



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO - MATEMÁTICAS
Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

UN MODELO ESTELAR ESTÁTICO Y
ESFÉRICAMENTE SIMÉTRICO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA
ARTURO BARAJAS MENDIOLA

ASESOR
DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICAS JOAQUIN ESTEVEZ DELGADO

CO-ASESOR
DOCTORA EN CIENCIAS FÍSICAS TATJANA VUKASINAC

MORELIA, MICHOACÁN, DICIEMBRE 2014



Índice general

RESUMEN	III
ABSTRACT	V
INTRODUCCIÓN	VII
CAPÍTULO 1	1
1. TEORÍA DE LA RELATIVIDAD GENERAL	1
1.1. Relatividad Especial	1
1.2. Principios de la Relatividad General de Einstein	4
1.3. Espacio-tiempos curvados	6
1.3.1. Tensores	7
1.3.2. Variedades	7
1.3.3. Derivada Covariante	9
1.3.4. Transporte Paralelo, Geodésicas y Curvatura	11
1.3.5. Identidades de Bianchi: Tensor de Ricci y Tensor de Einstein . .	15
1.4. Tensor de Energía-Momento	16
1.5. Ecuaciones de campo de Einstein	18
CAPÍTULO 2	21
2. ESPACIO-TIEMPO ESTÁTICO Y ESFÉRICAMENTE SIMÉTRICO	21
2.1. Espacio Tiempo Estático y Esféricamente Simétrico	21
2.2. Componentes del Tensor de Einstein en Espacios Tiempos Estáticos y Esféricamente Simétricos	23
CAPÍTULO 3	27

3. ECUACIONES DE EINSTEIN CON FLUÍDO PERFECTO	27
3.1. Las ecuaciones de Einstein con fluidos perfectos estáticos.	27
3.2. Solución Exterior	28
3.3. Solución Interior	29
3.4. Condiciones físicas de las soluciones	29
CAPÍTULO 4	31
4. UNA NUEVA CLASE DE SOLUCIONES INTERIORES	31
4.1. Construcción de la solución	31
4.2. Análisis de la solución	32
4.3. Gráficas	34
CAPÍTULO 5	41
5. CONCLUSIONES	41
Bibliografía	43

RESUMEN

La construcción de soluciones de las ecuaciones de Einstein resulta una tarea interesante desde el punto de vista matemático que es complementado si dichas ecuaciones tienen una interpretación física. No toda solución a las ecuaciones de Einstein conduce a un modelo físico, ejemplo de esto lo constituyen las soluciones estelares. Aunque desde su formulación este ha sido un campo activo, cerca de un 20% de las soluciones estelares construídas han resultado representar una situación físicamente aceptable. En esta tesis presentamos la construcción de una nueva solución estelar físicamente aceptable, que puede ser utilizada para modelar objetos compactos como las estrellas de Quarks. Como una aplicación, suponiendo una densidad de $\rho = 5 \cdot 10^{18} \frac{kg}{m^3}$, obtenemos diferentes valores para la masa $M \in [0.6049047372, 0.9273668912]M_{\odot}$ y radio $R \in [3572.493781m, 3822.703581m]$, los cuales son característicos de las estrellas de Quarks.

Palabras clave

Ecuaciones de Einstein, soluciones exactas, modelos estelares, estrellas de quarks.

ABSTRACT

Construction of solutions to Einstein's equations is an interesting task from the mathematical aspect that is supplemented if these equations have a physical interpretation. Not all solutions to Einstein's equations lead to a physical model, example of this are the stellar solutions. Although since their inception this has been an active field, about 20 % of the stellar solutions have been constructed to represent a physically acceptable situation. In this thesis we present the construction of a new stellar physically acceptable solution, which can be used to model compact objects like Quark stars. As an application, assuming a density of $\rho = 5 \cdot 10^{18} \frac{kg}{m^3}$, we obtain different values for the mass $M \in [0.6049047372, 0.9273668912]M_{\odot}$ and ratio $R \in [3572.493781m, 3822.703581m]$, which are characteristic of the Quark stars.

Key words

Einstein's Equations, Exact Solutions, Stellar Models, Quark Stars.

INTRODUCCIÓN

La contemplación del cielo ha sido una fascinación para los integrantes de diferentes culturas, los mayas..., en base a sus observaciones las pirámides construidas se hallan en conexión con el movimiento del sol, su agricultura y orientación era regida por el movimiento estelar. A medida que la humanidad se fue desarrollando los cuestionamientos y respuestas sobre los objetos celestes se fueron modificando, preguntas como el tipo de órbitas que describían el entendimiento, dando origen a las leyes de Kepler de la interacción entre planetas, así como el de planetas con sus satélites naturales, permitió el planteamiento de llevar al hombre a la luna.

Entender la composición de las estrellas ha sido posible gracias al desarrollo de la química y el electromagnetismo. El espectro electromagnético nos da información sobre los elementos que las constituyen. Otras cuestiones como el comportamiento interno de las estrellas ya no resultan tan sencillas de abordar. En base a lo que conocemos de los fluidos en la tierra desde la época en que se plantearon las leyes de Newton y el potencial Newtoniano, astrofísicos y astrónomos han investigado el comportamiento interno de las estrellas.

De acuerdo a la teoría clásica no hay una limitación para la masa o radio de una estrella, e incluso la presión y densidad central pudieran ser infinitas, aún con estas características poco reales, la descripción de objetos estelares es aceptable.

A medida que los avances tecnológicos se dieron, la necesidad de describir las estrellas mediante otra teoría se hizo patente. Por ejemplo se sabe de las observaciones que no existen estrellas con una masa enorme, ni con radio arbitrario, únicamente hay estrellas con ciertos valores de masa y radio, sujetas a intervalos bien definidos.

La teoría de la relatividad de Einstein es una herramienta de gran ayuda para describir a las estrellas, sobre todo cuando su densidad es cercana a la densidad de degeneración de los neutrones.

Aún para modelos poco realistas como lo es el de un objeto estelar con densidad constante, las implicaciones son interesantes e ilustrativas, es conocido que en el caso de densidad homogénea la razón de compacidad $u = \frac{MG}{c^2 R} \leq \frac{4}{9}$, donde M es la masa de la estrella y R su radio, esta característica no es exclusiva del caso mencionado. En general para un objeto estático y esféricamente simétrico si la densidad y la presión son regulares en el interior y describen funciones monótonas decrecientes también se satisface $u \leq \frac{4}{9}$.

Entre más cercano es el valor de u para un modelo, es posible describir objetos con una densidad mayor y que además tengan un radio menor.

En esta tesis tomamos como herramienta teórico la relatividad general de Einstein para describir objetos compactos, la geometría es descrita para un espacio tiempo estático y esférica descrita para un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico, mientras que las fuentes de materia son asociados a un fluido perfecto. En el capítulo 1 describimos la matemática básica que necesitamos para la formulación de la teoría de la relatividad general de Einstein, el capítulo 2 lo enfocamos al entendimiento de la geometría de espacio- tiempo estáticos y esféricamente simétricos que nos permite plantear las ecuaciones de Einstein para un fluido perfecto presentadas en el capítulo 3 y resueltas en el capítulo 4, donde además se analiza su solución, finalizamos este trabajo con el capítulo de conclusiones.

TEORÍA DE LA RELATIVIDAD GENERAL

1.1. Relatividad Especial

La teoría de la relatividad especial fue presentada por Albert Einstein en su trabajo sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento, en el año 1905 [1]. El formalismo básico de la teoría ya había sido descubierto un año antes por Poincaré y por Lorentz, aunque Einstein desconocía estos trabajos. El éxito de Einstein consistió en eliminar un gran número de hipótesis hechas por Lorentz hasta reducir la teoría de la relatividad a dos postulados muy simples que parten de la experimentación.

Esta teoría tiene un rango restringido de aplicación, ya que trata solamente con la comparación de mediciones hechas por observadores inerciales, quienes están en movimiento relativo desacelerado, y en una región del espacio y tiempo donde la acción de la gravitación se puede despreciar.

La teoría de la relatividad especial constituye una crítica radical de los conceptos clásicos de espacio y tiempo absolutos ya que a finales del siglo XIX la interpretación de todos los fenómenos físicos de la naturaleza macroscópica se resumía en las leyes de Newton (para fenómenos mecánicos) y las ecuaciones de Maxwell (para fenómenos electromagnéticos y ópticos). Einstein intentó unificar todos los fenómenos en un único esquema: la Teoría de la Relatividad.

La relatividad especial puede ser deducida de dos postulados fundamentales:

1. Principio de relatividad (Galileo): no hay un experimento que pueda medir la velocidad absoluta de un observador; el resultado de cualquier experimento desarrollado por un observador no depende de su velocidad relativa con respecto a otros observadores que no están involucrados en el experimento.

Este principio de relatividad no es en lo absoluto un concepto moderno: se remonta hasta la forma de la hipótesis de Galileo de que un cuerpo en un estado de movimiento uniforme permanece en ese estado a menos que actúe sobre él algún agente externo.

2. Universalidad de la velocidad de la luz (Einstein): la velocidad de la luz en el vacío para cualquier observador no acelerado es una constante, independientemente de la velocidad relativa de la fuente de la luz y del observador.

Este postulado puede ser visto como el resultado de combinar el principio de la teoría de la luz, que la velocidad de la luz es independiente de la velocidad de su fuente, con la idea residente en el primer postulado, el cual hace imposible asignar algún significado a la velocidad absoluta de la fuente, pero nos permite hablar de la velocidad relativa de la fuente y del observador.

Debemos de dejar claro que al hablar de un observador no nos referimos a alguna persona que ve ocurrir un acontecimiento, si no a un sistema coordinado que llamamos inercial si cumple con las siguientes propiedades:

1. La distancia entre un punto $\mathbf{A}(x_1, y_1, z_1)$ y un punto $\mathbf{B}(x_2, y_2, z_2)$ es independiente del tiempo.
2. Los relojes colocados en diferentes puntos están sincronizados y avanzan a igual velocidad.
3. La geometría del espacio en algún tiempo constante t es Euclidea.

El primer acercamiento que tuvieron los físicos sobre la teoría de la relatividad especial fue mediante un método algebraico que se basó principalmente en las transformaciones de Lorentz. Primeramente uno aprende como utilizar dichas transformaciones para convertir las mediciones de un observador a las mediciones de algún otro observador, todo esto para entender y verificar algunos fenómenos importantes como lo son la dilatación del tiempo o la contracción de la longitud, además para hacer algunos cálculos elementales sobre conversión de masa-energía con la única condición de que no exista una aceleración entre dichos observadores. Este punto de vista puramente algebraico comenzó a cambiar en menos de cuatro años después de que Einstein propusiera su teoría. Minkowski señaló que todos los eventos pueden localizarse en un espacio de cuatro dimensiones. Dicho espacio es el que ahora llamamos espacio-tiempo. Esto fue el principio del punto de vista geométrico, el cual finalizó directamente en la teoría general de la relatividad entre los años 1914 y 1916.

El espacio-tiempo de Minkowski M_4 es un espacio plano de cuatro dimensiones, usado para describir los fenómenos físicos en el marco de la teoría especial de la relatividad. Aquí pueden distinguirse tres dimensiones espaciales ordinarias y una dimensión temporal adicional, de tal manera que todas juntas forman un espacio de cuatro dimensiones y así representan al espacio-tiempo. En M_4 podemos introducir las coordenadas cartesianas que denotaremos con

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

donde c es la velocidad de la luz. De ahora en adelante tomaremos $c = 1$ para facilitar algunos cálculos. En relatividad especial, se asume que el espacio-tiempo tiene la estructura de $\mathbf{R}^4$.

La distancia entre dos puntos (x^μ) y $(x^\mu + dx^\mu)$ en M_4 está dada por

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (1.1)$$

De la ecuación (1.1), podemos reescribir la métrica del espacio-tiempo por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ y $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Otro concepto importante es el de tiempo propio τ . El tiempo propio se define como el tiempo medido por un reloj entre dos eventos que suceden en el mismo lugar en momentos diferentes, y se define como

$$d\tau^2 = -ds^2. \quad (1.2)$$

Podemos parametrizar las curvas con el tiempo propio τ , de la siguiente forma

$$x^\mu = x^\mu(\tau). \quad (1.3)$$

Tomando en cuenta la trayectoria de una partícula, la cuadri-velocidad de la partícula es definida por el vector tangente U^μ como

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

La cuadri-velocidad es un vector asociado al movimiento de una partícula, en este caso, esta magnitud es tangente a la trayectoria de dicha partícula a través del espacio-tiempo. El cuadrado de algún cuadri-vector es un invariante. En este caso

$$U^\mu U_\mu = -1,$$

porque $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, entonces tenemos $\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = -1$.

Definiendo la aceleración de una partícula como

$$a^\nu = \frac{dU^\nu}{d\tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial U^\nu}{\partial x^\mu} = U^\mu \partial_\mu U^\nu, \quad (1.4)$$

en la ausencia de fuerzas externas, la cuadri-velocidad satisfecerá la ecuación de movimiento

$$U^\mu \partial_\mu U^\nu = 0. \quad (1.5)$$

El cuadri-vector de momento de una partícula se define como

$$\vec{P} = m\vec{U} = (E, P^1, P^2, P^3),$$

donde m es la masa de la partícula medida en un sistema comóvil a ella (sistema de referencia que se mueve junto a la partícula).

En relatividad especial, la energía es la componente temporal del cuadri-vector P^μ , así podemos finalmente definir la energía de la partícula medida por un observador como

$$E = -P_\mu v^\mu \quad (1.6)$$

donde v^μ es la cuadri-velocidad del observador. En el sistema de referencia donde la partícula está en reposo $E = -mv_\mu v^\mu = m$, porque $U^\mu = v^\mu$ y $v_\mu v^\mu = -1$.

1.2. Principios de la Relatividad General de Einstein

La teoría de la relatividad especial surgió como un intento de unificación de las fuerzas electromagnéticas con las leyes de la mecánica de Newton, sin embargo, existe otra fuerza en la naturaleza que no se podía explicar sin aceptar las acciones instantáneas a distancia, esta es la gravedad. En ese sentido, era necesario crear una nueva teoría relativista de la gravedad, la cual debía incluir la teoría de Newton en el límite de las velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz y también la relatividad especial en el caso de los campos gravitacionales débiles.

Por lo tanto, se puede decir que la relatividad general es una teoría del campo gravitatorio que fue iniciada por Albert Einstein entre los años 1915 y 1916. Es una generalización de la teoría especial de la relatividad para el caso en el que los observadores se encuentran acelerados.

Comunmente la gravedad es considerada como una de las cuatro fuerzas fundamentales en el universo, con la característica de que se distingue de las demás en que dadas las mismas velocidades y posiciones iniciales, todos los cuerpos siguen las mismas trayectorias sin importar su composición. Todos los cuerpos en un campo gravitacional son afectados de la misma forma por la gravedad, opuesto a, por ejemplo, las fuerzas debidas a los campos electromagnéticos que afectan a cuerpos cargados pero no así a los cuerpos neutros, además que las trayectorias dependen de la relación entre la masa y la carga.

Este hecho de que todos los cuerpos caigan con la misma aceleración llevó a Einstein a proponer que la gravedad se podría ver como la curvatura del espacio-tiempo en vez de como un campo de fuerzas adicionales. Una de las ideas principales que llevó a Einstein a describir la gravedad de esta forma es el principio de equivalencia.

El principio de la equivalencia de la gravitación e inercia nos dice cómo un sistema físico arbitrario responde a un campo gravitacional externo. Este principio está basado en la igualdad de las masas inercial y gravitacional. Para aclarar este concepto, vamos a considerar la segunda ley de Newton, la cual relaciona la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo con la aceleración que siente el cuerpo y su masa inercial de la siguiente

forma:

$$\vec{F} = m_i \vec{a}. \quad (1.7)$$

Ahora consideremos la ley de gravedad de Newton, la cual relaciona la fuerza debida a la gravedad cerca de la superficie de la Tierra con la aceleración de la gravedad y la masa gravitatoria:

$$\vec{F}_g = m_g \vec{g}. \quad (1.8)$$

Hasta el momento se ha observado que $m_i = m_g$, aunque m_i y m_g tienen un caracter y uso distinto. Dicho principio implica que localmente no existe forma de distinguir entre los efectos de un campo gravitacional y los efectos que se observarían en un sistema uniformemente acelerado. Un observador en caída libre no siente su propio peso y por lo tanto podría pensarse que estuviera en una región del espacio donde no hubiera campo gravitatorio. Por ejemplo: consideremos el observador en un elevador que se encuentra en reposo. Si suelta una bola, verá que esta cae hacia el piso del elevador con una aceleración igual a la de la gravedad. Sostener un objeto en un punto fijo requiere de una fuerza igual a la masa por la aceleración de la gravedad. Ahora supongamos que el elevador entra en caída libre, entonces la bola caerá debido a la universalidad de la caída libre a la misma velocidad que el propio observador de modo que este último verá la bola flotando como si estuviera en el espacio interestelar (Figura 1.1). En este último sistema sostener un objeto en un punto fijo con respecto al observador no requiere fuerza, y los objetos mantienen su aceleración uniforme.



Figura 1.1: Un observador en un ascensor acelerado con aceleración constante es equivalente a un observador en reposo en un campo gravitacional constante.

Si en lugar de un campo gravitacional se tratara de un campo electromagnético sería posible distinguir entre los efectos debido a este campo con los efectos debido a una aceleración uniforme al observar el comportamiento de cuerpos con diferentes cargas. Ya que no hay distinción entre la m_i y m_g , los efectos de la gravedad se pueden interpretar como los efectos de un espacio-tiempo curvado. Las partículas de prueba se mueven a lo largo de líneas geodésicas. En la teoría clásica la fuente de gravedad es la masa de un cuerpo, sin embargo como en la relatividad especial se relaciona la masa con la energía, la fuente de campo gravitacional en la relatividad general debe

involucrar a la masa así como a la energía.

Otro principio en el que se basó Einstein es el principio de covarianza o principio general de relatividad. En la teoría de la relatividad especial, si un observador es inercial cualquier otro que use coordenadas relacionadas con las del primero mediante una transformación de Lorentz será un observador inercial. Por lo tanto, las leyes de la física deben de tomar la misma forma en todos los marcos de referencia, o equivalentemente en la teoría de la relatividad especial, las ecuaciones deben de ser tensoriales, al cumplir esto, si las ecuaciones son válidas en un sistema inercial serán válidas en cualquier otro sistema inercial.

En la teoría de la relatividad general hablamos de las transformaciones generales de coordenadas y no de unas transformaciones particulares como lo son las de Lorentz. El deseo de Einstein de contar con una teoría cuyas ecuaciones tuvieran la misma forma para cualquier tipo de observador sea este inercial o no inercial, le llevó a buscar ecuaciones que presentaran principio de covarianza, cosa que logró generalizando su teoría, en lo que luego se llamó teoría de la relatividad general.

1.3. Espacio-tiempos curvados

Una propiedad relevante de los sistemas inerciales es que mientras no actúe una fuerza sobre las partículas, éstas permanecieran en reposo. Fijándonos en lo anterior, podemos notar que la gravedad a diferencia de otras fuerzas actúa sobre todos los cuerpos en la misma manera sin importar su composición. Mientras que para el campo electromagnético y las interacciones débiles y fuertes se pueden construir trayectorias para partículas no afectadas por éstas fuerzas, para el caso del campo gravitacional, esto no es posible ya que no existen partículas libres. Lo que podemos tener es un sistema en el cual las partículas libres de otras fuerzas poseen una aceleración uniforme, éste se encuentra cayendo libremente en el campo gravitacional por lo que todas se están acelerando de la misma forma.

La relatividad general abandona el concepto de fuerza gravitacional y lo reemplaza por el concepto de curvatura del espacio-tiempo. Los cuerpos celestes adoptan trayectorias lo más derechas posibles, pero deben someterse a la configuración del espacio-tiempo. Lejos de toda distribución de materia, la curvatura del espacio-tiempo es nula y todas las trayectorias son líneas rectas. Cerca de un cuerpo masivo como el Sol, el espacio-tiempo se deforma y los cuerpos se desplazan a lo largo de líneas curvas (geodésicas).

Para ser completa, la teoría de la relatividad general debe también dar un medio de calcular la curvatura del espacio-tiempo creada por una distribución de masa. Lo hace a través de un sistema muy complejo de ecuaciones de Einstein, que conectan curvatura del espacio-tiempo y distribución de masa y energía. Este sistema solo ha sido resuelto de manera analítica en algunos casos particulares, por ejemplo, alrededor de una estrella aislada.

1.3.1. Tensores

Como las ecuaciones de Einstein son del tipo tensoriales, ahora hablaremos un poco sobre tensores. Comenzaremos por definir lo que es un tensor: un tensor del tipo $(0, N)$ es una función de N vectores a los números reales, la cual es lineal en cada uno de sus N argumentos. Un ejemplo es un tensor del tipo $(0, 1)$, el cual es llamado vector covariante o uno-forma. Una uno-forma es una función lineal que toma como argumento un vector y regresa un número real, esto es, si $\vec{V} = V^\mu \vec{e}_\mu$ es un vector, y le aplicamos una uno-forma, tenemos que $\tilde{W}(\vec{V}) = \tilde{W}(V^\mu \vec{e}_\mu) = V^\mu \tilde{W}(\vec{e}_\mu) = V^\mu W_\mu$, donde $\tilde{W} = W_\mu \tilde{\omega}^\mu$. Otro tipo de tensores son los $(M, 0)$ los cuales son una función lineal de M uno-formas y que regresa un número real. Un tensor de tipo $(1, 0)$ es una función que toma una uno-forma y regresa un número real el cual es llamado vector, esto es, $\vec{V}(\tilde{W}) = W_\mu \vec{V}(\tilde{\omega}) = W_\mu V^\mu$. Un tensor arbitrario de la forma (M, N) es una función lineal que toma M vectores covariantes y N vectores y regresa un número real. Las componentes de un tensor en un sistema O son el valor de la función cuando los argumentos son los vectores base del sistema O . Por ejemplo, para un tensor del tipo (M, N) tenemos

$$T(\omega^{\mu_1}, \dots, \omega^{\mu_M}, \vec{e}_{\nu_1}, \dots, \vec{e}_{\nu_N}) = T_{\nu_1 \dots \nu_N}^{\mu_1 \dots \mu_M}$$

El número de componentes de un tensor arbitrario dependerá de la dimensión del espacio en que está definido y del tipo de tensor. El tensor métrico es un tensor del tipo $(0, 2)$, el cual toma como argumento dos vectores, y entonces se tiene

$$\mathbf{g}(\vec{V}, \vec{U}) \equiv V^\mu U^\nu \mathbf{g}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = g_{\mu\nu} V^\mu U^\nu, \quad (1.9)$$

donde $g_{\mu\nu}$ son las componentes de la métrica. Para definir las componentes de un tensor se requiere especificar un sistema O , entonces las componentes dependen del sistema que se elige. Para escribir las componentes en otro sistema O' se hace uso de la matriz de transformación $\Lambda_{\beta'}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\beta'}}$ la cual es usada para transformar las componentes de los vectores base del sistema O a O' . Por ejemplo, si tenemos $p_{\mu\nu} = \tilde{p}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu)$ en el sistema O y queremos transformar sus componentes a O' tenemos:

$$p_{\mu'\nu'} = \tilde{p}(\vec{e}_{\mu'}, \vec{e}_{\nu'}) = \tilde{p}(\Lambda_{\mu'}^\delta \vec{e}_\delta, \Lambda_{\nu'}^\sigma \vec{e}_\sigma) = \Lambda_{\mu'}^\delta \Lambda_{\nu'}^\sigma \tilde{p}(\vec{e}_\delta, \vec{e}_\sigma) = \Lambda_{\mu'}^\delta \Lambda_{\nu'}^\sigma p_{\delta\sigma}.$$

1.3.2. Variedades

Para poder dar una definición del concepto del espacio curvo comenzamos definiendo lo que es una variedad. Básicamente podemos decir que una variedad es un espacio continuo que localmente es parecido al espacio Lorentziano, pero en forma global puede mostrar características diferentes. En una definición más rigurosa se puede decir que una variedad es cualquier conjunto que puede ser parametrizado de una forma continua

en donde el número de parámetros independientes es la dimensión de la variedad y los parámetros en sí son sus coordenadas. Dentro de la relatividad general solamente se consideran variedades que son diferenciables, es decir, espacios que son continuos y a la vez diferenciables. En una variedad se introduce el concepto de tensor métrico. Es un tensor simétrico ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) y no singular [$\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$]. La métrica nos permite calcular las distancias entre los puntos del espacio-tiempo, además podemos calcular la longitud de una curva así como el tiempo propio de cualquier observador. En un espacio-tiempo curvo, se define el cuadrado del elemento diferencial de línea por medio de

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.10)$$

La longitud de una curva se calcula mediante la integral

$$l = \int |g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|^{\frac{1}{2}}. \quad (1.11)$$

Una vez conocida la expresión de la métrica podemos expresar el tiempo propio como

$$\tau = \int |-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|^{\frac{1}{2}}. \quad (1.12)$$

La métrica permite bajar y subir índices de igual manera que en la relatividad especial $V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$, y esta contiene toda la información para describir la curvatura de la variedad.

Una variedad diferenciable en la cual se ha introducido una métrica recibe el nombre de variedad Riemanniana. Hablando estrictamente, una variedad es Riemanniana si la métrica es definida positiva, esto es, si la métrica evaluada sobre dos vectores cumple $\mathbf{g}(V, U) > 0$ para todo $U, V \neq 0$, vectores dentro de la variedad. Las métricas que no son definidas positivas reciben el nombre de métricas pseudo Riemannianas, las cuales son relevantes para la teoría de la relatividad general. La matriz asociada a la métrica por definición debe de ser una matriz simétrica. Teniendo en cuenta esto y tomando un teorema del algebra lineal que nos dice que siempre se puede hallar una transformación que lleve a una matriz simétrica a una matriz diagonal con las entradas 1, -1 ó 0, en donde el número de entradas 1 y -1 es igual al número de eigenvalores positivos y negativos. Usando ese teorema, en algún punto P siempre es posible encontrar una transformación que lleve a un sistema de coordenadas x^α con el punto P como origen y que transforme la métrica $g_{\mu\nu}$ a la métrica de Minkowski del espacio plano

$$g_{\mu\nu}(x^\alpha) = \eta_{\mu\nu} + O[(x^\alpha)^2]. \quad (1.13)$$

Esta ecuación nos dice que cerca del punto P , la métrica es aproximadamente la usada en la relatividad especial, con una diferencia de las coordenadas a segundo orden. Este sistema de coordenadas recibe el nombre de sistema localmente inercial. Podemos reescribir la ecuación anterior como sigue

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}, \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} g_{\mu\nu}(P) = 0, \quad \forall \mu, \nu, \gamma, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} g_{\mu\nu}(P) \neq 0, \quad (1.16)$$

para algunos valores de α , β y γ y si la variedad no es completamente plana. Una línea recta en el espacio plano es la línea de mundo describiendo la trayectoria de una partícula libre, el hecho de que la primera derivada de la métrica sea cero significa que una partícula libre en un espacio curvo se mueve localmente a lo largo de una línea recta, en este sistema localmente inercial.

1.3.3. Derivada Covariante

La derivada de un campo vectorial por definición involucra la diferencia de dos vectores en dos puntos distintos. En un espacio curvado la noción de diferencia entre vectores en puntos diferentes debe ser manejado con cuidado.

En un espacio curvado, la base en la cual se expresan los vectores no necesariamente es constante de un punto a otro, por lo tanto, para derivar un campo vectorial es necesario involucrar la derivada de los vectores bases. De esta manera, al derivar un vector expresado de la forma $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$, con respecto a una coordenada, se obtiene

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (1.17)$$

Los términos $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta}$ son vectores, así que se pueden expresar como una combinación lineal de los vectores base. Se introduce el símbolo $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ para denotar los coeficientes usados en la combinación lineal

$$\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu. \quad (1.18)$$

La interpretación de $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ es que da la componente μ -ésima del vector $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta}$. Aquí, se necesitan tres índices para definir completamente a $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$, α indica el vector base que se está derivando, β es la coordenada con respecto a la cual se está derivando y μ es la componente del vector resultante. Esos símbolos reciben el nombre de Símbolos de Christoffel. Usando esta notación la derivada de un vector toma la siguiente forma

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu, \quad (1.19)$$

y después de una serie de pasos y renombrando los índices de la derivada parcial podemos reescribir las componentes de este vector como

$$\nabla_\beta V^\alpha \equiv V^\alpha{}_{;\beta} = V^\alpha{}_{,\beta} + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha. \quad (1.20)$$

También podemos aplicar la derivada covariante a tensores de cualquier orden. Para llegar a la fórmula comenzamos utilizando la propiedad de que un uno-forma aplicado a un vector nos da un escalar. Tomamos un vector $\vec{V}$ y un uno-forma $\tilde{p}$ arbitrarios. En algún sistema de coordenadas arbitrario escribimos $\phi = p_\alpha V^\alpha$. Si tomamos la derivada de $\nabla_\beta \phi$ se obtiene:

$$\nabla_\beta \phi = \partial_\beta \phi = \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} V^\alpha + p_\alpha \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}, \quad (1.21)$$

donde ∇ satisface la regla de la derivada de un producto de Leibnitz. Notamos que ϕ no depende de los vectores base, por eso $\nabla_\beta \phi = \partial_\beta \phi$. Sustituyendo la derivada parcial $\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}$ por derivada covariante $V^\alpha_{;\beta}$ y haciendo algunos pasos más llegamos a

$$\nabla_\beta \phi = \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} V^\alpha + p_\alpha V^\alpha_{;\beta} - p_\alpha V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha. \quad (1.22)$$

Si renombramos los índices podemos escribir la ecuación anterior como sigue

$$\nabla_\beta \phi = \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} - p_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \right) V^\alpha + p_\alpha V^\alpha_{;\beta}. \quad (1.23)$$

En esta última ecuación el término entre parentesis es la derivada covariante de p :

$$\nabla_\beta p_\alpha = \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} - p_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu. \quad (1.24)$$

Entonces ahora tenemos la fórmula para calcular la derivada covariante de un uno-forma y la derivada covariante de un vector. Si se utiliza el mismo procedimiento se pueden calcular las siguientes fórmulas:

$$\nabla_\beta T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu,\beta} - T_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha - T_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^\alpha, \quad (1.25)$$

$$\nabla_\beta A^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}_{,\beta} + A^{\alpha\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu + A^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu, \quad (1.26)$$

$$\nabla_\beta B^\mu{}_\nu = B^\mu{}_{\nu,\beta} + B^\alpha{}_\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - B^\mu{}_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\alpha. \quad (1.27)$$

En un sistema de coordenadas localmente inercial $g_{\alpha\mu} = \eta_{\alpha\mu}$ y además en este sistema los símbolos de Cristoffel son iguales a cero $\Gamma = 0$, y entonces $V_{\alpha;\beta} = V_{\alpha,\beta}$ y $V^\alpha_{;\beta} = V^\alpha_{,\beta}$, de lo cual concluimos que $V_{\alpha;\beta} = V^\alpha_{,\beta}$, para así obtener

$$V_{\alpha,\beta} = \eta_{\alpha\mu} V^\mu_{,\beta} \longrightarrow V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu} V^\mu_{;\beta}, \quad (1.28)$$

esto es, cuando trabajamos con la métrica de Minkowski tomamos las derivadas parciales, y si es la métrica general tomamos la derivada covariante. La forma tensorial de esta ecuación implica su validez en cualquier sistema.

Dado que la métrica nos permite escribir un vector en cualquier sistema como $V_\alpha = g_{\alpha\mu} V^\mu$, podemos tomar la derivada covariante de V_α con respecto de x^β y esto queda:

$$V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu;\beta} V^\mu + g_{\alpha\mu} V^\mu_{;\beta}. \quad (1.29)$$

Ahora, si comparamos (1.28) con (1.29) tenemos que en todos los sistemas coordenados $g_{\alpha\mu;\beta} = 0$. En coordenadas cartesianas escribimos

$$g_{\alpha\mu;\beta} = g_{\alpha\mu,\beta} = \eta_{\alpha\mu,\beta} = 0,$$

como una identidad trivial, pero en otros sistemas coordenados tenemos

$$g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} g_{\nu\beta} - \Gamma_{\beta\mu}^{\nu} g_{\alpha\nu} = 0. \quad (1.30)$$

Tomando en cuenta (1.30), podemos calcular los Símbolos de Christoffel a partir de la métrica. Notamos que podemos calcular $g_{\alpha\beta,\mu}$ en términos de $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$. Si seguimos este camino en el otro sentido, podemos obtener $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ partiendo de las derivadas de $g_{\alpha\beta}$. Para lograrlo debemos tomar en cuenta que para cualquier sistema coordenado $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}$, esto es, podemos invertir (1.30) haciendo un poco de álgebra. Escribimos las tres versiones con diferente permutación de índices

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\mu} &= \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} g_{\nu\beta} + \Gamma_{\beta\mu}^{\nu} g_{\alpha\nu}, \\ g_{\alpha\mu,\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} g_{\nu\mu} + \Gamma_{\mu\beta}^{\nu} g_{\alpha\nu}, \\ -g_{\beta\mu,\alpha} &= -\Gamma_{\beta\alpha}^{\nu} g_{\nu\mu} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} g_{\beta\nu}. \end{aligned}$$

Agrupando términos y usando la simetría de $\mathbf{g}$, $g_{\nu\beta} = g_{\beta\nu}$ finalmente llegamos a

$$\Gamma_{\beta\mu}^{\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}), \quad (1.31)$$

la cual es conocida como la expresión de los símbolos de Christoffel en términos de las componentes de $\mathbf{g}$ y donde $g^{\alpha\gamma}$ es la inversa de la función métrica.

1.3.4. Transporte Paralelo, Geodésicas y Curvatura

Hasta ahora no se ha analizado la curvatura de las variedades de manera explícita, sin embargo es necesario dar una definición matemática de ella. Para comenzar debemos de distinguir entre la curvatura extrínseca y la curvatura intrínseca. Decimos que la geometría intrínseca de una variedad sólo considera la relación que existe entre los puntos de las curvas que pertenecen a la variedad, mientras la geometría extrínseca aparece cuando estudiamos a la superficie desde un espacio de mayor dimensión. Por ejemplo, un cilindro parece estar curvado en alguna dirección. Esto viene siendo su geometría extrínseca. Sin embargo, un cilindro se puede obtener al enrollar una hoja de papel plana sin tener que arrugarlo. Así que la geometría intrínseca del cilindro es igual a la de la hoja de papel. Dos líneas paralelas sobre la hoja de papel se mantendrían paralelas después de formar la superficie del cilindro. De aquí se concluye que la superficie es plana. Para poder observar la geometría extrínseca es necesario observar la superficie desde un espacio de mayor dimensión.

Si se desea obtener una forma de saber si la geometría de un espacio tiene curvatura intrínseca, la idea de transporte paralelo nos ayuda a resolver este problema. Considere primero una curva cerrada en un espacio plano que empieza en un punto A . En cada punto se dibuja un vector paralelo al vector que estaba en el punto previo sobre la curva cerrada (Figura 1.2). Este procedimiento se sigue alrededor de la curva cerrada. El vector que se dibuja en A después de completar el circuito es paralelo al original.

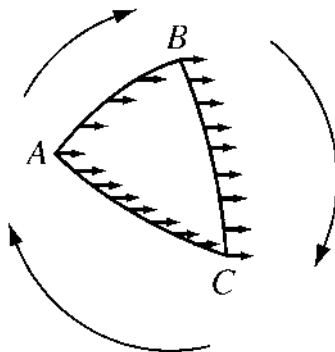


Figura 1.2: Transporte paralelo sobre una superficie plana.

Aplicando el mismo procedimiento sobre la superficie de una esfera vemos que obtenemos un resultado completamente distinto (Figura 1.3). El vector que se dibuja al completar el circuito gira $90.^\circ$ al regresar al punto original, a pesar de haber dibujado cada vector paralelo al anterior. Esto no pasa en el espacio plano, así que se concluye que debe de ser el resultado de la curvatura de la esfera.

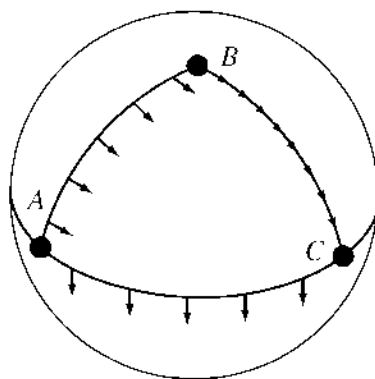


Figura 1.3: Transporte paralelo sobre una superficie esférica.

La construcción que se acaba de describir es llamado transporte paralelo. Si definimos en cada punto de una curva un campo vectorial $\vec{V}$ y si los vectores $\vec{V}(x)$ en puntos sobre la curva infinitesimalmente cercanos son paralelos y de la misma longitud, entonces decimos que $\vec{V}$ es transportado paralelamente sobre la curva. Para escribir

una ecuación que describa este movimiento consideramos una curva parametrizada por λ , de esta forma un vector tangente a la curva es dado por $\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{d\lambda}$. En un sistema localmente inercial en algún punto P se pide que las componentes de $\vec{V}$ sean constantes a lo largo de dicha curva. Por lo tanto la derivada a lo largo de la curva en P , podemos escribirla como sigue:

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = U^\beta V^\alpha_{;\beta} = U^\beta V^\alpha_{;\beta} = 0 \quad \text{en } P, \quad (1.32)$$

pues en un sistema localmente inercial $U^\beta V^\alpha_{;\beta} = U^\beta V^\alpha_{;\beta}$.

Puesto que (1.32) es una ecuación tensorial, entonces es válida en cualquier sistema de referencia. Así la ecuación para expresar el transporte paralelo de un vector $\vec{V}$ sobre una trayectoria cuyo vector tangente es $\vec{U}$ es

$$U^\beta V^\alpha_{;\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda} \vec{V} = \nabla_{\vec{U}} \vec{V} = 0. \quad (1.33)$$

En la geometría de Euclides, la tangente sobre una recta en un punto es paralela a la tangente de la recta en cualquier otro punto cercano al primero. De hecho, la línea recta es la única curva en el espacio Euclidean cuyo vector tangente se transporta de forma paralela a lo largo de ella. En un espacio curvo podemos dibujar líneas que sean lo más rectas posibles de forma local empleando el transporte paralelo de un vector tangente. Éstas reciben el nombre de "geodésicas". Usando la ecuación (1.33) se obtiene que el vector $\vec{U}$ es tangente a una geodésica si y sólo si $\nabla_{\vec{U}} \vec{U} = 0$. Esto significa que

$$U^\beta U^\alpha_{;\beta} = U^\beta U^\alpha_{;\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} U^\mu U^\beta = 0. \quad (1.34)$$

Entonces, la ecuación de una geodésica es:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (1.35)$$

Para hablar del tensor de curvatura, vamos a considerar en nuestra variedad una superficie de dos dimensiones, cerrada y pequeña (Figura 1.4), cuyas coordenadas de los lados son $x^1 = a$, $x^1 = a + \delta a$, $x^2 = b$ y $x^2 = b + \delta b$ y tomamos un vector $\vec{V}$ que es transportado de forma paralela a lo largo de la frontera de dicha superficie.

Comenzamos por transportar paralelamente el vector $\vec{V}$ en la dirección de $\vec{e}_1$ (de A a B), y entonces, de acuerdo al transporte paralelo tenemos $\nabla_{\vec{e}_1} \vec{V} = 0$. La cual si la desarrollamos da

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} = -\Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu,$$

y después de algunos pasos algebraicos [1] escribimos el cambio de V^α a lo largo de la curva cerrada como

$$\delta V^\alpha = \delta a \delta b [\Gamma^\alpha_{\mu 1, 2} - \Gamma^\alpha_{\mu 2, 1} + \Gamma^\alpha_{\nu 2} \Gamma^\nu_{\mu 1} - \Gamma^\alpha_{\nu 1} \Gamma^\nu_{\mu 2}] V^\mu.$$

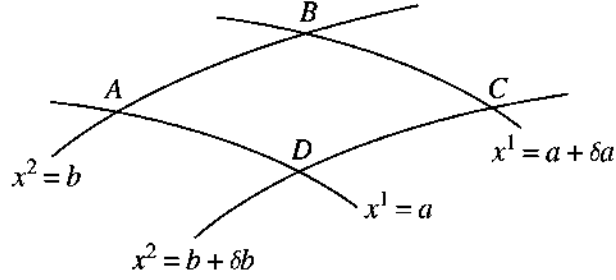


Figura 1.4: Pequeña sección de una red de coordenadas.

Y entonces tenemos que en el caso general se obtiene

$$\delta V^\alpha = \delta x^\nu \delta x^\mu R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta, \quad (1.36)$$

Donde

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} \equiv \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\beta\mu}. \quad (1.37)$$

Este es un tensor de tipo $(1, 3)$ y recibe el nombre de tensor de curvatura o tensor de Riemann. Analizando las componentes de R en el punto P en un sistema localmente inercial (en este sistema $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0$) y de la ecuación (1.31) notamos que

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu\sigma} + g_{\beta\nu,\mu\sigma} - g_{\mu\nu,\beta\sigma}), \quad (1.38)$$

y dado que las segundas derivadas de $g_{\alpha\beta}$ son distintas de cero, en el punto P se obtiene

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\beta,\nu\mu} + g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu} - g_{\sigma\beta,\mu\nu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu}). \quad (1.39)$$

Usando la simetría de $g_{\alpha\beta}$ y el hecho de que $g_{\alpha\beta,\mu\nu} = g_{\alpha\beta,\nu\mu}$, se obtiene

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}) \quad (1.40)$$

Se puede bajar el índice del tensor de Riemann para obtener

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha\lambda} R^\lambda_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}). \quad (1.41)$$

Escrito de esta forma podemos verificar las siguientes identidades

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (1.42)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0. \quad (1.43)$$

Por lo tanto $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ es antisimétrico en el primer y segundo par de índices y es simétrico si cambiamos los dos pares. Dado que las identidades anteriores son ecuaciones tensoriales válidas para un sistema de referencia, deben de ser válidas para cualquier otro sistema de referencia. También se puede mostrar que las identidades (1.42) y (1.43), en cuatro dimensiones, reducen el número de componentes independientes del tensor $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ a 20.

1.3.5. Identidades de Bianchi: Tensor de Ricci y Tensor de Einstein

Si derivamos la ecuación (1.41) con respecto a x^λ tenemos

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu;\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu;\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu;\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu;\alpha\mu\lambda}). \quad (1.44)$$

Usando esta ecuación, la simetría de $g_{\alpha\beta}$ y el hecho de que las derivadas parciales conmutan se puede verificar que $R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0$. Dado que en este sistema $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0$ la ecuación anterior es equivalente a

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \quad (1.45)$$

Esta ecuación es conocida como identidad de Bianchi y como es una ecuación tensorial, entonces es válida en cualquier sistema. Ahora definimos el tensor de Ricci como:

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\mu\beta} = R_{\beta\alpha}, \quad (1.46)$$

la cual es la contracción del tensor de Riemann en el primer y tercer índice. Definimos también el escalar de Ricci también llamado escalar de curvatura como

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (1.47)$$

Si contraemos las identidades de Bianchi se obtiene

$$g^{\alpha\mu}[R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}] = R_{\beta\nu;\lambda} + (-R_{\beta\lambda;\nu} + R^\mu_{\beta\nu\lambda;\mu}) = 0 \quad (1.48)$$

Para llegar a este resultado debemos de tomar en cuenta dos cosas. La primera es que $g_{\alpha\beta;\mu} = 0$, y dado que $g^{\alpha\mu}$ es función solamente de $g_{\alpha\beta}$ entonces se tiene que $g^{\alpha\beta}_{;\mu} = 0$. Lo segundo es que $g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} = -g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\lambda;\nu} = -R_{\beta\lambda;\nu}$. Si se vuelve a contraer la ecuación (1.48) se obtiene

$$g^{\beta\nu}[R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^\mu_{\beta\nu\lambda;\mu}] = R_{;\lambda} - R^\mu_{\lambda;\mu} - R^\mu_{\lambda;\mu} = 0. \quad (1.49)$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$(2R^\mu_{\lambda} - \delta^\mu_\lambda R)_{;\mu} = 0. \quad (1.50)$$

Esta es la forma de las identidades de Bianchi contraídas dos veces.

Ahora vamos a definir un tensor simétrico llamado el tensor de Einstein

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R. \quad (1.51)$$

Con esta definición se puede reescribir (1.49) como

$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0. \quad (1.52)$$

1.4. Tensor de Energía-Momento

En la sección (1.2) vimos que el cuadri-vector de momento de una partícula se define como $\vec{P} = m\vec{U} = (E, p^1, p^2, p^3)$. Aquí, E se refiere a la energía de la partícula en cualquier sistema O , p^1 , p^2 y p^3 son las componentes del momento espacial. Otro concepto que debemos de considerar aquí es el flujo de cierta cantidad a través de una superficie. El flujo se define como la cantidad de partículas (o energía) que atraviesan cierta unidad de área de una superficie por unidad de tiempo. Por ejemplo, se puede calcular el número de partículas o la cantidad de energía que cruzan cierta superficie, esto depende de el sistema en que se mida y la superficie que se defina. Una superficie se puede definir por medio de un vector $\vec{n}$ (vector normal) que sea perpendicular a ella. El tensor de energía-momento es de tipo $(2, 0)$, se representa con la letra $\mathbf{T}$ y se puede definir en términos de sus componentes como sigue: la componente $T^{\alpha\beta}$ describe el flujo de la componente de momento α a través de hypersuperficie de x^β constante. Si usamos esta definición, la componente T^{00} es el flujo de la componente temporal del cuadri-momento a través de una superficie de tiempo constante, en otra forma, la densidad de energía ρ . Las componentes T^{0i} describen el flujo de energía a través de una superficie de x^i constante. Las componentes T^{i0} describen la densidad de la componente i del cuadri-momento. Finalmente las componentes T^{ij} describen el flujo de momento a través de una superficie de x^j constante.

Un caso de interés y el cual vamos a tratar en este trabajo es el fluido perfecto, pues este se puede tomar como la fuente del campo gravitacional en varios casos físicos. Un fluido perfecto es un fluido que no presenta viscosidad ni conducción de calor en un sistema comovil al fluido. La condición de que no haya conducción de calor implica que en el sistema comóvil al fluido se tiene $T^{0i} = T^{i0} = 0$, esto nos indica que no hay ni flujo de calor, ni flujo de energía. Ahora, la condición de que no exista viscosidad implica que la fuerza siempre debe de ser perpendicular a la interface entre partículas. Para las componentes del tensor de energía momento esto significa que $T^{ij} = 0$ excepto cuando $i = j$. Con estas condiciones una superficie de x^1 constante sólo sentirá fuerza en la dirección x^1 , esto es, perpendicular a la superficie. Esta fuerza por unidad de área se le

llama presión y es igual para cada superficie. Con esto se obtiene $T^{ij} = p \delta^{ij}$ donde p es la presión, y a parte sabemos que $T^{00} = \rho$. Entonces en un sistema comóvil al fluido perfecto en el espacio-tiempo de Minkowski el tensor $\mathbf{T}$ toma la siguiente forma

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)U^\alpha U^\beta + p\eta^{\alpha\beta} \quad (1.53)$$

Donde η es la métrica de Minkowski y $\vec{U} = (1, 0, 0, 0)$.

Para el caso de relatividad general se reemplaza la métrica de Minkowski por una métrica general, así la expresión para el tensor de energía-momento es

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)U^\alpha U^\beta + pg^{\alpha\beta} \quad (1.54)$$

Una propiedad importante del tensor $\mathbf{T}$ es que satisface la ley de conservación de energía y el momento

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0. \quad (1.55)$$

Para deducir esta ley suponemos que tenemos un elemento cúbico de fluido (Figura 1.5), donde la energía puede fluir a través de todos sus lados. La energía que fluye a través de la cara 4 es $l^2 T^{0x}(x=0)$, y a través de 2 es $-l^2 T^{0x}(x=l)$. Vemos que el segundo término tiene un signo menos, esto es porque T^{0x} representa la energía que fluye en la dirección positiva de x , la cual esta saliendo del volumen a través de la cara 2. Similarmente la energía que fluye en la dirección y es $l^2 T^{0y}(y=0) - l^2 T^{0y}(y=l)$. El cambio de la cantidad de energía dentro del volumen cúbico $\frac{\partial(T^{00}l^3)}{\partial t}$ será igual a la suma de la energía que atraviesa todas las caras. Entonces tenemos que

$$\frac{\partial(l^3 T^{00})}{\partial t} = l^2 [T^{0x}(x=0) - T^{0x}(x=l) + T^{0y}(y=0) - T^{0y}(y=l) + T^{0z}(z=0) - T^{0z}(z=l)]. \quad (1.56)$$

Si dividimos por l^3 y tomamos el límite $l \rightarrow 0$ obtenemos

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} = -\frac{\partial T^{0x}}{\partial x} - \frac{\partial T^{0y}}{\partial y} - \frac{\partial T^{0z}}{\partial z}. \quad (1.57)$$

Dicha ecuación podemos reescribirla como

$$T^{00}_{,0} + T^{0x}_{,x} + T^{0y}_{,y} + T^{0z}_{,z} = 0, \quad (1.58)$$

o

$$T^{0\alpha}_{,\alpha} = 0. \quad (1.59)$$

Esta es la ecuación de la ley de conservación de energía en la teoría de la relatividad especial. De manera similar, el momento se conserva, y se puede obtener una ecuación similar para cada componente del momento. Entonces, la ley general de conservación esta dada de la siguiente forma

$$T^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0. \quad (1.60)$$

Esto aplica en cualquier materia en Relatividad Especial. En Relatividad General la ecuación (1.60) se generaliza tomando la derivada covariante en lugar de la derivada parcial, esto lleva a la ecuación (1.55).

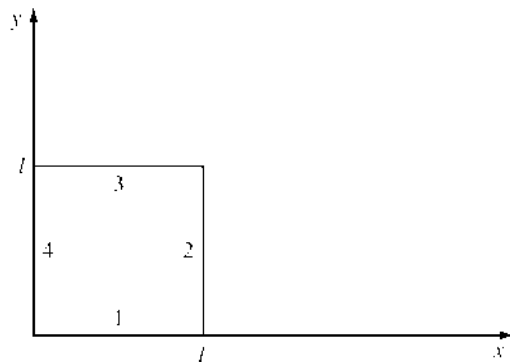


Figura 1.5: Una sección z constante de un elemento de fluido cúbico.

1.5. Ecuaciones de campo de Einstein

Para un cuerpo de masa m y simetría esférica en la mecánica Newtoniana, se tiene que su potencial gravitacional ϕ satisface

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (1.61)$$

en donde ∇^2 es el laplaciano y en coordenadas cartesianas es igual a $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, ρ es la densidad de masa y $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ es la constante gravitacional de Newton. La solución para esta ecuación es

$$\phi(r) = -\frac{Gm}{r}. \quad (1.62)$$

En la teoría de Newton la fuente del campo de gravedad es la densidad de masa. En la teoría de la relatividad la fuente de gravedad debe de estar relacionada a la densidad de masa, pero debe de ser un objeto con una interpretación relativista, y la masa no es suficiente para describir la fuente de gravedad. La teoría de la relatividad relaciona la energía con la materia, así que la energía también debe de ser considerada como fuente de gravedad. Uno podría proponer ρ , como la fuente de gravedad, sin embargo ρ es la densidad de energía medida por un observador específico. Otro observador verá a ρ simplemente como la componente T^{00} del tensor energía-momento. Se puede generalizar la fuente de campo gravitacional sin imponer un sistema privilegiado, al introducir el tensor de energía-momento $\mathbf{T}$ como la fuente del campo gravitacional. La generalización de (1.61) a la teoría relativista está dada por

$$\mathbf{O}(\mathbf{g}) = k\mathbf{T}, \quad (1.63)$$

donde k es una constante y $\mathbf{O}$ es un operador diferencial de segundo orden que actúa sobre la métrica $\mathbf{g}$, la cual es la generalización de ϕ . En este caso tenemos 10 ecuaciones diferenciales, y por analogía con (1.61) debemos buscar un operador $\mathbf{O}$ que entregue

un tensor $\mathbf{T}$ de rango $(2,0)$. En otras palabras $O^{\alpha\beta}$ deben de ser las componentes de un tensor de rango $(2,0)$ y debe ser combinación de $g_{\mu\nu;\lambda\sigma}$, $g_{\mu\nu;\lambda}$ y $g_{\mu\nu}$. El tensor de Ricci satisface estas condiciones. De hecho cualquier tensor de la forma

$$O^{\alpha\beta}(g) = R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R + \Lambda g^{\alpha\beta}, \quad (1.64)$$

las satisface si μ y Λ son constantes. Para determinar el valor de μ usamos el hecho de que la conservación de energía y momento se debe cumplir de forma local, esto es $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$, y esta ecuación implica que

$$O^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \quad (1.65)$$

Si recordamos que $g^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$, podemos verificar que a partir de (1.64)

$$(R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R)_{;\beta} = 0, \quad (1.66)$$

y comparando esta ecuación con (1.51) vemos que debemos tener $\mu = -\frac{1}{2}$ si queremos que la ecuación anterior sea una identidad para una métrica arbitraria. Haciendo un cambio de variables llegamos a la ecuación

$$\mathbf{G} + \Lambda \mathbf{g} = k \mathbf{T}, \quad (1.67)$$

donde $\mathbf{G}$ es el tensor de Einstein. Estas son llamadas las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales, en parte, están diseñadas para coincidir con las predicciones para el caso del sistema solar. Λ es llamado constante cosmológica, el cual, originalmente no se encontraba presente en las ecuaciones de campo, pero poco después Einstein la introdujo para obtener soluciones cosmológicas estáticas para el comportamiento del universo a gran escala. Posteriormente el Λ desapareció de las ecuaciones, pues se mostró que el universo se encuentra en expansión. Con $\Lambda = 0$, la ecuación anterior se convierte en:

$$\mathbf{G} = k \mathbf{T}, \quad (1.68)$$

donde $k = 8\pi G$. En componentes las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi G T^{\alpha\beta}. \quad (1.69)$$

Las ecuaciones de Einstein se han utilizado para modelar algunos tipos de sistemas del universo, por ejemplo, los sistemas esféricamente simétricos. Se han encontrado soluciones para modelos de estrellas estáticas con simetría esférica. La métrica se puede construir a partir de argumentos geométricos, imponiendo las condiciones de simetría esférica y se usa el tensor de energía momento para un fluido perfecto estático y esféricamente simétrico. Se necesita una ecuación de estado que relaciona la densidad de energía ρ y la presión p .

En un espacio de cuatro dimensiones la ecuación (1.69) nos da un sistema de dieciséis ecuaciones diferenciales parciales, no lineales, acopladas. Dichas componentes se

reducen a diez por simetría, ya que $T^{\alpha\beta}$ y $G^{\alpha\beta}$ son simétricas. Estas ecuaciones son resueltas para las diez componentes $g_{\alpha\beta}$ cuando la fuente $T^{\alpha\beta}$ es dada. Las ecuaciones son no lineales, pero tienen una estructura de valor inicial bien planteada. Esto es, que determinan valores futuros de $g_{\alpha\beta}$ con los datos iniciales dados. Sin embargo, un punto debe de estar bien definido: ya que las $g_{\alpha\beta}$ son las componentes de un tensor en algún sistema coordenado, un cambio de coordenadas induce a un cambio en ellas. Particularmente, hay cuatro grados funcionales arbitrarios de libertad entre las diez $g_{\alpha\beta}$. Sin embargo, debería ser imposible determinar todos los diez $g_{\alpha\beta}$ de cualquier dato inicial, ya que las coordenadas para el futuro del momento inicial pueden ser cambiadas arbitrariamente. De hecho, las ecuaciones de Einstein tienen exactamente esta propiedad: la identidad de Bianchi (1.52). Esto significa que hay cuatro identidades diferenciales (una para cada valor de α arriba) entre las diez $G^{\alpha\beta}$. Estas diez, entonces, no son independientes, y las diez ecuaciones de Einstein son realmente solo seis ecuaciones diferenciales independientes para las seis funciones entre las diez $g_{\alpha\beta}$ que caracterizan la geometría independientemente de las coordenadas [2].

Capítulo 2

ESPACIO-TIEMPO ESTÁTICO Y ESFÉRICAMENTE SIMÉTRICO

2.1. Espacio Tiempo Estático y Esféricamente Simétrico

Un espacio-tiempo estático es aquel en el cual existen coordenadas donde la métrica cumple con las siguientes propiedades [3, 4]

1. Todas las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ son independientes de x^0 .
2. El elemento de línea ds^2 es invariante bajo la transformación $x^0 \rightarrow -x^0$.

Comenzando de la expresión general para el elemento de línea (1.10), deseamos encontrar un conjunto de coordenadas en el cual las $g_{\mu\nu}$ no dependan de la coordenada temporal y el elemento de línea ds^2 sea invariante bajo $x^0 \rightarrow -x^0$, es decir, donde la métrica sea estática, y en el cual ds^2 dependa solamente de invariantes rotacionales de las coordenadas espaciales x^i y sus diferenciales, es decir, que la métrica sea esféricamente simétrica. Vamos a derivar la forma general de la métrica espacial esféricamente simétrica sin tomar en cuenta que es estática. Por lo tanto, comenzaremos construyendo esta métrica más general, y después de su derivación impondremos la restricción de que es estática.

Los únicos invariantes bajo rotaciones contruidos de las coordenadas espaciales x^i y sus diferenciales son:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} \equiv r^2, \quad d\vec{x} \cdot d\vec{x}, \quad \vec{x} \cdot d\vec{x}, \quad (2.1)$$

donde $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$.

Denotando la coordenada temporal x^0 por t , encontramos así que la forma más general de la métrica invariante bajo rotaciones debe ser

$$ds^2 = -A(t, r)dt^2 + B(t, r)d\vec{x} \cdot d\vec{x} + C(t, r)(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 + D(t, r)d\vec{x}^2, \quad (2.2)$$

donde A , B , C y D son funciones arbitrarias.

Ahora transformemos los términos invariantes a coordenadas esféricas definidas por

$$x^1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x^3 = r \cos \theta, \quad (2.3)$$

y entonces tenemos que

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = r^2, \quad \vec{x} \cdot d\vec{x} = r dr, \quad d\vec{x} \cdot d\vec{x} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.4)$$

y por lo tanto la métrica general (2.2) ahora toma la forma

$$ds^2 = -A(t, r) dt^2 + B(t, r) r dt dr + C(t, r) r^2 dr^2 + D(t, r) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.5)$$

Juntando términos, absorbiendo factores de r en las funciones y redefiniendo A , B , C y D , la métrica puede ser escrita como sigue:

$$ds^2 = -A_1(t, r) dt^2 + B_1(t, r) dt dr + C_1(t, r) dr^2 + D_1(t, r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.6)$$

Si ahora definimos una nueva coordenada radial por $r'^2 = D(t, r)$ y juntando términos en nuevas funciones de t y r' , podemos escribir la métrica de la siguiente manera:

$$ds^2 = -A_2(t, r') dt^2 + B_2(t, r') dt dr' + C_2(t, r') dr'^2 + r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.7)$$

Ahora, para poder eliminar los términos cruzados de nuestra métrica, ya que queremos que sea esféricamente simétrica, introducimos una nueva coordenada temporal t' definida por la siguiente relación

$$dt' = \lambda(t, r') [A_2(t, r') dt - \frac{1}{2} B_2(t, r') dr'], \quad (2.8)$$

donde $\lambda(t, r')$ es un factor de integración. Si elevamos (2.8) al cuadrado obtenemos

$$dt'^2 = \lambda^2 (A_2^2 dt^2 - A_2 B_2 dt dr' + \frac{1}{4} B_2^2 dr'^2), \quad (2.9)$$

de la cual encontramos que

$$A_2 dt^2 - B_2 dt dr' = \frac{1}{A_2 \Phi^2} dt'^2 - \frac{B_2}{4A_2} dr'^2. \quad (2.10)$$

Por lo tanto, definiendo las nuevas funciones $A' = \frac{1}{A_2 \Phi^2}$ y $B' = C + \frac{B_2}{4A_2}$, la métrica llega a ser diagonal y toma la forma

$$ds^2 = -A'(t', r') dt'^2 + B'(t', r') dr'^2 + r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.11)$$

Aquí podemos regresar a nuestras variables originales y podemos escribir la métrica como

$$ds^2 = -A(t, r) dt^2 + B(t, r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.12)$$

Así, la métrica esféricamente simétrica general es especificada por dos funciones de t y r , y estas son $A(t, r)$ y $B(t, r)$.

El paso final para obtener la métrica estática y esféricamente simétrica más general es trivial ahora. Requerimos que las funciones métricas $g_{\mu\nu}$ sean independientes de la coordenada temporal, lo cual significa simplemente que A y B deben ser funciones solamente de r . Por lo tanto, obtenemos

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.13)$$

Por otra parte, vemos inmediatamente que ds^2 es ya invariante bajo $t \rightarrow -t$, y entonces esta es la forma requerida de la métrica para un espacio-tiempo espacialmente isotrópico y estático general.

Ahora bien, en un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico la ecuación (1.69) generará un sistema de cuatro ecuaciones que ahora tendrá solamente tres componentes independientes. Debido a esto, ahora nos centraremos en los sistemas esféricamente simétricos, pues estos son razonablemente simples y muy importantes, ya que muchos objetos de importancia en astrofísica parecen cercanamente ser una esfera.

2.2. Componentes del Tensor de Einstein en Espacios Tiempos Estáticos y Esféricamente Simétricos

De acuerdo a (2.13) y definiendo $A = e^{2\Phi}$ y $B = e^{2\Lambda}$ tomamos la siguiente métrica para un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico para poder determinar las cuatro componentes de la tensor de Einstein.

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.14)$$

Donde $g_{00}(r) = -e^{2\Phi(r)}$, $g_{11}(r) = e^{2\Lambda(r)}$, $g_{22}(r) = r^2$ y $g_{33}(r, \theta) = r^2 \sin^2\theta$.

En primer lugar, comenzamos calculando los símbolos de Christoffel para (2.14). De acuerdo a (1.31) tenemos que las únicas $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ que no se anulan son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \Phi', \\ \Gamma_{00}^1 &= e^{2(\Phi-\Lambda)}\Phi', \\ \Gamma_{11}^1 &= \Lambda', \\ \Gamma_{22}^1 &= -re^{2\Lambda}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -re^{-2\Lambda}\sin^2\theta, \\ \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta \end{aligned}$$

y

$$\Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \cot\theta.$$

Una vez que ya hemos calculado los símbolos de Christoffel, lo que sigue es ahora calcular las componentes del tensor de Ricci. De acuerdo a la ecuación (1.46) tenemos:

$$R_{00} = R^0_{000} + R^1_{010} + R^2_{020} + R^3_{030}. \quad (2.15)$$

Aquí debemos calcular también las componentes del tensor de Riemann que necesitamos para completar nuestro cálculo sobre el tensor de Ricci. Por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} R^0_{000} &= 0, \\ R^1_{010} &= e^{2(\Phi-\Lambda)}[(\Phi')^2 - \Lambda'\Phi' + \Phi''], \end{aligned}$$

y

$$R^2_{020} = \frac{1}{r}e^{2(\Phi-\Lambda)}\Phi' = R^3_{030}.$$

Ahora, sustituyendo estas expresiones en (2.15) tenemos:

$$R_{00} = e^{2(\Phi-\Lambda)}[(\Phi')^2 - \Lambda'\Phi' + \Phi'' + \frac{2}{r}\Phi'].$$

De la misma manera podemos calcular las demás componentes del tensor de Ricci. Una vez que las hemos calculado, tenemos que el resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned} R_{11} &= -\Phi'' + \Phi'\Lambda' - (\Phi')^2 + 2\frac{\Lambda'}{r}, \\ R_{22} &= e^{-2\Lambda}[-r(\Phi' - \Lambda') - 1] + 1, \end{aligned}$$

y

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta.$$

Lo que sigue es calcular el escalar de curvatura de Ricci, el cual se calcula de la siguiente forma:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}.$$

El resultado es:

$$R = 2[e^{-2\Lambda}(-(\Phi')^2 + \Phi'\Lambda' - \Phi'' - \frac{2}{r}\Phi' + \frac{2}{r}\Lambda' - \frac{1}{r^2}) + \frac{1}{r^2}]. \quad (2.16)$$

Lo único que resta es sustituir R en $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$, y esto nos da que:

$$G_{00} = \frac{1}{r^2}e^{2\Phi}\frac{d}{dr}[r(1 - e^{-2\Lambda})], \quad (2.17)$$

$$G_{11} = -\frac{1}{r^2}e^{2\Lambda}(1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r}\Phi', \quad (2.18)$$

$$G_{22} = r^2 e^{-2\Lambda} [\Phi'' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \Phi' \Lambda' - \frac{\Lambda'}{r}], \quad (2.19)$$

$$G_{33} = \sin^2 \theta \ G_{22}. \quad (2.20)$$

Las cuales son las cuatro componentes del tensor de Einstein si el espacio-tiempo es estático y esféricamente simétrico.

ECUACIONES DE EINSTEIN CON FLUÍDO PERFECTO

3.1. Las ecuaciones de Einstein con fluidos perfectos estáticos.

En nuestro caso estamos interesados en estrellas estáticas, en las cuales el fluido no tiene movimiento. La única componente de $\mathbf{U}$ es por lo tanto U^0 . La condición de normalización $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1$ implica que $U^0 = e^{-\Phi}$ y $U_0 = -e^\Phi$. Entonces las componentes del tensor de energía-momento $\mathbf{T}$ en este caso se pueden calcular como sigue: de (1.54) tenemos

$$T_{00} = (\rho + p)e^{2\Phi} - pe^{2\Phi},$$

y por lo tanto llegamos a que

$$T_{00} = \rho e^{2\Phi}. \tag{3.1}$$

De igual forma se calculan las demás componentes y estas son

$$T_{11} = pe^{2\Lambda}, \tag{3.2}$$

$$T_{22} = r^2 p \tag{3.3}$$

y

$$T_{33} = \sin^2\theta T_{22}. \tag{3.4}$$

Todas la demás componentes desaparecen.

El tensor energía-momento involucra tanto a p como a ρ , las cuales pueden relacionarse mediante una ecuación de estado, cuya forma es la siguiente:

$$p = p(\rho). \tag{3.5}$$

Esta relación tiene formas funcionales diferentes para fluidos diferentes.

Las leyes de conservación del tensor de energía-momento son: $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$. Estas son cuatro ecuaciones, una para cada valor del índice libre α . De acuerdo a las simetrías la única que no desaparece es cuando $\alpha = r$, lo cual implica que:

$$T^{1\nu}_{;\nu} = T^{11}_{,1} + \Gamma^1_{\sigma\nu} T^{\sigma\nu} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\nu} T^{1\sigma} = 0,$$

y después de sustituir y hacer algunos pasos algebraicos llegamos a que

$$(\rho + p) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dp}{dr}. \quad (3.6)$$

Ahora bien, la componente (0,0) de las ecuaciones de Einstein es

$$G_{00} = 8\pi T_{00},$$

tomando $G = 1$. De acuerdo a (2.17) y (3.1) llegamos a que

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (3.7)$$

donde

$$m(r) = \frac{1}{2}r(1 - e^{-2\Lambda}),$$

Ésta tiene la misma forma de la ecuación Newtoniana, en la cual $m(r)$ es la masa dentro de la esfera de radio r .

De igual forma que para la componente (0,0), podemos calcular la componente (1,1) usando G_{11} y T_{11} , cuya relación es la siguiente:

$$G_{11} = 8\pi T_{11}.$$

Haciendo algunos pasos algebraicos tenemos

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r[r - 2m(r)]}. \quad (3.8)$$

Estas tienen una ecuación de estado en la forma (3.5), entonces las ecuaciones (3.5)-(3.8) son cuatro ecuaciones para los cuatro variables desconocidas Φ , m , ρ y p .

3.2. Solución Exterior

Ahora veamos un poco sobre la geometría exterior de la estrella. En la región fuera de la estrella tenemos que $p = \rho = 0$, y entonces

$$\frac{dm}{dr} = 0,$$

y

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m}{r(r-2m)},$$

las cuales tienen las soluciones

$$m(r) = M = \text{constante},$$

y

$$e^{2\Phi} = 1 - \frac{2M}{r},$$

donde la condición de que $\Phi \rightarrow 0$, así como $r \rightarrow \infty$ ha sido tomada en cuenta. Por lo tanto vemos que la métrica exterior tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2,$$

llamada la métrica de Schwarzschild. Para r grandes esto llega a ser:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

3.3. Solución Interior

Dentro de la estrella, tenemos $\rho \neq 0$, $p \neq 0$, y entonces podemos dividir la ecuación (3.6) por $(\rho+p)$ y usarlo para eliminar Φ de la ecuación (3.8). Éste resultado es llamado la ecuación de Oppenheimer-Volkow:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{(\rho+p)(m+4\pi r^3 p)}{r(r-2m)} \quad (3.9)$$

Combinando (3.9) con (3.7) y una ecuación de estado (3.5), esto son tres ecuaciones para m , ρ , y p . Hemos reducido Φ a una posición auxiliar; puede ser encontrada de la ecuación (3.6) una vez que las otras han sido resueltas.

3.4. Condiciones físicas de las soluciones

Existen muchas soluciones de las ecuaciones de Einstein en el caso estático y esféricamente simétrico, sin embargo, no todas son físicamente aceptables. Las de nuestro interés son aquellas en las cuales la presión tiende a cero en la superficie de la estrella, para poder unir dichas soluciones con la solución exterior de Schwarzschild. Los criterios elementales que usamos para decir si una solución es físicamente aceptable viene dado por los siguientes puntos:

1. Puesto que todas las soluciones que nos interesan corresponden a un fluido perfecto, comenzaremos analizando la isotropía de la presión, la cual implica que $G_1^1 = G_2^2$.

De (1.69) tenemos que $G_{11} \sim T_{11}$ y $G_{22} \sim T_{22}$ y subiendo un índice a T_{11} y a T_{22} tenemos que

$$T_1^1 = T_2^2 = p, \quad (3.10)$$

y por lo tanto, las ecuaciones de Einstein indican que

$$G_1^1 = G_2^2. \quad (3.11)$$

2. Los escalares de curvatura deben de ser regulares (Curvatura escalar, escalar de Kretschmann).

La expresión para R esta dada en (2.16), mientras el escalar de Kretschmann, denotado por K es

$$K = R_{\mu\nu\lambda\delta} R^{\mu\nu\lambda\delta}, \quad (3.12)$$

y en este caso toma la forma

$$K = \frac{1}{4} \{4\Phi'(-m + rm') + 4r[(\Phi)^2 + \Phi''](-r + 2m)\}^2 + 8(r - 2m)^2(\Phi')^2 + 8\frac{(m - rm')^2}{r^6} + 16\frac{m^2}{r^6}. \quad (3.13)$$

Notamos que K es suma de términos positivos.

Hay más escalares de curvatura, pero en el caso estático y esféricamente simétrico R y K son los únicos independientes.

3. Se requiere que tanto la presión p como la densidad ρ sean definidas positivas en el origen, $p(0) > 0$ y $\rho(0) > 0$.
4. La presión debe anularse para algún radio finito $R > 0$, $p(R) = 0$. Esto define el radio de la estrella.
5. Requerimos que la presión p y la densidad ρ sean funciones monótonas decrecientes, $p' < 0$ y $\rho' < 0$.
6. Condición de energía: $\rho \geq p$.
7. La velocidad del sonido se define como $v_s^2 = \frac{dp}{d\rho}$, y debe de satisfacer $0 \leq v^2 \leq 1$. Esto es, la velocidad del sonido dentro del sistema no debe ser mayor a la velocidad de la luz.

Capítulo 4

UNA NUEVA CLASE DE SOLUCIONES INTERIORES

4.1. Construcción de la solución

En el presente capítulo vamos a elegir una familia de funciones $\Phi(r)$ para así poder obtener una ecuación para $\Lambda(r)$. Una vez que encontramos $\Lambda(r)$ podemos determinar la densidad y la presión dentro de la estrella.

De la condición (1) tenemos que la presión debe de ser isotrópica (3.11), es decir, que la presión radial debe de ser igual a la presión tangencial, lo cual implica que

$$r^2\Phi'' + r^2(\Phi')^2 - r(r\Lambda' + 1)\Phi' - r\Lambda' + e^{2\Lambda} - 1 = 0. \quad (4.1)$$

Vemos que tenemos una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden para $\Phi(r)$ y de primer orden para $\Lambda(r)$.

Ahora, vamos a proponer una forma para $\Phi(r)$ [5]

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}\ln(1 + \frac{25}{8}x + \frac{25}{8}x^2). \quad (4.2)$$

donde $x = ar^2$, a es una constante arbitraria. Esta propuesta está basada en el resultado de que la estructura de las soluciones encontradas hasta el momento indica que cerca del origen el comportamiento de $g_{00}(r) = -e^{2\Phi(r)}$ es del tipo $1+a_1x+a_2x^2$ [6]. Siguiendo esta idea es que propusimos esta forma para Φ . La elección de $\frac{25}{8}$ se toma para poder tener una solución exacta para $\Lambda(r)$ de la ecuación (4.1).

Sustituyendo (4.2) en (4.1) obtenemos

$$\begin{aligned} & -r(8 + 50x + 75x^2)\Lambda'(r) + 8(1 + \frac{25}{8}x + \frac{25}{8}x^2)e^{2\Lambda(r)} \\ & - \frac{64 + 400x + 850x^2 + 1250x^3 + 625x^4}{8(1 + \frac{25}{8}x + \frac{25}{8}x^2)} = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

lo cual es una ecuación diferencial no lineal de primer orden para $\Lambda(r)$.

Resolviendo (4.3) para $\Lambda(r)$ obtenemos

$$\Lambda(r) = -\frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{8(1 + \frac{25}{8}x + \frac{25}{8}x^2)}{(2 + 5x)^3} \left[\frac{q^{\frac{1}{3}}x C}{a} + (1 + 5x) \right] \right\}, \quad (4.4)$$

donde C es la constante de integración y $q = 15x + 4$.

Para verificar que los escalares de curvatura son regulares ver [7].

4.2. Análisis de la solución

Una vez que hemos encontrado la forma de Λ y de Φ , podemos calcular la densidad y la presión en nuestro caso. Anteriormente habíamos fijado $c = 1$ y $G = 1$, ahora vamos a regresar estas constantes físicas.

De acuerdo a la ecuación para la densidad

$$\rho(r) = \frac{m'}{4\pi r^2}, \quad \text{donde} \quad m(r) = \frac{1}{2}r(1 - e^{-2\Lambda}), \quad (4.5)$$

obtenemos su siguiente forma

$$kc^2\rho(r) = -\frac{1}{(5x+2)^4} \left[\frac{(3125x^4 + 5625x^3 + 3750x^2 + 1400x + 192)C}{q^{\frac{2}{3}}} + 15a(5x-2) \right], \quad (4.6)$$

donde $k = \frac{8\pi G}{c^4} = 6.607185014\pi \cdot 10^{-44} N^{-1}$.

Si despejamos p de la ecuación (3.8) obtenemos

$$p(r) = \frac{r[r - 2m]\Phi' - m}{4\pi r^3}, \quad (4.7)$$

y sustituyendo $\Phi(r)$ y $m(r)$ en esta última llegamos a su siguiente forma

$$kp(r) = \frac{1}{(5x+2)^3} \left[(125x^2 + 75x + 8)q^{\frac{1}{3}}C + 5(100x^2 + 70x + 11)a \right]. \quad (4.8)$$

Una vez calculada la densidad y la presión, podemos determinar la velocidad del sonido, se obtiene

$$\frac{v^2(r)}{c^2} = \frac{A}{B}, \quad (4.9)$$

donde

$$A = -q(5x+2)(1+2x)(125Cx^2 + 50a^2q^{\frac{2}{3}}r^2 + 5aq^{\frac{2}{3}} - 8C),$$

y

$$B = 6250Cx^5 + 15625Cx^4 + 14750Cx^3 + 10000Cx^2 + 3088Cx + 320C - 45a^2q^{\frac{5}{3}}r^2 + 30aq^{\frac{5}{3}}).$$

Ahora evaluamos la densidad y la presión en el origen, y queda

$$kc^2\rho(0) = -3\sqrt[3]{4}C - \frac{15a}{8} \Rightarrow -\frac{5}{\sqrt[3]{2^{11}}}a > C, \quad (4.10)$$

y

$$kp(0) = \sqrt[3]{4}C + \frac{55a}{8} \Rightarrow -\frac{55}{\sqrt[3]{2^{11}}}a < C, \quad (4.11)$$

formando la expresión

$$kp(0) + \frac{1}{3}kc^2\rho(0) = \frac{50}{8}a \Rightarrow a > 0.$$

La primera derivada de la presión y la densidad se anulan en el origen. Determinando la velocidad del sonido en el origen

$$v^2(0) = -\frac{5a - 2\sqrt[3]{4}C}{5(2\sqrt[3]{4}C + 3a)}.$$

Determinando la segunda derivada de la presión y la densidad en el origen:

$$\begin{aligned} k\frac{d^2p}{dr^2}\Big|_0 &= -\frac{25}{8}(5a - \sqrt[3]{2^5}C)a < 0 \Rightarrow C < \frac{5}{\sqrt[3]{2^5}}a. \\ kc^2\frac{d^2\rho}{dr^2}\Big|_0 &= \frac{125}{8}(3a + \sqrt[3]{2^5}C)a < 0 \Rightarrow C < -\frac{3}{\sqrt[3]{2^5}}a. \end{aligned}$$

Aquí, pedimos que ambas segundas derivadas sean negativas, pues la primera derivada en cero debe de anularse, y como veremos más adelante en las gráficas, son cóncavas hacia abajo, pues si fueran cóncavas hacia arriba la primera derivada en el origen no sería cero.

Considerando la condición para la velocidad del sonido $v_s^2 \leq c^2$ implica

$$C \leq -\frac{5}{\sqrt[3]{2^5}}a.$$

De las anteriores desigualdades entre C y a llegamos a la conclusión

$$-\frac{55}{\sqrt[3]{2^{11}}} \leq \frac{C}{a} \leq -\frac{5}{\sqrt[3]{2^5}}.$$

Evaluando (4.4) en $X = aR^2$, donde R es el radio de la estrella, podemos despejar C y obtenemos

$$R^2 C = \frac{(5X + 2)^3 e^{-2\Lambda(R)}}{(15X + 4)^{\frac{1}{3}}(8 + 25X + 25X^2)} - \frac{1 + 5X}{(15X + 4)^{\frac{1}{3}}}. \quad (4.12)$$

Reemplazando esta ecuación en (4.8), evaluando en $r = R$ y considerando $p(R) = 0$, obtenemos la forma de $e^{-2\Lambda(R)}$

$$e^{-2\Lambda(R)} = \frac{25X^2 + 25X + 8}{125^2 + 75X + 8}. \quad (4.13)$$

Esta última ecuación la utilizaremos en lo que sigue.

Una característica importante de los objetos compactos es, precisamente su compacidad. Es por esto que a continuación definimos la razón de compacidad u como

$$u = \frac{GM}{c^2 R}, \quad (4.14)$$

donde M es la masa total del sistema. En un fluido perfecto u está acotada superiormente por $\frac{4}{9}$ [8]. La forma para u en este caso se deduce de la expresión (4.13) y la condición de que la solución interior en la frontera es igual a la solución de Schwarzschild en la superficie de la estrella, esto es, $e^{-2\Lambda(R)} = 1 - \frac{2GM}{c^2 R} = 1 - 2u$. Y entonces tenemos que

$$u = \frac{25(2X + 1)X}{125X^2 + 75X + 8}. \quad (4.15)$$

De las ecuaciones (4.12) y (4.13) se obtiene

$$\frac{C}{a} = -\frac{5(100X^2 + 70X + 11)}{(125X^2 + 75X + 8)(15X + 4)^{\frac{1}{3}}}. \quad (4.16)$$

Al imponer la condición que debe satisfacer $\frac{C}{a} \in [-\frac{55}{\sqrt[3]{2^{11}}}, -\frac{5}{\sqrt[3]{2^5}}]$ obtenemos que para $X \in [0, 1.109467489]$ se satisfacen las condiciones mencionadas correspondientes al origen, lo cual no implica necesariamente que dentro de la estrella se satisfaga el resto de las condiciones. De un análisis en el interior llegamos a que todas las condiciones se satisfacen en este intervalo salvo $0 \leq v^2 \leq c^2$. Esta condición reduce el intervalo de X a $X \in [0, 0.93999]$.

Después de haber hecho una serie de pruebas (en Mathematica) en la gráfica de $v(x, X)$ (está gráfica es dinámica y su expresión se forma cuando sustituimos (4.16) en (4.9)) con distintos valores de $X \in [0, 0.93999]$ para encontrar los valores en los cuales la velocidad del sonido adquiere su primer mínimo, su primer máximo y donde la densidad es tres veces la presión, llegamos a que estos son: $X = 0.445557$, $X = 0.2903215$ y $X = 0.318570695$, aproximadamente.

4.3. Gráficas

En esta sección vamos a presentar las gráficas de $\frac{C}{a}$, la densidad, la presión y la velocidad del sonido, en los valores $X = 0.445557$, valor en el cual la velocidad del

sonido alcanza su primer mínimo, $X = 0.2903215$, valor en el que alcanza su primer máximo, y $X = 0.318570695$, valor en el que la densidad en el origen es tres veces la presión en el mismo. Estos valores nos ayudarán a caracterizar las propiedades de la solución.

Primeramente presentamos la gráfica para $\frac{C}{a}$ dada por la ecuación (4.16), pues esta es la que nos da mayor información sobre el intervalo en el cual la presión, la densidad y la velocidad del sonido están bien definidas y cumplen con las condiciones requeridas.

En la figura 4.1 podemos ver la gráfica de $\frac{C}{a}$, en el intervalo $-\frac{55}{\sqrt[3]{2^{11}}} \leq \frac{C}{a} \leq -\frac{5}{\sqrt[3]{2^5}}$, que como vimos anteriormente, es el intervalo encontrado para $\frac{C}{a}$. Aquí $y_1 = -\frac{5}{\sqrt[3]{2^5}}$ y $y_2 = -\frac{55}{\sqrt[3]{2^{11}}}$, los cuales son los valores extremos de dicho intervalo y se encuentran entre $X = [0, 0.93999]$.

En este intervalo para $\frac{C}{a}$, es donde la velocidad del sonido cumple con la condición $0 \leq v^2 \leq c^2$, además es donde la presión y la densidad cumplen con las condiciones mencionadas en la sección 3.4. en todo el interior de la estrella.

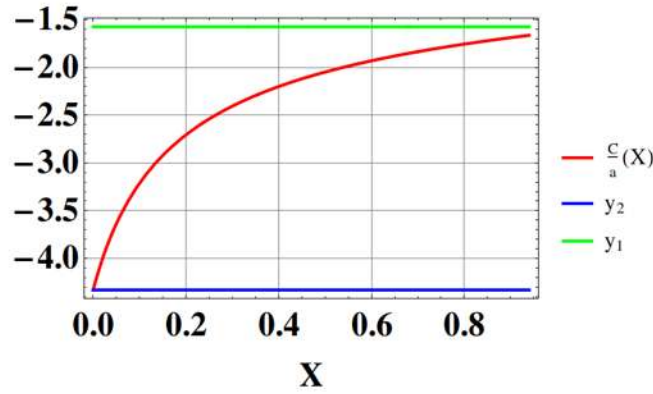


Figura 4.1: Gráfica de $\frac{C}{a}$ en el intervalo $X \in [0, 0.9399]$.

En las gráficas para la densidad, la presión y la velocidad del sonido tomaremos $x = \frac{r}{R}$. Así cuando $r = 0$ (origen), $x = 0$, y cuando $r = R$ (frontera), $x = 1$. Por lo tanto, las gráficas están dadas en el intervalo $x \in [0, 1]$.

Si queremos regresar a las unidades de presión, densidad y velocidad del sonido, debemos definirlas como sigue:

$$\rho(x) = kR^2 c^2 \rho(r), \quad p(x) = kR^2 p(r) \quad y \quad v^2(x) = \frac{v^2}{c^2}(r).$$

Si despejamos tenemos entonces:

$$\rho(r) = \frac{\rho(x)}{kR^2 c^2}, \quad p(r) = \frac{p(x)}{kR^2} \quad y \quad v^2(r) = c^2 v^2(x),$$

y así volvemos a las unidades para la densidad, la presión y la velocidad del sonido.

La figura 4.2 nos muestra la gráfica de la densidad $\rho(x)$ y la presión $p(x)$ en $X = 0.445557$. Para este valor de X , $\frac{C}{a} = -2.12657$, además $u = 0.318049$. Aquí podemos notar que tanto la densidad como la presión están bien definidas desde el origen hasta la frontera, además que las dos son positivas en el origen, $p(0) > 0$ y $\rho(x) > 0$. Si nos fijamos en la frontera, vemos que ahí la presión se anula $p(R) = 0$, mientras que la densidad no, $\rho(R) \neq 0$. Haciendo una comparación entre $p(x)$ y $\rho(x)$, vemos que tanto en el origen, así como en la frontera la presión es menor que la densidad $p(x) < \rho(x)$, de hecho, en todo el intervalo desde el origen a la frontera la densidad está siempre por encima que la presión, lo cual es lo que se requiere.

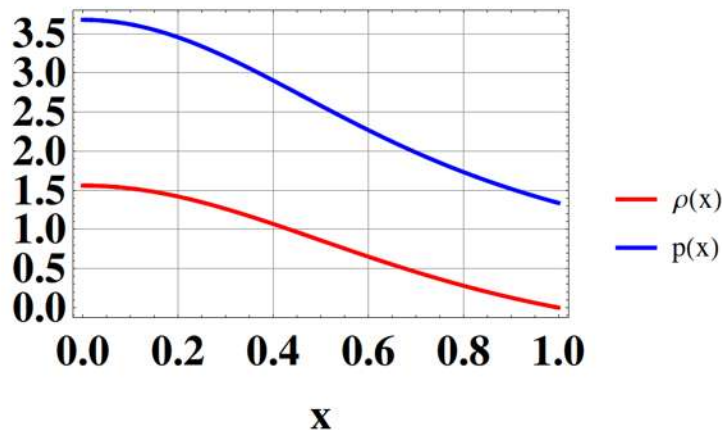
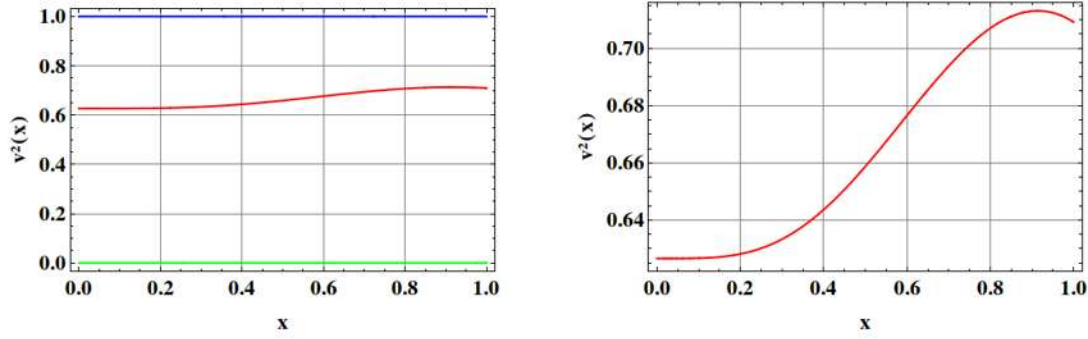
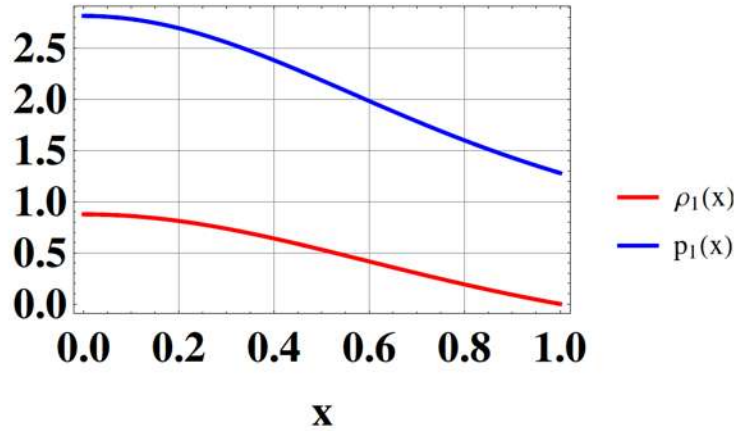


Figura 4.2: Gráfica para la presión y la densidad en $X = 0.445557$ ($C/a = -2.12657$), desde el origen hasta la frontera.

En la figura 4.3 observamos la gráfica de la velocidad del sonido en $X = 0.445557$, que como habíamos dicho antes, se puede comprobar que es el primer valor de X en donde $v^2(x)$ tiene su primer mínimo. Además, podemos ver que $v^2(x)$ cumple con la condición de que $0 \leq v^2 \leq c^2$. La gráfica de la derecha es un acercamiento a la curva de $v^2(x)$.

Ahora bien, en la figura 4.4 podemos observar la gráfica para la densidad, así como para la de la presión en $X = 0.2903215$. En dicho valor, $\frac{C}{a} = -2.42994$ y $u = 0.284604$. Para la densidad, vemos que no se anula en la frontera, $\rho_1(R) \neq 0$, y que es positiva y bien definida en el origen, y para la presión, notamos que también es positiva en el origen y $p_1(R) = 0$. Comparando $\rho_1(x)$ y $p_1(x)$, nos damos cuenta que en todo punto entre el origen y la frontera la curva de la densidad está por encima que la presión, esto es, $\rho_1(x) > p_1(x)$ para todo $x \in [0, 1]$.

La figura 4.5 nos presenta la gráfica para la velocidad del sonido en $X = 0.2903215$. En la gráfica de la izquierda, podemos ver que $v_1^2(x)$ es positiva en todo el intervalo de $x \in [0, 1]$, además, en dicho intervalo $v_1^2(x)$ no rebasa la velocidad de la luz, esto es, $0 \leq v_1^2 \leq c^2$. En la derecha vemos un acercamiento de la curva de la velocidad, en


 Figura 4.3: Gráfica para la velocidad del sonido en $X = 0.445557$ en $x \in [0, 1]$.

 Figura 4.4: Gráfica para la presión y la densidad en $X = 0.2903215$ ($C/a = -2.42994$).

la cual podemos notar que en este valor para X es donde $v_1^2(x)$ comienza a tener su primer máximo, como habíamos mencionado anteriormente.

La gráfica de la figura 4.6 nos muestra la densidad y la presión en el valor $X = 0.318570695$. Aquí $\frac{C}{a} = -2.36235$ y además $u = 0.292486$. Este es justo el valor X donde la densidad en el origen es tres veces la presión en el origen. Por ende vemos que ambas están bien definidas y son finitas en el origen. También, en todo el intervalo $\rho_2(x) > p_2(x)$, y además $\rho_2(x) > 0$ y $p_2(x) > 0$. En la frontera la densidad no se anula $\rho_2(x) \neq 0$, mientras que la presión sí $p_2(x) = 0$.

Finalmente, en la figura 4.7 vemos la gráfica para la velocidad del sonido en el valor $X = 0.318570695$. En la gráfica de la izquierda podemos observar que desde el origen hasta la frontera, no rebasa la velocidad de la luz y tampoco es menor que cero en ningún punto dentro de $x \in [0, 1]$. Además de que tanto en el origen como en la frontera la velocidad está bien definida. La gráfica de la derecha es un acercamiento a la curva de la velocidad en un intervalo de $v_2^2(x)$ más pequeño.

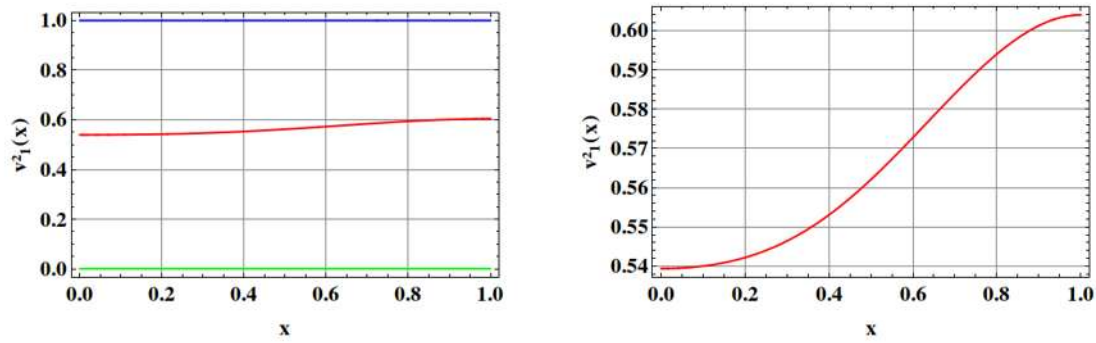


Figura 4.5: Gráfica para la velocidad del sonido en $X = 0.2903215$.

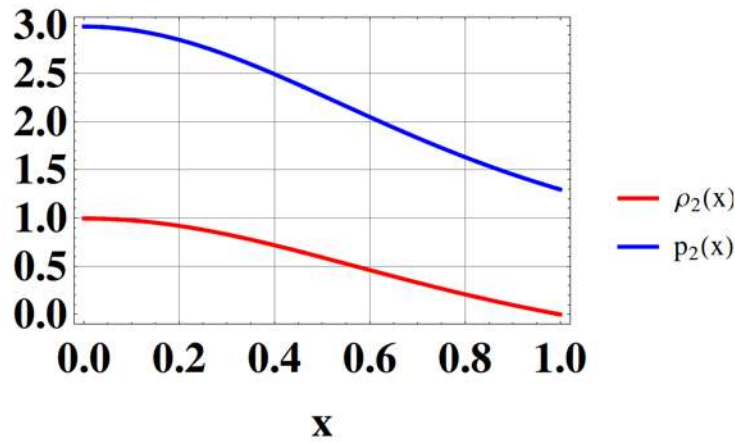


Figura 4.6: Gráfica para la presión y la densidad en $X = 0.318570695$ ($C/a = -2.36235$) en $x \in [0, 1]$.

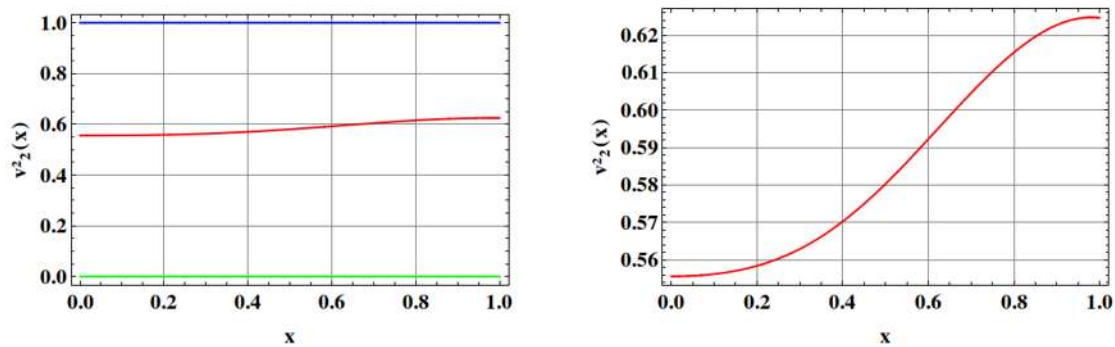


Figura 4.7: Gráfica para la velocidad del sonido en $X = 0.318570695$

Ahora, sabemos que el máximo valor de X que puede tomar es 0.93999 y que la función u dada en la ecuación (4.15) es monótona creciente, por lo que el máximo valor de la compacidad resulta ser $u = 0.3581899972$. Para este valor, considerando un valor de densidad para una estrella de neutrones $\rho = 5 \cdot 10^{14} \frac{gr}{cm^3}$ [9], se tiene un radio de $12km$ y una masa de $2.91M_{\odot}$, donde $M_{\odot}$ es la masa del sol.

Ahora, damos un valor de densidad típico de una estrella de Quarks, $\rho = 5 \cdot 10^{18} \frac{kg}{m^3}$, para poder calcular valores para la compacidad u , el radio R y la masa M en algunos valores de X en el intervalo $X \in [0, 0.93999]$. Los valores obtenidos aparecen en la tabla (4.1), y además estos valores concuerdan con algunos resultados que ya se han observado.

Cuadro 4.1: Para la siguiente tabla consideramos una densidad de $5 \cdot 10^{18} \frac{kg}{m^3}$, valor típico de una estrella de Quarks, y determinaremos cuales son los valores de radio y masa que se obtienen.

X	u	$R(m)$	$M_{\odot}$
0.90128834	0.3564943	3822.703581	0.92299385
0.9128834	0.3570161	3822.696926	0.92434319
0.9228834	0.3574564	3822.680957	0.92547928
0.9328834	0.3578880	3822.656100	0.92659063
0.94	0.3581899	3822.633290	0.92736689
0.89	0.3559743	3822.696975	0.92164595
0.85	0.3540300	3822.555299	0.91657801
0.83	0.3529938	3822.404499	0.91654185
0.8	0.3513513	3822.058471	0.90952460
0.7	0.3449691	3819.476075	0.89240009
0.6	0.3367346	3813.276347	0.86968431
0.2	0.2500000	3572.493781	0.60490473

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado un modelo teórica para describir estrellas compactas como las estrellas de neutrones o de Quarks, la presión y densidad descritas por el modelo son monótonas decrecientes y regulares, lo que concuerda con las condiciones para que esta represente un objeto estelar físicamente aceptable. La velocidad de propagación del sonido es menor que la velocidad de la luz en el vacío y su máximo se encuentra fuera del centro. La solución presentada y su análisis se realizó tanto analítica como gráficamente. Aunque en este trabajo aplicamos la solución para describir estrellas de Quarks, podemos emplearlo también para estrellas de neutrones. Esta solución da pie a la construcción de otras soluciones como lo son las cargadas, este es un trabajo que puede realizarse a futuro.

Bibliografía

- [1] B. F. Schutz, A first course in general relativity (Cambridge University Press. Cambridge 1986).
- [2] B Choquet, Comm Math Phys, The boundary problem in general relativity (2006)
- [3] M. P. Hobson, G. Efstathiou and A. N. Lasenby, General Relativity: An Introduction for Physicists (Cambridge University Press, 2006).
- [4] Steven Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. (Cambridge, Massachusetts, 1972).
- [5] Estevez Delgado Gabino, Estevez Delgado Joaquín, Arturo Barajas Mendiola, A solution for compact stars (Artículo en preparación).
- [6] M.S.R. Delgaty and Kayll Lake, "Physical Acceptability of Isolated, Static, Spherically Symmetric", Comput. Phys Commun 115(1998) 395-415.
- [7] Estevez Delgado Gabino, Estevez Delgado Joaquín, Adriana Rojas Sánchez, Stellar solution with regular metric and singular density and pressure (Artículo en preparación).
- [8] Harris A. Buchdahl, General Relativistic Fluid Spheres, Phys. Rev. 116(1959) 1027. Doi: 10.1103/PhysRev.116.1027-1034.
- [9] Solís, M. A., Estrellas de Neutrones, Revista Mexicana de Física, vol. E52, p. 37-46 (2006).