



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

“Introducción a la teoría de pcf ”

Tesis Para Obtener el Título de:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:
Roberto Lara Sarmiento

DIRIGIDA POR:
Doctor en Filosofía de las Matemáticas
Fernando Hernández Hernández

Morelia, Michoacán - Enero, 2015.

Agradecimientos

Quiero empezar agradeciendo a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas por recibirme y ser mi segunda casa por más de cuatro años, por todos los conocimientos que aprendí ahí y por todos los maestros, amigos y compañeros que pude conocer.

No hay forma de expresar todo el agradecimiento que le tengo a mis padres Roberto Lara y Patricia Sarmiento por todo lo que supieron ofrecerme, por apoyarme en todos mis proyectos y sueños, nada de esto sería posible sin ellos. Gracias por su confianza, amor y dedicación. Ellos lo merecen todo y se los debo todo.

A mis hermanos Diana, Roberto, Karina y Paulina por todo su cariño, por hacerme saber que puedo contar con ellos y, simplemente, por ser mis hermanos.

A todos mis maestros por todos los conocimientos académicos y no académicos que me enseñaron. También quiero agradecer a mis sinodales David Meza, Ariet Ramos y María Luisa Pérez por revisar este trabajo. Una mención especial a mi asesor Fernando Hernández y a Karina Figueroa que siempre fueron más amigos que maestros, por confiar en mí, por todo su apoyo y por todo el tiempo que me dedicaron.

A Adriana Sánchez por estar a mi lado, por todo su apoyo, paciencia, cariño y sus palabras de ánimo en todo momento. Gracias por estar conmigo en los momentos buenos y malos, por siempre escucharme y creer en mí, por vivir junto a mí todo este proceso y siempre arrancarme una sonrisa.

A todos mis compañeros y amigos que siempre han estado ahí para un consejo, una risa, un abrazo y una cerveza. A Daniel Santana, José Juan Piña, Iván Avilés, Leticia Saavedra, Jimena Vallarta, Erendira Vallarta, Anita Ceja, a todos los Pitufos, los Insaciables y todos mis compañeros y amigos de Fismat.

Resumen

Se introduce el conjunto de ‘posibles cofinalidades’ (abreviado como pcf), estudiado por primera vez por Shelah en 1978, que consta de las cofinalidades de todos los ultraproductos de un conjunto de cardinales regulares. Se prueban algunos resultados sobre este conjunto, entre los cuales se demuestra el teorema principal de esta teoría, de donde se deduce que el pcf de un intervalo de cardinales regulares es también un intervalo de cardinales regulares. También se estudia un poco el ideal $J_{<\lambda}(a)$, que consta de todos los subconjuntos de un conjunto de cardinales regulares a que fuerzan que el ultraproducto de a tenga cofinalidad menor que λ , y su relación con el conjunto de posibles cofinalidades y se da una cota para la cardinalidad del conjunto pcf. El presente trabajo finaliza con unas aplicaciones en Aritmética Cardinal, donde se demuestran cotas para algunas operaciones de exponenciación de cardinales.

Palabras clave: posibles, cofinalidades, ultraproductos, aritmética, cardinal.

Abstract

In this document it is introduced the set of ‘possible cofinalities’ (denoted as pcf), studied for the first time in 1978 by Shelah, it consists of the cofinalities of all ultraproducts of a set of regular cardinals. Several results concerning this set are proven, in particular, the proof of the main theorem of this theory is given, from which it follows that the pcf set of an interval of regular cardinals is also an interval of regular cardinals. Also, it is studied the ideal $J_{<\lambda}(a)$ of all subsets of a set a such that force that the ultraproduct of a has cofinality lower than λ and its relationship with the set of possible cofinalities and a bound for the cardinality of the pcf set is given. The document ends with some applications on Cardinal Arithmetic, bounds for some operations of cardinal exponentiation are presented.

Keywords: possible, cofinalities, ultraproducts, arithmetic, cardinal.

Índice general

Introducción	XI
1. Preliminares	1
1.1. Definiciones importantes	1
1.2. Ideales y Ultrafiltros	4
1.3. Clubs y Estacionarios	7
1.4. Submodelos elementales	9
1.5. Otros resultados	16
2. Definición de $\text{pcf}(a)$ y Teorema Principal	21
2.1. Definiendo $\text{pcf}(a)$	21
2.2. Teorema Principal de $\text{pcf}(a)$	25
3. Ideal $J_{<\lambda}(a)$	33
3.1. Definición	33
3.2. Existencia de generadores	41
4. Una cota para $\text{pcf}(a)$	49
4.1. La mejor cota hasta el momento	49
5. Aplicaciones	63
5.1. Primer teorema	64
5.2. Segundo teorema	69
Bibliografía	81
Tabla de símbolos	83

Introducción

En el presente documento pretendemos dar una introducción de la teoría de **pcf**, esperando que el lector consiga hacerse una buena idea acerca de los resultados que ofrece **pcf**. Intentaremos que el material aquí presentado sea autocontenido.

En 1978, Shelah introduce el concepto de **pcf**, leído como ‘posibles cofinalidades’, que consta de las cofinalidades de los ultraproductos de un conjunto de cardinales regulares para demostrar que existen álgebras de Jonsson en sucesores de cardinales singulares. Podemos también encontrar varias aplicaciones en cálculo de particiones, en topología de conjuntos, cofinalidades de conjuntos parcialmente ordenados, etc. Sin embargo, quizá la aplicación más interesante y más sorprendente de **pcf** la encontramos en Aritmética Cardinal, que será la aplicación que mostraremos aquí.

Sabemos de la dificultad acerca de la exponenciación de cardinales, incluso, utilizando métodos de forcing, se puede probar que muchos de estos resultados son independientes de **ZFC**. Por ejemplo, Easton demuestra que si $F : \mathbf{CN} \rightarrow \mathbf{CN}$ es una (clase) función que cumple con:

1. $F(\sigma) \leq F(\tau)$, donde $\omega \leq \sigma < \tau$,
2. $\text{cf}(F(\tau)) > \tau$ para cada $\tau > \omega$.

Entonces existe un modelo M de **ZFC** tal que

$$M \models \forall \tau \geq \omega (\tau \text{ es regular} \Rightarrow 2^\tau = F(\tau)).$$

Lo cual nos sugiere una gran libertad para realizar exponenciación. Sin embargo, notemos que el teorema es válido para τ regulares.

En los setentas, Solovay preguntó si era posible dar una cota para 2^λ , cuando λ era un cardinal límite fuerte. Galvin y Hajnal respondieron con un teorema diciendo que $2^{\aleph_\alpha} < \aleph_{(|\alpha|^\kappa)^+}$, donde $\kappa := \text{cf}(\alpha)$.

En el último capítulo de este trabajo, presentaremos una generalización del teorema de Galvin-Hajnal, el cual probó Shelah utilizando resultados de la teoría de **pcf**. Shelah demuestra que para cualquier δ ordinal límite, entonces $\aleph_\delta^{|\delta|} < \aleph_{(|\delta|^\kappa)^+}$, donde $\kappa := \text{cf}(\delta)$.

También demostraremos que para cualquier ordinal límite δ , se cumple que $\aleph_\delta^{|\delta|} < \aleph_{|\delta|+4}$. Por ejemplo, podríamos concluir que si $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ entonces $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4}$, lo cual resulta sorprendente pues es una cota muy específica, en contra de lo que en algún principio nos sugiere Easton.

A lo largo de este documento, nos dedicaremos a probar algunos de los resultados más importantes de la teoría de **pcf**. En el capítulo final, demostramos dos teoremas muy fuertes, los cuales son: bajo ciertas condiciones, $\text{máx}(\mathbf{pcf}(a)) = |\prod a|$ y $\text{sup}(\mathbf{pcf}_\mu(a)) = \text{sup}(a)^\mu$, de los cuales las aplicaciones antes mencionadas son inmediatas.

Aunque el trabajo trata de ser autocontenido, para una lectura fluida, se sugiere estar familiarizado con la teoría básica de ideales y filtros, aritmética cardinal y conceptos como conjuntos estacionarios y conjuntos cerrados y no acotados. También se sugiere un buen manejo de inducción y recursión transfinita, así como de técnicas de submodelos elementales, ya que éstas serán frecuentemente usadas durante las demostraciones aquí presentadas.

Todo el material aquí presentado está contenido en un artículo de M. R. Burke y M. Magidor (véase [1]), pero el objetivo de este trabajo es hacer una presentación mucho más accesible que el artículo original.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones importantes

En este primer capítulo introduciremos algunos conceptos y resultados de la Teoría de Conjuntos que nos serán de utilidad para el desarrollo de este documento.

Definición 1.1.1. Una relación binaria $\leq$ sobre un conjunto P la llamamos *orden parcial* si es:

1. *reflexiva*: para todo $p \in P$, $p \leq p$;
2. *antisimétrica*: para todo $p, q \in P$, $p \leq q$ y $q \leq p$ implica $p = q$;
3. *transitiva*: si $p \leq q$ y $q \leq r$, entonces $p \leq r$.

Al par $(P, \leq)$ lo llamaremos *conjunto parcialmente ordenado*. Cuando no haya peligro de confusión, nos referiremos a él simplemente como P .

Un conjunto parcialmente ordenado A diremos que es *bien ordenado* si cada subconjunto no vacío de A tiene un elemento mínimo. Diremos que A es *transitivo* si para todo $a \in A$, $a \subseteq A$. Con esto, tenemos la siguiente definición:

Definición 1.1.2. Un número ordinal es un conjunto α transitivo y bien ordenado por $\in$.

Ocurre que los números naturales son los números ordinales finitos y el conjunto de todos los números naturales, denotado por ω , es también un número ordinal. Si α es un número ordinal, también lo es $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$. Por otro lado, cualquier elemento de un número ordinal, es también un número ordinal. Así pues, un número ordinal α lo llamaremos *ordinal sucesor* si existe un β tal que $\alpha = \beta + 1$; de otro modo, diremos que α es un *ordinal límite*.

Para números ordinales α y β definimos $\alpha < \beta$ si sucede que $\alpha \in \beta$. Este orden resulta ser un buen orden.

Otro hecho importante de mencionar es que para cualquier conjunto de ordinales X , el conjunto $\bigcup X + 1$ es un número ordinal que no pertenece a X . A este ordinal lo llamaremos *supremo de X* . De este modo, concluimos que el conjunto de todos los números ordinales no existe. A la clase de los números ordinales la denotaremos por **ON**.

Definición 1.1.3. Para un conjunto de ordinales a , definimos el producto (caja) de a como

$$\prod a := \{f : a \rightarrow \text{ON} : \forall \alpha \in a (f(\alpha) < \alpha)\}.$$

A lo largo de este texto, usaremos constantemente dos herramientas muy útiles en Teoría de Conjuntos para demostrar teoremas. Éstas son: *Principio de Inducción Transfinita* y *Teorema de Recursión Transfinita*, que son una generalización para ordinales del Principio de Inducción y Teorema de Recursión para números naturales.

Teorema 1.1.4 (Principio de Inducción Transfinita). *Consideremos $P(x)$ una propiedad. Si para todo ordinal α tenemos que:*

si $P(\beta)$ se cumple para todo $\beta < \alpha$, entonces $P(\alpha)$ se cumple.

Entonces $P(x)$ se cumple para todos los ordinales.

Sin embargo, a menudo utilizaremos otra versión del Principio de Inducción Transfinita que es más familiar a la usada con los números naturales. Para ello, debemos prestar atención a los ordinales límite.

Teorema 1.1.5. *Sea $P(x)$ una propiedad y supongamos que:*

1. $P(0)$ se cumple;
2. Para todo $\alpha \in \text{ON}$, $P(\alpha)$ implica $P(\alpha + 1)$;
3. Para todo ordinal límite $\alpha > 0$: si $P(\beta)$ se cumple para todo $\beta < \alpha$, entonces se cumple $P(\alpha)$.

Entonces $P(\alpha)$ se cumple para todo ordinal α .

Llamaremos *sucesión transfinita de longitud α* a una función cuyo dominio sea un ordinal α y, si A es un conjunto cualquiera, $\bigcup_{\alpha < \gamma} A^\alpha$ será el conjunto de todas las sucesiones transfinitas de elementos en A de longitud menor que γ , donde γ es un ordinal cualquiera.

Teorema 1.1.6 (Recursión Transfinita). *Sean γ un ordinal, A un conjunto y $S = \bigcup_{\alpha < \gamma} A^\alpha$. Consideremos $g : S \rightarrow A$ una función. Entonces existe una única función $f : \gamma \rightarrow A$ tal que:*

$$f(\alpha) = g(f|_\alpha).$$

Para todo $\alpha < \gamma$.

Consideremos ahora dos conjuntos A y B cualesquiera, decimos que A y B tienen la misma cardinalidad, denotado por $|A| = |B|$, si existe una función biyectiva de A en B . Así, $|A| \leq |B|$ significa que existe una función inyectiva de A en B . Se sigue del Axioma de Elección que cualesquiera dos conjuntos son comparables bajo el orden $\leq$.

Definición 1.1.7. *Un ordinal α es llamado número cardinal si $|\alpha| \neq |\beta|$ para todo $\beta < \alpha$.*

Así pues, si A es un conjunto, podemos definir $|A| = \min\{\alpha \in \mathbf{ON} : |A| = |\alpha|\}$. Este número siempre existirá y claramente será un número cardinal. Los números naturales son también cardinales y a los ordinales infinitos que sean cardinales les llamaremos *alephs*, denotándolos por $\aleph$.

Para cada número cardinal α , existe un cardinal mayor a α . El *cardinal sucesor* de α , denotado por α^+ , será el mínimo cardinal mayor a α . Si X es un conjunto de cardinales, entonces $\sup X$ es también un número cardinal. De donde, como sucede con los ordinales, el conjunto de los números cardinales no existe. A la clase de los cardinales la denotaremos por $\mathbf{CN}$.

Usando lo que se ha dicho en el párrafo anterior, podemos definir una enumeración de todos los alephs:

1. $\aleph_0 := \omega_0 := \omega$;
2. $\aleph_{\alpha+1} := \omega_{\alpha+1} := \aleph_\alpha^+$;
3. Si α es un ordinal límite, $\aleph_\alpha := \omega_\alpha := \sup\{\omega_\beta : \beta < \alpha\}$.

Un cardinal $\aleph_\alpha$ será llamado cardinal *sucesor* si α es un ordinal sucesor y cardinal *límite* si α es límite.

Respecto a la aritmética cardinal, es sabido que $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$. Más adelante se hablará acerca de la exponenciación.

Definición 1.1.8. *Sea $\alpha > 0$ un ordinal límite y β un ordinal. Decimos que $\langle \alpha_\xi : \xi < \beta \rangle$, una sucesión transfinita de longitud β de elementos de α , es cofinal en α si:*

para todo $\gamma < \alpha$, existe $\xi < \beta$ tal que $\gamma < \alpha_\xi$.

De esta manera, para cualquier $\alpha > 0$ límite, la *cofinalidad* de α será:

$$\text{cf}(\alpha) := \min\{\beta \in \mathbf{ON} : \text{existe sucesión transfinita de longitud } \beta \text{ cofinal en } \alpha\}.$$

Es inmediato que este número siempre existe y, además, $\text{cf}(\alpha) \leq \alpha$. Dado que todo cardinal es un ordinal límite, podemos hacer una clasificación de los cardinales de la siguiente manera:

$\aleph_\alpha$ es *regular* si $\text{cf}(\omega_\alpha) = \omega_\alpha$ y será *singular* si $\text{cf}(\omega_\alpha) < \omega_\alpha$.

Un ejemplo de un cardinal singular es $\aleph_\omega$. El lector puede convencerse fácilmente que $\langle \aleph_n : n \in \omega \rangle$ es cofinal en $\aleph_\omega$. Aún más, podemos encontrar cardinales singulares arbitrariamente grandes, por ejemplo, todo cardinal de la forma $\aleph_{\alpha+\omega}$ tendrá cofinalidad ω .

Proposición 1.1.9. *Cualquier cardinal sucesor $\aleph_{\alpha+1}$ es regular.*

Demostración. Sea $\beta < \aleph_{\alpha+1}$ un ordinal y $A = \langle \alpha_\xi : \xi < \beta \rangle$ una sucesión transfinita de elementos de $\aleph_{\alpha+1}$. Notemos que $|\beta| \leq \aleph_\alpha$ y $|\alpha_\xi| \leq \aleph_\alpha$, para cada $\xi < \beta$. Si A fuera cofinal en $\aleph_{\alpha+1}$, entonces $\sup A = \aleph_{\alpha+1}$. Pero,

$$\sup A = \left| \bigcup_{\xi < \beta} \alpha_\xi \right| \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$

□

Podemos también concluir que todo cardinal singular es un cardinal límite. Un cardinal regular y límite es $\aleph_0$, sin embargo, no se puede probar a partir de los axiomas de **ZFC** que existe un cardinal no numerable, regular y límite. A este tipo de cardinales se les llama (*débilmente*) *inaccesibles*.

Otro resultado que vale la pena mencionar es que $\text{cf}(\alpha)$ es un cardinal regular para cualquier α .

Un conjunto de cardinales regulares a será un *intervalo de cardinales regulares* si para algunos ordinales $\xi < \eta$, tenemos que $a = \{\alpha : \xi \leq \alpha < \eta \text{ y } \alpha \text{ es un cardinal regular}\}$. A un intervalo de cardinales regulares lo denotaremos como

$$[\xi, \eta)_{\text{reg}}.$$

Además, $\text{mín}(a) := \xi$ y $\text{sup}(a) := \eta$.

Proposición 1.1.10. *Si $a = [\text{mín}(a), \text{sup}(a))_{\text{reg}}$ es un intervalo de cardinales regulares tal que $\text{mín}(a) > |a|$, entonces todos los elementos de $a \setminus \{\text{mín}(a)\}$ son cardinales sucesores.*

Demostración. Si κ es un cardinal límite tal que $\text{mín}(a) < \kappa < \text{sup}(a)$, entonces $\kappa = \text{sup}(a \cap \kappa)$. Por suposición, $\text{cf}(\kappa) \leq |a| < \text{mín}(a) \leq \kappa$, es decir, κ no es regular.

□

Concluimos esta sección mencionando un teorema que no demostraremos aquí, pero nos será de utilidad más adelante. En [4], Pág 57, se puede consultar la demostración.

Teorema 1.1.11 (Fórmula de Hausdorff). *Para ordinales $\alpha > \beta$ se tiene que*

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}.$$

1.2. Ideales y Ultrafiltros

Dos conceptos de gran importancia para el desarrollo de este documento son los ultrafiltros y los ideales sobre un conjunto a . En cualquier libro básico de Teoría de Conjuntos se puede encontrar extensa información sobre estos conceptos. En la presente sección, daremos una breve introducción y demostraremos algunos resultados para asegurarnos de que el lector se encuentre familiarizado con estos conceptos, ya que su entendimiento será de suma importancia para la comprensión de este texto.

Definición 1.2.1. Un filtro sobre un conjunto no vacío a es una colección F de subconjuntos de a tal que:

1. $a \in F$,
2. Si $x, y \in F$, entonces $x \cap y \in F$,
3. Si $x \in F$ y $x \subseteq y$, entonces $y \in F$.

Intuitivamente, entendemos a los filtros como familias de subconjuntos ‘grandes’ de a . Podemos hacer una definición dual, es decir, familias de subconjuntos ‘pequeños’ de a .

Definición 1.2.2. Un ideal sobre un conjunto no vacío a es una colección I de subconjuntos de a tal que:

1. $\emptyset \in I$,
2. Si $x, y \in I$, entonces $x \cup y \in I$,
3. Si $y \in I$ y $x \subseteq y$, entonces $x \in I$.

Si F es un filtro sobre a , la familia $I = \{a \setminus x : x \in F\}$ es un ideal, llamado el dual de F . Análogamente, el filtro dual de un ideal I será la familia $F = \{a \setminus x : x \in I\}$.

Observemos que si $\emptyset \in F$, un filtro sobre un conjunto a , entonces $F = \mathcal{P}(a)$. Así, un filtro será llamado propio si $\emptyset \notin F$. Por otro lado, un ideal será propio si $a \notin I$. En general, siempre consideraremos filtros e ideales propios a menos que se especifique lo contrario.

Veamos algunos ejemplos sencillos de filtros sobre un conjunto a .

1. La familia $F = \{a\}$ es un filtro trivial sobre a .
2. Si $x_0 \subseteq a$, entonces $F = \{x \subseteq a : x_0 \subseteq x\}$ es un filtro sobre a . Este filtro será llamado el filtro **principal** de x_0 . Cuando $x_0 = \{\alpha\}$, para algún $\alpha \in a$, simplemente diremos que F es el filtro principal de α .
3. El filtro de Fréchet: la familia $F = \{x \subseteq a : a \setminus x \text{ es finito}\}$ es un filtro sobre a . Notemos que F es propio si y sólo si a es infinito.

De aquí es fácil imaginarse ejemplos de ideales, por ejemplo, podemos pensar en los ideales duales de los filtros anteriores. También tenemos que $I = \{\emptyset\}$ y $I = \{x \subseteq a : x \subseteq x_0\}$, para algún $x_0 \subseteq a$, son ideales.

Diremos que una familia $S \subseteq \mathcal{P}(a)$ tiene la *propiedad de la intersección finita*, o simplemente p.i.f., si todo $H \subseteq S$ finito cumple con $\bigcap H \neq \emptyset$. Notemos que si S cumple con p.i.f., entonces la familia $F = \{x \subseteq a : \text{existe } H \subseteq S \text{ finito tal que } \bigcap H \subseteq x\}$ es un filtro sobre a que contiene a S . Con esto hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 1.2.3. Si $S \subseteq \mathcal{P}(a)$ cumple con p.i.f., entonces existe un filtro propio F sobre a tal que $S \subseteq F$.

□

A este filtro F lo llamaremos el filtro *generado* por S . Un resultado fácil de verificar es que si $\mathcal{C}$ es un $\subseteq$ -cadena de filtros sobre a , entonces $\bigcup \mathcal{C}$ también es un filtro sobre a .

Definición 1.2.4. Un filtro D sobre un conjunto a es llamado **ultrafiltro** si para todo $x \subseteq a$ se tiene que

$$x \notin D \Rightarrow a \setminus x \in D.$$

Es fácil ver que si $\alpha \in a$, entonces el filtro principal de α es un ultrafiltro.

Un filtro F sobre a será llamado *maximal* si no existe otro filtro propio F' sobre a tal que $F \subsetneq F'$. A menudo usaremos el siguiente resultado que caracteriza a los ultrafiltros sin mencionarlo.

Lema 1.2.5. Un filtro F sobre a es un ultrafiltro si y sólo si es maximal.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que D es un ultrafiltro pero existe un filtro F sobre a tal que $D \subsetneq F$. Tomemos $x \in F \setminus D$. Luego, $a \setminus x \in D \subsetneq F$. Esto es una contradicción pues entonces $\emptyset \in F$.

($\Leftarrow$) Sea F un filtro que no es ultrafiltro. Probaremos que F no puede ser maximal. Al no ser ultrafiltro, existe $y \subseteq a$ tal que $y \notin F$ y $a \setminus y \notin F$.

Afirmamos que $F \cup \{y\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Basta con probar que para todo $x \in F$, se tiene que $x \cap y \neq \emptyset$. En efecto, de lo contrario $x \subseteq a \setminus y$ y entonces $a \setminus y \in F$, esto contradice la elección de y .

Por lo tanto, existe un filtro F' sobre a tal que $F \cup \{y\} \subseteq F'$ y, así, F no es maximal.

□

Otro resultado de gran importancia es el siguiente teorema, donde usaremos el Lema de Zorn. Recordemos que el Lema de Zorn afirma que si un conjunto parcialmente ordenado y no vacío es tal que toda cadena tiene cota superior, entonces existe un elemento maximal.

Teorema 1.2.6. Todo filtro puede extenderse a un ultrafiltro.

Demostración. Sea F_0 un filtro sobre un conjunto a . Consideremos todos los filtros sobre a que contengan a F_0 . Por el Lema de Zorn, existe un filtro U maximal. Por lo tanto, U es un ultrafiltro que contiene a F_0 .

□

Un corolario de este teorema, es que para cualquier ideal I sobre a , podemos encontrar un ultrafiltro D sobre a tal que $I \cap D = \emptyset$.

Finalizamos esta sección con un resultado que usaremos más adelante.

Proposición 1.2.7. Sea I un ideal sobre un conjunto a y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(a)$ disjunto a I . Suponga que $\mathcal{A}$ es tal que, para cualquier $H \subseteq \mathcal{A}$ finito, se tiene que $\bigcap H \notin I$. Entonces, existe un ultrafiltro D disjunto a I tal que $\mathcal{A} \subseteq D$.

Demostración. Consideramos todos los filtros disjuntos a I que contengan a $\mathcal{A}$, aplicando Lema de Zorn obtenemos filtro D maximal con estas características.

Mostremos que D es ultrafiltro. Suponga que no, entonces existe $x \subseteq a$ tal que $x \notin D$ y $a \setminus x \notin D$. Por maximalidad de D , deben existir $d_0, d_1 \in D$ tales que $x \cap d_0 \in I$ y $(a \setminus x) \cap d_1 \in I$, de donde

$$d_0 \cap d_1 \subseteq (x \cap d_0) \cup ((a \setminus x) \cap d_1) \in I.$$

Esto es una contradicción pues $d_0 \cap d_1 \in D$ y D es disjunto a I . □

1.3. Clubs y Estacionarios

Daremos una breve introducción a los clubs y conjuntos estacionarios. Así mismo, demostraremos algunos resultados que nos serán de utilidad para demostraciones posteriores. En [4] se puede encontrar un estudio más profundo de esta teoría.

Si X es un conjunto de ordinales, un ordinal límite $\alpha > 0$ es *punto límite* de X si $\sup(X \cap \alpha) = \alpha$. Si κ es un cardinal y $X \subseteq \kappa$, diremos que X es cerrado si contiene a todos sus puntos límite menores a κ .

Definición 1.3.1. Sea κ un cardinal regular no numerable. Un **club** en κ es un conjunto $C \subseteq \kappa$ que es cerrado y no acotado.

Un subconjunto $S \subseteq \kappa$ se llamará **estacionario** si $S \cap C \neq \emptyset$, para todo club C en κ .

El nombre ‘club’ proviene de su nombre en inglés: *closed unbounded*. Es inmediato de la definición que un subconjunto $C \subseteq \kappa$ es cerrado si y sólo si para cada $\gamma < \kappa$ y cada sucesión $\langle \alpha_\xi : \xi < \gamma \rangle$ de C se tiene que $\lim_{\xi \rightarrow \gamma} \alpha_\xi \in C$.

Por ejemplo, el conjunto de todos los ordinales límite de κ es un club. Si X es un conjunto no acotado de κ , entonces el conjunto de puntos límite de X es un club en κ .

Lema 1.3.2. Si C y D son clubs en κ , entonces $C \cap D$ también es un club en κ .

Demostración. Es inmediato que $C \cap D$ es cerrado. Resta verificar que sea no acotado.

Sea $\alpha_0 < \kappa$. Como C es no acotado, existe $\alpha_1 > \alpha_0$ en C . Análogamente, existe $\alpha_2 > \alpha_1$ en D . De esta manera, para $n \in \omega$, elijamos $\alpha_{2n+1} \in C$ mayor a α_{2n} y $\alpha_{2(n+1)} \in D$ mayor a α_{2n+1} .

Sea β el límite de la sucesión

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m < \dots$$

cuando $m \rightarrow \omega$. Claramente, $\beta \in C \cap D$ y $\beta > \alpha_0$. □

De este lema, el lector puede verificar fácilmente que cualquier club es un conjunto estacionario.

Teorema 1.3.3. *La intersección de menos de κ clubs en κ es también un club.*

No demostraremos el teorema anterior aquí. Una demostración se puede encontrar en [4], que se hace de manera análoga a la demostración del lema, haciendo inducción sobre κ .

Si κ es un cardinal regular, una función $f : \kappa \rightarrow \kappa$ la llamaremos *continua* si $f(\alpha) = \lim_{\xi \rightarrow \alpha} f(\xi)$ para cada $\alpha > 0$ límite.

Una función que sea continua y estrictamente creciente la llamaremos *normal*. Notemos que si f es normal, entonces tiene que ser cofinal. Es fácil ver que la imagen de una función normal es un club. Por otra parte, para cada club C existe una única función normal que enumera a C .

Proposición 1.3.4. *Si $f : \kappa \rightarrow \kappa$ es una función normal, entonces $B := \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \alpha\}$ es un club en κ .*

Demostración. Primero, notemos que como f es normal, para todo $\alpha < \kappa$, se tiene que $\alpha \leq f(\alpha)$.

Veamos que B es no acotado. Sea $\beta < \kappa$ y elijamos $\alpha_0 > \beta$. Para cada $n \in \omega$, podemos encontrar α_{n+1} tal que $f(\alpha_n) < \alpha_{n+1}$. Así, encontramos una sucesión de la forma

$$\beta < \alpha_0 \leq f(\alpha_0) < \alpha_1 \leq f(\alpha_1) < \dots < \alpha_n \leq f(\alpha_n) < \dots$$

Entonces $\alpha := \lim_{n \rightarrow \omega} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \omega} f(\alpha_n) = \lim_{\xi \rightarrow \alpha} f(\xi) = f(\alpha)$. Y, además, $\alpha > \beta$.

De la continuidad de la función f , se sigue que B es cerrado. □

Proposición 1.3.5. *Sean C, D clubs en κ y f, g funciones normales que los enumeran respectivamente. Entonces el subconjunto de elementos de $C \cap D$ que tienen el mismo rango en C y D , esto es $\{\eta \in C \cap D : \exists \xi (\eta = f(\xi) = g(\xi))\}$, es un club.*

Demostración. Sea $A = \{\eta \in C \cap D : \exists \xi (\eta = f(\xi) = g(\xi))\}$. De la Proposición 1.3.4 vemos que $A \neq \emptyset$ y no acotado pues contiene a un club. Por ser f y g continuas se sigue que A es cerrado. □

Para cardinales regulares no numerables κ y cardinales regulares $\lambda < \kappa$, se tiene que el conjunto $S_\lambda^\kappa := \{\alpha < \kappa : \text{cf}(\alpha) = \lambda\}$ es un conjunto estacionario de κ . En efecto, en cualquier club C definamos una sucesión de longitud λ y su límite claramente es elemento de $C \cap S_\lambda^\kappa$.

Proposición 1.3.6. *Si $S \subseteq \kappa$ es estacionario y $S = \bigcup_{\xi < \mu} S_\xi$ para $\mu < \kappa$, entonces existe $\xi < \mu$ tal que S_ξ es estacionario.*

Demostración. Supongamos lo contrario y para cada $\xi < \mu$ elijamos club tal que $S_\xi \cap C_\xi = \emptyset$. Por el Teorema 1.3.3, $C = \bigcap_{\xi < \mu} C_\xi$ es un club. Pero entonces $S \cap C = \emptyset$, esto contradice que S es estacionario. □

Por último, presentamos un resultado de gran importancia en la teoría de los clubs y los conjuntos estacionarios. Sin embargo, no daremos la demostración aquí de este hecho. Aunque lo presentamos como teorema, este resultado es conocido como Lema de Fodor.

Definición 1.3.7. *Una función $f : S \rightarrow \text{ON}$, donde S es un conjunto de ordinales, se dice regresiva si $f(\alpha) < \alpha$ para todo $\alpha \in S$.*

Teorema 1.3.8 (Lema de Fodor). *Supongamos que S es un estacionario de κ y $f : S \rightarrow \text{ON}$ una función regresiva. Entonces existe un subconjunto estacionario $T \subseteq S$ y algún $\gamma < \kappa$ tales que $f(\alpha) = \gamma$ para toda $\alpha \in T$.*

1.4. Submodelos elementales

En varias pruebas de este documento utilizaremos submodelos elementales del conjunto $H(\theta)$, por ello se recomienda que el lector ya se encuentre familiarizado con estos conceptos y su uso. En [2], se puede encontrar un capítulo con información suficiente. Si el lector desea profundizar más en los conceptos aquí expuestos, puede consultar [7]. Sin embargo, en esta sección daremos una breve introducción y presentaremos resultados que se usarán durante algunas demostraciones. Dado que el objetivo de este trabajo es otro, en algunos momentos no seremos tan rigurosos, pero esperamos que lo presentado aquí sea suficiente para que el lector pueda comprender los conceptos y los procedimientos usados a lo largo de este trabajo.

Primero introduciremos al conjunto $H(\theta)$ y presentaremos algunas propiedades de este conjunto.

Un conjunto x es transitivo si cumple con $y \in x \Rightarrow y \subseteq x$. Así, la clausura transitiva de x será el $\subseteq$ -mínimo conjunto transitivo $\text{tc}(x)$ tal que $x \subseteq \text{tc}(x)$. Otra forma de ver $\text{tc}(x)$ nos la da el siguiente lema.

Lema 1.4.1. *Para cualquier conjunto x , se tiene que $\text{tc}(x) = x \cup \{\text{tc}(y) : y \in x\}$.*

Ahora, definimos los conjuntos $H(\kappa)$.

Definición 1.4.2. *Para cualquier número cardinal κ , definimos*

$$H(\kappa) := \{x : |\text{tc}(x)| < \kappa\}.$$

De primera mano uno no puede afirmar que $H(\kappa)$ es un conjunto, sin embargo, uno puede demostrar que $H(\kappa) \subseteq V_\kappa$, donde V_κ es el correspondiente nivel de von Neumann, y de ahí se sigue que $H(\kappa)$ en efecto es un conjunto.

Otro hecho sencillo de ver es que $H(\kappa)$ es un conjunto transitivo. En el siguiente lema encontramos otra forma de ver a los conjuntos $H(\theta)$, para θ regular.

Lema 1.4.3. *Si θ es un cardinal regular, entonces $H(\theta) = \{x \subseteq H(\theta) : |x| < \theta\}$.*

Demostración. Si $x \in H(\theta)$, por transitividad, $x \subseteq H(\theta)$. Como $x \subseteq \text{tc}(x)$ y $|\text{tc}(x)| < \theta$, se tiene que $|x| < \theta$.

Para la segunda contención, sea $x \subseteq H(\theta)$ de cardinalidad menor a θ . Para cada $y \in x$, $y \in H(\theta)$, es decir, $|\text{tc}(y)| < \theta$, por lo tanto, $|\text{tc}(x)| = |\bigcup \{\text{tc}(y) : y \in x\}| < \theta$, pues θ es regular.

□

Para finalizar, enunciaremos algunas propiedades de los conjuntos $H(\kappa)$ que son fáciles de verificar.

Lema 1.4.4. *Para cada cardinal infinito κ , se tiene que*

1. Si $y \subseteq x$ y $x \in H(\kappa)$, entonces $y \in H(\kappa)$,
2. $H(\kappa) \cap \text{ON} = \kappa$,
3. Para todo $x, y \in H(\kappa)$, los siguientes conjuntos también son elementos de $H(\kappa)$: $\{x, y\}, (x, y), x \cup y, x \times y$.

Del último punto, uno deduce que cualquier función $f : x \rightarrow y$ también es elemento de $H(\kappa)$, para cualesquiera $x, y \in H(\kappa)$.

Suponemos que $\mathbf{V}$, el universo de todos los conjuntos, es un modelo para **ZFC** con $\in$ la pertenencia usual de conjuntos, entonces cualquier modelo $\mathcal{A} = (A, \in_A)$ será un conjunto o una subclase de $\mathbf{V}$ que hereda la relación de pertenencia usual. Haciendo un abuso de notación escribimos $\mathcal{A} = (A, \in)$

La verdad de una fórmula φ de la teoría de conjuntos, se refiere a su verdad en $\mathbf{V}$. Supongamos que $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{V}$ y $a_1, \dots, a_n$ es una sucesión de elementos de A . Por inducción en la complejidad de φ , definiremos $\mathcal{A} \models \varphi$ la relación de satisfacción para $\mathcal{A}$ como

$$\mathcal{A} \models a \in b \text{ si y sólo si } a \in b,$$

$$\mathcal{A} \models a = b \text{ si y sólo si } a = b,$$

$$\mathcal{A} \models (\neg\varphi) \text{ si y sólo si no ocurre que } \mathcal{A} \models \varphi,$$

$$\mathcal{A} \models (\psi \vee \varphi) \text{ si y sólo si } \mathcal{A} \models \psi \vee \mathcal{A} \models \varphi,$$

$$\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x, a_1, \dots, a_n) \text{ si y sólo si } (\exists a \in A)\mathcal{A} \models \varphi(a, a_1, \dots, a_n).$$

Definición 1.4.5. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A}$ es un submodelo elemental de $\mathcal{B}$, escrito como $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, si y sólo si, para toda fórmula φ de la teoría de conjuntos y cada evaluación $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ de las variables libres de φ , se cumple que

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_0, \dots, a_{n-1}] \iff \mathcal{B} \models \varphi[a_0, \dots, a_{n-1}].$$

Intuitivamente, $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ si toda afirmación acerca de los elementos A es cierta para $\mathcal{A}$ si y sólo si es cierta para $\mathcal{B}$. El siguiente lema nos simplifica la tarea de demostrar elementalidad.

Lema 1.4.6 (Tarski, Vaught). *Suponga que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ si y sólo si, para cada fórmula φ y cada evaluación $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$, se tiene que*

$$\mathcal{B} \models \exists x_n \varphi[a_0, \dots, a_{n-1}] \Rightarrow \exists a \in A (\mathcal{B} \models \varphi[a_0, \dots, a_{n-1}, a]).$$

Pese a que no se puede demostrar la existencia de submodelos elementales para $\mathbf{V}$, el siguiente teorema nos asegura la existencia de los submodelos si logramos seleccionar de una mejor manera sólo una parte del modelo que sea lo suficientemente rica, como se verá más adelante.

Teorema 1.4.7 (Löwenheim-Skolem). *Suponga que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ y $Y \subseteq C$. Entonces existe $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $Y \subseteq B$ y $|B| \leq \max\{\aleph_0, |Y|, |A|\}$.*

Definición 1.4.8. *Sea M una clase transitiva y φ una fórmula de la teoría de conjuntos, definiremos la **relativización de φ a M** , denotado por φ^M , de manera inductiva sobre la complejidad de las fórmulas:*

1. $(x \in y)^M$ es la fórmula $x \in y$, $(x = y)^M$ es la fórmula $x = y$,
2. $(\neg \psi)^M$ es la fórmula $\neg \psi^M$, $(\psi \vee \chi)^M$ es la fórmula $\psi^M \vee \chi^M$,
3. $(\exists x \psi)^M$ es la fórmula $\exists x(x \in M \wedge \psi^M)$.

Definición 1.4.9. *Si M es una clase transitiva, una fórmula φ de la teoría de conjuntos es llamada **absoluta para M** si y sólo si*

$$\forall x_0, \dots, x_{n-1} \in M (\varphi(x_0, \dots, x_{n-1}) \iff \varphi^M(x_0, \dots, x_{n-1})).$$

A continuación, enunciaremos una forma general del Teorema de Reflexión, en seguida explicaremos su importancia.

Teorema 1.4.10 (Teorema de Reflexión). *Suponga que $\mathbf{Z}$ es una clase y, para cada $\alpha \in \text{ON}$, $\mathbf{Z}(\alpha)$ es un conjunto, tales que se cumple*

1. $\alpha < \beta \Rightarrow \mathbf{Z}(\alpha) \subseteq \mathbf{Z}(\beta)$,
2. Si γ es un ordinal límite, entonces $\mathbf{Z}(\gamma) = \bigcup_{\alpha < \gamma} \mathbf{Z}(\alpha)$,
3. $\mathbf{Z} = \bigcup_{\alpha \in \text{ON}} \mathbf{Z}(\alpha)$.

Entonces, para cualesquiera $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ fórmulas se tiene que

$$\forall \alpha \exists \beta > \alpha (\varphi_0, \dots, \varphi_n \text{ son absolutas para } \mathbf{Z}(\beta), \mathbf{Z}).$$

La última línea del teorema anterior significa lo siguiente: si $M \subseteq N$, una fórmula φ es absoluta para M, N si $\forall a_0, \dots, a_{n-1} \in M (\varphi^M(a_0, \dots, a_{n-1}) \iff \varphi^N(a_0, \dots, a_{n-1}))$.

Notemos que para cada $\alpha \in \mathbf{ON}$, podemos considerar $\mathbf{Z}(\alpha) := H(|\alpha|)$, entonces $\mathbf{Z}=\mathbf{V}$, el universo de todos los conjuntos. Así pues, el teorema nos afirma que para cada fórmula φ de la teoría de conjuntos, podemos encontrar θ cardinal regular tal que φ sea absoluta para $H(\theta)$.

Más aún, dado que cualquier demostración que hagamos termina en un número finito de pasos, podemos encontrar un θ suficientemente grande para el cual todas las fórmulas que usamos para la demostración sean absolutas para $H(\theta)$. Además, podemos pedir que $H(\theta)$ tenga como elementos a todos los conjuntos que ocupemos.

De ahora en adelante, cuando digamos “sea θ suficientemente grande” nos referiremos a lo anterior, es decir, $H(\theta)$ tendrá todo lo que vayamos a utilizar y las verdades relevantes para nuestra demostración coinciden en $H(\theta)$ y en $\mathbf{V}$.

Lema 1.4.11. *Si θ es un cardinal regular no numerable, entonces $H(\theta)$ es un modelo de $\mathbf{ZFC}^-$, esto es, $\mathbf{ZFC}$ sin el axioma del conjunto potencia.*

La demostración de este lema en realidad es muy sencilla, aunque se convierte en larga y tediosa. Si el lector está interesado en la prueba de este lema, puede consultar [7] o [2], y ahí encontrará una demostración detallada.

Lema 1.4.12. *Suponga que θ es un cardinal regular no numerable, $N \prec H(\theta)$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in N$ y $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ una fórmula de la teoría de conjuntos, entonces*

1. *Suponga que $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ es absoluta para $H(\theta)$ y $\varphi(a_0, \dots, a_{n-1}, a)$ es cierta para algún $a \in H(\theta)$, entonces existe $b \in N$ tal que $\varphi(a_0, \dots, a_{n-1}, b)$,*
2. *Si $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ es una fórmula arbitraria y existe único $u \in H(\theta)$ tal que $\varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$, entonces $u \in N$,*

En algunas ocasiones nos es útil extender nuestro lenguaje de la teoría de conjuntos agregando una relación binaria $<$ entre los elementos del modelo. Las fórmulas continúan siendo las mismas, con la excepción de que agregamos a las fórmulas atómicas $x_i < x_j$.

Lema 1.4.13. *Suponga que θ es un cardinal regular no numerable, $<^*$ es un buen orden para $H(\theta)$, $N \prec H(\theta)$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in N$ y $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ es una fórmula arbitraria de nuestro lenguaje extendido. Si b es el $<^*$ -mínimo elemento de $H(\theta)$ tal que $H(\theta) \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}, b)$, entonces $b \in N$.*

Usando los lemas anteriores podemos demostrar los siguientes resultados.

Proposición 1.4.14. *Si $N \prec H(\theta)$, $f \in N$ es una función y $\text{dom}(f) \subseteq N$, entonces $\text{ran}(f) \subseteq N$.*

Demostración. Para cada $\alpha \in \text{dom}(f)$, se tiene que $H(\theta) \models \exists x (f(\alpha) = x)$, como f es función, existe único $\beta \in H(\theta)$ tal que $f(\alpha) = \beta$ y entonces $\beta \in N$. Por lo tanto, $\text{ran}(f) \subseteq N$. $\square$

Proposición 1.4.15. *Supongamos $N \prec H(\theta)$, $<^*$ es un buen orden para $H(\theta)$, $a, b \in N$ y $f : a \rightarrow b$ es una biyección $<^*$ -mínima, entonces $f \in N$.*

Demostración. Consideremos la fórmula $\varphi(x, y, z) := "x \text{ es una biyección de } y \text{ en } z"$. Se sigue entonces que $f \in N$. □

Proposición 1.4.16. *Sea θ suficientemente grande, si N es un submodelo elemental de $H(\theta)$, κ es un ordinal límite y C un club en κ tales que $\{\kappa, C\} \subseteq N$, entonces $\sup(N \cap \kappa) \in C$:*

Demostración. Basta verificar que $\sup(N \cap \kappa)$ es punto límite de C . Sea $a \in N \cap \kappa$, se tiene que $H(\theta) \models \exists x(x \in C \wedge a < x)$. Por elementaridad, existe $b \in N$ tal que $b \in C$ y $a < b$. □

Definición 1.4.17. *Suponga que $N \prec H(\theta)$, $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ es una fórmula de la teoría de conjuntos y $p_1, \dots, p_n \in N$ y*

$$b := \{x \in H(\theta) : H(\theta) \models \varphi[x, p_1, \dots, p_n]\},$$

*entonces decimos que b es **definible** en $H(\theta)$ por una fórmula con parámetros en N .*

Un hecho importante de mencionar es que, para todo conjunto b definible en $H(\theta)$ por una fórmula con parámetros en N , se tiene que $b \in N$.

Otros resultados que valen la pena mencionar para $N \prec H(\theta)$ y tendremos en cuenta más adelante son los siguientes:

- $|a| \in N$, para todo $a \in N$,
- $\omega \in N$,
- Para todo ordinal α , si $\alpha \in N$, entonces $\alpha + 1 \in N$ y $\text{cf}(\alpha) \in N$; si $\alpha + 1 \in N$, entonces $\alpha \in N$,
- Para todo cardinal κ , si $\kappa \in N$, entonces $\kappa^+ \in N$; si $\kappa^+ \in N$, entonces $\kappa \in N$,
- Para cada $b \subseteq \text{ON}$, si $b \in N$, entonces $\text{máx}(b), \text{mín}(b), \sup(b) \in N$,
- Para cada relación $f \in N$, se tiene que $\text{dom}(f), \text{ran}(f) \in N$ y $f|b \in N$, para cada $b \in N$.

A continuación, definiremos las secuencias de aproximación en $H(\theta)$, este concepto será de gran utilidad para varias demostraciones de los resultados aquí expuestos. También demostraremos algunas propiedades de estas secuencias que usaremos más adelante.

Definición 1.4.18. *Una sucesión $\langle N_i : i < \gamma \rangle$ de submodelos elementales de $H(\theta)$ es llamada **secuencia de aproximación** si cumple*

1. Para cada $i < \gamma$, $N_i \prec N_{i+1}$,
2. Si $i < \gamma$ es ordinal límite, entonces $N_i = \bigcup \{N_j : j < i\}$,
3. Para cada $i < \gamma$, se tiene que $\langle N_j : j \leq i \rangle \in N_{i+1}$.

Veamos que podemos encontrar existen secuencias de aproximación.

Lema 1.4.19. *Suponga que θ es un cardinal regular, μ un cardinal infinito menor a θ y σ un ordinal tal que $\sigma \leq \mu^+$. Para cada $Y \in H(\theta)$ con $|Y| \leq \mu$ y para cada sucesión $\langle X_i : i < \sigma \rangle \in H(\theta)$ que satisface $|X_i| \leq \mu$ para toda $i < \sigma$, existe una secuencia de aproximación $\langle N_i : i < \sigma \rangle$ tal que $Y \subseteq N_0$, $X_i \subseteq N_{i+1}$ y $|N_i| \leq \mu$ para toda $i < \sigma$.*

Demostración. Usando el Teorema de Löwenheim-Skolem (teorema 1.4.7) podemos encontrar $N_0 \prec H(\theta)$ tal que $Y \subseteq N_0$ y $|N_0| \leq |Y| \cdot \aleph_0 \leq \mu$.

Supongamos que ya hemos definido la sucesión $\langle N_j : j < i \rangle$. Si i es límite, hagamos $N_i := \bigcup \{N_j : j < i\}$. Por el Lema de Tarski-Vaught (lema 1.4.6), podemos demostrar fácilmente que $N_i \prec H(\theta)$.

Si $i = j+1$ es sucesor, como $i < \mu^+ \leq \theta$, se sigue que $i \in H(\theta)$ y, así, $\langle N_k : k < i \rangle \in H(\theta)$. Nuevamente, usando el Teorema de Löwenheim-Skolem, podemos encontrar $N_{j+1} \prec H(\theta)$ tal que $\langle N_k : k < i \rangle \in N_{j+1}$, $X_j \subseteq N_{j+1}$, $N_j \subseteq N_{j+1}$ y $|N_{j+1}| \leq \max\{|N_j|, |X_j|, \aleph_0\} \leq \mu$. Al ser N_j y N_{j+1} submodelos elementales de $H(\theta)$, claramente $N_j \prec N_{j+1}$. □

Definición 1.4.20. *Para cualquier conjunto N , definimos la **función característica de N** como*

$$\chi_N(\alpha) = \sup(N \cap \alpha),$$

para cada $\alpha \in \text{ON}$.

Veamos el siguiente lema para algunas propiedades simples de las secuencias de aproximación y de las funciones características.

Lema 1.4.21. *Suponga que M es un conjunto, θ un cardinal regular, $\sigma < \theta$ un ordinal límite, $\langle N_i : i \leq \sigma \rangle$ una secuencia de aproximación en $H(\theta)$ y $N := N_\sigma$. Entonces*

1. Si $|M| < \text{cf}(\alpha)$, entonces $\chi_M(\alpha) < \alpha$.
2. Para toda $i < \sigma$, $N_i \in N_{i+1}$, $\sigma \subseteq N$ y $\{N_i : i < \sigma\} \subseteq N$.
3. Si $i < \sigma$ y $\alpha \in N_i$, entonces $\chi_{N_i}(\alpha) \in N_{i+1}$. Además, si $\chi_{N_i}(\alpha) < \alpha$, entonces $\chi_{N_i}(\alpha) < \chi_{N_{i+1}}(\alpha)$.
4. Si $\tau \in N_0$ es un ordinal límite tal que $|N_i| < \text{cf}(\tau)$ para toda $i < \sigma$, entonces $\langle \chi_{N_i}(\tau) : i < \sigma \rangle$ es una sucesión creciente y continua tal que $\sup\{\chi_{N_i}(\tau) : i < \sigma\} = \chi_N(\tau)$. En particular, $\text{cf}(\chi_N(\tau)) = \text{cf}(\sigma)$.

Demostración. La prueba del primer punto es trivial.

Para el segundo punto, fijemos $i < \sigma$. Por definición, $f := \langle N_j : j \leq i \rangle \in N_{i+1}$, luego, $i + 1 = \text{dom}(f) \in N_{i+1} \Rightarrow i \in N_{i+1}$. Entonces $f(i) = N_i \in N_{i+1}$.

Sea $i < \sigma$ y $\alpha \in N_i$. Se tiene que $\alpha \in N_{i+1}$ y $N_i \in N_{i+1}$. Dado que existe único $u \in H(\theta)$ tal que $u = \sup(N_i \cap \alpha)$, se sigue que $u = \sup(N_i \cap \alpha) \in N_{i+1}$. Además, $u \in N_{i+1} \Rightarrow u + 1 \in N_{i+1} \Rightarrow \chi_{N_i}(\alpha) < \chi_{N_{i+1}}(\alpha)$.

Para el último punto, usando el punto uno y tres hemos demostrado que la sucesión es creciente. Para $i \leq \sigma$ límite

$$\sup\{\chi_{N_j}(\tau) : j < i\} = \bigcup\{\bigcup(N_j \cap \tau) : j < i\} = \bigcup(\bigcup\{N_j : j < i\} \cap \tau),$$

por continuidad de las secuencias de aproximación se tiene que

$$\sup\{\chi_{N_j}(\tau) : j < i\} = \bigcup(N_i \cap \tau) = \chi_{N_i}(\tau).$$

□

Concluimos esta sección probando un resultado muy técnico que usaremos más adelante. Si el lector lo prefiere, puede omitirse el siguiente lema y regresar a él una vez que se vaya a usar. En realidad, presentamos este resultado solamente para limpiar un poco la demostración del Lema 3.2.2.

Lema 1.4.22. *Sean a es un conjunto infinito de cardinales regulares, μ un cardinal regular tal que $|a|^+ \leq \mu < \min(a)$ y τ un ordinal límite con $\mu < \text{cf}(\tau)$. Sean θ es un cardinal regular y $\langle N_i : i \leq \mu \rangle$ una secuencia de aproximación en $H(\theta)$ tal que $a \cup \{a, \tau\} \subseteq N_0$ y $|N_i| \leq \mu$ para toda $i < \mu$. Suponga que existe $\langle f_\gamma : \gamma < \tau \rangle$ una sucesión de elementos de $\prod a$ tal que $\langle f_\gamma : \gamma < \tau \rangle \in N_0$ y*

$$f_{\chi_N(\tau)}(\alpha) = \min\{\sup\{f_\beta(\alpha) : \beta \in C\} : C \text{ es un club en } \chi_N(\tau)\},$$

para cada $\alpha \in a$.

Entonces, existe una sucesión $\langle i(\beta) : \beta < \mu \rangle$ estrictamente creciente y continua de ordinales límite en μ tal que $f_{\chi_N(\tau)}(\alpha) = \sup\{f_{\chi_{N_{i(\beta)}}(\tau)}(\alpha) : \beta < \mu\}$ para todo $\alpha \in a$. Además,

$$f_{\chi_N(\tau)} \leq \chi_N|a.$$

Demostración. Del lema anterior, concluimos que $\text{cf}(\chi_N(\tau)) = \mu$.

Para cada $\alpha \in a$, tomemos club C_α de $\chi_N(\tau)$ tal que $f_{\chi_N(\tau)}(\alpha) = \sup\{f_\beta(\alpha) : \beta \in C_\alpha\}$. Definamos $C := \bigcap\{C_\alpha : \alpha \in a\}$, C es un club en $\chi_N(\tau)$. Además, podemos suponer que $\text{otp}(C) = \mu$ y entonces tenemos que

$$f_{\chi_N(\tau)}(\alpha) = \sup\{f_\beta(\alpha) : \beta \in C\}.$$

También concluimos del lema anterior que $\{\chi_{N_i}(\tau) : i < \mu\}$ es un club en $\chi_N(\tau)$. Intersectando con C , obtenemos una sucesión $\langle i(\beta) : \beta < \mu \rangle$ estrictamente creciente y continua de ordinales límite en μ tal que

$$f_{\chi_N(\tau)}(\alpha) = \sup\{f_{\chi_{N_{i(\beta)}}(\tau)}(\alpha) : \beta < \mu\},$$

para todo $\alpha \in a$.

Ahora, notemos que $h := \langle f_\gamma : \gamma < \tau \rangle \in N_0 \Rightarrow \text{dom}(h) = \tau \in N_0 \subseteq N$. Para cada $\beta < \mu$, se tiene que $\chi_{N_{i(\beta)}}(\tau) \in N \Rightarrow f_{\chi_{N_{i(\beta)}}(\tau)} \in N$. Dado que $a \subseteq N$, para todo $\alpha \in a$ se tiene que $f_{\chi_{N_{i(\beta)}}(\tau)}(\alpha) \in N \cap \alpha$, de donde

$$f_{\chi_{N_{i(\beta)}}(\tau)}(\alpha) \leq \sup(N \cap \alpha) = \chi_N(\alpha).$$

Por tanto, $f_{\chi_N(\tau)} \leq \chi_N|_a$.

□

1.5. Otros resultados

Para cardinales regulares $\mu < \kappa$ y un conjunto $T \subseteq \{\alpha < \kappa : \text{cf}(\alpha) = \mu\}$ estacionario en κ , con $\diamond_{\text{club}}(\kappa, \mu)(T)$ nos referiremos al siguiente principio:

Existe una sucesión $\langle S_\alpha : \alpha \in T \rangle$ tal que:

1. $S_\alpha \subseteq \alpha$ es un club en α , para toda $\alpha \in T$,
2. Para cada club $C \subseteq \kappa$, $\{\alpha \in T : S_\alpha \subseteq C\}$ es estacionario en κ .

Recordemos que $\{\alpha < \kappa : \text{cf}(\alpha) = \mu\}$ es un conjunto estacionario en κ . Escribiremos simplemente $\diamond_{\text{club}}(\kappa, \mu)$ cuando $T = \{\alpha < \kappa : \text{cf}(\alpha) = \mu\}$. En general, $\diamond_{\text{club}}(\kappa, \mu)$ no es un teorema de **ZFC**, sin embargo, podemos probar lo siguiente.

Lema 1.5.1. *Si μ y κ son cardinales regulares no numerables con $\mu^+ < \kappa$, entonces para cualquier conjunto estacionario $T \subseteq \{\alpha < \kappa : \text{cf}(\alpha) = \mu\}$, se cumple $\diamond_{\text{club}}(\kappa, \mu)(T)$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, no existe sucesión testigo para $\diamond_{\text{club}}(\kappa, \mu)(T)$.

De manera recursiva, definiremos para cada $\beta < \mu^+$ una sucesión $\langle S_\alpha^\beta : \alpha \in T \rangle$ y un club $C_\beta \subseteq \kappa$.

Comencemos tomando cualquier sucesión $\langle S_\alpha^0 : \alpha \in T \rangle$ tal que $S_\alpha^0 \subseteq \alpha$ es un club en α y $\text{otp}(S_\alpha^0) = \mu$, para todo $\alpha \in T$. Por nuestra suposición inicial, $\langle S_\alpha^0 : \alpha \in T \rangle$ no es testigo para $\diamond_{\text{club}}(\kappa, \mu)(T)$, entonces existe un club $C_0 \subseteq \kappa$ tal que $\{\alpha \in T : S_\alpha^0 \subseteq C_0\}$ es no estacionario en κ .

Para $0 < \beta < \mu^+$ y para cada $\alpha \in T$ definimos:

$$S_\alpha^\beta = S_\alpha \cap \bigcap_{\xi < \beta} C_\xi.$$

Por la Proposición 1.3.3, S_α^β es un club. Nuevamente, por nuestra suposición inicial $\langle S_\alpha^\beta : \alpha \in T \rangle$ no puede ser testigo para $\diamond_{\text{club}}(\kappa, \mu)(T)$, por tanto, existe un club $C_\beta \subseteq \kappa$ tal que $\{\alpha \in T : S_\alpha^\beta \subseteq C_\beta\}$ es no estacionario en κ .

Notemos que, para cada $\alpha \in T$, $\langle S_\alpha^\beta : \beta < \mu^+ \rangle$ es una sucesión decreciente de subconjuntos de S_α . Como $|S_\alpha| = \mu$ y cada S_α^β es un club en α , podemos encontrar $\beta(\alpha) < \mu^+$ tal que $\forall \beta > \beta(\alpha), S_\alpha^\beta = S_\alpha^{\beta(\alpha)}$. Por la Proposición 1.3.6 podemos encontrar $\beta_0 < \mu^+$ tal que $E = \{\alpha \in T : \beta(\alpha) = \beta_0\}$ es estacionario en κ .

Para $\alpha \in E$, tenemos que:

$$S_\alpha^{\beta_0} = S_\alpha \cap \bigcap_{\xi < \beta_0 + 1} C_\xi = S_\alpha \cap \bigcap_{\xi < \beta_0} C_\xi \cap C_{\beta_0} = S_\alpha^{\beta_0} \cap C_{\beta_0}.$$

Se sigue que $S_\alpha^{\beta_0} \subseteq C_{\beta_0}$. Como E es estacionario, esto contradice nuestra elección de C_{β_0} . $\square$

De hecho, de la demostración podemos concluir que para cualquier sucesión $\langle S_\alpha : \alpha \in T \rangle$, existe un club C de κ tal que, definiendo $S'_\alpha := S_\alpha \cap C$, la sucesión $\langle S'_\alpha : \alpha \in T \rangle$ es testigo para $\diamond_{\text{club}}(\kappa, \mu)(T)$.

En la demostración del siguiente lema usaremos la siguiente definición. Si A es un conjunto de ordinales, entonces su cerradura será:

$$\overline{A} := A \cup \{\xi : \xi \text{ es punto límite de } A\}.$$

También usaremos la siguiente proposición.

Proposición 1.5.2. *Si A es un conjunto de ordinales, entonces $|A| = |\overline{A}|$.*

Demostración. Sea $\lambda = |A|$ y $\text{suc}(\lambda) = \{\beta \in \lambda : \beta \text{ es un ordinal sucesor}\}$.

Podemos encontrar una función $f : \text{suc}(\lambda) \rightarrow A$ sobreyectiva y estrictamente creciente. En efecto, consideremos $h : \lambda \rightarrow A$ sobreyectiva y estrictamente creciente, definamos $g : A \rightarrow \text{suc}(\lambda)$ como $g(\alpha) = h^{-1}(\alpha) + 1$. Es fácil ver que g^{-1} es la función deseada.

Definamos $\bar{f} : \lambda \rightarrow A$ la ‘extensión continua’ de f como

$$\bar{f}(\xi) = \begin{cases} \sup\{f(\eta) : \eta \in \xi \cap \text{suc}(\lambda)\} & \text{si } \xi \notin \text{suc}(\lambda), \\ f(\xi) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Uno se puede convencer fácilmente que $\overline{A} \subseteq \bar{f}[\lambda + 1]$. Por lo tanto, como $A \subseteq \overline{A}$ y $|\bar{f}[\lambda + 1]| = \lambda$, concluimos que $|A| = |\overline{A}|$. $\square$

Lema 1.5.3. *Sean $\mu < \kappa$ cardinales regulares no numerables. Entonces existe un conjunto estacionario $S \subseteq \{\alpha < \kappa^+ : \text{cf}(\alpha) = \mu\}$ y una sucesión $\langle C_\alpha : \alpha \in S \rangle$ tal que C_α sea un club en α para cada $\alpha \in S$ y si $\alpha, \beta \in S$ y $\gamma < \min\{\alpha, \beta\}$ es un punto límite de C_α y de C_β , entonces $C_\alpha \cap \gamma = C_\beta \cap \gamma$.*

Demostración. Fijemos θ un cardinal regular suficientemente grande y $<^*$ un buen orden de $H(\theta)$.

Para cada $\alpha < \kappa^+$ de cofinalidad μ , sea $\langle N_\delta^\alpha : \delta < \kappa \rangle$ una secuencia de aproximación en $(H(\theta), \in, <^*)$ tal que $\{\kappa, \alpha\} \cup \mu + 1 \subseteq N_0^\alpha$ y, para todo $\delta < \kappa$, $|N_\delta^\alpha| < \kappa$. Definimos $A_\delta^\alpha := N_\delta^\alpha \cap \alpha$. Como $\alpha \in N_\delta^\alpha$ y $\text{cf}(\alpha) \subseteq N_\delta^\alpha$, tenemos que A_δ^α es cofinal en α .

Definimos $h : \kappa \rightarrow \kappa$, como $h(\delta) = \chi_{N_\delta^\alpha}(\kappa) = \sup(N_\delta^\alpha \cap \kappa)$. Notemos que $h(\delta) < \kappa$ pues $|N_\delta^\alpha| < \kappa$. El Lema 1.4.21 nos dice que h es una función continua y creciente, es fácil ver que también es cofinal en κ . La Proposición 1.3.4, nos asegura que el conjunto $F_\alpha := \{\delta < \kappa : \sup(N_\delta^\alpha \cap \kappa) = \delta\}$ es un club en κ .

Hagamos $T = \{\alpha < \kappa^+ : \text{cf}(\alpha) = \mu \wedge \alpha \geq \kappa\}$. Es fácil ver que T es estacionario. Aplicando dos veces Lema de Fodor, encontramos un estacionario $S \subseteq T$ y $\delta, \rho < \kappa$ tales que, para todo $\alpha \in S$:

$$\delta = \min\{\eta \in F_\alpha : \text{cf}(\eta) > \omega\} \quad \text{y} \quad \text{otp}(\overline{A_\delta^\alpha}) = \rho + 1.$$

Notemos que $\text{cf}(\rho) = \mu$, así, fijemos $D \subseteq \rho$ un club de ρ tal que $\text{otp}(D) = \mu$.

Para cada $\alpha \in S$, consideremos $i_\alpha : \rho + 1 \rightarrow \overline{A_\delta^\alpha}$ el isomorfismo correspondiente y definamos $C_\alpha := i_\alpha[D]$. Así, $\langle C_\alpha : \alpha \in S \rangle$ cumple con el punto (1) del Lema. Resta verificar el punto (2).

Consideremos $\alpha, \beta \in S$ y $\gamma < \min\{\alpha, \beta\}$ un punto límite de C_α y de C_β

Caso 1: $\text{cf}(\gamma) = \omega$.

Primero probaremos que $\gamma \in N_\delta^\alpha$. Como γ es punto límite de C_α , γ es límite en $\overline{A_\delta^\alpha} = \overline{N_\delta^\alpha \cap \alpha}$, esto implica que $\gamma = \sup(N_\delta^\alpha \cap \gamma)$. Luego, dado que $N_\delta^\alpha = \bigcup_{\delta' < \delta} N_{\delta'}^\alpha$, se sigue que $\{\sup(N_{\delta'}^\alpha \cap \gamma) : \delta' < \delta\}$ es cofinal en γ . Pero, como $\text{cf}(\delta) > \omega = \text{cf}(\gamma)$, podemos encontrar $\delta' < \delta$ tal que $\sup(N_{\delta'}^\alpha \cap \gamma) = \gamma$, es decir,

$$\gamma \in \overline{N_{\delta'}^\alpha \cap \gamma} \subseteq \overline{N_{\delta'}^\alpha \cap \kappa^+}.$$

Es fácil ver que $\{N_{\delta'}^\alpha \cap \kappa^+, \overline{N_{\delta'}^\alpha \cap \kappa^+}\} \cup N_{\delta'}^\alpha \cap \kappa^+ \subseteq N_\delta^\alpha$. Por la Proposición 1.5.2, $|N_{\delta'}^\alpha \cap \kappa^+| = |\overline{N_{\delta'}^\alpha \cap \kappa^+}|$. Sea h la $<^*$ -mínima sobreyección entre $N_{\delta'}^\alpha \cap \kappa^+$ y $\overline{N_{\delta'}^\alpha \cap \kappa^+}$. Luego, $h \in N_\delta^\alpha$ y como $\text{dom}(h) \subseteq N_\delta^\alpha$, concluimos que $\overline{N_{\delta'}^\alpha \cap \kappa^+} \subseteq N_\delta^\alpha$.

Por lo tanto, $\gamma \in N_\delta^\alpha$. Análogamente, $\gamma \in N_\delta^\beta$.

Veamos que $N_\delta^\alpha \cap \gamma = N_\delta^\beta \cap \gamma$. Sea $f : \kappa \rightarrow \gamma$ la $<^*$ -mínima función sobreyectiva. Se sigue que $f \in N_\delta^\alpha \cap N_\delta^\beta$. Si $\xi \in N_\delta^\alpha \cap \gamma$, existe $\tau \in N_\delta^\alpha \cap \kappa$ tal que $f(\tau) = \xi$. Pero como $N_\delta^\alpha \cap \kappa = \delta = N_\delta^\beta \cap \kappa$, entonces $\tau \in N_\delta^\beta \cap \kappa$. Así, existe $\xi' \in N_\delta^\beta \cap \gamma$ tal que $f(\tau) = \xi'$. Al ser f función, se sigue que $\xi = \xi' \in N_\delta^\beta \cap \gamma$. Análogamente para la otra contención.

Finalmente tenemos que

$$A_\delta^\alpha \cap \gamma = N_\delta^\alpha \cap \gamma = N_\delta^\beta \cap \gamma = A_\delta^\beta \cap \gamma.$$

Por lo tanto, $C_\alpha \cap \gamma = C_\beta \cap \gamma$.

Caso 2: $\text{cf}(\gamma) > \omega$.

Consideremos $C = \{\xi : \xi \text{ es punto límite de } C_\alpha \cap C_\beta \cap \gamma \wedge \text{cf}(\xi) = \omega\}$. Es inmediato que C es cofinal en $C_\alpha \cap \gamma$ y en $C_\beta \cap \gamma$. Por el caso anterior, $C_\alpha \cap \xi = C_\beta \cap \xi$ para cada $\xi \in C$. Por lo tanto, $C_\alpha \cap \gamma = C_\beta \cap \gamma$.

□

Teorema 1.5.4. *Para cardinales regulares no numerables $\mu < \kappa$ y cualquier conjunto estacionario $S \subseteq \{\alpha < \kappa^+ : cf(\alpha) = \mu\}$ podemos encontrar una sucesión $\langle C_\alpha : \alpha \in S \rangle$ tal que*

1. $C_\alpha \subseteq \alpha$ es un club en α , para toda $\alpha \in S$,
2. para cada club $C \subseteq \kappa^+$, $\{\alpha \in T : C_\alpha \subseteq C\}$ es estacionario en κ^+ ,
3. si $\alpha, \beta \in S$ y $\gamma < \min\{\alpha, \beta\}$ es un punto límite de C_α y de C_β , entonces $C_\alpha \cap \gamma = C_\beta \cap \gamma$.

Demostración. Del Lema 1.5.3, obtenemos una sucesión $\langle S_\alpha : \alpha \in S \rangle$ que cumpla los puntos (1) y (3). Por otro lado, de la observación hecha después del Lema 1.5.1, podemos encontrar C club de κ tal que, si $C_\alpha = S_\alpha \cap C$, entonces $\langle C_\alpha : \alpha \in S \rangle$ es testigo para $\diamond_{\text{club}}(\kappa^+, \mu)(S)$. Es fácil ver que $\langle C_\alpha : \alpha \in S \rangle$ es la sucesión deseada.

□

Capítulo 2

Definición de $\text{pcf}(a)$ y Teorema Principal

2.1. Definiendo $\text{pcf}(a)$

En esta sección presentaremos definiciones básicas y algunos resultados que usaremos a lo largo de este documento. También introduciremos el concepto de $\text{pcf}(a)$ y algunas propiedades básicas de este conjunto.

Recordemos que un intervalo de cardinales regulares es

$$[\xi, \eta)_{\text{reg}} := \{\alpha : \xi \leq \alpha < \eta \text{ y } \alpha \text{ es un cardinal regular}\},$$

donde $\xi, \eta \in \text{ON}$.

Es importante mencionar que la mayoría de los resultados aquí presentados valen para cualquier a conjunto de cardinales regulares siempre y cuando $|a| < \text{mín}(a)$. Así, a será solamente un conjunto de cardinales regulares a menos que se indique lo contrario. La suposición $|a| < \text{mín}(a)$ siempre la tendremos en cuenta, ya sea a un conjunto o un intervalo de cardinales regulares.

Para un ideal I sobre a y dos funciones $f, g \in \text{ON}^a$ podemos definir el siguiente orden:

$$f \leq_I g \Leftrightarrow \{\alpha \in a : f(\alpha) > g(\alpha)\} \in I.$$

$$f <_I g \Leftrightarrow \{\alpha \in a : f(\alpha) \geq g(\alpha)\} \in I.$$

Si $f <_I g$, diremos que f es menor módulo I a g .

Así pues, $f =_I g$ si sucede que $f \leq_I g$ y $f \geq_I g$, es decir, si $\{\alpha \in a : f(\alpha) \neq g(\alpha)\} \in I$. Es fácil ver que éste es un orden parcial sobre la clase ON^a . Para ideales no maximales, $\leq_I$ no es un orden lineal.

Definición 2.1.1. *Sea a un conjunto de cardinales regulares y I un ideal sobre a . El producto reducido de a por I , denotado por $\prod a/I$, será:*

$$A = \prod a / =_I .$$

Es fácil ver que la relación $=_I$ es de equivalencia. Para una lectura más fácil, en los enunciados de este trabajo no tomaremos clases de equivalencia y estaremos siempre considerando elementos de $\prod a$ y comparándolos con el orden $\leq_I$.

Podemos definir la cofinalidad de $\prod a/I$ como:

$$\text{cf}(\prod a/I) := \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \prod a \wedge \forall f \in \prod a (\exists g \in \mathcal{A} (f \leq_I g))\}.$$

Nótese que este cardinal siempre existe pues podemos tomar $\mathcal{A} = \prod a$. Además, podemos asegurar que este cardinal siempre es regular (véase Teorema 3.1.14).

Un sucesión $\langle f_\gamma : \gamma < \kappa \rangle$ de $\prod a$ será creciente módulo I si para $\xi < \gamma < \kappa$ tenemos que $f_\xi \leq_I f_\gamma$; diremos que es cofinal módulo I si $\forall g \in \prod a (\exists \gamma < \kappa (g \leq_I f_\gamma))$.

A $\prod a/I$ le podemos asociar otro cardinal que llamaremos *verdadera cofinalidad de $\prod a/I$* y lo definiremos como sigue.

Definición 2.1.2. *Sea a un conjunto de cardinales regulares e I un ideal sobre a , definimos la verdadera cofinalidad o ‘true cofinality’ de $\prod a/I$ como:*

$$\text{tcf}(\prod a/I) = \min\{\kappa : \text{existe sucesión de } \prod a \text{ creciente y cofinal módulo } I \text{ de longitud } \kappa\}.$$

Para ideales I no maximales, $\text{tcf}(\prod a/I)$ no siempre existe como se verá a continuación. El problema radica en que, cuando I no es maximal, los elementos de $\prod a$ no siempre son comparables módulo I . Si $\text{tcf}(\prod a/I)$ existe, será un cardinal regular.

Proposición 2.1.3. *Existe un conjunto de cardinales regulares a y un ideal I sobre a para los cuales $\text{tcf}(\prod a/I)$ no existe.*

Demostración. Consideremos $a = \{\omega, \omega_1\}$ e $I = \{\emptyset\}$. Notemos que $\prod a/I$ es considerar a $\omega \times \omega_1$ con el orden $(n, \alpha) \leq (m, \beta) \Leftrightarrow n \leq m \wedge \alpha \leq \beta$.

Tomemos una sucesión $\langle (k_n, \alpha_n) : n \in \omega \rangle$ de $\omega \times \omega_1$ creciente. Sea $\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\} + 1$, entonces $(0, \alpha) \not\leq (k_n, \alpha_n)$ para todo $n \in \omega$. Por tanto, $\text{tcf}(\prod a/I) \neq \omega$.

Ahora, sea $\lambda \geq \omega_1$ un cardinal y $\langle (k_\gamma, \alpha_\gamma) : \gamma < \lambda \rangle$ una sucesión de $\omega \times \omega_1$ cofinal. Podemos encontrar $k \in \omega$ tal que $A_k := \{\gamma < \lambda : k_\gamma = k\}$ sea no numerable. Por otro lado, existe $\beta < \lambda$ tal que $(k + 1, 0) \leq (k_\beta, \alpha_\beta)$. Al ser A_k no numerable, podemos hallar $\xi \in A_k$ tal que $\alpha_\beta \leq \alpha_\xi$. Como $k_\xi = k < k + 1 \leq k_\beta$, entonces (k_β, α_β) y (k_ξ, α_ξ) no son comparables y la sucesión no puede ser creciente. Por tanto, $\text{tcf}(\prod a/I) \neq \lambda$

□

Sin embargo, si $\text{tcf}(\prod a/I)$ existe para un ideal I , sucede que $\text{tcf}(\prod a/I) = \text{cf}(\prod a/I)$. En efecto, la desigualdad $\text{cf}(\prod a/I) \leq \text{tcf}(\prod a/I)$ se sigue de la definición. Supongamos ahora que $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ una sucesión creciente y cofinal módulo I de $\prod a$ y una familia $\{h_\xi : \xi < \mu\} \subseteq \prod a$, con $\mu < \lambda$. Para cada $\xi < \mu$, elijamos $\gamma_\xi < \lambda$ tal que $g_\xi \leq_I f_{\gamma_\xi}$. Sea,

$$\gamma = \sup\{\gamma_\xi : \xi < \mu\}.$$

Como λ es regular, $\gamma < \lambda$. Así, para toda $\xi < \mu$ tenemos que $g_\xi \leq_I f_{\gamma_\xi} <_I f_\gamma$. Por tanto, $\text{cf}(\prod a/I) \geq \text{tcf}(\prod a/I)$.

De manera análoga, para un ultrafiltro D sobre a y $f, g \in \text{ON}^a$ definimos:

$$f \leq_D g \Leftrightarrow \{\alpha \in a : f(\alpha) \leq g(\alpha)\} \in D.$$

$$f <_D g \Leftrightarrow \{\alpha \in a : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in D.$$

Se sigue que $f =_D g \Leftrightarrow \{\alpha \in a : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in D$.

Definición 2.1.4. Sea a un conjunto de cardinales regulares y D un ultrafiltro sobre a . El ultraproducto de a por D , denotado como $\prod a/D$, será:

$$A = \prod a / =_D$$

Por propiedades de filtros, la relación $=_D$ es de equivalencia. Nuevamente, para mayor comodidad y una mejor lectura, en lugar de tomar clases de equivalencia, consideraremos elementos de $\prod a$ comparándolos con $\leq_D$.

Para los ultraproductos, también podemos definir su cofinalidad y su ‘true cofinality’:

$$\text{cf}(\prod a/D) := \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \prod a \wedge \forall f \in \prod a (\exists g \in \mathcal{A} (f \leq_D g))\},$$

$\text{tcf}(\prod a/D) := \min\{\kappa : \text{exista sucesión de } \prod a \text{ creciente y cofinal módulo } D \text{ de longitud } \kappa\}.$

Sin embargo, por propiedades de ultrafiltros, $\prod a/D$ es linealmente ordeado por $\leq_D$ y así $\text{cf}(\prod a/D) = \text{tcf}(\prod a/D)$. Además, este cardinal siempre existe pues podemos tomar $\mathcal{A} = \prod a$.

Observación 2.1.5. Si I es un ideal y D un ultrafiltro sobre a , tales que $D \cap I = \emptyset$, entonces $f \leq_I g \Rightarrow f \leq_D g$ para $f, g \in \prod a$.

También tenemos que si $\text{tcf}(\prod a/I)$ existe, entonces $\text{tcf}(\prod a/I) = \text{cf}(\prod a/D)$.

Demostración. Como $f \leq_I g$, tenemos que: $\{\alpha \in a : f(\alpha) > g(\alpha)\} \in I \Rightarrow \{\alpha \in a : f(\alpha) > g(\alpha)\} \notin D \Rightarrow \{\alpha \in a : f(\alpha) \leq g(\alpha)\} \in D$, es decir $f \leq_D g$.

Para la segunda afirmación, sea $\lambda = \text{tcf}(\prod a/I)$ y $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ una sucesión creciente y cofinal módulo I en $\prod a$. Por la afirmación anterior, esta sucesión también será cofinal módulo D en $\prod a$. Dada una sucesión $\langle g_\beta : \beta < \mu \rangle$ de $\prod a$ con $\mu < \lambda$, para cada $\beta < \mu$, podemos elegir γ_β tal que $g_\beta \leq_D f_{\gamma_\beta}$. Sea $\gamma = \sup\{\gamma_\beta : \beta < \mu\}$, entonces f_γ será cota para la sucesión $\langle g_\beta : \beta < \mu \rangle$. Por tanto, $\text{cf}(\prod a/D) = \lambda$.

□

No podemos asegurar el regreso de la primera afirmación, a menos que I sea un ideal maximal.

Veamos ahora que nos basta con encontrar una sucesión creciente y cofinal módulo D en $\prod a$ de longitud λ , con λ regular, para determinar el valor de $\text{cf}(\prod a/D)$.

Proposición 2.1.6. *Sea D un ultrafiltro sobre a un conjunto de cardinales regulares. Supongamos que para λ regular, existe $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ sucesión estrictamente creciente y cofinal módulo D . Entonces $\text{cf}(\prod a/D) = \lambda$.*

Demostración. Por definición, $\text{cf}(\prod a/D) \leq \lambda$. Supongamos que $\mu := \text{cf}(\prod a/D) < \lambda$ y tomemos $\langle g_\xi : \xi < \mu \rangle$ una sucesión en $\prod a$.

Luego, para todo $\xi < \mu$, podemos encontrar $\gamma_\xi < \lambda$ tal que $g_\xi \leq_D f_{\gamma_\xi}$. Como λ es regular, podemos definir $\gamma = \sup\{\gamma_\xi : \xi < \mu\}$. Entonces, $g_\xi \leq_D f_{\gamma_\xi} <_D f_\gamma$ para todo $\xi < \mu$. Lo cual dice que $\langle g_\xi : \xi < \mu \rangle$ no puede ser cofinal módulo D . □

A continuación, definiremos el concepto que da nombre a este documento. En 1978, Shelah introduce el concepto de *posibles cofinalidades* buscando construir un álgebra de Jonsson en sucesores de cardinales singulares, en particular, en $\aleph_{\omega+1}$. En el resto de la sección, demostraremos algunas propiedades sencillas de este conjunto.

Definición 2.1.7. *Sea a un conjunto de cardinales regulares. Definimos el **conjunto de posibles cofinalidades de a** como*

$$\text{pcf}(a) = \{\lambda : \lambda = \text{tcf}(\prod a/I) \text{ para algún ideal } I \text{ sobre } a\}.$$

Lema 2.1.8. *Suponga que a es un conjunto de cardinales regulares. Entonces*

$$\text{pcf}(a) = \{\text{cf}(\prod a/D) : D \text{ es un ultrafiltro sobre } a\}.$$

Demostración. Sea D un ultrafiltro sobre a y consideremos a I como el ideal dual a D . Como I es maximal podemos asegurar que $\text{tcf}(\prod a/I)$ existe y además $\text{cf}(\prod a/D) = \text{tcf}(\prod a/I)$.

Por otro lado, si I es un ideal sobre a tal que $\text{tcf}(\prod a/I)$ existe, tomamos un ultrafiltro D sobre a tal que $D \cap I = \emptyset$. De la Observación 2.1.5 tenemos que $\text{tcf}(\prod a/I) = \text{cf}(\prod a/D)$. □

Del Lema anterior podemos concluir que si a es un conjunto de cardinales regulares, entonces $a \subseteq \text{pcf}(a)$. En efecto, para cada $\alpha \in a$ consideremos a D como el ultrafiltro principal de α , como α es regular es fácil ver que $\text{cf}(\prod a/D) = \alpha$.

Proposición 2.1.9. *Si a es un conjunto de cardinales regulares y $b \subseteq a$, entonces $\text{pcf}(b) \subseteq \text{pcf}(a)$.*

Demostración. Sea D un ultrafiltro sobre b . Elijamos ahora un ultrafiltro D' sobre a tal que $D \subseteq D'$. Si consideramos una sucesión cofinal módulo D de $\prod b$ extendiéndola de manera arbitraria fuera de b , como $D \subseteq D'$, se sigue que $\text{cf}(\prod a/D') \leq \text{cf}(\prod b/D)$.

Tomemos ahora $\mathcal{A} \subseteq \prod a$ con $|\mathcal{A}| = \mu < \text{cf}(\prod b/D)$. Existe $h \in \prod b$ tal que $f|b \leq_D h$ para toda $f \in \mathcal{A}$, si extendemos a h de manera arbitraria fuera de b , entonces $f <_{D'} h$. Por lo tanto, $\text{cf}(\prod a/D') \geq \text{cf}(\prod b/D)$. □

Lema 2.1.10. *Supongamos que a es un conjunto de cardinales regulares. Si $\min(a) > |\text{pcf}(a)|$, entonces $\text{pcf}(\text{pcf}(a)) = \text{pcf}(a)$.*

Demostración. De la proposición y observación anteriores, se sigue fácilmente que $\text{pcf}(a) \subseteq \text{pcf}(\text{pcf}(a))$.

Para la otra contención, sean $b = \text{pcf}(a)$, $\lambda \in \text{pcf}(b)$ y D un ultrafiltro sobre b tal que $\text{cf}(\prod b/D) = \lambda$.

Para todo $\beta \in b$, existe un ultrafiltro D_β sobre a tal que $\text{cf}(\prod a/D_\beta) = \beta$. Definamos un ultrafiltro D^* sobre a como:

$$A \in D^* \Leftrightarrow \{\beta \in b : A \in D_\beta\} \in D,$$

para $A \subseteq a$. Es fácil ver que D^* sí es filtro. Para ver que es ultrafiltro supongamos que $A \notin D^* \Rightarrow \{\beta \in b : A \in D_\beta\} \notin D \Rightarrow \{\beta \in b : a \setminus A \in D_\beta\} \in D$.

Elijamos una sucesión $\langle f_\xi^\beta : \xi < \beta \rangle$ creciente y cofinal módulo D_β en $\prod a$ para cada $\beta \in b$ y $\langle g_\xi : \xi < \lambda \rangle$ una sucesión creciente y cofinal módulo D en $\prod b$. Para $\xi < \lambda$ y $\alpha \in a$, definimos

$$h_\xi(\alpha) = \sup\{f_{g_\xi(\beta)}^\beta(\alpha) : \beta \in b\}.$$

Como $\min(a) > |\text{pcf}(a)|$, tenemos que $h_\xi \in \prod a$.

Afirmación 1. *Para cada $h \in \prod a$, existe $\xi_0 < \lambda$ tal que $h \leq_{D^*} h_{\xi_0}$ para todo $\xi_0 \leq \xi < \lambda$.*

Demostración. Para todo $\beta \in b$, existe ξ_β tal que $h \leq_{D_\beta} f_{\xi_\beta}^\beta$. Si consideramos $f(\beta) = \xi_\beta$ para cada $\beta \in b$, tenemos que $f \in \prod b$ y definimos a $\xi_0 < \lambda$ tal que $f \leq_D g_{\xi_0}$.

Fijemos $\xi \geq \xi_0$ y hagamos $B = \{\beta \in b : \xi_\beta \leq g_\xi(\beta)\}$ y $A = \{\alpha \in a : h(\alpha) \leq h_\xi(\alpha)\}$. Como $f \leq_D g_\xi$, $B \in D$. Para $\beta \in B$, dado que $h \leq_{D_\beta} f_{\xi_\beta}^\beta \leq_{D_\beta} f_{g_\xi(\beta)}^\beta$, existe $A_\beta \in D_\beta$ tal que

$$h(\alpha) \leq f_{\xi_\beta}^\beta(\alpha) \leq f_{g_\xi(\beta)}^\beta(\alpha) \leq h_\xi(\alpha),$$

para toda $\alpha \in A_\beta$.

Entonces $\alpha \in A$, es decir, $A_\beta \subseteq A$. Así, $A \in D_\beta$ para todo $\beta \in B$. Por lo tanto, $A \in D^*$. $\square$

De la afirmación se sigue que $\langle h_\xi : \xi < \lambda \rangle$ es una sucesión creciente y cofinal módulo D^* en $\prod a$. De la Proposición 2.1.6 concluimos que $\text{cf}(\prod a/D^*) = \lambda$. $\square$

2.2. Teorema Principal de $\text{pcf}(a)$

En la presente sección nos dedicaremos a probar el teorema principal de la teoría de pcf . La importancia de este teorema radica en el último resultado presentado en esta sección. En [2] podemos encontrar otra demostración del mismo resultado usando sucesiones κ -rápidas, κ -acotadas y sucesiones cortas. Sin embargo, decidimos presentar esta prueba pues no requiere teoremas y lemas adicionales a los aquí presentados.

Definición 2.2.1. Sean a un conjunto de cardinales regulares y D un ultrafiltro sobre a . Definimos $\lim_D a = \min\{\gamma \leq \sup(a) : \gamma \cap a \in D\}$.

Notemos que esta definición tiene sentido para todo a y todo D pues $\sup(a) \cap a \in D$.

Proposición 2.2.2. Sean a un conjunto de cardinales regulares y D un ultrafiltro sobre a . Entonces $\mu = \lim_D a$ es el único cardinal tal que para todo ordinal $\beta < \mu$, $\{\alpha \in a : \beta < \alpha \leq \mu\} \in D$.

Demostración. Dado que a es conjunto de cardinales, μ es también un cardinal. Tomemos un ordinal $\beta < \mu$, por la minimalidad de μ , $\beta \cap a \notin D$. Luego, como $\mu \cap a \in D$ y D es ultrafiltro, entonces $\{\alpha \in a : \beta < \alpha \leq \mu\} \in D$.

Ahora, para ver unicidad, supongamos que existen $\mu' < \mu$ que cumplan la hipótesis. Como $\{\alpha \in a : \mu' < \alpha \leq \mu\} \in D$, entonces, para $\beta < \mu'$ ordinal, $\{\alpha \in a : \beta < \alpha \leq \mu'\} \notin D$ pues D es ultrafiltro, una contradicción. $\square$

Observación 2.2.3. Si a es un conjunto de cardinales regulares y D un ultrafiltro sobre a , entonces $\lim_D a \leq cf(\prod a/D)$.

Demostración. Sea $\tau = cf(\prod a/D)$ y $\mu = \lim_D a$. Supongamos que $\mu > \tau$. Consideremos $\langle f_\gamma : \gamma < \tau \rangle$ una sucesión de funciones cofinal en $\prod a/D$. Definamos $g \in \prod a$ como:

$$g(\alpha) = \begin{cases} \sup\{f_\gamma(\alpha) : \gamma < \tau\} & \text{si } \tau < \alpha \leq \mu \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Vemos que g efectivamente es elemento de $\prod a$, pues $\tau < \alpha$ y α es regular. Además, para cualquier $\gamma < \tau$, si $\tau < \alpha \leq \mu$, entonces $g(\alpha) \geq f_\gamma(\alpha)$; y como $\{\alpha \in a : \tau < \alpha \leq \mu\} \in D$, entonces $f_\gamma \leq_D g$, lo cual es una contradicción. $\square$

Definición 2.2.4. Sean a un conjunto de cardinales regulares, D un ultrafiltro sobre a y $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ una sucesión de funciones en ON^a .

Decimos que $h \in \text{ON}^a$ corta a $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ módulo D , si existen $\alpha < \beta < \lambda$ tales que $f_\alpha \leq_D h \leq_D f_\beta$.

Si $\mathcal{A} \subseteq \text{ON}^a$, decimos que $\mathcal{A}$ corta cofinalmente a $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ módulo D , si para todo $\gamma < \lambda$ existe $h \in \mathcal{A}$, con $f_\gamma \leq_D h$ que corta a $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ módulo D .

Lema 2.2.5. Suponga que D es un ultrafiltro sobre un conjunto a de cardinales regulares, $\kappa = |a|$, $\lambda > \kappa^+$ un cardinal regular y $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ una sucesión creciente módulo D de funciones en ON^a .

Entonces pasa una de las siguientes opciones: existe una mínima cota superior módulo D para $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ en ON^a o existen conjuntos de ordinales S_α , para todo $\alpha \in a$, tales que $|S_\alpha| \leq \kappa$ y $\prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ corta cofinalmente a $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ módulo D .

Demostración. La idea de la demostración será construir recursivamente una sucesión $\langle h_\gamma : \gamma < \kappa^+ \rangle$ decreciente de cotas superiores módulo D para $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$, de tal forma que si en algún momento ya se cumple una de las dos opciones, entonces detenemos la construcción. Después, demostraremos que en algún momento se tuvo que detener la construcción.

Empecemos definiendo h_0 como $h_0(\alpha) = \sup\{f_\gamma(\alpha) : \gamma < \lambda\} + 1$, para toda $\alpha \in a$. Supongamos que ya hemos definido h_β , si h_β es mínima cota superior módulo D para $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$, habremos terminado. De lo contrario, elijamos $h_{\beta+1} <_D h_\beta$ una cota superior módulo D para $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ estrictamente menor.

Ahora, para β límite, supongamos que ya hemos definido h_δ para $\delta < \beta$. Sea $S_\alpha = \{h_\delta(\alpha) : \delta < \beta\}$. Para cada $\gamma < \lambda$, definamos g_γ como:

$$g_\gamma(\alpha) = \min\{\mu \in S_\alpha : \mu > f_\gamma(\alpha)\}.$$

La definición tiene sentido porque $h_0(\alpha) > f_\gamma(\alpha)$. Vemos que $\langle g_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ es una sucesión creciente módulo D dado que $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ es creciente módulo D .

Sucede uno de los siguientes casos:

1. Si $\langle g_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ no es eventualmente constante módulo D , entonces corta cofinalmente a $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ módulo D . En efecto, primero notemos que $g_\gamma \geq_D f_\gamma$ por la definición de g_γ ; dada $\gamma < \lambda$, tomemos $\gamma' > \gamma$ tal que $g_\gamma <_D g_{\gamma'}$. Si $g_{\gamma'}(\alpha) > g_\gamma(\alpha)$, entonces debe suceder que $f_{\gamma'}(\alpha) \geq g_\gamma(\alpha)$ por minimalidad de $g_{\gamma'}(\alpha)$. Así, $f_\gamma \leq_D g_\gamma \leq_D f_{\gamma'}$. Como cada $g_\gamma \in \prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ y $|S_\alpha| \leq \kappa$, tenemos la segunda opción del Lema y habremos terminado.
2. Si, por el contrario, la sucesión es eventualmente constante, definamos h_β como la constante. Entonces h_β es cota superior módulo D para $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$, ya que $f_\gamma \leq_D g_\gamma$ y $\langle g_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ es creciente módulo D . Por otro lado, para $\gamma < \lambda$ arbitraria, sucede que $\forall \delta < \beta (g_\gamma \leq_D h_\delta)$, esto porque $h_\delta \geq_D f_\gamma$. Así, $\forall \delta < \beta (h_\beta \leq_D h_\delta)$. Es decir, h_β es cota superior módulo D para cada f_γ y la sucesión de las h_δ sigue siendo decreciente módulo D .

Finalmente, demostraremos que la construcción tuvo que detenerse en algún momento. Supongamos que $\forall \beta < \kappa^+$ hemos definido h_β . De manera similar, para cada $\alpha \in a$ y $\gamma < \lambda$, definamos:

$$\bar{S}_\alpha = \{h_\beta(\alpha) : \beta < \kappa^+\} \text{ y } \bar{g}_\gamma(\alpha) = \min\{\mu \in \bar{S}_\alpha : \mu > f_\gamma(\alpha)\}.$$

Es fácil ver que $\forall \beta < \kappa^+ (\bar{g}_\gamma \leq_D h_\beta)$. Dado que $|\bar{g}_\gamma| = \kappa$, para cada $\gamma < \lambda$ podemos elegir $\beta(\gamma) < \kappa^+$ tal que $\forall \alpha \in a \exists \beta' < \beta(\gamma) (\bar{g}_\gamma(\alpha) = h_{\beta'}(\alpha))$. Más aún, podemos elegir $\beta(\gamma)$ como un ordinal límite. Habremos definido una función $\beta : \lambda \rightarrow \kappa^+$, y como $\lambda > \kappa^+$ por hipótesis, podemos encontrar $\beta < \kappa^+$ y un conjunto $A \subseteq \lambda$, $|A| > \kappa^+$, tal que $\forall \gamma \in A (\beta(\gamma) = \beta)$. Notemos que en el paso β de la recursión, las funciones $g_\gamma = \bar{g}_\gamma$ para cada $\gamma \in A$. Como supusimos que la construcción no se detuvo, $\langle g_\gamma / D : \gamma < \lambda \rangle$ fue eventualmente constante. Elijamos $\gamma \in A$ tal que $g_\gamma =_D h_\beta$, entonces

$$h_\beta =_D g_\gamma =_D \bar{g}_\gamma \leq_D h_{\beta+1} <_D h_\beta.$$

Lo último por la definición de $h_{\beta+1}$ para ordinal sucesor. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, la construcción debió detenerse en algún momento. $\square$

Proposición 2.2.6. *Dada una sucesión $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle \subseteq \prod a$ creciente módulo D y $\mathcal{A} \subseteq \text{ON}^a$ una familia de funciones que corta cofinalmente a la sucesión módulo D . Entonces existe $B \subseteq \lambda$ club en λ tal que $\forall \gamma, \gamma' \in B$ con $\gamma < \gamma'$, existe $k \in \mathcal{A}$ tal que $f_\gamma \leq_D k \leq_D f_{\gamma'}$.*

Demostración. Definamos $\gamma(0) = 0$. Supongamos que ya hemos definido $\gamma(\beta)$, entonces existen $\gamma' < \lambda$ y $k \in \mathcal{A}$ tales que $f_{\gamma(\beta)} \leq_D k \leq_D f_{\gamma'}$; definamos $\gamma(\beta+1) = \gamma'$. Si β es ordinal límite, entonces $\gamma(\beta) = \sup_{\delta < \beta} \gamma(\delta)$.

Ahora consideramos $B = \gamma[\lambda]$. Claramente B es el club que buscábamos. $\square$

Es fácil ver que si $\lim_D a$ es un cardinal sucesor, donde D es ultrafiltro sobre un conjunto de cardinales regulares a , entonces $\lim_D a = \text{cf}(\prod a/D)$. Esto porque, si $\mu = \lim_D a$ y $\eta^+ = \mu$, por definición, $\{\alpha \in a : \eta < \alpha \leq \mu\} = \{\mu\} \in D$, de ahí es claro que $\mu = \text{cf}(\prod a/D)$.

Definición 2.2.7. *Una sucesión $\langle \mathcal{C}_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ es llamada ‘silly square’ si:*

1. $\mathcal{C}_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$,
2. $|\mathcal{C}_\alpha| \leq \lambda$,
3. Existe $E \in \mathcal{C}_\alpha$ tal que E es club en α y $\text{otp}(E) = \text{cf}(\alpha)$, donde $\text{otp}(E)$ es el tipo de orden de E ,
4. Para todo $\beta < \alpha$ y todo $E \in \mathcal{C}_\alpha$ se tiene que $E \cap \beta \in \mathcal{C}_\beta$.

En [5], podemos encontrar información acerca de un principio denotado por $\square(E)$, donde E es una clase cualquiera de ordinales límite. Entendemos a $\square(E)$ por:

Existe una sucesión $\langle C_\alpha : \alpha \text{ es un ordinal singular} \rangle$ tal que:

1. C_α es un club de α ,
2. $\text{otp}(C_\alpha) < \alpha$,
3. Si $\bar{\alpha} < \alpha$ es un punto límite de C_α , entonces $\bar{\alpha}$ es ordinal singular, $\alpha \notin E$ y $C_{\bar{\alpha}} = \bar{\alpha} \cap C_\alpha$.

De aquí surge el nombre de ‘silly square’ para las sucesiones de la Definición 2.2.7.

Se sabe que $\square(E)$ es independiente de **ZFC**, pero este principio se cumple bajo $V = L$. Sin embargo, para obtener una sucesión ‘silly square’ es suficiente con elegir un club $E_\alpha \subseteq \alpha$ tal que $\text{otp}(E_\alpha) = \text{cf}(\alpha)$, para cada $\alpha < \lambda$, y definir $\mathcal{C}_\alpha = \{E_\beta \cap \alpha : \beta < \lambda\}$.

Lema 2.2.8. *Sean a un conjunto de cardinales regulares, D un ultrafiltro sobre a y $\lambda = \text{cf}(\prod a/D)$. Entonces, para todo λ' cardinal regular, $\lim_D a < \lambda' < \lambda$, existe una sucesión de funciones $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda' \rangle \subseteq \prod a$ estrictamente creciente módulo D con una mínima cota superior módulo D , $g \in \text{ON}^a$, tal que $\forall \mu' < \lim_D a (\{\alpha \in a : \text{cf}(g(\alpha)) > \mu'\} \in D)$.*

Demostración. De la observación hecha antes de la Definición 2.2.7, asumimos que $\lim_D a$ es cardinal límite, de lo contrario no hay nada que probar.

Definiremos de manera recursiva la sucesión $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda' \rangle$. Comencemos fijando una sucesión ‘silly square’ $\langle \mathcal{C}_\gamma : \gamma < \lambda' \rangle$.

Sea $f_0 \in \prod a$ arbitrario. Supongamos que para $\beta < \lambda'$ ya hemos definido $\langle f_\gamma : \gamma < \beta \rangle$. Por hipótesis, $\lambda' < \text{cf}(\prod a/D)$, entonces $\exists h_\beta \in \prod a (\forall \gamma < \beta) (f_\gamma <_D h_\beta)$.

Para cada $E \in \mathcal{C}_\beta$ definimos $g_E^\beta \in \prod a$ como:

$$g_E^\beta(\alpha) = \max(h_\beta(\alpha), \sup\{f_\gamma(\alpha) : \gamma \in E \wedge \alpha > \text{otp}(E)\}).$$

En efecto, $g_E^\beta \in \prod a$, pues $h_\beta \in \prod a$ y si $\alpha > \text{otp}(E) \geq |E|$, entonces el supremo en la definición se mantiene $< \alpha$.

Como $|\mathcal{C}_\beta| \leq \lambda' < \lambda$, elegimos f_β como una cota estrictamente superior módulo D de $\{g_E^\beta : E \in \mathcal{C}_\beta\}$. Además, para cualquier $\gamma < \beta$ se tiene que $f_\gamma <_D h_\beta <_D f_\beta$.

De las definiciones, se sigue que $f_\gamma >_D g_E^\gamma$ cuando $E \in \mathcal{C}_\gamma$; y $g_E^\gamma(\alpha) \geq f_{\gamma'}(\alpha)$ siempre que $E \in \mathcal{C}_\gamma, \gamma' < \gamma$ y $\alpha > \text{otp}(E)$.

Afirmación 1. *No existe $\mu' < \lim_D a$ y una sucesión de subconjuntos $\langle S_\alpha \subseteq \alpha : \alpha \in a \wedge |S_\alpha| \leq \mu' \rangle$ tales que $\prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ corte cofinalmente a $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda' \rangle$ módulo D .*

Demostración de la Afirmación. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mu' > |a|$; ya que si la afirmación fuera cierta para un $\mu' \leq |a|$, también lo sería para un $\mu'' > |a| \geq \mu'$. De hecho, los mismos S_α funcionarían.

Supongamos que la afirmación es falsa. Sea $B \subseteq \lambda'$ un club como el de la Proposición 2.2.6. Sean β un punto límite singular de B tal que $\text{cf}(\beta) = (\mu')^+ < \lim_D a$ y $E \in \mathcal{C}_\beta$ un club de β tal que $\text{otp}(E) = \text{cf}(\beta)$. Entonces $E \cap B = \{\gamma_i : i < \text{cf}(\beta)\}$ es un club en β .

Para cada $i < \text{cf}(\beta)$ escojamos $k_i \in \prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ tal que $f_{\gamma_i} \leq_D k_i \leq_D f_{\gamma_{i+1}}$.

Dado que $\text{otp}(E) < \lim_D a$ y $f_{\gamma_i} >_D g_{E \cap \gamma_i}^{\gamma_i}$ ya que $E \cap \gamma_i \in \mathcal{C}_{\gamma_i}$, podemos escoger $\alpha_i > \text{otp}(E)$ para cada $i < \text{cf}(\beta)$ tal que:

$$g_{E \cap \gamma_i}^{\gamma_i}(\alpha_i) < f_{\gamma_i}(\alpha_i) \leq k_i(\alpha_i) \leq f_{\gamma_{i+1}}(\alpha_i).$$

Como $|a| < \mu' < \text{cf}(\beta)$, podemos encontrar un subconjunto $I \subseteq \text{cf}(\beta)$, $|I| = \text{cf}(\beta)$, y $\alpha \in a$ fija, tal que $\forall i \in I (\alpha_i = \alpha)$. Más aún, podemos considerar a I conformado solamente por ordinales límite.

Finalmente, para $i < j \in I$, tenemos que:

$$k_i(\alpha) \leq f_{\gamma_{i+1}}(\alpha) \leq g_{E \cap \gamma_j}^{\gamma_j}(\alpha) < f_{\gamma_j}(\alpha) \leq k_j(\alpha).$$

Entonces $\langle k_i(\alpha) : i \in I \rangle$ es una secuencia estrictamente creciente en S_α , contradiciendo el hecho de que $|S_\alpha| < \text{cf}(\beta)$.

□

Del Lema 2.2.5 y la Afirmación anterior, tenemos que $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda' \rangle$ tiene una mínima cota superior módulo D , digamos $g \in \text{ON}^a$. Dado que $\text{cf}(\prod a/D) > \lambda'$, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\forall \alpha \in a (g(\alpha) < \alpha)$, es decir, $g \in \prod a$. También, $\{\alpha \in a : g(\alpha) \text{ es un ordinal límite}\} \in D$; de lo contrario $\{\alpha \in a : g(\alpha) \text{ es ordinal sucesor}\} \in D$ y como $\langle f_\gamma/D : \gamma < \lambda' \rangle$ es una sucesión estrictamente creciente, tendríamos una contradicción de la minimalidad de g/D . Así, podemos asumir, también sin pérdida de generalidad, que cada $g(\alpha)$ es ordinal límite.

Para concluir la demostración del Lema, veamos que para todo $\mu' < \lim_D a$ se cumple que $\{\alpha \in a : \text{cf}(g(\alpha)) > \mu'\} \in D$. Fijemos un club $S_\alpha \subseteq g(\alpha)$ con $\text{otp}(S_\alpha) = \text{cf}(g(\alpha))$ y suponga que existe $\mu' < \lim_D a$ tal que $\{\alpha \in a : \text{cf}(g(\alpha)) \leq \mu'\} \in D$. Para cada $\beta_0 < \lambda'$, podemos encontrar $g' \in \prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ tal que $f_{\beta_0} <_D g' <_D g$ ya que asumimos que cada $g(\alpha)$ es ordinal límite. Por la minimalidad de g/D , debe existir $\beta_1 > \beta_0$ tal que $f_{\beta_0} <_D g' <_D f_{\beta_1}$. Entonces $\prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ corta cofinalmente a $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda' \rangle$ módulo D . Por nuestra suposición, $\{\alpha \in a : |S_\alpha| \leq \mu'\} \in D$, así que podemos pensar que $\forall \alpha \in a (|S_\alpha| \leq \mu')$. Lo cual es una contradicción de la Afirmación anterior. □

Teorema 2.2.9 (Teorema Principal). *Sea a un conjunto de cardinales regulares y D un ultrafiltro sobre a . Suponga que $\lambda = \text{cf}(\prod a/D)$ y $\mu = \lim_D a$. Entonces para cada cardinal regular λ' con $\mu < \lambda' < \lambda$, existe un conjunto a' de cardinales regulares, $|a'| \leq |a|$, y un ultrafiltro D' sobre a' tal que $\lim_{D'} a' = \mu$ y $\text{cf}(\prod a'/D') = \lambda'$.*

Demostración. Por el Lema 2.2.8, podemos tomar una sucesión de funciones $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda' \rangle$ en $\prod a$ estrictamente creciente módulo D y g mínima cota superior módulo D para tal sucesión. Además, podemos considerar que $g \in \prod a$, sin pérdida de generalidad.

Para cada $\alpha \in a$, fijemos un club $S_\alpha \subseteq g(\alpha)$ con tipo de orden $\text{cf}(g(\alpha))$ y lo enumeramos como $\langle S_\alpha(i) : i < \text{cf}(g(\alpha)) \rangle$.

Afirmación 1. $\text{cf}(\prod_{\alpha \in a} S_\alpha/D) = \lambda'$.

Demostración de la Afirmación 1. Para $\beta < \lambda'$, definimos:

$$\bar{f}_\beta(\alpha) = \begin{cases} S_\alpha(i_0) & \text{si } f_\beta(\alpha) < g(\alpha) \wedge i_0 = \min\{i < \text{cf}(g(\alpha)) : f_\beta(\alpha) \leq S_\alpha(i)\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que $\bar{f}_\beta \in \prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ y $f_\beta \leq_D \bar{f}_\beta <_D g$. También, nótese que si $\gamma < \gamma'$, entonces $\bar{f}_\gamma \leq_D \bar{f}_{\gamma'}$ pues $f_\gamma <_D f_{\gamma'}$.

Primero, veamos que $\{\bar{f}_\beta : \beta < \lambda'\}$ es cofinal módulo D en $\prod_{\alpha \in a} S_\alpha$. En efecto, si $f \in \prod_{\alpha \in a} S_\alpha$, claramente $f <_D g$; como $f \in \prod a$, por la minimalidad de g , existe $\beta < \lambda'$ tal que $f <_D f_\beta \leq_D \bar{f}_\beta$.

Ahora, consideremos una familia $\{h_\xi : \xi < \mu\} \subseteq \prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ con $\mu < \lambda'$. Para cada $\xi < \mu$, como $h_\xi <_D g$ podemos encontrar β_ξ tal que $h_\xi \leq_D f_{\beta_\xi} \leq_D \bar{f}_{\beta_\xi}$. Sea $\beta := \sup\{\beta_\xi : \xi < \mu\}$. Dado que λ' es regular, $\beta < \lambda'$. Así, para todo $\xi < \mu$, $h_\xi \leq_D f_{\beta_\xi} \leq_D \bar{f}_\beta$.

Por lo tanto, $\text{cf}(\prod_{\alpha \in a} S_\alpha/D) = \lambda'$. □

Continuando con la demostración del Teorema, definimos $a' = \{\text{cf}(g(\alpha)) : \alpha \in a\}$ y un ultrafiltro D' en a' como:

$$A \in D' \text{ si y solo si } \{\alpha \in a : \text{cf}(g(\alpha)) \in A\} \in D.$$

Por ser D ultrafiltro se sigue que D' es también ultrafiltro y claramente $|a'| < |a|$. Vamos a mostrar que estos a' y D' son los que buscamos.

Por Lema 2.2.8, para todo $\mu' < \mu$ se tiene que $\{\alpha \in a : \mu' < \text{cf}(g(\alpha))\} \in D$ y, además, $\{\alpha \in a : \text{cf}(g(\alpha)) \leq \mu\} \supseteq \{\alpha \in a : \alpha \leq \mu\} \in D$, es decir, $\{\alpha' \in a' : \mu' < \alpha' \leq \mu\} \in D'$. Por tanto, $\lim_{D'} a' = \mu$.

Para $\beta < \lambda'$, definimos:

$$\bar{f}'_\beta(\text{cf}(g(\alpha))) = \sup\{i < \text{cf}(g(\alpha)) : \exists \gamma \in a(\text{cf}(g(\gamma)) = \text{cf}(g(\alpha)) \wedge \bar{f}_\beta(\gamma) = S_\gamma(i))\}.$$

Como $\lim_{D'} a' = \mu$, $\{\alpha \in a : \text{cf}(g(\alpha)) > |a|\} \in D$; así, para un elemento de D :

$$\bar{f}'_\beta(\text{cf}(g(\alpha))) < \text{cf}(g(\alpha)).$$

Y, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\bar{f}'_\beta \in \prod a'$.

Para $f' \in \prod a'$, definimos $f \in \prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ como $f(\alpha) = S_\alpha(f'(\text{cf}(g(\alpha))))$. Decimos que f' induce f .

Afirmación 2. Dada $f' \in \prod a'$, si sucede que $f <_D \bar{f}_\beta$ entonces $f' <_{D'} \bar{f}'_\beta$.

Demostración de la Afirmación 2. Existe $b \in D$ tal que $\forall \gamma \in b(f(\gamma) < \bar{f}_\beta(\gamma))$; entonces por la definición de la función inducida f :

$$f'(\text{cf}(g(\gamma))) = i < \text{cf}(g(\gamma)), \text{ donde } i \text{ es tal que } f(\gamma) = S_\gamma(i).$$

Por definición, $\bar{f}_\beta(\gamma) = S_\gamma(j)$, para algún $j < \text{cf}(g(\gamma))$. Pero como $f(\gamma) < \bar{f}_\beta(\gamma)$, se sigue que $i < j$.

Finalmente, por la definición de $\bar{f}'_\beta$, concluimos que:

$$f'(\text{cf}(g(\gamma))) < j \leq \bar{f}'_\beta(\text{cf}(g(\gamma))).$$

□

Para $f' \in \prod a'$, existe $\beta < \lambda'$ tal que $f <_D \bar{f}_\beta$ pues g es mínima cota superior módulo D de $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda' \rangle$ y $f <_D g$ ya que $f \in \prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ y, por la Afirmación 2, $f' <_{D'} \bar{f}'_\beta$. Se sigue que $\text{cf}(\prod a'/D') \leq \lambda'$.

De acuerdo a la Afirmación 1, si $\mathcal{F}' = \{f'_\gamma : \gamma < \eta\}$ es una familia de funciones de $\prod a'$ y $\eta < \lambda'$, entonces el subconjunto $\mathcal{F} = \{f_\gamma : \gamma < \eta\} \subseteq \prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ de todas las funciones inducidas está acotado módulo D por alguna $\bar{f}_\beta$. Por la Afirmación 2, $\bar{f}'_\beta$ acota módulo D' a $\mathcal{F}'$. Por lo tanto, $\text{cf}(\prod a'/D') = \lambda'$.

□

Corolario 2.2.10. *Si a es un intervalo de cardinales regulares, $\mu = \sup(a)$, $\lambda \in \text{pcf}(a)$ y λ' es un cardinal regular tal que $\mu < \lambda' < \lambda$, entonces $\lambda' \in \text{pcf}(a)$.*

Demostración. Sea D ultrafiltro sobre a tal que $\text{cf}(\prod a/D) = \lambda$. Es fácil ver que $\lim_D a \leq \mu$. Por el Teorema anterior, existe a' conjunto de cardinales regulares y D' ultrafiltro sobre a' , tales que $\lim_{D'} a' = \lim_D a$ y $\text{cf}(\prod a'/D') = \lambda'$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a' \subseteq a$, pues a es intervalo de cardinales y $\lim_D a = \lim_{D'} a'$.

Definimos un ultrafiltro D'' sobre a como: $A \in D'' \Leftrightarrow \exists B \in D' (B \subseteq A)$. Claramente D'' es filtro y para ver que es ultrafiltro, si $A \subseteq a$, tenemos que $A \cap a' \in D'$ o $(a \setminus A) \cap a' \in D'$.

Consideremos $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda' \rangle$ una sucesión cofinal módulo D' en $\prod a'$. Para cada $\gamma < \lambda'$ defínase $\bar{f}_\gamma \in \prod a$ como:

$$\bar{f}_\gamma(\alpha) = \begin{cases} f_\gamma(\alpha) & \text{si } \alpha \in a' \\ 0 & \text{si } \alpha \notin a'. \end{cases}$$

Dada $g \in \prod a$, existe $\gamma < \lambda'$ tal que $g \restriction_{a'} \leq_{D'} f_\gamma$; luego $\{\alpha \in a : g(\alpha) \leq \bar{f}_\gamma\} \supseteq \{\alpha \in a' : g(\alpha) \leq f_\gamma\} \in D'$, así, $g \leq_{D''} \bar{f}_\gamma$.

Ahora, consideremos $\langle f_\gamma : \gamma < \eta \rangle$, para $\eta < \lambda'$, sucesión de funciones en $\prod a$. Existe $g \in \prod a'$ tal que $f_\gamma \leq_{D'} g$ para toda $\gamma < \eta$, tomemos $h \in \prod a$, con $h \restriction_{a'} = g$, entonces $f_\gamma \leq_{D''} h$. Por tanto, $\lambda' = \text{cf}(\prod a/D'')$ y así $\lambda' \in \text{pcf}(a)$. □

Este último resultado nos dice que si a es un intervalo de cardinales regulares, entonces $\text{pcf}(a)$ es también un intervalo de cardinales regulares.

Capítulo 3

Ideal $J_{<\lambda}(a)$

3.1. Definición

En esta sección introduciremos el ideal $J_{<\lambda}(a)$ y demostraremos algunas de sus propiedades. Además, enunciaremos y demostraremos varias propiedades y resultados de $\text{pcf}(a)$ que se deducen a partir del estudio de $J_{<\lambda}(a)$.

Diremos que $b \subseteq a$ *fuerza que* $\prod a$ *tenga cofinalidad* $< \lambda$ (o b *fuerza* $\text{cof} < \lambda$ cuando no hay peligro de confusión) si para todo ultrafiltro D sobre a con $b \in D$ se tiene que $\text{cf}(\prod a/D) < \lambda$.

Definición 3.1.1. *Si a es un conjunto de cardinales regulares y λ es un cardinal. Definimos el ideal $J_{<\lambda}(a)$ como:*

$$J_{<\lambda}(a) = \{b \subseteq a : b \text{ fuerza } \text{cof} < \lambda\}.$$

Veamos que $J_{<\lambda}(a)$ es en efecto un ideal. Si $b \in J_{<\lambda}(a)$ y $c \subseteq b$, entonces c fuerza $\text{cof} < \lambda$ pues $c \in D \Rightarrow b \in D$ para cualquier ultrafiltro D . Tomemos ahora $b_1, b_2 \in J_{<\lambda}(a)$ y un ultrafiltro D tal que $b_1 \cup b_2 \in D$, entonces $b_1 \in D$ o $b_2 \in D$ y así $\text{cf}(\prod a/D) < \lambda$.

Podemos entonces considerar el producto reducido $\prod a/J_{<\lambda}(a)$. Un producto reducido $\prod a/I$ es κ -dirigido si para todo $B \subseteq \prod a$, con $|B| < \kappa$, tenemos que B es acotado superiormente módulo I .

Teorema 3.1.2. *Sea a un conjunto de cardinales regulares y λ un cardinal. Entonces $\prod a/J_{<\lambda}(a)$ es λ -dirigido.*

Demostración. Tomemos $B \subseteq \prod a$ con $|B| < \lambda$.

El resultado es trivial si $|B| \leq |a|^+$, definimos:

$$f(\alpha) = \sup\{g(\alpha) : g \in B\},$$

para $\alpha \in a$. Como cada α es regular y mayor a $|a|^+$, $f \in \prod a$ y para todo $g \in B$, $g \leq f$.

Supongamos ahora que $|B| = \mu > |a|^+$ y hagamos inducción sobre μ .

Si $B = \{g_\beta : \beta < \mu\}$, para cada $\gamma < \mu$, elegimos g'_γ cota superior módulo $J_{<\lambda}(a)$ para $\{g_\gamma\} \cup \{g'_\beta : \beta < \gamma\}$ por nuestra hipótesis de inducción. Así, podemos considerar a $B = \{g_\beta : \beta < \mu\}$ linealmente ordenado por $\leq_{J_{<\lambda}(a)}$

Suponemos también que μ es regular, de lo contrario el resultado se sigue por la hipótesis de inducción.

Recursivamente definiremos $h_\beta \in \prod a$ para $\beta < |a|^+$, de tal manera que $\beta < \beta' \Rightarrow h_\beta \leq h_{\beta'}$ en todos lados. Para γ y β dados definimos:

$$b_\gamma^\beta = \{\alpha \in a : g_\gamma(\alpha) > h_\beta(\alpha)\}.$$

Comenzamos con $h_0 = g_0$. Para β límite, hacemos $h_\beta(\alpha) = \sup\{h_\gamma(\alpha) : \gamma < \beta\}$ para todo $\alpha \in a$. Como α es regular y $\alpha > |a|^+$, tenemos que $h_\beta \in \prod a$.

Supongamos que ya hemos definido h_β . Si h_β es cota superior módulo $J_{<\lambda}(a)$ para B habremos terminado. De lo contrario, existe $\gamma < \mu$ tal que $b_\gamma^\beta = \{\alpha \in a : g_\gamma(\alpha) > h_\beta(\alpha)\} \notin J_{<\lambda}(a)$.

Sea $\gamma_\beta = \min\{\gamma < \mu : b_\gamma^\beta \notin J_{<\lambda}(a)\}$, como $b_{\gamma_\beta}^\beta \notin J_{<\lambda}(a)$, existe un ultrafiltro D sobre a tal que $b_{\gamma_\beta}^\beta \in D$ y $\text{cf}(\prod a/D) \geq \lambda$. Por esto, podemos elegir $f \in \prod a$ cota superior módulo D para $\{g_\gamma : \gamma < \mu\}$. Definimos entonces $h_{\beta+1}(\alpha) = \max\{h_\beta(\alpha), f(\alpha)\}$ para toda $\alpha \in a$.

Afirmación 1. Si $\gamma \geq \gamma_\beta$, entonces $b_\gamma^{\beta+1} \subsetneq b_\gamma^\beta$.

Demostración. Como $h_\beta \leq h_{\beta+1}$ en todos lados, se sigue que $b_\gamma^{\beta+1} \subseteq b_\gamma^\beta$.

Veamos que $b_\gamma^\beta \in D$. Primero, $b_{\gamma_\beta}^\beta \setminus b_\gamma^\beta = \{\alpha \in a : g_{\gamma_\beta}(\alpha) > h_\beta(\alpha) \geq g_\gamma(\alpha)\} \in J_{<\lambda}(a) \Rightarrow b_{\gamma_\beta}^\beta \setminus b_\gamma^\beta \notin D$, dado que $D \cap J_{<\lambda}(a) = \emptyset$ pues $\text{cf}(\prod a/D) \geq \lambda$. Como $b_{\gamma_\beta}^\beta \in D$, se sigue que $b_{\gamma_\beta}^\beta \cap b_\gamma^\beta \in D$ y por tanto $b_\gamma^\beta \in D$.

Por otro lado, como $f \leq h_{\beta+1}$, tenemos que $b_\gamma^{\beta+1} = \{\alpha \in a : h_{\beta+1}(\alpha) < g_\gamma(\alpha)\} \subseteq \{\alpha \in a : f(\alpha) < g_\gamma(\alpha)\} \notin D$, pues $g_\gamma \leq_D f$.

Como $b_\gamma^{\beta+1} \notin D$ y $b_\gamma^\beta \in D$, se sigue que $b_\gamma^{\beta+1} \subsetneq b_\gamma^\beta$. □

Si la inducción nunca se detuvo podemos definir $\gamma = \sup\{\gamma_\beta : \beta < |a|^+\}$ pues $\mu > |a|^+$, entonces $\langle b_\gamma^\beta : \beta < |a|^+ \rangle$ es una sucesión estrictamente decreciente de subconjuntos de a . Una contradicción. □

Corolario 3.1.3. Si a es un conjunto de cardinales regulares, para cualquier ultrafiltro D sobre a tenemos:

$$\text{cf}(\prod a/D) < \lambda \Leftrightarrow D \cap J_{<\lambda}(a) \neq \emptyset.$$

Demostración. El regreso es trivial por definición de $J_{<\lambda}(a)$.

Supongamos ahora que D es un ultrafiltro sobre a tal que $D \cap J_{<\lambda}(a) = \emptyset$ y sea $\langle f_\gamma : \gamma < \mu \rangle$ una sucesión de $\prod a$ con $\mu < \lambda$. Por el teorema anterior, existe $g \in \prod a$ tal que $f_\gamma \leq_{J_{<\lambda}(a)} g$ para toda $\gamma < \mu$. Como $D \cap J_{<\lambda}(a) = \emptyset$, se sigue que $f_\gamma \leq_D g$ para toda $\gamma < \mu$. Por lo tanto, $\text{cf}(\prod a/D) \geq \lambda$. □

Proposición 3.1.4. *Sea a un conjunto de cardinales regulares y λ un cardinal. Si $b \in J_{<\lambda}(a)$, entonces b es acotado en λ .*

Demostración. Si $\lambda > \sup(a)$ el resultado es trivial. Supongamos entonces que $\lambda < \sup(a)$ y tomemos $b \subseteq a$ no acotado en λ . Por la propiedad de la intersección finita, podemos encontrar un ultrafiltro que contenga a b y a todos los segmentos finales de λ .

Sea $\mu < \lambda$ y $\langle f_\beta : \beta < \mu \rangle$ una sucesión de elementos de $\prod a$. Definamos $g \in \prod a$ como:

$$g(\alpha) = \begin{cases} \sup\{f_\beta(\alpha) : \beta < \mu\} & \text{si } \alpha > \mu \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado que $\{\alpha \in b : \alpha > \mu\} \subseteq \{\alpha \in a : f_\beta(\alpha) \leq g(\alpha)\} \in D$, tenemos que $f_\beta \leq_D g$ para todo $\beta < \mu$.

Así pues, $\text{cf}(\prod a/D) > \mu$ para cualquier $\mu < \lambda$, es decir, $\text{cf}(\prod a/D) \geq \lambda$. Por lo tanto, si $b \in J_{<\lambda}(a)$, entonces b debe ser acotado. □

Otra observación a tener en cuenta del ideal $J_{<\lambda}(a)$ es que $J_{<\lambda}(a) \subseteq J_{<\lambda'}(a)$ para $\lambda < \lambda'$, lo cual es trivial por la definición.

Por otro lado, para λ cardinal límite, $J_{<\lambda}(a) = \bigcup_{\mu < \lambda} J_{<\mu}(a)$. En efecto, por la observación anterior $\bigcup_{\mu < \lambda} J_{<\mu}(a) \subseteq J_{<\lambda}(a)$. Para probar la otra contención, supongamos que existe $b \in J_{<\lambda}(a) \setminus \bigcup_{\mu < \lambda} J_{<\mu}(a)$, tomamos un ultrafiltro D tal que $b \in D$ y sea disjunto a $\bigcup_{\mu < \lambda} J_{<\mu}(a)$, es decir, $\text{cf}(\prod a/D) < \lambda$ pues $b \in D \cap J_{<\lambda}(a)$, pero $\text{cf}(\prod a/D) \geq \mu$ para todo $\mu < \lambda$ por el corolario anterior. Esto es imposible.

Proposición 3.1.5. *Supongamos que a es un conjunto de cardinales regulares y λ un cardinal, entonces*

$$J_{<\lambda}(a) = \{b \subseteq a : \text{pcf}(b) \subseteq \lambda\}.$$

Demostración. Probemos primero que $J_{<\lambda}(a) \subseteq \{b \subseteq a : \text{pcf}(b) \subseteq \lambda\}$. Sea $b \in J_{<\lambda}(a)$ y D un ultrafiltro sobre b . Podemos encontrar ultrafiltro D' sobre a tal que $D \subseteq D'$. Si $\text{cf}(\prod b/D) \geq \lambda$, entonces $\text{cf}(\prod a/D') \geq \lambda$, lo cual no puede pasar pues $b \in D'$.

Para la contención contraria, tomemos $b \subseteq a$ tal que $\text{pcf}(b) \subseteq \lambda$. Si D es un ultrafiltro sobre a con $b \in D$, entonces $D' = D \cap \mathcal{P}(b)$ es un ultrafiltro sobre b . Entonces $\text{cf}(\prod b/D') < \lambda \Rightarrow \text{cf}(\prod a/D) < \lambda$. □

De la proposición anterior, en particular tenemos que

$$\text{pcf}(a) \subseteq \lambda \Leftrightarrow J_{<\lambda}(a) = \mathcal{P}(a).$$

Esto es claro pues $\text{pcf}(a) \subseteq \lambda \Leftrightarrow a \in J_{<\lambda}(a)$, pero si $a \in J_{<\lambda}(a)$, entonces $J_{<\lambda}(a) = \mathcal{P}(a)$.

Corolario 3.1.6. *Si λ es un cardinal y $b \subseteq a$, entonces $J_{<\lambda}(b) = J_{<\lambda}(a) \cap \mathcal{P}(b)$.*

Lema 3.1.7. *Sea a un conjunto de cardinales regulares. Entonces*

$$\lambda \in \mathbf{pcf}(a) \Leftrightarrow J_{<\lambda}(a) \subsetneq J_{<\lambda^+}(a).$$

Demostración. $(\Leftarrow)$ Si $b \in J_{<\lambda^+}(a) \setminus J_{<\lambda}(a)$, entonces existe ultrafiltro D sobre a tal que $\text{cf}(\prod a/D) \geq \lambda$. Pero como $b \in J_{<\lambda^+}(a)$, se sigue que $\text{cf}(\prod a/D) = \lambda$.

$(\Rightarrow)$ Sea $\lambda \in \mathbf{pcf}(a)$ y D un ultrafiltro sobre a tal que $\text{cf}(\prod a/D) = \lambda$. Es obvio que $D \cap J_{<\lambda}(a) = \emptyset$. Del Corolario 3.1.3, se sigue que existe $b \in D \cap J_{<\lambda^+}(a)$. □

Como $\langle J_{<\lambda}(a) : \lambda \text{ es un cardinal} \rangle$ es una sucesión creciente y continua en ordinales límite tal que $J_{<\lambda}(a) \neq J_{<\lambda^+}(a)$ cuando $\lambda \in \mathbf{pcf}(a)$, podemos acotar $|\mathbf{pcf}(a)| \leq 2^{|a|}$. En el Capítulo 4 encontraremos una mejor cota para $\mathbf{pcf}(a)$.

Otro resultado sencillo es que $\mathbf{pcf}(a)$ tiene máximo. Sea $\lambda = \min\{\lambda \text{ cardinal} : J_{<\lambda}(a) = \mathcal{P}(a)\}$. Si λ fuera un cardinal límite, como $J_{<\lambda}(a) = \bigcup_{\mu < \lambda} J_{<\mu}(a)$, existiría $\mu < \lambda$ tal que $a \in J_{<\mu}(a) \Rightarrow J_{<\mu}(a) = \mathcal{P}(a)$, contradiciendo la minimalidad de λ . Sea κ tal que $\kappa^+ = \lambda$. Se sigue de $J_{<\kappa}(a) \subsetneq J_{<\kappa^+}(a)$ que $\kappa \in \mathbf{pcf}(a)$ y así $\kappa = \max(\mathbf{pcf}(a))$.

Teorema 3.1.8. *Supongamos que I es un ideal sobre a un conjunto de cardinales regulares, λ es un cardinal regular y $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ un sucesión creciente y cofinal módulo I de $\prod a$. Entonces, existe una sucesión $\langle b_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ de subconjuntos de a tales que:*

1. $b_0 \notin I$,
2. $\gamma_1 < \gamma_2 < \lambda \Rightarrow b_{\gamma_1} \setminus b_{\gamma_2} \in I$,
3. para toda $\gamma < \lambda$, $\langle (f_\rho|_{b_\gamma} : \rho < \lambda) \rangle$ es cofinal módulo I en $\prod b_\gamma$,
4. existe $g \in \prod a$ cota superior módulo I^* para $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$.

Donde I^* es el ideal generado por $I \cup \{b_\gamma : \gamma < \lambda\}$.

Demostración. Dado que a es un conjunto de cardinales regulares y $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ es no acotada módulo I , tenemos que $\lambda > |a|^+$.

Para cada $\gamma < |a|^+$, construiremos de manera recursiva funciones g_γ y sucesiones $\langle b_\xi^\gamma : \xi < \lambda \rangle$ de subconjuntos de a que cumplan con los puntos (1), (2) y (4) del teorema. Si también se cumple el punto (3) detenemos la construcción. Al final, demostraremos que en algún momento se tuvo que detener la construcción.

Supongamos que g_γ es dada. Definiremos para cada $\xi < \lambda$,

$$b_\xi^\gamma := \{\alpha \in a : g_\gamma(\alpha) < f_\xi(\alpha)\}.$$

Como $\langle f_\xi : \xi < \lambda \rangle$ es creciente módulo I , entonces $b_{\xi_1}^\gamma \setminus b_{\xi_2}^\gamma \in I$ para $\xi_1 < \xi_2$. Aún más, como $\langle f_\xi : \xi < \lambda \rangle$ es cofinal módulo I , existe $\xi(\gamma) < \lambda$ tal que $b_{\xi(\gamma)}^\gamma \notin I$; hacemos $b_\xi^\gamma = b_{\xi(\gamma)}^\gamma$ para toda $\xi < \xi(\lambda)$. Por definición de b_ξ^γ , g_γ es cota para $\langle f_\xi : \xi < \lambda \rangle$ módulo el ideal generado por $I \cup \{b_\xi^\gamma : \xi < \lambda\}$. Con esto, tenemos que se cumplen los puntos (1), (2) y (4).

Comenzamos la construcción de las funciones g_γ . Tomemos $g_0 \in \prod a$ arbitraria. Para $\gamma < |a|^+$ límite definimos $g_\gamma(\alpha) = \sup\{g_\beta(\alpha) : \beta < \gamma\}$ para toda $\alpha \in a$.

Dada $\gamma < |a|^+$, si $\langle b_\xi^\gamma : \xi < \lambda \rangle$ cumple con el punto (3) del teorema, habremos terminado. De lo contrario, elijamos $\xi(\gamma) < \lambda$ tal que $\langle (f_\rho|b_{\xi(\gamma)}^\gamma : \rho < \lambda) \rangle$ no es cofinal módulo I en $\prod b_{\xi(\gamma)}^\gamma$. Existe $h \in \prod a$ tal que $\{\alpha \in b_{\xi(\gamma)}^\gamma : h(\alpha) > f_\rho(\alpha)\} \notin I$ para toda $\rho < \lambda$. Notemos que $h|b_\xi^\gamma \not\leq_I f_\rho|b_\xi^\gamma$ para $\xi \geq \xi(\gamma)$, pues $b_{\xi(\gamma)}^\gamma \setminus b_\xi \in I$. Definamos para $\alpha \in a$,

$$g_{\gamma+1}(\alpha) = \max\{g_\gamma(\alpha), h(\alpha)\}.$$

Afirmación 1. *Existe $\xi < \lambda$ tal que $\forall \gamma < |a|^+ (b_\xi^{\gamma+1} \subsetneq b_\xi^\gamma)$.*

Demostración. Primero, notemos que $g_\gamma \leq g_{\gamma'}$ en todos lados para $\gamma < \gamma'$, es decir, $b_\xi^{\gamma'} \subseteq b_\xi^\gamma$ para cualquier $\xi < \lambda$.

Ahora, podemos tomar $\xi = \sup\{\xi(\gamma) : \gamma < |a|^+\} < \lambda$ pues λ es regular. Para $\gamma < |a|^+$, tenemos que $\{\alpha \in b_\xi^\gamma : h(\alpha) > f_\xi(\alpha)\} \notin I$, ya que $h|b_\xi^\gamma \not\leq_I f_\xi|b_\xi^\gamma$. Entonces existe $\alpha \in b_\xi^\gamma$ tal que $f_\xi(\alpha) < h(\alpha) \leq g_{\gamma+1}(\alpha) \Rightarrow \alpha \notin b_\xi^{\gamma+1}$.

□

Por la afirmación $\langle b_\xi^\gamma : \gamma < |a|^+ \rangle$ es una sucesión estrictamente decreciente de subconjuntos de a . Esto es una contradicción. Por lo tanto, la construcción se detuvo en algún momento.

□

Corolario 3.1.9. *Si I es un ideal sobre a tal que $\prod a/I$ es λ -dirigido, D es ultrafiltro sobre a disjunto a I y $\text{cf}(\prod a/D) = \lambda$. Entonces existe $b \in D$ tal que $\text{tcf}(\prod b/I) = \lambda$.*

Demostración. Sea $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ una sucesión creciente y cofinal módulo D en $\prod a$. Como $\prod a/I$ es λ -dirigido, podemos suponer que $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ es creciente módulo I . Luego, $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ es no acotada módulo I , de lo contrario una cota módulo I sería cota módulo D .

Por el Teorema anterior, encontramos una familia $\{b_\xi : \xi < \lambda\}$ de subconjuntos de a tales que, para cada $\xi < \lambda$, $\langle f_\gamma|b_\xi : \gamma < \lambda \rangle$ es cofinal módulo I en $\prod b_\xi$. Se sigue que $\text{tcf}(\prod b_\xi/I) = \lambda$.

Si mostramos que existe $\xi < \lambda$ tal que $b_\xi \in D$ habremos terminado. Por el Teorema anterior, $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ es acotada módulo I^* , con I^* el ideal generado por $I \cup \{b_\xi : \xi < \lambda\}$. Si $\forall \xi < \lambda (b_\xi \notin D)$, entonces $D \cap I^* = \emptyset$. Esto implicaría que $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ es acotada módulo D . Una contradicción.

□

Corolario 3.1.10. *Supongamos que a es un conjunto de cardinales regulares. Si I es un ideal sobre a tal que $\text{cf}(\prod a/D) = \lambda$ para todo ultrafiltro D sobre a disjunto a I . Entonces $\text{tcf}(\prod a/I) = \lambda$.*

Demostración. Sea $I^* = \{b \subseteq a : b \in I \vee \text{tcf}(\prod b/I) = \lambda\}$. Afirmamos que I^* es un ideal. En efecto, si $b \in I$ y c es subconjunto de a tal que $\text{tcf}(\prod c/I) = \lambda$, entonces $\text{tcf}(\prod(b \cup c)/I) = \lambda$ pues $b \in I$, y así podemos extender de manera arbitraria los elementos de una sucesión creciente y cofinal módulo I en $\prod c$ a $\prod(b \cup c)$ y ésta conserva sus propiedades. Las demás propiedades son fáciles de verificar.

Supongamos que $a \notin I^*$. Si existe $b \in J_{<\lambda}(a) \setminus I$, por la Proposición 1.2.7 podríamos tomar ultrafiltro D sobre a con $b \in D$ y $D \cap I = \emptyset$, lo cual contradice nuestra suposición $\text{cf}(\prod a/D) = \lambda$. Se sigue que $J_{<\lambda}(a) \subseteq I$ y entonces $\prod a/I$ es λ -dirigido. Sea D ultrafiltro disjunto a I^* , en particular, $D \cap I = \emptyset$, esto implica que $\text{cf}(\prod a/D) = \lambda$. Por el Corolario 3.1.9, existe $b \in D$ tal que $\text{tcf}(\prod b/I) = \lambda$, contradiciendo que $D \cap I^* = \emptyset$.

Así, $a \in I^*$ y dado que $a \notin I$, se sigue que $\text{tcf}(\prod a/I) = \lambda$. □

Corolario 3.1.11. *Si $b \in J_{<\lambda^+}(a) \setminus J_{<\lambda}(a)$, entonces $\text{tcf}(\prod b/J_{<\lambda}(a)) = \lambda$.*

Demostración. Sea I el ideal generado por $J_{<\lambda}(a) \cup \{a \setminus b\}$. Veamos que cualquier ultrafiltro D disjunto de I cumple que $\text{cf}(\prod a/D) = \lambda$. En particular, $D \cap J_{<\lambda}(a) = \emptyset \Rightarrow \text{cf}(\prod a/D) \geq \lambda$. Por otro lado, $a \setminus b \in I \Rightarrow b \in D$, pero $b \in J_{<\lambda^+}(a) \Rightarrow \text{cf}(\prod a/D) \leq \lambda$.

Por el Corolario 3.1.10, $\text{tcf}(\prod a/I) = \lambda$. Como $a \setminus b \in I$, concluimos que $\text{tcf}(\prod b/J_{<\lambda}(a)) = \lambda$. □

Sabemos que $J_{<\lambda}(a) \subsetneq J_{<\lambda^+}(a)$ cuando $\lambda \in \text{pcf}(a)$ y se da la igualdad de otro modo. Para demostrar el siguiente Lema, supondremos que, para cada λ cardinal, existe un conjunto $b_\lambda(a)$ tal que $J_{<\lambda^+}(a)$ es el ideal generado por $J_{<\lambda}(a) \cup \{b_\lambda(a)\}$. Para el caso en que $\lambda \notin \text{pcf}(a)$ esto es trivial, sin embargo, la existencia en general de estos $b_\lambda(a)$ se demostrará hasta la siguiente sección.

Para la demostración del siguiente Lema, definimos el supremo de una familia $\mathcal{F} \subseteq \prod a$ como:

$$\sup(\mathcal{F})(\alpha) = \sup\{f(\alpha) : f \in \mathcal{F}\},$$

para cada $\alpha \in a$.

Lema 3.1.12. *Supongamos que a es un conjunto infinito de cardinales regulares, entonces*

$$\text{máx}(\text{pcf}(a)) = \text{cf}(\prod a),$$

donde $\prod a$ está ordenado por $f < g \iff \forall \alpha \in a (f(\alpha) < g(\alpha))$.

Demostración. Primero, probemos $\text{máx}(\text{pcf}(a)) \leq \text{cf}(\prod a)$. Para cualquier ultrafiltro D sobre a , $a \in D$, por tanto, una sucesión cofinal en $\prod a$ también lo será en $\text{cf}(\prod a/D)$. Por tanto, $\text{cf}(\prod a/D) \leq \text{cf}(\prod a)$.

Para la otra desigualdad, para cada $\lambda \in \text{pcf}(a)$, sea $b_\gamma(a)$ generador de $J_{<\lambda^+}(a)$ a partir de $J_{<\lambda}(a)$. Del Corolario 3.1.11, podemos fijar $s_\lambda := \langle f_\gamma^\lambda : \gamma < \lambda \rangle$ sucesión creciente y cofinal módulo $J_{<\lambda}(a)$ de $\prod b_\gamma(a)$.

Sea $F = \{G \subseteq \bigcup_{\lambda \in \text{pcf}(a)} s_\lambda : G \text{ sea finito}\}$.

Afirmación 1. $\{\sup(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \in F\}$ es cofinal en $\prod a$.

Demostración. Fijemos $h \in \prod a$. Sea $\lambda_0 = \max(\text{pcf}(a))$. Podemos encontrar ξ_0 tal que $h \leq f_{\xi_0}^{\lambda_0}$ módulo $J_{<\lambda_0}(a)$. Entonces

$$X_0 := \{\alpha \in a : h(\alpha) > f_{\xi_0}^{\lambda_0}(\alpha)\} \in J_{<\lambda_0}(a).$$

Ahora, sea $\lambda_1 = \max(\text{pcf}(X_0))$. Como $X_0 \in J_{<\lambda_0}(a)$, cualquier ultrafiltro D sobre X_0 al extenderlo a un ultrafiltro D' sobre a tenemos $\text{cf}(\prod a/D') < \lambda_0$, por tanto, $\text{cf}(\prod X_0/D) < \lambda_0$. Es decir, $\lambda_1 < \lambda_0$.

Para cualquier ultrafiltro D sobre X_0 , $\text{cf}(\prod X_0/D) \leq \lambda_1$, y existe uno tal que $\text{cf}(\prod X_0/D) = \lambda_1$, se sigue que $X_0 \in J_{<\lambda_1+}(a) \setminus J_{<\lambda_1}(a)$. Esto implica que $X_0 \cap b_{\lambda_1}(a) \neq \emptyset$, así, podemos encontrar $\xi_1 < \lambda_1$ tal que $h|X_0 \leq f_{\xi_1}^{\lambda_1}|X_0$ módulo $J_{<\lambda_1}(a)$. Entonces

$$X_1 := \{\alpha \in X_0 : h(\alpha) > f_{\xi_1}^{\lambda_1}(\alpha)\} \in J_{<\lambda_1}(a).$$

Continuamos de esta manera hasta que $X_n = \emptyset$ para algún $n \in \omega$. Esto debe ocurrir, de lo contrario $\langle \lambda_k : k \in \omega \rangle$ sería una sucesión decreciente de cardinales infinita y esto no puede pasar.

Entonces $h \leq \sup\{f_{\xi_k}^{\lambda_k} : k \leq n\}$. En efecto, tomemos $\alpha \in a$ y sea $m = \min\{k \leq n : a \notin X_k\}$, esto quiere decir que $h(\alpha) \leq f_{\xi_m}^{\lambda_m}(\alpha) \leq \sup(\mathcal{F})(\alpha)$. □

Es fácil ver que $|F| = \max(\text{pcf}(a))$. Así, $\text{cf}(\prod a) \leq \max(\text{pcf}(a))$. Por lo tanto, $\max(\text{pcf}(a)) = \text{cf}(\prod a)$. □

Lema 3.1.13. Sea a un conjunto de cardinales regulares y I un ideal sobre a . Si

$$\mu := \sup\{\text{cf}(\prod a/D) : D \text{ es un ultrafiltro en } a \text{ con } D \cap I = \emptyset\}.$$

Entonces existe $b \in I$ tal que $\mu = \max(\text{pcf}(a \setminus b))$.

Demostración. Para cada $c \in I$ y cualquier ultrafiltro D sobre a disjunto a I , tenemos que $c \in I \Rightarrow a \setminus c \in D$. Para $D' = D \cap \mathcal{P}(a \setminus c)$, D' es ultrafiltro sobre $a \setminus c$ tal que $\text{cf}(\prod a/D) = \text{cf}(\prod (a \setminus c)/D') \leq \max(\text{pcf}(a \setminus c))$. Se sigue que $\mu \leq \max(\text{pcf}(a \setminus c))$.

Afirmación 1. Existe $b \in I$ tal que $a \setminus b \in J_{<\mu^+}(a)$.

Demostración. Supongamos que $a \setminus b \notin J_{<\mu^+}(a)$ para todo $b \in I$. Si $b \in I$ y $c \in J_{<\mu^+}(a)$, entonces $b \cup c \neq a$, de lo contrario $a \setminus b \subseteq c \Rightarrow a \setminus b \in J_{<\mu^+}(a)$, contradiciendo nuestra suposición inicial. De esta manera, existe un ideal propio J sobre a tal que $I \cup J_{<\mu^+}(a) \subseteq J$.

Si D es un ultrafiltro sobre a con $D \cap J = \emptyset$. En particular, $D \cap J_{<\mu^+}(a) = \emptyset$ y el Corolario 3.1.3 implica que $\text{cf}(\prod a/D) \geq \mu^+$. Lo cual contradice nuestra definición de μ pues $D \cap I = \emptyset$. □

Elijamos $b \in I$ tal que $a \setminus b \in J_{<\mu^+}(a)$ y D un ultrafiltro sobre a tal que $a \setminus b \in D$ y $\text{cf}(\prod(a \setminus b)/D') = \text{máx}(\text{pcf}(a \setminus b))$, donde $D' = D \cap \mathcal{P}(a \setminus b)$. Como $a \setminus b \in D \cap J_{<\mu^+}(a)$, se sigue que $\text{cf}(\prod a/D) \leq \mu$. Por otro lado, $\text{máx}(\text{pcf}(a \setminus b)) = \text{cf}(\prod(a \setminus b)/D') = \text{cf}(\prod a/D) \leq \mu$. Por lo tanto, para este $b \in I$, $\mu = \text{máx}(\text{pcf}(a \setminus b))$. □

Del Lema anterior, podemos deducir que μ es un cardinal regular dado que $\mu \in \text{pcf}(a \setminus b)$.

Teorema 3.1.14. *Suponga que a es un conjunto de cardinales regulares y I un ideal sobre a . Entonces*

$$\text{cf}(\prod a/I) = \sup\{\text{cf}(\prod a/D) : D \text{ es un ultrafiltro sobre } a \text{ y } D \cap I = \emptyset\}.$$

Aún más, $\text{cf}(\prod a/I)$ es un cardinal regular.

Demostración. Sea $\mu := \sup\{\text{cf}(\prod a/D) : D \text{ es un ultrafiltro sobre } a \text{ y } D \cap I = \emptyset\}$. Por el Lema 3.1.13, existe $b \in I$ tal que $\mu = \text{máx}(\text{pcf}(a \setminus b))$. Aún más, μ es un cardinal regular.

Luego, $\mu = \text{cf}(\prod(a \setminus b))$ por el Lema 3.1.12. Como $b \in I$, es fácil ver que $\text{cf}(\prod a/I) \leq \text{cf}(\prod(a \setminus b))$, y así $\text{cf}(\prod a/I) \leq \mu$.

Por otro lado, si $\mathcal{A} \subseteq \prod a$ es una familia cofinal módulo I . Para cualquier ultrafiltro D sobre a disjuntos a I , por la Observación 2.1.5, $\mathcal{A}$ también será cofinal módulo D . Esto implica que $\text{cf}(\prod a/D) \leq \text{cf}(\prod a/I) \Rightarrow \mu \leq \text{cf}(\prod a/I)$.

Por lo tanto, $\mu = \text{cf}(\prod a/I)$. □

Finalmente, veamos una última proposición respecto a pcf y submodelos elementales de $H(\theta)$.

Proposición 3.1.15. *Supongamos $N \prec H(\theta)$, con θ suficientemente grande, y $a \in N$, entonces $\text{pcf}(a) \in N$. Además, $J_{<\lambda}(a) \in N$ para toda $\lambda \in \text{pcf}(a) \cap N$. Si $|\text{pcf}(a)| \subseteq N$, se sigue que $\text{pcf}(a) \subseteq N$.*

Demostración. Consideremos $\varphi(x, a)$ la fórmula " x es un cardinal regular y existe un ultrafiltro D sobre a tal que $x = \text{cf}(\prod a/D)$ ". Entonces

$$\text{pcf}(a) = \{x \in H(\theta) : H(\theta) \models \varphi(x, a)\}.$$

Vemos que $\text{pcf}(a)$ es definible en $H(\theta)$ por una fórmula con parámetros en N y, por tanto, $\text{pcf}(a) \in N$.

Luego, de la proposición 3.1.5, tenemos que $J_{<\lambda}(a) = \{b \subseteq a : \text{pcf}(b) \subseteq \lambda\}$. Así,

$$J_{<\lambda}(a) = \{b \in H(\theta) : H(\theta) \models (b \subseteq a \wedge \text{pcf}(b) \subseteq \lambda)\}.$$

Nuevamente, $J_{<\lambda}(a) \in N$, pues es definible en $H(\theta)$ por una fórmula con parámetros en N .

La última afirmación se sigue de la proposición 1.4.15. □

3.2. Existencia de generadores

En la sección pasada, supusimos que existían subconjuntos $b_\lambda(a)$ que generaban $J_{<\lambda^+}(a)$ sobre $J_{<\lambda}(a)$. Estos subconjuntos eran triviales cuando $\lambda \notin \text{pcf}(a)$. En la presente sección nos dedicaremos a probar la existencia de estos subconjuntos de a . Para ello necesitaremos algunos resultados previos.

Proposición 3.2.1. *Suponga que a es un conjunto de cardinales regulares, I un ideal sobre a y γ un ordinal límite con $\text{cf}(\gamma) < \min(a)$. Si $\langle f_\beta : \beta < \gamma \rangle$ es una sucesión estrictamente creciente módulo I de $\prod a$ y para cada $\alpha \in a$ definimos*

$$f_\gamma(\alpha) = \min\{\sup\{f_\beta(\alpha) : \beta \in C\} : C \text{ es un club en } \gamma\}.$$

Entonces $f_\beta <_I f_\gamma$ para toda $\beta < \gamma$.

Demostración. Notemos que $f_\gamma \in \prod a$ pues $\text{cf}(\gamma) < \min(a)$. Sea $\beta < \gamma$. Para cualquier club C de γ , existe $\gamma' \in C$ tal que $\beta < \gamma'$. Luego $f_\beta <_I f_{\gamma'}$, es decir, $\{\alpha \in a : f_\beta(\alpha) \geq f_{\gamma'}(\alpha)\} \in I$. Esto implica que $\{\alpha \in a : f_\beta \geq \sup\{f_\xi : \xi < \gamma\}\} \notin I$.

Por lo tanto, $f_\beta <_I f_\gamma$ para toda $\beta < \gamma$. $\square$

Lema 3.2.2. *Suponga que a es un conjunto infinito de cardinales regulares con $|a|^+ < \min(a)$. Si $\lambda \in \text{pcf}(a)$, entonces existe una sucesión $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ creciente módulo $J_{<\lambda}(a)$ en $\prod a$ tal que para todo ultrafiltro D sobre a , que cumpla con $\text{cf}(\prod a/D) = \lambda$, la sucesión $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ es cofinal módulo D en $\prod a$.*

Demostración. Supongamos que el lema es falso. Comencemos definiendo de manera recursiva sobre $|a|^+ = \kappa$ sucesiones $\langle f_\gamma^\xi : \gamma < \lambda \rangle$ crecientes módulo $J_{<\lambda}(a)$ tales que

1. $\eta < \xi \Rightarrow f_\gamma^\eta \leq f_\gamma^\xi$ para cualquier $\gamma < \lambda$,
2. Si $\text{cf}(\gamma) = \kappa$, entonces, para toda $\alpha \in a$, $f_\gamma^\xi(\alpha) = \min\{\sup\{f_\beta^\xi(\alpha) : \beta \in C\} : C \text{ es un club en } \gamma\}$.

Usando que $\prod a/J_{<\lambda}(a)$ es λ -dirigido y la Proposición 3.2.1 en ordinales límite $\gamma < \lambda$ de cofinalidad κ , podemos definir una sucesión $\langle f_\gamma^0 : \gamma < \lambda \rangle$ creciente módulo $J_{<\lambda}(a)$. Para $\xi < \kappa$ límite, para cada $\gamma < \lambda$ y cada $\alpha \in a$ definimos:

$$f_\gamma^\xi(\alpha) = \begin{cases} \min\{\sup\{f_\beta^\xi(\alpha) : \beta \in C\} : C \text{ es un club en } \gamma\} & \text{si } \text{cf}(\gamma) = \kappa, \\ \sup_{\eta < \xi} f_\gamma^\eta(\alpha) & \text{si } \text{cf}(\gamma) \neq \kappa. \end{cases}$$

Por inducción sobre γ , si $\eta < \xi$, vemos que $f_\gamma^\eta \leq f_\gamma^\xi$, pues $f_\beta^\eta \leq f_\beta^\xi$ para todo $\beta < \gamma$.

Para $\xi < \kappa$ y una sucesión $\langle f_\gamma^\xi : \gamma < \lambda \rangle$ dada, por nuestra suposición inicial, podemos encontrar un ultrafiltro D_ξ y $g_0 \in \prod a$ cota superior módulo D_ξ para $\langle f_\gamma^\xi : \gamma < \lambda \rangle$. A partir de g_0 , tomemos una sucesión $\langle g_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ cofinal módulo D_ξ en $\prod a$.

Si $\text{cf}(\gamma) \neq \kappa$, dado que $\prod a/J_{<\lambda}(a)$ es λ -dirigido, encontramos $h \in \prod a$ cota superior módulo $J_{<\lambda}(a)$ para $\langle f_\beta^{\xi+1} : \beta < \gamma \rangle$. Definimos para cada $\alpha \in a$

$$f_\gamma^{\xi+1}(\alpha) = \text{máx}\{h(\alpha), f_\gamma^\xi(\alpha), g_\gamma(\alpha)\}.$$

Si $\text{cf}(\gamma) = \kappa$, definamos para cada $\alpha \in a$, $f_\gamma^{\xi+1}(\alpha) = \text{mín}\{\sup\{f_\beta^{\xi+1}(\alpha) : \beta \in C\} : C \text{ es un club en } \gamma\}$.

Claramente, $f_\gamma^\eta \leq f_\gamma^{\xi+1}$ para $\eta \leq \xi$. Es fácil ver que $\langle f_\gamma^{\xi+1} : \gamma < \lambda \rangle$ es cofinal módulo D_ξ .

Fijemos cardinal regular θ suficientemente grande. Del Lema 1.4.19, podemos encontrar una secuencia de aproximación $\langle N_i : i \leq \kappa \rangle$ en $H(\theta)$ tal que

$$\kappa \cup a \cup \{\lambda\} \cup \{\langle f_\gamma^\xi : \gamma < \lambda \rangle : \xi < \kappa\} \cup \{D_\xi : \xi < \kappa\} \cup \{f_0^\xi : \xi < \kappa\} \subseteq N_0.$$

Además, podemos pedir que $|N| = \kappa$, donde $N := N_\kappa$.

Recordemos que $\chi_N(\alpha) := \sup(N \cap \alpha)$ (véase Definición 1.4.20). Como $|N| = \kappa < \text{mín}(a)$, $\chi_{N_i}|a \in \prod a$, para cada $i < \kappa$.

Notemos que $\chi_N(\lambda) < \lambda$ pues $|N| = \kappa < \lambda$. Por el Lema 1.4.21, $\text{cf}(\chi_N(\lambda)) = \text{cf}(\kappa) = \kappa$. Además, para cada $\xi < \kappa$, usando el Lema 1.4.22, encontramos una sucesión $\langle i(\beta) : \beta < \kappa \rangle$ estrictamente creciente y continua de ordinales en κ tal que

$$f_{\chi_N(\lambda)}^\xi(\alpha) = \sup\{f_{\chi_{N_{i(\beta)}}}^\xi(\alpha) : \beta < \kappa\},$$

para todo $\alpha \in a$. Además, tenemos que $f_{\chi_N(\lambda)}^\xi \leq \chi_N|a$.

Definamos para cada $\xi < \kappa$

$$c_\xi := \{\alpha \in a : f_{\chi_N(\lambda)}^{\xi+1}(\alpha) = \chi_N(\alpha)\}.$$

Afirmación 1. $c_\xi \subsetneq c_{\xi+1}$.

Demostración. Primero, notemos que $c_\xi \subseteq c_{\xi+1}$, pues $f_{\chi_N(\lambda)}^\xi \leq f_{\chi_N(\lambda)}^{\xi+1}$.

Fijemos una sucesión $\langle i(\beta) : \beta < \kappa \rangle$ en κ como en el Lema 1.4.22 para $\xi + 2$.

Usando nuevamente el Lema 1.4.21, sabemos que $\chi_{N_{i(\beta)}}|a \in N_{i(\beta+1)}$. Como $D_{\xi+1} \in N_0$, por elementaridad, $N_{i(\beta+1)}$ sabe que $\langle f_\gamma^{\xi+2} : \gamma < \lambda \rangle$ es cofinal módulo $D_{\xi+1}$, es decir, existe $\gamma \in N_{i(\beta+1)}$ tal que

$$\chi_{N_{i(\beta)}}|a <_{D_{\xi+1}} f_\gamma^{\xi+2}.$$

Luego, $\gamma \in N_{i(\beta+1)} \Rightarrow \gamma < \chi_{N_{i(\beta+1)}}(\lambda)$, se sigue que

$$\chi_{N_{i(\beta)}}|a <_{D_{\xi+1}} f_{\chi_{N_{i(\beta+1)}}}^{\xi+2}(\lambda).$$

Como $f_0^{\xi+2} \in N$ y $a \subseteq N$, tenemos que $f_0^{\xi+2}(\alpha) \in N \Rightarrow f_0^{\xi+2}(\alpha) < \chi_N(\alpha)$ para toda $\alpha \in a$. Y por la definición de $f_0^{\xi+2}$ vemos que

$$f_{\chi_N(\lambda)}^{\xi+1} <_{D_{\xi+1}} f_0^{\xi+2} < \chi_N|a.$$

Así, para cada $\beta < \kappa$, podemos elegir $\alpha_\beta \in a$ tal que

$$\chi_{N_{i(\beta)}}(\alpha_\beta) < f_{\chi_{i(\beta+1)}(\lambda)}^{\xi+2}(\alpha_\beta) \quad \text{y} \quad f_{\chi_N(\lambda)}^{\xi+1}(\alpha_\beta) < \chi_N(\alpha_\beta).$$

Dado que $|a| < \kappa$, podemos encontrar un subconjunto $I \subseteq \kappa$ de cardinalidad κ y $\alpha \in a$ tal que $\alpha_\beta = \alpha$ para toda $\beta \in I$.

De la segunda desigualdad, concluimos que $\alpha \notin c_\xi$. Resta verificar que $\alpha \in c_{\xi+1}$. Usando algunas desigualdades anteriores

$$f_{\chi_N(\lambda)}^{\xi+2}(\alpha) \geq \sup_{\beta \in I} f_{\chi_{i(\beta+1)}(\lambda)}^{\xi+2}(\alpha) \geq \sup_{\beta \in I} \chi_{N_{i(\beta)}}(\alpha) = \chi_N(\alpha).$$

Pero ya habíamos visto que $f_{\chi_N(\lambda)}^{\xi+2} \leq \chi_N|a$. Por lo tanto, $f_{\chi_N(\lambda)}^{\xi+2}(\alpha) = \chi_N(\alpha)$, es decir, $\alpha \in c_{\xi+1}$. □

Finalmente, vemos que $\langle c_\xi : \xi < \kappa \rangle$ es una sucesión estrictamente decreciente de subconjuntos de a . Esto es una contradicción. □

Lema 3.2.3. *Sean μ y λ cardinales regulares no numerables tales que $\mu^+ < \lambda$. Entonces existe una sucesión $\langle P_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ tal que, para cada $\gamma < \lambda$, $P_\gamma \subseteq \{X \subseteq \gamma : |X| \leq \mu\}$ y $|P_\gamma| \leq \lambda$. Además, para cada $\theta > \lambda$ cardinal regular y $x \in H(\theta)$, podemos encontrar $\langle N_\rho : \rho < \mu \rangle$ una secuencia de aproximación de $H(\theta)$ tal que $x \in N_0$, $\vartheta_\rho = \sup(N_\rho \cap \lambda) \in \lambda$ para cada $\rho < \mu$ y si $\rho < \mu$ es un ordinal límite, entonces $\{\vartheta_\sigma : \sigma < \rho\} \in N_{\rho+1} \cap P_{\eta_\rho}$.*

Demostración. Haciendo $\kappa = \mu^+$, fijemos una sucesión $\langle C_\alpha : \alpha \in S \rangle$ como en el Teorema 1.5.4. Notemos que para cada club C de μ^{++} , existe $\alpha \in S$ tal que $C_\alpha \subseteq C$.

Fijemos ahora $\theta > \lambda$ y $x \in H(\theta)$. Sea $\langle N_\xi : \xi < \mu^{++} \rangle$ una secuencia de aproximación de $H(\theta)$ tal que $\{x, \langle C_\alpha : \alpha \in S \rangle, S\} \subseteq N_0$ y, para cada $\xi < \mu^{++}$, $|N_\xi| < \lambda$, entonces,

$$\vartheta_\xi := \sup(N_\xi \cap \lambda) \in \lambda.$$

Sea $E := \{\vartheta_\xi : \xi < \mu^{++}\}$. No es difícil convencerse que E es un club en $\sup(E)$ y $\text{cf}(\sup(E)) = \mu^{++}$.

Caso 1: $\lambda = \mu^{++}$.

Para cada $\gamma < \lambda$, definamos $P_\gamma := \{C_\alpha \cap \gamma : \alpha \in S\}$. Es claro que estos P_γ cumplen las propiedades deseadas.

Observemos que $\sup(E) = \lambda$, pues $E \subseteq \lambda$ y $|E| = \lambda$. Es decir, E es un club en λ . Por tanto, existe $\alpha \in S$ tal que $C_\alpha \subseteq E$.

Sea $\langle \xi(\rho) : \rho < \mu \rangle$ una sucesión creciente y continua tal que

$$C_\alpha = \{\vartheta_{\xi(\rho)} : \rho < \mu\}.$$

Es fácil ver que $\langle N_{\xi(\rho)} : \rho < \mu \rangle$ es una secuencia de aproximación. Veamos que es la secuencia deseada. Nos resta probar que para $\rho < \mu$ ordinal límite, $\{\vartheta_{\xi(\sigma)} : \sigma < \rho\} \in N_{\xi(\rho+1)} \cap P_{\vartheta_{\xi(\rho)}}$.

Para cualquier $\rho < \mu$, es inmediato que $\{\vartheta_{\xi(\sigma)} : \sigma < \rho\} = C_\alpha \cap \vartheta_{\xi(\rho)} \in P_{\vartheta_{\xi(\rho)}}$. Notemos que $\vartheta_{\xi(\rho)} = \sup(N_{\xi(\rho)} \cap \lambda) \in N_{\xi(\rho+1)}$.

Supongamos ahora que ρ es ordinal límite. Esto implica que $\vartheta_{\xi(\rho)}$ es punto límite de C_α . Por elementalidad, existe $\eta \in N \cap S$ tal que $\vartheta_{\xi(\rho)}$ es punto límite de C_η . Se sigue que $C_\eta \in N_{\xi(\rho+1)}$. Por la elección de la sucesión $\langle C_\alpha : \alpha \in S \rangle$ tenemos

$$\{\vartheta_{\xi(\sigma)} : \sigma < \rho\} = C_\alpha \cap \vartheta_{\xi(\rho)} = C_\eta \cap \vartheta_{\xi(\rho)} \in N_{\xi(\rho+1)}.$$

Caso 2: $\lambda > \mu^{++}$.

Para cada $\beta < \lambda$ con $\text{cf}(\beta) = \mu^{++}$, fijemos un club $D_\beta \subseteq \beta$ y consideremos $i_\beta : \mu^{++} \rightarrow D_\beta$ el isomorfismo correspondiente. Para cada $\alpha \in S$, definamos $C_\alpha^\beta := \{i_\beta(\nu) : \nu \in C_\alpha\}$. Notemos que C_α^β es un club en $i_\beta(\alpha)$ y $|C_\alpha^\beta| \leq \mu$.

Definamos

$$P_\gamma := \{C_\alpha^\beta \cap \gamma : \beta < \lambda \wedge \text{cf}(\beta) = \mu^{++} \wedge \alpha \in S\},$$

para cada $\gamma < \lambda$. Es fácil ver que estos P_γ tienen las propiedades deseadas.

Recordemos que $E = \{\vartheta_\xi : \xi < \mu^{++}\}$ es un club en $\beta := \sup(E)$ y $\text{cf}(\beta) = \mu^{++}$. Enumeremos como $D_\beta = \{i_\beta(i) : i < \mu^{++}\}$ y sea

$$E' = \{\eta \in E \cap D_\beta : \exists \xi(\eta = \vartheta_\xi = i_\beta(\xi))\}.$$

La Proposición 1.3.5 nos asegura que E' es un club en β . Entonces $E^* = i_\beta^{-1}[E']$ es un club en μ^{++} .

Fijemos $\alpha \in S$ tal que $C_\alpha \subseteq E^*$ y enumeremos como $C_\alpha = \{\nu_\rho : \rho < \mu\}$. Notemos que $C_\alpha^\beta \subseteq E$, entonces podemos pensar a C_α^β como

$$C_\alpha^\beta = \{\vartheta_{\xi(\rho)} : \rho < \mu\}.$$

Veremos que $\langle N_{\xi(\rho)} : \rho < \mu \rangle$ es la secuencia de aproximación deseada. Es inmediato que $\{\vartheta_{\xi(\sigma)} : \sigma < \rho\} = C_\alpha^\beta \cap \vartheta_{\xi(\rho)} \in P_{\vartheta_{\xi(\rho)}}$ para cualquier $\rho < \mu$.

Notemos que $C_\alpha^\beta \subseteq E'$. Entonces, para cada $\rho < \mu$, tenemos que $\vartheta_{\xi(\rho)} = i_\beta(\nu_\rho) = \vartheta_{\nu_\rho}$. Como la enumeración de E fue estrictamente creciente (es decir, $\eta < \xi \Rightarrow \vartheta_\eta < \vartheta_\xi$), se sigue que $\xi(\rho) = \nu_\rho$.

Como en el Caso 1, para ρ límite, ν_ρ es límite en C_α y, además, $\vartheta_{\xi(\rho)} \in N_{\xi(\rho+1)}$ implica que $\nu_\rho = \xi(\rho) \in N_{\xi(\rho+1)}$. Por elementalidad, existe $\eta \in N_{\xi(\rho+1)} \cap S$ tal que ν_ρ es límite en C_η . Entonces

$$\{\nu_\sigma : \sigma < \rho\} = C_\alpha \cap \nu_\rho = C_\eta \cap \nu_\rho \in N_{\xi(\rho+1)}.$$

Por lo tanto,

$$\{\vartheta_{\xi(\sigma)} : \sigma < \rho\} = \{\vartheta_{\nu_\sigma} : \sigma < \rho\} \in N_{\xi(\rho+1)}.$$

□

En particular, haciendo $P := \bigcup_{\gamma < \lambda} P_\gamma$, encontramos una colección $P \subseteq \{X \subseteq \lambda : |X| \leq \mu\}$ tal que $|P| \leq \lambda$. Además, para cada $x \in H(\theta)$, podemos definir

$$N := \bigcup_{\rho < \mu} N_\rho \quad \text{y} \quad X = \{\eta_\rho : \rho < \mu\}.$$

Vemos que $x \in N$ y X es un subconjunto cofinal en $N \cap \lambda$ tal que, si $Y \subseteq X$ es un segmento inicial, entonces $Y \in N \cap P$. Esto último pues $Y \in N_{\rho+1} \cap P_{\eta_\rho}$, para algún $\rho < \mu$ límite. Notemos también que $\text{cf}(N \cap \lambda) = \text{cf}(\sup(X)) = \mu$.

Teorema 3.2.4. *Suponga que a es un conjunto infinito de cardinales regulares con $|a|^+ < \min(a)$ y $\lambda \in \text{pcf}(a)$. Entonces existe un subconjunto $b \subseteq a$ tal que $J_{<\lambda^+}(a)$ es el ideal generado por $J_{<\lambda}(a) \cup \{b\}$.*

Demostración. Elijamos una sucesión $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ como en el Lema 3.2.2. Usando el Teorema 3.1.8, encontramos una sucesión $\langle b_\xi : \xi < \lambda \rangle$ de subconjuntos de a tal que $\xi < \xi' \Rightarrow b_\xi \setminus b_{\xi'} \in J_{<\lambda}(a)$ y $\langle f_\gamma | b_\xi : \gamma < \lambda \rangle$ es cofinal módulo $J_{<\lambda}(a)$ en $\prod b_\xi$ para cada $\xi < \lambda$. Además, existe una función $g \in \prod a$ cota superior módulo I de $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$, donde I es el ideal generado por $J_{<\lambda}(a) \cup \{b_\xi : \xi < \lambda\}$.

Afirmación 1. $J_{<\lambda^+}(a) = I$

Demostración. Primero, veamos que para toda $\xi < \lambda$, $b_\xi \in J_{<\lambda^+}(a)$. Sea D ultrafiltro sobre a con $b_\xi \in D$. Si $D \cap J_{<\lambda}(a) \neq \emptyset$, del Corolario 3.1.3 se sigue que $\text{cf}(\prod a/D) < \lambda$. Si D es disjunto a $J_{<\lambda}(a)$, se sigue que $\text{cf}(\prod a/D) \leq \lambda$ pues $\langle f_\gamma | b_\xi : \gamma < \lambda \rangle$ es cofinal módulo $J_{<\lambda}(a)$ en $\prod b_\xi$ y $b_\xi \in D$.

Ahora, supongamos que existe $b \in J_{<\lambda^+}(a) \setminus I$ y sea D un ultrafiltro sobre a tal que $b \in D$ y $D \cap I = \emptyset$. En particular, $D \cap J_{<\lambda}(a) = \emptyset$ y, por tanto, $\text{cf}(\prod a/D) = \lambda$. Por nuestra elección de $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$, tenemos que esta sucesión es cofinal módulo D . Esto no puede suceder pues g es cota módulo I y $D \cap I = \emptyset$ implica que también lo es módulo D . □

Bastaría probar que, para algún b_ξ , $J_{<\lambda^+}(a)$ es generado por $J_{<\lambda}(a) \cup \{b_\xi\}$. Supongamos que esto no ocurre, entonces

$$\forall \xi < \lambda \exists \beta > \xi (b_\beta \notin I_\xi),$$

donde I_ξ es el ideal generado por $J_{<\lambda}(a) \cup \{b_\xi\}$. Esto implica que $b_\beta \setminus b_\xi \notin J_{<\lambda}(a)$. Dado que λ es un cardinal regular, sin pérdida de generalidad, suponemos que $b_\beta \setminus b_\xi \notin J_{<\lambda}(a)$ para todo $\xi < \beta < \lambda$.

Sea $\mu = |a|^+$. Claramente, $\mu < \min(a) \leq \lambda$, así, sea P como en la observación antes del teorema. Para cada $X \subseteq \lambda$ de cardinalidad μ , definamos

$$f_X(\alpha) = \sup\{f_\gamma(\alpha) : \gamma \in X\},$$

para cada $\alpha \in a$. Como $\mu < \min(a)$, $f_X \in \prod a$. Podemos encontrar $h \in \prod a$ cota superior módulo $J_{<\lambda^+}(a)$ de $\{f_X : X \in P\}$ pues $\prod a/J_{<\lambda^+}(a)$ es λ^+ -dirigido.

Fijemos θ regular suficientemente grande. Sean $N \prec H(\theta)$ tal que $x = \{h\} \cup \{\langle b_\xi : \xi < \lambda \rangle\} \in N$ y X como en la observación. Para cada $Y \subseteq X$, consideremos

$$A_Y := \{\alpha \in a : f_Y(\alpha) > h(\alpha)\}.$$

Para segmentos iniciales Y de X , $Y \in P$, entonces $A_Y \in J_{<\lambda^+}(a)$. Por otro lado, existe un segmento inicial Y de X tal que $Y \in N \cap P$ y $A_Y = A := A_X$. En efecto, para cada $\alpha \in A$ podemos encontrar Y_α tal que $\alpha \in A_{Y_\alpha}$, como $\text{cf}(\sup(X)) = \mu > |a|$, entonces $Y = \bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha$ es el segmento inicial deseado. Por tanto, $A \in J_{<\lambda^+}(a)$ y $A \in N$.

Dado que A pertenece al generado por $J_{<\lambda}(a) \cup \{b_\xi : \xi < \lambda\}$ y $\gamma_1 < \gamma_2 < \lambda \Rightarrow b_{\gamma_1} \setminus b_{\gamma_2} \in J_{<\lambda}(a)$, podemos encontrar $\beta < \lambda$ tal que $A \in I_\beta$.

Como $A \in N$, para algún $\xi \in N$, $A \in I_\xi$. Esto implica que

$$h|b_{\xi+1} \geq_{I_\xi} f_X|b_{\xi+1}.$$

Luego, $\xi \in N \Rightarrow \xi + 1 \in N$. Dado que $\langle f_\gamma|b_{\xi+1} : \gamma < \lambda \rangle$ es cofinal módulo $J_{<\lambda}(a)$, por elementaridad, existe $\beta \in N \cap \lambda$ tal que $f_\beta|b_{\xi+1} > h|b_{\xi+1}$ módulo $J_{<\lambda}(a)$. Como X es cofinal en $N \cap \lambda$, podemos pensar que $\beta \in X$.

Finalmente,

$$h|b_{\xi+1} \geq_{I_\xi} f_X|b_{\xi+1} \geq_{I_\xi} f_\beta|b_{\xi+1} > h|b_{\xi+1}.$$

Lo cual es una contradicción pues $h|b_{\xi+1} >_{I_\xi} h|b_{\xi+1}$ pero $b_{\xi+1} \notin I_\xi$.

□

De aquí en adelante, para cualquier subconjunto a de cardinales regulares con $|a|^+ < \min(a)$, $b_\lambda(a)$ será un generador de $J_{<\lambda^+}(a)$ sobre $J_{<\lambda}(a)$. Además, sabemos que $b_\lambda(a) \neq \emptyset$ cuando $\lambda \in \text{pcf}(a)$. Concluimos esta sección con algunos resultados sencillos de los conjuntos generadores.

Observación 3.2.5. $\text{cf}(\prod a/D) = \min\{\lambda : b_\lambda \in D\}$

Para ver esto, veamos que como $\text{cf}(\prod a/D) = \lambda$, por el Corolario 3.1.3, podemos tomar $b \in D \cap J_{<\lambda^+}(a)$. Aún más, $D \cap J_{<\lambda}(a) = \emptyset$. Por definición, $b \setminus b_\lambda(a) \in J_{<\lambda}(a)$, esto implica que $b \cap b_\lambda(a) \subseteq b_\lambda(a) \in D$.

Para la minimalidad, si $\mu < \lambda$, entonces $b_\mu \notin D$ pues b_μ fuerza $\text{cof} < \mu^+ \leq \lambda$.

Observación 3.2.6. Si $\lambda = \min(\text{pcf}(a))$, entonces $b_\lambda(a) = \{\lambda\}$.

Notemos que $\min(a) = \min(\text{pcf}(a))$ y $J_{<\lambda}(a) = \emptyset$. Sea $b \in J_{<\lambda^+}(a)$. Si sucede que $\lambda' \in b$ para un $\lambda' > \lambda$, entonces $\{\lambda'\} \in J_{<\lambda'}(a)$. Pero para D el ultrafiltro principal de λ' tenemos que $\text{cf}(\prod a/D) = \lambda' \geq \lambda$. Esto no puede pasar.

Lema 3.2.7. Para cualquier $c \subseteq a$, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \text{pcf}(c)$ tales que $c \subseteq b_{\lambda_1}(a) \cup \dots \cup b_{\lambda_n}(a)$.

Demostración. Considere $J = \{b \subseteq c : \text{para algunos } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{pcf}(c), b \subseteq b_{\lambda_1}(a), \dots, b_{\lambda_n}(a)\}$. Es fácil ver que J es un ideal sobre c . Si $c \in J$ habremos terminado. Supongamos entonces que esto no sucede y tomemos un ultrafiltro D sobre a tal que $c \in D$ y $D \cap J = \emptyset$.

Podemos extender D a un ultrafiltro U sobre a tal que $\lambda = \text{cf}(\prod c/D) = \text{cf}(\prod a/U)$. De la observación anterior, $b_\lambda(a) \in U$ y entonces $b_\lambda(a) \cap c \in U$, pero trivialmente $b_\lambda(a) \cap c \in J$. Esto contradice que $U \cap J = \emptyset$.

□

Capítulo 4

Una cota para $|\text{pcf}(a)|$

En el capítulo anterior habíamos visto que $|\text{pcf}(a)| \leq 2^{|a|}$. En el presente capítulo, nos dedicaremos a demostrar que $|\text{pcf}(a)| \leq |a|^{+3}$.

4.1. La mejor cota hasta el momento

Definición 4.1.1. Sea a un intervalo de cardinales regulares. Consideremos un ideal I sobre a , $b \subseteq a$ y $g \in \prod a$.

Diremos que una familia $\mathcal{A} \subseteq \prod a$ es cofinal módulo I en $\prod b$ bajo g si para toda $h \in \prod b$ con $h <_I g|b$, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $h \leq_I f|b$.

Observemos que si una familia $\mathcal{A} \subseteq \prod a$ es cofinal módulo I en $\prod b$ bajo g y $d \subseteq b$, entonces también será cofinal módulo I en $\prod d$ bajo g . En efecto, sea $h \in \prod d$ tal que $h <_I g|d$, definimos h' como la extensión de h a b haciéndola 0 fuera de d . Así, $h' <_I g|b$ y entonces existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $h' \leq_I f|b$. Como $d \subseteq b$, claramente $h \leq_I f|d$.

Si A es un conjunto de cardinales y n un número natural, denotamos $A^{+n} = \{\alpha^{+n} : \alpha \in A\}$.

Lema 4.1.2. Suponga que λ es un cardinal singular de cofinalidad no numerable. Sea C un club de $[\text{cf}(\lambda), \lambda)$ cuyos elementos sean cardinales singulares y $\text{otp}(C) = \text{cf}(\lambda)$.

Considere $n \geq 1$ un número natural, $a = C^{+n}$ y $c = \bigcup_{1 \leq k < \omega} C^{+k}$. Suponga que existe un generador b_δ de $J_{<\delta^+}(c)$ sobre $J_{<\delta}(c)$ para cada $\delta \in \text{pcf}(c)$.

Entonces $\{\rho \in C : \rho^{+n} \in \bigcup_{k=1}^n b_{\lambda+k}\}$ contiene un club de λ .

Notemos que sí existe un conjunto C como el mencionado en el Lema. En efecto, para cualquier club de $[\text{cf}(\lambda), \lambda)$ de tipo de orden $\text{cf}(\lambda)$, podemos tomar el conjunto de puntos límite cardinales. También, notemos que a es un intervalo de cardinales regulares tal que $\text{mín}(a) > \text{cf}(\lambda) = |a|$.

Demostración del Lema. Supongamos que es falso y sea n el mínimo natural tal que $\{\rho \in C : \rho^{+n} \in \bigcup_{k=1}^n b_{\lambda+k}\}$ no contiene un club de λ .

Definamos un ideal I sobre a como:

$$A \in I \Leftrightarrow \{\rho \in C : \rho^{+n} \in A\} \text{ es no estacionario en } \lambda.$$

Por propiedades de clubs, es fácil ver que I sí es un ideal sobre a . Consideremos ahora a I^* como el ideal generado por $I \cup \{\bigcup_{k=1}^n b_{\lambda+k}\}$. Este ideal es propio ya que $a \setminus \bigcup_{k=1}^n b_{\lambda+k} \notin I$ por nuestra suposición inicial.

Como los subconjuntos acotados de λ pertenecen a I , de la Proposición 3.1.4 tenemos que $J_{<\lambda}(a) \subseteq I$. Por otro lado, $\lambda \notin \text{pcf}(a)$ pues es singular, esto quiere decir que $J_{<\lambda}(a) = J_{<\lambda^+}(a)$ y entonces $\bigcup_{k=1}^n b_{\lambda+k}$ genera $J_{<\lambda^{+n+1}}(a)$ sobre $J_{<\lambda}(a)$. Por tanto, $J_{<\lambda^{+n+1}}(a) \subseteq I^*$ de donde se sigue que $\prod a/I^*$ es λ^{+n+1} -dirigido.

Construiremos ahora una sucesión $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda^{+n} \rangle$ creciente módulo I^* en $\prod a$ de manera análoga a como lo hicimos en el Lema 2.2.8. Fijemos una sucesión ‘silly square’ $\langle \mathcal{C}_\gamma : \gamma < \lambda^{+n} \rangle$.

Sea $f_0 \in \prod a$ arbitraria. En el paso $\beta < \lambda^{+n}$, existe $h_\beta \in \prod a$ tal que $f_\gamma <_{I^*} h_\beta$ para todo $\gamma < \beta$ dado que $\prod a/I^*$ es λ^{+n+1} -dirigido. Para cada $E \in \mathcal{C}_\beta$, defínase para todo $\alpha \in a$:

$$g_E^\beta(\alpha) = \max\{h_\beta(\alpha), \sup\{f_\gamma(\alpha) : \gamma \in E \wedge \alpha > \text{otp}(E)\}\}.$$

Como $\alpha > \text{otp}(E) \geq |E|$, entonces $g_E^\beta \in \prod a$. Finalmente, dado que $|\mathcal{C}_\beta| \leq \lambda^{+n}$ y $\prod a/I^*$ es λ^{+n+1} -dirigido, podemos tomar $f_\beta \in \prod a$ cota estrictamente superior módulo I^* a $\{g_E^\beta : E \in \mathcal{C}_\beta\}$.

Afirmación 1. *Para cualquier ultrafiltro D disjunto a I^* , no existen $\mu < \lambda$ y subconjuntos $S_\alpha \subseteq a$ para cada $\alpha \in a$, tales que $|S_\alpha| \leq \mu$ y $\prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ corte cofinalmente módulo D a $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda^{+n} \rangle$.*

Demostración. Supongamos que la afirmación es falsa y tomemos un ultrafiltro D sobre a disjunto a I^* , $\mu < \lambda$ y subconjuntos $S_\alpha \subseteq a$ como en el enunciado. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar $\mu > |a|$ pues si la afirmación fuera cierta para un $\mu' \leq |a|$, trivialmente lo es para $\mu > \mu'$. Recordemos que $f \leq_{I^*} g \Rightarrow f \leq_D g$ al ser $D \cap I^* = \emptyset$.

Consideremos $B \subseteq \lambda^{+n}$ un club tal que para $\gamma, \gamma' \in B$, con $\gamma < \gamma'$, existe $h \in \prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ tal que $f_\gamma \leq_D h \leq_D f_{\gamma'}$, el cual existe por Proposición 2.2.6.

Sea $\beta \in B$ punto límite singular con $\text{cf}(\beta) = \mu^+ < \lambda$. Nótese que λ es límite al ser cardinal singular. De la tercera propiedad de nuestra sucesión ‘silly square’, encontramos $E \in \mathcal{C}_\beta$ club de β con $\text{otp}(E) = \text{cf}(\beta)$.

Así, $E \cap B = \{\gamma_i : i < \text{cf}(\beta)\}$ es un club de β , de donde, para cada $i < \text{cf}(\beta)$, podemos escoger $h_i \in \prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ tal que $f_{\gamma_i} \leq_D h_i \leq_D f_{\gamma_{i+1}}$.

Ahora, como $\text{otp}(E) < \lambda$ y los conjuntos acotados pertenecen a I^* , entonces $\{\alpha \in a : \alpha > \text{otp}(E)\} \in D$. Además, $g_{E \cap \gamma_i}^{\gamma_i} <_D f_{\gamma_i}$ pues $E \cap \gamma_i \in \mathcal{C}_{\gamma_i}$. Por tanto, para cada $i < \text{cf}(\beta)$, podemos elegir $\alpha_i > \text{otp}(E)$ tal que:

$$g_{E \cap \gamma_i}^{\gamma_i} < f_{\gamma_i}(\alpha_i) < f_{\gamma_i}(\alpha_i) \leq h_i(\alpha_i) \leq f_{\gamma_{i+1}}(\alpha_i).$$

Como $|a| < \mu < \text{cf}(\beta)$, podemos encontrar $I \subseteq \text{cf}(\beta)$, $|I| = \text{cf}(\beta)$, y $\alpha \in a$ tal que $\alpha_i = \alpha$ para toda $i \in I$. Más aún, podemos considerar a I conformado sólo por ordinales límite. Para $i < j$ en I , tenemos que:

$$h_i(\alpha) \leq f_{\gamma_{i+1}}(\alpha) \leq g_{E \cap \gamma_j}^{\gamma_j}(\alpha) < f_{\gamma_j}(\alpha) \leq h_j(\alpha),$$

donde la segunda desigualdad es cierta pues $\gamma_{i+1} \in E \cap \gamma_j$.

Por lo tanto, $\langle h_i(\alpha) : i \in I \rangle$ es una sucesión estrictamente creciente en S_α , contradiciendo el hecho de que $|S_\alpha| \leq \mu < \text{cf}(\beta)$. □

Fijemos un ultrafiltro D sobre a disjunto a I^* . Del Lema 2.2.8 y la Afirmación anterior, existe g mínima cota superior módulo D para $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda^{+n} \rangle$. Como $\prod a/I^*$ es λ^{+n+1} -dirigido, existe $\bar{g} \in \prod a$ cota superior módulo I^* para g y $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda^{+n} \rangle$. Podemos suponer que $g \leq \bar{g}$ en todos lados, en particular $g \in \prod a$.

Tomando $\mu = |a|$ y aplicando la Afirmación anterior, tenemos que $\{\alpha \in a : \text{cf}(g(\alpha)) > |a|\} \in D$. Sin pérdida de generalidad, $\text{cf}(g(\alpha)) > |a|$ para toda $\alpha \in a$.

Recordemos que $a = \{\rho^{+n} : \rho \in C\}$. Como cada $\rho \in C$ es singular, se tiene que $\text{cf}(g(\rho^{+n})) < \rho$ o $\text{cf}(g(\rho^{+n})) = \rho^{+k}$ para algún $1 \leq k < n$. Sea $S_0 = \{\rho \in C : \text{cf}(g(\rho^{+n})) < \rho\}$ y $S_k = \{\rho \in C : \text{cf}(g(\rho^{+n})) = \rho^{+k}\}$ para $1 \leq k < n$. Entonces $a = \bigcup_{k=0}^{n-1} S_k^{+n}$.

Afirmación 2. $S_0^{+n} \in D$

Demostración. Supongamos lo contrario, entonces $S_k^{+n} \in D$ para alguna $k \geq 1$. Por la minimalidad de n , $\{\rho \in C : \rho^{+k} \in \bigcup_{j=1}^k b_{\lambda+j}\}$ contiene un club K de λ . Sea $a' = \{\rho^{+k} : \rho \in C\}$ y definimos un ultrafiltro D' sobre a' como:

$$A^{+n} \in D \Leftrightarrow A^{+k} \in D',$$

para $A \subseteq C$.

Veamos que $\text{cf}(\prod a'/D') < \lambda^{+n}$. Si $K^{+n} \notin D \Rightarrow a \setminus K^{+n} \in D$, pero $a \setminus K^{+n} = (C \setminus K)^{+n} \in I$ pues $C \setminus K$ es no estacionario al ser K club. Como $D \cap I = \emptyset$ entonces $K^{+n} \in D$ y así $K^{+k} \in D'$. Luego, $\bigcup_{j=1}^k b_{\lambda+j} \in D'$ pues $K \subseteq \bigcup_{j=1}^k b_{\lambda+j} \in D'$, de donde $b_{\lambda+j} \in D'$ para alguna $1 \leq j \leq k$. Por la Observación 3.2.5, $\text{cf}(\prod a'/D') < \lambda^{+j+1} \leq \lambda^{+n}$.

Si probamos que $\text{cf}(\prod a'/D') \geq \lambda^{+n}$ habremos terminado la demostración de la afirmación al llegar a una contradicción. Para ello, definimos $a'' = \{\text{cf}(g(\alpha)) : \alpha \in a\}$ y un ultrafiltro D'' sobre a'' como:

$$A \in D'' \Leftrightarrow \{\alpha \in a : \text{cf}(g(\alpha)) \in A\} \in D,$$

para $A \subseteq a''$.

Notemos que $S_k^{+n} \subseteq \{\alpha \in a : \text{cf}(g(\alpha)) \in a' \cap a''\} \in D$, esto implica que $a' \cap a'' \in D''$. Por otro lado, $S_k^{+n} \in D \Rightarrow S_k^{+k} \in D'$ y $S_k^{+k} \subseteq a' \cap a''$, de donde se sigue que $a' \cap a'' \in D'$. Así, nos basta probar lo siguiente:

Subafirmación 1. $\text{cf}(\prod a''/D'') \geq \lambda^{+n}$.

Demostración. La demostración será completamente idéntica a la demostración del Teorema Principal, concentrándonos sólo en mostrar que la cofinalidad es mayor a λ^{+n} .

Para cada $\alpha \in a$, fijemos un club $S_\alpha \subseteq g(\alpha)$ con tipo de orden $\text{cf}(g(\alpha))$ y lo enumeramos como $\langle S_\alpha(i) : i < \text{cf}(g(\alpha)) \rangle$. Primero, veamos que $\text{cf}(\prod_{\alpha \in a} S_\alpha/D) \geq \lambda^{+n}$. Para $\beta < \lambda^{+n}$, definimos:

$$\bar{f}_\beta(\alpha) = \begin{cases} S_\alpha(i_0) & \text{si } f_\beta(\alpha) < g(\alpha) \wedge i_0 = \min\{i < \text{cf}(g(\alpha)) : f_\beta(\alpha) \leq S_\alpha(i)\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que $\bar{f}_\beta \in \prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ y $f_\beta \leq_D \bar{f}_\beta$ y, para $\gamma < \gamma'$, $\bar{f}_\gamma \leq_D \bar{f}_{\gamma'}$ pues $f_\gamma <_D f_{\gamma'}$.

Ahora, consideremos una familia $\{h_\xi : \xi < \mu\} \subseteq \prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ con $\mu < \lambda^{+n}$. Para cada $\xi < \mu$, como $h_\xi <_D g$ podemos encontrar β_ξ tal que $h_\xi \leq_D f_{\beta_\xi} \leq_D \bar{f}_{\beta_\xi}$. Sea $\beta := \sup\{\beta_\xi : \xi < \mu\}$. Dado que λ^{+n} es regular, $\beta < \lambda^{+n}$. Así, para todo $\xi < \mu$, $h_\xi \leq_D \bar{f}_{\beta_\xi} \leq_D \bar{f}_\beta$. Por tanto, $\text{cf}(\prod_{\alpha \in a} S_\alpha/D) \geq \lambda^{+n}$.

Para $\beta < \lambda^{+n}$, definimos:

$$\bar{f}'_\beta(\text{cf}(g(\alpha))) = \sup\{i < \text{cf}(g(\alpha)) : \exists \gamma \in a(\text{cf}(g(\gamma)) = \text{cf}(g(\alpha)) \wedge \bar{f}_\beta(\gamma) = S_\gamma(i))\}.$$

Como $\text{cf}(g(\alpha)) > |a|$ para toda $\alpha \in a$, tenemos que $\bar{f}'_\beta \in \prod a''$.

Para $f' \in \prod a''$, definimos $f \in \prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ como $f(\alpha) = S_\alpha(f'(\text{cf}(g(\alpha))))$. Decimos que f' induce f .

Dada $f' \in \prod a''$, si sucede que $f <_D \bar{f}_\beta$ entonces $f' <_{D''} \bar{f}'_\beta$. En efecto, existe $b \in D$ tal que $\forall \gamma \in b(f(\gamma) < \bar{f}_\beta(\gamma))$; entonces por la definición de la función inducida f :

$$f'(\text{cf}(g(\gamma))) = i < \text{cf}(g(\gamma)), \text{ donde } i \text{ es tal que } f(\gamma) = S_\gamma(i).$$

Por definición, $\bar{f}_\beta(\gamma) = S_\gamma(j)$, para algún $j < \text{cf}(g(\gamma))$. Pero como $f(\gamma) < \bar{f}_\beta(\gamma)$, se sigue que $i < j$. Finalmente, por la definición de $\bar{f}'_\beta$, concluimos que:

$$f'(\text{cf}(g(\gamma))) < j \leq \bar{f}'_\beta(\text{cf}(g(\gamma))).$$

Como $\text{cf}(\prod_{\alpha \in a} S_\alpha/D) \geq \lambda^{+n}$, si $\mathcal{F}' = \{f'_\gamma : \gamma < \eta\}$ es una familia de funciones de $\prod a''$ y $\eta < \lambda^{+n}$, entonces el subconjunto $\mathcal{F} = \{f_\gamma : \gamma < \eta\} \subseteq \prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ de todas las funciones inducidas está acotado módulo D por alguna $\bar{f}_\beta$. Por dicho en el párrafo anterior, $\bar{f}'_\beta$ acota módulo D'' a $\mathcal{F}'$. Por lo tanto, $\text{cf}(\prod a''/D'') \geq \lambda^{+n}$.

□

Con esto llegamos a una contradicción y concluimos la demostración de la Afirmación.

□

Afirmación 3. Existe $b \in D$ tal que $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda^{+n} \rangle$ es cofinal módulo I^* en $\prod b$ bajo g .

Demostración. Comenzaremos definiendo $h_\beta \in \prod a$ para cada $\beta < |a|^+$ de manera recursiva, de tal forma que $h_\beta \leq h_{\beta'}$ para $\beta < \beta'$ y para cada $\beta < |a|^+$, $h_\beta < g$. Nótese que la desigualdad es en todos lados. Para β y γ dados, definiremos:

$$b_\gamma^\beta := \{\alpha \in a : f_\gamma(\alpha) > h_\beta(\alpha)\}.$$

Primero, sea $h_0(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in a$. Para $\beta < |a|^+$ límite, podemos definir $h_\beta(\alpha) = \sup\{h_\xi(\alpha) : \xi < \beta\}$, pues $\text{cf}(g(\alpha)) > |a|$.

Supongamos ahora que ya hemos definido h_β . Como h_β no puede ser cota para $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda^{+n} \rangle$ ya que $h_\beta <_D g$ y g es mínima, existe $\gamma_\beta < \lambda^{+n}$ para el cual $b_{\gamma_\beta}^\beta \in D$. Si sucede que $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda^{+n} \rangle$ es cofinal módulo I^* en $\prod b_{\gamma_\beta}^\beta$ bajo g , entonces ya habremos terminado.

De lo contrario, existe $h \in \prod b_{\gamma_\beta}^\beta$ tal que $h <_{I^*} g|b_{\gamma_\beta}^\beta$, pero $h \not\leq_{I^*} f_\gamma|b_{\gamma_\beta}^\beta$ para toda $\gamma < \lambda^{+n}$. Podemos considerar que $h < g|b_{\gamma_\beta}^\beta$ en todos lados modificando a h en un elemento de I^* . Así, para $\alpha \in a$, podemos definir:

$$h_{\beta+1}(\alpha) = \begin{cases} \max\{h_\beta(\alpha), h(\alpha)\} & \text{si } \alpha \in b_{\gamma_\beta}^\beta \\ h_\beta(\alpha) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para $\gamma > \gamma_\beta$, tenemos que $b_{\gamma_\beta}^\beta \setminus b_\gamma^\beta \in I^*$ ya que la sucesión es creciente módulo I^* . Por otro lado, $\{\alpha \in b_{\gamma_\beta}^\beta : f_\gamma(\alpha) < h(\alpha)\} \notin I^*$ por la elección de la h . Así pues, $\{\alpha \in b_{\gamma_\beta}^\beta : f_\gamma(\alpha) < h(\alpha)\} \setminus (b_{\gamma_\beta}^\beta \setminus b_\gamma^\beta) = \{\alpha \in b_{\gamma_\beta}^\beta \cap b_\gamma^\beta : f_\gamma(\alpha) < h(\alpha)\} \notin I^*$. Por tanto, existe $\alpha \in b_\gamma^\beta$ tal que $f_\gamma(\alpha) < h(\alpha) \leq h_{\beta+1}(\alpha)$, es decir, $b_{\gamma}^{\beta+1} \subsetneq b_\gamma^\beta$.

Si la recursión continua hasta $|a|^+ < \lambda$, entonces para $\gamma := \sup\{\gamma_\beta : \beta < |a|^+\} + 1$ tendríamos que $\langle b_\gamma^\beta : \beta < |a|^+ \rangle$ es una sucesión estrictamente decreciente de subconjuntos de a . Una contradicción. $\square$

Fijemos $b \in D$ como en la afirmación anterior. Para $\gamma < \lambda^{+n}$, sea $d_\gamma = \{\delta \in b : f_\gamma(\delta) < g(\delta)\}$. Como $f_\gamma <_{I^*} g \Rightarrow f_\gamma <_D g$, entonces $d_\gamma \in D$ y por tanto, $d'_\gamma := d_\gamma \cap S_0^{+n} \in D$. Así $d'_\gamma \notin I^*$, de donde $d'_\gamma \setminus \bigcup_{k=1}^n b_{\lambda+k} \notin I$, es decir, $S := \{\rho \in C : \rho^{+n} \in d'_\gamma \setminus \bigcup_{k=1}^n b_{\lambda+k}\}$ es estacionario en λ . Definimos:

$$F : C \rightarrow \text{ON} \text{ como } F(\rho) = \text{cf}(g(\rho^{+n})).$$

Para $\rho \in S_0$, $F(\rho) = \text{cf}(g(\rho^{+n})) < \rho$. Como $S \subseteq S_0$, F es una función regresiva en un estacionario. Por Lema de Fodor, existe $\eta_\gamma < \lambda$ y un estacionario $T \subseteq S$ tal que $F(\rho) = \eta_\gamma$ para $\rho \in T$. En particular, $\{\rho \in S : \text{cf}(g(\rho^{+n})) \leq \eta_\gamma\}$ es estacionario. Por tanto,

$$\{\delta \in d'_\gamma \setminus \bigcup_{k=1}^n b_{\lambda+k} : \text{cf}(g(\delta)) \leq \eta_\gamma\} \notin I \Rightarrow \{\delta \in d'_\gamma : \text{cf}(g(\delta)) \leq \eta_\gamma\} \notin I^*.$$

Se sigue que $\{\delta \in b : f_\gamma(\delta) < g(\delta) \wedge \text{cf}(g(\delta)) \leq \eta_\gamma\} \notin I^*$. Existe $\eta < \lambda$ tal que el conjunto $A = \{\gamma < \lambda^{+n} : \eta_\gamma = \eta\}$ tiene cardinalidad λ^{+n} .

Afirmación 4. Si $\gamma \in A$ y $\beta < \gamma$, pudimos haber elegido $\eta_\beta = \eta$, es decir, $\{\delta \in d'_\beta \setminus \bigcup_{k=1}^n b_{\lambda+k} : \text{cf}(g(\delta)) \leq \eta\}$ es estacionario.

Demostración. Notemos que $d_\gamma \setminus d_\beta = \{\delta \in b : f_\gamma(\delta) < g(\delta) \leq f_\beta(\delta)\} \subseteq \{\delta \in b : f_\gamma(\delta) \leq f_\beta(\delta)\} \in I^*$. Esto implica que $d'_\gamma \setminus d'_\beta = (d_\gamma \cap S_0^{+n}) \setminus (d_\beta \cap S_0^{+n}) = (d_\gamma \setminus d_\beta) \cap S_0^{+n} \subseteq d_\gamma \setminus d_\beta \in I^*$. Por definición de I^* , $(d'_\gamma \setminus d'_\beta) \setminus \bigcup_{k=1}^n b_{\lambda+k} \in I$.

Si $U := \bigcup_{k=1}^n b_{\lambda+k}$ y $X := \{\delta \in d'_\gamma \setminus U : \text{cf}(g(\delta)) \leq \eta\}$, entonces:

$$X \cap (d'_\beta \setminus U) = X \setminus ((d'_\gamma \setminus U) \setminus (d'_\beta \setminus U)) = X \setminus ((d'_\gamma \setminus d'_\beta) \setminus U) \notin I,$$

pues $X \notin I$ pero $(d'_\gamma \setminus d'_\beta) \setminus U \in I$.

Por otro lado, $X \cap (d'_\beta \setminus U) = \{\delta \in (d'_\gamma \cap d'_\beta) \setminus U : \text{cf}(g(\delta)) \leq \eta\} \subseteq \{\delta \in d'_\beta \setminus U : \text{cf}(g(\delta)) \leq \eta\}$. Así, $\{\delta \in d'_\beta \setminus U : \text{cf}(g(\delta)) \leq \eta\} \notin I$ pues contiene un subconjunto que no está en I , en otras palabras, $\{\delta \in d'_\beta \setminus \bigcup_{k=1}^n b_{\lambda+k} : \text{cf}(g(\delta)) \leq \eta\}$ es estacionario. $\square$

Hagamos $c_\gamma = \{\delta \in b : f_\gamma(\delta) < g(\delta) \wedge \text{cf}(g(\delta)) \leq \eta\}$. Usando la Proposición 1.2.7 podemos encontrar ultrafiltro D^* sobre a disjunto a I^* tal que $\{b\} \cup \{c_\gamma : \gamma < \lambda^{+n}\} \subseteq D^*$.

Veamos ahora que g es mínima cota superior módulo D^* para $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda^{+n} \rangle$. Trivialmente, g es cota superior módulo D^* pues $c_\gamma \in D^*$ para toda $\gamma < \lambda^{+n}$.

Supongamos ahora que existe $h <_{D^*} g$ una cota superior módulo D^* para la sucesión. De la observación hecha después de la Definición 4.1.1 y dado que $b \in D^*$, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $h < g$ en todo b . Así, $h|b <_{I^*} g|b$; por la Afirmación 3, existe $\gamma < \lambda^{+n}$ tal que $h|b \leq_{I^*} f_\gamma|b$, dado que $b \in D^*$ y $D^* \cap I^* = \emptyset$ tenemos que $h \leq_{D^*} f_\gamma <_{D^*} f_{\gamma+1}$, contradiciendo la suposición de que h era cota superior.

Finalmente, hagamos:

$$c = \{\delta \in b : \text{cf}(g(\delta)) \leq \eta\}.$$

Elijamos $S_\delta \subseteq g(\delta)$ cofinal con $|S_\alpha| \leq \eta$ para $\alpha \in c$ y S_δ arbitrario para $\delta \in a \setminus c$. Dado que g es mínima cota superior módulo D^* de $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda^{+n} \rangle$ y $c \in D^*$, es fácil ver que $\prod_{\alpha \in a} S_\alpha$ corta cofinalmente módulo D^* a la sucesión. Una contradicción de la Afirmación 1. $\square$

Si a es un conjunto de cardinales regulares, diremos que el conjunto de generadores $\{b_\lambda(a) : \lambda \in \text{pcf}(c)\}$ son transitivos si $\mu \in b_\lambda(c) \Rightarrow b_\mu(c) \subseteq b_\lambda(c)$. Esto es equivalente a afirmar que la siguiente relación es transitiva:

$$\rho \prec \mu \iff \rho \in b_\mu(c).$$

En efecto, supongamos que los generadores son transitivos y tomemos $\rho < \mu$ y $\mu < \lambda$. Esto implica que $\rho \in b_\mu(c)$ y $\mu \in b_\lambda(c)$. Por nuestra suposición, $\rho \in b_\mu(c) \subseteq b_\lambda(c) \Rightarrow \rho \prec \lambda$.

Por otro lado, tomemos $\mu \in b_\lambda(c)$ y $\eta \in b_\mu(c)$, es decir, $\mu \prec \lambda$ y $\eta \prec \mu$. Por transitividad, $\eta \prec \lambda \Rightarrow \eta \in b_\lambda(c)$. Por lo tanto, $b_\mu(c) \subseteq b_\lambda(c)$.

Lema 4.1.3. *Suponga que a es un conjunto de cardinales regulares con $\min(a) > |\mathbf{pcf}(a)|$ y sea $c = \mathbf{pcf}(a)$. Entonces podemos elegir generadores $b_\lambda(c)$ transitivos.*

Demostración. Podemos asumir que $\kappa^+ = |\mathbf{pcf}(a)|^+ < \min(a)$. Por simplicidad, denotaremos $b_\lambda := b_\lambda(c)$ y $J_{<\lambda} := J_{<\lambda}(c)$.

Fijemos θ cardinal regular suficientemente grande. Si $N \prec H(\theta)$ es un submodelo elemental, diremos que es *bueno* si $|N| = \kappa^+$ y si cumple con:

1. Existe una secuencia de aproximación $\langle N_\gamma : \gamma < \kappa^+ \rangle$ tal que $N = \bigcup_{\gamma < \kappa^+} N_\gamma$,
2. $\{a\} \cup \kappa \subseteq N_0$,
3. $|N_\alpha| = \kappa$ para cada $\alpha < \kappa^+$.

Por el Lema 1.4.19, para cada $x \in H(\theta)$ existe un modelo bueno N tal que $x \in N$. Como $\{a\} \cup \kappa \subseteq N$, de la Proposición 3.1.15, concluimos que $\{\mathbf{pcf}(a)\} \cup \mathbf{pcf}(a) \subseteq N$ y, para toda $\lambda \in \mathbf{pcf}(a)$, $J_{<\lambda}(a) \in N$. Así, como $\mathbf{pcf}(c) = c$, se sigue que $J_{<\lambda} \in N$.

El Corolario 3.1.11 nos dice que $\text{pcf}(\prod b_\lambda / J_{<\lambda}) = \lambda$ para cada $\lambda \in \mathbf{pcf}(a)$.

Recordemos que para N , submodelo elemental, definimos la función característica de N como

$$\chi_N(\alpha) = \sup(N \cap \alpha),$$

para cada $\alpha \in \text{ON}$.

Observación 4.1.4. *Para cualquier sucesión $\langle f_\gamma^\lambda : \gamma < \lambda \rangle \in \prod c \cap N$ tal que*

$$\text{para toda } k \in \prod b_\lambda \text{ existe } \gamma_0 < \lambda \text{ tal que } \gamma \geq \gamma_0 \Rightarrow k < f_\gamma^\lambda|_{b_\lambda} \text{ módulo } J_{<\lambda}.$$

Se tiene que $b_\lambda =_{J_{<\lambda}} \{\alpha \in c : f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\alpha) \geq \chi_N(\alpha)\}$.

Demostración. Primero, veamos que $b_\lambda \subseteq_{J_{<\lambda}} \{\alpha \in c : f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\alpha) \geq \chi_N(\alpha)\}$. Si esto es falso, $b' := b_\lambda \setminus \{\alpha \in c : f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\alpha) \geq \chi_N(\alpha)\} \notin J_{<\lambda}$. Definimos para $\alpha \in c$

$$h(\alpha) = \begin{cases} f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\alpha) & \text{si } \alpha \in b' \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, para cada $\alpha \in c$, $h(\alpha) < \chi_N(\alpha) = \sup_{i < \kappa^+} \chi_{N_i}(\alpha)$, es decir, existe $i < \kappa^+$ tal que $h(\alpha) < \chi_{N_i}(\alpha)$. Dado que $|c| = \kappa < \kappa^+$, podemos encontrar $i < \kappa^+$ tal que $h(\alpha) < \chi_{N_i}$.

Como $\chi_{N_i} \in N_{i+1} \subseteq N$, por la hipótesis de la afirmación, existe $\delta_0 \in N \cap \lambda$, tal que

$$\chi_{N_i}|_{b_\lambda} <_{J_{<\lambda}} f_{\delta_0}^\lambda|_{b_\lambda}.$$

Luego, $\delta_0 \in N \Rightarrow \delta_0 + 1 \in N \Rightarrow \chi_N(\lambda) > \delta_0 \Rightarrow \chi_{N_i}|_{b_\lambda} <_{J_{<\lambda}} f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda|_{b_\lambda}$. Se sigue que

$$h|_{b_\lambda} <_{J_{<\lambda}} f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda|_{b_\lambda}.$$

Lo cual es imposible pues, para todo $\alpha \in b' \subseteq b_\lambda$, $h(\alpha) = f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\alpha)$ y $b' \notin J_{<\lambda}$. Con esto hemos probado la primera contención.

Ahora, veremos que $\{\alpha \in c : f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\alpha) \geq \chi_N(\alpha)\} \subseteq_{J_{<\lambda}} b_\lambda$. Análogamente, supongamos que es falso y hagamos $d := \{\alpha \in c : f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\alpha) \geq \chi_N(\alpha)\} \setminus b_\lambda \notin J_{<\lambda}$. Por definición de b_λ , se sigue que $d \notin J_{<\lambda^+}$.

Como $\prod c / J_{<\lambda^+}$ es λ^+ -dirigido, $\langle f_\gamma^\lambda : \gamma < \lambda \rangle$ tiene una cota $g \in \prod c$ módulo $J_{<\lambda^+}$.

Por elementalidad, podemos tomar cota $g \in N$. Luego, $\text{ran}(g) \in N$ y como $|c| = \kappa \subseteq N$, tenemos que $\text{ran}(g) \subseteq N$. Así $g(\alpha) < \chi_N(\alpha)$, para toda $\alpha \in c$ y entonces

$$f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda <_{J_{<\lambda^+}} g < \chi_N.$$

Esto es imposible pues, para todo $\alpha \in d$, $f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\alpha) \geq \chi_N(\alpha)$ y $d \notin J_{<\lambda^+}$. □

Afirmación 1. Para cada $\lambda \in c = \text{pcf}(c)$, existe una sucesión $\langle f_\gamma^\lambda : \gamma < \lambda \rangle$ de elementos de $\prod c$ tal que para toda $k \in \prod b_\lambda$ existe $\gamma_0 < \lambda$ tal que $\gamma \geq \gamma_0 \Rightarrow k < f_\gamma^\lambda|_{b_\lambda}$ módulo $J_{<\lambda}$ y, para cada submodelo bueno N con $\langle f_\gamma^\lambda : \gamma < \lambda \rangle \in N$, se cumpla:

1. $f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda \leq \chi_N$,
2. $f_{f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\mu)}^\mu(\alpha) \leq f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\alpha)$ para cada $\alpha, \mu \in c$ con $\alpha \leq \mu < \lambda$ y $\text{cf}(f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\mu)) > \omega$.

Notemos que $f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\mu) < \mu$ y así el punto (2) tiene sentido.

Demostración. Para cada $\lambda \in c$, como $\text{tcf}(b_\lambda / J_{<\lambda}) = \lambda$, podemos fijar una sucesión $\langle f_\gamma^\lambda : \gamma < \lambda \rangle$ en $\prod c$ tal que $\langle f_\gamma^\lambda|_{b_\lambda} : \gamma < \lambda \rangle$ sea creciente y cofinal módulo $J_{<\lambda}$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que para cada $\gamma < \lambda$ de cofinalidad κ^+ , se tiene que

$$f_\gamma^\lambda(\alpha) = \min\{\sup\{f_\beta^\lambda(\alpha) : \beta \in C\} : C \text{ es un club en } \gamma\},$$

para cada $\alpha \in c$.

Por recursión sobre ω , definiremos sucesiones $\langle f_{\gamma,n}^\lambda : \gamma < \lambda \rangle$ de elementos de $\prod c$. Comenzamos con $f_{\gamma,0}^\lambda \equiv f_\gamma^\lambda$ para toda $\gamma < \lambda$. Para $n \in \omega$, definimos

$$f_{\gamma,n+1}^\lambda(\alpha) = \sup(\{f_{\gamma,n}^\lambda(\alpha)\} \cup \{f_{f_{\gamma,n}^\lambda(\mu),n}^\mu(\alpha) : \alpha \leq \mu < \lambda \wedge \mu \in c\}).$$

Hacemos $g_\gamma^\lambda(\alpha) = \sup_{n \in \omega} f_{\gamma,n}^\lambda(\alpha)$. Veremos que estas funciones son las buscadas. Como $g_\gamma^\lambda \geq f_{\gamma,0}^\lambda = f_\gamma^\lambda$, es fácil ver que $\langle g_\gamma^\lambda : \gamma < \lambda \rangle$ cumple la hipótesis de la Observación anterior.

Resta verificar los puntos (1) y (2) de la afirmación. Para el punto (2) veamos la siguiente subafirmación.

Subafirmación 1. Si $\text{cf}(g_\gamma^\lambda(\alpha)) > \omega$, entonces $\forall \delta \leq \mu(g_{g_\gamma^\lambda(\mu)}^\mu(\delta) \leq g_\gamma^\lambda(\delta))$.

Demostración. Como $\text{cf}(g_\gamma^\lambda(\alpha)) > \omega$ y $g_\gamma^\lambda(\mu) = \sup_{n \in \omega} f_{\gamma,n}^\lambda(\mu)$, debe suceder que para algún $n \in \omega$, $g_\gamma^\lambda(\mu) = f_{\gamma,n}^\lambda(\mu)$, para toda $m \geq n$. Por la definición de $f_{\gamma,m+1}^\lambda(\delta)$, para cada $m \geq n$ y cada $\delta \leq \mu$ tenemos

$$f_{g_\gamma^\lambda(\mu),m}^\mu(\delta) = f_{f_{\gamma,n}^\lambda(\mu),m}^\mu(\delta) \leq f_{\gamma,m+1}^\lambda(\delta).$$

Tomando $\sup_{n \in \omega}$ de ambos lados obtenemos $g_{g_\gamma^\lambda(\mu)}^\mu(\delta) \leq g_\gamma^\lambda(\delta)$.

□

Ahora, probaremos el punto (1). Para ello veamos la siguiente subafirmación. La cerradura de un conjunto A la entendemos como $\bar{A} := A \cup \{x : x \text{ es punto límite de } A\}$.

Subafirmación 2. *Para cada submodelo N tal que $\langle f_\gamma^\lambda : \gamma < \lambda \rangle \in N$. Si $\gamma \in \overline{N \cap \lambda}$, entonces para cada $\alpha \in c$, $g_\gamma^\lambda(\alpha) \in \overline{N \cap \theta}$.*

Demostración. Primero, veamos que si $\gamma \in \overline{N \cap \lambda}$, entonces $f_\gamma^\lambda(\alpha) \in \overline{N \cap \theta}$. El resultado es trivial si $\gamma \in N$.

Supongamos ahora que γ es un punto límite de $N \cap \lambda$ pero no pertenece a N , es decir, $N \cap \lambda$ es un club en γ . Sabemos que $\{\sup(N_i \cap \gamma) : i < \kappa^+\}$ es cofinal en $N \cap \gamma$, esto implica que $\text{cf}(\gamma) = \kappa^+$. Por nuestra suposición para γ de cofinalidad κ^+ , existe un club C de γ tal que

$$f_\gamma^\lambda(\alpha) = \sup_{\beta \in C} f_\beta^\lambda(\alpha).$$

Luego, $C \cap N \cap \lambda \subseteq C$ es un club de γ , entonces $f_\gamma^\lambda(\alpha) = \sup_{\beta \in C \cap N} f_\beta^\lambda(\alpha)$. Pero para cada $\beta \in C \cap N$ se tiene que $f_\beta^\lambda(\alpha) \in N$. Por lo tanto, $f_\gamma^\lambda(\alpha) \in \overline{N \cap \theta}$.

Tenemos entonces que $f_{\gamma,0}^\lambda(\alpha) = f_\gamma^\lambda(\alpha) \in \overline{N \cap \theta}$. Así, si $f_{\gamma,n}^\lambda(\alpha) \in \overline{N \cap \theta}$ para toda $\alpha \in c$, de la definición se sigue que $f_{\gamma,n+1}^\lambda(\alpha) \in \overline{N \cap \theta}$.

Finalmente, como $g_\gamma^\lambda(\alpha) = \sup_{n \in \omega} f_{\gamma,n}^\lambda(\alpha)$, tenemos que $g_\gamma^\lambda(\alpha) \in \overline{N \cap \theta}$.

□

Hagamos $\gamma = \chi_N(\lambda)$. Trivialmente $\gamma \in \overline{N \cap \lambda}$, la afirmación anterior implica que $g_\gamma^\lambda(\alpha) \in \overline{N \cap \theta} \cap \alpha$. Por lo tanto, $g_\gamma^\lambda(\alpha) \leq \chi_N(\alpha)$ para toda $\alpha \in c$.

□

Para cada $\lambda \in c = \text{pcf}(c)$, fijemos una sucesión $\langle f_\gamma^\lambda : \gamma < \lambda \rangle$ de elementos de $\prod c$ como en el enunciado de la Afirmación. Elijamos un submodelo elemental bueno N tal que $\langle f_\gamma^\lambda : \gamma < \lambda \rangle \in N$ para cada $\lambda \in c$. Definamos

$$b_\lambda^* := \{\alpha \in c : f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\alpha) = \chi_N(\alpha)\}.$$

De la Observación y el punto (1) de la Afirmación, se sigue que $b_\lambda =_{J_{<\lambda}} b_\lambda^*$. Por tanto, b_λ^* genera $J_{<\lambda^+}$ sobre $J_{<\lambda}$.

Para terminar, verifiquemos transitividad de estos nuevos generadores. Sea $\mu \in b_\lambda^*$ y $\delta \in b_\mu^*$. Queremos ver que $\delta \in b_\lambda^*$, es decir, $f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\delta) = \chi_N(\delta)$.

Por la definición de b_λ^* , para $\mu \in b_\lambda^*$, tenemos

$$\text{cf}(f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\mu)) = \text{cf}(\chi_N(\mu)) = \text{cf}(\sup_{i < \kappa^+} \chi_{N_i}(\mu)) = \kappa^+ > \omega.$$

Por tanto, podemos utilizar el punto (2) de la Afirmación. Entonces, aplicando respectivamente (1), (2), $\mu \in b_\lambda^*$ y $\delta \in b_\mu^*$ tenemos que:

$$\chi_N(\delta) \geq f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\delta) \geq f_{f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\mu)}^\mu(\delta) = f_{\chi_N(\mu)}^\mu(\delta) = \chi_N(\delta).$$

Se sigue que $f_{\chi_N(\lambda)}^\lambda(\delta) = \chi_N(\delta)$.

□

Corolario 4.1.5. *Si a es un conjunto de cardinales regulares tal que $\min(a) > |\text{pcf}(a)|$ y $c = \text{pcf}(a)$. Entonces podemos elegir generadores $b_\lambda(c)$ transitivos tales que $\text{pcf}(b_\lambda(c)) = b_\lambda(c)$.*

Demostración. Para una mejor lectura, usaremos simplemente b_λ en vez de $b_\lambda(c)$

Tomemos $\{b_\lambda : \lambda \in \text{pcf}(c)\}$ generadores transitivos. Por recursión, definiremos nuevos generadores $b_\lambda^* = \text{pcf}(b_\lambda^*)$ sin destruir transitividad.

Para $\lambda = \min(\text{pcf}(c))$, hacemos $b_\lambda^* = b_\lambda = \{\lambda\}$, por Observación 3.2.6. Supongamos ahora que para algún $\lambda \in \text{pcf}(c)$ ya hemos definido b_θ^* para todo $\theta \in \text{pcf}(c) \cap \lambda$.

Notemos que $\text{pcf}(b_\lambda) \subseteq \lambda + 1$. En efecto, cualquier ultrafiltro sobre b_λ lo podemos extender a un ultrafiltro D sobre a tal que $b_\lambda \in D$. Dado que $b_\lambda \in J_{\lambda^+}(c)$, se sigue que $\text{cf}(\prod a/D) \leq \lambda$. También notemos que:

$$\min(b_\lambda) \geq \min(c) = \min(a) > |c| = |\text{pcf}(c)| \geq |\text{pcf}(b_\lambda)|.$$

Por tanto, del Lema 2.1.10, $\text{pcf}(b_\lambda) = \text{pcf}(\text{pcf}(b_\lambda))$.

Por el Lema 3.2.7, como $\text{pcf}(b_\lambda) \subseteq \text{pcf}(c) = c$, podemos encontrar $\theta_1, \dots, \theta_n \in \text{pcf}(\text{pcf}(b_\lambda)) = \text{pcf}(b_\lambda)$ tales que $\text{pcf}(b_\lambda) \subseteq b_{\theta_1}^* \cup \dots \cup b_{\theta_n}^* \cup b_\lambda$. El último b_λ lo podemos poner sin pérdida de generalidad. Definamos $b_\lambda^* := b_{\theta_1}^* \cup \dots \cup b_{\theta_n}^* \cup b_\lambda$. Claramente, b_λ^* genera $J_{<\lambda^+}(c)$ sobre $J_{<\lambda}(c)$.

Veamos que $\text{pcf}(b_\lambda^*) = b_\lambda^*$. Ya sabemos que $b_\lambda^* \subseteq \text{pcf}(b_\lambda^*)$. Por otro lado,

$$\text{pcf}(b_\lambda^*) = \bigcup_{k=1}^n \text{pcf}(b_{\theta_k}^*) \cup \text{pcf}(b_\lambda) = \bigcup_{k=1}^n b_{\theta_k}^* \cup \text{pcf}(b_\lambda) \subseteq \bigcup_{k=1}^n b_{\theta_k}^* \cup b_\lambda = b_\lambda^*.$$

La contención se da por definición de $\theta_1, \dots, \theta_n$. Por tanto, $\text{pcf}(b_\lambda^*) = b_\lambda^*$.

Finalmente, verifiquemos transitividad. Por inducción sobre λ veremos (por inducción sobre μ) que $\mu \in b_\lambda^* \Rightarrow b_\mu^* \subseteq b_\lambda^*$. Por definición de b_λ^* , si $\mu \in b_{\theta_k}^*$ para algún k , por la hipótesis de inducción sobre λ tenemos que $b_\mu^* \subseteq b_{\theta_k}^* \subseteq b_\lambda^*$.

Si $\mu \in b_\lambda$, por transitividad, $b_\mu \subseteq b_\lambda \subseteq b_\lambda^*$. Como $b_\mu^* = b_{\delta_1}^* \cup \dots \cup b_{\delta_m}^* \cup b_\mu$, para algunos $\delta_1, \dots, \delta_m \in \text{pcf}(b_\mu) \subseteq \text{pcf}(b_\lambda) \subseteq b_\lambda^*$, se sigue por hipótesis de inducción sobre μ que $b_{\delta_k}^* \subseteq b_\lambda^*$ para cada $k \leq m$. Por lo tanto, $b_\mu^* \subseteq b_\lambda^*$.

□

Probaremos una breve proposición que nos simplificará la demostración del siguiente teorema.

Proposición 4.1.6. *Si a es un conjunto de cardinales regulares tal que $\min(a) > |c|$, donde $c = \text{pcf}(a)$. Sea $d \subseteq c$ y $\mu \in \text{pcf}(d)$. Entonces existe $e \subseteq d$ tal que $\mu = \max(\text{pcf}(e))$ y $\text{pcf}(e) \cap \mu$ no tiene elemento máximo.*

Demostración. Comencemos fijando generadores $b_\lambda(c)$ transitivos tales que $\text{pcf}(b_\lambda(c)) = b_\lambda(c)$.

Por la Observación 3.2.5, sabemos que existe ultrafiltro D sobre c tal que $d \in D$ y $\mu = \text{cf}(\prod c/D) = \min\{\lambda : b_\lambda(c) \in D\}$ y, por tanto, $b_\mu(c) \in D$. Haciendo $d_0 = d \cap b_\mu(c)$, vemos que $d_0 \in D$ y entonces $\mu \in \text{pcf}(d_0)$. Por otro lado, por la elección de los generadores tenemos que

$$d_0 \subseteq b_\mu(c) \Rightarrow \text{pcf}(d_0) \subseteq \text{pcf}(b_\mu(c)) = b_\mu(c).$$

Luego, $b_\mu(c) \in J_{<\lambda^+}(c)$ y por la Proposición 3.1.4 concluimos que $\text{pcf}(d_0) \subseteq b_\mu(c) \subseteq \mu + 1$.

Supongamos ahora que $\text{pcf}(d_0) \cap \mu$ tiene elemento máximo $\mu_1 < \mu$. Definimos $d_1 = d_0 \setminus b_{\mu_1}(c)$. Veamos que $\mu \in \text{pcf}(d_1)$. Tomemos un ultrafiltro D sobre c tal que $d_0 \in D$ y $\mu = \text{cf}(\prod c/D)$. Como $b_{\mu_1}(c) \in J_{<\mu}(c)$, entonces $b_{\mu_1}(c) \notin D$, de lo contrario $\text{cf}(\prod c/D) < \mu$. Se sigue que $d_1 \in D$ y restringiendo D a d_1 concluimos que $\mu \in \text{pcf}(d_1)$.

Cualquier ultrafiltro U sobre d_1 lo podemos extender a un ultrafiltro D sobre c . Luego, $\text{cf}(\prod d_1/U) = \text{cf}(\prod c/D) = \min\{\lambda : b_\lambda(c) \in D\} \neq \mu_1$ dado que $d_1 \cap b_{\mu_1}(c) = \emptyset \Rightarrow b_{\mu_1}(c) \notin D$. Por tanto, $\mu_1 \notin \text{pcf}(d_1)$.

Repetimos este proceso mientras $\text{pcf}(d_k) \cap \mu$ tenga máximo. Para algún n finito, $\text{pcf}(d_n) \cap \mu$ no tendrá máximo. De lo contrario, $\{\mu_k : k \in \omega\}$ sería una sucesión estrictamente decreciente infinita.

Vemos que $d_n \subseteq d_0 \Rightarrow \text{pcf}(d_n) \subseteq \text{pcf}(d_0)$. Por lo tanto, $\mu = \max(\text{pcf}(d_n))$ y $\text{pcf}(d_n) \cap \mu$ no tiene elemento máximo. □

Teorema 4.1.7. *Suponga que a es un conjunto de cardinales regulares tal que $\min(a) > |\text{pcf}(a)|$. Sean $c = \text{pcf}(a)$, $d \subseteq c$ y $\mu \in \text{pcf}(d)$. Entonces existe $d' \subseteq d$, $|d'| \leq |a|$, tal que $\mu \in \text{pcf}(d')$.*

Demostración. Tomemos generadores $b_\lambda(c)$ transitivos tales que $\text{pcf}(b_\lambda(c)) = b_\lambda(c)$. Haremos la demostración por inducción sobre $\mu \in \text{pcf}(d)$. De la Proposición 4.1.6 podemos suponer que $\mu = \max(\text{pcf}(d))$ y $\text{pcf}(d) \cap \mu$ no tiene elemento máximo. Notemos que

$$\min(d) \geq \min(c) = \min(a) > |c| = |\text{pcf}(c)| \geq |\text{pcf}(d)|.$$

Por tanto, $\text{pcf}(\text{pcf}(d)) = \text{pcf}(d)$.

Sea $\kappa = \text{cf}(\sup(\text{pcf}(d) \cap \mu))$ y $s = \{\mu_i : i < \kappa\} \subseteq \text{pcf}(d) \cap \mu$ cofinal en $\sup(\text{pcf}(d) \cap \mu)$. Veamos que $\mu \in \text{pcf}(s)$. En efecto, sea D un ultrafiltro sobre s que contenga los segmentos finales de s . Entonces $\delta = \text{cf}(\prod s/D) > \mu_i$ para todo $i < \kappa$. Por otro lado, $\delta \in \text{pcf}(s) \subseteq \text{pcf}(\text{pcf}(d)) = \text{pcf}(d)$. Por lo tanto, $\mu = \delta$.

Afirmación 1. *Existe $e \subseteq s$ tal que $|e| \leq |a|$ y $\mu \in \mathbf{pcf}(e)$.*

Demostración. Podemos encontrar $\Lambda \subseteq \kappa$ tal que $|\Lambda| \leq |a|$ y $a \cap \bigcup_{\xi < \kappa} b_{\mu_\xi}(c) \subseteq \bigcup_{i \in \Lambda} b_{\mu_i}(c)$. Esto es fácil de ver, para todo $\lambda \in a \cap \bigcup_{\xi < \kappa} b_{\mu_\xi}(c)$ tomemos $i < \kappa$ tal que $\lambda \in b_{\mu_i}(c)$.

Definamos $e := \{\mu_i : i \in \Lambda\}$. Por el Lema 3.2.7, encontramos $\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbf{pcf}(e)$ tales que $e \subseteq b_{\delta_1}(c) \cup \dots \cup b_{\delta_n}(c)$.

Si $\forall k \leq n (\delta_k < \mu)$ podemos encontrar $i < \kappa$ tal que $\delta_k < \mu_i$ para toda $k \leq n$. Consideremos

$$A = a \cap (b_{\mu_i}(c) \setminus (b_{\delta_1}(c) \cup \dots \cup b_{\delta_n}(c))).$$

Primero, veamos que $A \neq \emptyset$. Existe ultrafiltro D sobre a tal que $\mu_i = \text{cf}(\prod a/D)$. Como $a \subseteq c$, podemos extender D a un ultrafiltro U sobre c tal que $a \in U$. Luego, $\mu_i = \text{cf}(\prod c/U) = \min\{\lambda : b_\lambda \in U\}$, esto implica que $b_{\mu_i}(c) \in U$ y, por nuestra elección de μ_i , $b_{\delta_1}(c) \cup \dots \cup b_{\delta_n}(c) \notin U$. Por tanto, $A \in U \Rightarrow A \neq \emptyset$.

Por otro lado, $A = \emptyset$. En efecto, para toda $j \in \Lambda$, $\mu_j \in e \subseteq b_{\delta_1}(c) \cup \dots \cup b_{\delta_n}(c)$. Por transitividad de los generadores, $\bigcup_{j \in \Lambda} b_{\mu_j}(c) \subseteq b_{\delta_1}(c) \cup \dots \cup b_{\delta_n}(c)$. Por la elección de Λ ,

$$a \cap b_{\mu_i}(c) \subseteq \bigcup_{j \in \Lambda} b_{\mu_j}(c) \subseteq b_{\delta_1}(c) \cup \dots \cup b_{\delta_n}(c).$$

Por tanto, $A = \emptyset$.

Por lo tanto, para algún $k \leq n$, $\delta_k \geq \mu$. Pero $\mathbf{pcf}(e) \subseteq \mathbf{pcf}(\mathbf{pcf}(d)) = \mathbf{pcf}(d)$ y $\mu = \max(\mathbf{pcf}(d))$. Es decir, $\delta_k = \mu$. □

Para concluir con la demostración del teorema, tomemos e como en la afirmación. Como $e \subseteq \mathbf{pcf}(d) \cap \mu$, por hipótesis de inducción, para cada $\delta \in e$, podemos encontrar $d_\delta \subseteq d$ tal que $|d_\delta| \leq |a|$ y $\delta \in \mathbf{pcf}(d_\delta)$. Sea $d' = \bigcup_{\delta \in e} d_\delta$. Entonces $|d'| \leq |a| \cdot |a| = |a| < \min(a) \leq \min(d')$.

Por definición de d' , $e \subseteq \mathbf{pcf}(d')$. Esto implica que $\mu \in \mathbf{pcf}(e) \subseteq \mathbf{pcf}(\mathbf{pcf}(d')) = \mathbf{pcf}(d')$. Con lo cual, concluimos la demostración. □

Recordemos que para cardinales regulares $\mu < \kappa$ y un conjunto $T \subseteq \{\alpha < \kappa : \text{cf}(\alpha) = \mu\}$ estacionario en κ , $\diamond_{\text{club}}(\kappa, \mu)(T)$ significa que :

Existe una sucesión $\langle S_\alpha : \alpha \in T \rangle$ tal que:

1. $S_\alpha \subseteq \alpha$ es un club en α , para toda $\alpha \in T$,
2. Para cada club $C \subseteq \kappa$, $\{\alpha \in T : S_\alpha \subseteq C\}$ es estacionario en κ .

En el Lema 1.5.1, probamos que $\diamond_{\text{club}}(\kappa, \mu)(T)$ es un teorema de **ZFC** cuando $\mu^+ < \kappa$.

Lema 4.1.8. *Suponga que $\kappa \geq \omega$ es un cardinal y $\tau > \kappa$ un ordinal. Si existe una función $F : \mathcal{P}(\tau) \rightarrow \text{ON}$ tal que para todo $X, Y \in \mathcal{P}(\tau)$:*

1. $X \subseteq Y \Rightarrow F(X) \leq F(Y)$,

2. $F(X) \geq \sup(X)$,
3. Si $\gamma = F(X)$, entonces existe $X' \subseteq X, |X'| \leq \kappa$, tal que $\gamma = F(X')$,
4. Si $\gamma < \tau$ y $\text{cf}(\gamma) > \omega$, entonces existe $D \subseteq \gamma$ club tal que $F(D) \leq \gamma$.

Entonces tenemos que $\tau < \kappa^{+4}$.

Demostración. Supongamos que $\tau \geq \kappa^{+4}$. Para $T = \{\alpha < \kappa^{+3} : \text{cf}(\alpha) = \kappa^+\}$, del Lema 1.5.1 fijemos una sucesión $s = \langle S_\alpha : \alpha \in T \rangle$ testigo de $\diamond_{\text{club}}(\kappa^{+3}, \kappa^+)$.

Sea θ un cardinal suficientemente grande. Fijemos una secuencia de aproximación $\langle M_\beta : \beta \leq \kappa^{+3} \rangle$ de submodelos elementales de $H(\theta)$ tal que $|M_\beta| = \kappa^{+3}$, para cada $\beta < \kappa^{+3}$, y $\kappa^{+3} \cup \{F, \kappa^{+4}, s\} \subseteq M_0$.

Como $|M_\beta| = \kappa^{+3}$ y $\kappa^{+3} \subseteq M_\beta$, entonces $\gamma_\beta := \sup(M_\beta \cap \kappa^{+4}) \in \kappa^{+4}$ y $\gamma_\beta \geq \kappa^{+3}$ para cada $\beta \leq \kappa^{+3}$. Notemos que $\text{cf}(\gamma_\beta) = \kappa^{+3}$.

Por el punto (4), podemos encontrar $D \subseteq \gamma_{\kappa^{+3}}$ club tal que $F(D) \leq \gamma_{\kappa^{+3}}$. Notemos que $\{\beta < \kappa^{+3} : \gamma_\beta \in D\}$ es un club en κ^{+3} . Por $\diamond_{\text{club}}(\kappa^{+3}, \kappa^+)$, existe $\alpha < \kappa^{+3}$ con $\text{cf}(\alpha) = \kappa^+$ tal que $S_\alpha \subseteq \{\beta < \kappa^{+3} : \gamma_\beta \in D\}$. Hacemos,

$$S_\alpha^* = \{\gamma_\beta : \beta \in S_\alpha\}.$$

Vemos que S_α^* es un club en γ_α . Del punto (2), se sigue que $F(S_\alpha^*) \geq \gamma_\alpha$.

Por (3), existe $X' \subseteq S_\alpha^*$, con $|X'| = \kappa$ y $F(X') = F(S_\alpha^*)$. Como $\text{cf}(\alpha) = \kappa^+$, podemos encontrar $\beta < \alpha$ tal que $X' \subseteq E_\alpha^\beta$, donde $E_\alpha^\beta := S_\alpha^* \cap \gamma_\beta = \{\gamma_\xi : \xi \in S_\alpha \cap \beta\}$. De $\{S_\alpha, \beta\} \subseteq M_0$ y por ser $\langle M_\beta : \beta \leq \kappa^{+3} \rangle$ secuencia de aproximación, tenemos que $E_\alpha^\beta \in M_{\beta+1}$. En particular, $E_\alpha^\beta \in M_\alpha \Rightarrow F(E_\alpha^\beta) \in M_\alpha$ pues $F \in M_0$. Luego,

$$F(E_\alpha^\beta) \leq F(S_\alpha^*) \leq F(D) \leq \gamma_{\kappa^{+3}} < \kappa^{+4}.$$

Como $F(E_\alpha^\beta) + 1 \in M_\alpha$, concluimos que $F(S_\alpha^*) = F(X') \leq F(E_\alpha^\beta) < \sup(M_\alpha \cap \kappa^{+4}) = \gamma_\alpha$. Una contradicción de $F(S_\alpha^*) \geq \gamma_\alpha$.

□

Con esto probaremos uno de los resultados más importantes dentro de la Teoría de pcf .

Teorema 4.1.9. Si a es un conjunto de cardinales regulares, con $\text{mín}(a) > |\text{pcf}(a)|$, y $c \subseteq \text{pcf}(a)$ es un intervalo de cardinales regulares, entonces $|c| \leq |a|^{+3}$.

Demostración. Supongamos que el teorema es falso y tomemos $c \subseteq \text{pcf}(a)$ intervalo de cardinales regulares de cofinalidad $|a|^{+4}$. Vemos que $\text{mín}(c) \geq \text{mín}(a) > |\text{pcf}(a)| \geq |c|$. Además, los elementos de c son cardinales sucesores por Proposición 1.1.10.

Suponemos que $\text{mín}(c) = \aleph_{\delta+1}$ y entonces $\sup(c) = \aleph_{\delta+\tau}$ donde τ es un ordinal mayor a $|a|^{+4}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\tau = |a|^{+4}$.

Encontraremos una contradicción haciendo $\kappa := |a|$ y definiendo una función $F : \mathcal{P}(\tau) \rightarrow \text{ON}$ que cumpla con las propiedades del Lema 4.1.8.

Para $X \subseteq \tau$, notemos que $\{\aleph_{\delta+\eta+1} : \eta \in X\} \subseteq c$. Podemos definir $X^* = \{\gamma < \tau : \aleph_{\delta+\gamma+1} \in \text{pcf}(\{\aleph_{\delta+\eta+1} : \eta \in X\})\}$. Así, definimos;

$$F(X) = \begin{cases} \text{máx}(X^*) & \text{si } \text{máx}(X^*) < \kappa^{+4} \\ \kappa^{+4} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para (1), si $X \subseteq Y$, $F(X) \leq F(Y)$ se sigue pues $\text{pcf}(\{\aleph_{\delta+\eta+1} : \eta \in X\}) \subseteq \text{pcf}(\{\aleph_{\delta+\eta+1} : \eta \in Y\})$.

Si $X \subseteq \tau = \kappa^{+4}$, dado que $X \subseteq X^*$, se sigue que $\sup(X) \leq \text{máx}(X^*)$. Esto verifica (2).

Veamos ahora (3). Supongamos que $\gamma = F(X)$ para algún $X \subseteq \tau$. Esto quiere decir que $\aleph_{\delta+\gamma+1} \in \text{pcf}(\{\aleph_{\delta+\eta+1} : \eta \in X\})$. Por el Teorema 4.1.7, encontramos $Y \subseteq X$, $|Y| \leq \kappa$, tal que $\aleph_{\delta+\gamma+1} \in \text{pcf}(\{\aleph_{\delta+\eta+1} : \eta \in Y\}) \subseteq \text{pcf}(\{\aleph_{\delta+\eta+1} : \eta \in X\})$ y se sigue que $\text{máx}(Y^*) = \aleph_{\delta+\gamma+1} = \text{máx}(X^*)$. Por tanto, $F(Y) = F(X)$.

Finalmente, verifiquemos el punto (4). Tomemos $\gamma < \tau$ de cofinalidad no numerable. Hagamos $\lambda = \aleph_{\delta+\gamma}$, $n = 1$, $C = \{\aleph_{\delta+\alpha} : \alpha < \gamma \wedge \aleph_{\delta+\alpha+1} \in c\}$ y $c' = \bigcup_{1 \leq k < \omega} C^{+k}$. Vemos que C es un club en $[\text{cf}(\lambda), \lambda)$ de $\text{otp}(C) = \text{cf}(\lambda)$ pues c es un intervalo de cardinales regulares. Del Lema 4.1.2, encontramos $B \subseteq C$ club de λ tal que $B^{+1} \subseteq b_{\lambda^+}(c')$, esto implica que $\text{máx}(\text{pcf}(B^{+1})) \leq \lambda^+ = \aleph_{\delta+\gamma+1}$ pues $b_{\lambda^+}(c') \in J_{<\lambda^+}(c')$. Por tanto, $D = \{\alpha < \gamma : \aleph_{\delta+\alpha} \in B\}$ es un club en γ tal que $F(D) \leq \gamma$.

Con esto F cumple las propiedades del Lema 4.1.8 y $\tau < \kappa^{+4}$. Una contradicción. $\square$

Del Teorema Principal y el Teorema 4.1.9, concluimos que si a es un intervalo de cardinales regulares, entonces $|\text{pcf}(a)| \leq |a|^{+3}$. Hasta ahora es la mejor cota que tenemos para $|\text{pcf}(a)|$.

Problema 4.1.10. *¿Será cierto que $|\text{pcf}(a)| = |a|$?*

Capítulo 5

Aplicaciones

Existen varias aplicaciones de la teoría de **pcf** en diversas áreas, entre las que destacan la construcción de álgebras de Jonsson en sucesores de cardinales regulares, cálculo de particiones, cofinalidades en órdenes parciales y aritmética cardinal. Sin embargo, en el presente documento solamente presentaremos dos teoremas de aritmética cardinal que Shelah probó utilizando resultados de **pcf**.

Uno puede realizar la suma y el producto de cardinales κ y λ , que en los dos casos basta con tomar $\max\{\kappa, \lambda\}$. La historia es completamente diferente a la hora de hacer exponenciación con números cardinales. Incluso, se puede probar usando técnicas de forcing, que muchos resultados son independientes de **ZFC**. Por ejemplo, Easton demostró que si $F : \mathbf{CN} \rightarrow \mathbf{CN}$ es una (clase) función que cumple con:

1. $F(\sigma) \leq F(\tau)$, donde $\omega \leq \sigma < \tau$,
2. $\text{cf}(F(\tau)) > \tau$ para cada $\tau > \omega$.

Entonces existe un modelo M de **ZFC** tal que

$$M \models \forall \tau \geq \omega (\tau \text{ es regular} \Rightarrow 2^\tau = F(\tau)).$$

Sugiriéndonos de cierta manera una gran libertad a la hora de hacer exponenciación, sin embargo, el teorema sólo es válido para τ regulares.

En vistas de esto, Solovay formula dos preguntas acerca de cardinales singulares:

- ¿Es posible que para algún cardinal singular λ , se tenga que $(\forall \tau : \omega \leq \tau < \lambda)(2^\tau = \tau^+)$ pero $2^\lambda > \lambda^+$?
- ¿Si λ es un cardinal singular límite fuerte, es posible dar una cota de 2^λ en **ZFC**?

Respecto a la primera pregunta, Magidor demuestra en 1970 que es consistente con **ZFC** que $\forall n \in \omega (2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1})$ pero $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2}$. Parecía que la respuesta era afirmativa, sin embargo, en 1974, Silver demuestra que si λ es un cardinal singular de cofinalidad no numerable y $\{\tau < \lambda : 2^\tau = \tau^+\}$ es estacionario en λ , entonces $2^\lambda = \lambda^+$.

Para la segunda pregunta, el teorema de Galvin-Hajnal nos da una cota para $2^{\aleph_\alpha}$ en el caso de que $\aleph_\alpha$ es un límite fuerte de cofinalidad no numerable, esta cota es $2^{\aleph_\alpha} < \aleph_{(|\alpha|^\kappa)^+}$, donde $\kappa = \text{cf}(\alpha)$.

En la primera sección de este capítulo, demostraremos que, si δ es un ordinal límite, entonces $\aleph_\delta^{|\delta|} < \aleph_{|\delta|+4} \cdot (2^{|\delta|})^+$. Este resultado en particular nos da que, si $\aleph_\omega$ es límite fuerte, entonces $2^{\aleph_\omega} = \aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4}$.

En la segunda sección, demostraremos una generalización del teorema de Galvin-Hajnal: para cada δ límite, $\aleph_\delta^\kappa < \aleph_{(|\delta|^\kappa)^+}$, donde $\kappa = \text{cf}(\delta)$. En particular, si $\aleph_\delta$ es límite fuerte, entonces $2^{\aleph_\delta} = \aleph_\delta^\kappa < \aleph_{(|\delta|^\kappa)^+}$.

Para estos dos resultados, demostraremos dos teoremas de gran importancia dentro de la teoría de **pcf**. El primero de ellos es que para intervalos de cardinales regulares a con $\min(a)^{|a|} < \sup(a)$, entonces $\max(\text{pcf}(a)) = |\prod a|$.

Para la demostración del segundo resultado, hacemos una generalización $\text{pcf}_\mu(a)$ y demostramos que bajo ciertas condiciones se cumple que $\sup(\text{pcf}_\mu(a)) = \sup(a)^\mu$.

5.1. Primer teorema

Proposición 5.1.1. *Supongamos que a es un conjunto de cardinales regulares y I es un ideal sobre a tal que $\lambda = \text{tcf}(\prod a/I)$. Entonces existe una sucesión $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ de $\prod a$ creciente y cofinal módulo I tal que, para cada $\gamma < \lambda$ con $\text{cf}(\gamma) = |a|^+$, existe un club C_γ en γ tal que*

$$f_\gamma(\alpha) = \sup\{f_\xi(\alpha) : \xi \in C_\gamma\},$$

para cada $\alpha \in a$.

Demostración. Comencemos fijando $\langle g_\nu : \nu < \lambda \rangle$ una sucesión creciente y cofinal módulo I y hagamos $f_0 = g_0$.

Para $\gamma < \lambda$ de $\text{cf}(\gamma) \neq |a|^+$, podemos elegir $g_{\nu(\gamma)}$ tal que $f_\xi <_I g_{\nu(\gamma)}$ para toda $\xi < \gamma$. Hagamos $f_\gamma = g_{\nu(\gamma)}$.

Supongamos ahora que $\gamma < \lambda$ y $\text{cf}(\gamma) = |a|^+$. Definamos

$$f_\gamma(\alpha) = \min\{\sup\{f_\xi(\alpha) : \xi \in C\} : C \text{ es un club en } \gamma\},$$

para cada $\alpha \in a$. Notemos que $f_\gamma \in \prod a$ pues $\min(a) > |a|^+$.

Para cada $\alpha \in a$, elijamos club E_α en γ tal que $f_\gamma(\alpha) = \sup\{f_\xi(\alpha) : \xi \in E_\alpha\}$. Si hacemos $C_\gamma := \bigcap_{\alpha \in a} E_\alpha$, C_γ es club en γ pues claramente $\gamma \geq |a|^+ > |a|$.

Además, dado que C_γ es cofinal en γ , se sigue que $f_\xi <_I f_\gamma$, para toda $\xi < \gamma$.

□

Lema 5.1.2. *Sea a un conjunto de cardinales regulares tal que $2^{|a|} < \min(a)$. Para θ cardinal regular suficientemente grande, diremos que $N \prec H(\theta)$ es ‘bueno’ si*

- $|N| = \min(a)$,

- Existe una secuencia de aproximación $\langle N_i : i < |a|^+ \rangle$ tal que $N = \bigcup_{i < |a|^+} N_i$,
- $a \in N$ y $\min(a) \subseteq N$.

Entonces $|\{\chi_N : N \text{ es bueno}\}| \leq \max(\mathbf{pcf}(a))$, donde $\chi_N : a \rightarrow \mathbf{ON}$, definida como $\chi_N(\alpha) = \sup(N \cap \alpha)$.

Demostración. Para una mejor lectura consideraremos $b_\lambda := b_\lambda(a)$ y $J_{<\lambda} := J_{<\lambda}(a)$.

Consideremos un buen orden $<^*$ para $H(\theta)$. De la Proposición 3.1.15, para cada N bueno tenemos que $\mathbf{pcf}(a) \cup \{\mathbf{pcf}(a)\} \subseteq N$.

Del Corolario 3.1.11, tenemos que $\text{tcf}(\prod b_\lambda / J_{<\lambda}) = \lambda$. Para cada $\lambda \in \mathbf{pcf}(a)$, tomemos la $<^*$ -mínima sucesión $\langle f_\gamma^\lambda : \gamma < \lambda \rangle$ tal que $\langle f_\gamma^\lambda | b_\lambda : \gamma < \lambda \rangle$ sea como en la Proposición 5.1.1. Entonces $\langle f_\gamma^\lambda : \gamma < \lambda \rangle \in N$, para cada N bueno.

Afirmación 1. Si N es bueno, $\lambda \in \mathbf{pcf}(a)$ y $\eta = \sup(N \cap \lambda)$, entonces

$$f_\eta^\lambda \leq \chi_N \quad y \quad f_\eta^\lambda | b_\lambda = \chi_N | b_\lambda \text{ módulo } J_{<\lambda}.$$

Demostración. Primero, veamos que $f_\eta^\lambda \leq \chi_N$.

Claramente, η es un ordinal límite. Por definición de secuencia de aproximación, $E := \{\chi_{N_i}(\eta) : i < |a|^+\} \subseteq N$ es un club en η . Además, como $|a|^+$ es regular, cualquier subconjunto de cardinalidad menor es subconjunto de algún N_i . Por tanto, $\text{cf}(\eta) = |a|^+$.

Haciendo $C := E \cap C_\eta$, tenemos que $f_\eta^\lambda(\alpha) = \sup\{f_j^\lambda(\alpha) : j \in C\}$, para cada $\alpha \in a$. Por otro lado, para cada $j \in C \subseteq N$, tenemos que $f_j^\lambda(\alpha) \in N \cap \alpha$. Tomando supremo se sigue que

$$f_\eta^\lambda(\alpha) = \sup\{f_j^\lambda(\alpha) : j \in C\} \leq \sup(N \cap \alpha) = \chi_N(\alpha),$$

para cada $\alpha \in a$. Es decir, $f_\eta^\lambda \leq \chi_N$.

Para probar la segunda afirmación, resta demostrar que $f_\eta^\lambda | b_\lambda \geq \chi_N | b_\lambda$ módulo $J_{<\lambda}$, es decir,

$$c := \{\alpha \in b_\lambda : f_\eta^\lambda(\alpha) < \chi_N(\alpha)\} \in J_{<\lambda}.$$

Veamos que para toda $i < |a|^+$, $\chi_{N_i} | b_\lambda < f_\eta^\lambda | b_\lambda$ módulo $J_{<\lambda}$. En efecto, $\chi_{N_i} \in N$, pues $N_i \in N$. Por elementaridad, existe $j \in N$ tal que $j < \lambda$ y

$$\chi_{N_i} | b_\lambda < f_j^\lambda | b_\lambda \text{ módulo } J_{<\lambda}.$$

Por definición de η , tenemos que $j < \eta$ y, por tanto,

$$\chi_{N_i} | b_\lambda <_{J_{<\lambda}} f_j^\lambda | b_\lambda \leq_{J_{<\lambda}} f_\eta^\lambda | b_\lambda.$$

Ahora, notemos que para cada $\alpha \in c$, existe $\gamma(\alpha) \in N$ tal que $f_\eta^\lambda(\alpha) < \gamma(\alpha)$. Como $c \subseteq a$, existe $i < |a|^+$ tal que $\{\gamma(\alpha) : \alpha \in c\} \subseteq N_i$. Se sigue entonces que

$$f_\eta^\lambda(\alpha) < \chi_{N_i},$$

para toda $\alpha \in c$.

Por lo tanto, $c \subseteq \{\alpha \in b_\lambda : f_\eta^\lambda(\alpha) \leq \chi_{N_i}(\alpha)\} \in J_{<\lambda}$.

□

Definiremos una sucesión decreciente $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_n$ de elementos de $\mathbf{pcf}(a)$ y subconjuntos de a tales que $a \supseteq A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_n = \emptyset$.

Comencemos con $\lambda_0 := \kappa$, $\eta_0 := \sup(N \cap \lambda_0)$ y $A_0 := \{\alpha \in a : f_{\eta_0}^{\lambda_0}(\alpha) < \chi_N(\alpha)\}$. Notemos que al ser $\lambda_0 = \max(\mathbf{pcf}(a))$, podemos considerar $b_{\lambda_0} = a$ y, por la Afirmación anterior, $A_0 \in J_{<\lambda_0}$.

Supongamos que ya hemos definido λ_m , η_m y $A_m \in J_{<\lambda_m}$ para algún $m \geq 0$. Si $A_m \neq \emptyset$, sea λ_{m+1} el mínimo cardinal tal que $A_m \in J_{<\lambda_{m+1}^+} \setminus J_{<\lambda_{m+1}}$. Claramente, $\lambda_{m+1} < \lambda_m$. Definamos entonces $\eta_{m+1} := \sup(N \cap \lambda_{m+1})$ y

$$A_{m+1} := \{\alpha \in A_m : f_{\eta_{m+1}}^{\lambda_{m+1}}(\alpha) < \chi_N(\alpha)\}.$$

Veamos que $A_{m+1} \in J_{<\lambda_{m+1}}$. En efecto, $A_m \setminus b_{\lambda_{m+1}} \in J_{<\lambda_{m+1}}$ y, por la Afirmación anterior, $\{\alpha \in b_{\lambda_{m+1}} : f_{\eta_{m+1}}^{\lambda_{m+1}}(\alpha) < \chi_N(\alpha)\} \in J_{<\lambda_{m+1}}$. Entonces

$$A_{m+1} \subseteq (A_m \setminus b_{\lambda_{m+1}}) \cup \{\alpha \in b_{\lambda_{m+1}} : f_{\eta_{m+1}}^{\lambda_{m+1}}(\alpha) < \chi_N(\alpha)\} \in J_{<\lambda_{m+1}}.$$

Como no puede existir una sucesión decreciente infinita, para algún n nos debemos detener, es decir, $A_n = \emptyset$.

Notemos ahora que para cada $\alpha \in a$, si m es el mínimo natural tal que $\alpha \notin A_m$, es porque $f_{\eta_m}^{\lambda_m}(\alpha) = \chi_N(\alpha)$, ya que en la Afirmación habíamos demostrado que $f_{\eta_m}^{\lambda_m} \leq \chi_N$. Entonces, $\chi_N = \sup\{f_{\eta_i}^{\lambda_i} : i \leq n\}$.

Por lo tanto, si $\mathcal{F} = \{f_{\eta}^{\lambda} : \lambda \in \mathbf{pcf}(a) \wedge \eta < \lambda\}$, entonces

$$|\{\chi_N : N \text{ es bueno}\}| \leq |\{\mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \text{ finito}\}| = \max(\mathbf{pcf}(a)) = \kappa.$$

Con lo que queda demostrado el Lema. □

Demostraremos ahora uno de los resultados más importantes dentro de la teoría de $\mathbf{pcf}$. Tiene consecuencias importantes dentro de la aritmética cardinal, como se verá más adelante. Supondremos en un inicio que $2^{|a|} < \min(a)$, sin embargo, en el Corolario 5.1.4, veremos que esta suposición no es necesaria.

Teorema 5.1.3. *Sea a un intervalo de cardinales regulares tal que $\min(a)^{|a|} < \sup(a)$ y $2^{|a|} < \min(a)$. Entonces $\max(\mathbf{pcf}(a)) = |\prod a|$.*

Demostración. Sea $\kappa = \max(\mathbf{pcf}(a))$. Claramente, $\kappa \leq |\prod a|$, pues κ es la cofinalidad para un ultraproducto. Debemos mostrar que $|\prod a| \leq \kappa$.

Fijemos θ suficientemente grande y $<^*$ un buen orden para $H(\theta)$. Y definamos submodelos $N \prec H(\theta)$ buenos como en el Lema 5.1.2.

Para cada N bueno, como $|\mathbf{pcf}(a)| \leq 2^{|a|} < \min(a)$, de la Proposición 3.1.15, tenemos que $\mathbf{pcf}(a) \cup \{\mathbf{pcf}(a)\} \subseteq N$ y, para cada $\lambda \in \mathbf{pcf}(a)$, $\{b_{\lambda}(a), J_{<\lambda}(a)\} \subseteq N$. Además, consideremos la función caracterísita χ_N simplemente con dominio en a .

La idea será demostrar que cada submodelo bueno tiene a lo más κ elementos de $\prod a$ y que existen a lo más κ submodelos buenos. Para lo segundo, veamos la siguiente afirmación.

Afirmación 1. Si M y N son submodelos buenos tales que $\chi_N = \chi_M$, entonces $N \cap \sup(a) = M \cap \sup(a)$.

Demostración. Claramente, $N \cap \min(a) = \min(a) = M \cap \min(a)$. Hagamos ahora inducción sobre todos los cardinales $\min(a) < \eta \leq \sup(a)$.

Para η límite, el resultado es inmediato pues

$$N \cap \eta = \bigcup_{\mu < \eta} N \cap \mu = \bigcup_{\mu < \eta} M \cap \mu = M \cap \eta.$$

Supongamos ahora que $\eta < \sup(a)$ es sucesor y, por tanto, regular. Como a es intervalo de cardinales regulares, tenemos que $\eta \in a \subseteq N$.

Veamos que $N \cap M \cap \eta$ es cofinal en $N \cap \eta$. En efecto, por definición de secuencia de aproximación $E_N := \{\chi_{N_i}(\eta) : i < |a|^+\}$ y $E_M := \{\chi_{M_i}(\eta) : i < |a|^+\}$ son clubs en $\chi_N(\eta) = \chi_M(\eta)$, pues $\chi_N = \chi_M$. Además, $E_N \subseteq N$ y $E_M \subseteq M$. Luego, $E_N \cap E_M$ es club en $\chi_N(\eta) = \sup(N \cap \eta)$ y, por tanto, $N \cap M \cap \eta$ es cofinal en $N \cap \eta$. Análogamente, $N \cap M \cap \eta$ es cofinal en $M \cap \eta$.

Sea μ tal que $\mu^+ = \eta$. Para cada $\nu \in N \cap M \cap \eta \setminus \mu$ existe una biyección $f : \mu \rightarrow \nu$. Elijamos tal biyección $<^*$ -mínima, por la Proposición 1.4.15, $f \in N$. Se sigue entonces que $N \cap \nu = f^{-1}[N \cap \mu]$. Análogamente, para M y entonces

$$N \cap \nu = f^{-1}[N \cap \mu] = f^{-1}[M \cap \mu] = M \cap \nu,$$

pues por hipótesis de inducción, $M \cap \mu = N \cap \mu$.

□

De la Afirmación anterior y el Lema 5.1.2, podemos concluir que $|\{N \cap \sup(a) : N \text{ es bueno}\}| \leq \kappa$.

Para cada $f \in \prod a$, podemos encontrar un submodelo bueno N tal que $f \in N$. Como $a \subseteq N \Rightarrow \text{ran}(f) \subseteq N$, tenemos que

$$f \subseteq (N \times N) \cap (a \times \sup(a)) = a \times (N \cap \sup(a)).$$

Por lo dicho anteriormente, existen solamente κ de estas intersecciones.

Veamos ahora cada intersección contiene a lo más κ funciones. Para ello basta con ver que

$$|a \times (N \cap \sup(a))| = |N \cap \sup(a)|^{|a|} \leq \min(a)^{|a|} < \sup(a) \leq \kappa.$$

De donde, $|\prod a| \leq |\{N \cap \sup(a) : N \text{ es bueno}\}| \cdot |N \cap \sup(a)|^{|a|} \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$.

□

Corolario 5.1.4. Sea a un intervalo de cardinales regulares tal que $\min(a)^{|a|} < \sup(a)$. Entonces $\max(\text{pcf}(a)) = |\prod a|$.

Demostración. Sean $a_0 := a \cap [0, \min(a)^{|a|}]$, y $a_1 := a \cap (\min(a)^{|a|}, \sup(a))$.

Tenemos entonces que $2^{|a_1|} \leq 2^{|a|} \leq \min(a)^{|a|} < \min(a_1)$ y, usando la fórmula de Hausdorff (véase Teorema 1.1.11), tenemos que $\min(a_1)^{|a_1|} = \min(a_1) \cdot (\min(a)^{|a|})^{|a_1|} = \min(a_1)$. Podemos utilizar el Teorema 5.1.3 para a_1 , es decir, $|\prod a_1| = \max(\text{pcf}(a_1))$.

Sin embargo, se tiene que $|\prod a_0| \leq (\min(a)^{|a|})^{|a|} < \min(a_1)$ y, entonces, $|\prod a| = |\prod a_0| \cdot |\prod a_1| = |\prod a_1|$. Por lo tanto,

$$\max(\text{pcf}(a)) \leq |\prod a| = |\prod a_1| = \max(\text{pcf}(a_1)) \leq \max(\text{pcf}(a)).$$

De donde, $\max(\text{pcf}(a)) = |\prod a|$. □

Como una consecuencia del resultado anterior y el Lema 3.1.12, tenemos que si a cumple las condiciones del corolario, entonces $\text{cf}(\prod a) = |\prod a|$.

Presentaremos ahora un resultado en Aritmética Cardinal que demostró Shelah usando la teoría de pcf . Antes veamos unos hechos sencillos.

Si a es un intervalo de cardinales y $\min(a) = \aleph_\alpha$, entonces $\sup(a) < \aleph_{\alpha+|a|^+}$. En efecto, si $\sup(a) \geq \aleph_{\alpha+|a|^+}$, para cada $\beta < |a|^+$ tendríamos que $\aleph_{\alpha+\beta} \in a$, de donde $|a| \geq |a|^+$.

El resultado es el mismo si a es un intervalo infinito de cardinales regulares, pues podemos definir una función inyectiva entre todos los cardinales de a y sus cardinales regulares como:

$$f(\kappa) = \kappa^+.$$

Teorema 5.1.5 (Shelah). *Si δ es un ordinal límite, entonces $\aleph_\delta^{| \delta |} < \aleph_{|\delta|+4} \cdot (2^{|\delta|})^+$.*

Demostración. Si $2^{|\delta|} \geq \aleph_\delta$ el resultado es trivial, ya que $\aleph_\delta^{| \delta |} \leq (2^{|\delta|})^{|\delta|} < (2^{|\delta|})^+$.

Supongamos ahora que $2^{|\delta|} < \aleph_\delta$ y tomemos $a = [(2^{|\delta|})^+, \aleph_\delta)_{\text{reg}}$ intervalo de cardinales regulares. Usando la fórmula de Hausdorff tenemos que $((2^{|\delta|})^+)^{|\delta|} = (2^{|\delta|})^{|\delta|} \cdot (2^{|\delta|})^+ = (2^{|\delta|})^+ < \aleph_\delta$. Podemos entonces aplicar el Corolario 5.1.4, así

$$\max(\text{pcf}(a)) = |\prod a| = \aleph_\delta^{| \delta |}.$$

Por otro lado, $|\text{pcf}(a)| \leq 2^{|\delta|} < \min(a)$ y, entonces, $|\text{pcf}(a)| \leq |a|^{+3} \leq |\delta|^{+3}$.

Finalmente, al ser a intervalo de cardinales regulares, por el Teorema Principal de pcf , $\text{pcf}(a)$ es también un intervalo de cardinales regulares. De la observación anterior tenemos que

$$\aleph_\delta^{| \delta |} = \max(\text{pcf}(a)) < \aleph_{\alpha+|\text{pcf}(a)|^+} \leq \aleph_{\alpha+(|\delta|+3)^+} = \aleph_{|\delta|+4}.$$

Donde $\aleph_\alpha = |\delta|$. □

En particular, encontramos que si $\aleph_\omega$ es un cardinal límite fuerte, esto es $\forall \mu < \aleph_\omega (2^\mu < \aleph_\omega)$, entonces $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4}$. Más aún, $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ debe ser regular.

5.2. Segundo teorema

Lema 5.2.1. *Sea λ un cardinal regular y W un conjunto cualquiera con $|W| \leq \aleph_\lambda$. Entonces existe una familia $P(W, \lambda) \subseteq [W]^\lambda$ tal que $|P(W, \lambda)| \leq |W|$ y para toda $t \in [W]^\lambda$ existe $s \in P(W, \lambda)$ tal que $|s \cap t| = \lambda$.*

Demostración. La demostración será por inducción sobre la cardinalidad de W .

Si $|W| < \lambda$, el lema no tiene sentido y definimos simplemente $P(W, \lambda) = \emptyset$.

Si $|W| = \lambda$, definimos $P(W, \lambda) = \{W\}$. Trivialmente esto funciona.

Supongamos ahora que $|W| > \lambda$ y $W = \{w_i : i < |W|\}$ y hagamos $W_i := \{w_j : j \leq i\}$.

CASO 1. Si $|W|$ es regular, definamos

$$P(W, \lambda) := \bigcup_{i < |W|} P(W_i, \lambda).$$

Nótese que $|P(W_i, \lambda)| \leq |W_i| = i$ y, trivialmente, $|P(W, \lambda)| \leq |W|$. Sea $t \in [W]^\lambda$. Por suposición, debe existir $i < |W|$ tal que $t \subseteq W_i$, entonces existe $s \in P(W_i, \lambda) \subseteq P(W, \lambda)$ tal que $|s \cap t| = \lambda$.

CASO 2. Si $|W|$ es singular. Sean $|W| = \aleph_\alpha$, $\mu := \text{cf}(\aleph_\alpha) = \text{cf}(\alpha)$ y $\{i(\xi) : \xi < \mu\}$ una sucesión cofinal de $|W|$. Definamos

$$P(W, \lambda) := \bigcup_{\xi < \mu} P(W_{i(\xi)}, \lambda).$$

Análogamente, $|P(W, \lambda)| \leq |W|$. Notemos que $\aleph_\alpha < \aleph_\lambda \Rightarrow \mu = \text{cf}(\alpha) < \lambda$.

Sea $t \in [W]^\lambda$. Debe existir $\xi < \mu$ tal que $|t \cap W_{i(\xi)}| = \lambda$. De lo contrario, $|t \cap W_{i(\xi)}| < \lambda$ para cada $\xi < \mu$ y como $|t \cap W| = \lambda$ sería una contradicción de la regularidad de λ . Así, existe $s \in P(W_{i(\xi)}, \lambda) \subseteq P(W, \lambda)$ tal que $|s \cap t \cap W_{i(\xi)}| = |s \cap t| = \lambda$.

□

Para el siguiente teorema, si $f : \beta \rightarrow \kappa$ es una función donde β y κ son ordinales. Para $\alpha \in \kappa$, definiremos $f \hat{+} \langle \alpha \rangle := h$, donde $h : \beta + 1 \rightarrow \kappa$ tal que $h|_\beta = f$ y $h(\beta) = \alpha$. Es decir, es la acción de pegar un elemento.

Teorema 5.2.2 (Rubin, Shelah). *Suponga que $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ y $c : (\kappa^+)^{<\omega} \rightarrow \kappa$ es una coloración del árbol de sucesiones finitas de κ^+ en κ colores. Entonces existe un subárbol $T \subseteq (\kappa^+)^{<\omega}$ de altura ω tal que para cada nodo $t \in T$ el conjunto $\{\alpha < \kappa^+ : t \hat{+} \langle \alpha \rangle \in T\}$ de sucesores inmediatos es un conjunto estacionario en κ^+ y existe un conjunto $\{\xi_n \in \kappa : n \in \omega\}$ de colores tal que, para cada $n \in \omega$ y cada $t \in T \cap (\kappa^+)^n$, $c(t) = \xi_n$, es decir, el nivel n -ésimo está coloreado por ξ_n .*

Demostración. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\kappa^+)$ el conjunto de todos los clubs en κ^+ .

Para cada $\xi = \{\xi_k : k \in \omega\} \in \kappa^\omega$, definamos un juego J_ξ entre dos jugadores de longitud ω de la siguiente manera:

- En la n -ésima jugada, el jugador I elije un club $C_n \in \mathcal{C}$ y el jugador II responde eligiendo $\alpha_n \in C_n$.
- El jugador II gana si, para cada $n \in \omega$, $c(\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \rangle) = \xi_n$. El jugador I gana en otro caso.

Así, un juego de J_ξ , será una sucesión $\langle C_0, \alpha_0, C_1, \alpha_1, \dots, C_n, \alpha_n, \dots \rangle$ tal que $\alpha_k \in C_k$ para cada $k \in \omega$.

Decimos que un jugador i tiene estrategia ganadora para el juego J_ξ , si, no importa como juegue su contrincante, él siempre puede ganar siguiendo cierta estrategia. Más formalmente, una estrategia ganadora para J_ξ del jugador I es una función $\vartheta_\xi : (\kappa^+)^{<\omega} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que, si $\langle C_0, \alpha_0, C_1, \alpha_1, \dots, C_n, \alpha_n, \dots \rangle$ es una sucesión que cumple

$$\alpha_n \in C_n \quad \text{y} \quad C_n = \vartheta_\xi(\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \rangle),$$

para toda $n \in \omega$, se tiene que gana el jugador I, es decir, existe $n \in \omega$ tal que $c(\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \rangle) \neq \xi_n$.

Afirmación 1. *Cada juego J_ξ está determinado. Es decir, uno de los dos jugadores tiene estrategia ganadora.*

Demostración. Fijemos $\xi \in \kappa^\omega$ y supongamos que el jugador I no tiene estrategia ganadora para el juego J_ξ . Esto quiero decir que, para toda función $\vartheta : (\kappa^+)^{<\omega} \rightarrow \mathcal{C}$, existe una sucesión $\langle C_0, \alpha_0, C_1, \alpha_1, \dots, C_n, \alpha_n, \dots \rangle$ tal que, para toda $n \in \omega$, $\alpha_n \in C_n = \vartheta(\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \rangle)$. Y, sin embargo, $c(\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \rangle) = \xi_n$, para toda $n \in \omega$.

Encontremos una estrategia ganadora para el jugador II. Supongamos que es dada una sucesión $\langle C_0, \alpha_0, C_1, \alpha_1, \dots, C_n \rangle$ tal que $\alpha_k \in C_k$ y $c(\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \rangle) = \xi_k$, para cada $k \leq n$. Podemos encontrar una función

$$\vartheta : (\kappa^+)^{<\omega} \rightarrow \mathcal{C} \text{ tal que } C_k = \vartheta(\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \rangle),$$

para cada $k \in \omega$. Existe una sucesión testigo tal que ϑ no es estrategia ganadora para I, en particular, existe $\alpha_n \in C_n$ tal que $c(\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle) = \xi_{n+1}$.

Continuando de esta manera encontramos estrategia ganadora para el jugador II. □

Veamos ahora que existe $\xi \in \kappa^\omega$ para el cual el jugador II tiene estrategia ganadora en el juego J_ξ .

Supongamos lo contrario, entonces, para cada $\xi \in \kappa^\omega$, existe ϑ_ξ estrategia ganadora para el jugador I. Fijemos θ cardinal regular suficientemente grande y sea $N_0 \prec N_1 \prec \dots \prec N_k \prec \dots$ una cadena numerable de submodelos elementales de $H(\theta)$ tal que, para cada $i \in \omega$, $N_i \in N_{i+1}$, $|N_i| = \kappa$ y $\{\vartheta_\xi : \xi \in \kappa^\xi\} \subseteq N_0$. Recordemos que $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$.

Para cada $i \in \omega$, definamos $\alpha_i := \sup(N_i \cap \kappa^+)$ y $\xi_i := c(\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1} \rangle)$. Hagamos $\xi = \{\xi_k : k \in \omega\}$ y, para cada $i \in \omega$, definamos $C_i := \vartheta_\xi(\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1} \rangle)$.

Notemos que para toda $n \in \omega$, se tiene que $\alpha_n \in C_n$ por la Proposición 1.4.16.

Por definición, el jugador II gana el juego, lo cual es una contradicción de la elección de ϑ_ξ .

Sea $\sigma : \mathcal{C}^{<\omega} \rightarrow \kappa^+$ una estrategia ganadora del jugador II para algún juego J_ξ . Definamos $T \subseteq (\kappa^+)^{<\omega}$ como: si $t \in (\kappa^+)^n$, entonces

$$t \in T \iff \text{existe } \langle C_0, \dots, C_{n-1} \rangle \text{ tal que, para toda } k < n, t(k) = \sigma(\langle C_0, \dots, C_k \rangle),$$

para cada $n \in \omega$.

Se puede verificar fácilmente que T cumple las propiedades buscadas. □

El siguiente corolario nos dice que el teorema anterior también es cierto para ordinales de cofinalidad κ^+ .

Corolario 5.2.3. *Suponga que $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$, β es un ordinal con $\text{cf}(\beta) = \kappa^+$ y $c : (\beta)^{<\omega} \rightarrow \kappa$ es una coloración. Entonces existe un subárbol $T \subseteq (\beta)^{<\omega}$ de altura ω tal que el conjunto de sucesores inmediatos de cada nodo es un conjunto estacionario en κ^+ y existe un conjunto $\{\xi_n \in \kappa : n \in \omega\}$ de colores tal que, para cada $n \in \omega$ y cada $t \in T \cap (\beta)^n$, $c(t) = \xi_n$.*

No daremos los detalles de la demostración de este corolario, sólo basta considerar $f : \kappa^+ \rightarrow \beta$ una función cofinal, continua y estrictamente creciente, y aplicar el teorema a $c|f[\kappa^+]$.

Lema 5.2.4. *Si a es un conjunto de cardinales regulares y λ es un cardinal infinito. Para $b \subseteq a$ se tiene que*

$$b \in J_{<\lambda}(a) \iff \text{cf}(\prod b) < \lambda.$$

Demostración. Del Lema 3.1.12, sabemos que $\max(\text{pcf}(b)) = \text{cf}(\prod b)$ y la Proposición 3.1.5 nos dice que $J_{<\lambda}(a) = \{b \subseteq a : \text{pcf}(b) \subseteq \lambda\}$. Entonces

$$b \in J_{<\lambda}(a) \iff \text{pcf}(b) \subseteq \lambda \iff \max(\text{pcf}(b)) = \text{cf}(\prod b) < \lambda.$$

□

Podemos hacer una definición más general de $\text{pcf}(a)$. Para cada cardinal μ , definimos

$$\text{pcf}_\mu(a) := \{\text{cf}(\prod b/D) : b \in [a]^{\leq \mu} \wedge D \text{ es un ultrafiltro sobre } b\}.$$

Es fácil ver que

$$\text{pcf}_\mu(a) = \bigcup \{\text{pcf}(b) : b \in [a]^{\leq \mu}\}.$$

Es inmediato de $b \subseteq a \Rightarrow \text{pcf}(b) \subseteq \text{pcf}(a)$ que $\text{pcf}_\mu(a) \subseteq \text{pcf}(a)$. Además, si $\mu \geq |a|$, entonces $\text{pcf}_\mu(a) = \text{pcf}(a)$.

Corolario 5.2.5. *Si a es un intervalo de cardinales regulares, entonces $\text{pcf}_\mu(a)$ es un intervalo de cardinales regulares.*

Demostración. La demostración es casi inmediata del Teorema Principal. Si $\lambda \in \text{pcf}_\mu(a)$ es porque existe $b \subseteq a$ de cardinalidad menor o igual a μ tal que $\lambda \in \text{pcf}(b)$. Para $\lambda' < \lambda$, del Teorema principal obtenemos b' con $|b'| \leq |b| \leq \mu$ y D' ultrafiltro sobre b' tal que $\lambda' = \text{cf}(\prod b'/D')$, por ser a intervalo de cardinales regulares podemos considerar $b' \subseteq a$ y así $\lambda' \in \text{pcf}(b') \subseteq \text{pcf}_\mu(a)$. $\square$

Otro hecho sencillo de ver es que el supremo de $\text{pcf}_\mu(a)$ es el mínimo cardinal regular κ tal que $[a]^{\leq \mu} \subseteq J_{<\kappa}(a)$. En efecto, de la Proposición 3.1.5 se sigue que, para todo $b \in [a]^{\leq \mu}$, $b \in J_{<\kappa}$ si y sólo si $\text{pcf}(b) \subseteq \kappa$.

Es fácil ver que $\langle J_{<\lambda}(a) \cap [a]^{\leq \mu} : \lambda \in \text{pcf}_\mu(a) \rangle$ es una sucesión estrictamente creciente, por tanto, podemos dar la cota $|\text{pcf}_\mu(a)| \leq |a|^\mu$.

Para el siguiente lema, pensaremos en $\lambda^{\leq \mu}$ como todas las funciones $h : \xi \rightarrow \lambda$, donde $\xi \leq \mu$. La demostración será muy parecida a la del lema 1.4.19, por lo que omitiremos algunos detalles de la demostración, para que sea más fácil su lectura y entendimiento.

Lema 5.2.6. *Sean a un conjunto de cardinales regulares, $\mu < \lambda < \sup(a)$ cardinales regulares y S un conjunto de cardinalidad μ . Para θ un cardinal regular suficientemente grande, podemos encontrar una familia $\{M_\eta : \eta \in \lambda^{\leq \mu}\}$ de submodelos de $H(\theta)$ y una sucesión $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ de funciones de $\prod(a \setminus \lambda)$, tales que cumplan lo siguiente:*

1. Para todo $\eta \in \lambda^{\leq \mu}$, $|M_\eta| = \mu$ y $\{a, \lambda\} \cup \text{ran}(\eta) \cup S \subseteq M_\eta$,
2. Para cada $\gamma < \lambda$ y $\alpha \in a \setminus \lambda$, $f_\gamma(\alpha) = \sup(\bigcup \{M_\eta : \eta \in \gamma^{<\mu}\} \cap \alpha)$,
3. Si $\text{dom}(\eta)$ es ordinal límite, entonces $M_\eta = \bigcup_{\beta \in \text{dom}(\eta)} M_{\eta|_\beta}$,
4. Si $\text{dom}(\eta) = \xi + 1$, para algún ξ , y $\gamma = \eta(\xi)$, entonces
 - $\langle M_{\eta|_\beta} : \beta \leq \xi \rangle \in M_\eta$,
 - $\langle f_\zeta : \zeta < \gamma \rangle \in M_\eta$.

Demostración. Usando el Teorema de Löwenheim-Skolem (Teorema 1.4.7), podemos encontrar un submodelo $M_\emptyset \prec H(\theta)$, tal que $\{a, \lambda\} \cup S \subseteq M_\emptyset$ y $|M_\emptyset| \leq \max\{|S|, \aleph_0\} = \mu$.

Hagamos inducción sobre $\gamma < \lambda$. Suponga que $\gamma < \lambda$ es dada y defina

$$f_\gamma(\alpha) = \sup(\bigcup \{M_\eta : \eta \in \gamma^{\leq \mu}\} \cap \alpha),$$

para cada $\alpha \in a \setminus \lambda$. Ahora, hagamos inducción sobre $\text{dom}(\eta)$, para cada $\eta \in \gamma^{\leq \mu}$. Si γ es límite y $\eta \in \gamma^{\leq \mu}$ tal que η es cofinal en γ , definamos simplemente

$$M_\eta = \bigcup_{\beta \in \text{dom}(\eta)} M_{\eta|_\beta}.$$

Es fácil ver que $\text{ran}(\eta) \subseteq M_\eta$.

Supongamos entonces que $\text{dom}(\eta) = \xi + 1$, para algún ξ y $\eta(\xi) = \gamma$. Nuevamente, usando el Teorema de Löwenheim-Skolem, podemos encontrar un submodelo M_η tal que $\langle M_{\eta|\beta} : \beta \leq \xi \rangle \in M_\eta$, $\langle f_\zeta : \zeta < \gamma \rangle \in M_\eta$ y $M_{\eta|\xi} \subseteq M_\eta$.

□

Con esto, demostraremos un teorema de gran importancia dentro de la teoría de **pcf**, nos permite calcular el valor del supremo de $\text{pcf}_\mu(a)$ bajo ciertas condiciones, teniendo esto consecuencias importantes en la aritmética cardinal, misma que presentaremos al final de esta sección.

Teorema 5.2.7. *Sean a un intervalo de cardinales regulares sin máximo y μ un cardinal. Suponga que $\aleph_\delta := \sup(a)$ es tal que $\delta \neq \aleph_\delta$ y $|\delta|^\mu < \aleph_\delta$. Entonces*

$$\sup(\text{pcf}_\mu(a)) = \sup(a)^\mu.$$

Demostración. Hagamos $\kappa := \sup(\text{pcf}_\mu(a))$. Notemos que δ es límite.

($\leq$) Si $\lambda \in \text{pcf}_\mu(a)$, existe $b \in [a]^{\leq \mu}$ tal que $\lambda \in \text{pcf}(b)$. Claramente

$$\lambda \leq |\prod b| \leq \sup(a)^\mu.$$

De donde se deduce la desigualdad.

($\geq$) Supongamos lo contrario, es decir, $\kappa < \sup(a)^\mu$, y tomemos $\{S_i : i < \kappa\} \subseteq [\sup(a)]^\mu$ tal que $i \neq j \Rightarrow S_i \neq S_j$.

Por suposición, $|\delta|^\mu < \aleph_\delta < \kappa$. Definimos $\lambda := (|\delta|^\mu)^{+2}$, por ser δ límite se tiene que $\lambda < \aleph_\delta < \kappa$. Usando la fórmula de Hausdorff, se sigue fácilmente que $\lambda^\mu = \lambda$.

Usando el Lema 5.2.4, para cada $b \in [a]^{\leq \mu}$, fijemos una familia

$$F_b \text{ cofinal en } \prod b \text{ de cardinalidad } < \kappa.$$

Además, por lo argumentado antes del Teorema 5.1.5 y como $|a| \leq |\delta|$, se tiene que $|F_b| < \kappa < \aleph_{(|\delta|^\mu)^+} < \aleph_\lambda$, entonces podemos encontrar una colección $P(F_b, \lambda)$ como en el Lema 5.2.1.

Fijemos θ un cardinal regular suficientemente grande, para cada $i < \kappa$, podemos encontrar una familia $\{M_\eta^i : \eta \in \lambda^{\leq \mu}\}$ y una sucesión de funciones $\langle f_\gamma^i : \gamma < \lambda \rangle$ de funciones de $\prod(a \setminus \lambda)$ como en el Lema 5.2.6, tales que $S_i \subseteq M_\eta^i$ para cada par (i, η) .

Para $b \in [a \setminus \lambda]^{\leq \mu}$, podemos encontrar $f_{\gamma,b}^i \in F_b$, para cada $\gamma < \lambda$, tal que $f_\gamma^i|b < f_{\gamma,b}^i$ y $\forall \zeta < \gamma (f_{\zeta,b}^i < f_{\gamma,b}^i)$. Esto es posible pues F_b es cofinal en $\prod b$ y $b \cap \lambda = \emptyset \Rightarrow \text{cf}(\prod b) > \lambda$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que para cada $\eta \in \lambda^{< \mu}$ con $\text{dom}(\eta) = \xi + 1$, para algún ξ , y $\gamma = \eta(\xi)$, se tiene que

$$\langle f_{\zeta,b}^i : \zeta < \gamma \wedge b \in [a \setminus \lambda]^{\leq \mu} \rangle \in M_\eta^i.$$

Notemos que para cada $b \in [a \setminus \lambda]^{\leq \mu}$ y cada $i < \kappa$, $\langle f_{\gamma,b}^i : \gamma < \lambda \rangle$ es estrictamente creciente y, en particular, de funciones distintas. Podemos encontrar $t_b^i \in P(F_b, \lambda)$ tal que $|t_b^i \cap \{f_{\gamma,b}^i : \gamma < \lambda\}| = \lambda$.

Escribamos $t_b^i = \{g_{\gamma,b}^i : \gamma < \lambda\}$ de tal manera que $t_b^i = t_b^j \Rightarrow \forall \gamma < \lambda (g_{\gamma,b}^i = g_{\gamma,b}^j)$. Definamos los segmentos iniciales como $t_{\gamma,b}^i := \{g_{\zeta,b}^i : \zeta < \gamma\}$.

Afirmación 1. Dado $b \in [a \setminus \lambda]^{\leq \mu}$, podemos encontrar $\beta < \lambda$ y $I \in [\kappa]^\kappa$ tales que para cada $i \in I$ y $\alpha < \beta$ se tiene que

1. Existen $\xi, \zeta \in (\alpha, \beta)$ tales que $g_{\zeta, b}^i = f_{\xi, b}^i$,
2. $(\exists \gamma < \lambda)(g_{\alpha, b}^i < f_{\gamma, b}^i) \iff (\exists \gamma < \beta)(g_{\alpha, b}^i < f_{\gamma, b}^i)$.

Además, podemos pedir que

$$cf(\beta) = \begin{cases} \mu & \text{si } \mu > \aleph_0 \\ (|\delta|^\mu)^+ & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Para cada $i < \kappa$ sea C_b^i el conjunto de $\beta < \lambda$ que cumplen el primer punto. Veamos que C_b^i es un club en λ . Ser cerrado se verifica inmediatamente, resta probar que es cofinal. Sea $\xi < \lambda$. Podemos encontrar ξ_0, ζ_0 mayores que ξ tales que $g_{\zeta_0, b}^i = f_{\xi_0, b}^i$, pues $|t_b^i| = |F_b| = \lambda$. En general, para $n > 0$, encontremos ξ_n, ζ_n mayores a $\max(\xi_{n-1}, \zeta_{n-1})$ tales que $g_{\zeta_n, b}^i = f_{\xi_n, b}^i$ y hagamos $\beta := \sup(\{\xi_n : n \in \omega\} \cup \{\zeta_n : n \in \omega\})$. Claramente, $\beta \in C_b^i$.

De manera análoga, para cada $i < \kappa$ sea B_b^i el conjunto de $\beta < \lambda$ que cumplen el segundo punto. Con un procedimiento similar podemos probar que B_b^i es club en λ .

Como $\lambda > |\delta|^\mu \geq |[a]^{\leq \mu}|$, se sigue que $C := \bigcap_{b \in [a \setminus \lambda]^{\leq \mu}} (C_b^i \cap B_b^i)$ es club en λ . Por lo tanto, para cada $i < \kappa$, existe $\beta_i \in C$ tal que

$$cf(\beta_i) = \begin{cases} \mu & \text{si } \mu > \aleph_0 \\ (|\delta|^\mu)^+ & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Finalmente, como $\lambda < \kappa$, podemos encontrar $I \in [\kappa]^\kappa$ y $\beta < \lambda$ tal que $\forall i \in I (\beta_i = \beta)$. □

Fijemos testigos $\beta < \lambda$ y $I \in [\kappa]^\kappa$ como en la afirmación anterior.

CASO 1. $\mu > \aleph_0$, es decir, $cf(\beta) = \mu$.

Sea $\eta \in \beta^\mu$ una sucesión estrictamente creciente y cofinal en β . Veamos que podemos suponer que existen $b \in [a \setminus \lambda]^{\leq \mu}$, $t \in P(F_b, \lambda)$ y $f \in F_b$ tales que, para todo $i \in I$, se tiene que

$$(M_\eta^i \cap a) \setminus \lambda = b, \quad t_b^i = t \text{ y } f_{\beta, b}^i = f.$$

En efecto, como $(M_\eta^i \cap a) \setminus \lambda \in [a \setminus \lambda]^{\leq \mu}$ y $|[a \setminus \lambda]^{\leq \mu}| \leq |\delta|^\mu < \lambda < \kappa$, podemos encontrar $b \in [a \setminus \lambda]^{\leq \mu}$ y $I_0 \in [I]^\kappa$ tal que

$$(M_\eta^i \cap a) \setminus \lambda = b.$$

Sin pérdida de generalidad, suponemos $I = I_0$.

De manera análoga, como $|P(F_b, \lambda)| \leq |F_b| < \kappa$ podemos encontrar tales f y t .

Demostraremos que existe S tal que $S = M_\delta^i \cap \aleph_\delta$ para toda $i \in I$. Con esto llegaremos a una contradicción, pues para toda $i \in I$, $S_i \subseteq S$ y $i \neq j \Rightarrow S_i \neq S_j$, sin embargo, $|\mathcal{P}(S)| = 2^\mu < \kappa = |I|$.

Notemos que para toda $\gamma < \lambda$ y todo $i, j \in I$, $t_{\gamma, b}^i = t_{\gamma, b}^j$ por la manera en que enumeramos cada t_b^i . Es decir, $t_{\gamma, b}^i$ no depende de i . Definamos $t_\gamma = t_{\gamma, b}^i$.

Afirmación 2. $f_\beta^i|b$ no depende de i .

Demostración. Fijemos $i \in I$ y $\alpha \in b = (M_\eta^i \cap a) \setminus \lambda$. Se tiene que

$$f_\beta^i(\alpha) = \sup(\bigcup \{M_\nu^i : \nu \in \beta^{<\mu}\} \cap \alpha) = \sup\{f_\gamma^i(\alpha) : \gamma < \beta\}.$$

La primera igualdad es por definición. Para la segunda basta notar que, para cada $\nu \in \beta^{<\mu}$, existe $\gamma < \beta$ tal que $\nu \in \gamma^{<\mu}$, pues $\text{cf}(\beta) = \mu$. También,

$$f_\beta^i(\alpha) = \sup\{f_{\gamma,b}^i(\alpha) : \gamma < \beta\}.$$

($\leq$) Para toda $\gamma < \beta$, se tiene que $f_\gamma^i < f_{\gamma,b}^i$. ($\geq$) Si $\gamma < \beta$, como η es cofinal y $\alpha \in M_\eta^i$, podemos encontrar $\xi < \mu$ tal que $\gamma < \eta(\xi)$ y $\alpha \in M_{\eta(\xi)+1}^i$. Además, $\eta(\xi) \in M_{\eta(\xi)+1}^i$. Como $f_\gamma^i(\alpha) < f_{\eta(\xi),b}^i(\alpha)$, por elementaridad existe $b' \in M_{\eta(\xi)+1}^i$ con $\alpha \in b'$ tal que $f_\gamma^i(\alpha) < f_{\eta(\xi),b'}^i(\alpha)$. De donde, $f_{\eta(\xi),b'}^i(\alpha) \in M_{\eta(\xi)+1}^i$ y, así, $f_\gamma^i(\alpha) < f_{\eta(\xi),b'}^i(\alpha) \leq \sup(M_{\eta(\xi)+1}^i \cap \alpha) \leq f_{\eta(\xi)+1}^i(\alpha)$.

$$f_\beta^i(\alpha) = \sup\{g(\alpha) : g \in t_\beta \text{ tal que } (\exists \gamma < \beta)(g < f_{\gamma,b}^i)\}.$$

($\geq$) Esto es claro, pues $t \in [F_b]^\lambda$. ($\leq$) Si $\gamma < \beta$, encontramos $\xi, \zeta \in (\gamma, \beta)$ como en la afirmación anterior. Luego $f_{\gamma,b}^i < f_{\xi,b}^i = g_{\zeta,b}^i \in t$ y $g_{\zeta,b}^i = f_{\xi,b}^i < f_{\xi+1,b}^i$, donde claramente $\xi + 1 < \beta$. Finalmente,

$$f_\beta^i(\alpha) = \sup\{g(\alpha) : g \in t_\beta \text{ tal que } g < f\}.$$

($\leq$) Sea $g \in t_\beta$ tal que $g < f_{\gamma,b}^i$ para alguna $\gamma < \beta$. Luego, $g < f_{\gamma,b}^i < f_{\beta,b}^i = f$. ($\geq$) Si $g \in t_\beta$, entonces $g = g_{\gamma,b}^i$ para alguna $\gamma < \beta$. Luego, $g_{\gamma,b}^i = g < f = f_{\beta,b}^i$. Por la segunda condición de la afirmación, existe $\varsigma < \beta$ tal que $g_{\gamma,b}^i < f_{\varsigma,b}^i$.

Notemos que la última expresión no depende de $i \in I$. Con esto demostramos la afirmación. □

Afirmación 3. Si $\alpha \in b$, entonces $f_\beta^i(\alpha) = \sup(M_\eta^i \cap \alpha)$.

Demostración. Veamos que

$$f_\beta^i(\alpha) = \sup(\bigcup \{M_\nu^i : \nu \in \beta^{<\mu}\} \cap \alpha) = \sup(\bigcup \{M_{\eta(\xi)}^i : \xi < \mu\} \cap \alpha) = \sup(M_\eta^i \cap \alpha).$$

La primera y la tercera igualdad se siguen de la definición. La desigualdad ($\geq$) se deduce de inmediato, pues $\{M_{\eta(\xi)}^i : \xi < \mu\} \subseteq \{M_\nu^i : \nu \in \beta^{<\mu}\}$. Veamos la desigualdad ($\leq$).

Fijemos $\zeta < \sup(\bigcup \{M_\nu^i : \nu \in \beta^{<\mu}\} \cap \alpha)$. Para algún $\nu \in \beta^{<\mu}$, se tiene que $\zeta < \sup(M_\nu^i \cap \alpha)$. Como $\text{cf}(\beta) = \mu$ y $\alpha \in b \subseteq M_\eta^i$, podemos encontrar $\xi < \mu$ tal que $\nu \in \eta(\xi)^{<\mu}$ y $\alpha \in M_{\eta(\xi)+1}^i$.

Como $\text{ran}(\eta) \subseteq M_{\eta(\xi)+1}^i$, en particular, $\eta(\xi) \in M_{\eta(\xi)+1}^i$. Entonces $f_{\eta(\xi)}^i(\alpha) \in M_{\eta(\xi)+1}^i \cap \alpha$. Por lo tanto,

$$\zeta < \sup(M_\nu^i \cap \alpha) \leq f_{\eta(\xi)}^i(\alpha) \leq \sup(M_{\eta(\xi)+1}^i \cap \alpha).$$

La segunda desigualdad se da por definición. □

Por definición, $|M_\eta^i| = \mu$, así, como $\lambda^\mu = \lambda < \kappa$, podemos modificar un poco I de tal manera que $M_\eta^i \cap \lambda$ no depende de $i \in I$.

Afirmación 4. $M_\eta^i \cap \aleph_\delta$ no depende de i .

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre todos los cardinales $\alpha \leq \aleph_\delta$. Para $\alpha \leq \lambda$ ya se vio más arriba. Si α es límite, se sigue por hipótesis de inducción.

Supongamos entonces que $M_\eta^i \cap \alpha$ no depende de $i \in I$, para cierto $\alpha < \aleph_\delta$. Si, para todo $i \in I$, $M_\eta^i \cap \alpha^+ \setminus M_\eta^i \cap \alpha = \emptyset$, no hay nada que probar. Supongamos que existe $i_0 \in I$ y $\vartheta \in M_\eta^{i_0} \cap \alpha^+ \setminus M_\eta^{i_0} \cap \alpha$.

Luego, $\vartheta \in M_\eta^{i_0} \Rightarrow \alpha = |\vartheta| \in M_\eta^{i_0}$ y, por tanto, $\alpha^+ \in M_\eta^{i_0}$. Además, $\alpha^+ \in a$ por ser regular.

Para $j_0 \in I$, se tiene que

$$(M_\eta^{i_0} \cap a) \setminus \lambda = b = (M_\eta^{j_0} \cap a) \setminus \lambda.$$

De donde, $\alpha^+ \in M_\eta^{j_0}$. Además, $\alpha^+ \in b$.

Por las afirmaciones anteriores, $\sup(M_\eta^{i_0} \cap \alpha^+) = f_\beta^{i_0}(\alpha^+) = f_\beta^{j_0}(\alpha^+) = \sup(M_\eta^{j_0} \cap \alpha^+)$. Entonces, podemos encontrar $K_i \subseteq M_\eta^{i_0} \setminus \alpha$ un club en $\sup(M_\eta^{i_0} \cap \alpha^+)$ y $K_j \subseteq M_\eta^{j_0} \setminus \alpha$ un club en $\sup(M_\eta^{j_0} \cap \alpha^+)$. Así, $K := K_i \cap K_j \subseteq M_\eta^{i_0} \cap M_\eta^{j_0} \setminus \alpha$ será un club en $\sup(M_\eta^{i_0} \cap \alpha^+)$ y un club en $\sup(M_\eta^{j_0} \cap \alpha^+)$. Notemos que aquí es donde utilizamos nuestra suposición $\mu > \aleph_0$, pues $|M_\eta^i| = \mu$ y los resultados que conocemos de clubs son válidos para cardinales regulares no numerables.

Finalmente, para cada $\vartheta \in K$, sea $h_\vartheta : \alpha \rightarrow \vartheta$ la $<^*$ -mínima biyección. Entonces $h_\vartheta \in M_\eta^{i_0} \cap M_\eta^{j_0}$. Por tanto,

$$M_\eta^{i_0} \cap \vartheta = h_\vartheta^{-1}[M_\eta^{i_0} \cap \alpha] = h_\vartheta^{-1}[M_\eta^{j_0} \cap \alpha] = M_\eta^{j_0} \cap \vartheta.$$

□

Con esto termina la demostración del Caso 1.

CASO 2. $\mu = \aleph_0$, es decir, $\text{cf}(\beta) = (|\delta|^\mu)^+$.

Enumeremos $[a \setminus \lambda]^{\leq \mu} = \{b_\varsigma : \varsigma < |\delta|^\mu\}$. Notemos que, si $i \in I$, para cada $\eta \in \beta^{<\omega}$, $(M_\eta^i \cap a) \setminus \lambda = b_\varsigma$, para algún $\varsigma < |\delta|^\mu$. De esta manera, definamos una coloración $c^i : \beta^{<\omega} \rightarrow |\delta|^\mu$ como

$$c^i(\eta) := \varsigma \text{ donde } b_\varsigma = (M_\eta^i \cap a) \setminus \lambda,$$

para cada $\eta \in \beta^{<\omega}$. Por el Corolario 5.2.3, para cada $i \in I$, podemos encontrar un subárbol $T^i \subseteq \beta^{<\omega}$ y un conjunto $\{b_k^i : k \in \omega\} \subseteq [a \setminus \lambda]^{\leq \mu}$ tal que para cada $k \in \omega$ y $\eta \in T^i \cap \beta^k$,

$$(M_\eta^i \cap a) \setminus \lambda = b_k^i \text{ y } \{\gamma < \beta : \eta \hat{+} \langle \gamma \rangle \in T^i\} \text{ es estacionario en } \beta.$$

Como en el Caso 1, modificando un poco I podemos suponer que $\forall i \in I (b_k^i = b_k)$ para cada $k \in \omega$ y algún b_k .

Además, podemos suponer que cada $\eta \in T^i$ es estrictamente creciente. En efecto, para cada nodo consideremos solamente los sucesores estrictamente crecientes, esto sigue siendo estacionario.

Sea $b := \bigcup_{k \in \omega} b_k$.

Nuevamente, como en el Caso 1, dado que $|\prod b| \leq |\delta|^\mu < \kappa$, podemos modificar un poco I y encontrar f^* tal que, para todo $i \in I$, $f_\beta^i|b = f^*$.

Afirmación 5. *Para cada $\alpha \in b$, $f^*(\alpha)$ tiene cofinalidad $\text{cf}(\beta)$.*

Demostración. Sea $i \in I$ arbitrario. Como β debe ser límite, es fácil ver que $f^*(\alpha) = f_\beta^i(\alpha) = \sup_{\gamma < \beta} f_\gamma^i(\alpha)$. Veamos que $\langle f_\gamma^i(\alpha) : \gamma < \beta \rangle$ es una sucesión estrictamente creciente.

Sean $\gamma_1 < \gamma_2 < \beta$ y $k \in \omega$ tal que $\alpha \in b_k \subseteq b$. Fijemos $\eta \in \beta^{k+1}$ tal que $\eta(k) = \gamma_1$. Por definición de los submodelos, tenemos que $\gamma_1 \in M_\eta^i$ y $b_k = (M_{\eta|k}^i \cap a) \setminus \lambda \in M_\eta^i$, por tanto, $f_{\gamma_1, b_k}^i(\alpha) \in M_\eta^i$. Entonces

$$f_{\gamma_1}^i(\alpha) < f_{\gamma_1, b_k}^i(\alpha) < \sup(M_\eta^i \cap \alpha) \leq f_{\gamma_1+1}^i(\alpha) \leq f_{\gamma_2}^i(\alpha).$$

Hemos probado que $\text{cf}(f^*(\alpha)) \leq \text{cf}(\beta)$. Si $\text{cf}(f^*(\alpha)) < \text{cf}(\beta)$, tomemos $s := \langle \gamma_\varsigma : \varsigma < \tau \rangle$, para $\tau < \text{cf}(\beta)$, tal que $\langle f_{\gamma_\varsigma}^i(\alpha) : \varsigma < \tau \rangle$ es cofinal en $f^*(\alpha)$. Si $\xi < \beta$, existe $\varsigma < \tau$ tal que $f_\xi^i(\alpha) < f_{\gamma_\varsigma}^i(\alpha)$, esto implica que $\xi < \gamma_\varsigma$ pues la sucesión es creciente. Entonces s sería cofinal en β . Una contradicción.

Se sigue entonces que $f^*(\alpha)$ es de cofinalidad $\text{cf}(\beta)$. □

Para cada $\alpha \in b$, elijamos un club $C_\alpha \subseteq f^*(\alpha)$ con $\text{otp}(C_\alpha) = \text{cf}(\beta)$. Sea $N \prec H(\theta)$ un submodelo de cardinalidad λ tal que

$$b \cup \lambda \cup \left(\bigcup_{\alpha \in b} C_\alpha \right) \subseteq N.$$

Esto es posible pues $|b| \leq \mu \leq \lambda$ y, para cada $\alpha \in b$, $|C_\alpha| = (|\delta|^\mu)^+ < (|\delta|^\mu)^{+2} = \lambda$.

Probaremos ahora que, para todo $i \in I$, $S_i \subseteq N$. Esto nos llevará a una contradicción. Veamos primero la siguiente afirmación y en seguida procederemos como en la última parte del Caso 1.

Fijemos $i \in I$.

Afirmación 6. *Existe una sucesión $\langle \eta_k \in \beta^k : k \in \omega \rangle$ tal que $k < m \Rightarrow \eta_k \subseteq \eta_m$ y, para cada $k \in \omega$ y cada $\alpha \in b_k$, existe un $m > k$ tal que*

$$(\alpha \setminus \sup(M_{\eta_k}^i \cap \alpha)) \cap M_{\eta_m}^i \cap N \neq \emptyset.$$

Demostración. Veamos primero que si $\eta \in \beta^k$, entonces, para cada $\alpha \in b_k$, existe $\gamma < \beta$ tal que

$$(\alpha \setminus \sup(M_\eta^i \cap \alpha)) \cap M_{\eta \dot{+} \langle \gamma \rangle}^i \cap N \neq \emptyset.$$

En efecto, como C_α es club en $f^*(\alpha)$, se tiene que $\{\gamma < \beta : f_\gamma^i(\alpha) \in C_\alpha\}$ es un club en β . Dado que $|M_\eta^i| = \mu < \text{cf}(f^*(\alpha))$, podemos encontrar $\gamma < \beta$ tal que $f_\gamma^i(\alpha) \in C_\alpha \subseteq N$, $f_\gamma^i(\alpha) > \sup(M_{\eta_k}^i \cap \alpha)$ y $\eta \hat{+} \langle \gamma \rangle \in T^i$. Como $\gamma \in \text{ran}(\eta \hat{+} \langle \gamma \rangle) \subseteq M_{\eta \hat{+} \langle \gamma \rangle}^i$, se sigue que $f_\gamma^i(\alpha) \in (\alpha \setminus \sup(M_{\eta_k}^i \cap \alpha)) \cap M_{\eta \hat{+} \langle \gamma \rangle}^i \cap N$.

Notemos también que $m < k \Rightarrow b_m \subseteq b_k$. Para ver esto tomemos $\eta \in \beta^k$, entonces $M_{\eta|m}^i \subseteq M_\eta^i$. Por lo tanto,

$$b_m = (M_{\eta|m}^i \cap a) \setminus \lambda \subseteq (M_\eta^i \cap a) \setminus \lambda = b_k.$$

Enumeremos $b = \{\alpha_k : k \in \omega\}$ de tal manera que, para todo $k \in \omega$, $\alpha_k \in b_m$ para algún $m \leq k$. Comencemos con $\eta_0 = \emptyset$. Supongamos que ya hemos definido η_k , para algún $k \in \omega$. Vemos que $\alpha_k \in b_k$ por la forma de enumerar. Usando lo que se demostró arriba, existe $\gamma < \beta$ tal que

$$(\alpha \setminus \sup(M_{\eta_k}^i \cap \alpha)) \cap M_{\eta_k \hat{+} \langle \gamma \rangle}^i \cap N \neq \emptyset.$$

Así, definimos $\eta_{k+1} := \eta_k \hat{+} \langle \gamma \rangle$.

Veamos que esta sucesión funciona. Si $m < \omega$ y $\alpha \in b_m$, entonces $\alpha = \alpha_k$, para algún $k \geq m$. Luego,

$$(\alpha \setminus \sup(M_{\eta_k}^i \cap \alpha)) \cap M_{\eta_{k+1}}^i \cap N \neq \emptyset.$$

Pero $M_{\eta_m}^i \subseteq M_{\eta_k}^i$.

□

Sea $\eta := \bigcup_{k \in \omega} \eta_k \in \beta^\omega$. Haciendo $M_\eta^i = \bigcup_{k \in \omega} M_{\eta|k}^i$, tenemos que

$$b = \bigcup_{k \in \omega} b_k = \bigcup_{k \in \omega} ((M_{\eta|k}^i \cap a) \setminus \lambda) = (M_\eta^i \cap a) \setminus \lambda.$$

Por la afirmación anterior, concluimos que, para cada $\alpha \in b$, $M_\eta^i \cap N \cap \alpha$ es cofinal en $M_\eta^i \cap \alpha$.

Mostraremos por inducción sobre $\alpha \leq \aleph_\delta$ que $M_\eta^i \cap \alpha \subseteq N \cap \alpha$.

Para $\alpha \leq \lambda$, el resultado es trivial pues $\lambda \subseteq N$. Para el caso límite, se sigue por la hipótesis de inducción.

Supongamos que para $\alpha < \aleph_\delta$ se tiene que $M_\eta^i \cap \alpha \subseteq N \cap \alpha$. Si no existe $\vartheta \in M_\eta^i \cap \alpha^+ \setminus M_\eta^i \cap \alpha$, no hay nada que probar. Suponga que si existe tal ϑ , entonces $\alpha = |\vartheta| \in M_\eta^i \Rightarrow \alpha^+ \in M_\eta^i$. Es decir, $\alpha^+ \in b$. Recordemos también que $b \subseteq N$.

Para cada $\vartheta \in M_\eta^i \cap N \cap \alpha^+ \setminus \alpha$, sea $h_\vartheta : \alpha \rightarrow \vartheta$ la $<^*$ -mínima biyección. Entonces $h_\vartheta \in M_\eta^i \cap N$. Por lo tanto,

$$M_\eta^i \cap \vartheta = h_\vartheta^{-1}[M_\eta^i \cap \alpha] \subseteq h_\vartheta^{-1}[N \cap \alpha] = N \cap \vartheta.$$

El resultado se sigue de que $M_\eta^i \cap N \cap \alpha^+$ es cofinal en $M_\eta^i \cap \alpha^+$.

Por lo tanto, para toda $i \in I$, $S_i \subseteq M_\eta^i \cap \aleph_\delta \subseteq N \cap \aleph_\delta \Rightarrow S_i \subseteq N$. Esto es una contradicción pues

$$|[N]^\mu| = \lambda^\mu = \lambda < \kappa = |I|.$$

□

Finalizamos esta sección con una aplicación del teorema anterior. El próximo teorema es una generalización del Teorema de Galvin-Hajnal.

Teorema 5.2.8 (Shelah). *Si δ es un ordinal límite, entonces*

$$\aleph_\delta^\mu < \aleph_{(|\delta|^\mu)^+},$$

donde $\mu := cf(\delta)$.

Demostración. Si $\aleph_\delta \leq |\delta|^\mu$, el resultado es trivial. Supongamos que $|\delta|^\mu < \aleph_\delta$, y consideremos el intervalo de cardinales regulares $a = [(|\delta|^\mu)^+, \aleph_\delta)_{\text{reg}}$. Tenemos que $\text{pcf}_\mu(a)$ es también un intervalo de cardinales regulares y $|\text{pcf}_\mu(a)| \leq |\delta|^\mu$. Por el Teorema 5.2.7, se tiene que

$$\aleph_\delta^\mu = \sup(\text{pcf}_\mu(a)) < \aleph_{|\text{pcf}_\mu(a)|^+} \leq \aleph_{(|\delta|^\mu)^+}.$$

□

Bibliografía

- [1] M. R. BURKE, M. MAGIDOR, *Shelah's pcf theory and its applications*, Ann. Pure Appl. Logic 50, 1990, 207-254.
- [2] M. HOLZ, K. STEFFENS, E. WEITZ, *Introduction to Cardinal Arithmetic*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 2010. ISBN: 978-303460330
- [3] F. HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, *TEORÍA DE CONJUNTOS: Una introducción*, Aportaciones Matemáticas, 2003. ISBN: 978-9683635914
- [4] T. JECH, *Set Theory*, 3rd Millennium edition, Springer, 2002. ISBN: 978-3540440857
- [5] K. J. DEVLIN, *Constructibility*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984. ISBN: 978-0387132587
- [6] A. HAJNAL, P. HAMBURGER, *Set theory*, London Mathematical Society Student Texts 48, Cambridge University Press, 1999. ISBN: 978-0521596671
- [7] K. KUNEN, *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 102, North-Holland, Amsterdam, 1980. ISBN: 978-1848900509

Tabla de símbolos

$H(\kappa)$, 9
 $J_{<\lambda}(a)$, 33
 $[\xi, \eta)_{\text{reg}}$, 4
 CN , 3
 ON , 1
 $\text{cf}(\prod a/D)$, 23
 $\text{cf}(\prod a/I)$, 22
 $\chi_N(\alpha)$, 14
 $\langle N_i : i < \gamma \rangle$, 13
 $\lim_D a$, 26
 $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, 10
 $\text{pcf}(a)$, 24
 $\text{pcf}_\mu(a)$, 71
 $\prod a$, 2
 $\text{tcf}(\prod a/I)$, 22
 $b_\lambda(a)$, 46
 $f \leq_D g$, 23
 $f \leq_I g$, 21
 $\text{otp}(E)$, 28