



UNIVERSIDAD MICHOCANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

“SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA PROPAGACIÓN DE UN FRENTE FRÍO EN UN POZO GEOTÉRMICO”

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

PRESENTA:

MARÍA GUADALUPE SOLORIO ANDRADE

DIRECTOR DE TESIS:

**DOCTOR EN CIENCIAS
RAFAEL GONZÁLEZ CAMPOS**

MORELIA, MICHOCÁN, ENERO DE 2015

*Dedicado a
esas cinco personitas*

Agradecimientos

Primeramente a Dios que me ha dado vida y salud hasta estas alturas de mi vida. Para dos grandes seres humanos que han estado a mi lado desde el inicio de mi ser y que siguen y seguirán en mis pensamientos; a esas grandes creaciones que Dios me dio como padres. A mis hermanos que fueron y siguen siendo parte de mi crecimiento, siguen siendo parte de mis alegrías y algunas veces mis consejeros también.

A tí, que me has apoyado los últimos años, poniendo tu esfuerzo, creyendo y esperando en mí, doy gracias a la vida por haberte puesto a mi lado, gracias amorcito.

A esas personas con las que nos hemos visto envueltas en esos caminos en los que coincidimos hablando de nuestro futuro, los planes para la vida, cuestiones de política y en las que me he apoyado y me han dado su tiempo y compartido sus vidas con éxitos y problemas, gracias amigos!!.

A ésta institución y las personas que la conforman, que me han dado formación en la disciplina y me han proporcionado una herramienta para continuar con mis metas.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	VII
Abstract	IX
1. Introducción	1
2. Reacción-difusión y reacción-difusión telégrafo	3
2.1. Ecuación de reacción-difusión	3
2.1.1. Formulación fenomenológica de la ecuación RD	4
2.2. La ecuación telégrafo	5
2.2.1. Desde el punto de vista matemático	5
2.2.2. Sistemas de reacción-Cattaneo y ecuaciones de reacción-telégrafo	6
2.2.3. Reacciones y caminos persistentes aleatorios	7
3. Matrices diferintegrales	11
3.1. Matrices de diferenciación rápidas	13
4. Transformada Fraccionaria de Fourier	15
4.1. Cuadratura de la transformada fraccional de Fourier	16
4.1.1. Fórmulas asintóticas	18
4.2. Una rápida transformada fraccional de Fourier discreta	20
4.2.1. La XFT como una mejora de la FFT	20
4.2.2. La XFT como una rápida transformada fraccional de Fourier	25
5. Método de Picard	29
6. Sobre pozos geotérmicos	33
6.1. Introducción	33
6.2. Sistemas geotérmicos	35
6.3. Recurso geotérmico y energía eléctrica	36
6.4. Exploración de los recursos geotérmicos	37
6.4.1. Exploración superficial	37

6.4.2. Perforación de pozos exploratorios	40
6.5. Campo geotérmico de Los Azufres, Michoacán	40
6.5.1. Localización, medio físico y estado actual de Los Azufres	41
6.6. Antecedentes al problema	42
7. Resolviendo la propagación de un frente frío	45
7.1. Situación del problema	45
7.2. Resolviendo la ecuación telégrafo	46
Conclusiones	57
8. Anexo	59
8.1. Solución fundamental de la ecuación de difusión	59
8.2. Solución general a la ecuación de reacción-difusión	60
8.3. Solución a la ecuación de reacción-telégrafo	61
8.4. Código solución en Mathematica	63

Resumen

En este trabajo se simula numéricamente la propagación de un frente frío en un yacimiento geotérmico poroso, homogéneo y no fracturado para un líquido de una fase, a través del uso de la ecuación de advección-difusión que describe la transferencia de calor a través de un fluido con velocidad finita en un medio poroso.

Usando un método nuevo de elemento de frontera simularemos la propagación del frente frío de agua reinyectada en un yacimiento geotérmico, mediante la ecuación de reacción-difusión telégrafo que modela la difusión de calor, con un término de reacción obtenido a partir de la ecuación de advección-difusión, para ello se usará un nuevo algoritmo, el cuál calcula la transformada de Fourier, se recurre a herramientas como el teorema de convolución y al hecho de que la solución de la ecuación telégrafo puede escribirse como una transformación integral en términos de la solución fundamental.

Palabras clave: ecuación telégrafo, ecuación advección-difusión, transformada de Fourier, pozo geotérmico

Abstract

This paper numerically simulates the propagation of a cold front in a reservoir geothermal porous, homogeneous and not broken for a liquid phase, through the use of the advection-diffusion equation describing heat transfer through a fluid with finite velocity in a porous medium. Using a new method of border element simulate the propagation of the cold front reinjected water in a geothermal reservoir, by reaction-diffusion equation telegrafo modeling the diffusion of heat, with a term of reaction obtained from the equation of advection-diffusion, to do a new algorithm, which calculates the Fourier transform was used tools are used as the convolution theorem and the fact that the solution of the telegraph equation can be written as an integral transformation in terms of the fundamental solution.

Keywords: telegraph equation, advection-diffusion equation, Fourier transform, geothermal well

Capítulo 1

Introducción

Existen en la naturaleza una amplia gama de fenómenos que se pueden modelar usando las ecuaciones de transporte, difusión y de onda, por esta razón es tan importante el estudio de la propagación e interacción de ondas en diversas ramas de la ciencia; entre algunos ejemplos podemos citar: ondas electromagnéticas, ondas sonoras, vibraciones de cuerdas o membranas, ondas de densidad de tráfico, olas en la superficie de un líquido y señales en las líneas de transmisión. Dos ejemplos interesantes se obtienen al combinar dos de las tres ecuaciones anteriores: la ecuación de advección difusión (transporte con calor), y la ecuación telégrafo (onda con calor). Estas ecuaciones, además de ser interesantes desde los puntos de vista físico y matemático, tienen una variedad de aplicaciones: modelos de dispersión de poblaciones, transferencia de contaminantes, calidad del aire, difusión en océanos y líneas de transmisión. En este trabajo se verán implicadas estas ecuaciones ya que nuestro trabajo conlleva la descripción de la variación de la temperatura a lo largo de un medio geotérmico.

La energía geotérmica se obtiene a partir de la energía térmica de la Tierra y aunque el recurso de calor terrestre es masivo, las altas temperaturas se encuentran a profundidades accesibles solamente en pocos sitios, la mayoría solamente en zonas volcánicas. Cuando el magma está presente a profundidades lo suficientemente someras para calentar la roca sobre yacente, y la roca está impregnada de agua atrapada en el subsuelo, se crean acumulaciones (reservorios geotérmicos) de fluido sobrecalentado.

Los factores esenciales para la existencia de un buen recurso geotérmico son: calor, fluidos y permeabilidad (fracturas), estas zonas donde se explota el recurso geotérmico es llamado campo geotérmico y su desarrollo consiste en la identificación, extracción y uso de la energía de estos reservorios de fluido sobrecalentado. Para acceder al vapor o líquido geotérmico se perforan pozos (pozos de inyección y pozos de producción). En la superficie, se utilizan turbinas (por lo general de vapor de ciclo convencional o de ciclo binario) para convertir el vapor o el líquido extraído desde el interior de la tierra en energía eléctrica. Al final del proceso el fluido geotérmico se enfría y se reinyecta en el subsuelo para que se caliente nuevamente en el reservorio geotérmico. De esta manera se forma un ciclo totalmente renovador que permite extraer con continuidad y explotar el calor contenido al interior de la Tierra. En plantas geotermoeléctricas, la inyección al yacimiento del agua separada de pozos y condensado de vapor suele ser la solución al manejo de los altos contenidos de sólidos contaminantes, y aunque tal

operación tiene efectos positivos al mantener la presión en el yacimiento o en las fronteras del mismo; suele tener efectos colaterales que pueden presentarse debido a la irrupción del frente de baja temperatura sobre zonas de producción. Por lo anterior, juega un papel principal el evaluar la velocidad de dicha irrupción y de esta manera establecer la viabilidad de los pozos de inyección. Es necesario obtener información de velocidades en la interferencia térmica y datos de permeabilidad entre los pozos de inyección que recargan las zonas productoras de los mismos. Este tipo de información es requerida para la evaluación de la factibilidad del pozo en cuanto a costo de producción frente a la rentabilidad a través del tiempo. Cuando se reinyecta la salmuera en el subsuelo para que se caliente nuevamente en el reservorio geotérmico ésta se mueve a través del medio entre el pozo inyector y el pozo productor, las constantes reinyecciones provocan que se vaya enfriando el reservorio.

En este trabajo se modela el problema anterior unidimensional en un yacimiento poroso, homogéneo y no fracturado para un líquido de una fase, usando la ecuación de advección-difusión que describe la transferencia de calor a través de un fluido con velocidad finita en un medio poroso; esta ecuación se escribe como (Ver la notación en el cap. 7).

$$\frac{\partial}{\partial t}[(1-\phi)\rho_r C_r + \phi\rho_w C_w]T + \frac{\partial}{\partial x}(u_w \rho_w C_w T) - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Así también el problema de valores iniciales que modela la difusión de calor, suponiendo esta difusión con una velocidad finita y con un término de reacción es la ecuación de reacción-difusión telegráfica.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = F(T) + \frac{\alpha}{c^2} F'(T) \frac{\partial T}{\partial t}, \quad t > 0,$$

donde $F(T)$ es el término de reacción que modifica la difusión o la transferencia de calor. Estas dos ecuaciones son la base para nuestro estudio.

Usando un método nuevo de elemento de frontera simularemos la propagación del frente frío de agua reinyectada en un yacimiento geotérmico poroso, homogéneo y no fracturado mediante la ecuación de reacción-difusión telegráfica, con un término de reacción obtenido a partir de la ecuación de advección-difusión, para ello se usará un nuevo algoritmo, el cuál calcula la transformada de Fourier, recurriremos a herramientas como el teorema de convolución y al hecho de que la solución de la ecuación telegráfica puede escribirse como una transformación integral en términos de la solución fundamental.

El presente trabajo esta dividido en dos bloques, en el primero los capítulos 2, 3, 4 y 5 cubren las herramientas matemáticas necesarias para la simulación del problema físico en cuestión, se explica la obtención de la ecuación telegráfica, se explica la formulación de una nueva transformada fraccional rápida de Fourier y de su algoritmo; el segundo bloque, el capítulo 6 y 7 trata las características geofísicas de un campo geotérmico, se describen las características del reservorio geotérmico de Los Azufres, Michoacán y se analiza el caso específico de los pozos Az-64 como inyector y Az-05 como productor en el campo geotérmico, se procede a realizar la simulación numérica y se muestra el código del algoritmo en el programa Mathematica, se dan las conclusiones obteniendo como resultados que la permeabilidad entre ellos es de 538.5 mili-Darcys lo cual indica que hay una pronta recuperación de la salmuera reinyectada y se obtiene la velocidad del frente térmico de 1.56 km/año, que es muy alta.

Capítulo 2

Las ecuaciones de reacción-difusión y reacción-difusión telégrafo

Partículas tales como moléculas, átomos o iones e incluso células o animales, se mueven en el espacio impulsados por varias fuerzas. En forma particular, las partículas o individuos pueden moverse aleatoriamente, experimentando procesos de salto de velocidad o procesos de brincos espaciales. Los pasos de caminos aleatorio pueden ser independientes o correlativos ¹. La función de probabilidad de densidad (PDF) para un salto prolongado puede decaer rápidamente o mostrar un final lento. De igual manera, la PDF para el recorrido temporal entre dos saltos sucesivos puede decaer rápidamente o tener un final lento.

El modelo simple y clásico para la propagación o dispersión espacial es la ecuación de difusión o segunda ley de Fick, la cual en un sistema espacial unidimensional se escribe

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (2.1)$$

donde D es el coeficiente de difusión. Como bien se sabe, las partículas que presentan un simple camino azaroso o movimiento Browniano a nivel microscópico representan dispersión difusa a nivel macroscópico.

2.1. Ecuación de reacción-difusión

En matemáticas, una solución fundamental para un operador diferencial con derivadas parciales L es una formulación en el lenguaje de la teoría de distribuciones. En términos de la función delta de Dirac $\delta(x)$, una solución fundamental F es la solución de la ecuación no homogénea $LF = \delta(x)$. La ecuación (2.1) tiene solución fundamental dado el origen $x = 0$ y

¹Por “correlativo”queremos decir que si una partícula se dirige en una dirección entonces hay probabilidad distinta de cero de que siga en la misma dirección por algún tiempo y ésta probabilidad se va a cero cuando el intervalo de tiempo aumenta.

$t = 0$, y $\rho(x, 0) = \delta(x)$.²

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right), \quad t > 0. \quad (2.2)$$

Si las partículas o individuos reaccionan o interactúan de acuerdo a una misma ley de cambio $F(\rho)$ y al mismo tiempo experimentan difusión, es válido pensar en combinar la ecuación de difusión y la ecuación de reacción $\dot{\rho} = F(\rho)$. El resultado es la bien conocida ecuación de reacción-difusión (RD):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + F(\rho), \quad (2.3)$$

la cual estipula una estructura teórica para las dinámicas espacio-temporales.

La simple aproximación matemática de combinar la ecuación de reacción y la ecuación de difusión, genera dos aproximaciones fundamentales para derivar la ecuación de RD (2.3). Llamemos una aproximación fenomenológica a la basada en la ley de conservación y una aproximación mesoscópica a la basada en una descripción del movimiento aleatorio fundamental. Mientras esto es bastante directo al mostrar que la ecuación de reacción-difusión estándar preserva la positividad, el problema es más complicado, pero no intratable, para otras ecuaciones de reacción-transporte. En este contexto, una aproximación mesoscópica tiene mérito definitivamente. Si ésta aproximación está dada correctamente y es válida para todos los eventos de reacción y transporte que las partículas pueden experimentar, entonces por construcción la evolución de la ecuación resultante preserva la positividad y representa una ecuación de reacción-difusión válida.

2.1.1. Formulación fenomenológica de la ecuación RD

Sea S una superficie arbitraria encerrada en un volumen V con independencia temporal. La ley general de conservación para los estados de densidad de la partícula en la cual la tasa de cambio de la cantidad de partículas en V está dada por el flujo de las partículas cruzando la superficie S además de la producción neta de partículas en V :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = - \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_V F(\rho, \mathbf{x}, t) dV, \quad (2.4)$$

donde $\rho(\mathbf{x}, t)$ representa la densidad de las partículas en \mathbf{x} al tiempo t , \mathbf{J} el flujo de partículas, y F la tasa neta de producción de ρ . Aplicando el teorema de la divergencia,

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV, \quad (2.5)$$

a (2.4) obtenemos

$$\int_V dV \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} - F \right] = 0. \quad (2.6)$$

²Ver anexo.

De aquí obtenemos la ecuación de conservación o ecuación de continuidad para ρ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} + F(\rho). \quad (2.7)$$

La ecuación de continuidad (2.7) necesita ser concluida vía una ecuación constitutiva para el flujo \mathbf{J} . Si el proceso corresponde a la difusión clásica, la ecuación constitutiva está dada por la primera ley de Fick,

$$\mathbf{J} = -D\nabla\rho. \quad (2.8)$$

Sustituyendo esta expresión en (2.7), se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla\rho) + F(\rho). \quad (2.9)$$

Si D es constante, (2.9) se reduce a (2.3) en el caso unidimensional.

2.2. La ecuación telégrafo

La ecuación de difusión tiene la bien conocida característica irreal que localiza perturbaciones a velocidad infinitamente rápidas, pensando con dificultad en la disminución, por medio del sistema. Para ver esto, considere la solución fundamental (2.2). No importa que tan pequeño sea t y que tan grande x , la densidad ρ será distinta de cero, considerándose la exponencial pequeña. En muchos casos, ésta patología de la ecuación de difusión y la ecuación de reacción-difusión tiene consecuencias insignificantes y (2.1) y (2.3) son puestas a prueba para hacer descripciones en numerosas circunstancias y sistemas.

El origen del comportamiento no físico de las ecuaciones de difusión y de reacción-difusión puede ser entendido de tres diferentes puntos de vista: (i) el matemático, (ii) el macroscópico o punto de vista fenomenológico y (iii) el mesoscópico.

2.2.1. Desde el punto de vista matemático

Para un punto de vista matemático, el origen de la propagación infinitamente rápida de perturbaciones locales en la ecuación de difusión puede ser tratada por su carácter parabólico. Esto puede ser orientado de una manera que añadiendo un pequeño término $\tau\partial_{tt}\rho$ a la ecuación de difusión o a la ecuación de reacción-difusión puede convertirse en hiperbólico. Para la ecuación de difusión (2.1) se obtienen la ecuación telégrafo, una ecuación de onda suavizada,

$$\tau \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (2.10)$$

La solución fundamental de esta ecuación con el punto en el origen $x = 0$ y $t = 0$ está dada por:

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{N} \exp\left[-\frac{t}{2\tau}\right] I_0\left[\frac{1}{N}\sqrt{\xi}\right], & |x| < \sqrt{\frac{D}{\tau}}t, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (2.11)$$

y converge a la solución (2.2) de la ecuación de difusión cuando $\tau \rightarrow 0$, aquí I_0 es la función modificada de Bessel, $\xi = \frac{Dt^2}{\tau} - x^2$, y $\mathcal{N} = \sqrt{4D\tau}$. La ecuación (2.11) muestra explícitamente que perturbaciones gobernadas por la ecuación telégrafo se propagan con velocidad finita $\sqrt{D/\tau}$, como se esperaba para una ecuación de onda suave. Agregando el término $\tau \partial_{tt}\rho$ a (2.3), se obtiene la ecuación de reacción-difusión hiperbólica (HRDEs):

$$\tau \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + F(\rho). \quad (2.12)$$

En el límite cuando $\tau \rightarrow 0$, (2.12) tiende a la ecuación de reacción-difusión (2.3). La propagación en HRDEs ha sido estudiado tanto analítica como numéricamente pero su uso en aplicaciones es un poco más complicado, pues estas ecuaciones han sido obtenidas muy claramente de una manera ad hoc para sistemas de reacción y dispersión de partículas, y tampoco pueden ser derivadas ecuaciones para fenómenos termodinámicos ni para ecuaciones más microscópicas.

2.2.2. Sistemas de reacción-Cattaneo y ecuaciones de reacción-telégrafo

Para un punto de vista macroscópico o fenomenológico, la ecuación de reacción - difusión se deduce de la ecuación de continuidad y del uso de la primera ley de Fick como la ecuación constitutiva ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x} + F(\rho) \quad (2.13)$$

La primera ley de Fick implica que el flujo se ajusta instantáneamente al gradiente de la densidad. Este es físicamente poco realista, y da lugar a la característica patológica de propagación infinitamente rápida de las perturbaciones locales en la ecuación de difusión . Cattaneo y otros, han argumentado que el flujo se ajusta a la pendiente con un pequeño tiempo τ de relajación distinto de cero. La primera ley de Fick debe ser reemplazada como ecuación constitutiva por la ecuación de Cattaneo

$$\tau \frac{\partial J}{\partial x} + J = -D \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (2.14)$$

Se nombra al sistema (2.13) y (2.14) sistema de racción-Cattaneo. Si derivamos (2.13) con respecto a t y (2.14) con respecto a x y eliminamos las segundas derivadas mixtas, obtenemos la denominada ecuación de reacción - telégrafo,

$$\tau \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + [1 + \tau F'(\rho)] \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + F(\rho). \quad (2.15)$$

Observación: Para algunos autores el término ecuación de reacción-difusión hiperbólica es usado para referirse a las ecuaciones de reacción-telégrafo.

Hay que tener en cuenta que la ecuación de reacción - telégrafo (2.15) se diferencia de la especial HRDE (2.12) por el término adicional $-\tau F'(\rho)(\partial \rho / \partial t)$ en el lado izquierdo. Se puede demostrar que las soluciones de (2.15) convergen a las soluciones de la ecuación de reacción-difusión (2.3) cuando $\tau \rightarrow 0$.³ Los sistemas hiperbólicos derivados desde un punto de

³Ver solución de(2.15) en Anexo

vista matemático o macroscópico superan la característica patológica de la ecuación de reacción-difusión, pero sufren de otros inconvenientes: (i) las ecuaciones hiperbólicas normalmente no preservan la positividad. Incluso si $\rho(x,0) \geq 0$, la solución $\rho(x,t)$ de (2.15) se asumirá, en general, también valores negativos, lo cual es inaceptable para una densidad real. (ii) A fin de garantizar el carácter disipativo de la ecuación de reacción - telégrafo (2.15), el coeficiente de amortiguamiento $1 - \tau F'(\rho)$ será positivo, es decir,

$$F'(\rho) < \frac{1}{\tau} \quad \text{para todo } \rho. \quad (2.16)$$

Esta relación entre el tiempo de relajación τ del flujo y la escala temporal $1/F'(\rho)$ de la reacción, que parece ser un requisito puramente matemático. El siguiente enfoque, el mesoscópico, arrojará luz sobre los problemas fundamentales de los sistemas de reacción- Cattaneo (2.13) y (2.14) y la ecuación de reacción - telégrafo (2.15) insinuados en los puntos (i) y (ii) .

2.2.3. Reacciones y caminos persistentes aleatorios

Desde un punto de vista mesoscópico, la patología de la ecuación de difusión se puede remontar a la falta de inercia de las partículas brownianas; su dirección en el movimiento dentro de intervalos sucesivos de tiempo no está correlacionado. Esta falta de correlación tiene dos consecuencias: (i) Las partículas se mueven con velocidad infinita. Hay una cierta probabilidad, aunque exponencialmente pequeña, de que una partícula de dispersión viaje arbitrariamente lejos de su posición actual en algún tiempo pequeño pero distinto de cero. Claramente, esto no puede ser cierto para las moléculas o los organismos. (ii) El movimiento de los individuos en dispersión es impredecible incluso en las escalas de tiempo más pequeñas. Una vez más, esto no puede ser verdad, ya sea para las moléculas u organismos. Por tanto, es deseable adoptar un modelo de dispersión que conduzca a movimientos más predecibles con velocidad finita en escalas de tiempo más pequeñas y enfoques de movimiento difusivo en escalas de tiempo mayores. El cambio natural es un persistente camino aleatorio, también conocido como un camino aleatorio correlacionado. En el camino aleatorio persistente las partículas tienen una velocidad finita bien definida. Sin embargo, la velocidad media de las partículas se desvanece, y no hay flujo de convección en el sistema. En el paseo aleatorio correlacionado o persistente, una partícula o individuo toma pasos de longitud Δx y duración Δt . La partícula continúa en su dirección anterior con probabilidad $\alpha = 1 - \mu\Delta t$ y cambia de dirección con probabilidad $\beta = \mu\Delta t$. En el límite continuo $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$, tal que

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \gamma = \text{cte.} \quad (2.17)$$

se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones para la densidad de las partículas que van hacia a la derecha, $\rho_+(x,t)$, y la densidad de las partículas que van hacia a la izquierda, $\rho_-(x,t)$:

$$\frac{\partial \rho_+}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \rho_+}{\partial x} = \mu(\rho_- - \rho_+), \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \rho_-}{\partial t} - \gamma \frac{\partial \rho_-}{\partial x} = \mu(\rho_+ - \rho_-). \quad (2.19)$$

Las partículas viajan con velocidad γ y regresan con frecuencia μ . El camino persistente azaroso se caracteriza por dos parámetros, en contraste con el paseo aleatorio ordinario o movimiento browniano, que está completamente caracterizado por el coeficiente de difusión D . El paseo aleatorio persistente abarca toda la gama de la dispersión, para el movimiento balístico, en el límite $\mu \rightarrow 0$, al movimiento difusivo, en el límite de $\gamma \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow \infty$, tal que $\lim \gamma^2/2\mu = D = cte$. La densidad total de las partículas de dispersión está dada por

$$\rho(x, t) = \rho_+(x, t) + \rho_-(x, t), \quad (2.20)$$

y el flujo J de partículas viene dada por $J = \gamma j$, donde el "flujo" j se define como

$$j(x, t) = \rho_+(x, t) - \rho_-(x, t). \quad (2.21)$$

Sumando (2.18) y (2.19) obtenemos la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \quad (2.22)$$

Restando (2.19) de (2.18) recobramos la ecuación de Cattaneo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \frac{\partial j}{\partial x} = -2\mu j. \quad (2.23)$$

Diferenciando (2.22) con respecto a t y (2.23) con respecto a x y eliminando las segundas derivadas mixtas, se obtiene la ecuación telégrafo

$$\tau \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (2.24)$$

donde

$$\tau = \frac{1}{2\mu} \quad (2.25)$$

es el tiempo de correlación del proceso de regreso de las partículas, y

$$D = \frac{\gamma^2}{2\mu}. \quad (2.26)$$

El movimiento browniano, o la ecuación de difusión, deja de ser un buen modelo para la dispersión a escalas donde las partículas o individuos tienen una velocidad bien definida. En la mayoría de las aplicaciones físicas o químicas, la escala limitante se determina por la media del camino libre. En los líquidos, la media del camino libre es una fracción del diámetro molecular, y la persistencia o efectos de la inercia son insignificantes, incluso en las escalas mesoscópicas. La velocidad no es una variable relevante en estas situaciones, y la posición de la partícula está determinada por muchos efectos independientes. Por lo tanto, la dispersión tiene un carácter fuertemente difusivo, y las ecuaciones de reacción-difusión son una descripción apropiada para las reacciones químicas en soluciones acuosas.

La difusión turbulenta y la dispersión de los animales, particularmente las bacterias, son otras dos áreas en las que la velocidad de las partículas u organismos está bien definida, y los

efectos de persistencia no son insignificantes, en escalas macroscópicas. El camino aleatorio persistente o correlacionado también ofrece una mejor descripción para la propagación espacial en la dinámica poblacional. Microorganismos y animales tienden a continuar moviéndose en la misma dirección en intervalos de tiempo sucesivos. La velocidad está bien definida y los efectos de persistencia son importantes en escalas macroscópicas.

Además de estas consideraciones prácticas, que describen el movimiento de las partículas o individuos por un camino aleatorio persistente, tiene varias ventajas desde un punto de vista teórico: (i) El paseo aleatorio persistente es una generalización del movimiento browniano; ella contiene el último como un caso límite. (ii) El paseo aleatorio persistente supera la característica patológica de movimiento browniano o la ecuación de difusión discutido anteriormente; cumple el requisito físico de la velocidad limitada. (iii) El paseo aleatorio persistente ofrece un tratamiento unificado que cubre toda la gama de transporte, desde el límite difusivo al límite balístico. Si las partículas que se mueven de acuerdo a un paseo aleatorio persistente reaccionan entre otras, las ecuaciones de evolución para las densidades, (2.18) y (2.19), deben modificarse para incluir un temporal de tipo cinético. Las contribuciones de los diferentes procesos, tales como reacción y el transporte, en la evolución de un sistema son aditivos, si todos los procesos son Markovianos. Entonces el camino persistente aleatorio es un proceso Markoviano, esto es legítimo al añadir términos cinéticos a la ecuación de transporte para (ρ_+, ρ_-) :

$$\frac{\partial \rho_+}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \rho_+}{\partial x} = \mu(\rho_- - \rho_+) + F_+(\rho_+, \rho_-), \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \rho_-}{\partial t} - \gamma \frac{\partial \rho_-}{\partial x} = \mu(\rho_+ - \rho_-) + F_-(\rho_+, \rho_-). \quad (2.28)$$

Observación. Si el estado espacial se reduce de dos variables, (ρ_+, ρ_-) , a una variable, ρ , el proceso deja de ser Markoviano. No es legítimo añadir simplemente un término cinético a (2.24).

El problema que surge es cómo "distribuir", el término cinético $F(\rho)$ de la ecuación de reacción-difusión a las densidades de izquierda y derecha en curso ρ_+ y ρ_- . La opción más comúnmente hecha en la literatura [1, 41, 40, 2, 39] es la denominada camino de reacción isotrópico (IRW):

$$F_+(\rho_+, \rho_-) = F_-(\rho_+, \rho_-) = \frac{1}{2}F(\rho). \quad (2.29)$$

Ésta elección se basa en la suposición de que $F(\rho)$ es un término fuente para las partículas, que la reacción no depende de la dirección del movimiento, y que las nuevas partículas cambian cualquier dirección con igual probabilidad. Con (2.29) se obtiene a partir de (2.27) y (2.28) el sistema de reacción-Cattaneo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \frac{\partial j}{\partial x} = F(\rho), \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial j}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \rho}{\partial x} = -2\mu j. \quad (2.31)$$

Ondas que viajan por caminos de reacción isotrópicos se han estudiado en [1, 2]. Sin embargo, los caminos de reacción isotrópicos son poco sólido; violan un principio básico de la cinética [1, 2, 3], a saber, que la velocidad de eliminación o la muerte de las partículas de un tipo dado

debe ir a cero a medida que la densidad de estas partículas tiende a cero. De lo contrario, la concentración de esas partículas puede llegar a ser negativa, por supuesto no es físico. Consideramos aquí una clase de caminos aleatorios de reacción (RRWs) que están libres de este inconveniente. Los términos cinéticos se basan en los siguientes supuestos: (i) Las partículas se someten a un proceso de nacimiento y muerte con "fertilidad" y "mortandad" que son independientes de la dirección del movimiento de las partículas. (ii) La dirección de partículas "hijas" se correlacionan con el de la partícula "madre". El grado de correlación se da por correspondencia. El grado de correlación está dado por κ . El valor $\kappa = 1/2$ corresponde a ninguna correlación, $\kappa = 1$ a correlación completa, y $\kappa = 0$ corresponde a la anticorrelación completa. En luz de asumir (i), es conveniente adoptar la forma de producción-pérdida de $F(\rho)$. Entonces

$$F_+(\rho_+, \rho_-) = [\kappa\rho_+ + (1 - \kappa)\rho_-]f^+(\rho) - f^-(\rho)\rho_+, \quad (1.32a)$$

$$F_-(\rho_+, \rho_-) = [(1 - \kappa)\rho_+ + \kappa\rho_-]f^+(\rho) - f^-(\rho)\rho_-, \quad (1.32b)$$

donde $f^+(\rho)$ y $f^-(\rho)$ están definidas como:

$$F_i^+(\rho) = f_i^+(\rho)\rho_i, \quad F_i^-(\rho) = f_i^-(\rho)\rho_i.$$

Tenga en cuenta que si $F^+(\rho)$ contiene un término constante a , entonces $f^+(\rho)$ contiene el término a/ρ . Otros cambios válidos para los términos cinéticos son posibles. Una discusión de este aspecto desde el punto de vista de la química cinética y dinámicas poblacionales pueden encontrarse en [3].

Capítulo 3

Matrices diferintegrales

En esta sección se resumen algunos resultados ya conocidos sobre este tipo de matrices. Las pruebas y más aplicaciones pueden encontrarse en [19, 20, 22, 23, 25].

Considérese N números complejos diferentes z_1, z_2, \dots, z_N y un polinomio $f_m(z)$ de grado $m \leq N-1$. Entonces, la derivada en N puntos de $f_m(z)$ obtenida mediante la fórmula (compleja) de Hermite en los nodos puede escribirse en la forma [21, 23]

$$f'_m(z_j) = \sum_{k=1}^N \mathcal{D}_{jk} f_m(z_k), \quad (3.1)$$

donde

$$\mathcal{D}_{jk} = \begin{cases} \sum_{l \neq j}^N \frac{1}{(z_j - z_l)}, & j = k, \\ \frac{P'(z_j)}{(z_j - z_k) P'(z_k)}, & j \neq k, \end{cases} \quad (3.2)$$

y $P(z) = \prod_{k=1}^N (z - z_k)$. Esto significa que \mathcal{D} es una matriz de diferenciación que da derivadas exactas en el espacio de polinomios de grado a lo más $N-1$.

Ahora considérese una función $\gamma(z)$ en un intervalo real. La derivada de la función $u_m(z) = \gamma(z)f_m(z)$, evaluada en los nodos toma la forma

$$\begin{aligned} u'_m(z_j) &= \gamma(z_j) \left(f'_m(z_j) + \frac{\gamma'(z_j)}{\gamma(z_j)} f_m(z_j) \right) = \gamma(z_j) \left(\sum_{k=1}^N \mathcal{D}_{jk} + \frac{\gamma'(z_j)}{\gamma(z_j)} \right) f_m(z_k) \\ &= \sum_{k=1}^N D_{jk} u_m(z_k), \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde los elementos D_{jk} , dados por

$$D_{jk} = \gamma(z_j) \left(\mathcal{D}_{jk} + \frac{\gamma'(z_j)}{\gamma(z_j)} \right) / \gamma(z_k), \quad (3.4)$$

definen la $N \times N$ matriz de diferenciación D que da derivadas exactas en el espacio generado por $u_m(z)$, $m = 0, 1, \dots, N-1$.

Sea $e^{-x^2/2}$ la función $\gamma(x)$. Ya que el sistema ortogonal $e^{-x^2/2}H_m(x)$ es cerrado en $L^2(\infty, \infty)$, (3.4) da una matriz para aproximar derivadas en este espacio. Ya que los elementos diagonales de D están dados por

$$D_{jj} = \sum_{l \neq j}^N \frac{1}{(x_j - x_l)} + \frac{\gamma'(x_j)}{\gamma(x_j)},$$

podemos seleccionar los ceros del N -ésimo polinomio de Hermite $H_N(x)$, x_1, x_2, \dots, x_N , como nodos y aplicar las fórmulas electrostáticas para los ceros de los polinomios ortogonales clásicos [28] para obtener una matriz de diferenciación D con elementos diagonales nulos, i.e.,

$$D = GD_0G^{-1}, \quad (3.5)$$

donde G es la matriz diagonal cuyos elementos diagonales están dados por $e^{-x_j^2/2}H'_N(x_j)$, y donde x_j es el j -ésimo cero de $H_N(x)$, y

$$(D_0)_{jk} = \begin{cases} 0, & j = k, \\ \frac{1}{(x_j - x_k)}, & j \neq k. \end{cases} \quad (3.6)$$

En [29] se muestra que

$$E^{-1}D_0E = iX,$$

donde X es la matriz cuyos elementos diagonales están dados por los ceros de Hermite x_j , $j = 1, 2, \dots, N$, y E es la matriz de elementos

$$E_{jk} = \frac{2^{N-1}(N-1)!}{N H_{N-1}(t_j) H_{N-1}(t_k)} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{i^n}{2^n n!} H_n(t_j) H_n(t_k).$$

Por lo tanto, la matriz de diferenciación D dada por (3.5) es diagonalizada por la matriz GE excepto por una transformación de similitud con una matriz diagonal. Así, definiendo

$$F = GES, \quad (3.7)$$

donde $S_{jk} = (-1)^{j-1} \delta_{jk}$, $j, k = 1, 2, \dots, N$, tenemos que

$$F^{-1}DF = iX, \quad (3.8)$$

y ya que $x_j \neq 0 \forall j$, para N par, obtenemos el resultado

$$D^q = F(iX)^q F^{-1}, \quad q \in \mathbb{Z}. \quad (3.9)$$

Nótese que la derivada de una función de la forma $u(x) = e^{-x^2/2}f(x)$ donde $f(x)$ es un polinomio, resulta en una función de la misma clase donde el grado del polinomio se incrementa por

la unidad. Por lo tanto si $q > 0$, (3.9) produce una matriz de diferenciación que da derivadas exactas $u^{(q)}(x)$, $q = 1, 2, \dots, m$, $m \leq N$, para esa clase de funciones donde $f(x)$ es un polinomio de grado a lo más $N - m$. El caso de $q < 0$ es diferente puesto que en general las antiderivadas de $u(x)$ no pertenecen a la misma clase de funciones. Sin embargo, ya que D^{-q} es la inversa de D^q , (3.9) da antiderivadas exactas si $u(x)$ es tal que $\int^x u(t)dt$ se acerca a cero en infinito en la manera que lo hace $e^{-x^2/2}$.

3.1. Matrices de diferenciación rápidas

Las matrices D y F dadas por (3.5) y (3.7) respectivamente, toman formas simples para N suficientemente grande. Usando la expresión asintótica para $H_N(x)$ en la región oscilatoria [28]

$$H_N(x) = \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N/2+1)} e^{x^2/2} \left(\cos(\sqrt{2N+1} x - N\pi/2) + \mathcal{O}(N^{-1/2}) \right) \quad (3.10)$$

se tiene que la forma aproximada para los ceros de $H_N(x)$

$$x_j = \left(\frac{2j - N - 1}{\sqrt{2N}} \right) \frac{\pi}{2}, \quad (3.11)$$

$j = 1, 2, \dots, N$, por lo que el uso de (3.10) y (3.11) produce

$$H'_N(x_j) = 2NH_{N-1}(x_j) \simeq (-1)^{N+j} \frac{2N\Gamma(N)}{\Gamma(\frac{N+1}{2})} e^{x_j^2/2}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, en el límite asintótico, (3.5) puede escribirse como

$$D_{jk} = \begin{cases} 0, & j = k, \\ \frac{(-1)^{j+k}}{(x_j - x_k)}, & j \neq k, \end{cases} \quad (3.12)$$

y (3.7) toma la expresión

$$F_{jk} = (-1)^{j+k} E_{jk}. \quad (3.13)$$

En esta forma, F es una transformada discreta de Fourier [26] que surge de una fórmula de cuadratura de la transformada fraccional de Fourier. El algoritmo rápido que da el producto de F por un vector se conoce como XFT (Ver capítulo 4). Así, la XFT aplicada a (3.9) produce una matriz de diferenciación rápida si $q > 0$ o una matriz de integración rápida si $q < 0$, de acuerdo al siguiente algoritmo.

Algoritmo

Para calcular una aproximación $g = (g_1, g_2, \dots, g_N)^T$ de la q -ésima derivada ($q > 0$) o de la q -ésima antiderivada ($q < 0$) de la función $f(x)$ según dada por el vector

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T.$$

INPUT: Real q y entero N

1. Hacer los vectores x y s según dados por $x_j = \pi(2j - N - 1)/(2\sqrt{2N})$ y $s_j = e^{-i\pi\frac{N-1}{N}(j-1)}$, $j = 1, 2, \dots, N$.
2. Calcular el vector u como la inversa FFT del vector f/s .
3. Calcular el vector v como la FFT del vector $(i4x/\pi)^q u$.
4. Obtener el resultado g como el producto sv .

Nótese que hay un factor de $4/\pi$ en el tercer paso. Esto se debe al hecho de que la XFT produce una transformada de Fourier escalada por $4/\pi$. Así, si \mathcal{F} representa la matriz asociada a la XFT, la implementación rápida de (3.9) toma la forma

$$D^q = \mathcal{F}(4iX/\pi)^q \mathcal{F}^{-1}, \quad q \in \mathbb{Z}. \quad (3.14)$$

Capítulo 4

Nuevo algoritmo de la Transformada Fraccionaria de Fourier Discreta

Motivación

La transformada clásica de Fourier es una herramienta que puede ser utilizada para resolver los modelos de ecuaciones diferenciales fraccionarios, es una transformada integral que es ampliamente utilizada tanto en matemáticas puras y aplicadas como en algunos campos de la ingeniería.

Son de una gran utilidad dentro de la rama de los modelos fraccionarios que no son locales, ella es muy importante en los modelos de la dinámica de procesos distorsionados sobre medios tortuosos.

El tratamiento de funciones utilizando la transformada de Fourier no sólo se limita a funciones continuas, también es posible definir una transformada discreta de Fourier (DFT) análoga a la FT para el estudio de funciones discretas, es decir, funciones que toman valores en ciertos puntos igualmente espaciados, esta última transformación es muy útil en física experimental e ingeniería. De la misma forma, también se puede considerar un análogo discreto para la FFT; tal transformación se conoce como transformada fraccionaria discreta de Fourier (FDFT).

En la literatura se encuentran varios caminos para definir la FDFT, aquí se da un resumen de como se obtiene una nueva transformada fraccional de Fourier discreta, para ello se sigue un enfoque espectral diferente al mostrado en [16], donde los eigenvectores de la transformada discreta de Fourier (DFT, del inglés, discrete Fourier transform) son usados. También es diferente a la obtenida en [17] donde la integral es simplificada o se usa la interpolación sinusoidal. En lugar de esto, para esta fraccional de Fourier se usan los eigenvectores de la matriz asociada a la ecuación de recurrencia de las funciones de Hermite. Estos eigenvectores tienden a las funciones de Hermite evaluadas en los ceros de los polinomios de Hermite $H_N(t)$ cuando $N \rightarrow \infty$, y estas son soluciones discretas al problema del oscilador armónico cuántico, es decir, son funciones discretas de Hermite.

Se muestra que una forma bilineal construida adecuadamente con estos vectores propios, se convierte en una representación matricial asintótica del kernel de la transformada fraccio-

nal de Fourier. Esta matriz da una fórmula de cuadratura y una forma discreta unitaria para la transformada fraccional de Fourier.

Usando algunas propiedades asintóticas de los polinomios de Hermite, la transformada fraccional de Fourier discreta puede escribirse en términos de la DFT. Por este camino, se obtienen cálculos rápidos del orden de $\mathcal{O}(N \log N)$ para la transformada fraccional de Fourier.

Además, ésta puede ser evaluada en forma cerrada en términos de exponenciales para cualquier número complejo z del círculo unitario $|z| \leq 1$ y no solamente para valores sobre la frontera $|z| = 1$ como es usual. Se debe mencionar que la idea de usar representaciones finitas de las funciones de Hermite ya han sido usadas para obtener fórmulas discretas para las transformadas de Fourier, las fórmulas han sido probadas y el código para usar estas fórmulas está disponible gratuitamente.

Usando un espectral aproximado se deriva una cuadratura típica Gaussiana de la transformada fraccional de Fourier continua. La cuadratura es obtenida por una forma bilineal de eigenvectores de la matriz asociada a la ecuación de recurrencia de los polinomios de Hermite. Estos eigenvectores son aproximaciones discretas de las funciones de Hermite, las cuales son eigenfunciones del operador transformada fraccional de Fourier. Esta nueva transformada discreta es unitaria y tiene estructura de grupo. Usando algunas fórmulas asintóticas reescribiremos la cuadratura en términos de la FFT, arrojando una rápida discretización de la transformada fraccional de Fourier y su inversa en forma cerrada. Extenderemos el rango de la transformada fraccional de Fourier considerando valores complejos arbitrarios del círculo unitario y no solamente la frontera. Se tiene que esta rápida cuadratura evaluada en $z = i$ lleva a una versión más precisa de la FFT y podemos usarla para funciones no periódicas.

4.1. Cuadratura de la transformada fraccional de Fourier

Consideremos la familia de polinomios de Hermite $H_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, que satisfacen la ecuación de recurrencia:

$$H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x) = 2xH_n(x), \quad (4.1)$$

con $H_{-1}(x) \equiv 0$. Es conocido [11], que por medio de (4.1), se sigue la fórmula de Christoffel-Darboux:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} = \begin{cases} \frac{H_N(x)H_{N-1}(y) - H_{N-1}(x)H_N(y)}{2^N (N-1)! (x-y)}, & x \neq y, \\ \frac{H'_N(x)H_{N-1}(x) - H'_{N-1}(x)H_N(x)}{2^N (N-1)!}, & x = y. \end{cases} \quad (4.2)$$

Note que la ecuación de recurrencia (4.1) puede ser escrita como el problema de eigenvalores:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1/2 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0(x) \\ H_1(x) \\ H_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} H_0(x) \\ H_1(x) \\ H_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Ahora consideremos la submatriz principal de (4.3) de dimensión N

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N-1 & 0 \end{bmatrix}$$

Procedemos a tomar una transformación de similaridad para simetrizar \mathcal{H} . Así que se propone la matriz diagonal \mathcal{S}

$$\mathcal{S} = \text{diag}\left\{1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{(N-1)!2^{N-1}}}\right\}$$

Haciendo el producto $H = \mathcal{S}\mathcal{H}\mathcal{S}^{-1}$, obtenemos la matriz simétrica buscada

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\frac{N-1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\frac{N-1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación de recurrencia (4.1) y la fórmula (4.2) pueden ser usadas para resolver el eigenproblema

$$Hu_k = x_k u_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

el cual es una versión de dimensión finita de (4.3). Los eigenvalores x_k son las raíces de $H_N(x)$ y u_k es el k -ésimo eigenvector dado por

$$u_k = c_k \left(s_1 H_0(x_k), s_2 H_1(x_k), s_3 H_2(x_k), \dots, s_N H_{N-1}(x_k) \right)^T,$$

donde s_1, s_2, \dots, s_N son los elementos de la diagonal de \mathcal{S} y c_k son constantes de normalización así que

$$c_k^2 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{H_n(x_k) H_n(x_k)}{2^n n!} = 1.$$

Usando la fórmula de Christoffel-Darboux tomando el caso $x = y$, nos da el resultado

$$c_k^2 \frac{H'_N(x) H_{N-1}(x) - H'_{N-1}(x) H_N(x)}{2^N (N-1)!} = 1$$

utilizamos que $H_N(x_k) = 0$ y $H'_N(x_k) = 2NH_{N-1}(x_k)$ tomado de [11]. Las constantes estarán dadas por lo tanto por

$$c_k = \sqrt{\frac{2^{N-1}(N-1)!}{N}} \frac{1}{|H_{N-1}(x_k)|} = \sqrt{\frac{2^{N-1}(N-1)!}{N}} \frac{(-1)^{N+k}}{H_{N-1}(x_k)},$$

donde se ha usado que $|H_{N-1}(x_k)| = (-1)^{N+k}H_{N-1}(x_k)$. Entonces las componentes de los vectores ortonormales son

$$(u_k)_n = (-1)^{N+k} \sqrt{\frac{2^{N-1}(N-1)!}{N(n-1)!}} \frac{H_{n-1}(x_k)}{H_{N-1}(x_k)}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (4.4)$$

Sea U la matriz ortogonal cuya k -ésima columna es u_k y sea $D(z)$ la matriz diagonal $D(z) = \text{diag}\{1, z, z^2, \dots, z^{N-1}\}$, donde $z \in \mathbb{C}$.

Ahora definamos la matriz

$$\mathcal{F}_z = \sqrt{2\pi} U^{-1} D(z) U,$$

el factor $\sqrt{2\pi}$ se introduce con el fin de que más adelante la cuadratura corresponda a la transformada de Fourier usual $\mathcal{F} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy} dx$. Volviendo a \mathcal{F}_z sus componentes estarán dadas por

$$(\mathcal{F})_{jk} = \sqrt{2\pi} \frac{(-1)^{j+k} 2^{N-1} (N-1)!}{N H_{N-1}(x_j) H_{N-1}(x_k)} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z^n}{2^n n!} H_n(x_j) H_n(x_k). \quad (4.5)$$

Esta es la matriz que representa el kernel de la transformada fraccional de Fourier en un espacio vectorial N -dimensional, como se muestra en la siguiente sección.

4.1.1. Fórmulas asintóticas

Veamos ahora la forma asintótica de las componentes de \mathcal{F}_z . Primero notemos que la expresión asintótica para $H_N(x)$ en la región oscilatoria es (ecuación 8.22.8 de [11])

$$H_N(x) = \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N/2+1)} e^{x^2/2} \left(\cos\left(\sqrt{2N+1}x - \frac{N\pi}{2}\right) \right) \quad (4.6)$$

Éste da una forma aproximada para los ceros de $H_N(x)$, es decir,

$$x_k = \left(\frac{2k - N - 1}{\sqrt{2N}} \right) \frac{\pi}{2}, \quad (4.7)$$

$k=1, 2, \dots, N$. Entonces usando (4.6) y (4.7) tenemos

$$H_{N-1}(x_k) \simeq (-1)^{N+k} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)} e^{x_k^2/2}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, para N suficientemente grande (4.5) puede escribirse como

$$(\mathcal{F}_z)_{jk} \simeq \sqrt{2\pi} \frac{2^{N-1} [\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)]^2}{\Gamma(N+1)} e^{-(x_j^2 + x_k^2)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n!} H_n(x_j) H_n(x_k),$$

y finalmente, la fórmula de Stirling $(n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n)$ y la de Mehler

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)}{n!} (\frac{1}{2}w)^n = (1-w^2)^{1/2} e^{\frac{2xyw-(x^2+y^2)w^2}{1-w^2}}$, [14] nos permiten obtener

$$(\mathcal{F}_z)_{jk} \simeq \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} \exp\left(\frac{(1+z^2)(x_j^2+x_k^2)-4x_jx_kz}{2(1-z^2)}\right) \Delta x_k, \quad (4.8)$$

donde Δx_k es la diferencia entre dos raíces asintóticas consecutivas de Hermite

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{\sqrt{2N}}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

definiendo x_0 y x_{N+1} a través de (4.7) con $k = 0$ y $k = N + 1$, respectivamente. Ahora consideremos una función, $g(x)$ definida para $x \in \mathbb{R}$, evaluada en las raíces de los polinomios de Hermite y escribimos estos valores en forma vectorial

$$g = (g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_N))^T$$

Por lo tanto, la matriz \mathcal{F}_k multiplicada por g nos da el vector G con entradas

$$G_j = \sum_{k=1}^N (\mathcal{F}_z)_{jk} g(x_k) \simeq \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} \sum_{k=1}^N \exp\left(\frac{(1+z^2)(x_j^2+x_k^2)-4x_jx_kz}{2(1-z^2)}\right) g(x_k) \Delta x_k$$

para $j = 1, 2, \dots, N$. Note que esta ecuación es una suma de Riemann para la integral

$$\mathcal{F}_z[g(x'), x] = \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(1+z^2)(x^2+x'^2)-4xx'z}{2(1-z^2)}\right) g(x') dt', \quad |z| < 1, \quad (4.9)$$

así que

$$\mathcal{F}_z[g(x'), x_j] \simeq \sum_{k=1}^N (\mathcal{F}_z)_{jk} g(x_k), \quad N \rightarrow \infty. \quad (4.10)$$

Note que $\mathcal{F}_z[g(x'), x]$ es la transformada fraccional de Fourier continua de $g(x')$ hasta una constante. Así la matriz \mathcal{F}_z es una transformada fraccional de Fourier discreta. Tenemos que resaltar que esta es una discretización de la transformada fraccional de Fourier para cualquier número complejo z en el disco unitario $|z| \leq 1$ y no solamente para z sobre la frontera, como normalmente es considerado, y que el argumento φ de $z = r \exp(i\varphi)$ es real y no complejo como es considerado en varias aplicaciones.

En el caso $z = \pm i$, sustituyendo en (4.8) obtenemos

$$F_{jk} \equiv (\mathcal{F}_{\pm i})_{jk} \simeq e^{\pm i x_j x_k} \Delta x_k$$

que es la DFT. Ésta había sido obtenida previamente en [15].

4.2. Una rápida transformada fraccional de Fourier discreta

La FFT puede ser usada para obtener un algoritmo rápido para (4.10). Ya que la matriz \mathcal{F}_z representa la cuadratura para la transformada fraccional de Fourier esperando a converger cuando un número suficientemente grande de nodos sean usados, consideraremos la forma asintótica (4.8), la cual puede ser escrita como

$$(\mathcal{F}_z)_{jk} = \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} e^{-\mu x_j^2} e^{v x_j x_k} e^{-\mu x_k^2} \Delta x_k, \quad (4.11)$$

haciendo

$$\mu = \frac{1+z^2}{2(1-z^2)}, \quad v = \frac{2z}{1-z^2} \quad (4.12)$$

Se ha reemplazado el signo “ \simeq ” por el de “=” dentro de (4.8), redefiniendo \mathcal{F}_z en (4.11). Para distinguir esta rápida implementación de la presente transformada fraccional discreta, denotaremos a esta como la transformada rápida de Fourier extendida (XFT). Para mostrar las principales diferencias entre la XFT y la usual FFT consideremos primero el caso de la transformada de Fourier estándar.

4.2.1. La XFT como una mejora de la FFT

Como se dijo anteriormente, el caso $z = i$ en (4.11) corresponde a una DFT

$$F_{jk} = \frac{\pi}{\sqrt{2N}} \exp\left[i \frac{\pi^2}{2N} \left(j - \frac{N-1}{2}\right) \left(k - \frac{N-1}{2}\right)\right], \quad (4.13)$$

donde ahora $j, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, y hemos usado (4.7) y Δx_k . Ya que $\sum_{k=1}^N F_{jk} g(x_k)$ es una cuadratura y por lo tanto una aproximación [18] de

$$G(w_j) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i w_j x} g(x) dx,$$

usando la propiedad de la transformada de Fourier

$$G(a w_j) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i a w_j x} g(x) dx, \quad (4.14)$$

podemos escribir (4.13) de manera más conveniente:

$$(F_a)_{jk} = \frac{\pi}{\sqrt{2N}} \exp\left[i a \frac{\pi^2}{2N} \left(j - \frac{N-1}{2}\right) \left(k - \frac{N-1}{2}\right)\right], \quad (4.15)$$

entendiendo que esta matriz da una transformada discreta de Fourier a escala. El parámetro de escala a puede ser usado para conectar la XFT con la forma estándar de la DFT. Si hacemos $a = 4/\pi$, entonces (4.15) se convierte en

$$(F_{4/\pi})_{jk} = \frac{\pi e^{i \frac{\pi}{2} \frac{(N-1)^2}{N}}}{\sqrt{2N}} \left[e^{-i \pi \frac{N-1}{N} j} \right] \left[e^{i \frac{2\pi}{N} j k} \right] \left[e^{-i \pi \frac{N-1}{N} k} \right],$$

donde $j, k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

En forma matricial y definiendo $\tilde{F} \equiv F_{4/\pi}$ para simplificar la notación, siguiendo la DFT \tilde{F} puede darse en términos de la usual DFT D_F como

$$\tilde{F} = \frac{\pi e^{i\frac{\pi}{2}\frac{(N-1)^2}{N}}}{\sqrt{2N}} S D_F S \quad (4.16)$$

donde S es la matriz diagonal cuyas entradas distintas de cero están dadas por $e^{-i\pi\frac{(N-1)j}{N}}$, $j = 0, 1, \dots, N - 1$, y $D_F(\cdot)$ puede ser calculado a través del algoritmo estándar de la FFT.

Por lo tanto, el costo computacional de $\tilde{F}(\cdot)$ es el mismo que el del algoritmo usado para calcular la FFT del vector $S(\cdot)$.

Sin embargo, el resultado del método presentado es más preciso ya que proviene de una fórmula de cuadratura convergente y esto lo veremos a continuación.

La inversa de \tilde{F} es

$$(\tilde{F}^{-1})_{jk} = \frac{\sqrt{2/N}}{\pi} \exp\left[-i\frac{2\pi}{N}\left(j - \frac{N-1}{2}\right)\left(k - \frac{N-1}{2}\right)\right],$$

con $j, k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

En las aplicaciones, tenemos que recordar que \tilde{F} da una transformada a escala. El siguiente algoritmo incorpora estas ideas.

Algoritmo 1

Algoritmo para calcular una aproximación $G = (G_1, G_2, \dots, G_N)^T$ de la transformada de Fourier del vector

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_N)^T$$

,

1. Dado N hacemos $x_n = \frac{\pi(2n-N-1)}{2\sqrt{2N}}$, $n = 1, 2, \dots, N$.
2. Denotemos D_F a la DFT, es decir, $(D_F)_{jk} = e^{i\frac{2\pi}{N}jk}$. Para $j, k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, calcular la matriz diagonal S de acuerdo a $S_{jk} = \exp[-i\pi\frac{N-1}{N}j\delta_{jk}]$.
3. Obtener la aproximación de G_j a $G(\frac{4}{\pi}x_j)$ por medio del cálculo del producto matriz-vector

$$G = \frac{\pi e^{i\frac{\pi}{2}\frac{(N-1)^2}{N}}}{\sqrt{2N}} S D_F (Sg), \quad (4.17)$$

con un algoritmo estándar de la FFT; es decir, la FFT del vector Sg puede ser multiplicada elemento a elemento, por el vector de entradas

$$\pi e^{i\frac{\pi}{2}\frac{(N-1)^2}{N}} e^{-i\pi\frac{N-1}{N}j/\sqrt{2N}}, \quad j = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Si el vector de entrada g está dado por los valores de una función $g(x)$ evaluada en x_k , se puede representar la aproximación a la transformada de Fourier $G(w)$, dando una gráfica de los puntos $(\frac{4}{\pi}x_j, G_j)$.

En el siguiente ejemplo graficaremos las partes real e imaginaria del vector G y la transformada exacta $G(\frac{4}{\pi}w)$. Primero, daremos un ejemplo con una función no periódica-singular, en seguida compararemos el desempeño de la XFT escalada evaluada en $z = i$ con el de la FFT estándar.

Ejemplo 1. Considere el par de transformadas de Fourier

$$g(x) = \cos(x^2), \quad G(w) = \sqrt{\pi} \cos\left(\frac{w^2 - \pi}{2}\right)$$

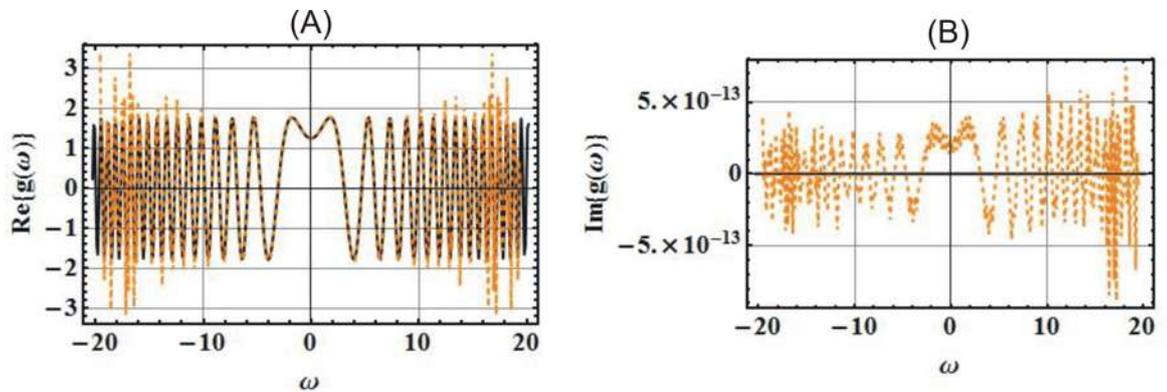


Figura 4.1: Secciones de las gráficas de las partes real (A) e imaginaria (B) de los valores exactos $G(\frac{4}{\pi}\omega_j)$ correspondientes al ejemplo 1. Esta transformada exacta (línea continua) es comparada con el resultado de la XFT (línea punteada) para $N = 512$.

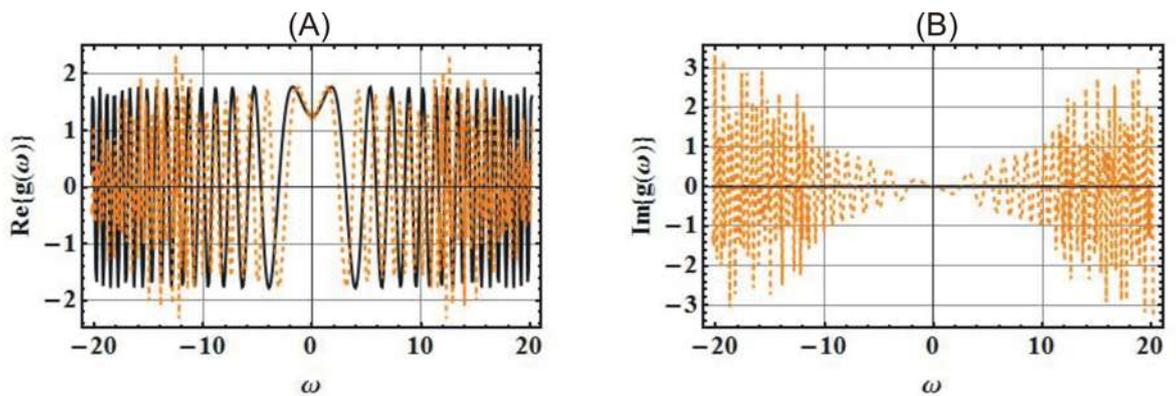


Figura 4.2: Secciones de las gráficas de las partes real (A) e imaginaria (B) de los valores exactos $G(\frac{4}{\pi}\omega_j)$ correspondientes al ejemplo 1. Esta transformada exacta (línea continua) es comparada con el resultado de la FFT (línea punteada) para $N = 512$.

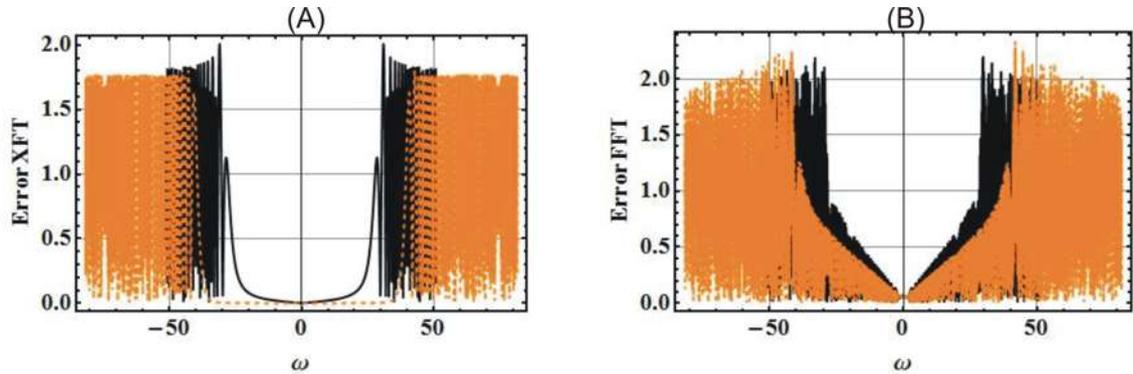


Figura 4.3: (A)Error producido por la XFT, $|G(\frac{4}{\pi}\omega_j) - G_j|$, para $N = 2048$ (línea continua) y $N = 4096$ (línea punteada). (B)Error producido por la FFT, $|G(\frac{4}{\pi}\omega_j) - G_j^{fft}|$, para $N = 2048$ (línea continua) y $N = 4096$ (línea punteada)

Las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 muestran la convergencia obtenida para la XFT y la FFT, respectivamente. La figura 4.1 se muestra una comparación entre las partes real e imaginaria de la transformada exacta $G(\frac{4}{\pi}w)$ (línea continua) contra la salida de la XFT (línea punteada). En adelante

$$w_j = \pi(j - N/2 - 1/2)/\sqrt{2N}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

La figura 4.2 muestra la comparación entre las partes real e imaginaria de la transformada exacta $G(\frac{4}{\pi}w)$ (línea continua) contra la salida de la FFT (línea punteada) normalizada por $\pi/\sqrt{2N}$.

La figura 4.3 muestra secciones del error $|G_j^{\text{exacta}} - G_j^{\text{aprox}}|$ para la XFT (izquierda), y la FFT (derecha). El error dado por la XFT se aproxima a cero para mas puntos cercanos al origen cuando N se va haciendo más grande, mientras que el error producido por la FFT mantiene siempre la misma magnitud sobre el mismo intervalo.

Ahora veamos otro ejemplo donde las diferencias son más significativas.

Ejemplo 2. Consideremos el par de transformadas

$$g(t) = \frac{e^{-t/2}}{1 - e^{-t}}, \quad G(w) = i\pi \tanh(\pi w).$$

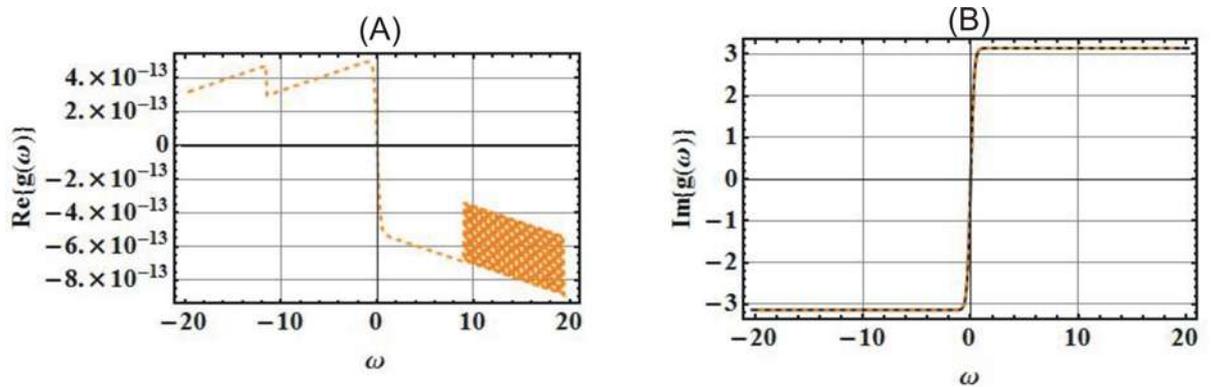


Figura 4.4: Secciones de las gráficas de las partes real (A) e imaginaria (B) de los valores exactos $G(\frac{4}{\pi}\omega_j)$ correspondientes al ejemplo 2. Esta transformada exacta (línea continua) es comparada con el resultado de la XFT (línea punteada) para $N = 512$.

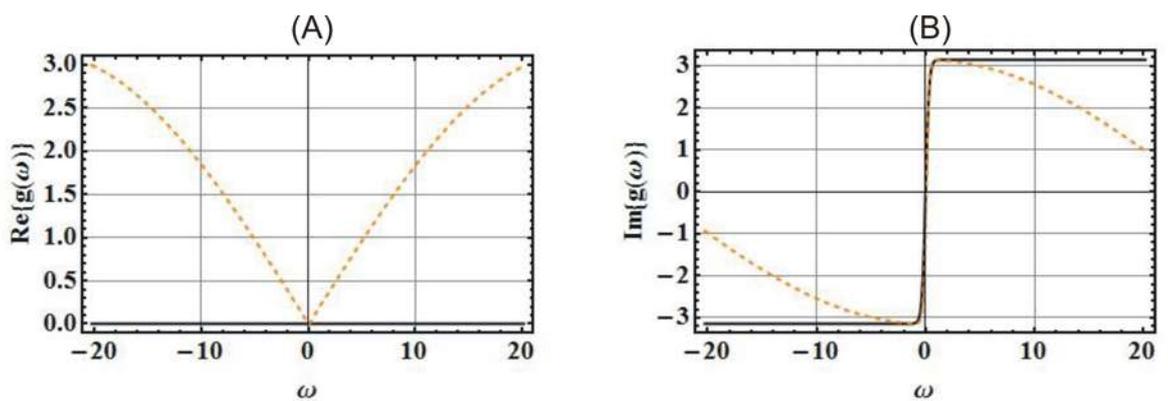


Figura 4.5: Secciones de las gráficas de las partes real (A) e imaginaria (B) de los valores exactos $G(\frac{4}{\pi}\omega_j)$ correspondientes al ejemplo 2. Esta transformada exacta (línea continua) es comparada con el resultado de la FFT (línea punteada) para $N = 512$.

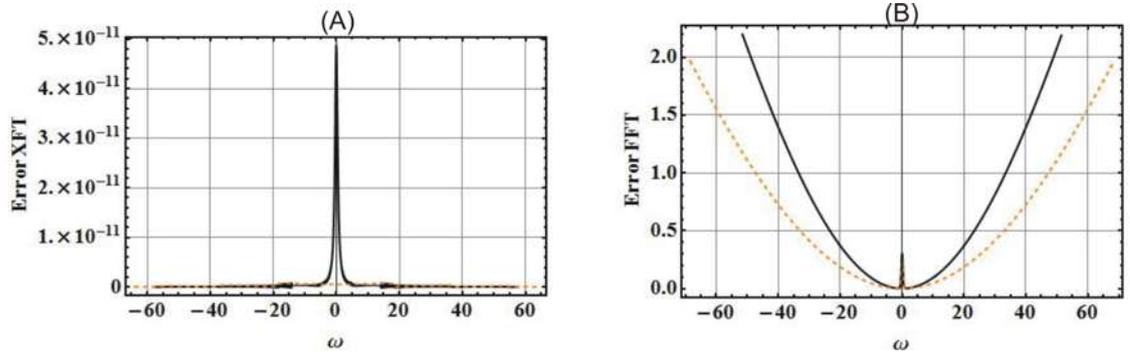


Figura 4.6: (A)Error producido por la XFT, $|G(\frac{4}{\pi}\omega_j) - G_j|$, para $N = 2048$ (línea continua) y $N = 4096$ (línea punteada). (B)Error producido por la FFT, $|G(\frac{4}{\pi}\omega_j) - G_j^{fft}|$, para $N = 2048$ (línea continua) y $N = 4096$ (línea punteada)

4.2.2. La XFT como una rápida transformada fraccional de Fourier

Para obtener una discreta y rápida implementación de la transformada fraccional de Fourier continua, volvamos a la definición de la transformada fraccional dada en (4.9),

$$G_z(x) \equiv \mathcal{F}_z[g(x'), x] = \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} e^{-\mu x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu x x'} e^{-\mu x'^2} g(x') dt',$$

donde se ha usado la definición dada en (4.12). El simple escalamiento

$$G_z(\alpha x) = \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} e^{-\mu \alpha^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha \nu x x'} e^{-\mu x'^2} g(x') dt', \quad (4.18)$$

y la discretización del kernel

$$(\mathcal{F}_z^\alpha)_{jk} = \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} \exp(-\mu \alpha^2 x_j^2) \exp(\alpha \nu x_j x_k) \exp(-\mu x_k^2) \Delta x_k$$

nos servirán para implementar el algoritmo rápido para calcular la XFT en términos de la FFT. Esto puede hacerse haciendo $\alpha = 2i(1-z^2)/(\pi z)$, entonces tenemos que

$$(\mathcal{F}_z^\alpha)_{jk} = \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} \exp(-\mu \alpha^2 x_j^2) (\tilde{F}_{jk}) \exp(-\mu x_k^2), \quad \text{con } \alpha = \frac{2i}{\pi z} (1-z^2), \quad (4.19)$$

donde \tilde{F} está dado por (4.16), es la rápida XFT para el caso de la transformada de Fourier estándar.

Para simplificar la notación hagámos $\tilde{\mathcal{F}}_z$ a $\mathcal{F}_z^{2i(1-z^2)/(\pi z)}$. Entonces $\sum_{k=1}^N (\tilde{\mathcal{F}}_z)_{jk} f(x_k)$ es una cuadratura de (4.18) con $\alpha = 2i(1-z^2)/(\pi z)$ (vea (4.10)), $\tilde{\mathcal{F}}_z$ es una discreta rápida de la transformada fraccional de Fourier la cual da una aproximación para la función escalada $G_z(\alpha x)$ en los

nodos x_k . Recordemos que los parámetros μ y ν dependen del número complejo z , (vea (4.12)), y que (4.19) da una aproximación de la transformada fraccional de Fourier, como se definió en (4.9) para cualquier z , $|z| < 1$, y no sólo para z sobre la frontera del círculo unitario, como usualmente es el caso.

Note que la transformada inversa puede ser obtenida en términos de $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}$. Estas ideas son incorporadas en el Algoritmo 2.

Algoritmo 2

Algoritmo para calcular una aproximación $G = (G_1, G_2, \dots, G_N)^T$ de la transformada fraccional de Fourier $\mathcal{F}_z[g(x'), 2t(1-z^2)/(\pi z)x_j]$ del vector

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_N)^T$$

en el valor complejo z , $|z| \leq 1$.

1. Dados N y z hacemos

- $\mu = (1+z^2)/[2(1-z^2)]$, $\alpha = 2t(1-z^2)/(\pi z)$.
- $x_n = \pi(2n-N-1)/[2(\sqrt{2N})]$, $n = 1, 2, \dots, N$

2. Denotemos D_F a la DFT, es decir, $(D_F)_{jk} = e^{i\frac{2\pi}{N}jk}$. Para $j, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, calculamos las matrices diagonales S_1 y S_2 de acuerdo a

$$(S_1)_{jk} = \exp[-\mu\alpha^2 x_j^2 - i\pi\frac{N-1}{N}j\delta_{jk}], \quad (S_2)_{jk} = \exp[-\mu x_j^2 - i\pi\frac{N-1}{N}j\delta_{jk}].$$

3. Obtenemos la aproximación de G_{zj} a $G_z(\alpha x_j)$ por medio del cálculo del producto matriz-vector

$$G = \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} \frac{\pi e^{i\frac{\pi}{2}\frac{(N-1)^2}{N}}}{\sqrt{2N}} S_1 D_F (S_2 g), \quad (4.20)$$

con el algoritmo estándar de la FFT.

Probaremos el comportamiento de esta transformación rápida en dos ejemplos bien conocidos para los cuales $|z| = 1$. En los ejemplos $\alpha = a = 2t(1-z^2)/(\pi z)$ y $\omega_k = x_k = t_k$. En estos ejemplos, se comparan la transformada exacta $(\omega_j, G(4\pi\omega_j))$ (línea negra) en contra de la salida de la XFT (ω_j, G_j) (línea naranja) en las gráficas mostradas.

Ejemplo 3. Considere el par de transformadas fraccional de Fourier

$$g(t) = \exp(-t^2/2 + \beta t), \quad G_z(t) = \exp(-t^2 - \frac{1}{2}\beta^2 e^{i\varphi} \sin \varphi + \beta t e^{i\varphi}), \quad z = e^{i\varphi}$$

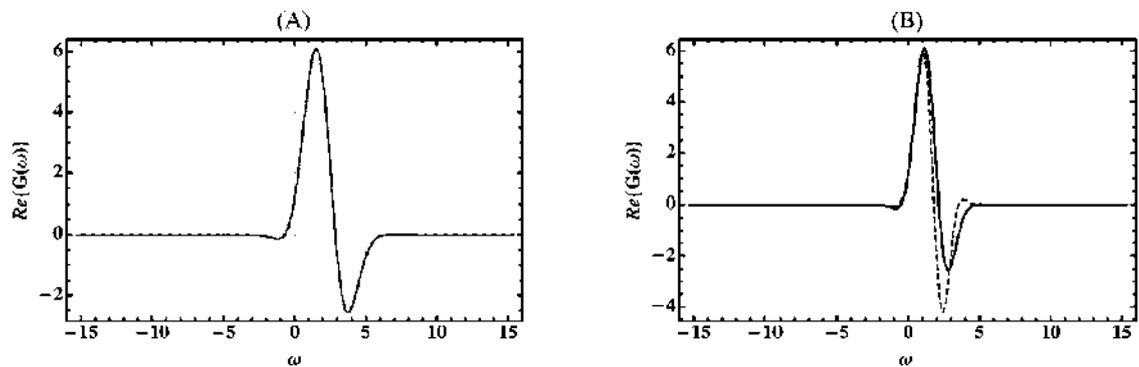


Figura 4.7: Parte real de la transformada fraccional de Fourier (línea continua) comparado con la salida de la XFT en (A) y con la salida de la FRFT en (B) (línea punteada) calculado con $N = 512$. La función $g(t)$ en el ejemplo 3 esta dada con $\beta = 2$ y $\varphi = \pi/5$.

La figura muestra una parte de la gráfica de la parte real de la XFT comparada con la parte real de $G_z(a\omega_j)$. La norma máxima del error es del orden de 10^{-12} para las partes real e imaginaria dada por la XFT.

Capítulo 5

Teorema de existencia y unicidad e iteraciones de Picard

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (5.1)$$

estos sistemas tienen una gran importancia en las aplicaciones de ciencias especialmente en sistemas de vibraciones mecánicas con varios grados de libertad. Estos mismos sistemas tienen importancia matemática, pues cada ecuación diferencial de orden n -ésimo puede convertirse a un sistema de n ecuaciones de primer orden¹, convirtiéndose en el tipo de 5.1. Introduzcamos condiciones iniciales de la forma $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$, de manera que con estas condiciones tendremos un problema de valores iniciales; así que para el sistema 5.1, consideremos $f \in C(D), D \in \mathbb{R}^{n+1}$, con $x \in \mathbb{R}^n$ y $R_{(a,b)}$ = rectángulo en \mathbb{R}^{n+1} . Si $f \in Lip_x(R)$ ² entonces existe solución $x(t, t_0, x_0)$ de (5.1), $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $(x_0, t_0) \in R$, es decir, la solución $x(t, t_0, x_0)$ de (5.1) está definida en $(t_0 - h, t_0 + h)$, donde

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \quad M := \max_R |f(t, x)|.$$

Llamemos $x(t)$ a una solución que pase por el punto $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$. Además la secuencia de funciones $(x_m(t))_{m=0}^\infty$ construido por

$$x_{m+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_m(s)) ds \quad x_0(s) = x_0 \quad (5.2)$$

(esta secuencia es llamada iteración de Picard) ésta $(x_m(t))_{m=0}^\infty$ converge uniformemente a la única solución $x(t)$ de (5.1) en $(-t_0 - h, t_0 + h)$, i.e, $x_m(t) \rightarrow x(t)$. En seguida se darán los lemas y algunos se demostrarán, ya estos son necesarios para probar lo mencionado anteriormente.

1

$$\begin{aligned} x_i' &= x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1 \\ x_n &= f(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

²Una función $g(x, u)$ se dice que es uniformemente Lipschitz continua en D si existe una constante no negativa L (constante de Lipschitz) tal que $\|g(x, u) - g(x, v)\| \leq L\|u - v\|$ para todo $(x, u), (x, v)$ en el dominio D .

Lema 1 La solución $x(t, t_0, x_0)$ es continua en el dominio D y con condición inicial $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ en $(t - r, t + r)$, entonces $x(t, t_0, x_0)$ es también solución de la ecuación integral

$$x(t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s, t_0, x_0)) ds \quad t \in (t_0 - r, t_0 + r). \quad (5.3)$$

Demostación.

Tomemos la solución $x(t, t_0, x_0)$ de (5.1), entonces diferenciamos i.e., $\frac{dx(t, t_0, x_0)}{dt} = f(t, x(t, t_0, x_0))$. Una integración de ésta igualdad resulta

$$x(t, t_0, x_0) - x(t_0, t_0, x_0) = \int_{t_0}^t f(s, x(s, t_0, x_0)) ds.$$

En consecuencia, si $x(t, t_0, x_0)$ es alguna solución de (5.3) entonces, $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ y $f(t, x)$ es continua, diferenciando (5.3) llegamos a que $\frac{dx(t, t_0, x_0)}{dt} = f(t, x(t, t_0, x_0))$.

Lema 2 Para cada m la función $x_m(t)$ está definida y es continua en $[t_0, t_0 + h]$ y satisface $\|x_m(t) - x_0\| \leq M(t - t_0)$, $t \in [t_0, t_0 + h]$ con $M = \max_{\mathbb{R}} \|f(t, x)\|$

Lema 3 La secuencia $(x_m(t))_{m=0}^{\infty}$ converge uniformemente en $[t_0, t_0 + h]$ a una función continua $x(t)$.

Demostremos que la serie $x_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1}(t) - x_n(t))$ converge uniformemente en $[t_0, t_0 + h]$. Para $t \in [t_0, t_0 + h]$ definimos

$$d_n(t) := |x_{n+1}(t) - x_n(t)| \quad (5.4)$$

Para cada n , tenemos

$$d_n(t) := \left| \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x_n(s)) - f(s, x_{n-1}(s))| ds$$

entonces, ya que $f \in Lip_x(\mathbb{R})$ entonces

$$d_n(t) \leq L \int_{t_0}^t |x_n(s) - x_{n-1}(s)| ds = L \int_{t_0}^t d_{n-1}(s) ds \quad (5.5)$$

donde L es la constante de Lipschitz. Estimemos $d_n(t)$ por inducción.

Por el lema 2, $d_0(t) = |x_1(t) - x_0(t)| \leq M|t - t_0|$, asumimos que

$$d_n(t) \leq \frac{M}{L} L^{n+1} \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (5.6)$$

entonces de (5.5)

$$\begin{aligned} d_{n+1}(t) &\leq L \int_{t_0}^t d_n(s) ds \leq L \int_{t_0}^t \left(\frac{M}{L} L^{n+1} \frac{(s - t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right) ds \\ &= \frac{ML^{n+2}}{L} \frac{(t - t_0)^{n+2}}{(n+2)!} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Así para $t \in [t_0, t_0 + h]$

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n(t) \leq \frac{M}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^{n+1}(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{L}(e^{hL} - 1) \quad (5.8)$$

entonces $x_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1}(t) - x_n(t))$ converge uniformemente por el criterio de Weierstrass.

Lema 4 La función $x(t)$ del lema 3 es solución de (5.2) tal que $x(t_0) = x_0$.

Primero demostraremos que $|x(t) - x_0| \leq b, /, t \in [t_0, t_0 + h]$ entonces $\forall t \in [t_0, t_0 + h]$ la función $f(t, x(t))$ está definida.

Si $t \in [t_0, t_0 + h]$ y si $\varepsilon > 0$ para un m suficientemente grande

$$|x(t) - x_0| \leq |x(t) - x_m(t)| + |x_m(t) - x_0| \leq \varepsilon + M(t - t_0)$$

por convergencia uniforme y lema 2. De ahí

$$|x(t) - x_0| \leq \varepsilon + M(t - t_0) \leq M(t - t_0) \leq Mh = b$$

Ahora, por la condición de Lipschitz

$$\left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, x_m(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, x_m(s))| ds \leq L \int_{t_0}^t |x(s) - x_m(s)| ds \leq L \varepsilon h$$

con m suficientemente grande, entonces

$$\lim_{m \leftarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, x_m(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Por otro lado, tomando el límite en ambos lados de la igualdad

$$x_{m+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_m(s)) ds$$

así

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Teorema de unicidad (Picard) 1 La solución $x(t)$ (verificada en Lema 4) que satisface $x(t_0) = x_0$ es la única solución de (5.1).

Demostración.

Supongamos que existe otra solución más, $\tilde{x}(t) \neq x(t)$, $\tilde{x}(t)$ y $x(t)$ están definidas y son continuas en $(t_0 - r, t_0 + r)$, $r > 0$ tal que $x(t_0) = x_0$, y $\tilde{x}(t_0) = x_0$.

Estimamos $|x(t) - \tilde{x}(t)|$ en $t \in [t_0, t_0 + r - \delta]$ con $0 < \delta < r$, δ fijo. Ya que $\tilde{x}(t)$ y $x(t)$ son continuos en $[t_0, t_0 + r - \delta]$ entonces $\exists \beta$ tal que

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq \beta \text{ entonces}$$

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s))| ds \leq L \int_{t_0}^t |x(s) - \tilde{x}(s)| ds \leq L\beta(t - t_0) \quad (5.9)$$

Por inducción

$$x(t) - \tilde{x}(t) \leq \frac{L^m}{m!} \beta(t - t_0)^m, \quad m > 0$$

entonces

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq L^{m+1} \frac{\beta(t + t_0)^{m+1}}{(m+1)!}$$

$L^{m+1} \frac{\beta(t+t_0)^{m+1}}{(m+1)!}$ es un miembro o sumando de $\beta e^{L(t-t_0)}$

$\Rightarrow |x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon$. De esta manera, $x(t) = \tilde{x}(t)$ en $[t_0, t_0 + r - \delta]$ siendo δ arbitrariamente pequeño $x(t) = \tilde{x}(t)$ en $[t_0, t_0 + r]$

De manera análoga para $[t_0 - r, t_0]$.

Ejemplo. Resolvamos el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} u_1' &= x + u_2 \\ u_2' &= x + u_1 \\ u_1(0) &= 1, \quad u_2(0) = -1 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Tomemos $u^0(x) = (1, -1)$, para obtener

$$\begin{aligned} u^1(x) &= (1, -1) + \int_0^x (t-1, t+1) dt = \left(1-x + \frac{x^2}{2}, -1+x + \frac{x^2}{2}\right) \\ u^2(x) &= (1, -1) + \int_0^x \left(t-1 + t + \frac{t^2}{2}, t+1 - t + \frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= \left(1-x + \frac{2x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}, -1+x + \frac{x^3}{3!}\right) \\ u^3(x) &= \left(1-x + \frac{2x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}, -1+x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) \\ u^4(x) &= \left(1-x + \frac{2x^2}{2} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}, -1+x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) \\ &= \left(- (1+x) + \left(2 + \frac{2x^2}{2} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right), - (1+x) + \left(2x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\right) \\ &\dots \end{aligned}$$

Aquí, la secuencia $\{u^m(x)\}$ existe para toda x real y converge a

$u(x) = \left(- (1+x) + e^x + e^{-x}, - (1+x) + e^x - e^{-x}\right)$, la cual es la solución del problema de valores (5.10).

Capítulo 6

Sobre pozos geotérmicos

6.1. Introducción

La existencia de temperaturas altas en el interior de la Tierra ha sido supuesta desde tiempos antiguos con base en observaciones en la superficie. Los volcanes, manantiales termales y otras manifestaciones superficiales del calor encerrado dentro de la Tierra han sido las evidencias de que la temperatura en su interior debe ser mucho más alta que la que se tiene en la superficie.

En este siglo se comenzaron a hacer mediciones en pozos de la variación de la temperatura con la profundidad y se observó que en zonas “normales”, o sea, donde no existen manifestaciones termales superficiales, la temperatura en la corteza de la Tierra aumenta a una razón de 30°C por kilómetro.

El transporte de calor en el interior de la Tierra se lleva a cabo por medio de tres mecanismos: conducción, convección y radiación; sin embargo, los tres tienen diferente grado de importancia en las diferentes capas: en la corteza el principal medio de transporte de calor es la conducción mientras que en el manto lo es la convección y radiación.

La conducción es la forma como se transporta el calor de un cuerpo más caliente a uno más frío con el cual se encuentra en contacto. La eficiencia de ésta depende de una propiedad de los materiales que se llama conductividad térmica y que nos dice cuál será la diferencia de temperatura provocada por un flujo de calor: a mayor conductividad menor será la diferencia de temperatura a través del material.

La convección es un proceso un poco más complejo que se da solamente en fluidos (líquidos y gases). Al ser calentada la parte inferior de un fluido, ésta se expandirá y se volverá menos densa que la parte superior más fría, por lo cual tenderá a subir, con lo que la parte fría quedará ahora en contacto con la fuente de calor repitiéndose de esta forma el proceso y dando origen a lo que se llama celdas de convección, en las cuales existen corrientes ascendentes y descendentes. Este mecanismo se va a generar a partir de un cierto valor de la diferencia de temperatura y depende de la viscosidad y densidad del fluido.

La radiación es una forma de transporte de calor que es importante a temperaturas altas; en realidad todos los cuerpos que tienen temperatura por arriba del cero absoluto (0°K ó -273.15°C) emiten radiación, pero la frecuencia de la radiación emitida es proporcional

a la temperatura del material.

De esta forma observamos que el transporte de calor en el interior de la Tierra va a depender de la temperatura y de las características del material. La corteza se comporta como un sólido y tiene temperaturas relativamente bajas. El manto se comporta como un fluido y como la convección es mucho más eficiente en este caso, éste es el principal medio de transporte, aún cuando las temperaturas relativamente altas hacen posible que la energía también se transporte por medio de la radiación.

No obstante que la principal forma de transporte de calor en la corteza es la conducción, esto no excluye que existan algunas áreas en las cuales el calor se transmite principalmente por convección, aprovechando zonas de debilidad en la roca sólida que forma la corteza (fallas, fracturas, etc.). A través de esas zonas van a ascender fluidos calientes que provienen de diferentes profundidades y pueden tener características distintas: pueden ser rocas fundidas generadas en la base de la corteza, o bien pueden estar constituidos principalmente por agua originada en la superficie de la Tierra y que ha penetrado hasta profundidades donde se ha calentado por contacto con rocas a alta temperatura, de tal forma que vuelve a ascender a la superficie transportando parte de la energía del interior.

Al penetrar en la corteza de la Tierra se observa un cambio en la temperatura, en general ésta aumenta; a esa variación de la temperatura con la profundidad se le llama gradiente geotérmico. El valor del gradiente geotérmico en la corteza terrestre varía mucho de un lugar a otro: se han llegado a medir gradientes de sólo 10°C por kilómetro, mientras que en algunas zonas se han observado variaciones de la temperatura de 200 y hasta $800^{\circ}\text{C}/\text{km}$. Sin embargo, la mayoría de las zonas del planeta en las que no se tienen anomalías térmicas se agrupan alrededor de un promedio de 25 a $35^{\circ}\text{C}/\text{km}$, a este valor se le considera el gradiente geotérmico normal. Esto es en cuanto a la corteza, pero para determinar o estimar la variación de la temperatura dentro del manto se requiere de algunas hipótesis.

El flujo de calor en la superficie de la Tierra se calcula como el producto del gradiente geotérmico por la conductividad térmica de las rocas, siendo estos dos parámetros determinados directamente. El gradiente geotérmico se determina midiendo la temperatura a lo largo de pozos suficientemente profundos para evitar las perturbaciones en las capas superficiales (hasta 200 m) provocadas por las variaciones diurnas y estacionales de temperatura, así como por el flujo de aguas subterráneas. Estos factores no afectan las mediciones hechas en el océano, ya que la temperatura del fondo marino es prácticamente constante, por lo cual sólo se necesita una sonda de dos a cinco metros de longitud, con sensores de temperatura distribuidos a lo largo de ella, la cual penetra los sedimentos del fondo oceánico. La determinación de la conductividad térmica se lleva a cabo en el laboratorio, en muestras de las rocas en las que se midió el gradiente geotérmico. Estas muestras se someten a un flujo de calor conocido, el cual va a generar una diferencia de temperatura a lo largo de la muestra, de tal forma que entre mayor sea esta diferencia de temperatura, menor será la conductividad térmica de la muestra.

6.2. Sistemas geotérmicos

En su sentido más amplio, el término describe un sistema de transporte de calor desde una fuente a profundidad hasta una zona de descarga que generalmente es la superficie de la Tierra. Este transporte de calor usualmente se efectúa a través de un fluido geotérmico que puede ser magma, en el caso de sistemas volcánicos, o bien agua caliente o salmuera (agua con alta concentración de sales), vapor y gases en un sistema geotérmico en el sentido estricto del término. En su camino desde la fuente hacia la zona de descarga, el fluido geotérmico puede ser almacenado temporalmente en un yacimiento, que en el caso de un sistema volcánico forma la cámara magmática.

Estas descargas concentradas de calor que son los sistemas geotérmicos no se encuentran distribuidos uniformemente en la superficie de la Tierra, sino que están localizados preferentemente en franjas caracterizadas por ser fronteras activas entre placas, en las cuales éstas se crean o se destruyen. Esta actividad provoca que el material del manto tenga movimientos verticales, o sea que rocas a alta temperatura se desplacen hacia la superficie dando origen a anomalías térmicas.

Como ejemplo de áreas que presentan una intensa actividad geotérmica tenemos el llamado Cinturón de Fuego de la región circunpacífica), al cual pertenece la costa suroeste de México, en la que la frontera entre placas es de tipo destructivo. Un ejemplo de otro tipo de frontera (constructivo) donde se está creando corteza terrestre de tipo oceánico la tenemos en el Golfo de California, en donde se encuentra el campo geotérmico de Cerro Prieto, que tiene una de las producciones de energía eléctrica más altas en el mundo.

Un aspecto muy importante en el estudio de los sistemas geotérmicos es su clasificación. Las características que se toman en cuenta para este fin son:

- la naturaleza del fluido dominante en la parte principal del yacimiento, por ejemplo: agua caliente, vapor, salmuera, etcétera.
- la concentración de componentes químicos en el fluido dominante; por ejemplo, el fluido dominante en el yacimiento puede ser agua de mar diluida, con lo que la concentración de compuestos químicos en solución será muy alta.
- la descarga superficial de calor; esto es, cuánto calor es transportado a la superficie por medio de las manifestaciones hidrotermales y por conducción.
- la entalpía o contenido energético (calorías por gramo) del fluido descargado por el sistema.

De esta forma, se puede denominar a un sistema geotérmico como de alta o baja entalpía si ésta es mayor o menor de 250 calorías/gr. La concentración de componentes químicos puede variar de menos de 0.1%, a 1% y alcanzar valores de más de 1% de sólidos totales disueltos, catalogándose como de concentración baja, intermedia o alta, respectivamente (el agua potable tiene un promedio de 0.20% de sólidos totales disueltos). Por último, la descarga superficial de energía puede ir de 500 a más de 500 000 kilowatts. Esta descarga superficial de calor está determinada por la magnitud de las manifestaciones superficiales que tiene el sistema; y

al planear su explotación éste es el valor mínimo de energía que se puede obtener del sistema sin alterarlo significativamente ya que esa es su descarga natural.

Las manifestaciones superficiales (y por lo tanto la descarga) del sistema van a ser afectadas fuertemente por las condiciones hidrológicas y topográficas de la zona, las cuales van a definir la recarga del sistema y la permeabilidad de las capas que forman el yacimiento.

6.3. Recurso geotérmico y energía eléctrica

Además de la importancia científica que tiene el estudio del calor contenido en la Tierra y del valor estético en cuanto a belleza natural de sus manifestaciones superficiales, éste es importante también como recurso energético; especialmente en las condiciones actuales de consumo creciente y la búsqueda de fuentes alternas de energía.

La principal restricción al uso de la energía geotérmica es la dificultad para su transporte, por lo que preferentemente se trata de transformarla a energía eléctrica. En compensación a esta deficiencia, se tiene su versatilidad para la utilización directa. Gracias al avance de la tecnología se han podido superar muchos problemas en la utilización de la energía geotérmica y en la actualidad es posible aprovechar sus recursos en un rango muy amplio de temperaturas, o bien explotarlos "en cascada", lo cual equivale a seguir extrayendo energía de fluidos que han pasado ya por alguna etapa de su uso: por ejemplo los fluidos que son desechados por una estación geotermoeléctrica a una temperatura de más de 100°C , pueden aún ser utilizados para el enlatado de comida, extracción de sales y posteriormente para calefacción, refrigeración, invernaderos, etc., hasta que finalmente, ya a una temperatura menor de 30°C , sean usados en albercas para recreación o en criaderos de peces. De esta forma, se extrae el contenido energético de los fluidos geotérmicos con un máximo de eficiencia. En varios países como Nueva Zelanda y Francia se implementa ya la utilización "en cascada" por ser económicamente más rentable.

Es necesario aclarar que la temperatura no es el único requerimiento para el uso de la energía geotérmica, sino que para su explotación es necesario contar con los siguientes factores: la disponibilidad de suficiente fluido (agua y/o vapor) para que transporte el calor de las profundidades a la superficie, de zonas permeables que permitan este transporte y a la vez de una recarga que reemplace al fluido que es extraído. Además, es preferible que los fluidos geotérmicos estén libres de productos químicos que puedan corroer o dañar las instalaciones para su extracción y aplicación.

La transformación de la energía geotérmica en eléctrica es tal vez su mayor aplicación práctica (casi la tercera parte) y la que atrajo la atención en el nivel mundial hacia este recurso, ya que de las fuentes alternas de energía, es una de las que han demostrado ser económicamente factibles. La obtención de electricidad a partir de fluidos geotérmicos tiene una eficiencia relativamente baja en comparación con las plantas termoeléctricas convencionales, debido a la baja temperatura de los fluidos geotérmicos (que tienen un máximo de aproximadamente 380°C). Sin embargo, las plantas geotermoeléctricas son económicamente redituables debido al costo tan bajo del calor obtenido (en comparación con los combustibles fósiles), además de las ventajas que tiene en cuanto a un mínimo de contaminación ambiental. En el caso de la geotermia, se han estudiado los efectos que la explotación de un campo puede tener sobre la flora

y la fauna local y aún cuando todavía quedan muchas investigaciones por hacer, se puede decir con base en la evidencia que se tiene en la actualidad, que es ésta una de las formas de energía que genera menos contaminación, sobre todo en comparación con los combustibles fósiles y con los problemas de contaminación radiactiva que aún no se han resuelto en la utilización pacífica de la energía nuclear.

El potencial energético del vapor que alimenta una planta geotermoeléctrica va a depender no sólo de su presión y temperatura, sino también de su calidad (contenido de gases), la presión de expulsión de las turbinas y la configuración general de la planta. Las plantas geotermoeléctricas tienen diferentes esquemas de acuerdo al tipo de fluido que alimente las turbinas y la presión a la que salga de éstas. En general se tiene una configuración como la mostrada en la figura 6.1.

Tanto el agua que expulsan los separadores, como el condensado deben ser desechados. En algunos casos se les arroja al torrente de ríos (Wairakei, N.Z.) o al mar (Ahuachapan, El Salvador), o bien a lagunas de evaporación (Cerro Prieto, México); pero actualmente se ha demostrado que es más provechoso reinyectarlos, lo cual además de evitar problemas de contaminación (química y térmica) de ríos y mares, ha probado ser benéfico para los yacimientos [35, 36], ya que ayuda a disminuir el descenso de la presión y si se combina con la estructura hidrogeológica del campo, es posible evitar la entrada directa al yacimiento de aguas subterráneas frías, como se ha observado en Los Humeros, Puebla.

6.4. Exploración de los recursos geotérmicos

El principal propósito de la exploración de una zona geotérmica es definir su tamaño, forma y estructura y determinar sus características, como son: el tipo de fluido, su temperatura, composición química y su capacidad de producir energía.

Estas características pueden ser determinadas en dos formas: por exploración superficial y con perforaciones exploratorias. Puesto que es mucho más barato hacer exploración superficial que perforar pozos, se acostumbra realizar un extenso programa de exploración superficial antes de comenzar a hacer perforaciones.

6.4.1. Exploración superficial

Debido a que los campos geotérmicos de alta temperatura se localizan generalmente en las áreas de vulcanismo reciente relacionadas con las fajas sísmicas, son éstas precisamente las zonas que se seleccionarán para efectuar los primeros trabajos de reconocimiento. También es importante en el principio efectuar un mapeo de las manifestaciones termales superficiales localizadas dentro y fuera del área en estudio; esto es necesario, ya que éstas no se localizan necesariamente sobre el yacimiento, sino que los fluidos geotérmicos se desplazan siguiendo fallas o fisuras o cualquier otra zona de alta permeabilidad y, al clasificarlas, se puede inferir la trayectoria que han seguido hasta la superficie, así como los procesos de mezclado y ebullición que pudieron haber experimentado.

De acuerdo a las técnicas empleadas, la exploración superficial se puede dividir en geológica, geofísica y geoquímica.

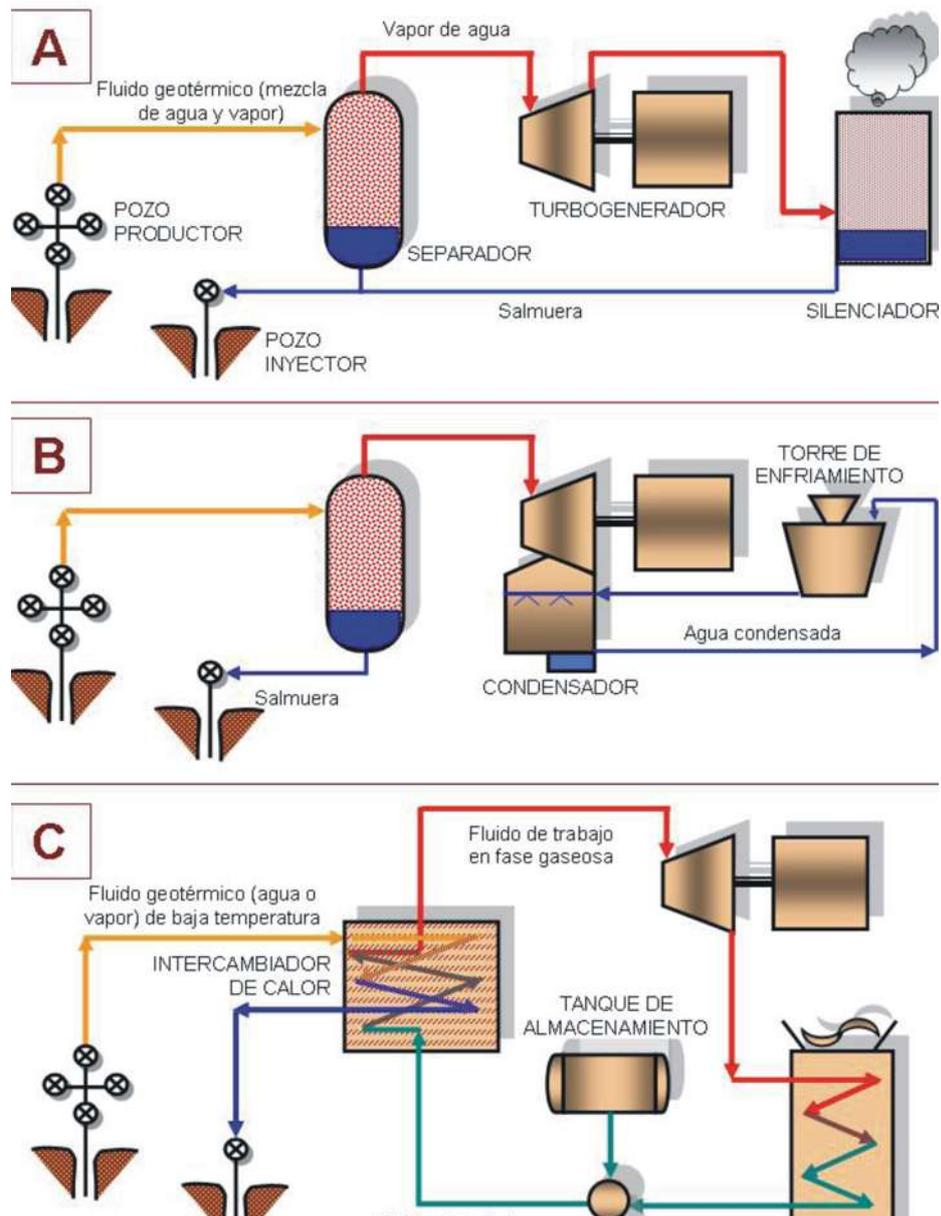


Figura 6.1: Esquemas simplificados de diferentes tipos de plantas geotermoeléctricas, los cuales muestran cómo se utiliza el fluido que sale del pozo geotérmico hasta llevarlo a una turbina que lo transforma en energía eléctrica. A) Plantas a contrapresión, B) Plantas a condensación, C) Plantas de ciclo binario

Técnicas geológicas

Se debe identificar y catalogar todas las manifestaciones geotérmicas que haya en la superficie, ya sean activas o fósiles; efectuar una evaluación preliminar de su significado con respecto a los procesos subterráneos que tienen lugar en el sistema geotérmico; y recomendar las áreas para un estudio a mayor detalle. Esto se lleva a cabo examinando fotografías aéreas o imágenes de satélite y visitando el área para correlacionar los datos de éstas con la información obtenida en el campo.

Una vez terminado el reconocimiento del área, si se decide que la zona geotérmica tiene posibilidades para su explotación, se debe preparar un mapa geológico a detalle del prospecto geotérmico seleccionado y de las áreas circundantes. Este mapa debe incluir las manifestaciones superficiales y los rasgos geológicos (fallas, fracturas, distribución superficial y a profundidad de los diferentes tipos de rocas y su permeabilidad) que puedan contribuir a elaborar un modelo del sistema geotérmico y recomendar la localización de los pozos exploratorios.

Técnicas geofísicas

La geofísica se va a utilizar para definir las dimensiones y la estructura del campo: área que ocupa, profundidad a la que se encuentra y principales estructuras relacionadas con la permeabilidad. Esto se logra mediante los siguientes estudios: sensores remotos, gravimetría, magnetometría, termometría, sismología y métodos eléctricos y electromagnéticos.

En las etapas de reconocimiento se aplican sobre todo métodos que no son muy caros y que permiten cubrir un máximo del área teniendo una alta razón entre beneficio y costo: Medidas de emisividad en el infrarrojo a partir de imágenes aéreas o de satélite, Termografía (mediciones de temperatura en pozos poco profundos: de 1 a 100 m), método de perfiles eléctricos, sondeos eléctricos verticales, gravimetría y magnetometría, entre otros.

Técnicas geoquímicas

Las técnicas geoquímicas efectúan los análisis de las aguas de los manantiales, las emisiones de las fumarolas, las descargas de gases y las aguas frías superficiales (ríos, lagos, lluvia, etc.) para hacer las siguientes inferencias de las condiciones del sistema hidrotermal:

- la variación en composición del fluido termal a profundidad,
- la temperatura (y presión) del fluido a profundidad,
- las rocas relacionadas con los fluidos termales a profundidad,
- el gradiente geotérmico y la profundidad a la cual se presenta ebullición por primera vez en el sistema; esto incluye determinar la posibilidad de encontrar inversiones de temperatura con la profundidad,
- la posibilidad de encontrar a profundidad fluidos ácidos,

entre otros.

La determinación de todos estos parámetros se hace utilizando los resultados de los análisis químicos e isotópicos de las descargas del sistema en la superficie.

6.4.2. Perforación de pozos exploratorios

Una vez que se tiene un modelo preliminar del campo con base en los datos superficiales, se procede a situar un número reducido (de tres a cinco) de pozos exploratorios, con los cuales se pretende corroborar los modelos elaborados y justificar los gastos de la exploración superficial.

Durante la perforación del pozo se toman muestras de las rocas que se van encontrando. Estas muestras tienen la forma de trozos pequeños de roca que se van cortando con el barreno (muestras de canal) y de cilindros de roca recortados con un barreno especial para este fin (núcleos). Por supuesto que los núcleos proveen de mejor información, ya que se conoce exactamente a qué profundidad corresponden. Aún antes de terminar el pozo estas rocas son estudiadas para determinar los minerales que se han producido como resultado de la interacción de los fluidos termales y la roca del yacimiento. La formación de los minerales de alteración depende tanto de la composición química del fluido como de la temperatura y por lo tanto estos dos parámetros pueden ser inferidos a partir de las observaciones en las muestras, aún sin haber hecho mediciones directas. A las muestras de rocas provenientes de los pozos se les hacen análisis químicos para obtener la composición de rocas alteradas y no alteradas hidrotermalmente y así determinar los efectos que ha tenido la interacción con fluidos termales en la composición química de las rocas que forman el yacimiento.

Una vez que el pozo se ha terminado (lo cual puede llevar varios meses), se toman registros verticales de flujo, temperatura, conductividad y potencial eléctricos, velocidad sísmica, etc., para determinar las propiedades de las rocas que se encuentran a lo largo del pozo y la variación de la temperatura con la profundidad, lo que en forma indirecta ayuda a inferir la permeabilidad de las rocas, ya que después de haber sido enfriadas por los fluidos de perforación las capas de roca más permeables serán las que recuperen más rápido su temperatura anterior por la circulación de los fluidos termales a través de ellas.

Generalmente se deja "reposar" el pozo de unas cuatro a ocho semanas para que se estabilice, comparando las variaciones en los registros de temperatura y presión durante este tiempo. Una vez, estabilizado el pozo se induce su descarga, es decir la emisión continua de fluido, y es sólo entonces cuando se sabe cuánto fluido puede producir el pozo y a qué presión y temperatura, determinando de esta forma la cantidad de energía eléctrica que se puede obtener. Éste es el parámetro que nos va a indicar la factibilidad económica de la explotación de un campo: cuántos pozos son necesarios para obtener la cantidad planeada de kilowatts eléctricos, lo cual determina finalmente el costo de la electricidad.

6.5. Campo geotérmico de Los Azufres, Michoacán

La mayor parte del territorio mexicano (excepto la Península de Yucatán) está caracterizado por una gran actividad tectónica y volcánica que ha tenido lugar desde hace varias decenas de millones de años hasta el presente. Esta actividad invariablemente ha dejado su huella a lo largo de todo el país en forma de sistemas volcánicos y sistemas hidrotermales, tanto fósiles como activos.

En la actualidad, México es uno de los países más avanzados en cuanto a la producción de energía geotermoeléctrica. Dos campos, el de Cerro Prieto y el de Los Azufres en Michoacán se encuentran ya en la etapa de producción y por lo menos dos más: La Primavera (Jalisco) y Los

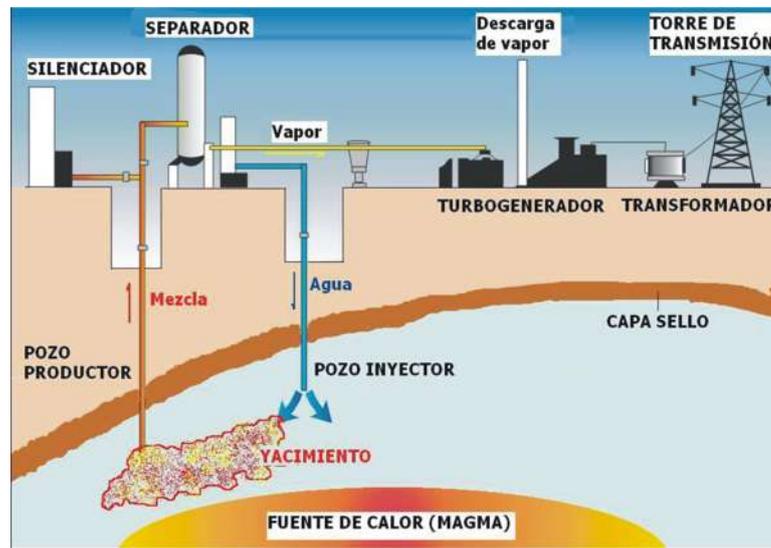


Figura 6.2: Modelo esquemático de un yacimiento geotérmico

Humeros (Puebla), se encuentran ya muy avanzados en la etapa de evaluación y se espera que dentro de pocos años comenzarán también a producir electricidad a partir de fluidos geotérmicos. Asimismo, en Araró, Michoacán se concluyó los estudios de factibilidad y están en la etapa de perforación de exploración.

El campo geotérmico de Los Azufres ha estado siendo probado por medio de plantas piloto que producen un total de 25 000 kilowatts, lo cual corresponde casi al consumo de energía eléctrica de la ciudad de Morelia, Michoacán. Después de observar los resultados obtenidos con estas plantas, se determinó que este campo tiene capacidad para producir más energía, por lo cual se está ya construyendo una planta que generará más de 50 000 kilowatts de electricidad (el campo tiene una reserva probada de 135 000 kilowatts y una reserva probable de 165 000 kilowatts). Una particularidad de la explotación del campo geotérmico de Los Azufres es que la totalidad del agua separada del vapor que va a las turbinas está siendo reinyectada en el yacimiento a través de once pozos, con lo cual se evita la contaminación del medio ambiente [37].

6.5.1. Localización, medio físico y estado actual de Los Azufres

El campo geotérmico Los Azufres, con una extensión de 81 km², se localiza en la sierra de San Andrés, dentro de la provincia fisiográfica del Eje Neovolcánico Mexicano a 80 km al oriente de la ciudad de Morelia, (Figura 6.3).



Figura 6.3: Localización de Los Azufres

Se ubica a una elevación de 2800 msnm, en una zona de protección forestal compuesta por un bosque de coníferas, manantiales termales y pequeñas lagunas que lo hacen un sitio de gran atractivo turístico.

El aprovechamiento del recurso geotérmico para generar energía eléctrica, se inició en agosto de 1982 con la entrada en operación comercial de cinco unidades a contra presión de 5 MW cada una. Al 2003, la capacidad instalada era de 188 MW, integrados por una unidad a condensación de 50 MW, 4 unidades también a condensación de 25 MW cada una, 7 unidades a contrapresión de 5 MW cada una y dos unidades de ciclo binario de 1.5 MW cada una (Gutiérrez-Negrín y Quijano-León, 2003).

A la fecha se han perforado más de 80 pozos a profundidades que oscilan entre 600 y 3500 m. Alrededor de 30 de esos pozos se encuentran en producción continua, y tres de ellos en inyección para deshacerse con seguridad del agua separada.

Con esa infraestructura de pozos, se tiene una disponibilidad de vapor en superficie de más de 1600 t/h, el cual viene acompañado de 1300 t/h de agua separada (salmuera), una fracción (280 t/h) de la cual alimenta a las unidades de ciclo binario. Para el manejo del agua separada se dispone de una capacidad de inyección de 1500 t/h a través de los pozos inyectoros (Residencia de Producción Los Azufres, 2004).

6.6. Antecedentes al problema

La Comisión Federal de Electricidad (CFE) inyecta la salmuera residual en pozos inyectoros del campo geotérmico Los Azufres el cual está sufriendo una disminución considerable de la presión de yacimiento.

Para investigar los posibles efectos de la explotación sobre el yacimiento (recarga, mantenimiento de la presión, interferencia térmica, etc.) la Gerencia de Proyectos Geotermoeléctricos (GPG) de la CFE encargó a la Gerencia de Geotermia (GG) del Instituto de Investigaciones

Eléctricas (IIE) el análisis e interpretación de resultados de una prueba de trazadores en la zona norte del campo geotérmico Los Azufres, que permita establecer esquemas de explotación racional permitiendo un desarrollo sustentable a corto y mediano plazo. Dicha prueba consiste en continuar el monitoreo de un trazador de fase gaseosa inyectado al pozo Az-64 en el segundo semestre del 2006 con la finalidad de determinar conexión y posibles beneficios en 6 pozos de la zona aledaños al pozo Az-64. En esta tercera etapa de la prueba de inyección de trazadores, son seis los pozos productores alimentados por las fallas Laguna Verde y Marítaro que interesa monitorear: Az-5, Az-13, Az-32, Az-43, Az-48 y Az-51. Tres de ellos producen sólo vapor; el resto produce mezcla agua-vapor.



Figura 6.4: Modelo de pozos de producción e inyección



Figura 6.5: Plano de localización

Las rocas volcánicas de Los Azufres, (Torres-Alvarado Ignacio S., Satir Muharrem, 1998) han sido descritas por diferentes autores, geológicamente dos divisiones principales pueden distinguirse:

1) una secuencia de silicatos de riodacitas, riolitas y dacitas con un espesor arriba de 1000 m. Cinco diferentes unidades pueden diferenciarse: *Agua Fría* riolita, *Tejamaniles* dacita, *CerroMozo* y *San Andrés* dacitas y *Yerbabuena* riolita.

2) a 2700 m de interstratificación, espesos flujos de lava y rocas piroclásticas, de composición andesítica y basáltica.

En la parte norte del campo (zona de Marítaro) los fluidos geotérmicos son formados por una mezcla de gases y líquidos, con temperatura alrededor de 300 – 320°C. En el sur (zona de Tejamaniles) la fase de gas domina sobre la fase de líquido (260 – 280°C).

Capítulo 7

Resolviendo la propagación de un frente frío

7.1. Situación del problema

En un reservorio geotérmico, la reinyección ayuda a mantener la presión dentro del reservorio e incrementa la eficiencia de extracción de energía.

Nuestro principal objetivo es la simulación de la propagación del frente frío de agua reinyectada en un yacimiento geotérmico poroso, homogéneo y no fracturado mediante la ecuación de reacción-difusión telégrafo, con un término de reacción obtenido a partir de la ecuación de advección-difusión, que es la ecuación que gobierna la transferencia de calor en un medio poroso.

La situación consiste en simular el cómo se propaga un frente frío en una sola dimensión espacial a través de un medio permeable que conecta un pozo de inyección con un pozo de producción. Se propone que las propiedades térmicas tanto de la roca como del fluido sean constantes y se considera que el agua inyectada en forma vertical es de baja entalpía (40°C), llega a una cierta profundidad y se propaga en dirección del pozo de producción con velocidad constante, después de la ruptura térmica (i.e, la llegada del frente de agua fría) la temperatura del agua ya no es constante en el pozo y puede reducir la eficiencia de toda la operación. La continua inyección merma la temperatura del medio que conecta a los dos pozos.

Sea $T(x, t)$ la temperatura de $x \in \mathbb{R}$, al tiempo t . Entonces el problema de valores iniciales que modela la difusión de calor en una dimensión con una velocidad finita y con un término de reacción es la ecuación de reacción-difusión telegráfica.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = F(T) + \frac{\alpha}{c^2} F'(T) \frac{\partial T}{\partial t}, \quad t > 0, \quad (7.1)$$

donde $F(T)$ es el término de reacción que modifica la difusión o la transferencia de calor. Por otra parte, la ecuación que gobierna la transferencia de calor en un medio poroso homogéneo unidimensional para un fluido de una fase es la ecuación de advección-difusión,

$$\frac{\partial}{\partial t} [((1 - \phi)\rho_r C_r + \phi\rho_w C_w)T] + \frac{\partial}{\partial x} (u_w \rho_w C_w T) - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

donde

- ϕ es la porosidad.
- C_r y C_w es el calor específico de la roca y agua respectivamente.
- ρ_r y ρ_w es la densidad de la roca y agua respectivamente.
- u es la velocidad de Darcy.
- α es la difusividad térmica.
- c es la velocidad de propagación.

Nótese que esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{TQ'(T)}{Q(T)} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{Q(T)} \frac{\partial}{\partial x} (u_w \rho_w C_w T) - \frac{\alpha}{Q(T)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

donde

$$Q(T) = (1 - \phi)\rho_r C_r + \phi\rho_w C_w$$

Haciendo una burda comparación entre esta ecuación y (7.1), se observa que

$$\frac{\alpha}{c^2} F'(T) = -\frac{TQ'(T)}{Q(T)}$$

y por lo tanto, podemos proponer como término de reacción en la ecuación (7.1), a

$$F(T) = -\frac{c^2}{\alpha} \int_0^T \frac{TQ'(T)dT}{Q(T)}$$

7.2. Resolviendo la ecuación telégrafo

Vamos a comenzar extrayendo parte de lo analizado en el capítulo 2 (ver también Anexo), de manera que la ecuación (7.1) la podemos reescribir como

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = q(x, t), \quad t > 0, \quad (7.2)$$

donde $u(x, 0)$ y $v(x, 0) = \partial u(x, t)/\partial t|_{t=0}$ son funciones conocidas y $q(x, t)$ es la función de reacción. La solución de (7.2), como se ve en el Anexo (haciendo $u = \frac{\phi}{4\pi}$), puede ser escrita como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\alpha} g(x - \xi, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial g(x - \xi, t)}{\partial t} \right) u(\xi, 0) d\xi \\ &+ \frac{1}{c^2} \int_{\mathbb{R}} g(x - \xi, t) v(\xi, 0) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}} g(x - \xi, t - \tau) q(\xi, \tau) d\xi, \end{aligned} \quad (7.3)$$

donde $g(x, t)$ es la solución fundamental

$$g(x, t) = \frac{c}{2} e^{-c^2 t / 2\alpha} H(ct - |x|) I_0\left(\frac{c\sqrt{c^2 t^2 - x^2}}{2\alpha}\right). \quad (7.4)$$

Aquí, $I_0(r)$ es la función de Bessel de primer orden y $H(r)$ es la función de escalón unitaria. Entonces (7.3) puede ser escrita de forma más conveniente usando el teorema de convolución

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} (\mathfrak{G}_1(k, t)U(k, 0) + \mathfrak{G}_2(k, t)V(k, 0)) dk \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(kx+wt)} \mathfrak{G}_3(k, w)\tilde{Q}(k, w) dk dw, \end{aligned} \quad (7.5)$$

donde $U(k, 0)$, $V(k, 0)$, $\mathfrak{G}_1(k, t)$, y $\mathfrak{G}_2(k, t)$ son las transformadas de Fourier de $u(x, 0)$, $v(x, 0)$, $g_1(x, t)$ y $g_2(x, t)$ sobre x respectivamente, y \mathfrak{G}_3 y $\tilde{Q}(k, w)$ son las transformadas de Fourier de $g_3(x, t)$ y $\tilde{q}(x, t)$ en ambas variables, donde para $t < 0$ las funciones $g_3(x, t) = 0$ y $\tilde{q}(x, t) = 0$. Usándose por conveniencia

$$\begin{aligned} g_1(x, t) &= e^{-c^2 t / 2\alpha} \left[\frac{1}{2} \delta(ct - |x|) + \frac{c}{4\alpha} H(ct - |x|) I_0\left(\frac{c\sqrt{c^2 t^2 - x^2}}{2\alpha}\right) \right. \\ &\left. + \frac{c^2 t}{4\alpha} \frac{H(ct - |x|)}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} I_1\left(\frac{c\sqrt{c^2 t^2 - x^2}}{2\alpha}\right) \right], \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$g_2(x, t) = \frac{1}{c^2} g(x, t), \quad g_3(x, t) = g(x, t)H(t), \quad \tilde{q}(x, t) = q(x, t)H(t).$$

Solución numérica

Podemos obtener la solución numérica de la ecuación (7.2) usando (7.5). Esto se puede hacer usando la XFT, un nuevo algoritmo basado en la FFT (ver capítulo 3) calculando la transformada de Fourier de

$$U(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} u(x, t) dx,$$

Este algoritmo esta basado en la aproximación de una función cuadrática-integrable por una combinación lineal de funciones discretas de Hermite.

$$U(\kappa_j, t) \simeq U_j(t) = a \text{xft}_1[\tilde{u}(t)]_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (7.7)$$

donde $a=4/\pi$ y $\text{xft}_1[\tilde{u}(t)]$ representa 'la salida' de la XFT unidimensional aplicada a $\tilde{u}(t)$. Para la transformada inversa tenemos un resultado similar

$$u_j(t) = a \text{ixft}_1[\tilde{U}(t)]_j, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

donde ahora $\text{ixft}_1[\tilde{U}(t)]$ representa la salida de la XFT inversa, aplicada a $\tilde{U}(t)$.

Este algoritmo da resultados exactos para el cálculo de la transformada de Fourier de funciones de rápido decrecimiento evaluada en los nodos κ_j ($\kappa_j = (\pi/2\sqrt{2N})(2j - N - 1)$). Sea F la matriz asociada al algoritmo de XFT bidimensional y F^{-1} su inversa. Entonces, F y F^{-1} pueden ser escritas como el producto de Kronecker de las matrices XFT unidimensionales F_x y F_t

$$F = F_t \otimes F_x \quad F^{-1} = F_t^{-1} \otimes F_x^{-1}.$$

Por lo tanto, la aproximación a la transformada de Fourier

$$U(k, w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx+wt)} u(x, t) dx dt$$

puede escribirse en la forma matricial

$$U = a^2 F \tilde{u}. \quad (7.8)$$

aquí U y \tilde{u} son los vectores de longitud $N_x N_t$ donde N_x es el número de nodos en el espacio y N_t es el número de nodos en el tiempo. Teniendo como elementos

$$U_r \simeq U(\kappa_j, w_k), \quad \tilde{u}_r = u(ax_j, at_k)$$

ordenado de acuerdo a

$$r = j + (k - 1)N_x, \quad j = 1, 2, \dots, N_x, \quad k = 1, \dots, N_t. \quad (7.9)$$

Tomando en cuenta que la ecuación (7.6) da la solución del problema (7.2) como una suma de transformadas inversas de Fourier de productos de transformadas directas, los resultados pueden ser usados para obtener una solución numérica de (7.2), en términos de la XFT de los datos, de acuerdo a

$$u_k = aF_x^{-1} \left(F_x g_1(t_k) \circ F_x u(0) + F_x g_2(t_k) \circ F_x v(0) \right) + \left(a^2 F^{-1} (F g_3 \circ F \tilde{q}) \right)_k, \quad (7.10)$$

$k=1, 2, \dots, N_t$, donde u_k es el vector de longitud N_x cuyos elementos se aproximan a $u(x_j, t_k)$, el símbolo \circ representa producto de Hadamard, $g_1(t_k)$, $g_2(t_k)$, $u(0)$ y $v(0)$ son vectores cuyas entradas son $g_1(x_j, t_k)$, $g_2(x_j, t_k)$, $u(x_j, 0)$ y $v(x_j, 0)$, respectivamente y finalmente, g_3 y \tilde{q} son vectores de longitud $N_x N_t$ cuyas entradas son $g_1(x_j, t_k)$ y $\tilde{q}(x_j, t_k)$, ordenadas como en (7.9). En términos de la XFT algoritmo, (7.10) toma la forma

$$u_k = a \text{xft}_1 \left[\text{xft}_1[g_1(t_k)] \circ \text{xft}_1[u(0)] + \text{xft}_1[g_2(t_k)] \circ \text{xft}_1[v(0)] \right] + a^2 \text{xft}_2 \left[\text{xft}_2[g_3] \circ \text{xft}_2[\tilde{q}] \right]_k, \quad (7.11)$$

donde $\text{xft}_2[\cdot]$ representa la salida de la XFT bidimensional.

Note que (7.10) puede también escribirse de la forma matricial

$$u_k = aF_x^{-1} G_{1k} F_x u(0) + aF_x^{-1} G_{2k} F_x v(0) + a^2 (F^{-1} G_3 F \tilde{q})_k, \quad k = 1, 2, \dots, N_t, \quad (7.12)$$

donde G_{1k} , G_{2k} y G_3 son matrices diagonales cuyos elementos de la diagonal son los elementos de los vectores $F_x g_1(t_k)$, $F_x g_2(t_k)$ y $F g_3$ respectivamente.

En el caso donde no hay término de origen, la solución numérica de (7.2) está dada por algún $t > 0$ para (7.12) con $\tilde{q} = 0$. En este caso u_k se convierte en un vector de longitud N_x , denotado por $u(t)$, cuyos elementos se aproximan a $u(x_j, t)$. Por lo tanto

$$u(t) = aF_x^{-1}G_1(t)F_x u(0) + aF_x^{-1}G_2(t)F_x v(0), \quad (7.13)$$

escrita en forma matricial o también podemos escribirla en términos del algoritmo de XFT de la siguiente forma,

$$u(t) = a \text{xft}_1 \left[\text{xft}_1 [g_1(t)] \circ \text{xft}_1 [u(0)] + \text{xft}_1 [g_2(t)] \circ \text{xft}_1 [v(0)] \right]. \quad (7.14)$$

Ecuación telégrafo de Reacción-Difusión

Siguiendo con la notación anterior, la ecuación telegráfo de reacción-difusión para una variable espacial se puede escribir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(u) + \frac{\alpha}{c^2} F'(u) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad t > 0, \quad (7.15)$$

donde $F(u)$ es el término de reacción. Esta ecuación diferencial parcial no lineal puede resolverse usándose lo que se vió anteriormente. Un proceso simple para esto es usando el método de iteración de Piccard en la Ec. (7.11) donde \tilde{q} se sustituye por el término de la mano derecha de la Ec. (7.15) en cada iteración. Las iteraciones pueden pararse cuando

$$\max_{j,k} |u_{jk}^{(n+1)} - u_{jk}^n| < 10^{-4} \quad (7.16)$$

En la ecuación (7.15), la derivada parcial temporal del lado de mano derecha se puede aproximar mediante una diferencia finita para cada una de las iteraciones.

Ecuación de advección-difusión y término de reacción

La propagación de un frente térmico en un sistema geotérmico líquido (fase simple) basado en rocas homogéneas y conducción térmica insignificante, ha sido estudiada por varios autores (Bodvarsson, 1972; Gringarten, 1978; Shook, 2001) [5]. La ecuación de conservación de energía es conocida de la literatura (Gringarten, 1978; Wangen, 1994; Pao et al., 2001). Para un fluido de fase simple en un medio poroso, la conservación de masa y energía puede ser expresada (Shook, 2001) como:

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho_w \vec{u}_w) &= 0 \\ \phi \frac{\partial (\rho \bar{C}_p T)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho_w \vec{u}_w C_p T) &= \vec{\nabla}(K \vec{\nabla} T) \end{aligned}$$

donde $\rho\bar{C}_p = \phi\rho_w C_w + (1 - \phi)\rho_r C_r$, u_w la velocidad de Darcy y K la conductividad térmica. Si nosotros asumimos que la roca es incomprensible y la capacidad calorífica constante y dejando de lado la conducción de calor como efecto de segundo orden (Woods y Fitzgerald, 1993), se pueden combinar las dos ecuaciones y para una sola dimensión se obtiene

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u_w}{\phi} \left(\frac{\phi\rho_w C_w}{\phi\rho_w C_w + (1 - \phi)\rho_r C_r} \right) \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

la cual describe la velocidad del frente térmico en un medio poroso unidimensional, en ésta ecuación la velocidad del frente de temperatura esta relativamente retardado de la velocidad del fluido por un valor que está relacionado a la capacidad calorífica:

$$\frac{v_T}{v_w} = \frac{v_T}{u_w/\phi} = \left(\frac{\phi\rho_w C_w}{\phi\rho_w C_w + (1 - \phi)\rho_r C_r} \right) = \beta_T < 1 \quad (7.17)$$

Para una dimensión, el flujo de fluido de fase simple a través de un medio permeable puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - \phi)\rho_r C_r + \phi\rho_w C_w]u + \frac{\partial}{\partial x} (u_w \rho_w C_w u) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (7.18)$$

Multiplicando por $1/Q(u)$ y desarrollando la derivada temporal en (7.18) llegamos a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{uQ'(u)}{Q(u)} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{Q(u)} \frac{\partial}{\partial x} (u_w \rho_w C_w u) - \frac{\alpha}{Q(u)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (7.19)$$

donde

$$Q(u) = (1 - \phi)\rho_r C_r + \phi\rho_w C_w$$

Entonces procediendo a hacer una burda comparación entre (15) y (19), se observa que

$$\frac{\alpha}{c^2} F'(T) = -\frac{TQ'(T)}{Q(T)}$$

y por lo tanto, podemos proponer como término de reacción en la ecuación (7.15), a

$$F(u) = -\frac{c^2}{\alpha} \int_0^u \frac{uQ'(u)du}{Q(u)}$$

Simulaciones numéricas

Se propone entonces

$$F(u) = -\frac{c^2}{\alpha} \int_0^u \frac{uQ'(u)du}{Q(u)} \quad (7.20)$$

Aquí

$$Q(u) = (1 - \phi)\rho_r C_r + \phi\rho_w C_w$$

donde [8]

$$\rho_r = \frac{2650}{1 + (u - 20)0.5 \times 10^{-4}}$$

$$\rho_w = 1043.2 - 42.9e^{0.007u}$$

$$C_r = 1234.2 - 452.5e^{-0.004u}$$

$$C_w = \frac{1}{0.00023 + 8 \times 10^{-8}u - 8 \times 10^{-10}u^2}$$

La ecuación a resolver (7.15), que describe la velocidad en que la temperatura se desplaza lejos del pozo de inyección, tiene tres parámetros: el coeficiente de difusión α , la velocidad c del agua en el medio poroso y la porosidad del medio ϕ .

Las rocas volcánicas de Los Azufres, (Torres-Alvarado Ignacio S., Satir Muharrem, 1998) han sido descritas por diferentes autores, geológicamente dos divisiones principales pueden distinguirse:

- 1) una secuencia de silicatos de riocitas, riolitas y dacitas con un espesor arriba de 1000m.
- 2) a 2700 m de interstratificación espesos flujos de lava y rocas piroclásticas, de composición andesítica y basáltica.

En la parte norte del campo (zona de Marítaro) los fluidos geotérmicos son formados por una mezcla de gases y líquidos, con temperatura alrededor de 300 – 320°C. En el sur (zona de Tejamaniles) la fase de gas domina sobre la fase de líquido (260 – 280°C).

La Comisión Federal de Electricidad en su área de proyectos geológicos proporcionó un Estudio con trazadores en la zona norte del campo geotérmico de Los Azufres, Mich. Tercera etapa (informe final IIE/11/13359/I 01/F) y datos generales de dos de los pozos analizados en este estudio. Estos datos son: la litología de los pozos Az-05 y Az-64 que van de la andesita a la basáltica, la permeabilidad en ambos pozos, porosidad del 10%, conductividad térmica 1.7W/m°C. Del estudio, inyectando 96.4 kg de SF₆ en el pozo Az-64 y observando varios pozos, (nos interesa el Az-05), los resultados muestran que es considerable la permeabilidad entre estos pozos. La distancia medida entre ellos es de 195.02 m y se consideró que la temperatura del yacimiento es de 300°C ; habían transcurrido solamente 30 días de la inyección con trazador y se registró que se había recuperado el 48%

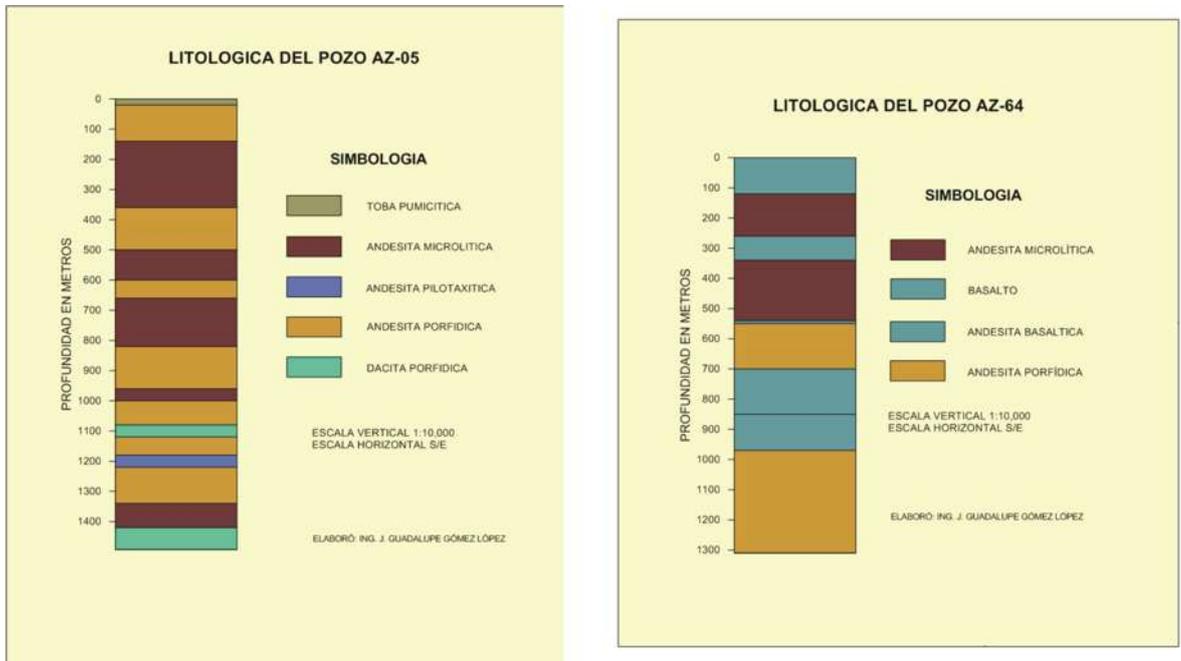


Figura 7.1: Litologías de los pozos de inyección y producción

Para estos cálculos proponemos los valores constantes de la porosidad $\phi = 0.1$ y $c \approx 0.00008 \text{ m/s} \approx 0.29 \text{ m/hr}$; cerca del valor dado en (J. Stopa, P. Wojnarowski, 2005). Tomamos el valor de α para la arenita, sandstone. $\alpha = 1.12 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \approx 0.004 \text{ m}^2/\text{hr}$.

Con los datos anteriores podemos ver el comportamiento de $\frac{\alpha}{c^2} F(u) = - \int_0^u \frac{uQ'(u)du}{Q(u)}$ en la figura 7.2.

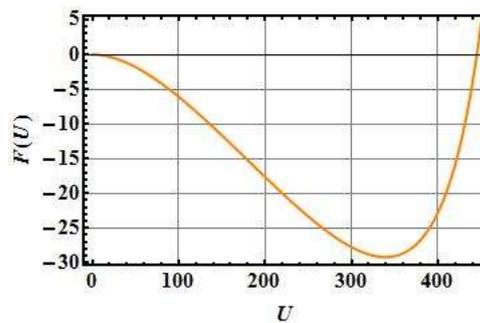


Figura 7.2: Comportamiento del término de reacción

Teniendo en cuenta todo lo discutido y constantes y variables que intervienen, procediendo a resolver la ecuación de interés por el método ya discutido se obtuvo la curva solución que se observa en la figura 7.3.

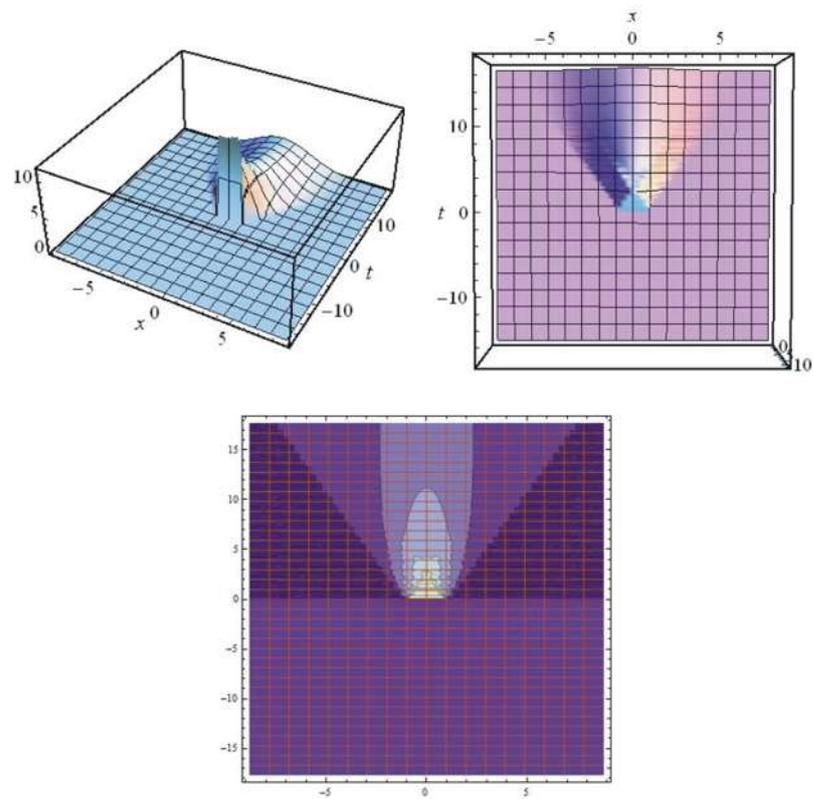


Figura 7.3: Curva y contorno de la solución

De este resultado, por medio de esta curva podemos obtener la velocidad a la cuál se desplaza el frente frío, obteniendo así que la velocidad del frente frío es de $0.1781\text{m/hr} = 4.9447 \times 10^{-5}\text{m/s} = 1.56\text{ km/año}$, dicho de otra manera, entre los pozos Az-05 y Az-64, el frente frío alcanza al pozo productor en 45 días.

Análisis de la permeabilidad entre los pozos

Para investigar la permeabilidad que hay en el medio en cuestión proponemos los siguientes valores de los parámetros,

α difusividad térmica = $0.004 \text{ m}^2/\text{hra}$

$\phi = 0.1$ (porosidad)

$c = 0.29 \text{ m/hr}$. Este parámetro es proporcional a la permeabilidad K , pues $c = \frac{K \nabla P}{\phi \mu}$, donde ϕ es la porosidad del medio, μ es la viscosidad y ∇P el gradiente de presión. Así que considerando constantes al gradiente y a la viscosidad, se tiene una relación proporcional entre la velocidad del agua y K .

μ viscosidad del agua a $40^\circ\text{C} = 6.51 \times 10^{-4} [\text{Pa} \cdot \text{seg} = \text{Kg/m/s}]$. (ver tablas de viscosidad del agua (monografias.com))

K permeabilidad (m^2)

∇P gradiente de presión = 9.8 kPa/m (ver www.glossary.oilfield.slb.com/es/Terms/g/geopressure-gradient.aspx)

Estos valores dan un resultado muy pequeño pero dentro del rango para la permeabilidad, obteniendo con esta velocidad

$$K = 5.314 \times 10^{-13} \text{ m}^2 = 538.48 \text{ miliDarcys (1Darcy} = 9.869 \times 10^{-13} \text{ m}^2)$$

La cual está en concordancia con los datos proporcionados por CFE, los cuales van de $(0.005 - 60000) \times 10^{-15}$, cabe mencionar que no conocemos como fueron medidos estos datos; este valor puede indicar la pronta recuperación del trazador inyectado y medido para estos dos pozos, comparando con lo reportado en curvas de estimación de permeabilidad en (Moya, S. L., Aragón A. 1997), las cuales van de 10-100 mD.

Ahora, procediendo a dar diferentes valores en nuestro método anterior, $c = 0.07, 0.09, \dots, 0.29$, obtenemos la gráfica mostrada en la figura 7.4, de la que es fácil ver que para valores de velocidad de propagación mayores de 0.25, la velocidad del frente frío se mantiene constante y para velocidades menores de 0.25 la velocidad de frente frío crece relativamente. Sería aún más interesante ver que pasa con velocidad arriba de 0.30, pero por ahora para nuestro objetivo analizaremos con estos valores.

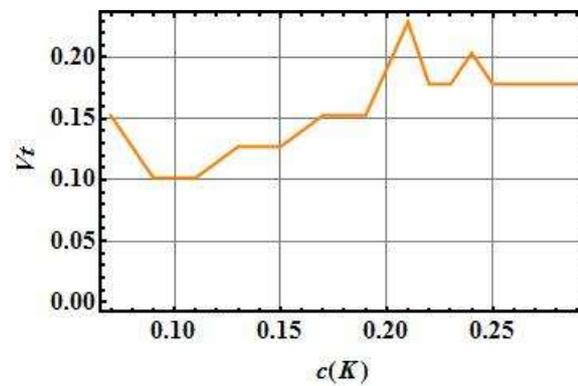


Figura 7.4: Muestra la velocidad del agua que depende de la permeabilidad vs. velocidad de frente frío

Siguiendo con los cálculos, dados valores para $c = 0.1$ tenemos que $K = 1.84 \times 10^{-13} m^2$, para $c = 0.2$ tenemos que $K = 3.69 \times 10^{-13} m^2$ y para $c = 0.3$ tenemos $K = 5.53 \times 10^{-13} / m^2$. La velocidad de frente térmico crece cuando crece la permeabilidad (de la figura 7.4), como era de esperar.

En cada valor dado de velocidad del agua en el medio, cumple con la condición en (7.17) excepto por $c = 0.21$ en el cual el cociente es mayor que uno, esto puede no ser un error en el método pues podemos tener discontinuidades ya que el término reacción las tiene. Para un mayor análisis sería conveniente a través de otro método encontrar la solución a nuestra ecuación telégrafo de reacción- difusión y comparar con velocidades cercanas a ésta que no encaja con la teoría.

Conclusiones

El nuevo algoritmo de la transformada fraccionaria de Fourier nos ayudo a resolver nuestro modelo de ecuación telégrafo y poder presentar los siguientes resultados.

Obtuvimos que la velocidad del frente frío entre los pozos Az-05 y Az-64, pozos de inyección y producción respectivamente, es de $0.1781\text{m/hr} = 4.9447 \times 10^{-5}\text{m/s} = 1.56\text{ km/año}$, dicho de otra manera, el frente frío alcanza al pozo productor en 45 días ya que la distancia entre ellos es de 192 m.

Dando diferentes valores en nuestro método anterior, $c = 0.07, 0.09, \dots, 0.29$, obtenemos la gráfica mostrada en la figura 7.4, de la que es fácil ver que para valores de velocidad de propagación mayores de 0.25m/hr , la velocidad del frente frío se mantiene constante y para velocidades menores de 0.25 la velocidad de frente frío crece relativamente. Sería aún más interesante ver que pasa con velocidad arriba de 0.30, lo cuál se queda como tema para seguir investigando.

Capítulo 8

Anexo

8.1. Solución fundamental de la ecuación de difusión

Consideremos el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Lo haremos a través de un método calculando \hat{u} , la transformada de Fourier de u en la variable espacial x y denotaremos por \tilde{u} a la transformada inversa de Fourier de u . Así que

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + |y|^2 \hat{u} = 0 & \text{para } t > 0 \\ \hat{u} = \hat{g} & \text{para } t = 0 \end{cases}$$

de donde

$$\hat{u} = e^{-t|y|^2} \hat{g}.$$

en consecuencia

$$u = \widetilde{e^{-t|y|^2} \hat{g}}$$

y por tanto,

$$u = \frac{g * F}{(2\pi)^{n/1}} \tag{8.1}$$

donde $\hat{F} = e^{-t|y|^2}$, así que

$$F = \widetilde{e^{-t|y|^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y - t|y|^2} dy = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

debido a que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y - t|y|^2} dy = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_j y_j - t y_j^2} dy_j = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

sustituyendo en 8.1 obtenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$

En virtud del teorema integral de convolución tenemos que también

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

es solución y es llamada la solución fundamental de la ecuación de difusión. Note que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) dx = 1.$$

8.2. Solución general a la ecuación de reacción-difusión

Considere el problema

$$\nabla_0^2 \phi - a^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_0} \right) = -4\pi \rho(r_0, t_0) \quad (8.2)$$

donde ρ es la función de origen, es una función conocida espacial y temporalmente. Resolveremos el problema en términos de una función de Green, la cual satisface condiciones de frontera homogéneas y una condición de causalidad:

$$G(r, t|r_0, t_0) = 0 \quad \text{sit } t < t_0 \quad (8.3)$$

Haciendo primeramente $\rho = 0$, tenemos que la ecuación satisfecha por G involucra un impulso en el punto de origen:

$$\nabla^2 G - a^2 (\partial G / \partial t) = -4\pi \delta(r - r_0) \delta(t - t_0)$$

Esta ecuación se puede interpretar como G la temperatura de un medio, entonces el impulso en el punto de origen introduce una unidad de calor en r_0 al tiempo t_0 . G da entonces la temperatura a un tiempo futuro para algún otro punto del medio y entonces describe la manera en cómo se difunde el calor lejos de su posición inicial.

La función G satisface una condición de reciprocidad donde un cambio de tiempo está involucrado por virtud de la continuidad del tiempo, demandado por la causalidad; se muestra entonces que

$$G(r, t|r_0, t_0) = G(r_0, -t_0|r, t) \quad (8.4)$$

La función $G(r_0, -t_0|r, t)$ da el efecto en r_0 a un tiempo $-t_0$ de un calor introducido originalmente dentro del medio en r en el tiempo $-t$. Desde entonces $t_0 < t$, la secuencia del tiempo está propiamente ordenada. Otra manera de entender esta función es la de considerar la función adjunta $\tilde{G}(r, t|r_0, t_0)$ definida por

$$G(r_0, -t_0|r, t) = \tilde{G}(r, t|r_0, t_0) \quad (8.5)$$

\tilde{G} satisfice

$$\nabla^2 \tilde{G} + a^2(\partial G/\partial t) = -4\pi\delta(r - r_0)\delta(t - t_0)$$

La condición 8.3 es reemplazada por $\tilde{G}(r, t|r_0, t_0) = 0$ si $t > t_0$. Así la condición de reciprocidad queda como

$$G(r, t|r_0, t_0) = \tilde{G}(r_0, t_0|r, t) \quad (8.6)$$

Con lo anterior podemos considerar las dos ecuaciones:

$$\nabla_0^2 G + a^2(\partial G/\partial t_0) = -4\pi\delta(r - r_0)\delta(t - t_0) \quad \nabla_0^2 \tilde{G} - a^2(\partial \tilde{G}/\partial t_0) = -4\pi\delta(r - r_0)\delta(t - t_0) \quad (8.7)$$

Volviendo a la ecuación 8.2, multipliquémosla por G , y a la primera ecuación de 8.7 multipliquémosla por ϕ ; restando éstas dos ecuaciones resultantes e integrando sobre el espacio y sobre el tiempo de 0 a t^+ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{t^+} dt_0 \int dV_0 [\phi \nabla_0^2 G - G \nabla_0^2 \phi] + a^2 \int dV_0 \int_0^{t^+} dt_0 \left[\phi \left(\frac{\partial G}{\partial t_0} \right) + G \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_0} \right) \right] \\ = 4\pi \int_0^{t^+} dt_0 \int dV_0 \rho G - 4\pi \phi(r, t) \end{aligned} \quad (8.8)$$

Podemos aplicar el teorema de Green a la primera de estas integrales, en el caso de la segunda integral, la integral temporal puede ser solucionada. Note que $G(r, t|r_0, t^+) = 0$. Finalmente

$$\begin{aligned} \phi(r, t) = \int_0^{t^+} dt_0 \int dV_0 \rho(r_0, t_0) G(r, t|r_0, t_0) \\ + \frac{1}{4\pi} \int_0^{t^+} dt_0 \int dS_0 \cdot [G \text{grad}_0 \phi - \phi \text{grad}_0 G] + \frac{a^2}{4\pi} \int dV_0 [\phi G]_{t_0=0} \end{aligned} \quad (8.9)$$

G cambia para satisfacer las condiciones de frontera homogéneas correspondientes a las condiciones de frontera satisfechas por ϕ . Por ejemplo, si ϕ satisface condiciones homogéneas o no homogéneas de Dirichlet, G cambia para satisfacer las condiciones homogéneas de Dirichlet. Note que el tercer término involucra los efectos del valor inicial ϕ_0 de ϕ , mientras que los otros dos términos representan los efectos del volumen inicial y condiciones de frontera.

8.3. Solución a la ecuación de reacción-telegrafo

Desarrollaremos la solución general de esta ecuación o también llamada ecuación de reacción-difusión hiperbólica. Consideremos entonces nuestra ecuación en tres dimensiones:

$$\nabla^2 \phi = a^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + (1/c^2) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - 4\pi \rho(r, t) \quad (8.10)$$

Una función de Green (haciendo $\rho(r, t) = 0$) apropiada para 8.10 satisfice

$$\nabla^2 G - a^2 \left(\frac{\partial G}{\partial t} \right) - (1/c^2) \left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \right) = -4\pi \delta(r - r_0) \delta(t - t_0) \quad (8.11)$$

Nuevamente asumiendo el principio de causalidad. La condición de reciprocidad es $G(r, t|r_0, t_0) = G(r_0, -t_0|r, -t)$. El análogo a la ecuación 8.9 es

$$\begin{aligned} \phi(r, t) = & \int_0^{t^+} dt_0 \int dV_0 \rho(r_0, t_0) G(r, t|r_0, t_0) + \frac{a^2}{4\pi} \int dV_0 [\phi G]_{t_0=0} \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_0^{t^+} dt_0 \oint dS_0 \cdot [G \text{grad}_0 \phi - \phi \text{grad}_0 G] + \frac{1}{4\pi c^2} \int dV_0 [G \frac{\partial \phi}{\partial t_0} - \phi \frac{\partial G}{\partial t_0}]_{t_0=0} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Ahora desarrollaremos la función de Green $g(R, \tau)$ apropiada para 8.12, para el infinito y dominio sin frontera. Sea

$$g(R, \tau) = \int dV_p e^{ip \cdot R} \gamma(p, \tau) \quad (8.13)$$

Sustituyendo en 8.11 obtenemos una ecuación diferencial

$$\left(\frac{1}{c^2}\right) \frac{d^2 \gamma}{d\tau^2} + a^2 \frac{d\gamma}{d\tau} + p^2 \gamma = \frac{4\pi}{(2\pi)^n} \delta(\tau) \quad (8.14)$$

donde $n = 1, 2, 3$ de acuerdo al número de dimensiones espaciales involucradas. Note que la función γ solamente depende de p^2 y τ . Los caminos particulares de integración están cambiados (la integración angular a través de la dirección de p requeridas en 8.13) así que las condiciones de frontera son satisfechas y para el caso unidimensional se obtiene:

$$g(R, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipR} \gamma(p, \tau) dp \quad (8.15)$$

Solucionando la forma homogénea de 8.14 tenemos

$$e^{-iw^+ t} \quad \text{y} \quad e^{-iw^- t}$$

con

$$w^+ = \frac{1}{2} [-ia^2 C62 + \sqrt{4p^2 c62 - a^4 c^4}] \quad \text{y} \quad w^- = \frac{1}{2} [-ia^2 C62 - \sqrt{4p^2 c62 - a^4 c^4}]$$

La combinación lineal de ellas satisfaciendo la condición de que $\gamma(\tau) = 0$ para $\tau < 0$ es

$$\gamma(\tau) = \frac{4\pi c^2 i}{(2\pi)^n} \left[\frac{e^{-iw^+ t} - e^{-iw^- t}}{w^+ - w^-} \right] u(\tau)$$

Sustituyendo en 8.15 con $n = 1$ Determinando la integral g_1 llegamos a

$$g_1(R, \tau) = 2c^2 i u(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iw^+ t} - e^{-iw^- t}}{w^+ - w^-} e^{ipR} dp$$

Consideremos la integral involucrando $e^{-iw^+ \tau}$:

$$\left(\frac{1}{2c}\right) e^{-\frac{1}{2} a^2 c^2 \tau} \int_C \frac{\exp i[pR - \sqrt{p^2 - (a^4 c^2/4)} c \tau]}{\sqrt{p^2 - \frac{1}{4}(a^4 c^2)}} dp$$

Cuando $R > c\tau$ el contorno puede ser cerrado por un semicírculo en la mitad superior del plano. La integral es entonces cero pues no encierra singularidades. Cuando $R < c\tau$ el contorno está deformada así que se extiende a lo largo del eje imaginario negativo. Evaluaremos entonces de manera similar a la integral involucrada en la ecuación de Klein-Gordon (ver [34] pp. 1343), de acuerdo a la transformada de Laplace

$$-\left(\frac{\pi i}{c}\right)e^{-\frac{1}{2}a^2c^2\tau}J_0[1/2a^2c\sqrt{R^2 - c^2\tau^2}]u(c\tau - R)$$

Considerando ahora la contribución viniendo de la integral involucrando $e^{-i\omega\tau}$:

$$\frac{1}{2c}e^{-\frac{1}{2}a^2c^2\tau} \int_C \frac{\exp[ipR + i\sqrt{p^2 - (a^4c^2/4)c\tau}]d p}{\sqrt{p^2 - \frac{1}{4}(a^4c^2)}}$$

Ésta integral es cero cuando $(R + c\tau) > 0$ (en una dimensión R puede ser negativo) pero no es cero cuando $(R + c\tau) < 0$. Entonces obtenemos

$$-\left(\frac{\pi i}{c}\right)e^{-\frac{1}{2}a^2c^2\tau}J_0[1/2a^2c\sqrt{R^2 - c^2\tau^2}][1 - u(c\tau + R)]$$

Combinando estas dos expresiones llegamos a:

$$g_1(R, \tau) = 2\pi c e^{-\frac{1}{2}a^2c^2\tau}J_0[1/2a^2c\sqrt{R^2 - c^2\tau^2}]u(c\tau - R) \quad (8.16)$$

Entonces el problema de valores iniciales para el caso unidimensional, encontramos que para 8.12

$$\phi = \frac{a^2}{4\pi} \int dx_0 [\phi g_1]_{t_0} + \frac{1}{4\pi c^2} \int dx_0 \left[g_1 \frac{\partial \phi}{\partial t_0} - \phi \frac{\partial g_1}{\partial t_0} \right]_{t_0} \quad (8.17)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}a^2c^2t}[\phi_0(x+ct) + \phi_0(x-ct)] \\ &+ e^{-\frac{1}{2}a^2c^2t} \int_{x-ct}^{x+ct} \left[\frac{a^2c}{4}I_0\left[\frac{1}{2}a^2c\sqrt{c^2t^2 - (x_0-x)^2}\right] + \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}I_0\left[\frac{1}{2}a^2c\sqrt{c^2t^2 - (x_0-x)^2}\right] \right] \phi_0(x_0)dx_0 \\ &+ \frac{1}{2c}e^{-\frac{1}{2}a^2c^2t} \int_{x-ct}^{x+ct} I_0\left[\frac{1}{2}a^2c\sqrt{c^2t^2 - (x_0-x)^2}\right]v_0(x_0)dx_0 \end{aligned} \quad (8.18)$$

Donde $\phi_0(x_0)$ y $v_0(x_0)$ son los valores iniciales de ϕ y $\partial\phi/\partial t$, respectivamente.

8.4. Código solución en Mathematica

Solución por método de Picard a la Ec. Telégrafo reacción-difusión

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} F(u) = \frac{1}{\alpha} F(u) + \frac{1}{c^2} F'(u) \frac{\partial u}{\partial t}$$

para una sola dimensión espacial

con $F(u) = u * q'(u)/q(u)$ y condiciones iniciales
 $u_0(x) = a \text{HeavisideTheta}[b^2 - x^2]$; $v_0(x) = 0$

POZO GEOTERMICO

SetDirectory[NotebookDirectory[]];

```
XFT1D[f.]:=Module[{n,S,fs,A0,g},
n=Length[f];A0=N[ $\frac{\pi}{\sqrt{2n}}e^{i\frac{2\pi}{n}(\frac{n-1}{2})^2}$ ];S=Table[N[Exp[-i $\pi\frac{n-1}{n}j$ ]],{j,0,n-1}];
fs=S*f;g=A0*S*Fourier[fs,FourierParameters->{1,1}];
g]
```

```
XFT1DINV[g.]:=Module[{n,S,fs,A0,f},
n=Length[g];A0=N[ $\frac{\pi}{\sqrt{2n}}e^{-i\frac{2\pi}{n}(\frac{n-1}{2})^2}$ ];S=Table[N[Exp[i $\pi\frac{n-1}{n}j$ ]],{j,0,n-1}];
fs=S*g;f=(1/2/Pi)*A0*S*Fourier[fs,FourierParameters->{1,-1}];
f]
```

```
XFT2D[Signal.]:=Module[{f=Signal,nx,ny,Sx,Sy,Gx,Gxy,fsx,fsy,ax,ay},
{ny,nx}=Dimensions[f];
ax= $\frac{\pi}{\sqrt{2nx}}e^{i\frac{2\pi}{nx}(\frac{nx-1}{2})^2}$ ;ay= $\frac{\pi}{\sqrt{2ny}}e^{i\frac{2\pi}{ny}(\frac{ny-1}{2})^2}$ ;Gx=Table[0,{j,ny},{k,nx}];
Gxy=Transpose[Gx];
Sx=Table[ $e^{-i\pi\frac{nx-1}{nx}j}$ ,{j,0,nx-1}];Sy=Table[ $e^{-i\pi\frac{ny-1}{ny}j}$ ,{j,0,ny-1}];
For[l=1,l<=ny,l++,fsx=Sx*f[[l]];
Gx[[l]]=ax*Sx*Fourier[fsx,FourierParameters->{1,1}];];
For[l=1,l<=nx,l++,fsy=Sy*Transpose[Gx][[l]];
Gxy[[l]]=ay*Sy*Fourier[fsy,FourierParameters->{1,1}];];
Transpose[Gxy]]
```

```
XFT2DINV[Signal.]:=Module[{g=Signal,nx,ny,Sx,Sy,Gx,Gxy,fsx,fsy,ax,ay},
```

```

{ny,nx} = Dimensions[g];
 $\alpha_x = \frac{\pi}{\sqrt{2nx}} e^{-i \frac{2\pi}{nx} \left(\frac{nx-1}{2}\right)^2}$ ;  $\alpha_y = \frac{\pi}{\sqrt{2ny}} e^{-i \frac{2\pi}{ny} \left(\frac{ny-1}{2}\right)^2}$ ;
Gx = Table[0, {j, ny}, {k, nx}]; Gxy = Transpose[Gx];
Sx = Table  $\left[ e^{i \pi \frac{nx-1}{nx} j}, \{j, 0, nx - 1\} \right]$ ; Sy = Table  $\left[ e^{i \pi \frac{ny-1}{ny} j}, \{j, 0, ny - 1\} \right]$ ;
For[l = 1, l ≤ ny, l++, fsx = Sx * g[[l]];
Gx[[l]] =  $\alpha_x$  * Sx * Fourier[fsx, FourierParameters → {1, -1}]];
For[l = 1, l ≤ nx, l++, fsy = Sy * Transpose[Gx][[l]];
Gxy[[l]] =  $\alpha_y$  * Sy * Fourier[fsy, FourierParameters → {1, -1}]];
Transpose[(1/2/Pi)^2 * Gxy]

```

```

Ff[Temp_, fi_, c_,  $\alpha$ .]:=Module[{ror, row, Cr, Cw, q, Fp},
ror[T.]:=2650/(1 + (T - 20) * 0.5 * 10^(-4));
Cr[T.]:=1234.2 - 454.5Exp[-0.004T];
row[T.]:=1043.2 - 42.9Exp[0.007T];
Cw[T.]:=1/(0.00023 + 810^(-8)T - 810^(-10)T^2);
q[T.]:= (1 - fi)ror[T]Cr[T] + firow[T]Cw[T];
Fp[T.]:=Tq'[T]/q[T];
-(c^2/ $\alpha$ )NIntegrate[Fp[t], {t, 0, Temp}]

```

```

Ffp[Temp_, fi_, c_,  $\alpha$ .]:=Module[{ror, row, Cr, Cw, q, Fp},
ror[T.]:=2650/(1 + (T - 20) * 0.5 * 10^(-4));
Cr[T.]:=1234.2 - 454.5Exp[-0.004T];
row[T.]:=1043.2 - 42.9Exp[0.007T];
Cw[T.]:=1/(0.00023 + 810^(-8)T - 810^(-10)T^2);
q[T.]:= (1 - fi)ror[T]Cr[T] + firow[T]Cw[T];
-(c^2/ $\alpha$ )Temp q'[Temp]/q[Temp]

```

```

RDH[fi_, c_,  $\alpha$ ., nx., nt., kcont.]:=Module[
{a, b, mmax, apar, epsix, epsit, x, t, mst, g1pv, g2v, g3v, GC1p, GC2, GC3, U0, V0, ua0, dxab, epsilon, m},

```

```

a = 10; b = 1; mmax = 100; tau = 1.0;
apar = 4./Pi;
epsix = N[Pi/Sqrt[2.nx]]; epsit = N[Pi/Sqrt[2.nt]];
x = Table[N[(k - nx/2 - 1/2)epsix], {k, nx}];
t = Table[N[(k - nt/2 - 1/2)epsit], {k, nt}];
ttau = t * tau; (* ESTO CONVIERTE EL TIEMPO A OTRAS UNIDADES TEMPORALES SI TAU NO ES
ninx = (nx + 1)/2; npox = Position[Floor[x[[ninx;;nx]], 1]; npx = npox[[1, 1]];
mst = ToString[mmax]; XJac::noconv = "No hay convergencia: M>=" <> mst;

u0[x_]:=aHeavisideTheta[b^2 - x^2]; v0[x_]:=0.0/(1 + x^2);
g[x_, t_]:=c/2 e^{-c^2 t/2a} * HeavisideTheta[ct - Abs[x]] * BesselI [0, c Sqrt[(ct)^2 - x^2] / 2a];
g1p[x_, t_]:=e^{-c^2 t/2a} (c/4a BesselI [0, c Sqrt [c^2 t^2 - x^2] / 2 / a] HeavisideTheta[ct - Abs[x]] +
c^2 t/4a BesselI [1, c Sqrt [c^2 t^2 - x^2] / 2 / a] HeavisideTheta[ct - Abs[x]] / Sqrt[c^2 t^2 - x^2]);
g2[x_, t_]:=g[x, t]/c/c; g3[x_, t_]:=HeavisideTheta[t] * g[x, t];

g1pv = Table[g1p[x[[k]], t[[j]], {j, nt}, {k, nx}];
g2v = Table[g2[x[[k]], t[[j]], {j, nt}, {k, nx}];
g3v = Table[g3[x[[k]], t[[j]], {j, nt}, {k, nx}];
GC1p = Table[XFT1D[g1pv[[j]], {j, nt}];
GC2 = Table[XFT1D[g2v[[j]], {j, nt}]; GC3 = XFT2D[g3v];
U0 = XFT1D[u0[x]]; V0 = XFT1D[v0[x]];
If [kcont == 1, ua0 = Table [e^{-c^2 t[[j]]/2a} * (u0[x + ct[[j]] +
u0[x - ct[[j]]) * HeavisideTheta[t[[j]]], {j, nt}] +
apar * Table[Re[XFT1DINV[GC1p[[j]] * U0]] * HeavisideTheta[t[[j]], {j, nt}] +
apar * Table[Re[XFT1DINV[GC2[[j]] * V0]] * HeavisideTheta[t[[j]], {j, nt}];
ua0 = Re[ua0];, ua0 = ua;];

```

```

dxab = 1;epsilon = 10^(-4);m = 0;
While[(dxab > epsilon),
m = m + 1;
ua0t = Transpose[ua0];
ua0der = Transpose[Table[Join[{0}, Table[(ua0t[[k]][[j + 1]] -
ua0t[[k]][[j]])/epsit, {j, nt - 1}]], {k, nx}]];

qtilv = Table[Ff[ua0[[j, k]], fi, c, alpha]/alpha +
Ffp[ua0[[j, k]], fi, c, alpha] * ua0der[[j, k]]/c/c, {j, nt}, {k, nx}];

QTil = XFT2D[qtilv];uaQ = apar^2 * XFT2DINV[GC3 * QTil];
ua = Table [ 
$$\left[ \frac{e^{-\frac{c^2 t[[j]]}{2\alpha}}}{2} * (u0[x + ct[[j]]] + u0[x - ct[[j]]) * HeavisideTheta[t[[j]]], \{j, nt\} \right] +$$

apar * Table[Re[XFT1DINV[GC1p[[j]] * U0]] * HeavisideTheta[t[[j]]], {j, nt}] +
apar * Table[Re[XFT1DINV[GC2[[j]] * V0]] * HeavisideTheta[t[[j]]], {j, nt}] + uaQ;
ua = Table[ua[[j, k]]HeavisideTheta[t[[j]]], {j, nt}, {k, nx}];
ua = Re[ua];dxab = Max[Abs[ua - ua0]];ua0 = ua;
Print[{m, dxab}];
If[m==mmax, (Message[XJac::noconv];Abort[])];];
npl = 0;
t1a = Flatten[Table[{x[[k]], ttau[[j]], Re[ua[[j, k]]}], {j, npl + 1, nt - npl},
{k, npl + 1, nx - npl}], 1, List];
ua
]

```


Bibliografía

- [1] Holmes, E.E., (1993). *Are diffusion models too simple? A comparison with telegraph models of invasion* Am. Nat. 142(5), pp. 779-795. (1993).
- [2] Hedeler, K.P., *Travelling front for correlated random walks*. Can. Appl. Math. pp. 27-43. (1994).
- [3] Mendez, V., Fedotov, S., Horsthemke, W., *Reaction-Transport Systems* Ed. Springer, (2010).
- [4] Clauser, C., 2011. In: Harsh Gupta (Ed.), *Thermal Storage and Transport Properties of Rocks, II: Thermal Conductivity and Diffusivity*. Encyclopedia of Solid Earth Geophysics, 2nd ed., Springer, Dordrecht, preprint.
- [5] Robertson, E., 1988. *Thermal Properties of Rocks*. United States Department of the Interior Geological Survey. Open-File report 88-441.
- [6] Campos, R.G., 2012. *Numerical simulation of reaction-diffusion telegraph systems in unbounded domains* UMSNH, México.
- [7] Campos, R.G., Rico-Melgoza, Chavéz, 2012. *A new formulation of the fast fractional Fourier transform*, SIAM J. Sci. Comput., 34 (2012) A1110-A1125.
- [8] J. Stopa, P. Wojnarowski, 2005, *Analytical model of cold water front movement in a geothermal reservoir* Kraków, Poland.
- [9] Torres-Alvarado I. S. y Satir Muharrem, 1998. *Geochemistry of hydrothermally altered rocks from Los Azufres geothermal field, México*. Geofísica Internacional, vol. 37, núm. 3. 1988. UNAM, México.
- [10] Iglesias, R.E., Torres R.R., Reyes P.,(2007) *Estudio con trazadores en la zona del campo geotérmico de Los Azufres Mich. Tercera etapa*. INFORME FINAL IIE/11/13359/I 01/F. Gerencia de Geotermia. Comisión Federal de Electricidad.
- [11] G. Szegő, 1975. *Orthogonal Polynomials*, Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- [12] Galub G.H. and Welsh J. H., 1969. *Calculation of Gauss quadrature rules*, Math. Comp., 23 (1969), pp. 221-230.

- [13] Gautschi W., 1999. *Orthogonal polynomials and quadrature*, Electron. Trans. Numer. Anal., 9 (1999), pp. 65-76.
- [14] Erdélyi A., Ed., 1953. *Higher Transcendental Functions*, Vols. I, II, McGraw-Hill, New York.
- [15] Campos R.G. and Juárez L.Z., 1992. *A discretization of the continuous Fourier transform*, Nuova Cimento B(11), 107 (1992), pp. 703-711.
- [16] Candan Ç, Kutay M. A. and Ozaktas H. M., 2000. *The discrete fractional Fourier transform*, IEEE Trans. Signal Process., 48(2000), pp. 1329-1337.
- [17] Ozaktas H. M., Ankan O., Kutay M. A. and Bozdağı, 2000. *Digital computation of the fractional Fourier transform*, IEEE Trans. Signal Process., 44 (1996), pp. 2141-2150.
- [18] X. Deng, Y. Li, D. Fan and Y. Qiu, (1997) *A fast algorithm for fractional Fourier transform*, Optics Comm., 138 (1997), pp. 270-274.
- [19] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, *Spectral methods: fundamentals in single domains*, Springer-Verlag, Berlin-Germany, 2006.
- [20] J.A.C. Weideman, S.C. Reddy, *A MATLAB differentiation matrix suite*, ACM Trans. Math. Soft. 26 (2000) 465-519.
- [21] F. Calogero, *Lagrangian interpolation and differentiation*, Lett. Nuovo Cimento 35 (1983) 273-278.
- [22] M. Bruschi, R.G. Campos, E. Pace, *On a method for computing eigenvalues and eigenfunctions of linear differential operators*, Nuovo Cimento B105 (1990) 131-163.
- [23] R.G. Campos, C. Meneses, *Differentiation matrices for meromorphic functions*, Bol. Soc. Mat. Mexicana 12 (2006) 121-132.
- [24] R.G. Campos, F. Domínguez M., *An implementation of the collocation method for initial value problems*, Int. J. Model. Simul. Sci. Comput. (to appear) doi: 10.1142/S1793962313500062
- [25] R.G. Campos, L.O. Pimentel, *A finite-dimensional representation of the quantum angular momentum operator*, Il Nuovo Cimento B116 (2001) 31-46.
- [26] R.G. Campos, J. Rico-Melgoza, E. Chávez, *A new formulation of the fast fractional Fourier transform*, SIAM J. Sci. Comput. 34 (2012) A1110-A1125.
- [27] R.G. Campos, *A non-perturbative method for the $\alpha x^2 + \beta x^4$ interaction*, Rev. Mex. Fis. 32 (1986) 379-400.
- [28] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4th. ed., American Mathematical Society, Providence-RI, 1975.
- [29] R.G. Campos, L.Z. Juárez, *A discretization of the continuous Fourier transform*, Il Nuovo Cimento 107B (1992) 703-711.

- [30] S. Momani, M. A. Noor, Numerical comparison of methods for solving a special fourth-order boundary value problem, *Appl. Math. Comput.* 191 (2007) 218-224.
- [31] P. Rosenau, J. M. Hyman, Compactons: solitons with finite wavelength, *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993) 564-567.
- [32] H. Han, Z. Xu, Numerical solitons of generalized Korteweg-de Vries equations, *Appl. Math. Comput.* 186 (2007) 483-489.
- [33] F. Rus and F.R. Villatoro, Self-similar radiation from numerical Rosenau-Hyman compactons, *J. Comput. Phys.* 227 (2007) 440-454.
- [34] M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Vol. 1, Phys. McGraw-Hill (1953) pp. 865-868.
- [35] F. Ascencio (1992) *Inyección de fluidos de baja entalpía en el campo geotérmico de Los Hornos, Puebla, México*. *Geofísica International* (a992), Vol. 31, Núm. 4, pp. 391-395.
- [36] Bodvarsson, Gudmundur S. (2012) *Injection and thermal breakthrough in fractured geothermal reservoirs* Lawrence Berkeley National Laboratory. LBL-12698. (2012).
- [37] Melgoza-Rangel E., Hernández-Ayala C., (2004) *La protección ambiental en el campo geotérmico de Los Azufres, Mich.* *Geotermia*, Vol. 17, No. 1, Julio-Diciembre de 2004, pp. 2-9.
- [38] Sayantan Ganguly, M.S. Mohan Kumar, (2014) *Analytical solutions for movement of cold water thermal front in a heterogeneous geothermal reservoir* *Applied Mathematical Modelling*, 38 (2014) pp. 451-463.
- [39] Hadeler, K.P.: Reaction telegraph equations and random walk system. In: van Strien, S.J., Verduyn Lunel, S.M. (eds.) *Stochastic and Spatial Structures of Dynamical Systems*, pp. 133-161. North-Holland, Amsterdam (1996)
- [40] Hadeler, K.P.: Reaction transport systems in biological modelling. In: Diekmann, O., Durrett, R., Hadeler, K.P., Maini, P., Smith, H.L. (eds.) *Mathematics Inspired by Biology*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1714, pp. 95-150. Springer, Berlin (1999). <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0092376>
- [41] Hillen, T.: A Turing model with correlated random walk. *J. Math. Biol.* 35(1), 49-72 (1996). <http://dx.doi.org/10.1007/s002850050042>