_{cd}, \\ t'^{ab} &= \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} t^{cd}, \\ t'^a{}_b &= \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} t^c{}_d. \end{aligned}} \quad (2.38)$$

Una vez más, estas componentes describen el *mismo* tensor (el cual es una entidad geométrica) en términos de diferentes bases. Por ejemplo,

$$\mathbf{t} = t^{ab}(\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b) = t'^{ab}(\mathbf{e}'_a \otimes \mathbf{e}'_b).$$

En general, cuando se transforman las componentes de un tensor de un rango arbitrario, cada superíndice hereda una “matriz” de transformación  $\frac{\partial x'^a}{\partial x^c}$  y cada subíndice una matriz de transformación  $\frac{\partial x^c}{\partial x'^a}$ . Por ejemplo

$$t'^a{}_b{}_c{}^d = \frac{\partial x^d}{\partial x'^a} \frac{\partial x^e}{\partial x'^b} \frac{\partial x'^c}{\partial x^f} t^f{}_{de}. \quad (2.39)$$

Por tanto, *Una condición necesaria para que un conjunto de cantidades sean componentes de un tensor, es que se transformen del mismo modo que bajo un cambio de coordenadas* ver la sección 2.6.

### 2.10.9. Derivada covariante de un tensor

No es difícil convencerse que en un sistema de coordenadas arbitrario (distinto a las coordenadas cartesianas locales) la diferenciación de las componentes de un tensor general con respecto a las coordenadas *no* da como resultado componentes de otro tensor. Por ejemplo, consideremos la derivada de las componentes contravariantes  $v^a$  de un vector. Bajo un cambio de coordenadas tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'^a}{\partial x'^b} &= \frac{\partial x^c}{\partial x'^b} \frac{\partial v'^a}{\partial x^c} \\ &= \frac{\partial x^c}{\partial x'^b} \frac{\partial}{\partial x^c} \left( \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} v^d \right) \\ &= \frac{\partial x^c}{\partial x'^b} \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial v^d}{\partial x^c} + \frac{\partial x^c}{\partial x'^b} \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^c \partial x^d} v^d. \end{aligned} \quad (2.40)$$

La presencia del segundo término en el miembro derecho de (2.40) demuestra que las derivadas  $\partial v^a / \partial x^b$  no forman parte de las componentes de un tensor de segundo orden. Este término aparece debido a que la «matriz de transformación»  $[\partial x'^a / \partial x^b]$  cambia con la posición de en la variedad (esto no es válido en las coordenadas cartesianas locales, para las cuales el segundo término se cancela). Para evadir este problema, en la sección 2.6 habíamos introducido la derivada covariante de un vector,

$$\nabla_b v^a = \partial_b v^a + \Gamma^a_{cb} v^c \quad (2.41)$$

en términos del cual podemos escribir  $\partial_b \mathbf{v} = (\nabla_b v^a) \mathbf{e}_a$ . Usando las propiedades de transformación de la conexión, es fácil demostrar que  $\nabla_b v^a$  so componentes mixtas de un tensor de segundo rango, por definición. Denotamos este tensor de segundo rango por  $\nabla \mathbf{v}$ , el cual es formalmente el producto exterior del operador diferencial vectorial  $\nabla$  con el vector  $\mathbf{v}$ , se suele omitir el símbolo  $\otimes$  en los productos exteriores que contienen  $\nabla$ . En una base dada, tenemos  $\nabla = \mathbf{e}^a \partial_a$ , así, podemos escribir por ejemplo,

$$\boxed{\nabla \mathbf{v} = \mathbf{e}^a \partial_a \otimes v^b \mathbf{e}_b = \mathbf{e}^a \otimes \partial_a (v^b \mathbf{e}_b) = (\nabla_a v^b) \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}_b.}$$

Similarmente,  $\nabla_b v_a$  forma las componentes covariantes de este vector, es decir,  $\nabla \mathbf{v} = (\nabla_b v_a) \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b$ . No es difícil verificar que  $\nabla_b v^a$  y  $\nabla_b v_a$  satisfacen las condiciones requeridas de transformación para ser componentes de un tensor.

Podemos extender la idea de la derivada covariante de tensores de mayor rango. Por ejemplo, consideremos un tensor  $\mathbf{t}$  arbitrario de rango-2 y derivemos la forma de la derivada covariante  $\nabla_c t^{ab}$  de sus componentes contravariantes. Expresando  $\mathbf{t}$  en términos de sus componentes contravariantes, tenemos

$$\partial_c \mathbf{t} = (\partial_c t^{ab}) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b + t^{ab} \Gamma^d_{ac} \mathbf{e}_d \otimes \mathbf{e}_b + t^{ab} \mathbf{e}_a \otimes \Gamma^d_{bc} \mathbf{e}_d.$$

Intercambiando los índices mudos  $a$  y  $b$  en el segundo término del miembro derecho, y  $b$  y  $d$  en el tercer término, obtenemos

$$\partial_c \mathbf{t} = (\partial_c t^{ab} + \Gamma^a_{dc} + \Gamma^b_{dc} t^{ab}) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b,$$

## CAPÍTULO 2. HERRAMIENTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

---

donde la expresión en paréntesis es la derivada covariante requerida,

$$\nabla_c t^{ab} = \partial_c t^{ab} + \Gamma_{dc}^a t^{db} + \Gamma_{dc}^b t^{ad} \quad (2.42)$$

Usando (2.42), la derivada del tensor  $\mathbf{t}$  con respecto a  $x^c$  se puede escribir en términos de sus componentes contravariantes como

$$\partial_c \mathbf{t} = (\nabla_c t^{ab}) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b. \quad (2.43)$$

Podemos obtener resultados de manera similar para las derivadas covariantes de las componentes mixtas y covariantes del tensor de segundo-orden  $\mathbf{t}$ . Agrupando estos resultados, obtenemos

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla_c t^{ab} &= \partial_c t^{ab} + \Gamma_{dc}^a t^{db} + \Gamma_{dc}^b t^{ad}, \\ \nabla_c t^a_b &= \partial_c t^a_b + \Gamma_{dc}^a t^d_b - \Gamma_{bc}^d t^a_d, \\ \nabla_c t_{ab} &= \partial_c t_{ab} - \Gamma_{ac}^d t_{db} - \Gamma_{bc}^d t_{ad}. \end{aligned}} \quad (2.44)$$

Las posiciones de los índices en estas expresiones son muy sistemáticas. El último índice en cada conexión nos indica con respecto a qué es la derivada covariante. Para cada índice contravariante (superíndice) del miembro izquierdo podemos sumar un término sobre el miembro derecho que contenga un símbolo de Christoffel con un signo más, y para cada índice covariante (subíndice) agregar un término correspondiente con signo menos. Esto se extiende directamente para tensores con un número arbitrario de índices contravariantes y covariantes. Vemos que las cantidades  $\nabla_c t^{ab}$ ,  $\nabla_c t^a_b$ ,  $\nabla_c t_{ab}$  son las componentes del *mismo* tensor de tercer orden  $\nabla \mathbf{t}$  con respecto a diferentes bases de tensores, es decir

$$\nabla \mathbf{t} = (\nabla_c t^{ab}) \mathbf{e}^c \otimes \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b = (\nabla_c t^a_b) \mathbf{e}^c \otimes \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}^b = (\nabla_c t_{ab}) \mathbf{e}^c \otimes \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b$$

Un resultado particularmente importante, es que la derivada covariante del tensor métrico  $\mathbf{g}$  es cero en todos los puntos de la variedad, es decir

$$\boxed{\nabla \mathbf{g} = \mathbf{0}}$$

De forma alternativa, podemos escribir esto en términos de las componentes en cualquier base como

$$\boxed{\nabla g_{ab} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla g^{ab} = 0.} \quad (2.45)$$

Este resultado se sigue inmediatamente de comparar el tercer resultado en (2.44) con nuestra expresión  $\partial_c g_{ab} = \Gamma_{ac}^d g_{db} + \Gamma_{bc}^d g_{ad}$ , para la derivada parcial de la métrica en términos de la conexión afín. La expresión  $\partial_c g_{ab} = \Gamma_{ac}^d g_{db} + \Gamma_{bc}^d g_{ad}$  se cumple e incluso con torsión distinta de cero, y por tanto también el resultado 2.45<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>De hecho, para una variedad general con torsión distinta de cero, no es necesario que se cumpla (2.45), pues uno puede, en principio, definir la conexión afín y la métrica *independientemente*. Para llegar a  $\partial_c g_{ab} = \Gamma_{ac}^d g_{db} + \Gamma_{bc}^d g_{ad}$ , habíamos asumido implícitamente que la conexión afín era compatible con la métrica, y en tal caso (2.45) se satisface automáticamente.

---

## CAPÍTULO 2. HERRAMIENTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

---

El resultado de (2.45) tiene una consecuencia importante, que simplifica considerablemente las manipulaciones. *Podemos intercambiar el orden de subir o bajar índices y realizar la diferenciación covariante sin afectar el resultado.* Por ejemplo, consideremos las componentes contravariantes  $t^{ab}$  de algún tensor de segundo rango. Usando (2.45), podemos escribir

$$\nabla_c t^{ab} = \nabla_c (g^{bd} t^a_d) = (\nabla_c g^{bd}) t^a_d + g^{bd} (\nabla_c t^a_d) = g^{bd} (\nabla_c t^a_d).$$

Es decir, la derivada covariante obedece la regla estándar para la diferenciación de un producto.

### 2.10.10. Derivada intrínseca de un tensor a lo largo de una curva

Ya hemos visto ejemplos de campos vectoriales que están definidos en algún subespacio de la variedad, uno de ellos es el campo vectorial  $\mathbf{u}$  definido solo a lo largo de alguna curva de  $x^a(u)$  en la variedad (como el spin  $\mathbf{s}(\tau)$  de una partícula a lo largo de su línea de mundo el espacio-tiempo). De una forma similar, un campo tensorial  $\mathbf{t}(u)$  podría estar definido sólo a lo largo de alguna curva  $\mathcal{C}$ . Ahora, centrémonos en cómo calcular la derivada de un tensor con respecto a el parámetro  $u$  a lo largo de la curva. Empecemos expresando el tensor en cualquier punto a lo largo de la curva en términos de sus componentes contravariantes,

$$\mathbf{t}(u) = t^{ab}(u) \mathbf{e}_a(u) \otimes \mathbf{e}_b(u),$$

donde  $\mathbf{e}_a(u)$  son los vectores base en el punto de la curva que corresponde al parámetro con valor  $u$ . la derivada de  $\mathbf{t}$  a lo largo de la curva  $\mathcal{C}$  está dada por

$$\frac{d\mathbf{t}}{du} = \frac{dt^{ab}}{du} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b + t^{ab} \frac{d\mathbf{e}_a}{du} \otimes \mathbf{e}_b + t^{ab} \mathbf{e}_a \otimes \frac{d\mathbf{e}_b}{du}$$

Usando la regla de la cadena para reescribir las derivadas de los vectores base, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{t}}{du} = \frac{dt^{ab}}{du} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b + t^{ab} \frac{dx^c}{du} \frac{\partial \mathbf{e}_a}{\partial x^c} \otimes \mathbf{e}_b + t^{ab} \mathbf{e}_a \otimes \frac{dx^c}{du} \frac{\partial \mathbf{e}_b}{\partial x^c}$$

Finalmente, escribiendo las derivadas parciales de la base de vectores en términos de la conexión y reetiquetando índices, encontramos que

$$\frac{d\mathbf{t}}{du} = \left( \frac{dt^{ab}}{du} + \Gamma_{dc}^a t^{db} \frac{dx^c}{du} + \Gamma_{dc}^b t^{ad} \frac{dx^c}{du} \right) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b. \quad (2.46)$$

El término entre paréntesis se conoce como la derivada *intrínseca* (o absoluta) de las componentes  $t^{ab}$  a lo largo de la curva  $\mathcal{C}$  y se denota por

$$\boxed{\frac{Dt^{ab}}{Du} = \frac{dt^{ab}}{du} + \Gamma_{dc}^a t^{db} \frac{dx^c}{du} + \Gamma_{dc}^b t^{ad} \frac{dx^c}{du}}$$

---

## CAPÍTULO 2. HERRAMIENTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

---

Se pueden obtener resultados similares para las componentes covariantes y mixtas del tensor  $\mathbf{t}$ . Por ejemplo, la derivada de  $\mathbf{t}$  a lo largo de la curva se puede escribir como

$$\frac{d\mathbf{t}}{du} = \frac{Dt^{ab}}{Du} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b = \frac{Dt_{ab}}{Du} \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b = \frac{Dt_b^a}{Du} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}^b$$

El método se puede extender para tensores de mayor rango.

De una manera similar a los vectores, se dice que un tensor es de transporte paralelo a lo largo de la curva  $\mathcal{C}$  si  $\frac{d\mathbf{t}}{du} = \mathbf{0}$  o, equivalentemente, en términos de sus componentes, si  $Dt^{ab}/Du = 0$ .

Una forma conveniente de recordar la forma de la derivada intrínseca es procurar que el tensor  $\mathbf{t}$  esté definido a través (o de alguna región) de la variedad, es decir, no sólo a lo largo de la curva  $\mathcal{C}$ . Si este fuese el caso, podríamos diferenciar  $\mathbf{t}$  con respecto a las coordenadas  $x^a$ . Entonces tendríamos

$$\frac{dt^{ab}}{du} = \frac{\partial t^{ab}}{\partial x^c} \frac{dx^c}{du}.$$

Sustituyendo ésto en (2.46), podríamos factorizar  $dx^c/du$  y reconocer el otro factor como la derivada covariante  $\nabla_c t^{ab}$ . Entonces, podríamos escribir

$$\frac{Dt^{ab}}{Du} = \nabla_c t^{ab} \frac{dx^c}{du}, \quad (2.47)$$

con expresiones similares para la derivada intrínseca de sus componentes. Es importante tomar en cuenta que si  $\mathbf{t}$  está sólo definido a lo largo de la curva  $\mathcal{C}$ , (2.47) no está definido de manera formal y sirve sólo como arreglo para recordar fácilmente.

### 2.10.11. Electromagnetismo

Cuando la teoría especial de la relatividad fue construida, solo dos fuerzas eran conocidas, la de gravedad y la electromagnética. Como se mencionaba en el capítulo 1, fue el electromagnetismo quien dio origen al desarrollo de la relatividad especial. Discutamos el electromagnetismo a detalle; en particular su formulación relativista. Nuestra principal guía es derivar las ecuaciones tensoriales en el espacio-tiempo de Minkowski. Esto hace posible expresar la teoría en una forma que sea independiente del sistema de coordenadas que se use. Veremos que *una teoría consistente del electromagnetismo se sigue de decir que existe una 4-fuerza pura que depende linealmente de la 4-velocidad y también de una cierta propiedad de una partícula, es decir, su carga  $q$ .*

### 2.10.12. La fuerza electromagnética sobre una carga en movimiento

En algún sistema de referencia inercial  $S$ , la 3-fuerza sobre una partícula de carga  $q$  moviéndose en un campo electromagnético es

$$\vec{f} = q \left( \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right),$$

donde  $\vec{u}$  es la 3-velocidad de la partícula en  $S$ . Los campos 3-vectoriales  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son los campos eléctrico y magnético medidos en  $S$ . Esta ecuación sugiere que para la formulación relativista deberíamos escribir una ecuación de tensor en un espacio-tiempo tetradimensional en el cual la 4-fuerza electromagnética dependa linealmente de la 4-velocidad de la partícula  $\vec{u}$ . La ecuación toma la forma

$$\mathbf{f} = q\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \quad (2.48)$$

donde  $\mathbf{F}$  debe ser un tensor de segundo rango para generar una 4-fuerza a partir de una 4-velocidad. Llamaremos  $\mathbf{F}$  el *campo tensorial electromagnético*. El escalar  $q$  es una propiedad de la partícula que determina la intensidad de la fuerza electromagnética sobre él (es decir, sobre la carga).

Si etiquetamos puntos del espacio-tiempo con algún sistema de coordenadas  $x^\mu$ , podemos expresar (2.48) con sus componentes como

$$f_\mu = qF_{\mu\nu}u^\nu,$$

donde  $F_{\mu\nu}$  son las componentes covariantes de  $\mathbf{F}$  en nuestro sistema de coordenadas. Para que una partícula en reposo no se altere por la acción de la fuerza electromagnética, se requiere que sea una fuerza *pura*, de modo que *para cualquier 4-velocidad*  $\mathbf{u}$  se tenga que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{f} = 0$ . En forma de componentes ésto es

$$f_\mu u^\mu = qF_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0,$$

lo cual implica que el campo tensorial electromagnético debe ser antisimétrico, es decir

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}.$$

Las componentes contravariantes de  $\mathbf{F}$  están dadas por

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}F_{\sigma\rho},$$

donde  $g^{\mu\nu}$  son las componentes contravariantes del tensor métrico in el sistema de coordenadas. Dado que  $g^{\mu\nu}$  es simétrico, es claro que  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ .

### 2.10.13. La 4-densidad de corriente

Hasta ahora, hemos encontrado sólo la forma relativista de la fuerza electromagnética sobre una partícula puntual con carga  $q$  y una 4-velocidad  $\mathbf{u}$ , en términos de un tensor antisimétrico e indeterminado de segundo rango  $\mathbf{F}$ . Queremos construir las ecuaciones de campo de la teoría que determinen el tensor electromagnético de campo  $\mathbf{F}(x)$  en cualquier punto del espacio-tiempo en términos de las cargas y corrientes. Para construir las ecuaciones de campo, debemos encontrar una forma apropiada relativista (o *covariante*) de expresar el *el término fuente*. Necesitamos identificar el 4-tensor, definido en cada evento del espacio-tiempo que actúa como fuente del campo electromagnético.



## CAPÍTULO 2. HERRAMIENTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Consideremos una distribución de carga general dependiente del tiempo. En cada evento  $P$  del espacio-tiempo podemos caracterizar la distribución completamente dando una densidad de carga  $\rho$  y una 3-velocidad  $\vec{u}$  medidas en un sistema de referencia inercial. Por simplicidad, consideremos el fluido en un sistema  $S$  en el que  $\vec{u} = \vec{0}$  en  $P$ . En este sistema, la densidad de carga (propia) está dada por  $\rho_0 = qn_0$ , donde  $q$  es la carga de cada partícula y  $n_0$  es el número de partículas por unidad de volumen. En algún otro sistema  $S'$ , moviéndose con rapidez  $v$  con respecto a  $S$ , el volumen contiene un número fijo de partículas sufrirá una contracción de Lorentz a lo largo de la dirección de movimiento. Por tanto, en  $S'$  la densidad de partículas será  $n' = \gamma_v n_0$ , de donde tenemos

$$\rho' = \gamma_v \rho_0.$$

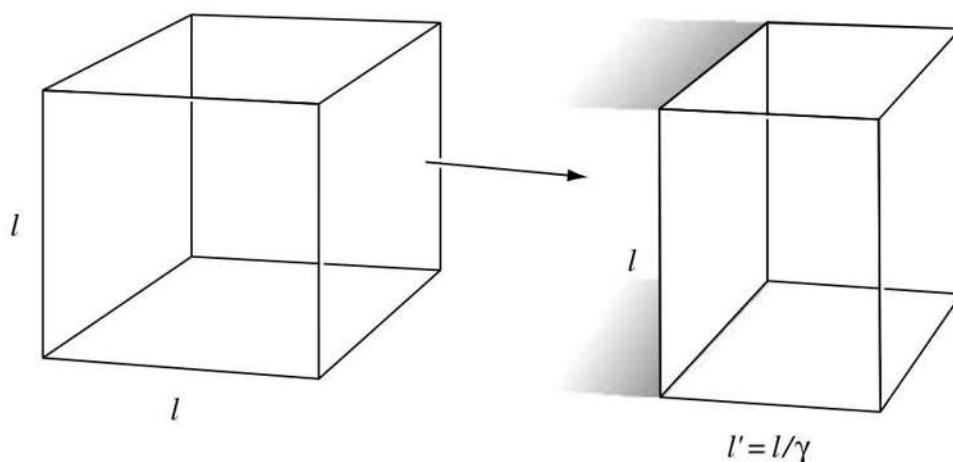


Figura 2.7: Contracción de Lorentz de un elemento de fluido en la dirección del movimiento. Fuente [35].

Vemos que la densidad de carga  $\rho_0$  es un 4-escalar pero se transforma como la 0-componente de un 4-vector. Esto sugiere que el término fuente en las ecuaciones del campo electromagnético debería ser un 4-vector. En cada punto del espacio-tiempo, la elección será

$$\mathbf{j}(x) = \rho_0(x)\mathbf{u}(x),$$

donde  $\rho_0(x)$  es la densidad de carga propia del fluido (es decir, la medida por un observador que se mueve con el flujo local) y  $\mathbf{u}(x)$  es su 4-velocidad. El cuadrado del tamaño de la 4-densidad de corriente  $\mathbf{j}(x)$  en cualquier evento es

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \rho_0^2 c^2.$$

---

## CAPÍTULO 2. HERRAMIENTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

---

En un sistema de referencia inercial  $S$  las componentes de la 4-densidad de corriente  $\mathbf{j}$  son

$$[j^\mu] = \rho_0 \gamma_u(c, \vec{u}) = (c\rho, \vec{j}),$$

donde  $\rho$  es la densidad de carga medida en  $S$  y  $\vec{j}$  es la 3-densidad de corriente relativista en  $S$ . Vemos que  $c^2\rho^2 - j^2$  es invariante bajo las transformaciones de Lorentz, donde  $j^2 = \vec{j} \cdot \vec{j}$ .

### 2.11. Las ecuaciones de campo electromagnético

La forma más simple para relacionar el tensor de campo  $\mathbf{F}$  de segundo rango con el 4-vector  $\mathbf{j}$  es contraer  $\mathbf{F}$  con algún otro 4-vector. Debido a que no hay más 4-vectores físicos asociados con la teoría, el único otro 4-vector que las ecuaciones de campo pueden contener es el 4-gradiente  $\nabla$ . Las ecuaciones de campo toman la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = k\mathbf{j}, \quad (2.49)$$

donde  $k$  es una constante relacionada con las unidades elejidas. Para que los resultados sean más familiares, trabajemos con coordenadas cartesianas inerciales  $x^\mu$  correspondiente a algún sistema de referencia inercial  $S$ . Eb tal sistema, la derivada covariante se reduce a la derivada parcial, así, podemos escribir (2.49) en forma de componentes como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = k j^\nu. \quad (2.50)$$

Podemos usar esta ecuación para obtener la ley de la conservación de la carga. Las ecuaciones de campo están dadas por (2.50), pero hay *seis* componentes independientes en  $F^{\mu\nu}$  y sólo *cuatro* ecuaciones de campo. Esto sugiere que  $\mathbf{F}$  se podría construir por un 4-vector 'potencial'  $\mathbf{A}$ . En un sistema inercial de coordenadas cartesianas  $x^\mu$ , escribamos

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.51)$$

$F_{\mu\nu}$  es antisimétrico por construcción y contiene sólo cuatro campos independientes  $A_\mu$ . En este caso, requerimos sólo *dos* ecuaciones de campo

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= k j^\nu, \\ \partial_\sigma F_{\mu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} &= 0 \end{aligned}$$

(2.52)

donde la segunda de éstas se puede derivar directamente de (2.51). Usando la antisimetría, la segunda ecuación puede escribirse de una forma más corta como  $\partial_{[\sigma} F_{\mu\nu]} = 0$ . La constante  $k$  se puede determinar por medio de las ecuaciones estándares de Maxwell. En el Sistema Internacional de unidades tenemos que  $k = \mu_0$ , donde  $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ .

## 2.12. Campos Electrico y Electromagnético en sistemas de referencia inerciales

Aún no hemos identificado las componentes de  $\mathbf{F}$  (o  $\mathbf{A}$ ) con los campos electrico y magnético 3-vectorial  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  observados en un sistema inercial  $S$ . Queremos nombrar las componentes de  $\mathbf{A}$  de una manera que de resultado a las ecuaciones 3-vector en las que  $S$  describa la física correctamente en términos de los 3-vectores definidos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . En algún sistema inercialde coordenadas  $S$ , las componentes de  $\mathbf{A}$  toman la forma

$$[A^\mu] = \left( \frac{\phi}{c}, \vec{A} \right),$$

donde  $\phi$  es el potencial electrostático y  $\vec{A}$  es el potencial vectorial tridimensional. En términos de  $\phi$  y de  $\mathbf{A}$ , los campos eléctrico y magnético en  $S$  están dados por

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{y} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (2.53)$$

De las expresiones (2.53) y (2.51) tenemos

$$E^i = -\delta^{ij} \partial_j \phi - c \partial_0 A^i = -c \delta^{ij} (\partial_j A^0 - \partial_0 A_j) = -c \delta^{ij} F_{j0},$$

donde hemos usado el hecho de que  $A^0 = \eta^{0\nu} A_\nu = A_0$ . También tenemos

$$B^1 = \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 = \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3 = F_{32}$$

donde hemos usado  $A^i = \eta^{i\nu} A_\nu = -A_i$ . Resultados similares se cumplen para  $B^2$  y  $B^3$ . Por tanto, las componentes covariantes de  $\mathbf{F}$  en  $S$  están dadas por

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & E^1/c & -E^2/c & E^3/c \\ -E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3/c & -B^2 & B^1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En general, tenemos libertad de etiquetar puntos del espacio-tiempo de Minkowski usando un sistema arbitrario de coordenadas  $x^\mu$ . Como se mostró en (2.52), las ecuaciones de campo electromagnético en el sistema inercial caetesiano, en términos de  $\mathbf{F}$  están dadas por

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= k j^\nu, \\ \partial_\sigma F_{\mu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} &= 0. \end{aligned}$$

En tal sistema de coordenadas, la derivada parcial  $\partial_\mu$  es idéntica a la derivada covariante  $\nabla_\mu$ , así, podemos escribir estas ecuaciones como

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla_\mu F^{\mu\nu} &= k j^\nu, \\ \nabla_\sigma F_{\mu\sigma} + \nabla_\nu F_{\sigma\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\sigma} &= 0 \end{aligned}} \quad (2.54)$$

## CAPÍTULO 2. HERRAMIENTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

---

Estas nuevas ecuaciones son ecuaciones totalmente tensoriales covariantes, y por tanto *si son validas en un sistema de coordenadas, entonces son válidas en todos los sistemas de coordenadas*. ¡Las ecuaciones (2.54) da las ecuaciones del campo electro-magnético en un sistema de coordenadas arbitrario!



# Capítulo 3

## Relatividad General: Solución a las Ecuaciones de Einstein

### 3.1. El principio de equivalencia y la curvatura del espacio-tiempo

Ahora, tenemos las herramientas para derivar una formulación relativista del electromagnetismo para comenzar nuestra formulación de teoría relativista de la gravedad o de relatividad general.

#### 3.1.1. Gravedad newtoniana

Empecemos nuestra discusión de la gravedad considerando la descripción de la fuerza gravitacional en la teoría clásica no relativista de Newton. En la teoría newtoniana, la fuerza gravitacional  $\vec{f}$  sobre una partícula de prueba de masa *gravitacional*  $m_G$  en alguna posición es

$$\vec{f} = m_G \vec{g} = -m_G \vec{\nabla} \Phi,$$

donde  $\vec{g}$  es el campo gravitacional derivado del *potencial gravitacional*  $\Phi$  en esa posición. El potencial gravitacional queda determinado por la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \tag{3.1}$$

donde  $\rho$  es la *densidad gravitacional de materia* y  $G$  es la constante gravitacional de Newton. Ésta es la ecuación de campo de la gravedad newtoniana.

La ecuación (3.1) *no* es consistente con la relatividad especial. No hay una dependencia explícita del tiempo, lo cual significa que el potencial  $\Phi$  (y por tanto la fuerza gravitacional sobre una partícula) responde *instantáneamente* a una perturbación de la densidad de materia  $\rho$ ; esto viola la condición de que las señales no pueden propagarse más rápido que  $c$ . Uno puede pensar, que ésto se puede remediar notando

## CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

que el operador laplaciano  $\nabla^2$  en (3.1) es equivalente menos el operador d'Álembertiano  $\square^2$  en el límite  $c \rightarrow \infty$ , quedando modificada la ecuación de campo

$$\square^2 \Phi = -4\pi G \rho.$$

Sin embargo, esta ecuación no nos genera una teoría relativística consistente. Sigue sin tener covariancia de Lorentz, por tanto la densidad de materia  $\rho$  no se transforma como un escalar de Lorentz.

Además de la incompatibilidad de la gravedad newtoniana con la relatividad especial, hay una segunda diferencia fundamental entre las fuerzas gravitacional y electromagnética. La ecuación de movimiento de una partícula de masa *inercial*  $m_I$  en un campo gravitacional está dado por

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{m_G}{m_I} \nabla \Phi$$

Se ha comprobado experimentalmente que el cociente  $m_G/m_I$  en la ecuación de movimiento es *la misma para todas las partículas*. Con una elección apropiada de unidades uno puede reacomodar de tal manera que el cociente sea igual a la unidad. Mientras que el cociente  $q/m_I$  en la ecuación de movimiento de una partícula cargada en un campo electromagnético no es la misma para todas las partículas. De (3.1.1), vemos que la trayectoria de una partícula en un campo gravitacional es *independiente de la naturaleza de la partícula*.

Esta equivalencia de masas inercial y gravitacional (las cuales nos permitan referirnos simplemente a la masa), es una coincidencia *verdaderamente extraordinaria* en la teoría newtoniana. En esta teoría, no hay una razón que justifique las cantidades que determinan la magnitud de la fuerza gravitacional sobre una partícula debe ser igual a la cantidad que determina la 'resistencia de la partícula a una fuerza aplicada en general. Aparece como un resultado experimental aislado, el cual ha sido verificado con una exactitud de al menos  $10^{-11}$ .

### 3.1.2. El principio de equivalencia

El fundamento de la teoría de la relatividad general es el principio de equivalencia:

*Un campo gravitacional homogéneo es completamente equivalente a un sistema de referencia uniformemente acelerado.*

Este principio surge en la mecánica newtoniana debido a la manifiesta identidad entre masa inercial y masa gravitatoria. En un campo gravitatorio uniforme, todos los objetos caen con la misma aceleración  $\mathbf{g}$  independientemente de su masa, ya que la fuerza gravitatoria es proporcional a la masa (gravitatoria) mientras que la aceleración varía inversamente con la masa (inercial). Supongamos un compartimiento situado en el espacio, alejado de toda materia y que se encuentra sometido a una aceleración  $\mathbf{a}$ , tal como se muestra en la figura 5.1. No se puede realizar ningún experimento mecánico

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

en el *interior* del compartimiento que permita distinguir si éste se encuentra acelerando en el espacio o se encuentra en reposo (o moviéndose con velocidad uniforme) en presencia de un campo gravitatorio uniforme  $\mathbf{g} = -\mathbf{a}$ . Si dentro del compartimiento se se sueltan algunos objetos, caerán hacia el suelo con una aceleración  $\mathbf{g} = -\mathbf{a}$ . Si una persona estuviera sobre una balanza de muelle, leería que su “peso” tiene un valor  $ma$

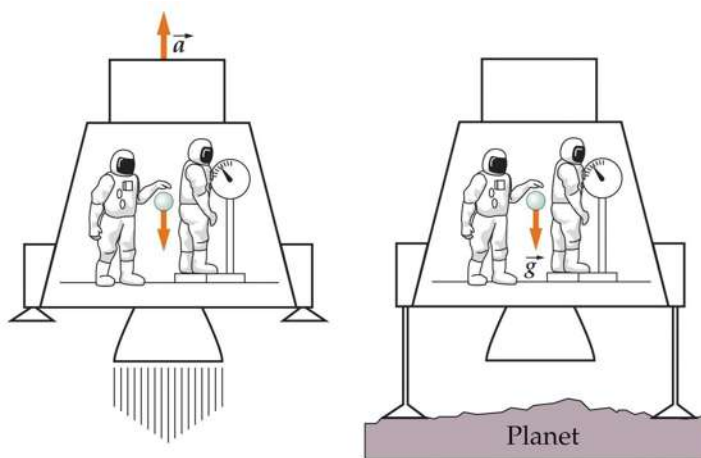


Figura 3.1: Los resultados de los experimentos en un sistema de referencia uniformemente acelerado no pueden distinguirse de los realizados en un campo gravitatorio uniforme si la aceleración  $\mathbf{a}$  y el campo gravitacional  $\mathbf{g}$  tienen el mismo módulo. Fuente [35].

Einstein asumió que el principio de equivalencia se aplica a todas las ramas de la física y no sólo en la mecánica. Asumió que no podía existir ningún experimento que distinguiese entre un movimiento uniformemente acelerado y la presencia de un campo gravitatorio.

Una consecuencia del principio de equivalencia –la desviación de un haz de luz en un campo gravitatorio– fue una de las primeras en comprobarse experimentalmente. En una región en la que no exista campo gravitacional, un haz de luz se propagará siguiendo una línea recta a velocidad  $c$ . El principio de equivalencia nos dice que una región sin campo gravitatorio sólo se da en un compartimiento que se encuentre en caída libre. En la figura se muestra un haz de luz que entra en un compartimiento que se está acelerando en respecto a un sistema de referencia que está en caída libre. Se muestran las diferentes posiciones del compartimiento para intervalos de tiempo iguales. Como el compartimiento se está acelerando, la distancia que recorre en cada intervalo de tiempo aumenta con el tiempo. Por lo tanto la trayectoria del haz de luz observada en el interior del compartimiento es una parábola. Pero de acuerdo con el principio de equivalencia, no es posible distinguir un compartimiento en aceleración de otro con velocidad uniforme en un campo gravitatorio uniforme. Por lo tanto concluimos que un haz de luz, del mismo modo que un objeto con masa, se acelerará en un campo



### **CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN**

---

gravitatorio.

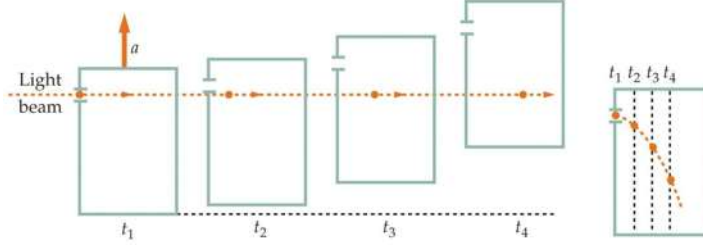


Figura 3.2: Haz de luz moviéndose en línea recta a través de un compartimiento que experimenta una aceleración uniforme. La posición del haz se muestra a intervalos de tiempo  $t_1$ ,  $t_2$  y  $t_4$ . En el sistema de referencia del compartimiento la luz describe una trayectoria parabólica como lo haría una pelota si fuera lanzada horizontalmente. Para dar mayor énfasis los desplazamientos verticales están muy exagerados. Fuente [35].

### 3.1.3. La gravedad como la curvatura del espacio-tiempo

Estas observaciones le permitieron a Einstein hacer una propuesta que y asu vez tomar medida para una descripción de la gravedad e incorporar de una forma natural el principio de equivalencia (y consecuentemente la equivalencia de las masas inercial y gravitacional). La propuesta de Einstein fue que *la gravedad no debería ser considerada como una fuerza en el sentido convencional sino como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, esta curvatura será inducida por la presencia de materia*. Esta es la idea central de la teoría de la relatividad general.

Si la gravedad se considera como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo mismo, y no como la acción de una 4-fuerza  $\mathbf{f}$  definida sobre la variedad, entonces la ecuación de movimiento de una partícula bajo la influencia de la gravedad debe ser la de una partícula libre en el espacio tiempo curvado, es decir

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{0},$$

donde  $\mathbf{p}$  es el 4-momento de la partícula y  $\tau$  es el tiempo propio medido a lo largo de la línea de mundo de la partícula. Entonces, *la línea de mundo de una partícula en caída libre bajo la gravedad es una geodésica en el espacio-tiempo curvado*.

El principio de equivalencia restringe la geometría posible del espacio-tiempo curvado a ser *pseudo riemanniano*. El significado geométrico del principio de equivalencia es que se requiere que en cada evento  $P$  en el variedad espacio-tiempo debemos de poder definir un sistema de coordenadas  $X^\mu$  tal que, *en la vecindad local de  $P$* , el elemento de línea del espacio-tiempo toma la forma

$$ds^2 \approx \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu,$$

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

donde la igualdad se vuelve exacta en el evento  $P$ . De la ecuación geodésica, cuyo sistema de coordenadas es de la trayectoria de una partícula “libre”, es decir, una moviéndose bajo la influencia de la gravedad, alrededor del evento  $P$  está dada por

$$\frac{d^2 X^i}{dT^2} \approx 0,$$

donde  $i = 1, 2, 3$  y  $X^0 = cT$  (y, una vez más, esto se vuelve igualdad justo en  $P$ ). Entonces, alrededor de  $P$  las coordenadas  $X^\mu$  definen un sistema cartesiano local e inercial, en el cual las leyes de la relatividad especial se cumplen localmente. Para construir tal sistema, el espacio-tiempo debe ser una variedad pseudo-riemanniana (la cual es curvada y tetradimensional). Para dicha variedad en un sistema de coordenadas  $x^\mu$  el elemento de línea toma la forma general

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

#### 3.1.4. Coordenadas locales inerciales

La curvatura del espacio-tiempo significa que no es posible encontrar coordenadas en las cuales la métrica  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  en todos los puntos de la variedad. Luego, no es posible definir sistemas cartesianos inerciales globalmente como se podría en el espacio-tiempo pseudo-euclidiano de Minkowski. Como alternativa, estamos forzados a usar sistemas de coordenadas arbitrarios  $x^\mu$  para etiquetar eventos en el espacio-tiempo, y estas coordenadas usualmente no tienen significados físicos. Frecuentemente  $x^0$  es la coordenada temporal y  $x^i$  ( $i=1,2,3$ ) son espaciales. Esta asignación de coordenadas no es necesaria, sin embargo, es útil para definir coordenadas nulas. En cualquier caso, las coordenadas arbitrarias  $x^\mu$  no necesita tener una interpretación física. Sin embargo, según lo exigido por el principio de equivalencia, los problemas de significado físico siempre se pueden resolver transformando, cualquier evento  $P$  del espacio-tiempo curvado, a un *sistema de coordenadas local e inercial*  $X^\mu$ , el cual, en una región limitada del espacio-tiempo en  $P$ , corresponde a caída libre, sistema cartesiano sobre un intervalo de tiempo pequeño. matemáticamente esto corresponde a construir para el evento  $P$  un sistema de coordenadas  $X^\mu$  tal que

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu} \quad \text{y} \quad (\partial_\sigma g_{\mu\nu})_P = 0. \quad (3.2)$$

Ésto también significa que  $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}(P) = 0$  y que la base de vectores alrededor del evento  $P$  forman un conjunto ortonormal, es decir

$$e_\mu(P) \cdot e_\nu(P) = \eta_{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

De hecho, hay un número infinito de sistemas de coordenadas locales e inerciales en  $P$ , y todas están relacionadas entre sí por transformaciones de Lorentz. En otras palabras, si un sistema de coordenadas  $X^\mu$  satisface las condiciones (3.2), y por tanto la condición (3.3), entonces también lo será el sistema de coordenadas

$$X'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} X^\nu,$$

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

donde  $\Lambda^\mu{}_\nu$  define una transformación de Lorentz. Sistemas locales cartesianos de referencia en caída libre del evento  $P$  están relacionados entre sí por boosts, rotaciones espaciales o combinaciones de las dos. Para cualquiera de estos sistemas de coordenadas, el vector base temporal  $\mathbf{e}_0(P)$  es simplemente el vector 4-velocidad  $\hat{\mathbf{u}}(P)$  normalizado donde el origen del sistema de referencia es el evento  $P$ , y los tres vectores espaciales mutuamente ortogonales  $\mathbf{e}_i(P)$  ( $i=1, 2, 3$ ) definen la orientación de los ejes espaciales del sistema de referencia.

Para puntos cerca de  $P$ , la métrica en un sistema de coordenadas local e inercial  $X^\mu$  (cuyo origen es  $P$ ) está dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})_P X^\sigma X^\rho + \dots$$

Los tamaños de las segundas derivadas  $(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})$  determinan la región en la que la aproximación  $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$  es válida.

## 3.2. Observadores en un espacio-tiempo curvado

Un observador describirá una línea de tiempo  $x^\mu(\tau)$  a través del espacio-tiempo, expresada en algún sistema de coordenadas arbitrario, donde  $\tau$  es el tiempo propio del observador. Una idealización de su laboratorio local es un sistema de referencia de cuatro vectores ortogonales  $\hat{\mathbf{e}}_\alpha(\tau)$  que satisfacen

$$\hat{\mathbf{e}}_\alpha(\tau) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\beta(\tau) = \eta_{\alpha\beta},$$

los cuales son llevados consigo a lo largo de su línea de mundo (estos vectores pueden, en general, no estar totalmente relacionados a sus vectores base  $\mathbf{e}_\mu$  del sistema de coordenadas que se esté usando para etiquetar los puntos del espacio-tiempo, apesar de que siempre podemos expresar un conjunto de vectores en términos de otro). En particular, en cualquier punto a lo largo de su línea de mundo, el vector  $\hat{\mathbf{e}}_0(\tau)$  coincide con el vector 4-velocidad  $\hat{\mathbf{u}}(\tau) = \mathbf{u}(\tau)/c$  del observador. Similarmente, la evolución de los vectores espaciales  $\hat{\mathbf{e}}_i(\tau)$  a lo largo de la línea de mundo refleja las diferentes formas en las cuales su laboratorio local puede estar girando o cayendo. *Cantidades medidas en este laboratorio corresponden a proyecciones de los 4-vectores y 4-tensores sobre este sistema de referencia ortonormal.*

Si el observador tiene una 4-aceleración  $\mathbf{a}(\tau) = d\mathbf{u}/d\tau$  sin rotación, la tetra base de vectores son Fermi-Walker-transportados a lo largo de la línea de mundo del observador:

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_\mu}{d\tau} = \frac{1}{c^2} [(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\mu) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\mu) \mathbf{u}]. \quad (3.4)$$

Esta expresión se satisface igualmente en un espacio-tiempo curvado. Un caso importante es el de un observador en caída libre (sin rotación), es decir, uno que se mueve sólo bajo la influencia de la gravedad. Los vectores  $\hat{\mathbf{e}}_\alpha(\tau)$  definen lo que es llamado sistema de referencia de caída libre (visto en la sección del principio de equivalencia).

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

El vector temporal  $\mathbf{e}_0$  cambia con el tiempo propio a lo largo de la línea de mundo de acuerdo a

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_0}{d\tau} = \mathbf{0}.$$

En otras palabras,  $\hat{\mathbf{e}}_0$  es transportado paralelamente a lo largo de la línea de mundo y por tanto, la 4-aceleración  $\mathbf{a}$  es cero. En este caso vemos de (3.4) que el transporte de Fermi-Walker se reduce al transporte paralelo. Los vectores espaciales del sistema  $\hat{\mathbf{e}}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) son también transportados paralelamente a lo largo de la geodésica, de modo que

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_i}{d\tau} = \mathbf{0}.$$

Por tanto, en un sistema de coordenadas arbitrario  $x^\mu$ , las componentes  $(\hat{\mathbf{e}}_\alpha)^\mu(\tau) = \hat{\mathbf{e}}_\alpha(\tau) \cdot \mathbf{e}^\mu$  de cualquier vector satisfacen

$$\frac{D(\hat{\mathbf{e}}_\alpha)^\mu}{D\tau} = \frac{d(\hat{\mathbf{e}}_\alpha)^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} (\hat{\mathbf{e}}_\alpha)^\nu u^\sigma = 0.$$

Esta ecuación es extremadamente útil para determinar qué mediría un observador en caída libre dado un evento del espacio-tiempo. Es claro que el sistema de vectores  $\hat{\mathbf{e}}_\alpha$  en cualquier evento  $P$  a lo largo de la línea de mundo del observador son vectores base de un sistema cartesiano local en  $P$ .

#### 3.2.1. Electromagnetismo en un espacio-tiempo curvado

Uno puede llegar las expresiones del electromagnetismo sin necesidad de suponer una geometría de Minkowski. En presencia de masa gravitacional o gravitatoria, el espacio-tiempo se vuelve curvo pero las ecuaciones de campo electromagnético en un sistema arbitrario de coordenadas seguirán siendo

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 f^\nu \\ \nabla_\sigma F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\sigma\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\sigma} &= 0. \end{aligned}} \quad (3.5)$$

Los efectos de la gravitación están automáticamente incluidos en estas ecuaciones de campo a través de las derivadas covariantes, las cuales dependen de la métrica  $g_{\mu\nu}$  que describe la geometría del espacio-tiempo. Si construimos un sistema de coordenadas cartesianas locales alrededor de un punto  $P$  de la variedad, entonces estas coordenadas corresponden a un sistema de referencia inercial en la vecindad de  $P$ .

Un campo tensorial electromagnético  $\mathbf{F}$  definido en un espacio-tiempo curvado da como resultado (como en el espacio de Minkowski) una 4-fuerza  $\mathbf{f} = q\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$ , la cual actúa sobre una partícula de carga  $q$  con una velocidad  $\mathbf{u}$ . Esta ecuación de movimiento

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

para una carga que se mueve bajo la influencia de un campo electromagnético en un espacio curvado tiene la misma forma que en el espacio de Minkowski, es decir

$$m_0 \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = q \mathbf{F} \cdot \mathbf{u},$$

donde  $m_0$  es la masa de reposo de la partícula. Solo que, en éste caso, es debido a la curvatura del espacio-tiempo de la partícula que se está moviendo bajo la influencia de las fuerzas electromagnética y de gravedad. En algún sistema arbitrario de coordenads, la línea de mundo está dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = \frac{q}{m_0} F^\mu_{\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

La ausencia de un campo electromagnético (para una partícula no cargada), el miembro derecho es nulo y recuperamos la ecuación de la geodésica.

Debemos recordar que la energía y momento del campo electromagnético inducirán por sí mismos una curvatura del espacio-tiempo, así, la métrica en este caso está determinada no sólo por la distribución de la materia, sino también por la radiación.

#### 3.2.2. El tensor de curvatura

La noción de curvatura es central para la relatividad general, es por eso que debemos investigar cómo cuantificar la curvatura intrínseca de una variedad en un punto dado  $P$ . Se dice que una variedad es *plana* si existen coordenadas  $X^\mu$  tal que el elemento de línea se pueda escribir

$$ds^2 = \epsilon_1 (dX^1)^2 + \epsilon_2 (dX^2)^2 + \cdots + \epsilon_N (dX^N)^2, \quad (3.6)$$

donde  $\epsilon = \pm 1$  (con “plano” nos referimos a a que sea pseudo-Euclidiano). Si puntos en la variedad están dados en algún sistema de coordenadas arbitrario, el elemento de línea  $ds^2$  no será de la forma anterior. Entonces, si para alguna variedad el elemento de línea está dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

¿Cómo podríamos saber si la geometría intrínseca de la variedad e alguna región es plana o curvada? Por ejemplo, el siguiente elemento de línea para un espacio tridimensional:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

podemos reconocerlo como el elemento de línea del espacio euclidiano tridimensional escrito en coordenadas polares esféricas. La transformación  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$  y  $z = r \cos \theta$  nos regresará el elemento de línea en la forma  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ . ¿Pero qué hay de otros elementos de línea? por ejemplo  $ds^2 = \frac{a^2}{a^2 - r^2} dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ . ¿Cómo podemos saber si esta métrica o una más complicada corresponde a una plana que se ve complicada debido a la elección de coordenadas?. Intentar ver si existe un cambio de coordenadas que se reduzca a la métrica de la forma

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  puede volverse complicado y no recomendable. Por tanto, necesitamos algo que nos diga si una variedad es plana directamente de la métrica  $g_{\mu\nu}$  *independientemente del sistema de coordenadas que se use*.

Podemos encontrar una solución al problema de medir la curvatura de una variedad en un punto considerando el cambio de orden de la diferenciación covariante. La diferenciación covariante es una generalización de la diferenciación parcial. Hay una diferencia muy importante en la que difieren: es importante el orden en que la diferenciación covariante se realiza, y cambiar el orden (en general) cambia el resultado.

Como para un campo escalar la derivada covariante es simplemente la derivada parcial, el orden de la diferenciación no importa. Sin embargo, consideremos un campo vectorial definido en la variedad, con componentes covariantes  $v_a$ . La derivada covariante de  $v_a$  está dada por

$$\nabla_b v_a = \partial_b v_a - \Gamma_{ab}^d v_d.$$

Una segunda derivación covariante nos da

$$\begin{aligned} \nabla_c \nabla_b v_a &= \partial_c (\nabla_b v_a) - \Gamma_{ac}^e \nabla_b v_e - \Gamma_{bc}^e \nabla_e v_a \\ &= \partial_c \partial_b v_a - (\partial_c \Gamma_{ab}^d) v_d - \Gamma_{ab}^d \partial_c v_d \\ &\quad - \Gamma_{ac}^e (\partial_b v_e - \Gamma_{eb}^d v_d) - \Gamma_{bc}^e (\partial_e v_a - \Gamma_{ae}^d v_d), \end{aligned}$$

Intercambiando los índices  $b$  y  $c$  para obtener una expresión correspondiente para  $\nabla_b \nabla_c v_a$  y restando nos da

$$\nabla_c \nabla_b v_a - \nabla_b \nabla_c v_a = R_{abc}^d v_d, \quad (3.7)$$

donde

$$\boxed{R_{abc}^d \equiv \partial_c \Gamma_{ab}^d - \partial_b \Gamma_{ac}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d}. \quad (3.8)$$

Determinar directamente si las  $N^4$  cantidades  $R_{abc}^d$  se transforman como las componentes de un tensor bajo un cambio de coordenadas sería una tarea difícil. Afortunadamente el teorema del cociente nos ahorra trabajo. El miembro izquierdo de (3.7) es un tensor, para vectores arbitrarios  $v_a$ , así la contracción de  $R_{abc}^d$  con  $v_a$  es también un tensor. Dado que  $R_{abc}^d$  no depende de  $v_a$ , concluimos por la regla del cociente que las  $R_{abc}^d$  son las componentes de un tensor de cuarto rango  $\mathbf{R}$ . Este tensor se conoce como el *tensor de curvatura* (o *tensor de Riemann*), y la ecuación (3.8) nos dice que está definida en términos de el tensor métrico  $g_{ab}$  y su primer y segunda derivadas.

Ahora, debemos establecer como el tensor (3.8) está relacionado con la curvatura de una variedad. En una región plana de una variedad, podemos elegir coordenadas de modo que el elemento de línea tome la forma (3.6) en tal región. En estas coordenadas  $\Gamma_{bc}^a$  y sus derivadas son cero, y por tanto

$$\boxed{R_{abc}^d = 0}$$

en cada punto de la región. Esta es la relación tensorial, entonces, se debe de cumplir para todo sistema de coordenadas. Conversamente, si  $R_{abc}^d$  en cada punto de alguna

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

región de la variedad, entonces se puede demostrar que es posible introducir un sistema de coordenadas en el cual el elemento de línea tome la forma (3.6) y, por tanto, esta región sea plana. Entonces, la anulación del tensor de curvatura es una condición necesaria y suficiente para que una región de una variedad sea plana.

#### 3.2.3. Propiedades del tensor de curvatura

El tensor de curvatura (3.8) posee simetrías y satisface ciertas identidades. Las simetrías del tensor de curvatura se encuentran más fácil con sus componentes covariantes.

$$R_{abcd} = g_{ae} R^e_{bcd}.$$

Después de hacer toda el álgebra, vemos que en un sistema de coordenadas arbitrario, una forma explícita de sus componentes es

$$R_{abcd} = \frac{1}{2} (\partial_d \partial_a g_{bc} - \partial_d \partial_b g_{ac} + \partial_c \partial_b g_{ad} - \partial_c \partial_a g_{bd}) - g^{ef} (\Gamma_{eac} \Gamma_{fbd} - \Gamma_{ead} \Gamma_{fbc}).$$

Podríamos usar esta expresión para derivar directamente las propiedades de simetría del tensor de curvatura, pero veamos un procedimiento matemático útil para reducir el álgebra de la manipulación en los tensores.

Elijamos un punto arbitrario  $P$  en la variedad y construyamos un sistema de coordenadas geodésico en este punto, en el cual la conexión se anula  $\Gamma^a_{bc} = 0$ , pero en general sus derivadas no. En este sistema de coordenadas, uno puede demostrar de (3.8) que las componentes covariantes del tensor de curvatura en  $P$  están dadas por

$$(R_{abcd})_P = \frac{1}{2} (\partial_d \partial_a g_{bc} - \partial_d \partial_b g_{ac} + \partial_c \partial_b g_{ad} - \partial_c \partial_a g_{bd}).$$

con ver esta expresión, se pueden establecer las siguientes simetrías en  $P$

$$\boxed{R_{abcd} = -R_{bacd}}, \quad (3.9)$$

$$\boxed{R_{abcd} = -R_{abdc}}, \quad (3.10)$$

$$\boxed{R_{abcd} = R_{cdab}}. \quad (3.11)$$

Las primeras dos propiedades nos dicen que el tensor de curvatura es antisimétrico con respecto los primeros dos índices y también con respecto los últimos dos índices. La tercera propiedad nos dice que es simétrico con respecto el primer y segundo par de índices  $abcd \rightarrow cdab$ . Además, podemos deducir la siguiente *identidad cíclica*

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0, \quad (3.12)$$

y, usando (3.10) podemos escribir de una forma más compacta  $R_{a[bcd]} = 0$ . A pesar de que los resultados (3.9)-(3.12) se han derivado en un sistema de coordenadas específico, cada condición es una relación tensorial y si son válidas en un sistema de coordenadas, lo seguirán siendo en cualquier otro.



### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

El tensor de curvatura también satisface una identidad diferencial que puede derivarse como sigue. Adoptemos, una vez más, un sistema de coordenadas geodésicas en un punto  $P$ . En este sistema de coordenadas, la diferenciación y evaluación en el punto  $P$  nos da

$$(\nabla_e R_{abcd})_P = (\partial_e R_{abcd}) = (\partial_e \partial_c \Gamma_{abd} - \partial_e \partial_d \Gamma_{abc})_P.$$

Permutando  $c$ ,  $d$  y  $e$  para obtener dos relaciones análogas y sumándolas, encontramos que en  $P$

$$\nabla_e R_{abcd} + \nabla_c R_{abde} + \nabla_d R_{abec} = 0. \quad (3.13)$$

Pero, esta es una relación tensorial y por tanto se cumplirá en todos los sistemas de coordenadas; además, dado que  $P$  es arbitrario, se satisface en todas partes. Este resultado se conoce como la *identidad de Bianchi* y, usando la relación de antisimetría (3.9), podemos escribirla de una forma más compacta

$$\nabla_{[e} R_{ab]cd} = 0$$

#### 3.2.4. El tensor de Ricci y el escalar de curvatura

De las propiedades de simetría del tensor de curvatura (3.9)-(3.11) se sigue que posee sólo dos contracciones independientes. Se pueden encontrar contrayendo los primeros dos índices o el primer y último respectivamente. De (3.9), subiendo el índice  $a$  y contrayendo los primeros dos índices

$$R^a_{acd} = 0.$$

Contrayendo el primer y último índices, nos da en general un resultado no nulo, generándonos un nuevo tensor, *el tensor de Ricci*. Se suele denotar el tensor de curvatura con la primera letra de Ricci, sus componentes son

$$R_{ab} \equiv R^c_{abc}.$$

Subiendo el índice  $a$  la identidad cíclica (3.12) y contrayendo con  $d$ , vemos que el tensor de Ricci es antisimétrico. Entonces  $R^a_b = R_a^b$  y podemos denotarlo por  $R_a^b$ . Otra contracción nos da un resultado muy importante, el *escalar de curvatura* (o *escalar de Ricci*)

$$R \equiv g^{ab} R_{ab} = R_a^a.$$

Esta es una cantidad escalar definida en cada punto de la variedad.

Las derivadas covariantes del tensor de Ricci y el escalar de curvatura satisfacen una relación importante, que será central para el desarrollo de las ecuaciones de campo de la relatividad genera. Subiendo  $a$  en la identidad de Bianchi (3.13) y contrayendo con  $d$  tenemos

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

$$\nabla_e R_{bc} + \nabla_c R_{bae}^a + \nabla_a R_{bec}^a = 0,$$

si usamos la propiedad antisimétrica (3.11) en el segundo término, nos da

$$\nabla_e R_{bc} + \nabla_c R_{be} + \nabla_a R_{bec}^a = 0.$$

Si ahora subimos el índice  $b$  y contraemos con  $e$ , encontramos

$$\nabla_b R_c^b - \nabla_c R + \nabla_a R_{bc}^{ab} = 0 \quad (3.14)$$

Usando las propiedades antisimétricas (3.9) y (3.10) el tercer término se puede escribir como

$$\nabla_a R_{bc}^{ab} = \nabla_a R_{cd}^{ba} = \nabla_a R_c^a = \nabla_b R_c^b, \quad (3.15)$$

así, el primer y último términos en (3.14) son idénticos y entonces obtenemos

$$2\nabla_b R_c^b - \nabla_c R = \nabla_b (2R_c^b - \delta_c^b R) = 0$$

Finalmente, subeindo el índice  $c$ , obtenemos uno de los resultados más importantes

$$\nabla_b \left( R^{bc} - \frac{1}{2} g^{bc} R \right) = 0$$

el término en paréntesis se conoce como el *tensor de Einstein*

$$G^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R.$$

### 3.3. Las ecuaciones de campo gravitacional

La concepción de Einstein fue ver la gravedad como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo inducida por la presencia de materia. Por tanto, debemos obtener un conjunto de ecuaciones que describan cuantitativamente como la curvatura del espacio-tiempo en cualquier evento está relacionada con la distribución de la materia en ese evento. Este conjunto de ecuaciones constituirán las *ecuaciones gravitacionales de campo*, o *ecuaciones de Einstein*, del mismo modo que las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones de campo de electromagnetismo.

Las ecuaciones de Maxwell relacionan el campo electromagnético  $\mathbf{F}$  en cualquier evento con su fuente, la 4-densidad de corriente  $\mathbf{j}$  en ese evento. Similarmente, las ecuaciones de Einstein relacionan la curvatura del espacio-tiempo con su fuente, la energía-momento de materia. En cualquier sistema de coordenadas dado, las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden para las componentes  $F_{\mu\nu}$  del tensor electromagnético de campo (o equivalentemente para la componente  $A_\mu$  del potencial electromagnético). Deseamos encontrar que las ecuaciones de Einstein también son un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden, solo que en este caso para los coeficientes  $g_{\mu\nu}$  del espacio-tiempo.

## CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

### 3.3.1. El tensor momento-energía

Para construir las ecuaciones de campo gravitacional, debemos primero encontrar un modo apropiado de expresar el *término fuente*. En otras palabras, debemos identificar el un tensor que describa la distribución de la materia en cada evento en el espacio-tiempo.

Consideremos un caso general de distribuciones de materia dependientes del tiempo (eléctricamente neutra) donde no interactúan partículas, con masa en reposo  $m_0$ . Ésto es frecuentemente llamado *polvo* en la literatura. En cada evento  $P$  del espacio-tiempo podemos caracterizar la distribución completamente dando una densidad de materia  $\rho$  y una 3-velocidad  $\vec{u}$  medidas en algún sistema de referencia. Por simplicidad, consideremos en su *sistema de referencia donde está instantáneamente en reposo*  $S$  en  $P$ , en el cual  $\vec{u} = \vec{0}$ . En este sistema de referencia, la densidad (propia) está dada por  $\rho_0 = m_0 n_0$ , donde  $m_0$  es la masa en reposo de cada partícula y  $n_0$  es el número de partículas por unidad de volumen. En algún otro sistema de referencia  $S'$ , que se mueve con velocidad  $v$  relativa a  $S$  el volumen que contiene un determinado número de partículas sufre una contracción de Lorentz en la dirección del movimiento (ver figura). Por tanto, la densidad de materia en  $S'$  queda expresada como

$$\rho' = \gamma_v^2 \rho_0. \quad (3.16)$$

Podemos concluir que la densidad de materia no es un escalar, sin embargo, se transforma como la 00-componente de un tensor de segundo rango. Esto sugiere que el término fuente en el campo gravitacional debe ser un tensor de segundo rango. En cada punto del espacio-tiempo, es razonable la siguiente elección

$$\mathbf{T}(x) = \rho_0(x) \mathbf{u}(x) \otimes \mathbf{u}(x). \quad (3.17)$$

donde  $\rho_0(x)$  es la densidad propia del fluido, es decir, es la densidad medida por un observador que se mueve con el flujo local, y  $\mathbf{u}(x)$  es su 4-velocidad. El tensor  $\mathbf{T}(x)$  se conoce como el tensor *momento-energía* (*stress-energy*) de la distribución de la materia. Veremos la razón de estos nombres brevemente. A partir de ahora denotaremos la densidad propia simplemente por  $\rho$ , sin subíndice.

En algún sistema de coordenadas arbitrario  $x^\mu$  en el cual la 4-velocidad del fluido es  $u^\mu$ , las componentes contravariantes de (1) están dadas por

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \quad (3.18)$$

Para dar una interpretación física de las componentes del tensor momento-energía, es conveniente considerar el sistema de referencia inercial Cartesiano en  $P$  en el cual el conjunto de componentes de la 4-velocidad del fluido es  $[u^\mu] = \gamma_u(c, \vec{u})$ . Si escribimos las componentes, tenemos

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho u^0 u^0 = \gamma_u^2 \rho c^2, \\ T^{0i} &= T^{i0} = \rho u^0 u^i = \gamma_u^2 \rho c u^i \\ T^{ij} &= \rho u^i u^j = \gamma_u^2 \rho u^i u^j \end{aligned}$$

El significado físico de estas componentes en este sistema de referencia son las siguientes:

- $T^{00}$ : es la densidad de energía de las partículas;
- $T^{0i}$  es la densidad flujo por  $c^{-1}$  en la dirección  $i$ ;
- $T^{i0}$  es la densidad momento por  $c$  en la dirección  $i$ ;
- $T^{ij}$  es la razón de flujo de momento de la  $i$ -ésima componente en la dirección- $j$

Y es por estas identificaciones que  $T$  es conocido como el tensor momento-energía o stress-energy.

#### 3.3.2. El tensor momento energía de un fluido perfecto

Para generalizar nuestra discusión de fluidos reales, debemos tomar en cuenta el hecho de que *a)* aparte del elemento o bulto de fluido en movimiento, cada partícula tiene alguna velocidad aleatoria (térmica), *b)* puede haber varias fuerzas entre las partículas que contribuyen energías potenciales a la total. El significado físico de las componentes del tensor momento-energía  $\mathbf{T}$  nos da una idea de cómo generalizar su forma para incluir estas propiedades de fluidos reales.

Consideremos  $\mathbf{T}$  en algún evento  $P$  y supongamos que estamos en un sistema de coordenadas inercial Cartesiano  $S$ , el cual es el sistema de referencia inercial  $SRI$  del fluido en  $P$ . Para polvo, la única componente no nula es  $T^{00}$ . Sin embargo, consideremos las componentes de  $\mathbf{T}$  en el  $SRI$  del fluido real.

- $T^{00}$  Es la densidad de energía total, incluyendo cualquier contribución de energía potencial debida a las fuerzas de interacción entre las partículas y la energía cinética debida al movimiento aleatorio (*thermal motion*)
- $T^{0i}$  A pesar de que no hay movimiento del elemento bulto de fluido, la energía debe transmitirse por conducción de calor, así, éste es básicamente el término del calor de conducción en el  $SRI$
- $T^{i0}$  una vez más, a pesar de que las partículas de bulto no se mueven, su calor se conduce, y por tanto esa energía transmitirá momento.
- $T^{ij}$  el movimiento aleatorio debido a la temperatura de las partículas generará un aumento en el flujo de momento, así,  $T^{ij}$  es la presión isotrópica en la dirección- $ii$  y  $T^{ij}$  (con  $i \neq j$ ) son los *esfuerzos viscosos* en el fluido.

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

Estas identificaciones son validas para un fluido en general. Un *fluido perfecto* se define como aquel para el cual no hay fuerzas entre partículas, y no hay calor por conducción o viscosidad en el SRI. Es decir, en el SRI las componentes de  $\mathbf{T}$  para un fluido perfecto están dados por

$$[T^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}.$$

No es difícil demostrar que

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \quad (3.19)$$

Sin embargo, por la forma en que está escrita esta ecuación, debe ser válida en cualquier sistema inercial cartesiano local en  $P$ . También, podemos obtener una expresión que sea válida en un sistema de coordenadas arbitrario reemplazando  $\eta^{\mu\nu}$  con las funciones de métricas  $g^{\mu\nu}$  en un sistema arbitrario. Entonces, se tiene una expresión completamente covariante para las componentes del tensor momento-energía de un fluido perfecto

$$\boxed{T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}} \quad (3.20)$$

Vemos que  $T^{\mu\nu}$  es simétrica y está compuesta de dos campos escalares  $p$  y  $\rho$  y el campo de velocidades  $\vec{u}$  que caracteriza al fluido perfecto. también vemos que si  $p \rightarrow 0$  un fluido perfecto representa polvo.

Finalmente, notamos que es posible dar expresiones más complicadas que representen tensores momento-energía para fluidos que no son perfectos, para fluidos cargados e incluso para el campo electromagnético. Y todos estos tensores son simétricos.

#### 3.3.3. Conservación del momento y la energía para un fluido perfecto

Investiguemos como expresar la conservación del momento y la energía en un sistema de referencia local e inercial Cartesiano en algún evento  $P$  representado por el sistema de coordenadas local  $x^\mu$ . En estas coordenadas, el tensor momento-energía toma la forma  $T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)n^{nu}u^{nu} - p\eta^{\mu\nu}$ .

Por analogía con la ecuación  $\partial_\mu j^\mu = 0$  para la conservación de la carga, la conservación de la energía y el momento queda representado por la siguiente ecuación

$$\boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.} \quad (3.21)$$

Sustituyendo (3.19) en (3.21) tenemos:

$$\partial_\mu (\rho + p/c^2) u^{\mu\nu} + (\rho + p/c^2) [(\partial_\mu u^\mu) u^\nu + u^\mu (\partial_\mu u^\nu)] - (\partial_\mu p) \eta^{\mu\nu} = 0 \quad (3.22)$$

Ahora, la 4-velocidad satisface la condición de normalización  $u^\nu u_\nu = c^2$  y si la derivamos nos da

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

$$(\partial_\mu u^\nu) u_\nu + u^\nu (\partial_\mu u_\nu) = 2 (\partial_\mu u^\nu) u_\nu = 0 \quad (3.23)$$

Contrayendo (3.22) con  $u_\nu$  dividiendo por  $c^2$  y reacomodando términos

$$\boxed{\partial_\mu (\rho u^\mu) + (p/c^2) \partial_\mu = 0.} \quad (3.24)$$

entonces, la ecuación (3.22) se simplifica a

$$\boxed{(\rho + p/c^2)(\partial_\mu u^\nu) u^\mu = (\eta^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu/c^2) \partial_\mu p.} \quad (3.25)$$

Las ecuaciones (3.24) y (3.25) son las ecuaciones relativistas de *continuidad* y de *movimiento* para un fluido perfecto en un sistema de referencia inercial en algún evento  $P$ .

Hemos tratado con sistemas de referencia inerciales para hacer contacto con la teoría newtoniana. Sin embargo, podemos obtener una condición para la conservación del momento y energía en coordenadas arbitrarias reemplazando  $\partial_\mu$  por  $\nabla_\mu$  en (3.21), es decir

$$\boxed{\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0.} \quad (3.26)$$

Esta ecuación es de gran importancia, en nuestra discusión no hemos sido explícitos acerca de si nuestro espacio-tiempo es de Minkowski o curvado. A pesar de la forma de (3.26) sea válida (en coordenadas arbitrarias) su interpretación difiere en dos casos. Si ignoramos la gravedad y asumimos que se tiene un espacio-tiempo de Minkowski, la relación (3.26) no representa la conservación de la energía y momento. En la presencia de un campo gravitatorio (y por tanto un espacio-tiempo curvado), la energía y momento de la materia por sí solas no se conservan. En este caso, (3.26) representa la ecuación de movimiento de la materia bajo la influencia del campo gravitatorio. En la siguiente sección, la condición (3.26) reemplaza la restricción de las posibles formas que las ecuaciones de campo gravitatorio puedan tomar.

#### 3.3.4. Las ecuaciones de Einstein

Ahora, tenemos las herramientas para deducir la forma de las ecuaciones de campo gravitacional propuestas por Einstein. Empecemos retomando algunos resultados previos.

- La ecuación de campo de gravedad newtoniana es

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 4\pi G \rho.$$

- Si la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, se puede demostrar que la ecuación para un campo gravitacional débil en coordenadas tal que  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  (con  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ) y en el cual la métrica es estática

$$g_{00} = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right). \quad (3.27)$$

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

- La descripción correcta relativista de materia es proporcionada por el tensor momento energía y, para un fluido perfecto o polvo, en el sistema de referencia inercial

$$T_{00} = \rho c^2$$

La combinación de estas observaciones sugiere que, para un campo gravitatorio débil en la velocidad límite

$$\vec{\nabla}^2 g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}.$$

La intuición fundamental de Einstein fue que la curvatura del espacio-tiempo en cualquier evento está relacionado con el contenido de materia en tal evento. Las consideraciones anteriores sugieren que las ecuaciones de campo gravitacional deberían tomar la forma

$$K_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.28)$$

donde  $K$  es un tensor de rango dos asociado a la curvatura del espacio-tiempo y hemos hecho  $\kappa = 8\pi G/c^4$ . Dado que la curvatura del espacio-tiempo está determinada por el tensor de curvatura  $R_{R\mu\nu\sigma\rho}$ , el tensor  $K_{\mu\nu}$  debe construirse desde  $R_{R\mu\nu\sigma\rho}$  y el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . Sin embargo,  $K_{\mu\nu}$  debería tener las siguientes propiedades: (i) En el límite (caso newtoniano)  $K_{\mu\nu}$  debe contener términos no más altos que lineales en las derivadas de segundo orden del tensor métrico; y (ii) debido a que  $T_{\mu\nu}$  es simétrico,  $K_{\mu\nu}$  también debería ser simétrico, y así, la forma más general de  $K_{\mu\nu}$  que satisface (i) y (ii) es

$$K_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}, \quad (3.29)$$

donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $R$  es el escalar de curvatura y  $a$ ,  $b$  y  $\lambda$ . Primero, si requerimos que cada término en  $K_{\mu\nu}$  sea lineal en las segunda derivadas de  $g_{\mu\nu}$  entonces vemos que  $\lambda = 0$ , así

$$K_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu}.$$

Para hallar las constantes  $a$  y  $b$  retomemos el tensor de momento-energía, el cual satisface  $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ ; entonces, de (3.26), también requerimos que

$$\nabla_\mu K^{\mu\nu} = \nabla_\mu (aR^{\mu\nu} + bRg^{\mu\nu}) = 0$$

Sin embargo, anteriormente habíamos demostrado que

$$\nabla_\mu (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R) = 0,$$

y así, recordando que  $\nabla_\nu g^{\mu\nu} = 0$ , obtenemos

$$\nabla_\mu K^{\mu\nu} = \left(\frac{1}{2}a + b\right) g^{\mu\nu} \nabla_\mu R = 0.$$

La cantidad  $\nabla_\mu R$  será, en general, distinta de cero a través del espacio-tiempo al menos de que este último sea plano y por tanto no haya un campo gravitatorio.

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

Entonces,  $b = -a/2$ , y así, las ecuaciones de campo gravitacional deben tomar la forma

$$a \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = \kappa T_{\mu\nu}.$$

Para fijar la constante  $a$ , debemos comparar el campo débil de estas ecuaciones con la ecuación de Poisson en el caso newtoniano. La comparación se presentará en la siguiente sección, donde demostraremos que, para que sea consistente con la teoría newtoniana, se requiere que  $a = -1$ , luego

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.30)$$

donde  $\kappa = 8\pi G/c^4$ . La ecuación (3.30) constituye las *ecuaciones de campo gravitacional de Einstein*, las cuales forman la base matemática de la teoría de la relatividad general. Notemos que el miembro izquierdo de la ecuación (3.30) es simplemente el *tensor de Einstein*  $G_{\mu\nu}$ .

También podemos obtener una forma alternativa de las ecuaciones de Einstein escribiendo (3.30) en términos de sus componentes mixtas,

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R = -\kappa T^\mu_\nu \quad (3.31)$$

y contrayendo al hacer  $\mu = \nu$ . Encontramos que  $R = \kappa T$ , donde  $T \equiv T^\mu_\mu$ . Por tanto, las ecuaciones de Einstein (3.30) se pueden escribir como

$$\boxed{R_{\mu\nu} = -\kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right)}. \quad (3.32)$$

En el espacio-tiempo tetradimensional  $g_{\mu\nu}$  se tienen 10 componentes independientes y portanto, 10 ecuaciones independientes de campo en la relatividad general.

#### 3.3.5. Las ecuaciones de Einstein en el vacío

En general,  $T_{\mu\nu}$  contiene *todas* las formas de la energía y momento. Este incluye cualquier materia presente pero si hay radiación electromagnética, por ejemplo, entonces también debe estar incluida en  $T_{\mu\nu}$ .

Una región del espacio-tiempo en el cual  $T_{\mu\nu} = 0$  se conoce como *vacío*, y dicha región es por tanto no solo carente de materia, sino también de momento y energía radioactiva. Se puede demostrar de (3.32) que las ecuaciones de campo para el vacío son

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0}. \quad (3.33)$$

De esta simple ecuación, podemos establecer inmediatamente un resultado a fondo. Consideremos el número de ecuaciones de campo como una función del número de dimensiones del espacio-tiempo; entonces, para dos, tres o cuatro dimensiones, el número



## CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

de ecuaciones de campo y componentes independientes de  $R_{\mu\nu\sigma\rho}$  son como se muestran en la tabla

| Número de dimensiones del espacio-tiempo | Número de ecuaciones de campo | Número de componentes independientes de $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ |
|------------------------------------------|-------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| 2                                        | 3                             | 1                                                              |
| 3                                        | 6                             | 6                                                              |
| 4                                        | 10                            | 20                                                             |

Vemos que en dos o tres dimensiones, las ecuaciones de campo en el vacío *garantizan que el tensor de curvatura completo debe anularse*. En cuatro dimensiones, tenemos 10 ecuaciones de campo pero 20 componentes independientes del tensor de curvatura. Por tanto, es posible satisfacer las ecuaciones de campo en el vacío con un tensor de curvatura que no sea nulo. Recordando que un tensor de curvatura no nulo representa un campo gravitatorio tampoco nulo, concluimos que *solamente en cuatro dimensiones o más pueden existir campo gravitacionales en el vacío*.

### 3.4. La geometría de Schwarzschild

Ahora veremos como resolver las ecuaciones de campo de Einstein y así encontrar las funciones métricas  $g_{\mu\nu}$  en una situación física dada. Las ecuaciones de Einstein son altamente no lineales, esto significa que en las ecuaciones de campo una solución general para una distribución de materia arbitraria es difícil de tratar analíticamente. El problema se vuelve más sencillo si vemos soluciones especiales, por ejemplo aquellas que representan espacio-tiempos con *simetrías*. La primera solución exacta para las ecuaciones de Einstein fue encontrada por Karl Schwarzschild en 1916 [15]. Como veremos, la solución de Schwarzschild representa la geometría del espacio-tiempo afuera de una distribución de materia esféricamente simétrica.

#### 3.4.1. La métrica general estática e isotrópica

Schwarzschild buscó una métrica  $g_{\mu\nu}$  que representara un campo gravitacional estático y esféricamente simétrico en el vacío cerca de un objeto masivo esférico como una estrella. Un buen comienzo sería construir la forma de la métrica más general para un espacio-tiempo estático. [?]

Un espacio *estático* es aquel que con la coordenada temporal  $x^0$  tiene las siguientes propiedades: (i) todas las componentes métricas  $g_{\mu\nu}$  son independientes de  $x^0$ ; y (ii) el elemento de línea  $ds^2$  es invariante bajo la transformación  $x^0 \rightarrow -x^0$ . Es importante tomar en cuenta que (i) no implica (ii), por ejemplo: en una estrella en rotación, hacer  $x^0 \rightarrow -x^0$  cambia el sentido de la rotación, pero las componentes de la métrica son constantes en el tiempo. Un espacio-tiempo que satisface (i) pero no (ii) se conoce como *estacionario*.

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

Empecemos con la expresión general para el elemento de línea

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

deseamos encontrar un conjunto de coordenadas  $x^\mu$  en las que  $g_{\mu\nu}$  no depende de la coordenada temporal  $x^0$  y el elemento de línea es invariante bajo  $x^0 \rightarrow -x^0$ , es decir, la métrica es estática; en la cual  $ds^2$  depende solamente de *invariantes rotacionales* de las coordenadas espaciales  $x^i$  y de sus diferenciales  $dx^i$ , es decir, la métrica es *isotrópica*. Es un poco más complicado derivar la forma general de la métrica espacialmente isotrópica sin insistir en que sea estático.

Los invariantes rotacionales de las coordenadas espaciales  $x^i$  y sus diferenciales son:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} \equiv r^2, \quad d\vec{x} \cdot d\vec{x}, \quad \vec{x} \cdot d\vec{x}$$

donde  $\vec{x} \equiv (x^1, x^2, x^3)$  y hemos definido la coordenada  $r$ . Denotando la coordenada temporal  $x^0$  por  $t$ , vemos que la forma más general para la métrica espacialmente isotrópica debe ser [36]

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 - B(t, r)d\vec{x} \cdot d\vec{x} - C(t, r)(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 - D(t, r)d\vec{x}^2 \quad (3.34)$$

donde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son funciones arbitrarias de las coordenadas  $t$  y  $r$ .

Ahora, cambiémonos a coordenadas polares esféricas  $(t, r, \theta, \phi)$ , definidas por

$$x^1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x^3 = r \cos \theta.$$

en este caso tenemos

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = r^2, \quad \vec{x} \cdot d\vec{x} = r dr, \quad d\vec{x} \cdot d\vec{x} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

y por tanto, la métrica general (3.34) toma la forma

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 - B(t, r)r dt dr - C(t, r)r^2 dr^2 - D(t, r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.35)$$

Factorizando términos y absorbiendo los factores de  $r$  dentro de las funciones redefiniendo  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , la métrica puede escribirse como

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 - B(t, r)dt dr - C(t, r)dr^2 - D(t, r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Si definimos una nueva coordenada radial  $\bar{r}^2 = D(t, r)$  y acomodando términos dentro de nuevas funciones arbitrarias de  $t$  y  $\bar{r}$ , redefiniendo una vez más las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$ , podemos escribir la métrica como

$$ds^2 = A(t, \bar{r})dt^2 - B(t, \bar{r})dt d\bar{r} - C(t, \bar{r})d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.36)$$

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

Introduzcamos una nueva coordenada  $\bar{t}$  definida por la relación

$$d\bar{t} = \Phi(t, \bar{r}) \left[ A(t, \bar{r}) dt - \frac{1}{2} B(t, \bar{r}) d\bar{r} \right],$$

donde  $\Phi(t, \bar{r})$  es un factor integrante que hace que el miembro derecho de la ecuación sea una diferencial exacta. Elevando al cuadrado, tenemos

$$d\bar{t}^2 = \Phi^2 \left[ A^2 dt^2 - AB dt d\bar{r} + \frac{1}{4} B^2 d\bar{r}^2 \right],$$

de donde encontramos que

$$A dt^2 - B dt d\bar{r} = \frac{1}{A\Phi^2} d\bar{t}^2 - \frac{B}{4A} d\bar{r}^2.$$

Definiendo las nuevas funciones  $\bar{A} = 1/(A\Phi)^2$  y  $\bar{B} = C + B/(A\Phi)$ , nuestra métrica (3.36) se volverá *diagonal*, de modo que

$$ds^2 = \bar{A}(\bar{t}, \bar{r}) d\bar{t}^2 - B(t, \bar{r}) dt d\bar{r} - \bar{B}(\bar{t}, \bar{r}) d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

No hay necesidad de mantener las barras sobre las variables, podemos omitirlas y escribir la métrica como

$$ds^2 = A(t, r) dt^2 - B(t, r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.37)$$

En general, la métrica isotrópica estará especificada por dos funciones de  $t$  y  $r$ , es decir,  $A(t, r)$  y  $B(t, r)$ . Después veremos que, para superficies dadas por  $t, r$  constantes, el elemento de línea (3.37) describe la geometría de 2-esferas, la cuales expresan la isotropía de la métrica. Este elemento de línea muestra que dicha superficie tiene un área de  $4\pi r^2$ . Sin embargo, debido a que  $B(t, r)$  no es igual a la unidad, no podemos asumir que  $r$  sea la distancia radial.

El paso final en la obtención de la métrica isotrópica *estacionaria* más general es más sencillo. Necesitamos que las funciones métricas  $g_{\mu\nu}$  sean independientes de las coordenadas temporales, lo cual significa que  $A$  y  $B$  deben ser funciones sólo de  $r$ . Así

$$\boxed{ds^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).} \quad (3.38)$$

demás, vemos que inmediatamente que  $ds^2$  es invariante bajo el cambio  $t \rightarrow -t$ , y esta es la forma requerida de la métrica para un espacio-tiempo general estático y espacialmente isotrópico.

#### 3.4.2. Solución de las ecuaciones de campo para el vacío

Las funciones  $A(r)$  y  $B(r)$  en la métrica general estática e isotrópica quedan determinadas al resolver las ecuaciones de campo de Einstein. Estamos interesados en la geometría del espacio-tiempo por *fuera* de una distribución esférica de masa, así que

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

debemos resolver las ecuaciones de campo para el vacío, es decir, queremos que se anule el tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.39)$$

De la ecuación (3.8) podemos escribir el tensor de Ricci como

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\rho\sigma} \quad (3.40)$$

y, a su vez, la conexión está definida en términos de la métrica  $g_{\mu\nu}$  por

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (3.41)$$

Vemos que la expresión (3.39) aparentemente simple equivale a un conjunto complicado de ecuaciones diferenciales para las componentes de la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Para poder avanzar, debemos calcular las componentes de la conexión  $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$  correspondientes a nuestra métrica estática e isotrópica. Esto se puede hacer de dos maneras. La más rápida (con cualquier métrica) es usar las técnicas lagrangianas para geodésicas. Al escribir el lagrangiano vemos que:

$$L = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu,$$

en el cual  $\dot{x}^\mu$  denota  $dx^\mu/d\sigma$ , donde  $\sigma$  es un parámetro afín a lo largo de la geodésica. Sustituyendo  $L$  en las ecuaciones de Euler-Lagrange nos dará las ecuaciones de una geodésica parametrizada, de donde los coeficientes de la conexión se pueden identificar.

Sin embargo, obtendremos por el método más largo, en el cual las  $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$  se calculan directamente de la métrica  $g_{\mu\nu}$  usando (3.41). Primero necesitamos identificar las componentes de la métrica del elemento de línea (3.38). Los elementos no nulos de  $g_{\mu\nu}$  y  $g^{\mu\nu}$  son

$$\begin{aligned} g_{00} &= A(r), & g^{00} &= 1/A(r) \\ g_{11} &= -B(r), & g^{11} &= -1/B(r) \\ g_{22} &= -r^2, & g^{11} &= -1/r^2 \\ g_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta, & g^{11} &= -1/(r^2 \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

donde notamos que las componentes contravariantes de la métrica son simplemente los recíprocos de las componentes covariantes debido a que la métrica es diagonal.

Sustituyendo las componentes de la métrica en la expresión (3.41) para la conexión, encontramos las expresiones en la tabla 3.4.2 con todas las demás componentes nulas. Con estos resultados, encontramos que solo 9 de las 40 coeficientes independientes de la conexión son distintos de cero:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} &= A'/(2A), & \Gamma^1_{00} &= A'/(2B), & \Gamma^1_{11} &= B'/(2B) \\ \Gamma^1_{22} &= -r/(B), & \Gamma^1_{33} &= -(r \sin^2 \theta)/B, & \Gamma^2_{12} &= 1/r \\ \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma^3_{13} &= 1/r, & \Gamma^3_{23} &= \cot \theta. \end{aligned}$$

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

*Los coeficientes de la conexión de la métrica isotrópica y estática general*

---



---

|                                                                                                                                                       |            |                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---------------------------------------------------|
| $\Gamma^0_{00} = 0$                                                                                                                                   |            |                                                   |
| $\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}g^{i\rho}\partial_\rho g_{00}$                                                                                           | $\implies$ | $\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2B(r)}\frac{dA(r)}{dr}$ |
| $\Gamma^0_{0i} = \frac{1}{2}g^{0\rho}(\partial_i g_{\rho 0} + \partial_0 g_{\rho i} - \partial_\rho g_{0i}) = \frac{1}{2}g^{00}\partial_i g_{00}$     | $\implies$ | $\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2A(r)}\frac{dA(r)}{dr}$ |
| $\Gamma^0_{ij} = 0$                                                                                                                                   |            |                                                   |
| $\Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2}g^{i\rho}(\partial_i g_{\rho i} + \partial_i g_{\rho i} - \partial_{\rho i} g_{ii}) = \frac{1}{2}g^{ii}\partial_i g_{ii}$ | $\implies$ | $\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2B(r)}\frac{dB(r)}{dr}$ |
| $\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22})$                                                        | $\implies$ | $\Gamma^1_{22} = -\frac{r}{B(r)}$                 |
| $\Gamma^1_{33} = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{33}$                                                                                                 | $\implies$ | $\Gamma^1_{33} = -\frac{r \sin^2 \theta}{B(r)}$   |
| $\Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}g^{22}\partial_1 g_{22}$                                                                                                  | $\implies$ | $\Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$                     |
| $\Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{33}$                                                                                                 | $\implies$ | $\Gamma^2_{33} = -\sin \theta \cos \theta$        |
| $\Gamma^3_{31} = \frac{1}{2}g^{33}\partial_1 g_{33}$                                                                                                  | $\implies$ | $\Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}$                     |
| $\Gamma^3_{32} = \frac{1}{2}g^{33}\partial_2 g_{33}$                                                                                                  | $\implies$ | $\Gamma^3_{32} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ |

---



---

Ahora substituyamos estos coeficientes de la conexión en la expresión (3.40) para obtener las componentes  $R_{\mu\nu}$  del tensor de Ricci. Esto requiere mucha álgebra, afortunadamente las componentes distintas a la diagonal de  $R_{\mu\nu}$  son nulas, de modo que

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rB}, \quad (3.42)$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rB}, \quad (3.43)$$

$$R_{22} = \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right), \quad (3.44)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta. \quad (3.45)$$

Las ecuaciones de campo para el vacío (3.39) se obtienen haciendo cada una de las expresiones (3.42)-(3.45) igual a cero. De estas cuatro expresiones, sólo las primeras tres son útiles, pues la cuarta repite la información de la tercera.. Multiplicando (3.42) por  $B/A$  y sumando a (3.43) tenemos

$$A'B + AB' = 0.$$

lo cual implica que  $AB = \text{constante}$ . Sea  $\alpha$  dicha constante. Sustituyendo  $B = \alpha/A$  en (3.44) obtenemos  $A + rA' = \alpha$ , o bien

$$\frac{d(rA)}{dr} = \alpha.$$

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

Integrando esta ecuación nos da  $rA = \alpha(r+k)$ , donde  $k$  es otra constante de integración. Estas funciones  $A(r)$  y  $B(r)$  están dadas por

$$A(r) = \alpha \left(1 + \frac{k}{r}\right) \quad \text{y} \quad B(r) = \left(1 + \frac{k}{r}\right)^{-1}.$$

En la solución para  $A$  y  $B$  hemos usado sólo la suma de las ecuaciones (3.42) y (3.43), y las ecuaciones por separado. Estas soluciones satisfacen las ecuaciones (3.42)-(3.45) por separado.

Se puede ver que la constante de integración  $k$  debe de alguna manera representar la masa del objeto que produce el campo gravitacional. Podemos identificar  $k$  (y  $\alpha$ ) considerando el campo débil (en el límite), el cual requiere que

$$\frac{A(r)}{c^2} \longrightarrow 1 + \frac{2\Phi}{c^2},$$

donde  $\Phi$  es el potencial gravitatorio newtoniano. Además, en el límite  $r$  se puede ver como la distancia radial con una buena aproximación. Para una masa esféricamente simétrica  $M$ , tenemos que  $\Phi = -GM/r$ , luego  $k = -2GM/c^2$  y  $\alpha = c^2$ . Por tanto, la *métrica de Schwarzschild* para el espacio-tiempo vacío afuera de un cuerpo esférico de masa  $M$  es

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.46)$$

La métrica de Schwarzschild es válida en la superficie del objeto esférico, en el cual las ecuaciones de campo para el vacío ya no se cumplen. La métrica no está definida en  $r = 2\mu$ , con  $\mu = GM/c^2$  el cual se conoce como el *radio de Schwarzschild*. Si la superficie de un cuerpo masivo se contrae con este radio se dice que el objeto se vuelve un *Hoyo negro de Schwarzschild*.

### 3.5. El teorema de Birkhoff

Una característica de las soluciones que tienen simetría esférica unicamente es que para algunas fuentes de campos la región exterior a estos no admiten ondas gravitacionales. El primer teorema probado en esta dirección fue presentada por Birkhoff [17, 23] y corresponde al caso del vacío, posteriormente esta corresponde a la solución de Schwarzschild. Se probó que si se tiene una región de fuentes de un campo con electrovacío con  $J = 0$  entonces la solución corresponde a la de Reissner Nordstrom

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.47)$$

## CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

### 3.6. Geometrías esféricamente simétricas

En esta sección vamos a considerar la solución de las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico en regiones donde la presencia de otros campos significa que el tensor energía-momento no es cero. Concentrémonos en dos situaciones físicas importantes. Primero, las ecuaciones gravitacionales relativistas para el interior de una distribución esféricamente simétrica de materia (o *estrella*); en este caso el tensor energía-momento de la materia que compone la estrella debe estar incluido en las ecuaciones de Einstein. Segundo, la geometría del espacio-tiempo *afuera* de un objeto *cargado* estática y esféricamente simétrico; una vez más este no es vacío, debido a que se llena de un campo electrostático cuyo momento-energía debe incluirse en las ecuaciones de campo.

#### 3.6.1. La forma de la métrica para una solución estelar interior

La mayoría de las estrellas en el cielo son lo suficientemente densas para efectos relativistas generales que son importantes en la determinación de su estructura. Esto es cierto para estrellas de secuencia principal (nuestro Sol es de secuencia principal), gigantes rojas e incluso para objetos altamente densos como enanas blancas. Para estrellas de neutrones, las densidades altamente extremas significan que las fuerzas gravitacionales internas serán muy fuertes, y por tanto, se espera que los efectos relativistas jueguen un rol significativo en la determinación de su estructura y su estabilidad al colapso. Como resultado, es de interés práctico considerar las ecuaciones relativistas que gobiernan el equilibrio y la simetría central de la gravitación misma y su distribución de materia. Suponiendo simetría esférica y distribución de materia estática, la forma general apropiada de la métrica derivada anteriormente es

$$\boxed{ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)} \quad (3.48)$$

Así como en la derivación de la métrica de Schwarzschild, las dos funciones  $A(r)$  y  $B(r)$  se determinan resolviendo las ecuaciones de Einstein. Para nuestra discusión, no resolveremos las ecuaciones de campo para el vacío  $R_{\mu\nu} = 0$  que son válidas afuera del objeto esférico, sino es ecuaciones de campo que se cumplan en el interior del objeto. Es más conveniente escribir ésto en la forma (3.32)

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right), \quad (3.49)$$

donde  $T_{\mu\nu}$  es el tensor momento-energía de la materia que el objeto está compuesto,  $T \equiv T^\mu_\mu$  y  $\kappa = 8\pi G/c^4$ . En esta sección, supondremos que la materia está descrita por un fluido perfecto, de modo que

$$T_{\mu\nu} = \left( \rho + \frac{p}{c^2} u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} \right), \quad (3.50)$$

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

donde  $\rho(r)$  es la densidad de masa propia y  $p(r)$  es la presión isotrópica en un sistema de referencia instantáneo del fluido, las cuales pueden tomarse como funciones de la coordenada radial  $r$  para una distribución de materia estática. Usando  $u_\mu u^\mu = c^2$  encontramos que

$$T = \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) c^2 - p \delta_\mu^\mu = \rho c^2 - 3p$$

y por tanto las ecuaciones de campo (3.49) nos da

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left[ \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - \frac{1}{2} (\rho c^2 - p) g_{\mu\nu} \right]. \quad (3.51)$$

Como vimos en la subsección 3.4.1, las componentes no diagonales del tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  para la métrica (3.48) son cero mientras que las componentes diagonales están dadas por

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rB}, \quad (3.52)$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rB}, \quad (3.53)$$

$$R_{22} = \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right), \quad (3.54)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta. \quad (3.55)$$

Estamos interesados en determinar las implicaciones que tiene el que se anulen las componentes no diagonales del tensor de Ricci,  $R_{0i} = 0$  para  $i = 1, 2, 3$ . De las ecuaciones de campo (3.51), y usando  $g_{0i} = 0$ , vemos inmediatamente que  $u_i u_0 = 0$ . Combinando esto con  $u_\mu u^\mu = c^2$ , encontramos que las componentes covariantes de la 4-velocidad del fluido están dadas por

$$[u_\mu] = c\sqrt{A}(1, 0, 0, 0), \quad (3.56)$$

y entonces la 3-velocidad del fluido debe anularse en todas partes. Notemos que esta conclusión se cumple *sin* nuestra suposición de que la densidad propia  $\rho$  y la presión  $p$  sean independientes de  $t$ . El hecho de que la métrica (3.48) sea independiente de  $t$  implica automáticamente que la distribución de materia misma es estática y por tanto, el objeto estará en equilibrio hidrostático.

Usemos las componentes diagonales ( $\mu = \nu$ ) de las ecuaciones de campo (3.49) para obtener las ecuaciones diferenciales que las funciones  $A(r)$  y  $B(r)$  deben satisfacer. Sustituyendo la expresión (3.50) en el miembro derecho de las ecuaciones de campo y



### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

usando la métrica (3.48), encontramos que

$$R'_{00} = -\frac{1}{2}\kappa(\rho c^2 + 3p)A, \quad (3.57)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2}\kappa(\rho c^2 - p)B, \quad (3.58)$$

$$R_{22} = -\frac{1}{2}\kappa(\rho c^2 - p)r^2, \quad (3.59)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta. \quad (3.60)$$

De estas ecuaciones, obtenemos

$$\frac{R_{00}}{A} + \frac{R_{11}}{B} + \frac{2R_{22}}{r^2} = -\kappa\rho c^2.$$

Sustituyendo las expresiones (3.52)-(3.55) para las componentes del tensor de Ricci y simplificando, llegamos a

$$\left(1 - \frac{1}{B}\right) + \frac{rB'}{B^2} = \kappa r^2 \rho c^2 \quad (3.61)$$

el cual puede escribirse en la forma

$$\frac{d}{dr} \left[ r \left(1 - \frac{1}{B}\right) \right] = \kappa r^2 \rho c^2$$

Si integramos esta expresión con respecto a  $r$  y notamos que la constante de integración debe ser cero para que  $B$  no se anule en el origen (como se requiere en la ecuación (3.61)), encontramos que la solución para  $B(r)$  está dada por

$$B(r) = \left[ 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right]^{-1}, \quad (3.62)$$

donde hemos definido la función

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(\bar{r}) \bar{r}^2 d\bar{r}. \quad (3.63)$$

Ahora busquemos la ecuación diferencial que debe satisfacer la función  $A(r)$  en (3.48). Para empezar, esta se podría obtener sustituyendo para  $B(r)$  usando (3.62) en cualquiera de las ecuaciones (3.57)-(3.60). Es más conveniente e instructivo usar la ecuación de conservación  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  directamente, de la cual las ecuaciones de movimiento del fluido pueden derivarse. Usando (3.50) podemos escribir

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu\nu} &= \nabla_\mu \left[ \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu \right] - \nabla_\mu (p g^{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[ \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu \right] + \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) \Gamma^\nu_{\sigma\mu} u^\mu u^\sigma - g^{\mu\nu} \partial_\mu p, \end{aligned} \quad (3.64)$$

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

donde, para ir de la primer línea a la segunda, el primer término ha sido escrito usando la expresión  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g})T^{\mu\nu} + \Gamma^\nu_{\sigma\mu}T^{\mu\sigma}$  para la divergencia covariante y el segundo término ha sido manipulado notando que  $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$  y que  $p$  es una función escalar.

De (3.56), tenemos que  $u^0 = c/\sqrt{A}$  y  $u^i = 0$ , y dado que  $\rho$  y  $p$  no dependen de  $t$ , el primer término del miembro derecho de (3.64) debe anularse. Por la misma razón, el segundo término se reduce a  $(\rho c^2 + p)\Gamma^\nu_{00}/A$ . Usando  $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc})$  y (3.48) tenemos

$$\Gamma^\nu_{00} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu A,$$

y, así, la conservación  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  puede escribirse como

$$\frac{\rho c^2 + p}{2A}\partial_\sigma A + \partial_\sigma p = 0. \quad (3.65)$$

Dado que  $A$  es función sólo de  $r$ , la ecuación anterior es trivial para  $\sigma = 0$  y en este caso recuperamos el hecho de que  $p$  es independiente de  $t$ . Similarmente, para  $\sigma = 2$  y  $\sigma = 3$  encontramos que las derivadas correspondientes de  $p$  también se anulan, lo cual es compatible con la simetría esférica. Para  $\sigma = 1$ , la relación (3.65) no es trivial y queda (los apóstrofes indican  $d/dr$ )

$$\frac{A'}{A} = \frac{2p'}{\rho c^2 + p}, \quad (3.66)$$

la cual nos da una ecuación diferencial en términos de  $\rho(r)$  y  $p(r)$  que  $A(r)$  debe satisfacer en equilibrio hidrostático.

#### 3.6.2. Ecuaciones relativistas para una estructura estelar

las ecuaciones (3.62) y (3.66) muestran como calcular las funciones  $A(r)$  y  $B(r)$  en la métrica (3.48), dando funciones particulares de  $\rho(r)$  y  $p(r)$ . Especificar estas dos funciones implica una *ecuación de estado*  $p = p(r)$  eliminando  $r$ . Para investigaciones astrofísicas, uno está más interesado en construir modelos de la distribución de la densidad y presión dentro de una estrella bajo la suposición de alguna ecuación de estado casi-realista [16, 17].

Empecemos pues, con la primera ecuación de estructura estelar que toma la forma simple de (3.63)

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (3.67)$$

la cual relaciona las funciones  $m(r)$  y  $\rho(r)$ . El siguiente paso es obtener una ecuación que vincule  $m(r)$  y  $\rho(r)$ . Esto se logra de una forma más conveniente usando (3.54) y (3.59):

$$\frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) = -\frac{1}{2}\kappa(\rho c^2 - p)r^2$$

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

Eliminando las funciones  $A$  y  $B$  usando (3.66) y (3.62) y simplificando, se obtiene la segunda ecuación de estructura estelar,

$$\boxed{\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{r^2}(\rho c^2) \left[ \frac{4}{c^4} p r^3 + \frac{Gm(r)}{c^2} \right] \left[ 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right]}, \quad (3.68)$$

la cual se conoce como la *ecuación de Oppenheimer-Volkoff*. Como se mencionaba anteriormente, para obtener un sistema de ecuaciones necesitamos definir la ecuación de estado para la materia, la cual da la presión en términos de la densidad, es decir

$$p = p(\rho). \quad (3.69)$$

Esta es tercera (y última) ecuación de estructura estelar. Notemos que para varios sistemas astrofísicos, la materia satisface una ecuación de estado *politrópica* de la forma  $p = K\rho^\gamma$ , donde  $K$  y  $\gamma$  son constantes. En la notación usual,  $\gamma = 1 + 1/n$ , donde  $n$  se conoce como el *índice politrópico*.

El conjunto de las tres ecuaciones (3.67)-(3.69) contiene dos ecuaciones diferenciales acopladas, y, para obtener una solución única debemos especificar las dos condiciones de frontera. La primera es directa, pues  $m(0) = 0$ , dejando que sólo una condición de frontera ajustable sea especificada. Es común elegir que este parámetro ajustable que sea la presión central  $p(0)$  o equivalentemente la densidad central  $\rho(0)$ , la cual puede obtenerse inmediatamente de la ecuación de estado (3.69). Son pocas las soluciones exactas conocidas para ecuaciones de estado realistas, y en la práctica, el sistema de ecuaciones se integra numéricamente o con algún software, como Mathematica o Maple por ejemplo. El procedimiento es ‘integrar hacia afuera’ desde  $r = 0$  hasta que la presión se anule. Esta condición define la superficie ( $r = R$ ) de la estrella, pues de otro modo tendríamos un gradiente de presión infinito, y por tanto una fuerza infinita sobre elementos de material que constituyen la capa exterior de la estrella. Para  $r > R$ ,  $\rho(r)$  y  $p(r)$  son cero y  $m(r) = m(R) = M$ , y la geometría del espacio-tiempo queda descrita por la métrica de Schwarzschild con parámetro de masa  $M$ .

La solución interior estelar analítica más simple para una estrella relativista se obtiene suponiendo  $\rho = \text{constante}$ , la cual constituye una ecuación de estado. Esta corresponde a una ecuación de estado ultra rígida que representa un fluido incompresible. Consecuentemente la rapidez del sonido en el fluido es proporcional a  $\sqrt{d\rho/dp}$ , es infinita (lo cual no es válido relativistamente). Sin embargo, se cree que las estrellas de neutrones densas casi tienen densidad uniforme y así, este caso simple se vuelve de interés práctico.

La ecuación (3.67) se simplifica bastante, con una serie de cálculos (resolviendo la ecuación de Oppenheimer-Volkoff para  $p$ , fijando  $p(0) = p_0$  y usando las condiciones de frontera como  $p(r = R) = 0$ ) tenemos una expresión útil de la presión central

$$p_0 = \rho c^2 \frac{1 - (1 - 2\mu/R)^{1/2}}{3(1 - 2\mu/R) - 1}. \quad (3.70)$$

## CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

### 3.6.3. Teorema de Buchdahl

Una de las más importantes características de la solución de Schwarzschild con densidad constante es que impone una restricción en la conexión de la ‘masa’ de las estrellas  $M$  y su (coordenada) radio  $R$ . Para derivar esta restricción, notemos que (3.70) implica que  $p_0 \rightarrow \infty$  mientras que  $\mu \rightarrow 4/9$ . Debido a que la presión es un escalar, este infinito persistirá en cualquier sistema de coordenadas, así, uno puede evitar este comportamiento con la siguiente condición

$$\frac{GM}{c^2 R} < \frac{4}{9}. \quad (3.71)$$

Apesar de que sólo hemos mostrado que esta restricción se cumple para un objeto con densidad constante, el *teorema de Buchdahl* [24] establece que (3.71) es válida para cualquier ecuación de estado. Este teorema puede demostrarse directamente de las ecuaciones de Einstein pero requiere de mucho cuidado y no es objetivo de esta tesis. La ecuación (3.71) puede considerarse como un límite superior o cota sobre la masa de una estrella para un radio fijo. Si uno intenta empaquetar más masa dentro de  $R$  que la permitida por (3.71), la relatividad general admite una solución no estática: el equilibrio hidrostático se rompe por el incremento de la atracción gravitacional. Por tanto, dicha estrella debe colapsar hacia dentro sin parar. Durante el colapso, la geometría exterior queda descrita por la métrica de Schwarzschild y uno obtiene un hoyo negro de Schwarzschild. El límite (3.67) es bastante fácil de alcanzar. Por ejemplo, la densidad de la estrella de neutrones tiene una densidad alrededor de  $10^{16} \text{kgm}^{-3}$  y, asumiendo su densidad constante, encontramos de (3.71) y  $m = 4/3\pi\rho r^3$  que  $M < 7 \times 10^{31} \text{kg}$ . Esto es aproximadamente 35 masas solares cuyo orden es el mismo que el de la estrella más masiva de nuestra Galaxia.

### 3.6.4. La métrica en el exterior de una distribución esféricamente simétrica de masa y carga

Volvamos a la segunda aplicación física, es decir a la forma de la métrica afuera de un cuerpo *cargado* esféricamente simétrico. El exterior del objeto no es vacío, pues la región tiene un campo electrostático. Por tanto debemos, una vez más, resolver las ecuaciones de campo de Einstein para un espacio-tiempo estática y esféricamente simétrico en la presencia de un tensor momento-energía distinto de cero, esta vez representa el campo electromagnético del objeto.

Dado que hemos supuesto simetría esférica y un objeto estático; la forma general de la métrica está, una vez más, por (3.48). Las dos funciones  $A(r)$  y  $B(r)$  quedarán determinadas al resolver las ecuaciones completas de Einstein afuera del objeto esférico. Es más conveniente escribir estas ecuaciones en la forma (3.49). En este caso,  $T_{\mu\nu}$  es el tensor momento-energía del campo electromagnético de un objeto cargado, el cual tiene la forma

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

$$T_{\mu\nu} = -\mu_0^{-1} \left( F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right), \quad (3.72)$$

donde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  es el tensor electromagnético y  $A_\mu$  es el 4-potencial electromagnético. Lo primero que debemos notar en este tensor momento-energía es que su traza debe ser cero,

$$T \equiv T^\mu_\mu = -\mu_0^{-1} \left( F_{\mu\rho} F^{\mu\rho} - \frac{1}{4} \delta^\mu_\mu F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) = 0.$$

En este caso, las ecuaciones de campo de Einstein (3.49) se simplifica

$$R_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.73)$$

Además de las ecuaciones de Einstein, nuestra solución también debe satisfacer las ecuaciones de Maxwell. En la región exterior del objeto cargado, la 4-densidad de corriente es cero y así, las ecuaciones de Maxwell quedan

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (3.74)$$

$$\nabla_\sigma F_{\mu\sigma} + \nabla_\nu F_{\sigma\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\sigma} = 0 \quad (3.75)$$

Las ecuaciones de Einstein y Maxwell están acopladas debido a que  $F_{\mu\nu}$  aparece en las ecuaciones de campo gravitacional a través del tensor momento-energía (3.72) y la métrica  $g_{\mu\nu}$  aparece en las ecuaciones del campo electromagnético a través de la derivada covariante.

La restricción impuesta sobre los coeficientes de la métrica  $g_{\mu\nu}$  (o campos gravitacionales) al requerir que la solución sea esféricamente simétrica y estática está representada en la elección de la métrica (3.48). Consideremos las implicaciones de estas simetrías pedidas para la forma del campo electromagnético. En este caso, el 4-potencial electromagnético en las coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  toma la forma

$$[A^\mu] = \left( \frac{\phi(r)}{c^2}, a(r), 0, 0 \right), \quad (3.76)$$

donde  $\phi(r)$  y  $a(r)$  dependen sólo de  $r$  y se pueden interpretar como el potencial electrostático y la componente radial del 3-potencial vectorial respectivamente cuando  $r \rightarrow \infty$  (el factor extra de  $1/c$  multiplicado por  $\phi(r)$  en (3.76)), comparado con la forma usual en las coordenadas de Minkowski, es el resultado de tomar  $x^0$  en vez de  $x^0 = ct$ ; ahora, el 3-potencial vectorial  $a(r)$  no debe confundirse con la función  $A(r)$  de la métrica (3.48). De (3.76), el tensor toma la forma

$$[F_{\mu\nu}] = E(r) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

donde  $E(r)$  es una función arbitraria de  $r$  y puede interpretarse como la componente radial del campo electrostático cuando  $r \rightarrow \infty$ . Nuestro objetivo es usar las ecuaciones de Einstein (3.73) y las ecuaciones de Maxwell (3.74)-(3.75) para determinar las tres funciones desconocidas  $A(r)$ ,  $B(r)$  y  $E(r)$ .

Empecemos con las ecuaciones de Maxwell, las ecuaciones (3.75) se satisfacen automáticamente, por definición. Además, como  $F_{\mu\nu}$  es antisimétrico, podemos escribir su divergencia covariante en la primer ecuación de Maxwell (3.74) para obtener

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0 \quad (3.78)$$

donde  $g$  es el determinante de la métrica. Para el elemento de línea diagonal como (3.48), el determinante es simplemente el producto de los elementos de la diagonal, de modo que  $g = -A(r)B(r)r^4 \sin^2 \theta$ . Con la forma dada de  $F_{\mu\nu}$  anteriormente, la expresión (3.78) nos da

$$\partial_1 (\sqrt{AB} r^2 F^{10}) = 0 \quad (3.79)$$

Escribiendo las componentes contravariantes como  $F^{10} = g^{1\mu} g^{0\nu} F_{\mu\nu} = g^{11} g^{00} F_{10} = -E/(AB)$ , obtenemos la ecuación

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{r^2 E}{\sqrt{AB}} \right) = 0.$$

Integrando nos da

$$E(r) = \frac{k \sqrt{A(r)B(r)}}{r^2}, \quad (3.80)$$

donde  $k$  es una constante de integración. Si hacemos suposición de que la métrica es asintóticamente plana cuando  $A(r) \rightarrow c^2$  y  $B(r) \rightarrow 1$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . Identificando  $E(r)$  como la componente radial del campo eléctrico en el infinito, tenemos que  $k = Q/(4\pi\epsilon_0 c)$ , donde  $Q$  es la carga total del objeto.

Volviendo a las ecuaciones de Einstein (3.73). Las componentes del tensor de Ricci para la métrica (3.48) están dadas por (3.52)-(3.55), y la forma del tensor electromagnético energía momento  $T_{\mu\nu}$  se puede hallar sustituyendo la forma (3.77) para  $F_{\mu\nu}$  en la ecuación (3.72). Al hacer esta sustitución, se ve que las componentes no diagonales de  $T_{\mu\nu}$  son cero, y así, las ecuaciones de Einstein para  $\mu \neq \nu$  se satisfacen idénticamente. Para las componentes de la diagonal de las ecuaciones de Einstein, tenemos que

$$R'_{00} = -\frac{1}{2} \kappa c^2 \epsilon_0 E^2 / B, \quad (3.81)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2} \kappa c^2 \epsilon_0 E^2 / A, \quad (3.82)$$

$$R_{22} = -\frac{1}{2} \kappa \epsilon_0 r^2 E^2 / (AB) \quad \text{label eq : 12,41}, \quad (3.83)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta. \quad (3.84)$$

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

donde hemos usado  $F_0^1 = g^{11}F_{01} = E/B$  y  $F_1^0 = g^{00}F_{10} = E/A$ ; también usamos  $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$ . De (3.81) y (3.82), tenemos que

$$BR_{00} + AR_{11} = 0$$

Sustituyendo las expresiones (3.52) y (3.53) para las componentes del tensor de Ricci y reacomodando términos, obtenemos la relación

$$BA' + AB' = 0$$

lo cual implica que  $AB = \text{constante}$ . Podemos fijar esta constante usando la condición de que la métrica sea asintóticamente plana cuando  $r \rightarrow \infty$ , así

$$A(r)B(r) = c^2 \quad (3.85)$$

Otra ecuación independiente se puede obtener de la  $R_{22}$  de las ecuaciones de Einstein. Insertando la expresión (3.54) para la componente del tensor de Ricci y usando (3.80), encontramos

$$A + rA' = c^2 \left( 1 - \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2} \right).$$

Notando que  $A + rA' = (rA)'$  e integrando, obtenemos

$$A(r) = c^2 \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2} \right)$$

donde vemos que la constante de integración como  $-2GM/c^2$  y  $M$  es la masa del objeto pues el elemento de línea se reduce al caso de Schwarzschild cuando  $Q = 0$ . Las soluciones para  $B(r)$  y  $E(r)$  se encuentran inmediatamente de (3.85) y (3.80) respectivamente.

Reuniendo estos resultados y definiendo las constantes  $\mu = GM/c^2$  y  $q^2 = GQ^2/(4\pi\epsilon_0 c^4 r^2)$ , el elemento de línea para el espacio-tiempo afuera de un objeto estática y estáticamente simétrico de masa  $M$  y carga  $Q$  tiene la forma

$$\boxed{ds^2 = c^2 \left( 1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),} \quad (3.86)$$

esta solución resultante se conoce como la geometría de *Reissner-Nordström*

### 3.7. espacio-tiempo estático (vectores de Killing)

La variedad de nuestro interés es  $M$ , la consideramos de dimensión 4 y de clase  $C$  ( $k \geq 4$ ) diferenciable con las simetrías de estaticidad y esférica con nuestra métrica

$$g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (3.87)$$

### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

$\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$  con signatura  $(+, -, -, -)$ . La simetría estática implica la existencia de un vector de Killing  $\xi_{(t)}$ , que es el generador infinitesimal de un grupo de isometrías temporales del espacio-tiempo, ortogonal a una hipersuperficie

$$L_{\xi}g = 0 \quad (3.88)$$

$$\omega = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\xi^{\beta}\nabla^{\gamma}\xi^{\delta}dx^{\alpha} = 0 \quad (3.89)$$

(\*) esto es el campo de Killing  $\xi_{(t)}$  de la isometría temporal es integrable. La existencia de hipersuperficies ortogonales nos permite descomponer la métrica en la forma

$$g = g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} = g_{00}(x^k)dt^2 - g_{ij}(x^k)dx^i dx^j \quad (3.90)$$

con  $i = 1, 2, 3$  de manera que no existen componentes cruzadas de la métrica y éstas solo dependen de las coordenadas espaciales. El vector de Killing es  $\xi_{(t)} = \frac{\partial}{\partial t}$

#### 3.7.1. Espacios tiempo esféricamente simétricos

La existencia de simetrías facilita la resolución de las ecuaciones de Einstein, es por eso que las soluciones exactas construidas hacen uso de esto. De manera particular decimos que una métrica esféricamente simétrica tiene las mismas simetrías que la esfera, como ya hemos mencionado, las simetrías están relacionadas con la existencia de vectores de Killing, que para el caso de la simetría esférica existen 3 vectores de Killing  $\xi_i$   $i = 1, 2, 3$  que satisfacen las relaciones de conmutación del grupo de rotaciones  $SO_3$

$$[\xi_{(i)}, \xi_{(j)}] = \epsilon_{ijk}\xi_{(k)} \quad (3.91)$$

Como sabemos, del teorema de Frobenius [25] las curvas integrales que forman los vectores  $\xi_{(i)}$  forman subvariedades que son esferas. Si adoptamos las coordenadas a los vectores de Killing para simplificar la forma de la métrica, ésta será expresada en la forma

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \quad (3.92)$$

y sus vectores de Killing son:

$$\xi_1 = \sin\theta \frac{\partial}{\partial\phi} + \cot\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \quad (3.93)$$

$$\xi_2 = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial\phi} + \cot\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \quad (3.94)$$

$$\xi_3 = -\frac{\partial}{\partial\phi} \quad (3.95)$$



### CAPÍTULO 3. RELATIVIDAD GENERAL: SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

---

## Teoremas Generadores de Soluciones

La ecuación que relaciona la componente radial y la angular del tensor de Einstein, resultado de imponer  $P_r$  y  $\rho_t$ , ( $G_\theta^\theta = G_r^r$ ), ha sido utilizado en varias ocasiones con interpretaciones distintas. Tolman [17] obtiene 7 soluciones exactas utilizando  $G_\theta^\theta = G_r^r$  e imponiendo restricciones adicionales, sólo dos de estas soluciones conocidas como Tolman IV y tolman VII son físicamente aceptables. Bayin [18] expresa la relación  $G_\theta^\theta = G_r^r$  como una ecuación diferencial de Pffian en tres dimensiones( es decir  $f_1(y, B, r)dB + f_3(y, B, r)dr = 0$ ) y constituye 5 soluciones, una de ellas es regular, sin embargo, la presión y la densidad no son funciones monótonas decrecientes. Matese y Whitman presentan un método para generar soluciones también, a partir de la relación  $G_\theta^\theta = G_r^r$  [19] y un formalismo que permite la integración de las ecuaciones para un fluido isotrópico bajo ciertas suposiciones, a partir de ésto, constituye una serie de soluciones; algunas conocidas y otras nuevas. Pant [20] también utiliza como base la relación de isotropía. La gran mayoría de las soluciones obtenidas para el caso sin carga suponen una forma de las dos funciones métricas. Petarpa prueba una serie de teoremas para generar nuevas soluciones, la prueba usa como ecuación base la que sigue de  $G_\theta^\theta = G_r^r$ , probaremos teoremas análogos para el caso cargado[saibal]. A continuación, damos su formulación y las pruebas, su importancia radica en que ésta es una herramienta que permite en algunos casos obtener nuevas soluciones. Ray y Das [30] utilizan la ecuación equivalente al caso  $G_\theta^\theta = G_r^r$ , es decir  $P_r = P_t$  para obtener una solución cargada tipo Tolman VI, ésta es singular. Otra serie de trabajos desarrollados toman como ecuación maestra para generar soluciones  $P_t = P_r$ , que involucra las componentes  $g_{rr}$ ,  $g_{tt}$ ; sus derivadas y la función de carga [31]

### 4.1. Ecuaciones de Campo Einstein-Maxwell

Las ecuaciones de Einstein descritas  $G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$ , requieren de la asignación del tensor momento energía. Para nuestros propósitos, éste estará formado por una con-

## CAPÍTULO 4. TEOREMAS GENERADORES DE SOLUCIONES

---

tribución del fluido perfecto más la parte asociada al tensor de Maxwell

$$T_{\mu\nu} = \{(\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}\} + \frac{1}{4\pi} \left[ F_{\mu\alpha} F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right] \quad (4.1)$$

donde la parte entre llaves corresponde al fluido perfecto y la parte entre corchetes representa la parte del tensor de Maxwell  $F_{\mu\nu}$

El modelo de nuestro interés corresponde a la situación en la que la presión radial  $P_r$  y la presión tangencial  $P_t$  son iguales, es decir,  $P_r = P_t = P$  lo que nos da una relación entre la carga, las funciones métricas y sus derivadas como notaremos más adelante. La ecuación de conservación del tensor de momento-energía  $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$  es

$$P' + \frac{P + \rho c^2}{y} y' - \frac{2q}{kr^4} q' \quad (4.2)$$

De la forma del elemento de línea, las componentes de las ecuaciones de Einstein que son diferentes de cero son:

$$k\rho c^2 + \frac{q^2}{r^4} = -\frac{B'}{r} - \frac{B-1}{r^2} \quad (4.3)$$

$$kP - \frac{q^2}{r^4} = -\frac{2By'}{ry} + \frac{B-1}{r^2} \quad (4.4)$$

$$kP + \frac{q^2}{r^4} = \frac{1}{2} \left( \frac{y'}{y} + \frac{1}{r} \right) B' + \frac{y'}{ry} B + \frac{y''}{y} B \quad (4.5)$$

Restando a (4.5) la ecuación (4.4) obtenemos

$$2r^2 B y'' + r(B'r - 2B)y' + y \left( B'r - 2B + 2 - \frac{q^2}{r^2} \right) = 0 \quad (4.6)$$

Si consideramos a  $B$  y  $q$  como conocidas, ésta ecuación puede verse como una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para la función  $y$ . Reacomodando términos tenemos

$$(y'r + y)rB' + (-2y'r + 2y'' - 2y)B + 2y \left( 1 - \frac{2q^2}{r^2} \right) \quad (4.7)$$

que para funciones  $y$  y  $q$  conocidas tenemos una ecuación diferencial ordinaria no homogénea de primer orden, lineal para  $B$ . Las relaciones (4.6) y (4.7) son la base para probar los cuatro teoremas de ésta tesis que sirven para generar nuevas soluciones del sistema (4.2)-(4.5)

**Definición 1** Sea  $(M, y)$  una variedad  $C^k$  diferenciable ( $k \geq 4$ ) de dimensión 4 estática y esféricamente simétrica, con

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -y^2(r) dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2 d\Omega^2 \quad (4.8)$$

---

## CAPÍTULO 4. TEOREMAS GENERADORES DE SOLUCIONES

---

Se dice que  $\{y, B, q\}$  es una Solución Estática Cargada y Esféricamente Simétrica SECES si satisface (4.2)-(4.5)

**Definición 2** Se dice que una transformación  $T$  es idempotente si  $T^2 = T$ . Por ejemplo, un teorema será idempotente siempre que apliquemos la transformación más de una vez, no se obtengan nuevas soluciones.

**Teorema 1** Supongamos que  $\{y_0(r), B_0(r)\}$  es una SECES. Sea

$$\Delta_0(r) = \frac{r^2}{[(ry_0)']^2} \exp \left\{ \int \frac{4y_0'}{(ry_0)'} dr \right\}. \quad (4.9)$$

Entonces, para toda  $\lambda$ , la geometría definida por el momento de línea haciendo

$$\boxed{ds^2 = -y_0(r)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{B_0(r) + \lambda \Delta_0(r)} + r^2 d\Omega^2} \quad (4.10)$$

es también una SECES. Es decir, el mapeo

$$T_1(\lambda) : \{y_0, B_0\} \mapsto \{y_0, B_0 + \lambda \Delta_0(y_0)\} \quad (4.11)$$

manda SECES a SECES. Además, una segunda aplicación de la transformación no aporta nueva información,  $T_1 = T_1(\sum \lambda_i)$  es “idempotente”, de modo que

$$T_1(\lambda_n) \circ \dots \circ T_1(\lambda_2) \circ T_1(\lambda_1) = T_1(\sum \lambda_i) : \{y_0, B_0\} \mapsto \left\{ y_0, B_0 + \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \Delta_0(y_0) \right\} \quad (4.12)$$

Notamos también que  $T_1$  siempre tiene inversa

$$[T_1(\lambda)]^{-1} = T_1(-\lambda). \quad (4.13)$$

Supongamos que  $\{y_0(r), B_0(r)\}$  es una solución del sistema de ecuaciones (1-4), es decir, es SECES.

Deseamos encontrar bajo qué condiciones  $\{y_0(r), B_1(r)\}$  también satisface el sistema (1-4). Sin pérdida de generalidad, sea

$$B_1(r) = B_0(r) + \lambda \Delta_0(r). \quad (4.14)$$

Podemos usar la ecuación (4.7) para determinar  $\Delta_0(r)$ . Si sustituimos  $B_1(r)$  en (4.7)

$$[r(ry_0)'](B_0 + \lambda \Delta_0)' + [2r^2 y_0'' - 2(ry_0)'](B_0 + \lambda \Delta_0) + 2y_0 \left(1 - \frac{2q^2}{r^2}\right) = 0$$

Podemos re-escribir esta ecuación como

$$\begin{aligned} & [r(ry_0)'] B_0' + [2r^2 y_0'' - 2(ry_0)'] B_0 + 2y_0 \left(1 - \frac{2q^2}{r^2}\right) \\ & + [r(ry_0)'] \Delta_0' + [2r^2 y_0'' - 2(ry_0)'] \Delta_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

## CAPÍTULO 4. TEOREMAS GENERADORES DE SOLUCIONES

---

Debido a que los primeros tres términos forman parte de la ecuación diferencial ordinaria *no homogénea* de primer orden con respecto a  $B$ , ésta se simplifica a

$$[r(ry_0)'] \Delta'_0 + [2r^2 y''_0 - 2(ry_0)'] \Delta_0 = 0, \quad (4.16)$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria *homogénea* de primer orden con respecto a  $\Delta_0$ .

Ahora, podemos determinar a  $\Delta_0$  del siguiente modo,

$$[r(ry_0)'] \Delta'_0 = - [2r^2 y''_0 - 2(ry_0)'] \Delta_0. \quad (4.17)$$

dividiendo ambos miembros por  $[r(ry_0)']$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta'_0}{\Delta_0} &= \frac{-[2r^2 y''_0 - 2(ry_0)']}{[r(ry_0)']} \\ &= \frac{-2ry''_0}{(ry_0)'} + \frac{2}{r} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Integrando, obtenemos

$$\Delta_0(r) = \frac{r^2}{[(ry_0)']^2} \exp \left\{ \int \frac{4y'_0}{(ry_0)'} dr \right\}. \quad (4.19)$$

que es la expresión mencionada anteriormente.

Ahora, presentaremos otro teorema con una transformación diferente. Además, demostraremos la propiedad de “idempotencia”.

**Teorema 2** *Supongamos que  $\{y_0, B_0\}$  es una SECES. Sea*

$$u(r) = \sigma + \epsilon \int \frac{r dr}{y_0(r)^2 \sqrt{B_0(r)}}. \quad (4.20)$$

*Entonces, para toda  $\sigma$  y  $\epsilon$ , la geometría descrita por*

$$\boxed{ds^2 = -y_0(r)^2 u(r)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{B_0(r)} + r^2 d\Omega^2} \quad (4.21)$$

*es también una SECES. Es decir, el mapeo*

$$T_2(\sigma, \epsilon) : \{y_0, B_0\} \mapsto \{y_0 u(y_0, B_0), B_0\} \quad (4.22)$$

*mapea SECES a SECES. Además, una segunda aplicación de este teorema no aporta nueva información, es decir  $T_2$  es “idempotente”*

$$T_2(\sigma_n, \epsilon_n) \circ \cdots \circ T_2(\sigma_3, \epsilon_3) \circ T_2(\sigma_2, \epsilon_2) \circ T_2(\sigma_1, \epsilon_1) = T_2(\sigma_n \cdots \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1, \epsilon_n \cdots \epsilon_1), \quad (4.23)$$

donde

$$\begin{aligned} \epsilon_{n\dots 321} &= (\epsilon_1 \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_n) + (\sigma_1^{-1} \epsilon_2 \sigma_3 \cdots \sigma_n) + (\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \epsilon_3 \cdots \sigma_n) \\ &\quad + \cdots + (\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \cdots \epsilon_n). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Y más aun, el teorema 2 es invertible (siempre y cuando  $\sigma \neq 0$ ):

$$[T_2(\sigma, \epsilon)]^{-1} = T_2(1/\sigma, -\epsilon). \quad (4.25)$$

### Reducción de orden:

Este es un método para encontrar una solución general de una ecuación diferencial lineal, a partir de una solución particular. En este método, empezamos con una ecuación diferencial lineal de orden  $n$ . Es especialmente útil para resolver una ecuación diferencial de segundo orden, reduciendo ésta, a una ecuación diferencial lineal de primer orden. La demostración del teorema 2 está basada en la técnica de “reducción de orden”. Supongamos que  $\{y_0(r), B_0(r)\}$  satisface la ecuación (4.6), es decir, es una SECES, sea

$$y_1(r) = y_0(r) u(r). \quad (4.26)$$

si  $\{y_1(r), B_0(r)\}$  también es SECES, debe satisfacer

$$2r^2 B_0 (y_0 u)'' + (r^2 B_0' - 2r B_0) (y_0 u)' + (r B_0' - 2B_0 + 2) (y_0 u) = 0 \quad (4.27)$$

expandiendo la ecuación

$$\begin{aligned} &2r^2 B_0 (y_0'' u + 2y_0' u' + y_0 u'') + (r^2 B_0' - 2r B_0) (y_0' u + y_0 u') \\ &+ (r B_0' - 2B_0 + 2) (y_0 u) = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

y reagrupando términos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} &\{2r^2 B_0 y_0'' + (r^2 B_0' - 2r B_0) y_0' + (r B_0' - 2B_0 + 2) y_0\} u \\ &+ (r^2 y_0 B_0' + 4r^2 y_0' B_0 - 2r y_0 B_0) u' + (2r^2 y_0 B_0) u'' = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Obtenemos una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con respecto a  $u$  simplificada

$$(r^2 y_0 B_0' + 4r^2 y_0' B_0 - 2r y_0 B_0) u' + (2r^2 y_0 B_0) u'' = 0, \quad (4.30)$$

la cual es una ecuación diferencial homogénea de segundo orden, que depende de  $u'$  y  $u''$ . (De modo que podemos verla como una ecuación de primer orden con respecto a  $u'$ ) separando variables, se tiene que

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{1}{2} \frac{B_0'}{B_0} - 2 \frac{y_0'}{y_0} + \frac{1}{r}. \quad (4.31)$$

ahora,  $u''/u' = \ln(u')/dt$ , integrando dos veces ambos miembros, obtenemos

$$u = \sigma + \epsilon \int \frac{r dr}{y_0(r)^2 \sqrt{B_0(r)}}, \quad (4.32)$$

## CAPÍTULO 4. TEOREMAS GENERADORES DE SOLUCIONES

---

que depende de la solución original  $\{y_0(r), B_0(r)\}$ , y de dos constantes de integración arbitrarias  $\sigma$  y  $\epsilon$ .

Para ver que la transformación  $T_2$  del Teorema 2 es “idempotente” primero demostramos que

$$T_2 \circ T_2 \triangleq T_2, \quad (4.33)$$

La regla de composición es

$$T_2(\sigma_2, \epsilon_2) \circ T_2(\sigma_1, \epsilon_1) = T_2 \left( \sigma_2 \sigma_1, \epsilon_1 \sigma_2 + \frac{\epsilon_2}{\sigma_1} \right). \quad (4.34)$$

En este capítulo, consideraremos una regla de composición de dos fases para hallar la idempotencia. En particular, las características más sobresalientes de estas fases son:

- Para ver “idempotencia”, veamos que para una  $B_0(r)$  fija, la ecuación diferencial reciente (4.7) tiene una solución cuyo espacio es bidimensional.
- Debido a que  $T_2$  toma cualquier solución específica y lo mapea a un espacio bi-paramétrico ( $T_2 : \{T_2(\sigma, \epsilon) \mid \epsilon, \sigma \in \mathbb{R}\}$ ), cualquier aplicación consecutiva de  $T_2$  a lo más que puede hacer es enviarla al mismo espacio. La forma de la solución es la misma y no se ha generado una nueva solución.

Explícitamente, en el primer paso:

$$y_0 \rightarrow y_1 = y_0 \left\{ \sigma_1 + \epsilon_1 \int \frac{r \, dr}{y_0(r)^2 \sqrt{B_0(r)}} \right\}, \quad (4.35)$$

mientras que en el segundo paso

$$y_1 \rightarrow y_2 = y_1 \left\{ \sigma_2 + \epsilon_2 \int \frac{r \, dr}{y_1(r)^2 \sqrt{B_0(r)}} \right\}. \quad (4.36)$$

O bien:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_0 \left\{ \sigma_1 + \epsilon_1 \int \frac{r \, dr}{y_0(r)^2 \sqrt{B_0(r)}} \right\} \\ &\times \left\{ \text{Redu} \sigma_2 + \epsilon_2 \int \frac{r \, dr}{y_0(r)^2 \sqrt{B_0(r)} [\sigma_1 + \epsilon_1 \int r \, dr / (y_0(r)^2 \sqrt{B_0(r)})]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Pero esto se puede escribir como

$$\begin{aligned} y_2 &= y_0 \, u \left\{ \sigma_2 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \int \frac{du}{u^2} \right\} \\ &= y_0 \, u \left\{ \sigma_2 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \int d \left( \frac{1}{u} \right) \right\} \\ &= y_0 \, u \left\{ \sigma_2 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left[ \frac{1}{u} - \frac{1}{\sigma_1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

de donde

$$y_2 = y_0 \left\{ -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} + \left[ \sigma_2 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{1}{\sigma_1} \right] u \right\}. \quad (4.39)$$

y, por tanto, podemos escribir como

$$Z_1 = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} + \left[ \sigma_2 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{1}{\sigma_1} \right] u, \quad (4.40)$$

$$= \sigma_2 \sigma_1 + \left( \sigma_2 \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{\sigma_1} \right) \int \frac{r dr}{y_0(r)^2 \sqrt{B_0(r)}} \quad (4.41)$$

la cual es la ley de composición establecida anteriormente

$$T_2(\sigma_2, \epsilon_2) \circ T_2(\sigma_1, \epsilon_1) = T_2 \left( \sigma_2 \sigma_1, \epsilon_1 \sigma_2 + \frac{\epsilon_2}{\sigma_1} \right) \quad (4.42)$$

Es importante mencionar que la ley de composición para  $T_2$  es consecuencia de la aplicación de reducción de orden de ecuaciones diferenciales de segundo orden, y no de SECES. La ley de composición general se halla por inducción. Para encontrar la transformación inversa, hacemos  $\sigma_2 = 1/\sigma_1$  y  $\epsilon_1 = -\epsilon_2$ , de modo que

$$T_2(1/\sigma_1, -\epsilon_1) \circ T_2(\sigma_1, \epsilon_1) = T_2(1, 0) = \mathbf{I}. \quad (4.43)$$

Como otros casos particulares de la ley de composición, se tienen algunos resultados

$$\prod_{i=1}^n T_2(1, \epsilon_i) = T_2 \left( 1, \sum_{i=1}^n \epsilon_i \right), \quad (4.44)$$

y

$$T_2(\sigma, \epsilon)^n = T_2 \left( \sigma^n, \epsilon \left[ \sigma^{n-1} + \sigma^{n-3} \dots + \sigma^{-(n-3)} + \sigma^{-(n-1)} \right] \right). \quad (4.45)$$

Si  $\sigma > 1$  y  $n$  es lo suficientemente grande, vemos que

$$T_2(\sigma, \epsilon)^n \approx T_2(\sigma^n, \sigma^{n-1} \epsilon) = \sigma^{n-1} T_2(\sigma, \epsilon) \triangleq T_2(\sigma, \epsilon), \quad (4.46)$$

donde en el último paso, hemos usado el hecho de  $\sigma^{n-1}$  puede absorberse por medio de una redefinición de la coordenada temporal. De este resultado, vemos que para  $\sigma > 1$  fija (y fija pero arbitraria  $\epsilon$ ) aplicaciones repetitivas de  $T_2(\sigma, \epsilon)$  tendrán un límite definido.

Podemos combinar los teoremas 1 y 2 para generar otros dos. A continuación presentamos el teorema 3 tomando una SECES  $\{y_0, B_0\}$  y aplicándole el teorema 1, dando como resultado una nueva SECES  $\{y_0, B_1\}$ . La nueva  $B_1$  está dada por la ecuación del teo... 1. después aplicamos el teorema 2 a ésta, para obtener una nueva solución  $\{\tilde{y}, B_1\}$  donde  $\tilde{y}$  depende de la  $B_1$ .



## CAPÍTULO 4. TEOREMAS GENERADORES DE SOLUCIONES

---

**Teorema 3** Si  $\{y_0, B_0\}$  es una SECES, entonces para todo  $\sigma$ ,  $\epsilon$ , y  $\lambda$ , los la geometría definida por los tres parámetros dada por

$$ds^2 = -y_0(r)^2 \left\{ \sigma + \epsilon \int \frac{r \, dr}{y_0(r)^2 \sqrt{B_0(r) + \lambda \Delta_0(r)}} \right\}^2 dt^2 + \frac{dr^2}{B_0(r) + \lambda \Delta_0(r)} + r^2 d\Omega^2 \quad (4.47)$$

es también una SECES, donde  $\Delta_0$  es

$$\Delta_0(r) = \frac{r^2}{[(ry_0)']^2} \exp \left\{ \int \frac{4y_0'}{(ry_0)'} dr \right\}.$$

Es decir

$$\begin{aligned} T_3 &= T_2 \circ T_1 : \{y_0, B_0\} \mapsto \{y_0, B_0 + \lambda \Delta_0(y_0)\} \\ &\mapsto \{y_0 u(y_0, B_0 + \lambda \Delta_0(y_0)), B_0 + \lambda \Delta_0(y_0)\}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Ahora presentamos otro nuevo teorema. Pero esta vez, empezaremos aplicando el teorema 2 a  $\{y_0, B_0\}$ . Con la solución  $y_1 = y_0 u(y_0, B_0)$ . Después, aplicando el teorema 1 obtenemos una nueva solución  $\{y_1, \tilde{B}\}$ . Donde  $\tilde{B}$  depende de la nueva  $y_1$ .

**Teorema 4** Supongamos que  $\{y_0, B_0\}$  es una SECES, entonces para toda  $\sigma$ ,  $\epsilon$ , y  $\lambda$ , la geometría por los tres parámetros está dada por

$$ds^2 = -y_0(r)^2 \left\{ \sigma + \epsilon \int \frac{r \, dr}{y_0(r)^2 \sqrt{B_0(r)}} \right\}^2 dt^2 + \frac{dr^2}{B_0(r) + \lambda \Delta_0(y_1, r)} + r^2 d\Omega^2 \quad (4.49)$$

el cual también es una SECES, donde  $\Delta_0(y_1, r)$  es

$$\Delta_0(r) = \frac{r^2}{[(ry_0)']^2} \exp \left\{ \int \frac{4y_0'}{(ry_0)'} dr \right\}. \quad (4.50)$$

dependiendo de  $y_1 = y_0 u$ , donde, como antes

$$u(r) = \sigma + \epsilon \int \frac{r \, dr}{y_0(r)^2 \sqrt{B_0(r)}}. \quad (4.51)$$

es decir

$$\begin{aligned} T_4 &= T_1 \circ T_2 : \{y_0, B_0\} \mapsto \{y_0 u(y_0, B_0), B_0\} \\ &\mapsto \{y_0 u(y_0, B_0), B_0 + \lambda \Delta_0(y_0 u(y_0, B_0))\}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Al hacer un análisis, vemos que si aplicamos los teoremas 3 o 4 más de una vez se cumple que

- Los teoremas 3 y 4 son en general distintos, y ésto se debe que la composición de los teoremas 1 y 2 no conmutan en general.
- Los teoremas 3 y 4 no son en general, son idempotentes. Eso significa que cuando aplicamos el teorema 3 más de una vez, se obtienen soluciones distintas. Del mismo modo, el teorema 4 tampoco es idempotente.

Estos comentarios están implícitos en la siguiente ecuación

$$T_3 \not\equiv T_4; \quad T_3 \circ T_3 \not\equiv T_3; \quad T_4 \circ T_4 \not\equiv T_4. \quad (4.53)$$

## 4.2. Propiedades de los teoremas

Los teoremas que hemos desarrollado interactúan de muchas formas interesantes y muestran propiedades que serán útiles cuando deseemos clasificar SECES. Empecemos viendo como se relacionan los *teoremas 3* ( $T_3$ ) y *4* ( $T_4$ ) con los *teoremas 1* ( $T_1$ ) y ( $T_2$ )

$$\begin{aligned} T_3(g) &:= (T_2 \circ T_1)g = T_2(T_1(g)) ; \\ T_4(g) &:= (T_1 \circ T_2)g = T_1(T_2(g)) . \end{aligned} \quad (4.54)$$

donde  $g$  es la métrica que representa la de una SECES. Con esto en mente, algunas soluciones generadas por alguna solución inicial dada pueden ser identificadas. Por ejemplo

$$T_4 \circ T_1 \equiv T_1 \circ T_2 \circ T_1 \equiv T_1 \circ T_3, \quad (4.55)$$

or

$$T_3 \circ T_3 \equiv T_2 \circ T_1 \circ T_2 \circ T_1 \equiv T_2 \circ T_4 \circ T_1. \quad (4.56)$$

La idempotence de  $T_1$  and  $T_2$  con esta formula es:

$$\begin{aligned} (T_1 \circ T_1)g &= T_1(T_1(g)) \triangleq T_1(g); \\ (T_2 \circ T_2)g &= T_2(T_2(g)) \triangleq T_2(g). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Si los tomamos a la vez, podemos simplificar todas las fórmulas donde aparezcan  $T_1$  y  $T_2$  a lado de cada otra más de una vez. Veamos como funciona:

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_3)g &\equiv (T_2 \circ T_2 \circ T_1)g \triangleq (T_2 \circ T_1)g \equiv T_3(g); \\ (T_1 \circ T_4)g &\equiv (T_1 \circ T_1 \circ T_2)g \triangleq (T_1 \circ T_2)g \equiv T_4(g), \end{aligned} \quad (4.58)$$

del mismo modo

$$\begin{aligned} T_4 \circ T_3 &\equiv T_1 \circ T_2 \circ T_2 \circ T_1 \triangleq T_1 \circ T_2 \circ T_1 \equiv T_1 \circ T_3 \equiv T_4 \circ T_1; \\ T_3 \circ T_4 &\equiv T_2 \circ T_1 \circ T_1 \circ T_2 \triangleq T_2 \circ T_1 \circ T_2 \equiv T_2 \circ T_4 \equiv T_3 \circ T_2. \end{aligned} \quad (4.59)$$

## CAPÍTULO 4. TEOREMAS GENERADORES DE SOLUCIONES

---

Estas relaciones nos sirven para estructurar conjuntos de soluciones generadas por cualquier SECES tomada inicialmente y no sólo eso, sino también para clasificar cuáles métricas pueden producirse por estos teoremas, y cuáles no. Por ejemplo la propiedad de idempotencia de los teoremas 1 y 2 nos permite clasificar las soluciones en métricas semillas y no- semillas. Métricas semillas no pueden generarse usando los teoremas  $T_1$  o  $T_2$ , mientras que las que no son semillas están relacionadas por medio de uno de estos teoremas.

# Capítulo 5

## Aplicación del Teorema 1

Gupta y Kumar [11] obtienen una clase de estrellas superdensas con un fluido interior cargado, este modelo puede ser aplicable para una enana blanca, estrella de quarks o de neutrones. La masa máxima de las estrellas para su modelo fue de  $6,716998M_{\odot}$  con radio de  $18,92112\text{Km}$ . Cuando no se toma el efecto de la carga, el modelo se reduce a la solución interior de Scharzschild. Ellos parten de una geometría embebida de clase  $C^1$ , lo cual es cierto si ésta satisface la condición de Karmarker (1948)

$$R_{1414} = \frac{R_{1212}R_{1414} - R_{1224}R_{1334}}{R_{2323}} \quad (5.1)$$

con  $R_{2323} \neq 0$ , que para la métrica de Gupta-Kumar [11] implica

$$B(r) = \frac{1}{1 + K \left( \frac{dy(r)}{dr} \right)^2} \quad (5.2)$$

La solución tiene como elemento de línea

$$ds^2 = - \left( A + \sqrt{B + Cr^2} \right)^2 dt^2 + \frac{B + Cr^2 + KC^2r^2}{B + Cr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.3)$$

con carga

$$q(r)^2 = \frac{r^6 C^2 (1 + KC) \left( (A + \sqrt{B + Cr^2}) CK - \sqrt{B + Cr^2} \right)}{2 (A + \sqrt{B + Cr^2}) (B + Cr^2 + KC^2r^2)^2} \quad (5.4)$$

que se reduce al caso con densidad constante y sin carga cuando  $K = -1/C$ . Ésto nos permite identificar las funciones para la aplicación del teorema 1, como vimos en la prueba de este teorema, solo se requiere realizar la integral

$$I = \int \frac{4y'_0}{(ry'_0)'} dr \quad (5.5)$$

y para el modelo ()  $y_0(r) = A + \sqrt{B + Cr^2}$ , es decir

$$I = \int \frac{4Cr}{A\sqrt{B+Cr^2} + B + 2Cr^2} dr \quad (5.6)$$

luego de la integración y álgebra obtenemos la forma de  $\Delta(r)$

$$\Delta = \frac{\lambda r^2 o^2}{8 (A\sqrt{B+Cr^2} + 2Cr^2 + B)^2} \left[ \frac{J_+ - o^2}{J_- - o^2} \right]^{Ma} \left[ \frac{J_+^2 - o^2}{J_-^2 - o^2} \right]^{Ma} \left[ \frac{J_- - o}{J_- + o} \right]^{\sqrt{\frac{3J_-^2}{A+8B}}} U \left[ \frac{J_+ + o}{J_+ - o} \right]^{\sqrt{\frac{3J_+^2}{A+8B}}} \quad (5.7)$$

donde

$$\begin{aligned} J_{\pm} &= \sqrt{A^2 + 4B \pm A\sqrt{A^2 + 8B}} \\ o &= \sqrt{8(B + Cr^2)} \\ Ma &= 2\sqrt{1 + 8B/A^2} \\ U &= \sqrt{(B + 2Cr^2)^2 - A^2\sqrt{B + Cr^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [r(ry_0)'] B'_0 + [2r^2 y''_0 - 2(ry_0)'] B_0 + 2y_0 \left( 1 - \frac{2q^2}{r^2} \right) \\ + [r(ry_0)'] \Delta'_0 + [2r^2 y''_0 - 2(ry_0)'] \Delta_0 = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

La forma del elemento de línea que obtenemos es

$$ds^2 = - \left( A + \sqrt{B + Cr^2} \right)^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{KC r^2}{B + Cr^2(1 + CK)} + \lambda \Delta} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.9)$$

Esta solución se puede ver como una generalización de 3 soluciones conocidas a) si tomamos  $\lambda = 0$ , recuperamos la solución cargada obtenida por Gupta y Kumar [11] y b) si  $KC = -1$  y  $\lambda = 0$  tenemos la solución interior de Schwarzschild, recuperamos una solución que corresponde a una solución sin carga que generaliza a la solución interior de Schwarzschild. La forma de la presión y la densidad por simplicidad las expresaremos en términos de  $\Delta$

# Bibliografía

- [1] N Pant (2012), Relativistic modelling of a superdense star containing a charged perfect fluid, *Gravitation and Cosmology* (2012), DOI 10.1134/S0202289312030073
- [2] Demiansti, M, *Relativistic Astrophysics in International Series in Natural Philosophy*, Vol 11 Edited by P. Ter Har Pergamon Press Oxford (1985)
- [3] Glendenning W. K, *Compact Stars*, Springer Verlag New York (2000)
- [4] M. C. Durgapal, R. Bannerji. (Kumaun U.). Jan 15, 1983. 3pp.
- [5] Y.K. Gupta y A Maurya (2011), “A class of charged analogues of Durgapal and Fuloria superdense star”, *Astrophys Space Sci* Vol 331, pp 135-141
- [6] Petarpa Boonserm, *Some exact solutions in general relativity*, 2005. 165pp.
- [7] Petarpa Boonserm, Matt Visser, Silke Weinfurtner. *Solution generating theorems: perfect fluid spheres and the TOV equation* gr-qc/0609099 (2006)
- [8] Petarpa Boonserm, Matt Visser, Silke Weinfurtner, *Solution generating theorems for perfect fluid spheres*. *J.Phys.Conf.Ser.* 68 (2007) 012055 DOI: 10.1088/1742-6596/68/1/012055
- [9] Petarpa Boonserm, Matt Visser, Silke Weinfurtner, *Generating perfect fluid spheres in general relativity*, *Phys. Rev. D* 71 (2005) 124307 DOI: 10.1103/Physrevd.71.124037
- [10] Petarpa Boonserm, Matt Visser, Silke Weinfurtner, *Solution generating theorems for the TOV equation*, *Phys.Rev. D* 76 (2007) 044024 DOI: 10.1103/Physrevd.76.044024
- [11] Y.K. Gupta y A Maurya (2011), “A class of charged analogues of Durgapal and Fuloria superdense star”, *Astrophys Space Sci* Vol 331, pp 135-141

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [12] Philosophiænaturalis principia mathematica by Isaac Newton (copia personal de Newton de la primera edición y anotada por él.) University of Cambridge.
- [13] R. Wald (1984), General Relativity, University of Chicago Press
- [14] Albert Einstein, "Zur Elektrodynamik Bewegter Körper," Annalen der Physik 17, 891-921 (1905).
- [15] See Schwarzschild, K. (1916). "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie". Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 7: 189–196. Bibcode:1916AbhKP.....189S. Or the text of the original paper, in Wikisource Translation: Antoci, S.; Loinger, A. (1999). "On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory". arXiv:physics/9905030 [physics].  
Weimberg S. Weinberg, Gravitation and Cosmology
- [16] Tolman R. C, Static Solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid, Phys Rev, 55, 55, 364-373 (1939)
- [17] Tolman R. C, Static Solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid, Phys Rev, 55, 55, 364-373 (1939)
- [18] Selcuk S. Bryan, Solutions of Einstein field equations for static fluid spheres
- [19] John J Matese y Patrick G Whitman, New method for extracting static equilibrium configurations in general relativity, Phys Rev D vol 22 Num 6 1270-1275 (1980)
- [20] P. N Pant, Varieties of new classes of interior solutions in general relativity, Astroph. and space Science, Vol 215. No. 1 97-109 (1994)
- [21] Saibal Ray y Basanti Das Tolman-Baxin type static charged fluid sphere in general relativity, Mon Not. R Astron Soc. 349, 1331-1334(2004)
- [22] G. D Birkhoff, Relativity and Modern Physics. Advanced University Press, Cambridge (1923)
- [23] Nils Voje Johansen y Finn Raundal, On the discovery Birkhoff's theorem, physics/0508163v2(2005)
- [24] H. Buchdahl (1959), General Relativistic Fluid Spheres, Phys. Rev., 116, 1027.
- [25] A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, The Frobenius integrability theorem; first version. pp 192.
- [26] Jointly y H. Andreasson (2009), Bounds on M/R for static objects with a positive cosmological constant, Classical and Quantum Gravity 26 195007 [0904.2497 gr-qc]

- [27] Jointly y Harko (2007), Minimum mass-radius ratio for charged gravitational objects, *General Relativity and Gravitation* 39 (2007) 757-775 [gr-qc/0702078]
- [28] M Mak, Peter N. Dobson Jr. y T. Harko (2001). Maximum Mass-Radius Ratios for Charged Compact General Relativistic Objects, *Europhys.Lett.* 55 310-316
- [29] A. Mehra (1966) *J. Austr. Math. Soc.* 6 153
- [30] Sharma R, Mukherjee S y Maharaj S D (2001), General Solution for a Class of Static Charged Spheres, *Gen. Relativ. Gravit.* Vol 33 pp 999 -1009
- [31] M Murad y S Fatema (2012), A family of well behaved charge analogues of Durgapal's perfect fluid exact solution in general relativity, arXiv:1210.0712 [gr-qc]
- [32] N Pant (2011), New class of Well behaved exact solutions of relativistic charged white-dwarf star with perfect fluid, *Astrophysics and Space Science* (2011), DOI 10.1007/s10509-011-0720-z.
- [33] Albert Einstein, "Zur Elektrodynamik Bewegter Körper," *Annalen der Physik* 17, 891-921 (1905).
- [34] R Tolman (1939), Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid, *Phys. Rev.* 55, 364
- [35] *General Relativity, An introduction for Physicists* M. P. HOBSON, G. P. EFS-TATHIOU and A . N . L A S E N B Y. Cambridge University Press
- [36] *Física para Ciencia y la Tecnología* Tipler Mosca, vol. 2: capítulo R.