



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

"Mat. Luis Manuel Rivera Gutierrez"

*El Teorema de Kharitonov mediante
Polinomios Ortogonales*

*Tesis que para obtener el título
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas presenta*

Omar Fabián González Hernández

Dirigida por el Doctor
Abdon Eddy Choque Rivero

Morelia Michoacán México

Julio 2015

Sócrates - Cuando hay un razonamiento verdadero, sólido, susceptible de ser comprendido, ¿no sería una desgracia deplorable, Fedón, que por haberse dejado llevar de esos razonamientos, en que todo aparece tan pronto falso como verdadero, en lugar de acusarse á si mismo y de acusar a su propia incapacidad, vaya uno á hacer recaer la falta sobre la razón, y pasarse la vida aborreciendo y calumniando a la razón misma, privándose así de la verdad y de la ciencia?

- Sí, eso sería deplorable, ¡por Zeus! dije yo.

Sócrates - Estemos, pues en guardia, para que esta desgracia no nos suceda; y no nos preocupemos con la idea de que no hay nada sano en el razonamiento. Persuadámonos más bien de que somos nosotros mismos los autores de este mal, y hagamos decididamente todos los esfuerzos posibles por corregirnos.

Fedón o del alma Diálogos Socráticos.

*A mis padres,
por el apoyo y sacrificios que han realizado
para brindarme a mi y a mis hermanos
lo que en conciencia han creído que es bueno.*

*A mis hermanos,
llevan cada uno una parte de mi alma
y estoy convencido de que pocas son las cosas en la vida
de las cuales se puede estar seguro de tener siempre consigo;
por ser una de ellas.*

A mis amigos y Profesores

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer al Doctor Abdon E. Choque Rivero, asesor de este trabajo, por la comprensión y apoyo que ha mostrado hacia mi, no solo en el ámbito académico, sino por haber intentado orientarme en cuanto a mi formación futura y cuya preocupación roza en lo paternal. Por la confianza que me confiere y por ser un ejemplo a seguir en la profesión matemática.

Al Doctor Fernando Garibay Bonales por su amistad y ayuda a lo largo de mi formación, por ser la causa primera de mi gran aprecio a esta área del conocimiento y porque reconozco que todo cuanto se de análisis matemático ha sido gracias a usted.

Al doctor Peter Zhevandrov, aun cuando no tuve el gusto de ser su alumno, ha mostrado interés por este trabajo, ha seguido su desarrollo y posteriormente se ha encargado de su revisión.

Al Doctor Luis Valero Elizondo, por enseñarnos a ver de una forma divertida y amena las matemáticas y por ser la mayor causa de mi conocimiento del Álgebra.

A mis amigos David Yañez, Roberto Abrego, David Uriel, Guillermo Estrada, Brenda Quezadas, Fidel Ocampo, Edith González y Tania Garibay. Por soportar mis conversaciones y mis ideas que en muchas ocasiones parecían ser divergentes, por la confianza que me han tenido y por su ayuda, pues sin ustedes no habría sido posible concluir esta carrera; espero dejar algo bueno en cada una de sus vidas como, a mi parecer han hecho ustedes en la mía.

Fuera de lo académico, pero no de importancia menor:

A Sahid Aquino, Jaudel Alejandro y Fernando Cervantes por su amistad de tantos años, más que amigos se han vuelto hermanos. Por todo cuanto hemos pasado juntos, por lo que aún nos espera y por las conversaciones de Filosofía. En particular, agradezco a Fernando Cervantes y Andrea Cervantes por su ayuda en la traducción del resumen de este trabajo al idioma inglés.

A mi familia, profesores y amigos. Este apartado no alcanzaría para agradecerles a todos.

Resumen

*“Nihil est in intellectu, quod non prius fuerit in sensu, nisi intellectus ipse”
No hay nada en el intelecto que no haya estado antes en los sentidos,
excepto el propio intelecto.*

Gottfried Leibniz

Con frecuencia los fenómenos físicos conocidos se describen mediante modelos matemáticos que permiten estudiar su comportamiento. Estos modelos, en algunos casos, se describen mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (1)$$

donde A es una matriz $n \times n$ real

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_{n-1} & -p_{n-2} & -p_{n-3} & \cdots & -p_0 \end{pmatrix}.$$

El estudio de la estabilidad y de la estabilidad asintótica del sistema (1) son de vital importancia para el entendimiento del fenómeno físico estudiado. De la teoría de las EDO se conoce que los sistemas del tipo (1) tienen soluciones asintóticamente estables si y sólo si el polinomio característico asociado a la matriz A tiene todas sus raíces en ${}^1\mathbb{C}^-$. En la práctica, los parámetros $p_0, \dots, p_{n-1}$ de la matriz A no son exactos, surge entonces un tipo de incertidumbre a la que se le denomina *incertidumbre paramétrica*. La presente tesis se dedica al estudio de la estabilidad asintótica de los sistemas del tipo (1) que se traduce en el estudio del comportamiento de las raíces del polinomio característico

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_0 \quad \text{donde } p_k \in [\alpha_k, \beta_k] \quad (2)$$

que representa la incertidumbre del sistema (1). El polinomio de tipo (2) es llamado *polinomio intervalo* (PI).

¹ $\mathbb{C}^-$ denota el semiplano izquierdo abierto del plano complejo.

Consideremos, por ejemplo, una masa de ${}^215 \pm 0,5$ kg conectada a un resorte con ${}^3k = 200 \pm 10 \frac{N}{m}$ que oscila en una superficie horizontal cuya constante de amortiguamiento ${}^4\gamma = 9 \pm 1 s^{-1}$. Recordando que la ecuación diferencial para el movimiento amortiguado es

$$\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

donde $\frac{\gamma}{m} = 2\Gamma$ y $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Tenemos entonces una familia de ecuaciones diferenciales con $m \in [14,5, 15,5]$, $k \in [190, 210]$ y $\gamma \in [8, 10]$ lo que implica que $\omega_0^2 \in [\frac{380}{31}, \frac{420}{29}]$ y $2\Gamma \in [\frac{16}{31}, \frac{20}{29}]$. Podemos escribir esta ecuación como un sistema de ecuaciones diferenciales lineales por medio de un cambio de variable

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

El cual tiene por polinomio característico

$$P_c(\lambda) = \lambda^2 + 2\Gamma\lambda + \omega_0^2$$

con

$$\omega_0^2 \in \left[\frac{380}{31}, \frac{420}{29} \right] \quad \text{y} \quad 2\Gamma \in \left[\frac{16}{31}, \frac{20}{29} \right],$$

que es un polinomio intervalo del tipo (2).

El problema de determinar las condiciones bajo las cuales el polinomio intervalo (2) es asintóticamente estable es llamado problema de **estabilidad robusta** (ER). En la presente tesis desarrollamos la solución al problema de encontrar condiciones suficientes y necesarias para el problema de ER.

Palabras clave: Kharitonov - Estabilidad Robusta - Polinomios Ortogonales

²La masa está medida en kilogramos.

³Aquí N denota las unidades de fuerza en Newtons y m las unidades de distancia en metros.

⁴ s está dado en segundos.

Resultados

- I) En este trabajo se analizaron los siguientes libros y los siguientes artículos:
S.P. Bhattacharyya, H. Chapellat, L.H. Keel: *Robust Control: The parametric Approach* (1995)
M.M. Postnikov: *Stable Polynomials (en ruso)* (1981)
A.E. Choque Rivero: *On matrix Hurwitz type polynomials and their interrelations to Stieltjes positive definite sequences and orthogonal matrix polynomials* (2015)
A.E. Choque Rivero: *On Dyukarev's resolvent matrix for a truncated Stieltjes matrix moment problem under the view of orthogonal matrix polynomials* (2015)
- II) Presentamos dos demostraciones distintas y completas del teorema de Kharitonov
- a) Una prueba moderna (ver 3.3).
 - b) A través del conjunto imagen (ver 3.5).

III) Aplicación de resultado reciente:

Postulamos el teorema de Kharitonov mediante cuatro familias de polinomios ortogonales y sus polinomios de segunda especie definidos en $[0, \infty)$. Presentamos algunos ejemplos de nuestro resultado. Un estudio más detallado de la relación entre los polinomios ortogonales y el teorema de Kharitonov se realizará en un trabajo posterior.

Organización de la tesis

En el capítulo 1 desarrollamos la teoría elemental de los polinomios estables y exponemos también un resultado fundamental para garantizar la estabilidad de una familia de polinomios llamado el teorema de intersección de la frontera [3] y su reinterpretación el principio de exclusión del cero [3].

En el capítulo 2 nos enfocamos en el estudio de la estabilidad a través de la imagen de la parte par e impar ($g(\omega)$ y $h(\omega)$) de un polinomio sobre el plano complejo (CAF), el resultado más importante de este capítulo es el teorema de Hermite-Biehler [11] que establece una condición suficiente y necesaria para que se cumpla la estabilidad de un polinomio arbitrario. Cabe señalar que gran parte del capítulo 1 y el capítulo 2 son traducciones hechas del ruso al español del libro “Stable polynomials” M.M. Postnikov [11] por el profesor A.E. Choque [8].

En el capítulo 3 demostramos completamente y de dos formas distintas el teorema de Kharitonov. Exponemos una interpretación con un enfoque del tipo geométrico y un ejemplo particular.

En el capítulo 4 comenzamos con algunos fundamentos de la teoría elemental de los polinomios ortogonales y el problema de momentos, enunciamos un teorema fundamental que relaciona los polinomios Hurwitz con los polinomios ortogonales y reinterpretamos el teorema de Kharitonov a la luz de tal resultado.

Han sido parte de las referencias de esta tesis, S.P Bhachataryya, H. Chapellat, L.H. Keel ver [3], V.L. Kharitonov ver [10], J. Ackermann ver [1] y referencias en estos trabajos.

Abstract

*“Nihil est in intellectu, quod non prius fuerit in sensu, nisi intellectus ipse”
There is nothing in the intellect that was not first in the senses, except the
intellect itself.*

Gottfried Leibniz

Mostly, physical phenomena are described by mathematical models that enable to study their behavior. Some of there models, are calculated by means of a system of ordinary differential equation (ODE), of the following form:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (1)$$

where A is a real matrix $n \times n$ of the type

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_{n-1} & -p_{n-2} & -p_{n-3} & \cdots & -p_0 \end{pmatrix}.$$

The study of the stability and the asymptotic stability corresponding to system (1) is a matter of vital importance in order to understand the physical phenomenon that's being analyzed. Due to the ODE theory, it's known that systems of type (1) have asymptotically stable solutions, if and only if the characteristic polynomial associated to matrix A has all of its roots in ${}^5\mathbb{C}^-$. Frequently, parameters $p_0, \dots, p_{n-1}$ aren't accurate, then some kind of uncertainty comes up, this is called *parametric uncertainty*. This thesis focuses on the study of the asymptotic stability of the ODE (1) systems, which involves the study of the roots of the characteristic polynomial

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_0 \quad \text{where } p_k \in [\alpha_k, \beta_k] \quad (2)$$

this represents the uncertainty of system (1). The family of polynomials is call *interval polynomial* (IP).

⁵ $\mathbb{C}^-$ denotes the open left half complex plane.

As an example we consider a mass attached to a spring whit $15 \pm 0,5$ kg mass attached to a spring $k = 200 \pm 10 \frac{N}{m}$ that oscilates horizontally over a flat surface whit damping constant is $\gamma = 9 \pm 1 s^{-1}$. Recalling the differential equation for the damped motion, we obtain a family differential equations

$$\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

where $\frac{\gamma}{m} = 2\Gamma$ y $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ and where $m \in [14,5, 15,5]$, $k \in [190, 210]$ and $\gamma \in [8, 10]$, which implies that $\omega_0^2 \in [\frac{380}{31}, \frac{420}{29}]$ and $2\Gamma \in [\frac{16}{31}, \frac{20}{29}]$. We can write this equation as a system linear differential equations by changing the variables,

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

This system has the characteristic polynomial

$$P_c(\lambda) = \lambda^2 + 2\Gamma\lambda + \omega_0^2$$

where

$$\omega_0^2 \in \left[\frac{380}{31}, \frac{420}{29} \right] \quad \text{and} \quad 2\Gamma \in \left[\frac{16}{31}, \frac{20}{29} \right],$$

which turns out to be an interval polynomial type (2). The problem regarding to determine when an interval polynomial (2) is asymptotically stable is called **robust stability** (RS) problem .

In this thesis, we study the (RS) problem.

Índice

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Resultados	XI
Abstract	XIII
1. Introducción	1
1.1. Preliminares	1
1.2. El teorema de intersección de la frontera	13
2. Alternancia y los índices de Cauchy	23
2.1. El teorema de Hermite-Biehler	23
2.2. Índices de Cauchy	33
2.3. Índice y condición de estabilidad	43
3. Polinomios intervalo	49
3.1. El teorema de Kharitonov	49
3.2. Alternancia y conjunto imagen	55
4. El teorema de Kharitonov mediante polinomios ortogonales	61
4.1. Teoría elemental de los polinomios ortogonales	61
4.2. Ceros	64
4.3. El problema de momentos	65
4.4. Polinomios ortogonales de Stieltjes	68
4.5. Un ejemplo ilustrativo: Oscilaciones amortiguadas	74
A. Estabilidad asintótica de una posición de equilibrio de una familia de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	79
B. Integral de Stieltjes	85
B.1. Medidas de Stieltjes y Borel	85

Índice de figuras

1.1. CAF de un polinomio de primer grado.	3
1.2. CAF de un polinomio de segundo grado.	4
1.3. Polinomio de grado tres, caso $a_1, a_2 > 0, a_1 a_2 < a_0 a_3$	5
1.4. Polinomio de grado tres, caso $a_2, a_1 > 0$ y $a_2 a_1 > a_0 a_3$	5
1.5. Polinomio de grado tres, caso $a_2, a_1 > 0$ y $a_0 < 0$	6
1.6. Polinomio de grado tres, caso $a_2 < 0, a_1 \leq 0$ y $a_0 > 0$	6
1.7. La CAF intersecta dos veces el eje de las ordenadas y una vez el eje de las abscisas.	7
1.8. Ejemplo 1.1.	18
2.1. Característica de fase.	26
2.2. Propiedad de la alternancia.	27
2.3. Propiedad de la alternancia para polinomios Hurwitz (Ejemplo 2.1).	31
2.4. La alternancia falla para polinomios no Hurwitz(Ejemplo 2.2).	33
2.5. Ceros de tipo i) y ii).	42
2.6. Polos de tipo I) y II).	42
3.1. Alternancia de $g(\omega)$ y $h_1(\omega)$ (Ejemplo 2.3).	51
3.2. Alternancia de $g(\omega)$ y $h_2(\omega)$ (Ejemplo 2.3).	52
3.3. $P_1^o(\omega) < P_2^o(\omega)$ (Ejemplo 2.3).	52
3.4. $P_1^o(\omega) < P^o(\omega) < P_2^o(\omega)$ (Ejemplo 2.3).	53
3.5. "Tubos" par e impar.	56
3.6. Ejemplo 3.2.	57
3.7. Conjunto imagen del polinomio intervalo (rectángulos de Kharitonov).	58
4.1. Alternancia de los polinomios ortogonales f_6	73
4.2. Alternancia de los polinomios ortogonales f_7	73
4.3. Oscilador armónico.	74
4.4. Rectángulos de Kharitonov.	77
4.5. "Tubos" de Kharitonov.	77
4.6. Oscilador armónico amortiguado.	78

Capítulo 1

Introducción

De esta suerte, toda la matemática representa un sistema de leyes “a priori”, de leyes independientes de la experiencia y que se imponen a toda percepción sensible. Toda percepción sensible que tengamos habrá de estar sujeta a estas leyes y, esas leyes, no han sido inferidas de ninguna percepción sensible. [...] La matemática es, pues, como teoría del espacio y del tiempo, la serie de las condiciones de todo fenómeno posible.

Immanuel Kant Crítica de la razón pura

En este capítulo se analiza el polinomio $P(z)$ de grado n , observamos el comportamiento de sus partes par e impar (ver (3.1.1)); este estudio nos lleva a definir la CAF (ver (1.1.2)). Esto nos permite analizar las propiedades comunes que cumplen los polinomios Hurwitz. Además, se desarrollan dos teoremas importantes íntimamente relacionados con el problema de estabilidad robusta (teorema de intersección en la frontera y principio de exclusión del cero). Los resultados presentados fueron tomados de «Stable Polynomials» M.M Postnikov [11], [8], «Variable Compleja» M.R. Spiegel [12] y «Robust Control: The parametric approach» S.P Bhachataryya, H. Chapellat, L.H. Keel [3].

1.1. Preliminares

Los resultados de esta sección han sido tomados de «Stable Polynomials» M.M Postnikov [11]. Sea dado el polinomio con coeficientes reales

$$P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n \text{ con } a_n > 0.$$

Podemos reacomodarlo de la siguiente manera

$$P(z) = (a_0 + a_2z^2 + a_4z^4 + \cdots) + z(a_1 + a_3z^2 + a_5z^4 + \cdots).$$

De forma explícita, si n es par (i.e $n = 2m$) tenemos

$$P(z) = (a_0 + a_2z^2 + \cdots + a_{n-2}z^{n-2} + a_nz^n) + z(a_1 + a_3z^2 + \cdots + a_{n-3}z^{n-4} + a_{n-1}z^{n-2})$$

y si n es impar (i.e $n = 2m + 1$),

$$P(z) = (a_0 + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-3} z^{n-3} + a_{n-1} z^{n-1}) + z(a_1 + a_3 z^2 + \cdots + a_{n-2} z^{n-3} + a_n z^{n-1}).$$

Para escribir estas fórmulas de forma conveniente, es recomendable introducir los polinomios $G(z)$ y $H(z)$ (que están relacionados con la parte par e impar de $P(z)$, ver (3.1.1)) definidos como sigue:

$$G(z) = \begin{cases} a_0 + a_2 z + \cdots + a_{n-2} z^{m-1} + a_n z^m & \text{si } n = 2m, \\ a_0 + a_2 z + \cdots + a_{n-3} z^{m-2} + a_{n-1} z^{m-1} & \text{si } n = 2m + 1, \end{cases}$$

$$H(z) = \begin{cases} a_1 + a_3 z + \cdots + a_{n-3} z^{m-2} + a_{n-1} z^{m-1} & \text{si } n = 2m, \\ a_1 + a_3 z + \cdots + a_{n-2} z^{m-1} + a_n z^m & \text{si } n = 2m + 1. \end{cases}$$

Es claro que $P(z) = G(z^2) + zH(z^2)$. Colocando $z = i\omega$ obtenemos

$$P(i\omega) = G(-\omega^2) + i\omega H(-\omega^2).$$

Así que $P(i\omega) = g(\omega) + ih(\omega) \in \mathbb{C}$, donde

$$g(\omega) = G(-\omega^2) \text{ y } h(\omega) = \omega H(-\omega^2). \quad (1.1.1)$$

Para los polinomios con coeficientes complejos las expresiones son un tanto más complicadas. Su forma explícita no la estudiaremos en este trabajo.

Lema 1.1 *Si n es par, entonces el grado del polinomio $g(\omega)$ es n , mientras que el polinomio $h(\omega)$ es de grado no mayor a $n - 1$. Si n es impar, al contrario, el grado de $g(\omega)$ no es mayor a $n - 1$, mientras que el grado del polinomio $h(\omega)$ es igual a n .*

Demostración

Es suficiente recordar que por condición $a_n > 0$. □

Cuando ω recorre desde $-\infty$ a $+\infty$, el número complejo $P(i\omega)$ describe en el plano complejo una curva con ecuaciones paramétricas

$$x(\omega) = g(\omega), \quad y(\omega) = h(\omega). \quad (1.1.2)$$

Definición 1.1 *La curva (1.1.2) se llama **característica amplitud fase (CAF)** del polinomio $P(z)$.*

Durante el cambio de ω de $-\infty$ a $+\infty$ el punto $i\omega$ recorre el eje imaginario que es la frontera del semiplano izquierdo del plano complejo. De ahí, la CAF es la imagen del eje imaginario respecto de la transformación $z \mapsto P(z)$ del plano complejo a sí mismo que es realizado por el polinomio P . El siguiente lema es obvio:

Lema 1.2 *El polinomio $P(z)$ tiene una raíz imaginaria pura $z_0 = i\omega_0$ si y sólo si $x(\omega)$ y $y(\omega)$ tienen como raíz común a ω_0 .*

Definición 1.2 *(Estabilidad de Hurwitz) Consideremos el polinomio de grado n*

$$P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n.$$

Se dice que $P(z)$ es un polinomio Hurwitz (polinomio estable) si todas sus raíces se encuentran en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo.

El hecho de que $x(\omega_0) = 0$, $y(\omega_0) = 0$, significa que para $\omega = \omega_0$ la curva (1.1.2) pasa por el origen. Por otro lado, la existencia de una raíz del tipo $i\omega_0$ significa que P no es estable. De esta manera tiene lugar la siguiente afirmación:

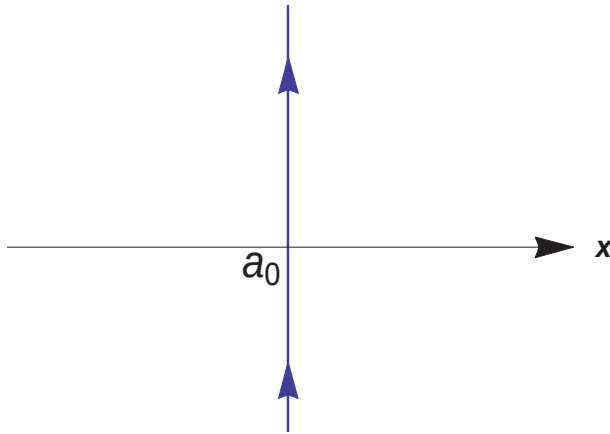
Corolario 1.3 *Si los polinomios $x(\omega)$ y $y(\omega)$ tienen una raíz real común (es decir, la CAF pasa por el origen), entonces P no es un polinomio estable.*

Por esta razón, el estudio de la estabilidad lo realizaremos solamente para polinomios cuyas CAF no pasen por el origen.

Cuando los coeficientes del polinomio P son reales, de la fórmula (1.1.1) se sigue que si sustituimos ω por $-\omega$, entonces $x(\omega)$ no cambia, mientras que $y(\omega)$ cambia de signo. Entonces la curva (1.1.2) es simétrica con respecto al eje de las abscisas (eje real). Además, a los puntos simétricos corresponden valores del parámetro con signo opuesto.

Para $n = 1$, $P(z) = a_1z + a_0$, $a_1 > 0$.

$$P(i\omega) = a_0 + ia_1\omega, \quad g(\omega) = a_0, \quad h(\omega) = a_1\omega.$$



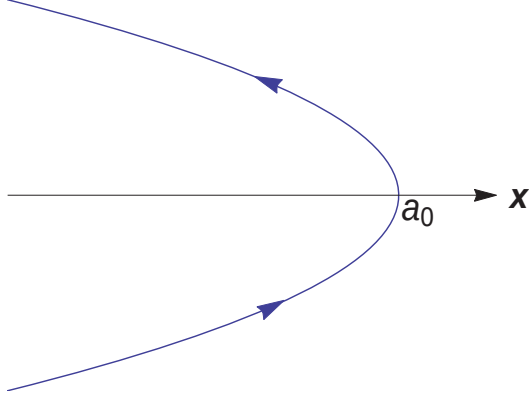
Esto significa que para el polinomio de primer grado $P(z) = a_1z + a_0$, con coeficientes constantes, la CAF es una recta vertical $x = a_0$. Cuando ω crece de $-\infty$ a $+\infty$ el punto $M(x(\omega), y(\omega))$ de la CAF monótonamente se mueve a través de esta recta de abajo hacia arriba.

Figura 1.1: CAF de un polinomio de primer grado.

De manera análoga, para $n = 2$, es decir, para $P(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$ tenemos

$$g(\omega) = -a_2\omega^2 + a_0, \quad h(\omega) = a_1\omega.$$

Consecuentemente, para $a_1 = 0$ la CAF representa un semieje $x \leq a_0$ del eje de las abscisas (que en principio recorre de izquierda a derecha y después de derecha a izquierda)



Para $a_1 \neq 0$, la CAF es una parábola

$$x = -\frac{a_2}{a_1^2}y^2 + a_0$$

construida en este semieje.

En este dibujo la dirección del movimiento de la parábola corresponde al caso $a_1 > 0$; para $a_1 < 0$ el movimiento tendrá el sentido contrario.

Figura 1.2: CAF de un polinomio de segundo grado.

Para $n = 3$, $P(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$. Así,

$$x = -a_2\omega^2 + a_0, \quad y = -a_3\omega^3 + a_1\omega.$$

Para $a_2 \neq 0$, esta curva se llama parábola semicúbica.

$$y^2 = -\frac{a_3^2}{a_2^3}(x - a_0)(x - A), \quad \text{donde } A = a_0 - \frac{a_2a_1}{a_3}.$$

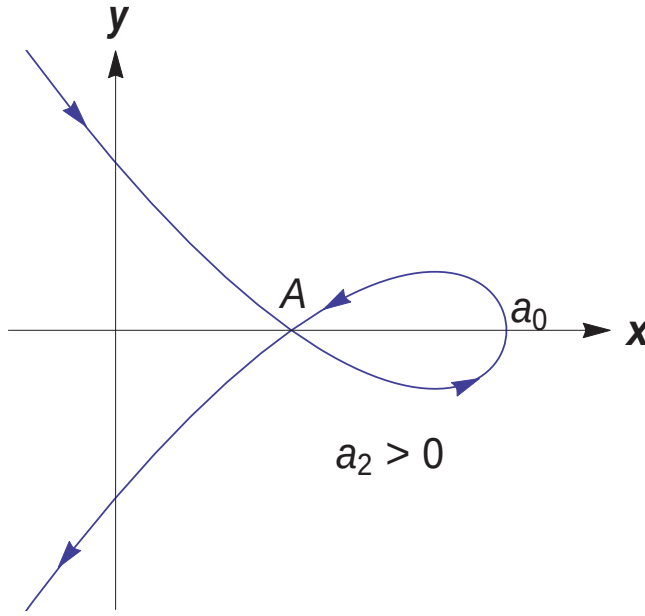
La forma de esta curva depende de los signos de a_2 y a_1 . Sus diferentes casos los estudiaremos a continuación.

Al igual que en la figura 1.1 y 1.2, la posición del eje de las ordenadas $x = 0$ puede ser cualquiera (depende del valor $\frac{a_3^2}{a_2^3}A^2$). En particular, vemos que la CAF pasa por el origen $O(0,0)$ si y sólo si $a_0 = 0$ ó $A = 0$, es decir, $a_3a_0 = a_1a_2$. Desarrollemos ahora los diferentes casos:

Caso $a_1, a_2 > 0$, $a_1a_2 < a_0a_3$ (lo que implica $a_0 > 0$).

La CAF tiene la forma de la figura 1.3, además el punto de origen se ubica a la izquierda del punto $x = A$. De la condición $a_2a_1 < a_0a_3$, se sigue que la CAF intersecta el eje de las abscisas $y = 0$ en $\omega = 0$, $\omega = \pm\sqrt{\frac{a_1}{a_3}}$.

Para $x = 0$, $\omega = \pm\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$. Esto significa que durante el recorrido de ω de $-\infty$ a $+\infty$ (de manera monótona), la CAF cruza el eje de las ordenadas en el punto con ordenada $y = -a_3\left(-\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}\right)^3 + a_1\left(-\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}\right) = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}\left(\frac{a_3a_0}{a_2} - a_1\right) > 0$, después cruza tres veces el eje de las abscisas en $-a_2\left(\frac{a_1}{a_3}\right) + a_0 > 0$, $a_0 > 0$ y $-a_2\left(\frac{a_1}{a_3}\right) + a_0$ y finalmente cruza el eje de las ordenadas en el punto con ordenada $-\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}\left(\frac{a_3a_0}{a_2} - a_1\right) < 0$.



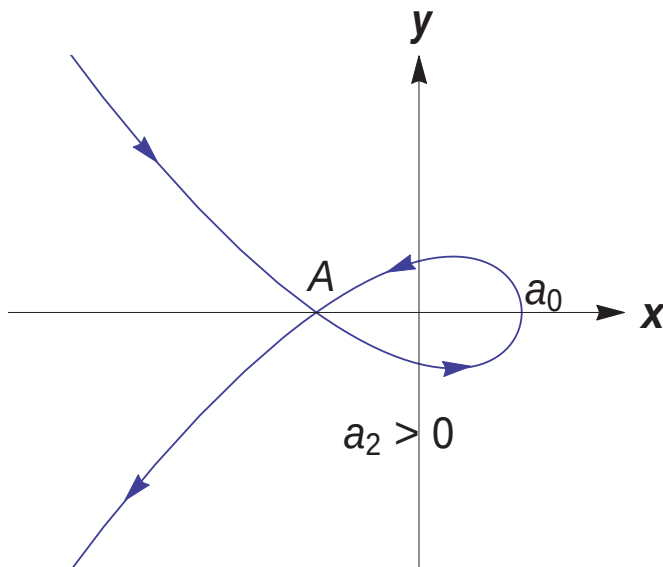
Para $\omega \rightarrow -\infty$ la coordenada y tiende a $+\infty$, mientras que la coordenada x tiende a $-\infty$. Esto significa que la CAF viene del infinito en el cuadrante superior izquierdo. Para $\omega \rightarrow +\infty$ ambas coordenadas x, y tienden a $-\infty$. Consecuentemente la CAF sale al infinito en el cuadrante inferior izquierdo.

Figura 1.3: Polinomio de grado tres, caso $a_1, a_2 > 0$, $a_1 a_2 < a_0 a_3$.

Caso $a_2, a_1 > 0$ y $a_2 a_1 > a_0 a_3$ (es decir, $A < 0$). La curva

$$x = -a_2 \omega^2 + a_0, \quad y = -a_3 \omega^3 + a_1 \omega,$$

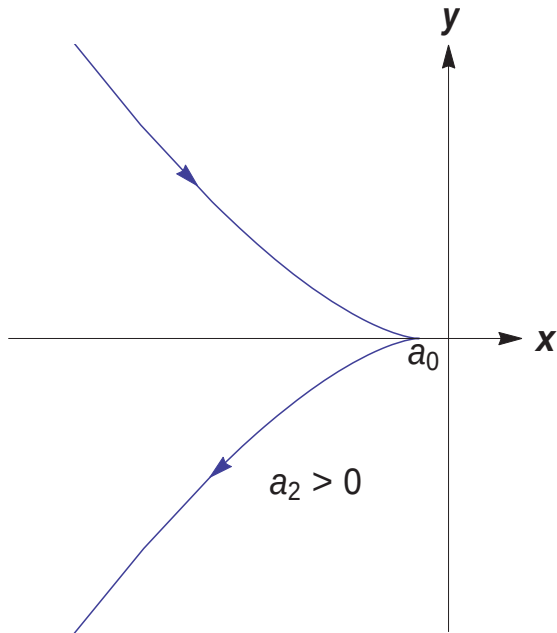
se representa con el mismo dibujo. Pero el origen se encuentra entre los puntos $x = A$ y $x = a_0$.



La CAF en principio intersecta el eje de las abscisas, después el eje de las ordenadas, nuevamente el eje de las abscisas, otra vez el eje de las ordenadas y finalmente intersecta el eje de las abscisas en el punto A.

Figura 1.4: Polinomio de grado tres, caso $a_2, a_1 > 0$ y $a_2 a_1 > a_0 a_3$.

Caso $a_2, a_1 > 0$ y $a_0 < 0$.

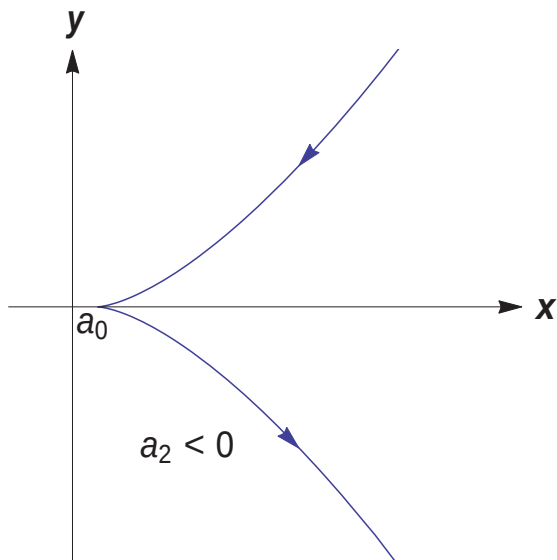


La CAF se representa por la figura 1.5, el eje de las ordenadas se encuentra a la derecha del punto $x = a_0$, y por eso no intersecta la CAF.

Figura 1.5: Polinomio de grado tres, caso $a_2, a_1 > 0$ y $a_0 < 0$.

Caso $a_2 < 0$, $a_1 \leq 0$ y $a_0 > 0$.

Observemos que se comporta como el dibujo anterior pero con el eje de las ordenadas a la izquierda del punto $x = a_0$.



La CAF intersecta solamente una vez el eje de las abscisas en $\omega = 0$ y no intersecta al eje de las ordenadas.

Figura 1.6: Polinomio de grado tres, caso $a_2 < 0$, $a_1 \leq 0$ y $a_0 > 0$.

Caso $a_2 < 0$ ($a_2 > 0$), $a_0 < 0$ y $a_1 \leq 0$. Se representan con las siguientes figuras:

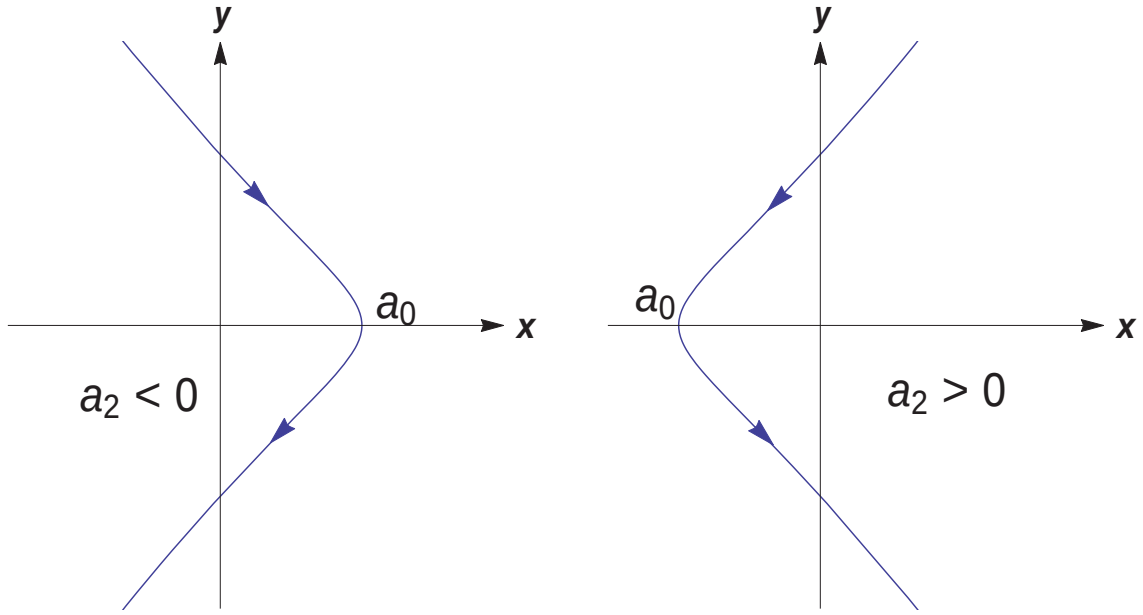


Figura 1.7: La CAF intersecta dos veces el eje de las ordenadas y una vez el eje de las abscisas.

Caso $a_2 = 0$ (degenerado). La coordenada x mantiene su valor constante a_0 .

Esto significa que la CAF es una recta vectical $x = a_0$, ya que $y = -\omega(a_3\omega^2 - a_1)$; el punto M de la CAF que corresponde al valor del parámetro ω , para ω suficientemente grande en valor absoluto y negativo, se ubica en la parte superior de la recta $x = a_0$. Para ω que crece el punto M baja por la recta. Para ω que tiende a $+\infty$ la CAF sale al infinito en la parte inferior de la recta $x = a_0$. Además, dependiendo del signo de a_1 , el punto M , o se mueve monótonamente de arriba hacia abajo, o realiza una oscilación cerca del punto de intersección con el eje de las abscisas.

Ahora, recordemos que el punto $M(x, y)$ del plano representa el número $z = x + iy$. Si $M \neq 0$, es decir, $z \neq 0$, el ángulo φ del vector $\overrightarrow{OM}$ con el eje de las abscisas (en el sentido opuesto a las manecillas del reloj) se denota como **arg**(z) y se llama **argumento** del número complejo z . El argumento está definido con exactitud hasta valores del tipo $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, es decir, junto al número φ , cualquier número del tipo $\varphi + 2\pi n$ también es argumento del número complejo z . Para $z = 0$ el argumento no está definido. En el cálculo del argumento se utilizan las fórmulas

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (1.1.3)$$

de las cuales en particular se sigue que $\tan \varphi = \frac{y}{x}$.

Propiedades del argumento

1. *El argumento de la multiplicación de dos números complejos es igual a la suma de los argumentos de sus factores*

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2. \quad (1.1.4)$$

El sentido de esta fórmula consiste en que escogiendo argumentos arbitrarios $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ de z_1, z_2, z_3 , tal que $z_3 = z_1 z_2$ se tiene la igualdad

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En la demostración de este hecho se recurre a la demostración de las igualdades

$$\cos \varphi_3 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2), \quad \sin \varphi_3 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2),$$

que se sigue de (1.1.3), si se comparan las fórmulas de multiplicación de números complejos con las fórmulas de suma de funciones trigonométricas.

La siguiente propiedad se refiere a una función continua, $t \mapsto z(t)$, definida en $[a, b]$ (el caso $a = -\infty, b = +\infty$ no se excluyen) que toma valores diferentes de cero en $\mathbb{C}$. Colocando $z(t) = x(t) + iy(t)$, esta función representa una curva continua en el plano que no pasa por el origen y que tiene la ecuación paramétrica $x = x(t), y = y(t)$. Ya que $z(t) \neq 0$, entonces está definido el argumento $\varphi(t) = \arg z(t)$. Así surge la pregunta, ¿para todo t se puede escoger el argumento $\varphi(t)$ del número complejo $z(t)$ tal que se obtenga una función continua?. A primera vista es obvio que tal selección se puede realizar siempre, además, para cualquier $t_0 \in [a, b]$, escogemos de manera arbitraria el argumento $\varphi_0 = \varphi(t_0)$ de $z_0 = z(t_0)$, esto junto a la condición de continuidad define de manera unívoca $\varphi(t)$ para todo $t \in [a, b]$. A pesar de que la relación $\tan \varphi = \frac{x}{y}$ no define el argumento φ del número $z = x + iy$ (ya que con φ a este número le corresponde $\varphi + \pi$), sin embargo, en virtud de la continuidad de la función $\varphi(t)$, mediante la relación

$$\tan \varphi(t) = \frac{y(t)}{x(t)}, \quad t \in [a, b] \quad (1.1.5)$$

y la condición inicial $\varphi(t_0) = \varphi_0$, $\varphi(t)$ se determina de manera unívoca. De lo anterior, tiene lugar la siguiente proposición:

- 2) *Sea $z(t) = x(t) + iy(t)$ una función compleja continua definida en el intervalo $[a, b]$, cuyos valores son distintos de cero y sea φ_0 el argumento de $z(t_0)$, donde $a \leq t_0 \leq b$, entonces existe una única función $\varphi(t)$ en $[a, b]$ que satisface la relación (1.1.5) y tal que $\varphi(t_0) = \varphi_0$.*

La demostración requiere del uso de las propiedades de las funciones continuas y nosotros la omitimos. Aplicando esta propiedad a la CAF de $P(i\omega) = g(\omega) + ih(\omega)$, obtenemos el siguiente lema:

Lema 1.4 *Si los polinomios $g(\omega)$ y $h(\omega)$ no tienen raíces reales comunes, entonces existe una única función $\omega \mapsto \varphi(\omega)$, $\omega \in (-\infty, +\infty)$ tal que se cumplen las siguientes propiedades:*

1. φ es continua para todo $\omega \in (-\infty, +\infty)$.
2. Para $\omega = 0$ el número $\varphi(0)$ satisface, $-\pi < \varphi(0) \leq \pi$ y

$$\cos \varphi(0) = \frac{g(0)}{\sqrt{(g(0))^2 + (h(0))^2}}, \quad \sin \varphi(0) = \frac{h(0)}{\sqrt{(g(0))^2 + (h(0))^2}}. \quad (1.1.6)$$

3. Para todo $\omega \in (-\infty, +\infty)$ tiene lugar

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{h(\omega)}{g(\omega)}.$$

Observación 1.1 *Notemos que para un polinomio P con coeficientes reales el número $\varphi(0)$ es igual a cero para $a_0 > 0$ y π para $a_0 < 0$.*

Definición 1.3 *La función $\varphi : \omega \rightarrow \varphi(\omega)$ que satisface las condiciones del lema 1.4 se llama **función de fase** y su gráfica se llama **característica de fase** del polinomio $P(i\omega) = g(\omega) + ih(\omega)$.*

La función de fase determina cómo gira el radio vector del punto de la CAF cuando ω recorre de $-\infty$ a $+\infty$. Si n es impar, de acuerdo al lema 1.1

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{\text{polinomio de grado } n}{\text{polinomio de grado } \leq n-1}.$$

De ahí,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \tan \varphi(\omega) = \pm \infty.$$

Si n es par

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{\text{polinomio de grado } \leq n-1}{\text{polinomio de grado } n},$$

es decir,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \tan \varphi(\omega) = 0.$$

De lo anterior se tiene el siguiente lema:

Lema 1.5 *Para la función fase existen los siguientes dos límites:*

$$\varphi(-\infty) = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \varphi(\omega), \quad \varphi(+\infty) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi(\omega).$$

Además, si n es impar entonces

$$\varphi(-\infty) = \frac{\pi}{2} + p\pi, \quad \varphi(+\infty) = \frac{\pi}{2} + q\pi.$$

Si n es par

$$\varphi(-\infty) = p\pi, \quad \varphi(+\infty) = q\pi,$$

donde $p, q \in \mathbb{Z}$.

De este lema se sigue que la característica de fase tiene 2 asíntotas horizontales. La distancia entre ellas es $(q - p)\pi$. De esta manera aunque ambas alas de la característica de fase (para $\omega \rightarrow -\infty$ y $\omega \rightarrow +\infty$) no se acercan a los ejes de coordenadas (ambas coordenadas crecen en valor absoluto), sin embargo, la dirección del radio vector $\overrightarrow{OM}$ tiende a la dirección del eje de las ordenadas para n impar y a la dirección del eje de las abscisas para n par.

De lo anterior, tenemos que para n impar la coordenada y crece en valor absoluto más rápidamente que la coordenada x .

Del lema 1.5 se sigue que cuando ω recorre de $-\infty$ a $+\infty$, el radio vector $\overrightarrow{OM}$ realiza un número entero de medias vueltas igual a $q - p$. Este número es una característica muy importante del polinomio P . Lo denotamos como ΔP , es decir,

$$\Delta P = \frac{1}{\pi}(\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)).$$

Para el cálculo de la función de fase es conveniente el uso del siguiente resultado:

Lema 1.6 *Sea $P = P_1 P_2$ y sean φ, φ_1 y φ_2 las funciones de fase de los polinomios P, P_1 y P_2 respectivamente. Entonces $\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + 2n\pi$ para todo ω tal que $-\infty < \omega < +\infty$, donde $n = 0, n \pm 1$ (no depende de ω).*

De esta manera, con exactitud de hasta un sumando del tipo 2π , la función fase de la multiplicación de dos polinomios es igual a la suma de las funciones de fase de sus factores.

Demostración

De acuerdo a la propiedad (1) del argumento (pag. 8)

$$\arg P(i\omega) = \arg P_1(i\omega) + \arg P_2(i\omega),$$

es decir,

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + 2n\pi,$$

donde $n \in \mathbb{Z}$. En particular, $\varphi(0) = \varphi_1(0) + \varphi_2(0) + 2n\pi$, sin embargo, por la condición del lema 1.4 tenemos

$$-\pi < \varphi(0) \leq \pi, \quad -\pi < \varphi_1(0) \leq \pi, \quad -\pi < \varphi_2(0) \leq \pi$$

y por eso

$$-3\pi < \varphi(0) - \varphi_1(0) - \varphi_2(0) < 3\pi,$$

es decir,

$$-3\pi < 2n\pi < 3\pi.$$

Consecuentemente $n = 0$, $n = \pm 1$. □

Corolario 1.7 *Para cualesquiera polinomios P_1, P_2 tiene lugar la igualdad*

$$\Delta P_1 P_2 = \Delta P_1 + \Delta P_2.$$

Antes hemos estudiado el polinomio $P(z) = a_1 z + a_0$, $a_1 > 0$ para a_0 real. Si a_0 es complejo, $a_0 = \alpha + i\beta$, entonces $x(\omega) = \alpha$ y $y(\omega) = a_1 \omega + \beta$, y por eso la CAF del polinomio P representa la recta $x = \alpha$, para ω que recorre de $-\infty$ a $+\infty$, el punto $M(x(\omega), y(\omega))$ se mueve uniformemente de abajo hacia arriba. De ahí, para $\alpha < 0$ el ángulo φ que forma el vector $\overrightarrow{OM}$ con el eje de las abscisas decrece de $-\frac{3}{2}\pi$ a $\frac{\pi}{2}$, mientras que para $\alpha > 0$ crece de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. De esta manera, la función de fase del polinomio $P(z) = a_1 z + a_0$, para $\alpha < 0$ decrece monótonamente, y para $\alpha > 0$ crece monótonamente. Además en el primer caso $\Delta P = -1$, en el segundo $\Delta P = 1$.

Proposición 1.8 *La función de fase de un polinomio estable crece monótonamente.*

Demostración

Ya vimos que esta afirmación es cierta para polinomios lineales. Ya que la suma de funciones monótonas es monótona, y tomando en cuenta el lema 1.6, se tiene que la proposición es válida para el polinomio P que es multiplicación de polinomios estables. Notemos que un polinomio es estable si y sólo si es multiplicación de polinomios estables de primer orden. □

Teorema 1.9 *Si un polinomio P no tiene raíces imaginarias puras y posee k raíces con parte real negativa y l raíces con parte real positiva (cada raíz se toma en cuenta tantas veces sea su multiplicidad, es decir, $k + l = n$) entonces $\Delta P = k - l$ y consecuentemente*

$$\Delta P = 2k - n \text{ y } \Delta P = n - 2l.$$

Demostración

Sea $\Delta'P = k - l$. De acuerdo a lo anterior, si P es lineal tenemos

$$\Delta'P = \Delta P.$$

Es claro que

$$\Delta'P_1P_2 = \Delta'P_1 + \Delta'P_2,$$

para cualesquiera P_1, P_2 sin raíces imaginarias puras. De ahí,

$$\Delta'P = \Delta P$$

para todo P que no posee raíces imaginarias puras y que es producto de polinomios de primer grado. Para concluir la demostración queda recordar que la propiedad anterior tiene lugar para cualquier polinomio P . $\square$

Corolario 1.10 *El polinomio P de grado n que no tiene raíces imaginarias puras es estable si y sólo si $\Delta P = n$.*

Observación 1.2 *Se cumple la siguiente desigualdad*

$$-n \leq \Delta P \leq n.$$

Además, ΔP y n son par o impar al mismo tiempo.

Observación 1.3 *Si $\Delta P = -n$, el polinomio P se llama completamente inestable. Estos polinomios tienen todas sus raíces con parte real positiva. Para polinomios completamente inestables la función de fase decrece monótonamente.*

Por ahora dejaremos este estudio y lo retomaremos más adelante en el capítulo 2. Nuestra atención se centrará en el estudio de una familia de polinomios cuyos coeficientes dependen de forma continua de un parámetro, es decir, consideremos el polinomio (la familia de polinomios)

$$P(z, \lambda) = p_0(\lambda) + p_1(\lambda)z + \cdots + p_n(\lambda)z^n,$$

donde $\lambda \in [a, b]$ y $p_i(\lambda) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua para $i = 0, \dots, n$. Nos preguntamos por las condiciones suficientes y necesarias con las que podemos garantizar la estabilidad de todos y cada uno de los polinomios en la familia.

1.2. El teorema de intersección de la frontera

Los resultados siguientes fueron tomados de «Variable Compleja» M.R. Spiegel [12]. Comenzaremos con el conocido principio del argumento de la teoría de variable compleja.

Teorema 1.11 *(del argumento)*[12] Sea $f(z)$ analítica dentro y sobre una curva simple cerrada $\mathcal{C}$, excepto para un polo $z = \alpha$ de orden (multiplicidad) p dentro de $\mathcal{C}$. Supongamos además, que dentro de $\mathcal{C}$, $f(z)$ tiene únicamente un cero $z = \beta$ de orden (multiplicidad) n y ningún cero sobre $\mathcal{C}$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n - p. \quad (1.2.1)$$

Demostración

Sean $\mathcal{C}_1$ y Γ_1 círculos disjuntos dentro de $\mathcal{C}$ rodeando $z = \alpha$ y $z = \beta$ respectivamente. Entonces por la propiedad de la integral de contorno tenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (1.2.2)$$

Como $f(z)$ tiene un polo de orden p en $z = \alpha$, podemos escribir

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z - \alpha)^p}, \quad (1.2.3)$$

donde $F(z)$ es analítica y diferente de cero dentro y sobre $\mathcal{C}_1$. Tomando logaritmos en (1.2.3) y diferenciando, hallamos

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{p}{(z - \alpha)}, \quad (1.2.4)$$

así que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{F'(z)}{F(z)} dz - \frac{p}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{dz}{(z - \alpha)} = 0 - p. \quad (1.2.5)$$

Ahora, como $f(z)$ tiene un cero de orden n en $z = \beta$, tenemos

$$f(z) = G(z)(z - \beta)^n, \quad (1.2.6)$$

donde $G(z)$ es analítica y diferente de cero dentro y sobre Γ_1 . Luego, por diferenciación logarítmica

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{G'(z)}{G(z)} + \frac{n}{(z - \beta)}, \quad (1.2.7)$$

así que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{G'(z)}{G(z)} dz + \frac{n}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{dz}{(z - \beta)} = 0 + n. \quad (1.2.8)$$

Por lo tanto, de (1.2.5) y (1.2.8) finalmente obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n - p. \quad (1.2.9)$$

□

De lo anterior se desprende el siguiente teorema:

Teorema 1.12 (de Rouché)[12] Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones analíticas dentro y sobre una curva simple cerrada $\mathcal{C}$, si $|g(z)| < |f(z)|$ sobre $\mathcal{C}$, entonces $f(z)$ y $f(z) + g(z)$ tienen el mismo número de ceros en el interior de $\mathcal{C}$.

Demostración

Sea $F(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$ a fin que $g(z) = f(z)F(z)$ o brevemente $g = fF$. Luego, si N_1 y N_2 son el número de ceros en el interior de $\mathcal{C}$ de $f + g$ y f respectivamente, usando el hecho que estas funciones no tienen polos en el interior de $\mathcal{C}$, tenemos, según el teorema anterior,

$$N_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f' + g'}{f + g} dz, \quad N_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f'}{f} dz.$$

Entonces

$$\begin{aligned} N_1 - N_2 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f' + f'F + fF'}{f + fF} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f'}{f} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f'(1 + F) + fF'}{f(1 + F)} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f'}{f} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{f'}{f} + \frac{F'}{1 + F} \right) dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f'}{f} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{F'}{1 + F} dz. \end{aligned}$$

Expresando $\frac{1}{1+F}$ en serie de potencias

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} F'(1 - F + F^2 - F^3 + \dots) dz$$

y por hipótesis $|F(z)| < 1$ sobre $\mathcal{C}$ de modo que la serie es uniformemente convergente sobre dicha curva. Integrando término a término, (ya que $F'F^i$ es analítica para toda i) obtenemos el valor

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{i=0}^{\infty} \oint_{\mathcal{C}} F'F^i dz = 0.$$

Por lo tanto $N_1 = N_2$, lo que completa la prueba. $\square$

Notemos que la condición $|g(z)| < |f(z)|$ en $\mathcal{C}$ implica que ni $f(z)$ ni $f(z) + g(z)$ pueden ser cero sobre $\mathcal{C}$.

Por último, los resultados de lo que resta del capítulo han sido tomados de «Robust Control: The parametric approach» S.P Bhattacharyya, H. Chapellat, L.H. Keel [3]. El siguiente teorema es una aplicación del teorema de Rouché.

Teorema 1.13 [3] Sean

$$P(z) = p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n = \prod_{j=1}^m (z - z_j)^{t_j}, \quad p_n \neq 0,$$

$$Q(z) = (p_0 + \epsilon_0) + (p_1 + \epsilon_1)z + \cdots + (p_n + \epsilon_n)z^n$$

y consideremos una circunferencia $\mathcal{C}_k$ de radio r_k , centrada en z_k , la cual es una raíz de $P(z)$ de multiplicidad t_k . Fijemos r_k de tal forma que

$$0 < r_k < \min\{|z_k - z_j|\}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, m.$$

Entonces existe un número positivo $\epsilon > 0$ tal que $Q(z)$ tiene t_k ceros dentro de $\mathcal{C}_k$ siempre que $|\epsilon_i| \leq \epsilon$ para $i = 0, 1, \dots, n$.

Demostración

$P(z)$ es una función continua en $\mathcal{C}_k$, que es un conjunto compacto, por lo que la función $|P(z)|$ alcanza un valor mínimo sobre $\mathcal{C}_k$. Notemos que $|P(z)| > 0 \forall z \in \mathcal{C}_k$ (ya que por definición de $\mathcal{C}_k$, $P(z)$ es distinto de cero sobre dicha circunferencia), por lo tanto

$$0 < \delta_k = \min_{z \in \mathcal{C}_k} \{|P(z)|\}.$$

Por otro lado, consideremos el polinomio $R(z)$ definido por

$$R(z) = \epsilon_0 + \epsilon_1 z + \cdots + \epsilon_n z^n,$$

entonces $Q(z) = P(z) + R(z)$, queremos probar que $|R(z)| < |P(z)|$ para todo z en $\mathcal{C}_k$. Si z pertenece al círculo $\mathcal{C}_k$ entonces

$$\begin{aligned} |R(z)| &= |\epsilon_0 + \epsilon_1 z + \cdots + \epsilon_n z^n| \\ &\leq |\epsilon_0| + |\epsilon_1| |z| + \cdots + |\epsilon_n| |z|^n \end{aligned}$$

$$\leq |\epsilon_0| + |\epsilon_1|(|z - z_k| + |z_k|) + \cdots + |\epsilon_n|(|z - z_k| + |z_k|)^n.$$

Si tomamos $|\epsilon_i| \leq \epsilon$ para toda i , se cumple que

$$|R(z)| \leq \epsilon \sum_{j=0}^n (r_k + |z_k|)^j,$$

llamemos

$$M_k = \sum_{j=0}^n (r_k + |z_k|)^j$$

y notemos que M_k es fijo. Escogemos ϵ de tal forma que $\epsilon < \frac{\delta_k}{M_k}$ entonces

$$|R(z)| \leq \epsilon M_k < \frac{\delta_k}{M_k} M_k = \delta_k,$$

así

$$|R(z)| < \delta_k \leq |P(z)|$$

sobre $\mathcal{C}_k$. Entonces por el teorema 1.12, $P(z)$ y $P(z) + R(z)$ tienen el mismo número de raíces dentro de $\mathcal{C}_k$. Ya que $P(z)$ tiene t_k raíces dentro de $\mathcal{C}_k$ (contando multiplicidades) concluimos la demostración. $\square$

Corolario 1.14 [3] *Fijando m circunferencias $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$, que son ajenas por parejas y estén centradas en $z_1, \dots, z_m$ respectivamente y aplicando sucesivamente el teorema anterior, podemos concluir que existe un $\epsilon > 0$ tal que, para cualquier conjunto de números $\{\epsilon_0, \dots, \epsilon_n\}$ que satisfacen $|\epsilon_i| < \epsilon$ para $i = 0, \dots, n$, $Q(z)$ tiene precisamente t_j ceros dentro de cada círculo $\mathcal{C}_j$.*

Observación 1.4 *Por el corolario 1.14 y el teorema 1.13, el conjunto de polinomios Hurwitz de grado n (denotemoslo por $\mathcal{H}_n$), es un conjunto abierto en el espacio de los coeficientes, el cual es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Es decir, si $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n \in \mathcal{H}_n$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que, si $|\epsilon_i| < \epsilon \ \forall i = 0, 1, \dots, n$, entonces se cumple que $Q(z) = (a_0 + \epsilon_0) + (a_1 + \epsilon_1)z + \cdots + (a_n + \epsilon_n)z^n \in \mathcal{H}_n$.*

El teorema y corolario anteriores nos llevan al teorema de intersección de la frontera. Consideremos el plano complejo $\mathbb{C}$ y sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto dado. Sabemos que $\mathcal{S}$ y su frontera $\partial\mathcal{S}$, junto con el interior $\mathcal{U}^\circ$ del conjunto cerrado $\mathcal{U} = \mathbb{C} - \mathcal{S}$, forman una partición del plano complejo, esto es:

$$\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S} \cup \mathcal{U}^\circ = \mathbb{C}, \quad \mathcal{S} \cap \mathcal{U}^\circ = \mathcal{S} \cap \partial\mathcal{S} = \partial\mathcal{S} \cap \mathcal{U}^\circ = \emptyset.$$

Supongamos además, que cada uno de estos tres conjuntos es no vacío.

Definición 1.4 *Bajo estas condiciones decimos que $\mathcal{S}$ es una región de estabilidad si para todo polinomio $P(z)$, el hecho de que P posea todas sus raíces en $\mathcal{S}$ implica que P es estable.*

Estas suposiciones son muy generales. En la teoría de la estabilidad, podemos elegir para $\mathcal{S}$ el semiplano abierto $\mathbb{C}^-$ (para sistemas continuos) o el disco unitario abierto $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ (para sistemas discretos) [3, Capítulo 1 pag. 33] o cualquier subconjunto adecuado de éstos.

Consideremos una familia de polinomios $P(z, \lambda)$ que satisfaga la siguiente condición:

Hipótesis $P(z, \lambda)$ es una familia de polinomios

1. de grado constante n respecto a la variable z ,
2. continuos con respecto de la variable λ para $\lambda \in [a, b]$.

Un elemento típico de la familia $P(z, \lambda)$ puede ser escrito como

$$P(z, \lambda) = p_0(\lambda) + p_1(\lambda)z + \cdots + p_n(\lambda)z^n,$$

donde $p_0(\lambda), p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)$ son funciones continuas de λ en $[a, b]$ y donde $p_n(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in [a, b]$. Por la observación 1.4, el conjunto de polinomios de grado n que tiene todas sus raíces en un conjunto abierto $\mathcal{O}$ también es abierto. En el caso anterior, si para algún $t \in [a, b]$, $P(z, t)$ tiene todas sus raíces en $\mathcal{S}$, entonces siempre es posible encontrar un número real positivo α tal que

$$\forall t' \in (t - \alpha, t + \alpha) \cap [a, b]; \quad P(z, t') \text{ tiene todas sus raíces en } \mathcal{S} \quad (1.2.10)$$

Esto nos lleva al siguiente resultado fundamental.

Teorema 1.15 (de intersección de la frontera)[3] Si $P(z, \lambda)$ satisface la hipótesis anterior, $P(z, a)$ tiene todas sus raíces en $\mathcal{S}$ y $P(z, b)$ tiene al menos una raíz en $\mathcal{U}$, entonces existe un número $\rho \in (a, b]$ tal que

1. $P(z, \rho)$ tiene todas sus raíces en $\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$ y
2. $P(z, \rho)$ tiene al menos una raíz en $\partial\mathcal{S}$.

Demostración

Introduzcamos el conjunto E de números reales $t \in (a, b]$ que satisfacen la siguiente propiedad:

$$\forall t' \in (a, t); \quad P(z, t') \text{ tiene todas sus raíces en } \mathcal{S}.$$

Por hipótesis, sabemos que $P(z, a)$ tiene todas sus raíces en $\mathcal{S}$ y por lo tanto, como se mencionó anteriormente, es posible encontrar un $\alpha > 0$ tal que

$$\forall t' \in [a, a + \alpha) \cap [a, b]; \quad P(z, t') \text{ también tiene todas sus raíces en } \mathcal{S}.$$

Notemos que $a + \alpha < b$, (ya que si no fuera así, $[a, a + \alpha) \cap [a, b] = [a, b]$ y por hipótesis $P(z, b)$ tiene al menos una raíz en $\mathcal{U}$). Por lo tanto E es no vacío ($\frac{\alpha}{2}$ pertenece a E). Además el conjunto E tiene la siguiente propiedad,

$$\text{si } t_2 \in E \text{ y } a < t_1 < t_2, \text{ entonces } t_1 \in E. \quad (1.2.11)$$

Dado esto, se tiene que E es un intervalo, además $\rho = \sup E$ existe ya que E está acotado superiormente por b . Ahora, procediendo por contradicción, supongamos

a) $P(z, \rho)$ tiene todas sus raíces en $\mathcal{S}$.

Entonces necesariamente $\rho < b$ y sería posible encontrar un $\gamma > 0$ tal que

$$\forall t' \in (\rho - \gamma, \rho + \gamma) \cap [a, b]; \quad P(z, t') \text{ tiene todas sus raíces en } \mathcal{S}.$$

Como consecuencia $\rho + \gamma < b$ y esto implica que $\rho + \frac{\gamma}{2} \in E$ lo cual contradice la elección de ρ .

b) $P(z, \rho)$ tiene al menos una raíz en $\mathcal{U}^\circ$.

Entonces, por el teorema 1.13 podemos encontrar un $\alpha > 0$ tal que

$$\forall t' \in (\rho - \alpha, \rho + \alpha) \cap [a, b]; \quad P(z, t') \text{ tiene al menos una raíz en } \mathcal{U}^\circ.$$

Por otro lado, dado que ρ es el supremo del conjunto E , tenemos que $\forall \epsilon > 0$ $\rho - \epsilon$ no lo es; por lo tanto, para ϵ suficientemente pequeño (i.e $a < \rho - \epsilon$) existe t tal que $\rho - \epsilon < t < \rho$, lo que implica que $P(z, t)$ tiene todas sus raíces en $\mathcal{S}$ (i.e $t \in E$). Así que, por la ecuación (1.2.11), $\rho - \epsilon \in E$. Tomando $0 < \epsilon < \alpha$ llegamos a una contradicción.

De a) y b) concluimos que $P(z, \rho)$ tiene todas sus raíces en $\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$ y al menos una raíz en $\partial\mathcal{S}$. $\square$

Ejemplo 1.1 Sea $\mathcal{S} = \mathbb{C}^-$, $\partial\mathcal{S} = iy$, $y \in \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \mathbb{C} - \mathcal{S}$ y consideremos la familia de polinomios

$$P(z, \lambda) = p_0(\lambda) + p_1(\lambda)z + p_2(\lambda)z^2,$$

donde

$$p_0(\lambda) = 2|\lambda|, \quad p_1(\lambda) = -3 \cos(\pi\lambda), \quad p_2(\lambda) = \sin^2(\pi\lambda) + 1, \quad \text{con } \lambda \in [-1, 2]$$

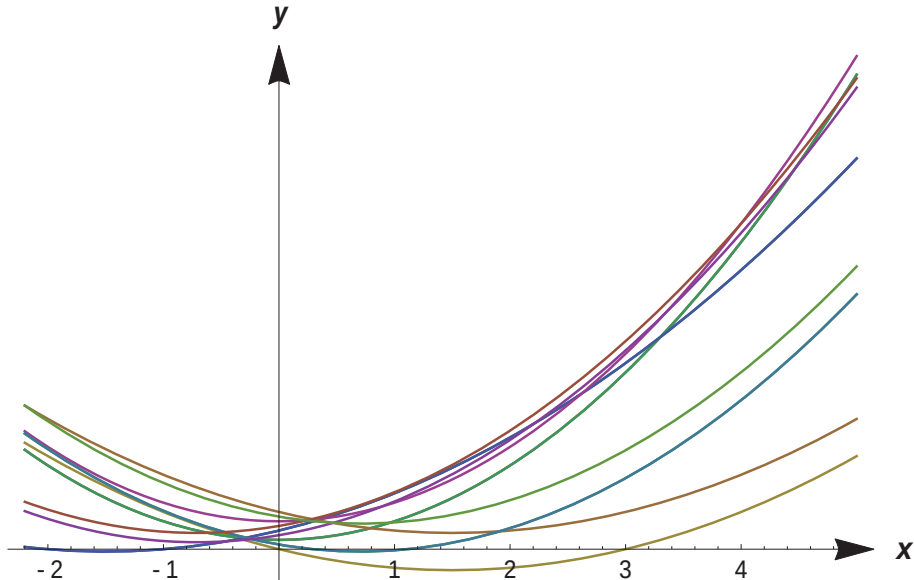


Figura 1.8: Ejemplo 1.1.

Algunos polinomios de la familia se ilustran en la figura 1.8. El polinomio $P(z, -1) = 2 + 3z + z^2$, el cual tiene las raíces $z_1 = -1$ y $z_2 = -2$, es un polinomio estable. Por otro lado, el polinomio $P(z, 2) = 4 - 3z + z^2$, que tiene las raíces $z_1 = \frac{1}{2}(3 - i\sqrt{7})$ y $z_2 = \frac{1}{2}(3 + i\sqrt{7})$, es inestable, así por el teorema anterior, podemos encontrar un $\rho \in [-1, 2]$, tal que $P(z, \rho)$ tiene sus raíces en $\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$. Tomando $\rho = 1/2$ observamos que $P(z, \rho) = 1 + 2z^2$, por lo que sus raíces son $z_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}$ y $z_2 = \frac{-i}{\sqrt{2}}$.

El siguiente resultado da un ejemplo de una situación en la que la hipótesis sobre el grado puede ser relajada.

Teorema 1.16 [3] Sea $\mathcal{S}$ una región de estabilidad y sea $\{P_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios estables sobre $\mathcal{S}$ de grado acotado, supongamos que $P_n(z) \rightarrow Q(z)$. Entonces las raíces de $Q(z)$ se encuentran en $\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$.

En otras palabras, el teorema nos dice que el límite de una sucesión de polinomios estables de grado acotado, sólo puede tener raíces inestables en la frontera de la región de estabilidad.

Demostración

Por hipótesis, existe un entero N tal que el grado de $P_n \leq N$ para todo $n \geq 0$. Por lo tanto, podemos escribir,

$$P_n(z) = p_{0,n} + p_{1,n}z + \cdots + p_{N,n}z^N \quad \forall n.$$

Ya que la sucesión $\{P_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $Q(z)$, entonces $Q(z)$ tiene grado menor o igual a N , así que también podemos escribir

$$Q(z) = q_0 + q_1z + \cdots + q_Nz^N.$$

Además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{k,n} = q_k, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N. \quad (1.2.12)$$

Ahora, supongamos que $Q(z)$ tiene una raíz z^* , la cual se encuentra en $\mathcal{U}^\circ$. Mostraremos que esto conduce a una contradicción. Dado que $\mathcal{U}^\circ$ es abierto, podemos encontrar un número positivo r , tal que el disco $\mathcal{C}$ centrado en z^* y de radio r está contenido en $\mathcal{U}^\circ$. Por el teorema 1.13, existe un número positivo ϵ tal que para $|\epsilon_i| \leq \epsilon$ $i = 0, 1, \dots, N$, el polinomio

$$(q_0 + \epsilon_0) + (q_1 + \epsilon_1)z + \cdots + (q_N + \epsilon_N)z^N, \quad (1.2.13)$$

tiene al menos una raíz dentro del círculo $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}^\circ$. Ahora, de acuerdo a (1.2.12), es posible encontrar un entero n_0 tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |p_{k,n} - q_k| < \epsilon \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N. \quad (1.2.14)$$

Por lo tanto, (1.2.14) implica que para $n \geq n_0$

$$(q_0 + p_{0,n} - q_0) + (q_1 + p_{1,n} - q_1)z + \cdots + (q_N + p_{N,n} - q_N)z^N = P_n(z)$$

tiene al menos una raíz en $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}^\circ$, lo cual contradice el hecho de que $P_n(z)$ es estable para todo n . $\square$

El teorema de intersección de la frontera también puede ser aplicado a una familia de polinomios para detectar la presencia de polinomios inestables en la familia. Suponga que $P(z, \mathbf{v})$ denota un polinomio cuyos coeficientes dependen continuamente sobre el vector de parámetros $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$, el cual varía en un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y por lo tanto, genera una familia de polinomios

$$\Delta(z) := \{P(z, \mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \Omega\}. \quad (1.2.15)$$

Un polinomio típico de la familia $\Delta(z)$ puede ser escrito como

$$P(z, \mathbf{w}) = w_0 + w_1 z + \cdots + w_n z^n, \quad \text{donde } (w_0, w_1, \dots, w_n) = \mathbf{w} \in \Omega.$$

Nos es dada una región de estabilidad $\mathcal{S}$ y deseamos determinar si la familia $\Delta(z)$ contiene polinomios inestables. El siguiente teorema es una versión alternativa del teorema de intersección de la frontera.

Teorema 1.17 [3] *(Principio de exclusión del cero) Asumamos que la familia (1.2.15) es de grado constante, que contiene al menos un polinomio estable y que además Ω es arcoconexo (ver apéndice B.3). Entonces la familia entera es estable si y solo si*

$$0 \notin \Delta(z^*), \quad \forall z^* \in \partial\mathcal{S}.$$

Demostración

$\Rightarrow$] Supongamos que la familia $\Delta(z)$ es estable (i.e todas las raíces de los polinomios en la familia se encuentran en $\mathcal{S}$). Procedemos por contradicción, supongamos que $0 \in \Delta(z^*)$ para algún $z^* \in \partial\mathcal{S}$, es decir, $P(z^*, \mathbf{v}) = 0$ para algún $\mathbf{v} \in \Omega \Leftrightarrow z^*$ es raíz del polinomio $P(z, \mathbf{v}) \in \Delta(z)$, lo cual es una contradicción, ya que supusimos que las raíces de $P(z, \mathbf{v})$ pertenecen a $\mathcal{S}$ para todo $\mathbf{v} \in \Omega$.

$\Leftarrow$] Ahora supongamos que $0 \notin \Delta(z^*)$ para ningún $z^* \in \partial\mathcal{S}$, procedemos por contradicción, sea $\mathbf{v}_b \in \Omega$ tal que $P(z, \mathbf{v}_b)$ es inestable (i.e tiene al menos una raíz en $\mathcal{U} = \mathbb{C} - \mathcal{S}$). Por hipótesis, existe un vector $\mathbf{v}_a \in \Omega$ tal que $P(z, \mathbf{v}_a)$ es estable. Sea $\mathcal{C}_{[a,b]}$ un camino que conecta a $\mathbf{v}_a$ con $\mathbf{v}_b$ (i.e $\exists f : [a, b] \leftrightarrow \mathcal{C}_{[a,b]}$, la cual es un homeomorfismo). En otras palabras $f(x) = \mathbf{v} \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ es una función continua con inversa continua y biyectiva. Definimos la familia de polinomios

$$P_{\mathcal{C}_{[a,b]}}(z, x) = v_0(x) + v_1(x)z + \cdots + v_n(x)z^n, \quad (1.2.16)$$

donde $(v_0, v_1, \dots, v_n) = \mathbf{v} \in \mathcal{C}_{[a,b]}$. Es claro que la familia (1.2.16) cumple las siguientes propiedades:

1. Es de grado constante con respecto a la variable z (ya que $P_{\mathcal{C}_{[a,b]}}(z, x) \subset \Delta(z)$),
2. es continua con respecto a x en el intervalo $[a, b]$ (puesto que $f(x)$ es continua).

Por lo tanto, podemos aplicar el teorema de intersección de la frontera a dicha familia. Es decir, $\exists \rho \in (a, b]$ tal que

- I) $P_{\mathcal{C}_{[a,b]}}(z, \rho)$ tiene todas sus raíces en $\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$ y
- II) $P_{\mathcal{C}_{[a,b]}}(z, \rho)$ tiene al menos una raíz en $\partial\mathcal{S}$.

Ahora, dado que Ω es arcoconexo, tenemos que $\mathcal{C}_{[a,b]} \subset \Omega$ para todo camino que une a $\mathbf{v}_a$ con $\mathbf{v}_b$ y por lo tanto $f(\rho) = \mathbf{v}_\rho \in \Omega \Rightarrow P(z, \mathbf{v}_\rho) \in \Delta(z)$ tiene una raíz en $\partial\mathcal{S}$. Designemos a dicha raíz por z^* , en otras palabras $P(z^*, \mathbf{v}_\rho) = 0 \Rightarrow 0 \in \Delta(z^*)$ lo cual es una contradicción, con lo que queda demostrado el teorema. $\square$

Capítulo 2

Alternancia y los índices de Cauchy

En este capítulo caracterizamos el conjunto de polinomios Hurwitz, esto nos permite conocer las propiedades de un polinomio con el objetivo de garantizar su estabilidad. Dicha caracterización la provee el teorema de Hermite-Biehler. También, por medio de los índices de Cauchy, obtenemos un método cuantitativo que nos permite corroborar la estabilidad de un polinomio. Todos los resultados presentados en este capítulo se tomaron de «Stable Polynomials» M.M Postnikov [11], más precisamente, de su traducción [8].

2.1. El teorema de Hermite-Biehler

En esta sección presentamos el teorema de Hermite-Biehler, también denominado teorema de la alternancia. Consideremos un polinomio de grado n

$$P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n, \quad a_n > 0,$$

tenemos la siguiente propiedad:

Proposición 2.1 *Si $P(z)$ es un polinomio con coeficientes reales Hurwitz, entonces*

$$a_j > 0 \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Demostración

Sean $z_j = -\alpha_j + \beta_j$ con $j = 1, \dots, p$ raíces complejas de $P(z)$ y $z_k = -\gamma_k$ con $k = 1, \dots, q$ sus raíces reales ($\alpha_j > 0, \gamma_k > 0$ ya que $P(z)$ es Hurwitz).

Además, sean σ_j ($j = 1, \dots, p$) y s_k ($k = 1, \dots, q$) las multiplicidades de z_j y z_k respectivamente, entonces

$$n = \sum_{j=1}^p 2\sigma_j + \sum_{k=1}^q s_k.$$

Notemos que por cada raíz compleja, aparece también como raíz su conjugado. De esta forma, podemos escribir

$$P(z) = a_n \prod_{j=1}^p (z + \alpha_j - i\beta_j)^{\sigma_j} (z + \alpha_j + i\beta_j)^{\sigma_j} \prod_{k=1}^q (z + \gamma_k)^{s_k},$$

realizando la multiplicación

$$a_n \prod_{j=1}^p (z^2 + 2\alpha_j z + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{\sigma_j} \prod_{k=1}^q (z + \gamma_k)^{s_k}.$$

Note que todo el producto es positivo, por lo tanto $a_j > 0$ para todo $j = 0, 1, \dots, n-1$. $\square$

Sea P un polinomio estable de grado n . Entonces, como ya se demostró en el capítulo 1, cuando ω crece monótonamente de $-\infty$ a $+\infty$ el radio vector $\overrightarrow{OM}$ de la CAF se mueve monótonamente en dirección positiva (contra las manecillas del reloj). Si los coeficientes del polinomio son reales, para $\omega \rightarrow -\infty$ y para $\omega \rightarrow +\infty$, las coordenadas $x(\omega)$, $y(\omega)$ tienen, como es fácil ver, signos que dependen del residuo de n entre 4 (recuerde que para polinomios con coeficientes reales $g(\omega)$ y $h(\omega)$ están definidos por los polinomios $G(-\omega^2)$ y $H(-\omega^2)$ respectivamente).

Para $\omega \rightarrow -\infty$

Residuo	x	y
0	+	+
1	+	-
2	-	-
3	-	+

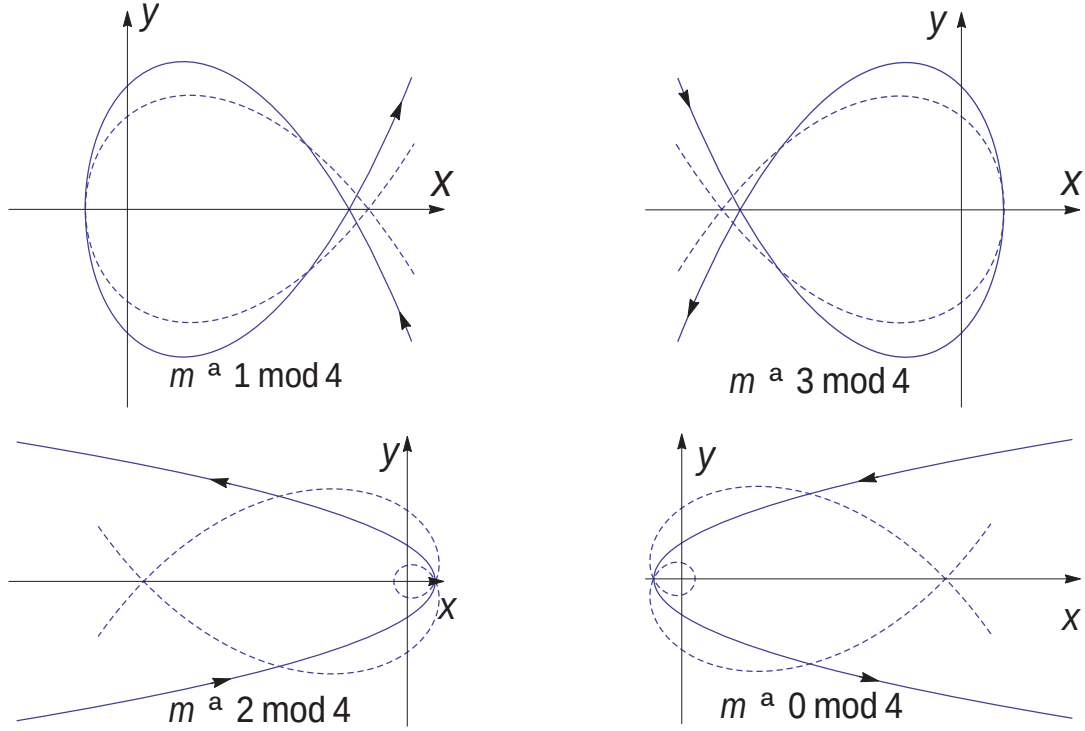
Para $\omega \rightarrow +\infty$

Residuo	x	y
0	+	-
1	+	+
2	-	+
3	-	-

En otras palabras, el movimiento de la CAF para $n = 2m + 1$ comienza en el cuarto cuadrante, derecho inferior, si m es par (o en el segundo cuadrante, izquierdo superior, si m es impar), mientras que para $n = 2m$ la CAF comienza o en el primer cuadrante, derecho superior, si m es par (o en el tercer cuadrante, izquierdo inferior, si m es impar). Y termina, para $n = 2m + 1$ y m par, en el primer cuadrante (para m impar en el tercer cuadrante).

Para $n = 2m$ y m par, la CAF termina en el cuarto cuadrante (para m impar termina en el segundo cuadrante). Además, para $\omega \rightarrow \pm\infty$ la dirección del radio vector

$\overrightarrow{OM}$ tiende a la dirección del eje de las ordenadas para n impar, mientras que para n par, tiende al eje de las abscisas. Las formas aproximadas de la CAF en los cuatro casos son las siguientes:



En lo que respecta a la característica de fase, en los cuatro casos se puede tener la gráfica del arcotangente ubicada en una franja de ancho $n\pi$.

La frontal inferior de esta franja corresponde a $\varphi = -\frac{n\pi}{2}$, mientras que la superior a $\varphi = \frac{n\pi}{2}$.

Durante el recorrido de ω de $-\infty$ a $+\infty$, la CAF consecutivamente cruza los ejes de coordenadas.

Para n impar la CAF en principio cruza el eje de las abscisas y después el eje de las ordenadas, después nuevamente el eje de las abscisas, etc. por última vez, cruza el eje de las abscisas.

Para n par, la CAF primero cruza el eje de las ordenadas y después el eje de las abscisas, nuevamente cruza el eje de las ordenadas, etc., por última vez cruza el eje de las ordenadas.

En ambos casos, se tienen $2n - 1$ puntos de intersección. Sean

$$\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{2n-1} \quad (2.1.1)$$

los valores correspondientes ω , es decir, los valores para los cuales la CAF cruza los ejes de coordenadas.

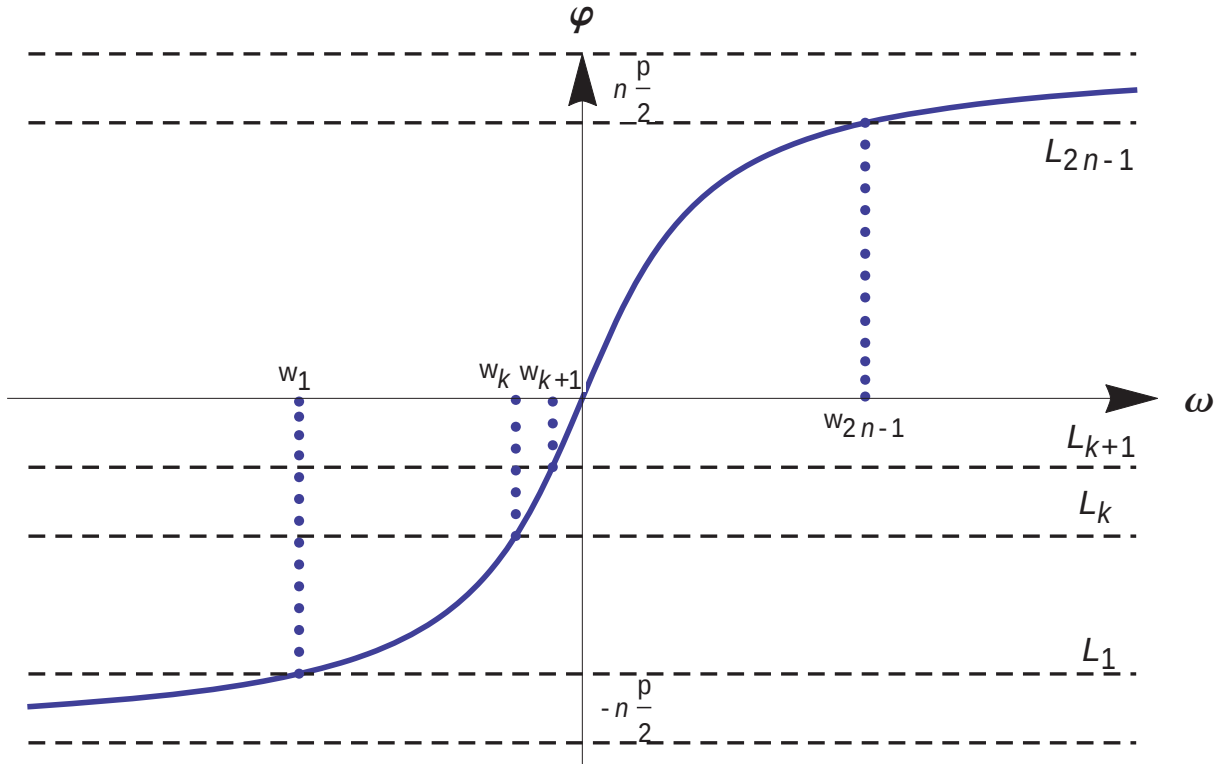


Figura 2.1: Característica de fase.

Si para $\omega = \omega_i$ la CAF cruza el eje de las abscisas, entonces $h(\omega_i) = 0$, y en sentido contrario, si $h(\omega_i) = 0$ entonces para $\omega = \omega_i$ la CAF cruza el eje de las abscisas. De manera análoga, los valores ω_i para los cuales $g(\omega_i) = 0$ son exactamente los valores del parámetro ω para los cuales la CAF cruza el eje de las ordenadas. Consecuentemente, los valores de (2.1.1) representan las raíces de los polinomios g y h , además ninguno de los valores vecinos son raíces de un mismo polinomio. Precisando, si n es impar, entonces $\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{2n-1}$ son raíces del polinomio h ; mientras que $\omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{2n-2}$ son raíces del polinomio g .

Por otro lado, si n es par, $\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{2n-1}$ son raíces del polinomio g ; mientras que $\omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{2n-2}$ son raíces del polinomio h .

Todo esto se puede ver aún más explícitamente en términos de la característica de fase (es decir, la función φ). Considérese el plano con coordenadas (ω, φ) . Sea L_k la recta horizontal dada por $\varphi = (k - n)\frac{\pi}{2}$, $k = 1, \dots, 2n - 1$. Sea ω_k el valor de ω para el cual la característica de fase cruza la recta L_k . Está claro que si $k - n$ es par, entonces $h(\omega_k) = 0$, si $k - n$ es impar entonces $g(\omega_k) = 0$ ($k - n = 2m \rightarrow L_k = m\pi$; $\varphi(\omega) = m\pi \rightarrow \tan \varphi(\omega) = \frac{h(\omega)}{g(\omega)} = 0$ de forma similar para $k - n = 2m + 1$). Consecuentemente, ω_k son los valores de (2.1.1).

Notemos que para cada uno de los polinomios g ó h se tiene en (2.1.1) exactamente tantas raíces como su grado. Por esa razón, la sucesión (2.1.1) completa todas las raíces de g y h . En particular, vemos que todas las raíces de estos polinomios

son reales y simples. De lo anterior se tiene la siguiente definición:

Definición 2.1 (*Propiedad de la alternancia*) Sean g y h polinomios con coeficientes constantes. Se dice que las raíces de estos polinomios se **alternan** si

1. ambos polinomios tienen solamente raíces reales y simples,
2. entre dos raíces arbitrarias vecinas de un polinomio se tiene una y sólo una raíz del otro polinomio.

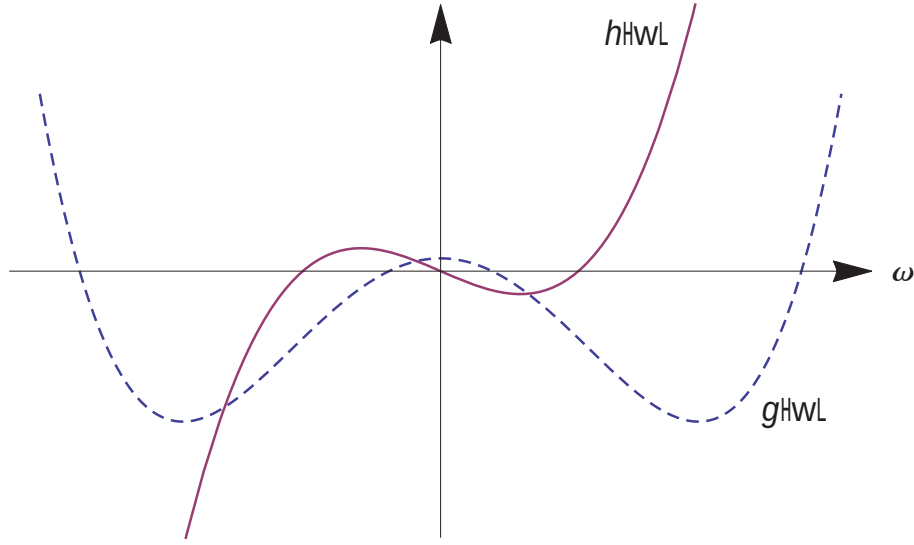


Figura 2.2: Propiedad de la alternancia.

En particular, los polinomios g y h no tienen raíces comunes. Sus grados o son iguales o difieren en la unidad.

Los resultados anteriores se pueden resumir en la siguiente proposición:

Proposición 2.2 Si el polinomio P es estable, entonces las raíces de los polinomios g y h se alternan.

En la demostración de esta proposición hemos usado el hecho de que la función de fase es monótona y la CAF realiza n semivuelatas completas.

Ya que estas propiedades del polinomio estable no dependen de la suposición de que los coeficientes del polinomio P sean reales, vemos que la proposición 2.2 es válida para polinomios con coeficientes complejos arbitrarios.

Surge la pregunta, ¿la condición necesaria de la proposición 2.2 es también suficiente?, es fácil ver que no es así. En efecto, está claro que los razonamientos correspondientes son válidos para polinomios completamente inestables, ya que para

estos polinomios la función de fase también es monótona y la CAF también realiza n semivuelatas en el sentido de las manecillas del reloj (esto es, sentido negativo). De ahí, para polinomios P completamente inestables, las raíces de los polinomios g y h se alternan. Sin embargo, tiene lugar el siguiente resultado:

Proposición 2.3 *Si las raíces de los polinomios g y h se alternan entonces el polinomio P o es estable o es completamente inestable.*

Esta proposición la demostraremos con la ayuda de dos lemas. Antes notemos que en virtud a que g y h no tienen raíces reales comunes, la característica de fase de P está bien definida.

Lema 2.4 *La función de fase φ de un polinomio arbitrario P (que no tiene raíces complejas puras) en cualquier punto ω tiene derivada. Esta derivada se expresa mediante la fórmula*

$$\varphi'(\omega) = \frac{g(\omega)h'(\omega) - g'(\omega)h(\omega)}{g^2(\omega) + h^2(\omega)}. \quad (2.1.2)$$

Demostración

Por definición, en cada segmento del eje $O\omega$ que no contiene raíces de g , tiene lugar la igualdad

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{h(\omega)}{g(\omega)} + N\pi,$$

donde N es un número entero, que depende solamente del segmento o intervalo tomado (en este intervalo el número N depende continuamente de ω y consecuentemente, al ser entero, es el mismo para todo ω). De ahí, por las reglas de diferenciación se tiene que

$$\varphi'(\omega) = \left(\arctan \frac{h(\omega)}{g(\omega)} \right)' = \left(\frac{gh' - g'h}{g^2 + h^2} \right)(\omega).$$

Entonces la fórmula (2.1.2) queda demostrada para todo ω que no es raíz de g . Pero del cálculo diferencial es conocido el siguiente teorema general:

Si

1. la función F está definida y es continua para todos los valores del argumento,
2. la función F es diferenciable en todos los puntos, puede ser excepto en un subconjunto K finito de este,
3. existe una función continua G para todo valor de su argumento, tal que $F' = G$ en todos los puntos que no pertenecen a K .

Entonces F' existe en todos los puntos de K y $F' = G$ también en todos los puntos.

Consecuentemente, la fórmula (2.1.2) es válida para todo ω . □

Lema 2.5 *Si las raíces de los polinomios g y h se alternan, entonces la característica de fase del polinomio P no intersecta de forma tangente a ninguna de las rectas L_k , $k = 1, \dots, 2n - 1$.*

Demostración

El valor del parámetro ω , para el cual la característica de fase intersecta de forma tangente a la recta L_k , es en primer lugar, raíz o del polinomio g (si $k - n$ es impar) o del polinomio h (si $k - n$ es par). En segundo lugar, es raíz de $\varphi'(\omega)$. De esta manera, si el lema no se cumple, entonces existe ω_0 tal que $\varphi'(\omega_0) = 0$ y se tiene una de las siguientes alternativas, o $g(\omega_0) = 0$, o $h(\omega_0) = 0$. Pero si $\varphi'(\omega_0) = 0$, de acuerdo a la fórmula (2.1.2), se tiene que $g(\omega_0)h'(\omega_0) - g'(\omega_0)h(\omega_0) = 0$. De ahí, si $g(\omega_0) = 0$, entonces $g'(\omega_0)h(\omega_0) = 0$, es decir, $g'(\omega_0) = 0$ (ya que $h(\omega_0) \neq 0$ pues g y h por hipótesis no tiene raíces comunes). Como es conocido, si en cierta raíz de un polinomio su derivada también se anula, está es una raíz múltiple. De esta manera, ω_0 es una raíz múltiple o del polinomio g o del polinomio h . Lo que es imposible, pues por hipótesis todas las raíces de los polinomios g y h son simples. La contradicción obtenida muestra el lema. $\square$

Observación 2.1 *Notemos que la alternancia de las raíces de g y h en el lema 2.5, en realidad no es crucial, es suficiente que no tengan raíces múltiples reales y también que no tengan raíces comunes.*

Para la CAF, del lema 2.5, se sigue que su gráfica alcanza los ejes de coordenadas sin ser tangente, es decir, pasa de un lado del eje al otro.

Ahora demostramos la proposición 2.3.

Demostración (de la proposición 2.3).

Supóngase que las raíces de g y h se alternan, esto significa que el punto $z = P(i\omega)$, el cual se mueve a través de la característica (para ω que crece), cruza alternadamente los ejes de coordenadas, ya que de acuerdo al lema 2.5, la característica no puede ser tangente a los ejes de coordenadas, consecuentemente la característica cruza los ejes de coordenadas solamente en una dirección, sea en el sentido positivo ó negativo. Supóngase que todas las intersecciones ocurren en sentido positivo. Entonces durante el recorrido desde una raíz a la siguiente de los polinomios g y h , la función de fase φ crece exactamente en $\frac{\pi}{2}$. Dado que el número de estas raíces es $2n - 1$, con esto se demuestra que durante el recorrido de ω desde $-\infty$ a $+\infty$ la función φ crece por lo menos en $(2n - 2)\frac{\pi}{2} = (n - 1)\pi$, es decir, $\Delta P \geq n - 1$. Por otro lado, se tiene que ΔP es par ó impar al mismo tiempo que n y satisface la desigualdad $|\Delta P| \leq n$, consecuentemente $\Delta P = n$, es decir, el polinomio es estable. Si la CAF cruza los ejes de coordenadas en el sentido negativo, entonces mediante razonamientos análogos $\Delta P = -n$ y P es completamente inestable. $\square$

Corolario 2.6 *Si las raíces de los polinomios g y h se alternan, entonces la función de fase del polinomio P o crece monótonamente o decrece monótonamente (la CAF gira todo el tiempo en una dirección).*

Demostración

Es suficiente notar que tanto para el polinomio estable como para el polinomio completamente inestable, la función de fase es monótona. $\square$

Queda por aprender a distinguir el caso cuando un polinomio es estable del caso cuando este es completamente inestable. En realidad no es difícil: para el polinomio estable la función de fase crece, mientras que para el polinomio completamente inestable decrece. Como es conocido, una función crece si su derivada es positiva y decrece si su derivada es negativa. Como muestra la fórmula (2.1.2) la derivada de la función de fase tiene el mismo signo que $gh' - g'h$. Por esto el polinomio P es estable si el polinomio $gh' - g'h$ es positivo (es decir, toma únicamente valores positivos) y es completamente inestable si $gh' - g'h$ es negativo. Es más, esta claro que es suficiente determinar el signo del polinomio $gh' - g'h$, por ejemplo en $\omega = 0$. En el caso cuando los coeficientes del polinomio P son reales, el polinomio $gh' - g'h$ en el punto $\omega = 0$ es igual a a_1a_0 . Con esto está demostrado el siguiente teorema:

Teorema 2.7 (Hermite-Biehler) *El polinomio P es estable si y sólo si las raíces de g y h se alternan y por lo menos en un punto ω_0*

$$g(\omega_0)h'(\omega_0) - g'(\omega_0)h(\omega_0) > 0. \quad (2.1.3)$$

Para el polinomio con coeficientes reales esta desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$a_1a_0 > 0.$$

Observación 2.2 *El hecho de que para polinomios con coeficientes reales la desigualdad $a_1a_0 > 0$ garantiza la estabilidad del polinomio, se puede demostrar de manera elemental sin recurrir a las derivadas. En efecto, para ω suficientemente cercano a 0 la función de fase se expresa por la fórmula*

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{h(\omega)}{g(\omega)} = \arctan \frac{\omega(\cdots + a_1)}{\cdots + a_0},$$

donde los puntos suspensivos denotan polinomios que se anulan para $\omega = 0$. Por eso, para ω suficientemente cercano a 0, el valor $\varphi(\omega)$ tiene el mismo signo que $\arctan \frac{\omega a_1}{a_0}$, es decir, tiene el mismo signo que $\frac{\omega a_1}{a_0}$. Notemos que $a_0 \neq 0$ ya que P es estable o completamente inestable y por eso no tiene raíces iguales a 0. Por otro lado, la función φ crece en $\omega = 0$ si y sólo si, para ω pequeño, el número $\varphi(\omega)$ tiene el mismo signo que ω (negativo para $\omega < 0$ y positivo para $\omega > 0$). Consecuentemente, φ crece en $\omega = 0$ si y sólo si, $\frac{a_1}{a_0} > 0$, es decir, $a_1a_0 > 0$.

Ejemplo 2.1 Considere el polinomio

$$P(z) = z^5 + 15z^4 + 85z^3 + 225z^2 + 274z + 120.$$

Entonces

$$P(i\omega) = g(\omega) + ih(\omega),$$

con

$$g(\omega) = 15\omega^4 - 225\omega^2 + 120, \quad h(\omega) = \omega^5 - 85\omega^3 + 274\omega.$$

Calculamos sus raíces haciendo un cambio de variable $x = \omega^2$, $x^2 = \omega^4$, tenemos:

$$g(\omega) = 0 \Leftrightarrow 15x^2 - 225x + 120 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 15x + 8 = 0.$$

Usando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas

$$\frac{15 \pm \sqrt{193}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{15 + \sqrt{193}}{2}, \quad x_2 = \frac{15 - \sqrt{193}}{2}.$$

Por lo que las raíces son

$$\omega_1 = \sqrt{x_1}, \quad \omega_2 = -\sqrt{x_1}, \quad \omega_3 = \sqrt{x_2}, \quad \omega_4 = -\sqrt{x_2}.$$

Cuyo valor aproximado es $\omega_1 = 3,8008$, $\omega_2 = -3,8008$, $\omega_3 = 0,7441$ y $\omega_4 = -0,7441$. De una forma similar se pueden calcular las raíces de $h(\omega)$ y obtener de forma aproximada

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 9,0357, \quad \omega_3 = -9,0357, \quad \omega_4 = 1,8319, \quad \omega_5 = -1,8319.$$

La gráfica de los polinomios $g(\omega)$ y $h(\omega)$ se muestran en la figura 2.3. Esto comprueba que el polinomio $P(z)$ es Hurwitz ya que satisface la propiedad de la alternancia.

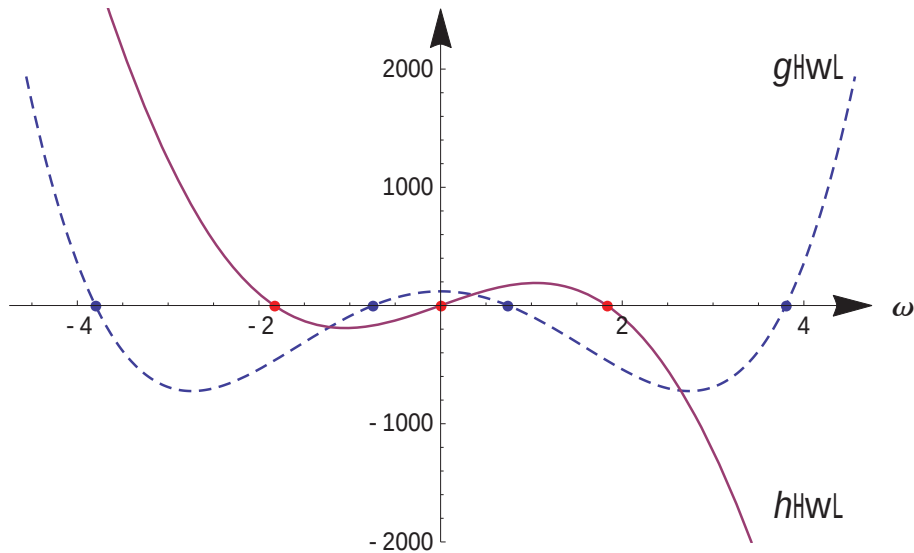


Figura 2.3: Propiedad de la alternancia para polinomios Hurwitz (Ejemplo 2.1).

Observación 2.3 Sea g^* aquel polinomio de g y h el cual tiene grado n ; mientras que h^* denota el otro polinomio (que tiene grado $n-1$). El punto $z = f(i\omega)$ cruza por última vez el eje de coordenadas en la raíz mayor ω_{2n-1} del polinomio g^* . Además el polinomio g^* cambia de signo de $(-1)^{m-1}$ a $(-1)^m$, donde $m = (\frac{n}{2})$, mientras que h^* mantiene el signo, igual al signo de su coeficiente superior b_n . Por eso para $g^* = g$ (es decir, n par) este cruce ocurre en sentido contrario a las manecillas del reloj, si y sólo si, $(-1)^{m-1}b_n > 0$. Mientras que para $g^* = h$ (es decir, n impar), lo anterior ocurre si y sólo si, $(-1)^{m-1}b_n < 0$; ya que para polinomios P con coeficientes reales, $b_n = (-1)^{m-1}a_{n-1}$ si n es par ($b_1 = (-1)^m a_{n-1}$ si n es impar), de esto se sigue que para el polinomio P con coeficientes reales la condición (2.1.3) es equivalente a la desigualdad $a_{n-1} > 0$.

En el caso cuando P tiene coeficientes reales, los polinomios g y h se expresan, como ya conocemos, mediante G y H de grados dos veces menores (ver (1.1.1))

$$g(\omega) = G(-\omega^2), \quad h(\omega) = \omega H(-\omega^2).$$

Se puede demostrar que:

1. Todas las raíces de los polinomios g y h son simples, si y sólo si, las raíces de los polinomios G y H son simples y diferentes de cero.
2. Todas las raíces de los polinomios g y h son reales, si y sólo si, las raíces de los polinomios G y H son reales y no positivas.
3. Entre cualesquiera dos raíces vecinas de uno de los polinomios g y h se tienen raíces del otro polinomio, si y sólo si, G y H cuentan con la misma propiedad. Consecuentemente
4. Las raíces de los polinomios g y h se alternan, si y sólo si, se alternan las raíces de G y H y son negativas. Por lo que el siguiente resultado es válido:

Teorema 2.8 (Hermite-Biehler para polinomios con coeficientes reales) El polinomio P con coeficientes reales es estable, si y sólo si, $a_1 a_0 > 0$ (ó $a_{n-1} > 0$) y las raíces de los polinomios G y H se alternan y son no positivas.

Notemos que en ambos teoremas de Hermite-Biehler no es necesario a priori suponer que el polinomio P no tiene raíces imaginarias puras.

Ejemplo 2.2 Considere el polinomio

$$P(z) = z^9 + 21z^8 + 52z^7 + 145z^6 + 266z^5 + 331z^4 + 280z^3 + 155z^2 + 49z + 6.$$

Entonces

$$P(z) = G(z^2) + zH(z^2),$$

con

$$G(z) = 21z^4 + 145z^3 + 331z^2 + 155z + 6, \quad H(z) = z^4 + 52z^3 + 266z^2 + 280z + 49.$$

Las raíces de los polinomios $G(z)$ y $H(z)$ (denotémoslas por $\omega_{G,i}$, $\omega_{H,i}$, $i = 1, \dots, 4$) son las siguientes:

$$\omega_{G,1} = -3,149 - 1,4143i, \quad \omega_{G,2} = -3,149 + 1,4143i, \quad \omega_{G,3} = -0,5642, \quad \omega_{G,4} = -0,04249.$$

$$\omega_{H,1} = -46,3964, \quad \omega_{H,2} = -4,2463, \quad \omega_{H,3} = -1,1389, \quad \omega_{H,4} = -0,2183.$$

Las gráficas de los polinomios $G(z)$ y $H(z)$ se muestran en la figura 2.4. Esto nos dice que el polinomio $P(z)$ no es Hurwitz ya que no satisface la propiedad de la alternancia.

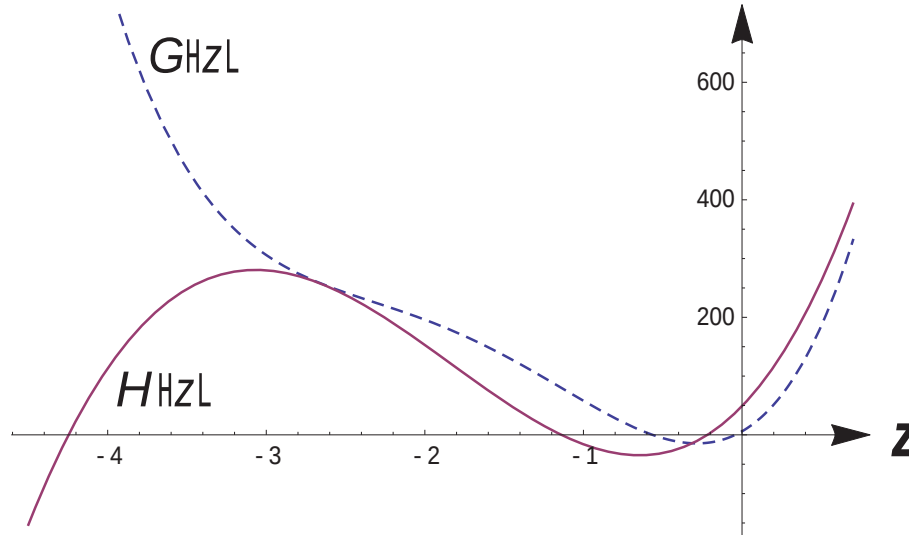


Figura 2.4: La alternancia falla para polinomios no Hurwitz(Ejemplo 2.2).

2.2. Índices de Cauchy

Se llama función racional a una función $S = \frac{G}{F}$, donde G y F son polinomios. Para cada x que no es raíz de F , el valor de $S(x)$ se expresa mediante la relación $S(x) = \frac{G(x)}{F(x)}$, $F(x) \neq 0$.

Se considera que la multiplicación de G y F por un polinomio cualquiera no cambia S . Entonces, se puede siempre entender a F y G como polinomios primos. La función racional definida por polinomios primos se llama irreducible. S se escribe unívocamente hasta la proporcionalidad de G y F .

Definición 2.2 *Los puntos que no están en el dominio de definición de la función S , se llaman **polos** de S . Estos son exactamente las raíces de F . Cuando S es irreducible, se llama **multiplicidad** del polo a su multiplicidad como raíz de F .*

De esta manera, si $S = \frac{G}{F}$ representa una expresión irreducible y si $F(x) = (x - x_0)^{\nu_0} F_0(x)$, donde $F_0(x_0) \neq 0$. Entonces x_0 es un polo y ν_0 es su multiplicidad.

Definición 2.3 *El número $A_0 = \frac{G(x_0)}{F_0(x_0)}$ se llama **coeficiente principal** de la función S en el polo x_0 . Por definición es diferente de cero (G y F son polinomios primos), ya que*

$$(x - x_0)^{\nu_0} S(x) = \frac{G(x)}{F_0(x)}, \quad \text{para } x \neq x_0, \quad (2.2.1)$$

entonces el límite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{\nu_0} S(x) = A_0.$$

Es claro que si $m > \nu_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^m S(x) = 0,$$

mientras que si $m < \nu_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^m S(x) = \pm\infty.$$

Entonces tiene lugar el siguiente lema:

Lema 2.9 *Si el punto x_0 es un polo de multiplicidad ν_0 de la función racional S , entonces*

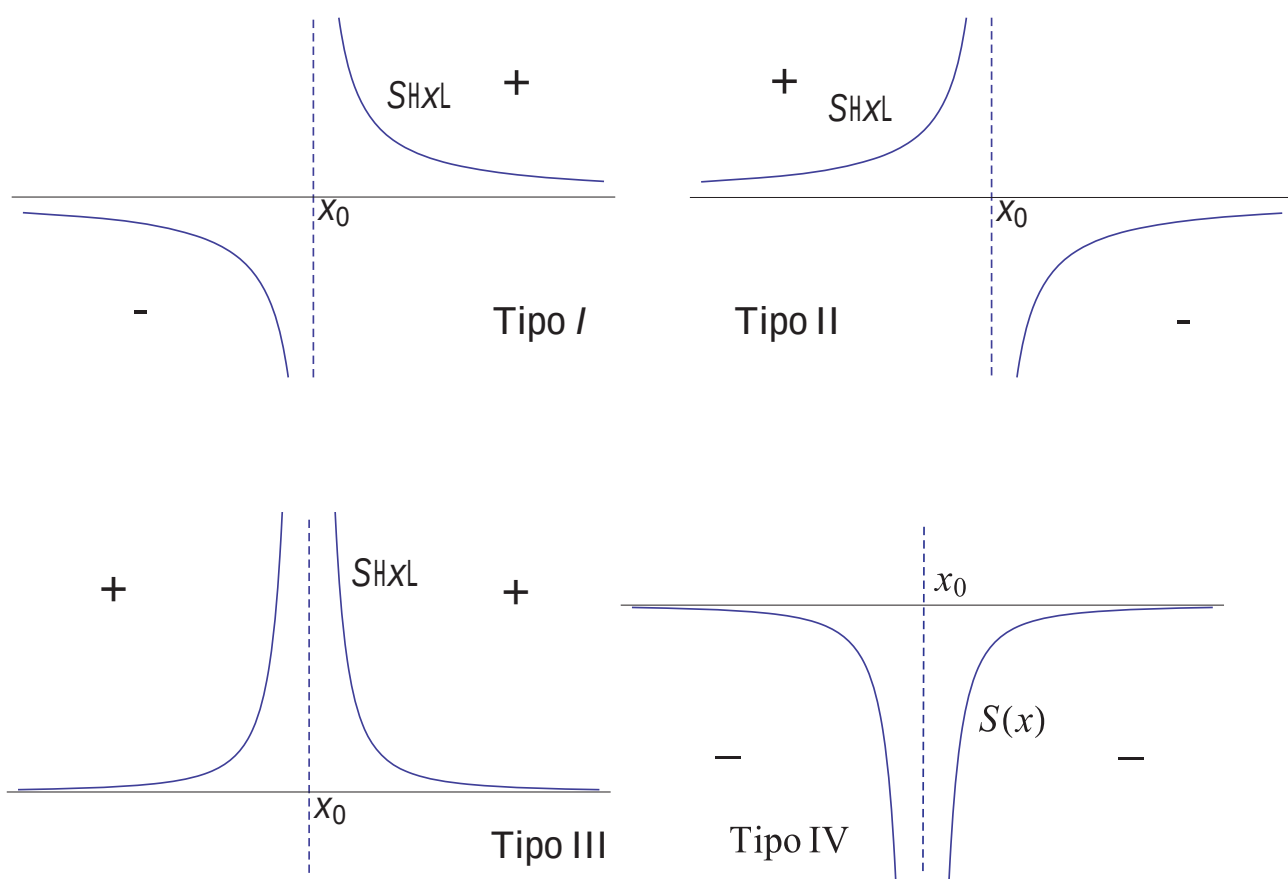
$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{\nu_0} S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } m > \nu_0, \\ \pm\infty & \text{si } m < \nu_0. \end{cases}$$

Además, el número $A = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{\nu_0} S(x)$ es diferente de cero y es el coeficiente principal de S en el polo x_0 .

Por definición, si x_0 es un polo de la función racional S entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \pm\infty.$$

Para caracterizar la conducta de la función S en la vecindad de x_0 , veamos las siguientes gráficas



Recordando que los límites por la izquierda y la derecha respectivamente son:

$$S(x_0^-) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} S(x), \quad S(x_0^+) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} S(x), \quad (2.2.2)$$

resumimos en la siguiente tabla los tipos ilustrados anteriormente:

Tipo	$S(x_0^-)$	$S(x_0^+)$
I	$-\infty$	$+\infty$
II	$+\infty$	$-\infty$
III	$+\infty$	$+\infty$
IV	$-\infty$	$-\infty$

Sea ν_0 la multiplicidad del polo x_0 y A_0 el coeficiente principal en ese polo, ya que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{\nu_0} S(x) = A_0,$$

entonces el signo de $(x - x_0)^{\nu_0} S(x)$, para x suficientemente cercano a x_0 , tiene el mismo signo que A_0 . Con lo cual queda demostrada la siguiente proposición:

Proposición 2.10 *El polo x_0 es del tipo*

$$\left. \begin{array}{l} I \\ II \\ III \\ IV \end{array} \right\} \text{ si y sólo si } \left\{ \begin{array}{ll} A_0 > 0 & \nu_0 \text{ impar} \\ A_0 < 0 & \nu_0 \text{ impar} \\ A_0 > 0 & \nu_0 \text{ par} \\ A_0 < 0 & \nu_0 \text{ par.} \end{array} \right.$$

Definición 2.4 *Se llama **índice de Cauchy** de la función racional S , en el polo x_0 , al número $\text{Ind}_{x_0} S$ definido por la fórmula*

$$\text{Ind}_{x_0} S = \begin{cases} +1 & \text{si } \nu_0 \text{ es impar y } A_0 > 0, \\ -1 & \text{si } \nu_0 \text{ es impar y } A_0 < 0, \\ 0 & \text{si } \nu_0 \text{ es par.} \end{cases}$$

De esta manera

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{x_0} S &= +1 \text{ en los polos del tipo I,} \\ \text{Ind}_{x_0} S &= -1 \text{ en los polos del tipo II,} \\ \text{Ind}_{x_0} S &= 0 \text{ en los polos del tipo III y IV.} \end{aligned}$$

Se define el índice de una función racional S en un intervalo abierto (a, b) , $\text{Ind}_a^b S$ (donde a puede ser $-\infty$ y b puede ser $+\infty$), a la suma de índices de Cauchy de esta función de todos los polos ubicados en (a, b) .

$$\text{Ind}_a^b S = \sum_{a < x_0 < b} \text{Ind}_{x_0} S. \quad (2.2.3)$$

Si en el intervalo (a, b) no existen polos, entonces obviamente $\text{Ind}_a^b S = 0$. Recordemos que para todo $A \neq 0$ se define

$$\text{sgn}(A) = \begin{cases} +1 & \text{si } A > 0, \\ -1 & \text{si } A < 0. \end{cases}$$

Por lo que la relación (2.2.3) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\text{Ind}_a^b S = \sum_{\substack{a < x_i < b \\ \nu_i \text{ impar}}} \text{sgn}(A_i),$$

donde la suma se extiende a todos los polos x_i de orden ν_i y ubicados en (a, b) , mientras que A_i representa el coeficiente principal de la función racional S en x_i . El índice $\text{Ind}_{-\infty}^{+\infty} S$, lo denotaremos por $\text{Ind } S$ y lo llamaremos índice de la función racional S .

Es claro que el índice de $S = \frac{G}{F}$ satisface las desigualdades

$$-\mu \leq \text{Ind } S \leq \mu,$$

donde μ es el número de raíces distintas de F .

A continuación haremos una lista de las propiedades del índice:

1. Sea $a < c < b$ (no se excluyen los casos $a = -\infty$ y $b = +\infty$). Si c no es polo de la función racional S , entonces

$$\text{Ind}_a^b S = \text{Ind}_a^c S + \text{Ind}_c^b S.$$

Si c es polo, entonces

$$\text{Ind}_a^b S = \text{Ind}_a^c S + \text{Ind}_c^b S + \text{Ind}_c S.$$

2. Sean S y T funciones racionales y x_0 un polo de multiplicidad ν_0 de S . Supongamos que x_0 o no es polo de T o es polo de multiplicidad menor a ν_0 de T , entonces x_0 es un polo de la función $(S + T)$ de multiplicidad ν_0 y

$$\text{Ind}_{x_0}(S + T) = \text{Ind}_{x_0} S.$$

Demostración

Por la condición dada

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{\nu_0} T(x) = 0,$$

por eso

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{\nu_0} (S(x) + T(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{\nu_0} S(x) = A_0.$$

Consecuentemente, x_0 es polo de $(S + T)$ de multiplicidad ν_0 con coeficiente principal A_0 . $\square$

3. Si en un intervalo (a, b) las funciones racionales S y T no tienen polos comunes de la misma multiplicidad, entonces

$$\text{Ind}_a^b (S + T) = \text{Ind}_a^b S + \text{Ind}_a^b T.$$

En particular, si T no tiene polos en (a, b) entonces

$$\text{Ind}_a^b (S + T) = \text{Ind}_a^b S.$$

El índice de una multiplicación de funciones racionales arbitrarias se calcula con dificultad. Nos restringiremos a un caso particular suficiente para nuestro proposito.

4. Si la función racional T no tiene polos ni raíces en (a, b) (y por eso mantiene su signo), entonces para cualquier función racional S , se cumple

$$\text{Ind}_a^b (S \cdot T) = \begin{cases} \text{Ind}_a^b S & \text{si } T > 0 \text{ en } (a, b), \\ -\text{Ind}_a^b S & \text{si } T < 0 \text{ en } (a, b). \end{cases}$$

5. Sea la función racional T definida por la fórmula

$$T(x) = S(-x^2),$$

donde $S(x)$ es una función racional tal que $S(0)$ está definida y es diferente de 0, entonces los polos (reales) de la función T , tiene la forma $\pm\sqrt{-x_0}$, donde x_0 es un polo arbitrario negativo de S . La multiplicidad del polo $\pm\sqrt{-x_0}$ es igual a la multiplicidad del polo x_0 . Además tienen lugar las siguientes igualdades:

$$\text{Ind}_{-\sqrt{-x_0}} T = \text{Ind}_{x_0} S, \quad \text{Ind}_{\sqrt{-x_0}} T = -\text{Ind}_{x_0} S. \quad (2.2.4)$$

Demostración

Si $0 < x < \sqrt{-x_0}$, entonces $0 < x^2 < -x_0$, mientras que si $-\sqrt{-x_0} < x$, implica $-x_0 < x^2$. Además, si $x < \sqrt{-x_0}$ tenemos $x^2 \rightarrow -x_0$.

Es decir, para todo $x_0 < 0$

$$T(\sqrt{-x_0}^-) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{-x_0}^-} T(x) = \lim_{\substack{x^2 \rightarrow -x_0 \\ x < \sqrt{-x_0}}} S(-x^2) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} S(x) = S(x_0^+)$$

y

$$T(\sqrt{-x_0}^+) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{-x_0}^+} T(x) = \lim_{\substack{x^2 \rightarrow -x_0 \\ x > \sqrt{-x_0}}} S(-x^2) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} S(x) = S(x_0^-).$$

Ahora, si $x < -\sqrt{-x_0}$ entonces $x^2 > -x_0$ y si $-\sqrt{-x_0} < x < 0$, tenemos $-x_0 > x^2 > 0$. De ahí que

$$T(\sqrt{-x_0}^+) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{-x_0}^+} T(x) = \lim_{\substack{x^2 \rightarrow -x_0 \\ x > \sqrt{-x_0}}} S(-x^2) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} S(x) = S(x_0^-)$$

y

$$T(\sqrt{-x_0}^-) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{-x_0}^-} T(x) = \lim_{\substack{x^2 \rightarrow -x_0 \\ x < \sqrt{-x_0}}} S(-x^2) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} S(x) = S(x_0^+).$$

□

Para toda función racional S , la función $\frac{1}{S}$ también es racional. Sus polos son los ceros de S y sus ceros son los polos de S .

Proposición 2.11 *Sea S una función racional y (a, b) un intervalo tal que $S(a) \neq 0$ o $\pm\infty$, y $S(b) \neq 0$ o $\pm\infty$. Entonces*

$$\text{Ind}_a^b S + \text{Ind}_a^b \frac{1}{S} = \frac{\text{sgn}(S(b)) - \text{sgn}(S(a))}{2}. \quad (2.2.5)$$

Demostración

La fórmula (2.2.5) indica que

$$\text{Ind}_a^b S + \text{Ind}_a^b \frac{1}{S} = \begin{cases} 1 & \text{si } S(b) > 0 \text{ y } S(a) < 0, \\ -1 & \text{si } S(b) < 0 \text{ y } S(a) > 0, \\ 0 & \text{si } S(b) \text{ y } S(a) \text{ son del mismo signo.} \end{cases}$$

Consideremos un cero x_0 de S , es decir, un polo de $\frac{1}{S}$. Cerca de este punto la gráfica de la función $\frac{1}{S}$ pertenece a uno de los cuatro tipos. Los tipos I y II se caracterizan por el cambio de signo cuando la gráfica de S pasa por x_0 (de $-$ a $+$ y de $+$ a $-$). En los tipos III y IV el signo no cambia, ya que la función $\frac{1}{S}$ va a tener los mismos cambios de signo, el comportamiento es el mismo para S .

Es por eso que el cálculo de $\text{Ind}_a^b \frac{1}{S}$ van a intervenir los ceros $x_0 \in (a, b)$ de S de los tipo I y II. Además, el cero del tipo I da valor $+1$ al cálculo del índice en ese punto, mientras que el cero del tipo II da valor de -1 al cálculo del índice en ese punto. Esto significa que

$$\text{Ind}_a^b S + \text{Ind}_a^b \frac{1}{S} = p - q,$$

donde p es el número de ceros y polos de S que pertenecen a (a, b) del tipo I, mientras que q es el número de ceros y polos de S en (a, b) del tipo II.

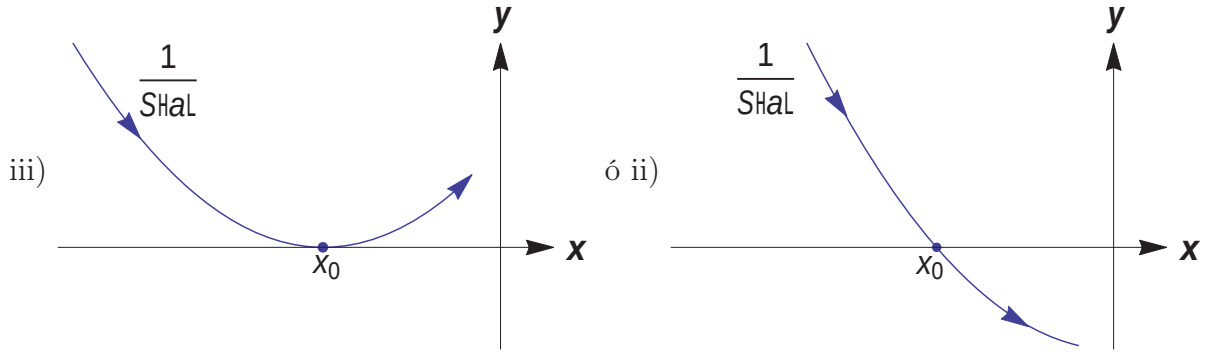
Calculemos $p - q$ de diferente manera.

Vamos a seguir el movimiento de los puntos $(x, S(x))$, gráfica de S , cuando x recorre de a a b . Supongamos por ejemplo que $S(a) > 0$, esto significa que para $x = a$ la gráfica de S esta ubicada en el semiplano superior (encima del eje Ox).

Para x creciente, la gráfica de S pasará al semiplano inferior por medio de sus ceros y polos. Supongamos que x_0 es el primer cero o polo de $S(x)$.

1. **Caso.-** x_0 es un polo de S de multiplicidad ν_0 .

En tal caso, podemos considerar a x_0 como un cero de $\frac{1}{S}$ de la misma multiplicidad, además claramente $\frac{1}{S(a)} > 0$ por lo tanto, x_0 es de la forma (el orden se justificara por si mismo más adelante)



de (2.2.1) tenemos

$$\frac{1}{S(x)} = \frac{(x - x_0)^{\nu_0} F_0(x)}{G(x)},$$

además

$$(x - x_0)^{\nu_0} S(x) = \frac{G(x)}{F_0(x)}.$$

Tomamos ahora un $\epsilon > 0$ de tal forma que S no contenga más polos ni ceros en el intervalo $(a, x_0 + \epsilon)$. Nos preguntamos por la multiplicidad ν_0 y por el signo de $\frac{G}{F_0}$ (notemos que $\frac{G}{F_0}$ no cambia de signo en dicha vecindad).

Si x_0 es de la forma i) tenemos

$$(x - x_0)^{\nu_0} \frac{F_0(x)}{G(x)} \geq 0, \quad \forall x \in (a, x_0 + \epsilon), \quad (2.2.6)$$

ya que por hipótesis $\frac{1}{S(a)} > 0$. Ahora supongamos que ν_0 es impar, entonces

$$(x - x_0)^{\nu_0} > 0, \quad \text{si } x_0 < x < x_0 + \epsilon,$$

$$(x - x_0)^{\nu_0} < 0, \quad \text{si } a < x < x_0,$$

por lo tanto, el hecho que $\frac{G}{F_0}$ no cambia de signo en dicho intervalo y la ecuación (2.2.6) nos lleva a una contradicción, lo que implica que ν_0 debe ser par y esto a su vez implica que $\frac{G}{F_0} > 0$. Por la proposición 2.10, x_0 es un polo del tipo III de S y no suma nada al cálculo del índice $\text{Ind}_a^b S$.

Si x_0 es de la forma ii) entonces

$$\frac{1}{S(x)} \geq 0, \quad \text{para } a < x \leq x_0, \quad (2.2.7)$$

$$\frac{1}{S(x)} < 0, \quad \text{para } x_0 < x < x_0 + \epsilon, \quad (2.2.8)$$

si suponemos que ν_0 es par tenemos que $(x - x_0)^{\nu_0} \geq 0$, para todo $x \in (a, x_0 + \epsilon)$, esto y la condición de que $\frac{G}{F_0}$ no cambia de signo en dicho intervalo nos lleva

a una contradicción. Por lo tanto, ν_0 es impar, lo que a su vez implica que $\frac{G}{F_0} < 0$ en ese intervalo (se sigue de las ecuaciones (2.2.7), (2.2.8)), es decir, x_0 es un polo de tipo II (proposición 2.10) y suma -1 al cálculo del índice $\text{Ind}_a^b S$.

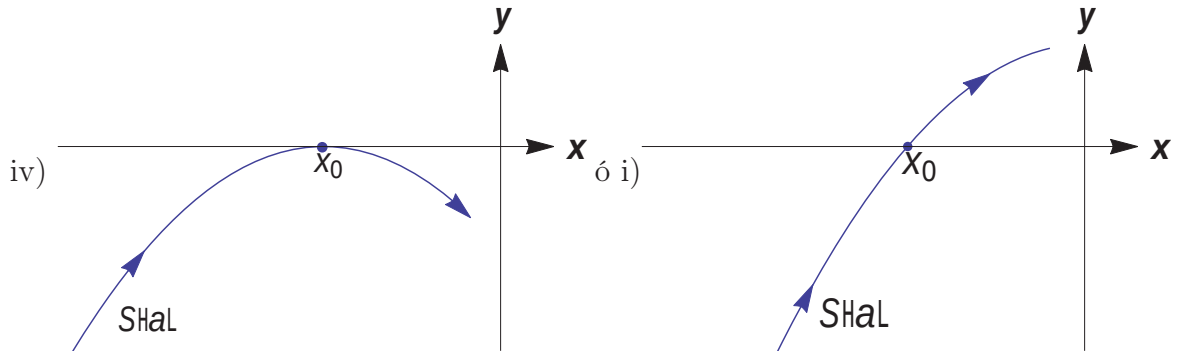
2. **Caso.-** x_0 es un cero de $S(x)$ de multiplicidad ν_0 .

Entonces, análogamente, x_0 es del tipo iii) o ii) (donde ahora consideramos la gráfica de S). Si x_0 es de la forma iii), siguiendo el mismo tipo de razonamiento podemos demostrar que x_0 es un polo de la función $\frac{1}{S}$ del tipo III y no suma nada al cálculo del índice $\text{Ind}_a^b \frac{1}{S}$.

Si es de la forma ii), x_0 es un polo de $\frac{1}{S}$ de tipo II y suma un -1 al cálculo del índice $\text{Ind}_a^b \frac{1}{S}$.

El análisis anterior muestra que las únicas formas en que $S(x)$ (cuando $S(a) > 0$) pase del semiplano superior al semiplano inferior es a través de los polos del tipo II y de los ceros del tipo ii) (los ceros de $S(x)$ del tipo ii) son polos de $\frac{1}{S}$ del tipo II).

Ahora, consideremos ahora las raíces del tipo



Siguiendo los razonamientos anteriores podemos mostrar que cuando $S(a) < 0$ S pasa del semiplano inferior al semiplano superior a través de los polos del tipo I o de las raíces del tipo i) (que son polos del tipo I de $\frac{1}{S}$). Llamemos ceros del tipo I a las raíces de S que generan polos del tipo I de $\frac{1}{S}$.

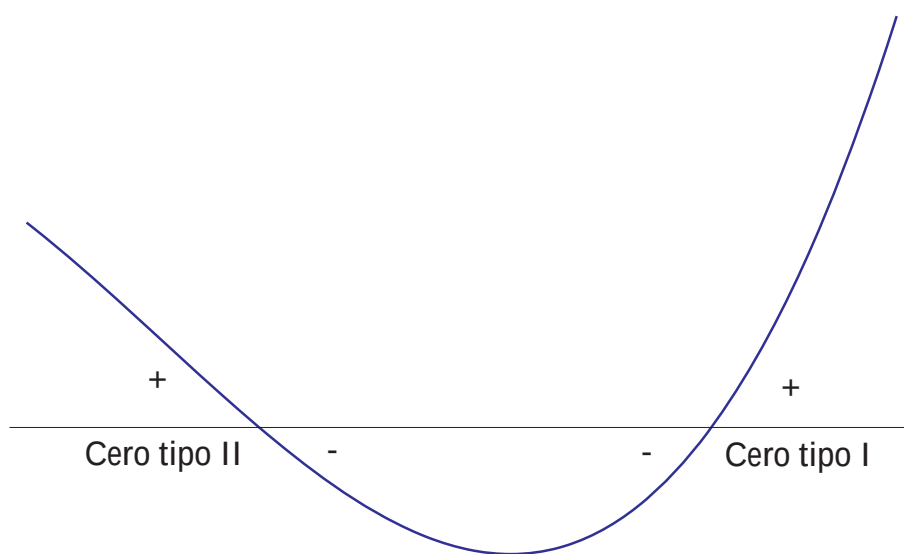


Figura 2.5: Ceros de tipo i) y ii).

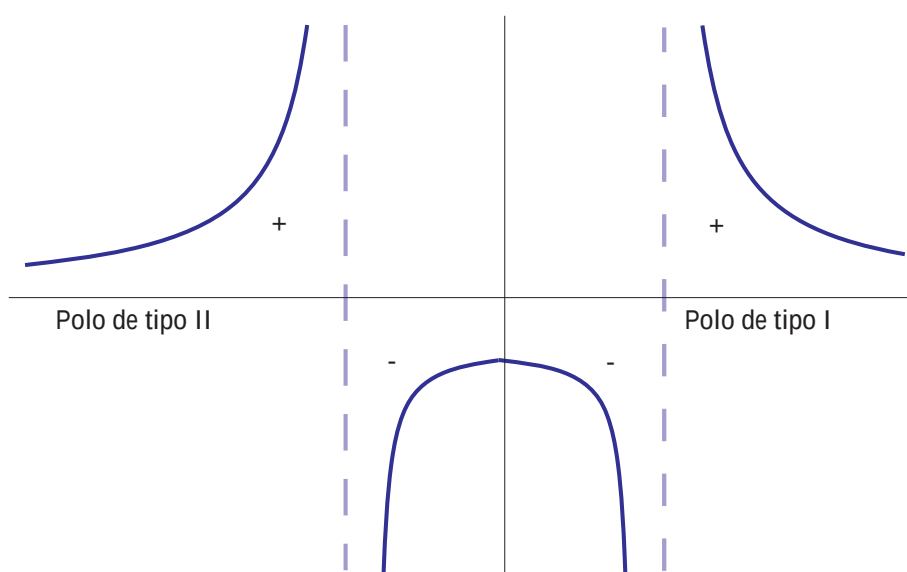


Figura 2.6: Polos de tipo I) y II).

Notamos que los ceros y polos del tipo I se alternan con los ceros y polos del tipo II. Entonces si $S(a) > 0$ y denotando como p y q a los números de ceros y polos del tipo I y II repectivamente, podemos notar que $p = q$ (si $S(b) > 0$) o $p = q - 1$ (si $S(b) < 0$), de manera análoga, si $S(a) < 0$ entonces $p = q$ (si $S(b) < 0$) o $p = q + 1$ (si $S(b) > 0$) es decir

$$p - q = \begin{cases} 1 & \text{si } S(b) > 0 \text{ y } S(a) < 0, \\ -1 & \text{si } S(b) < 0 \text{ y } S(a) > 0, \\ 0 & \text{si } S(b) \text{ y } S(a) \text{ son del mismo signo.} \end{cases}$$

□

Observación 2.4 Para todo intervalo abierto (a, b) finito o infinito y cualquier función racional S , todos los valores $S(a')$ donde $a' > a$ y suficientemente cercanos a a , tienen un mismo signo. De ahí que definimos

$$\operatorname{sgn}(S(a)) = \operatorname{sgn}(S(a'))$$

obtendremos el valor $\operatorname{sgn}(S(a')) = \pm 1$ (correctamente definido) para a' suficientemente cercano a a . De manera análoga, la fórmula

$$\operatorname{sgn}(S(b)) = \operatorname{sgn}(S(b'))$$

donde $b' < b$ suficientemente cercano a b , define correctamente el signo. Si a es finito y $S(a) \neq 0$ o ∞ entonces el número $\operatorname{sgn}(S(a))$ coincide con la definición anterior. Si $a = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} S(x)$ es finito e igual a un $A \neq 0$, entonces $\operatorname{sgn}(S(A)) = \operatorname{sgn}(A)$, esta fórmula permanece válida cuando $\lim_{x \rightarrow -\infty} S(x) = \pm\infty$ si convenimos en que $\operatorname{sgn}(\pm\infty) = \pm 1$, entonces las fórmulas anteriores también tienen lugar cuando a es un polo de S ($S(a) = \pm\infty$) si en este caso entendemos por A al límite por la derecha (ver (2.2.2)), es decir

$$S(a^+) = A.$$

Sin embargo para el caso $S(a) = 0$ la denotación $\operatorname{sgn}(S(a))$ no se puede relacionar con $S(a)$ y se recomienda considerarlo como un único símbolo. De manera análoga para el $\operatorname{sgn}(S(b))$. Remarquemos que el así definido $\operatorname{sgn}(S(a))$ ($\operatorname{sgn}(S(b))$) depende no solamente del número a (correspondientemente b), sino también del hecho de que este punto es el punto terminal izquierdo (o derecho) de (a, b) . La introducción de los símbolos $\operatorname{sgn}(S(a))$ y $\operatorname{sgn}(S(b))$ se justifica por el hecho de que ahora la fórmula (2.2.5) es válida para cualquier intervalo abierto (a, b) y cualquier función racional S .

2.3. Índice y condición de estabilidad

Aplicamos ahora el concepto de índice al problema de la caracterización de los polinomios estables. Sea

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

un polinomio con coeficientes complejos, mientras que g y h son polinomios con coeficientes reales, relacionados con P de la siguiente manera

$$P(i\omega) = g(\omega) + ih(\omega)$$

y recordando el concepto de característica amplitud fase (1.1).

Si la CAF no pasa por el origen, los polinomios g y h no tienen raíces comunes, entonces para el polinomio P se determina la función fase φ que satisface

$$\tan \varphi = \frac{h}{g}.$$

Ahora vamos a considerar las funciones racionales $\frac{h}{g}$, y su inversa $\frac{g}{h}$. No vamos a suponer que h y g no tengan ceros comunes.

Sea ω_0 un polo real de la función $\frac{h}{g}$ (o $\frac{g}{h}$), es decir, es raíz de g (de h) que no es raíz de h (de g). Entonces para $\omega = \omega_0$ la CAF cruza el eje de las ordenadas (eje de las abscisas) en este punto, diferente del origen.

Lema 2.12 *La igualdad $\text{Ind}_{\omega_0} \frac{h}{g} = -1$ ($\text{Ind}_{\omega_0} \frac{g}{h} = 1$) tiene lugar si y sólo si la CAF del polinomio P cruza en $\omega = \omega_0$ el eje de las ordenadas (eje de las abscisas) en dirección contraria a las manecillas del reloj.*

Demostración

Supongamos que para ω_0 la CAF cruza el eje de las ordenadas (abscisas) en el semiplano superior (derecho). Entonces $h(\omega_0) > 0$ ($g(\omega_0) > 0$) y la desigualdad se mantiene para una vecindad de ω_0 . De ahí, la igualdad $\text{Ind}_{\omega_0} \frac{h}{g} = -1$ ($\text{Ind}_{\omega_0} \frac{g}{h} = 1$) significa que para los ω en dicha vecindad se debe tener

$$g(\omega) > 0 \quad (h(\omega) < 0) \quad \text{para } \omega < \omega_0$$

y

$$g(\omega) < 0 \quad (h(\omega) > 0) \quad \text{para } \omega_0 < \omega,$$

es decir, la CAF cruza el eje de las ordenadas (abscisas) de derecha a izquierda (de arriba a abajo).

Para $h(\omega_0) < 0$ ($g(\omega_0) < 0$) las desigualdades anteriores se invierten y la CAF cruza el eje de las ordenadas (abscisas) de izquierda a derecha (de abajo a arriba). $\square$

Teorema 2.13 *El polinomio P de grado n es estable si y sólo si*

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\frac{h}{g}} &= -n, & \text{para } n \text{ par,} \\ \text{Ind}_{\frac{g}{h}} &= n, & \text{para } n \text{ impar.} \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Demostración

Lo demostraremos para n par, el caso n impar es análogo.

$\Rightarrow$] Si P es estable (y en particular g y h son primos) entonces la función φ es monótona creciente y la CAF intersecta a los ejes de coordenadas en la dirección opuesta a las manecillas del reloj. De ahí en virtud al lema 2.12, para cada raíz ω_0 del polinomio g tiene lugar $\text{Ind}_{\omega_0} \frac{h}{g} = -1$. Ya que todas las raíces del polinomio g

son reales y distintas, mientras que su grado de acuerdo al lema 1.1 es igual a n . Con esto se demuestra que para todo polinomio estable de grado par la condición (2.3.1) es válida.

[$\Leftarrow$ Supongamos ahora que se cumple (2.3.1). Esto significa que $p - q = -n$, donde p es el número de polos de la función $\frac{h}{g}$ de índice 1, mientras que q es el número de polos de dicha función con índice -1.

Por otro lado, ya que el grado del polinomio g para n par es igual a n , entonces

$$p + q \leq n.$$

Consecuentemente $p = 0$ y $q = n$, y por eso todas las raíces del polinomio g son reales, distintas y ninguna raíz es raíz de h (es decir g y h son primos). Además, del lema 2.12 se sigue que la CAF intersecta el eje de las ordenadas en n puntos y cada vez en sentido opuesto a las manecillas del reloj.

Sean ahora ω_i, ω_{i+1} dos raíces consecutivas de g . Como se mostró $h(\omega_j) \neq 0 \forall j = 1, \dots, n$. Supongase que $h(\omega_i) > 0$, entonces para $\omega = \omega_i$ la CAF ingresa al semiplano izquierdo y para $\omega = \omega_{i+1}$ la CAF sale de este semiplano. Además éste ingreso es al semiplano superior y sale al semiplano inferior. De ahí, durante el recorrido de ω desde ω_i a ω_{i+1} la CAF por lo menos una vez, intersecta el eje de las abscisas, es decir, en el intervalo (ω_i, ω_{i+1}) existe una raíz de h . Ya que los intervalos del tipo (ω_i, ω_{i+1}) son exactamente $n - 1$, entonces se demuestra que el polinomio h tiene por lo menos $n - 1$ raíces reales distintas que alternan con las raíces de g .

Sin embargo, para n par, el grado del polinomio h no es mayor a $n - 1$, consecuentemente las raíces halladas son todas las raíces del polinomio h . Con esto se demuestra que las raíces de g y h se alternan.

Para concluir, observemos que se tienen valores del parámetro ω para los cuales la función fase $\varphi(\omega)$ es creciente (por ejemplo todas las raíces de g), entonces por el teorema de Hermite-Biehler el polinomio P es estable. $\square$

Observación 2.5 Recordemos que si el polinomio P no tiene raíces imaginarias puras entonces está definida la magnitud $\Delta P = \frac{1}{\pi}(\varphi(\infty) - \varphi(-\infty))$, así que si P es estable tiene lugar

$$\Delta P = \begin{cases} -\text{Ind}_{\frac{h}{g}}, & \text{para } n \text{ par,} \\ \text{Ind}_{\frac{g}{h}}, & \text{para } n \text{ impar.} \end{cases} \quad (2.3.2)$$

La complejidad de calcular el índice de una función racional crece junto a su grado y el grado del denominador, en este sentido la complejidad del criterio de estabilidad del teorema 2.13 es n . Si deseamos disminuir la complejidad, es recomendable restringir la clase de polinomios estudiado. Veamos que sucede si consideramos polinomios con coeficientes reales. En este caso

$$g(\omega) = G(-\omega^2) \text{ y } h(\omega) = \omega H(-\omega^2),$$

donde

$$G(z) = \begin{cases} a_0 + a_2z + \dots + a_{n-2}z^{m-1} + a_nz^m & \text{si } n = 2m, \\ a_0 + a_2z + \dots + a_{n-3}z^{m-2} + a_{n-1}z^{m-1} & \text{si } n = 2m + 1, \end{cases}$$

$$H(z) = \begin{cases} a_1 + a_3z + \dots + a_{n-3}z^{m-2} + a_{n-1}z^{m-1} & \text{si } n = 2m, \\ a_1 + a_3z + \dots + a_{n-2}z^{m-1} + a_nz^m & \text{si } n = 2m + 1. \end{cases}$$

Coloquemos $h^*(\omega) = H(-\omega^2)$, es decir, $h(\omega) = \omega h^*(\omega)$. Sea en principio $n = 2m$ y sea $G(0) \neq 0$, entonces 0 no es polo de $\frac{h}{g}$, y consecuentemente

$$\text{Ind} \frac{h}{g} = \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{h}{g} + \text{Ind}_0^\infty \frac{h}{g} = \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{h^*}{g} + \text{Ind}_0^\infty \frac{h^*}{g}.$$

Por otro lado, de acuerdo a la propiedad 5, ec.(2.2.4)

$$\text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{h^*}{g} = \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{H}{G}, \quad \text{Ind}_0^\infty \frac{h^*}{g} = -\text{Ind}_\infty^0 \frac{H}{G}.$$

De ahí

$$\text{Ind} \frac{h}{g} = -2 \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{H}{G}.$$

Con esto queda demostrado que para $a_0 \neq 0$ y $n = 2m$,

$$\text{Ind} \frac{h}{g} = -n \Leftrightarrow \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{H}{G} = m. \quad (2.3.3)$$

Ahora, sea $n = 2m + 1$, $G(0) = a_0 \neq 0$ y $H(0) = a_1 \neq 0$, entonces $\omega = 0$ es polo de la función $\frac{g}{h}$ de orden 1, y consecuentemente tiene lugar

$$\begin{aligned} \text{Ind} \frac{g}{h} &= \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{g}{h} + \text{Ind}_0^\infty \frac{g}{h} + 1 \\ &= \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{g}{h^*} + \text{Ind}_0^\infty \frac{g}{h^*} + 1 \\ &= -2 \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{G}{H} + 1. \end{aligned}$$

Con esto se demuestra que para $a_0 a_1 > 0$ y $n = 2m + 1$

$$\text{Ind} \frac{g}{h} = n \Leftrightarrow \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{G}{H} = -m. \quad (2.3.4)$$

De acuerdo al teorema de Stodoli (proposición 2.1), pueden ser estables solamente polinomios con coeficientes positivos. De ahí, es suficiente considerar tales polinomios. Pero si el polinomio tiene coeficientes positivos, entonces G y H también serán polinomios con coeficientes positivos. Por último, para n par, la observación 2.3 y la ecuación (2.3.3) nos dicen que las raíces de G y H se alternan y que además las raíces de G generan solo polos del tipo I. Ya que el grado del polinomio G es m , la ecuación (2.3.3) se cumple si y sólo si las raíces de G son simples, generan solo polos

del tipo I y además pertenecen todas al intervalo $(-\infty, 0)$, de manera analoga se puede ver que para n impar todas las raíces del polinomio H pertenecen al intervalo $(-\infty, 0)$, es decir, las funciones $\frac{G}{H}$ y $\frac{H}{G}$ solo tendrán polos en el intervalo $(-\infty, 0)$, en otras palabras

$$\begin{aligned}\text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{H}{G} &= \text{Ind} \frac{H}{G}, \\ \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{G}{H} &= \text{Ind} \frac{G}{H}.\end{aligned}$$

Esto será de gran importancia, ya que nos permite reformular las condiciones del teorema de Hermite-Biehler para polinomios con coeficientes reales.

Observación 2.6 *Notemos que el hecho de que $G(z)$ y $H(z)$ tengan todas sus raíces en el intervalo $(-\infty, 0)$ implica necesariamente que todas las raíces de los polinomios $G(-\omega^2)$ y $H(-\omega^2)$ son simétricas respecto al origen (si z^* es raíz de $G(z)$, entonces $\pm\sqrt{-z^*}$ son raíces de $G(-\omega^2)$).*

Por lo que se justifica la siguiente definición:

Definición 2.5 *Diremos que dos polinomios $g(\omega)$ y $h(\omega)$ de grado n (o el primero de grado n y el segundo de grado $n-1$) forman un **par positivo** si sus raíces $u_1, \dots, u_n$ y $v_1, \dots, v_n$ (ó $v_1, \dots, v_{n-1}$) son todas simples, reales, negativas y se alternan como sigue*

$$\begin{aligned}v_1 &< u_1 < v_2 < \dots < v_n < u_n < 0, \\ (u_1 &< v_1 < \dots < v_{n-1} < u_n < 0),\end{aligned}$$

y sus coeficientes principales son del mismo signo.

Teorema 2.14 *(Hermite-Biehler polinomios con coeficientes reales) El polinomio $P(z) = G(z^2) + zH(z^2)$ con coeficientes reales es Hurwitz si y sólo si G y H forman un par positivo.*

Corolario 2.15 *Si el polinomio $P(z) = G(z^2) + zH(z^2)$ es un polinomio Hurwitz, entonces $G(z)$ y $H(z)$ son polinomios Hurwitz.*

Para terminar esta sección notemos que el análisis anterior nos permite enunciar el siguiente teorema

Teorema 2.16 *El polinomio $P(z) = G(z^2) + zH(z^2)$ de grado n con coeficientes reales positivos es estable si y sólo si*

$$\begin{aligned}\text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{H}{G} &= m, & n &= 2m, \\ \text{Ind}_{-\infty}^0 \frac{G}{H} &= -m, & n &= 2m + 1.\end{aligned}$$

La complejidad de este teorema es dos veces menor a la del teorema 2.13.

Capítulo 3

Polinomios intervalo

En este capítulo nos preguntamos: Dado un polinomio intervalo, ¿qué condiciones nos garantizan su estabilidad?. El teorema de Kharitonov nos provee de condiciones suficientes y necesarias para ello, basta mirar cuatro polinomios (las “esquinas”) de la familia, es decir, damos solución al problema de estabilidad robusta. Todos los resultados de este capítulo han sido tomados de «Robust Control: The parametric approach» S.P Bhachataryya, H. Chapellat, L.H. Keel [3].

3.1. El teorema de Kharitonov

En el primer capítulo observamos que dado un polinomio $P(z)$ podíamos expresarlo de la forma $P(z) = G(z^2) + zH(z^2)$. Ahora definimos los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} P^{par}(z) &= a_0 + a_2 z^2 + \cdots = G(z^2), \\ P^{imp}(z) &= a_1 z + a_3 z^3 + \cdots = zH(z^2), \\ P^e(\omega) &= a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \cdots = G(-\omega^2) = P^{par}(i\omega), \\ P^o(\omega) &= a_1 - a_3 \omega^2 + a_5 \omega^4 - \cdots = H(-\omega^2) = \frac{P^{imp}(i\omega)}{i\omega}. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Consideremos el conjunto $\mathcal{I}(z)$ de polinomios reales de grado n de la forma

$$p(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n, \tag{3.1.2}$$

donde los coeficientes c_k se encuentran en los intervalos

$$c_0 \in [a_0, b_0], \quad c_1 \in [a_1, b_1], \quad \cdots, \quad c_n \in [a_n, b_n]. \tag{3.1.3}$$

Escribimos (3.1.2) y (3.1.3) de la siguiente manera:

$$\mathcal{I}(z) = [a_0, b_0] + [a_1, b_1]z + \cdots + [a_n, b_n]z^n.$$

Supongamos además que el grado de la familia permanece invariante, así que $0 \notin [a_n, b_n]$. Tal conjunto de polinomios es llamado una familia intervalo real y nosotros nos referiremos a $\mathcal{I}(z)$ como un **polinomio intervalo**. Diremos que el polinomio intervalo es estable si y sólo si, todos y cada uno de los elementos del conjunto $\mathcal{I}(z)$ son estables.

Observación 3.1 *Notemos que el hecho de que las raíces de $G(-\omega^2)$ y $H(-\omega^2)$ son simétricas con respecto al origen (observación 2.6), nos permite considerar tan solo las raíces positivas (ó negativas) de estos polinomios para garantizar que cumplen la propiedad de la alternancia, es decir, nos podemos limitar a observar tan solo las raíces positivas (ó negativas) de los polinomios $P^e(\omega)$ y $P^o(\omega)$.*

Lema 3.1 *Sean $P_1(z)$ y $P_2(z)$ dos polinomios reales Hurwitz del mismo grado tales que*

$$\begin{aligned} P_1(z) &= P^{par}(z) + P_1^{imp}(z), \\ P_2(z) &= P^{par}(z) + P_2^{imp}(z), \end{aligned}$$

con la misma parte par y con partes impares distintas. Si

$$P_1^o(\omega) \leq P_2^o(\omega), \quad \forall \omega \in [0, \infty).$$

Entonces el polinomio

$$P(z) = P^{par}(z) + P^{imp}(z)$$

es Hurwitz para todo polinomio $P(z)$ cuyo $P^o(\omega)$ satisface

$$P_1^o(\omega) \leq P^o(\omega) \leq P_2^o(\omega), \quad \forall \omega \in [0, \infty).$$

Demostración

Ya que $P_1(z)$ y $P_2(z)$ son Hurwitz, por el teorema 2.7 satisfacen la propiedad de la alternancia, es decir, sin pérdida de generalidad:

$$\begin{aligned} \omega_{e,1}^1 &< \omega_{o,1}^1 < \omega_{e,2}^1 < \cdots < \omega_{e,n}^1 \\ \omega_{e,1}^2 &< \omega_{o,1}^2 < \omega_{e,2}^2 < \cdots < \omega_{e,n}^2 \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

donde $\omega_{e,i}^1$ es la raíz i -ésima del polinomio $P_1^e(\omega)$ y $\omega_{o,i}^1$ es la raíz i -ésima del polinomio $P_1^o(\omega)$ (analogamente para $\omega_{e,i}^2$ y $\omega_{o,i}^2$). Ahora, ya que P_1 y P_2 tienen la misma parte par, entonces

$$P^e(\omega) = P_1^e(\omega) = P_2^e(\omega) \Rightarrow \omega_{e,i}^1 = \omega_{e,i}^2;$$

denotemos a $\omega_{e,i}^1$ por $\omega_{e,i}$. Por hipótesis, para toda i

$$\begin{aligned} 0 &= P_1^o(\omega_{o,i}^1) \leq P^o(\omega_{o,i}^1), \\ P^o(\omega_{o,i}^2) &\leq P_2^o(\omega_{o,i}^2) = 0. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

y además se cumple uno de los siguientes casos

$$\begin{aligned} \omega_{e,i} < \omega_{o,i}^1 \leq \omega_{o,i}^2 < \omega_{e,i+1}. \\ (\omega_{e,i} < \omega_{o,i}^2 \leq \omega_{o,i}^1 < \omega_{e,i+1}). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Si $\omega_{o,i}^1 \leq \omega_{o,i}^2$, por el teorema del valor intermedio $\exists \omega_{o,i} \in [\omega_{o,i}^1, \omega_{o,i}^2]$ tal que $P^o(\omega_{o,i}) = 0$, es decir $\omega_{o,i}$ es raíz del polinomio $P^o(\omega)$. Para toda i tenemos

$$\begin{aligned} \omega_{e,i} < \omega_{o,i}^1 \leq \omega_{o,i} \leq \omega_{o,i}^2 < \omega_{e,i+1}. \\ (\omega_{e,i} < \omega_{o,i}^2 \leq \omega_{o,i} \leq \omega_{o,i}^1 < \omega_{e,i+1}). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Lo que muestra que las raíces de $P^o(\omega)$ y $P^e(\omega)$ se alternan, por lo tanto $P(z)$ cumple la propiedad de la alternancia, es decir $P(z)$ es Hurwitz. $\square$

Ejemplo 3.1 Sean

$$P_1(z) = 2z^3 + 6z^2 + 4z + 6,$$

$$P_2(z) = z^3 + 6z^2 + 11z + 6.$$

Entonces

$$P^{par}(z) = 6z^2 + 6,$$

$$P_1^{imp}(z) = 2z^3 + 4, \quad P_2^{imp}(z) = z^3 + 11z.$$

Además a los polinomios $P_1(z)$ y $P_2(z)$ les corresponden $g(\omega) = -6\omega^2 + 6$ (es el mismo para ambos polinomios) con $h_1(\omega) = -2\omega^3 + 4\omega$ y $h_2(\omega) = -\omega^3 + 11\omega$ respectivamente. Las gráficas 2.5, 2.6, muestran que ambos polinomios satisfacen la propiedad de la alternancia y por lo tanto son Hurwitz.

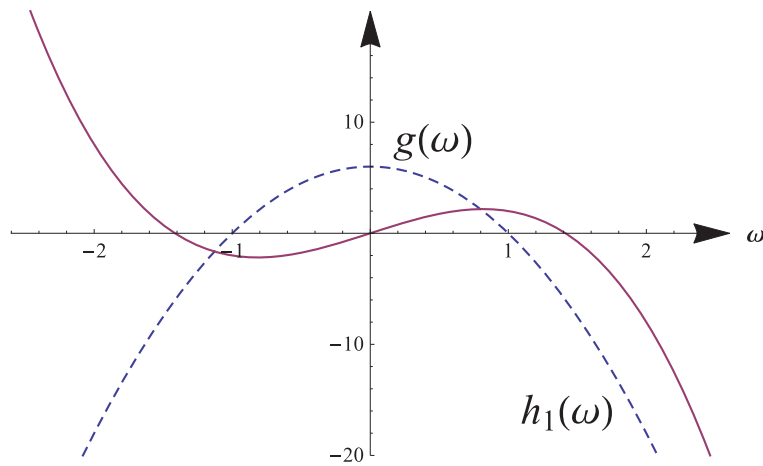


Figura 3.1: Alternancia de $g(\omega)$ y $h_1(\omega)$ (Ejemplo 2.3).

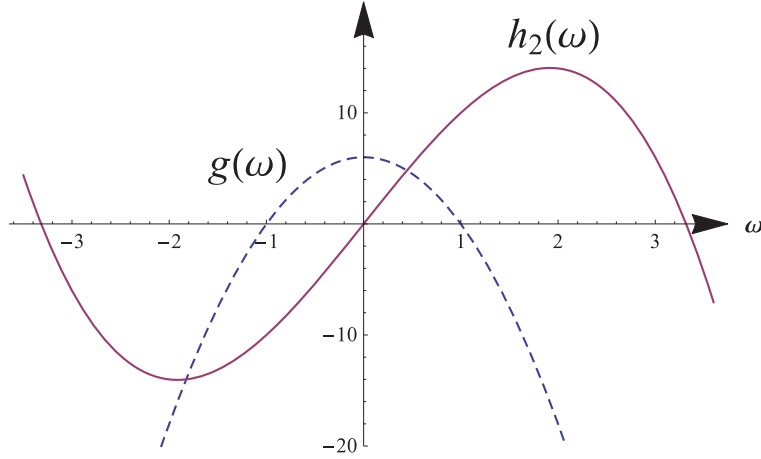


Figura 3.2: Alternancia de $g(\omega)$ y $h_2(\omega)$ (Ejemplo 2.3).

Por otro lado, $P_1^o(\omega) = -2\omega^2 + 4$ y $P_2^o(\omega) = -\omega^2 + 11$ por lo que $P_1^o(\omega) < P_2^o(\omega)$ para todo $\omega \in [0, \infty)$, gráficamente

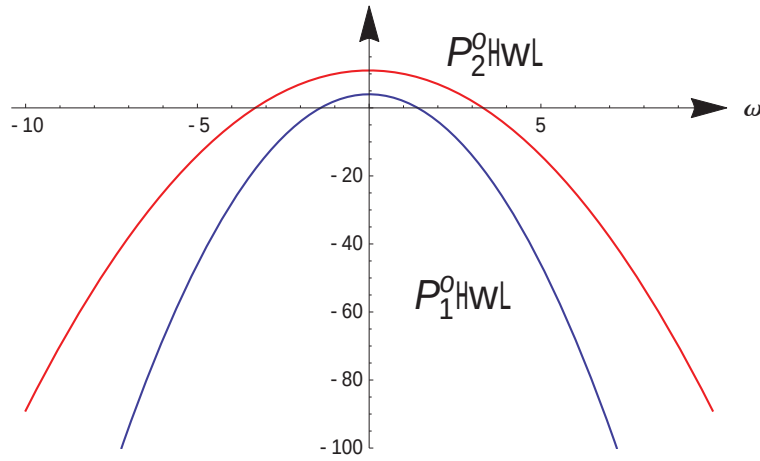


Figura 3.3: $P_1^o(\omega) < P_2^o(\omega)$ (Ejemplo 2.3).

Entonces tomando $P(z) = \frac{3}{2}z^3 + 6z^2 + 6z + 6$ que cumple $P^o(\omega) = -\frac{3}{2}\omega^2 + 6$, por el lema anterior, podemos concluir que $P(z)$ es Hurwitz.

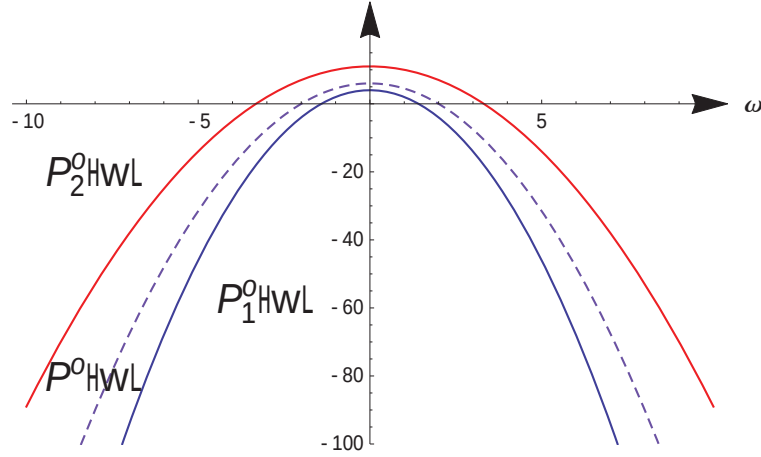


Figura 3.4: $P_1^o(\omega) < P^o(\omega) < P_2^o(\omega)$ (Ejemplo 2.3).

El dual del lema anterior es el siguiente:

Lema 3.2 Sean $P_1(z)$ y $P_2(z)$ dos polinomios reales Hurwitz del mismo grado tales que

$$P_1(z) = P_1^{par}(z) + P^{imp}(z),$$

$$P_2(z) = P_2^{par}(z) + P^{imp}(z),$$

con la misma parte impar y con partes pares distintas. Si

$$P_1^e(\omega) \leq P_2^e(\omega), \quad \forall \omega \in [0, \infty).$$

Entonces el polinomio

$$P(z) = P^{par}(z) + P^{imp}(z)$$

es Hurwitz para todo polinomio $P(z)$ cuyo $P^e(\omega)$ satisface

$$P_1^e(\omega) \leq P^e(\omega) \leq P_2^e(\omega), \quad \forall \omega \in [0, \infty).$$

□

El teorema de Kharitonov provee de una simple condición necesaria y suficiente para la estabilidad de una familia completa de polinomios.

Teorema 3.3 (Kharitonov) La familia de polinomios de grado invariante

$$\mathcal{P}(z) = [a_0, b_0] + [a_1, b_1]z + \cdots + [a_n, b_n]z^n$$

consiste de polinomios de Hurwitz si y sólo si los siguientes cuatro polinomios son Hurwitz

$$\begin{aligned} K^1(z) &= a_0 + a_1z + b_2z^2 + b_3z^3 + a_4z^4 + a_5z^5 + b_6z^6 + \cdots \\ K^2(z) &= a_0 + b_1z + b_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + b_5z^5 + b_6z^6 + \cdots \\ K^3(z) &= b_0 + a_1z + a_2z^2 + b_3z^3 + b_4z^4 + a_5z^5 + a_6z^6 + \cdots \\ K^4(z) &= b_0 + b_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + b_4z^4 + b_5z^5 + a_6z^6 + \cdots \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Demostración

$\Rightarrow$] Es trivial

[$\Leftarrow$ Supongamos que los K^i $i = 1, \dots, 4$ son Hurwitz. Definamos

$$\begin{aligned} K_{max}^{par}(z) &:= b_0 + a_2 z^2 + b_4 z^4 + a_6 z^6 + b_8 z^8 + \dots \\ K_{min}^{par}(z) &:= a_0 + b_2 z^2 + a_4 z^4 + b_6 z^6 + a_8 z^8 + \dots \\ K_{max}^{imp}(z) &:= b_1 z + a_3 z^3 + b_5 z^5 + a_7 z^7 + b_9 z^9 + \dots \\ K_{min}^{imp}(z) &:= a_1 z + b_3 z^3 + a_5 z^5 + b_7 z^7 + a_9 z^9 + \dots \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

De esta forma los polinomios de Kharitonov pueden ser escritos como

$$\begin{aligned} K^1(z) &= K_{min}^{par}(z) + K_{min}^{imp}(z), \\ K^2(z) &= K_{min}^{par}(z) + K_{max}^{imp}(z), \\ K^3(z) &= K_{max}^{par}(z) + K_{min}^{imp}(z), \\ K^4(z) &= K_{max}^{par}(z) + K_{max}^{imp}(z). \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

La motivación para escribir de esta manera a los polinomios de Kharitonov es la siguiente. Sea $P(z)$ un polinomio arbitrario perteneciente a la familia $\mathcal{P}(z)$, entonces $P(z) = \delta_0 + \delta_1 z + \dots + \delta_n z^n$ con $\delta_i \in [a_i, b_i]$. Así

$$\begin{aligned} K_{max}^e(\omega) &= b_0 - a_2 \omega^2 + b_4 \omega^4 - a_6 \omega^6 + \dots \\ P^e(\omega) &= \delta_0 - \delta_2 \omega^2 + \delta_4 \omega^4 - \delta_6 \omega^6 + \dots \\ K_{min}^e(\omega) &= a_0 - b_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - b_6 \omega^6 + \dots \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

y tomando la diferencia

$$K_{max}^e(\omega) - P^e(\omega) = (b_0 - \delta_0) + (\delta_2 - a_2)\omega^2 + (b_4 - \delta_4)\omega^4 + (\delta_6 - a_6)\omega^6 + \dots$$

$$P^e(\omega) - K_{min}^e(\omega) = (\delta_0 - a_0) + (b_2 - \delta_2)\omega^2 + (\delta_4 - a_4)\omega^4 + (b_6 - \delta_6)\omega^6 + \dots$$

Ya que $a_i \leq \delta_i \leq b_i$ para toda i tenemos

$$K_{min}^e(\omega) \leq P^e(\omega) \leq K_{max}^e(\omega) \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (3.1.12)$$

Similarmente, para $P^o(\omega)$ se puede verificar

$$K_{min}^o(\omega) \leq P^o(\omega) \leq K_{max}^o(\omega), \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (3.1.13)$$

Ahora, sean $P^{par}(z)$ y $P^{imp}(z)$ de $P(z)$, aplicando el lema anterior a los polinomios Hurwitz

$$\begin{aligned} P_1(z) &= K^3(z) = K_{max}^{par}(z) + K_{min}^{imp}(z), \\ P_2(z) &= K^4(z) = K_{max}^{par}(z) + K_{max}^{imp}(z), \end{aligned}$$

tenemos que el polinomio

$$K_{max}^{par}(z) + P^{imp}(z)$$

es Hurwitz. Análogamente con K^1 y K^2 concluimos que el polinomio

$$K_{min}^{par}(z) + P^{imp}(z)$$

es Hurwitz. Por lo tanto, tenemos dos polinomios estables con la misma parte impar, aplicando el dual del lema anterior y argumentando como antes obtenemos

$$P^{par}(z) + P^{imp}(z) = P(z)$$

es Hurwitz, lo que completa la demostración ya que $P(z)$ era arbitrario. $\square$

3.2. Alternancia y conjunto imagen

En esta sección interpretaremos el teorema de Kharitonov en términos de la propiedad de la alternancia (teorema de Hermite-Biehler) observando la imagen del conjunto de polinomios $\mathcal{I}(z)$ sobre el plano complejo al ser evaluado en $z = i\omega$ para cada $\omega \in [0, \infty)$. En el capítulo 2 observamos que la estabilidad de un polinomio $p(z) = p^{par}(z) + p^{imp}(z)$ con coeficientes reales, es equivalente a que los polinomios $p^e(\omega) = G(-\omega^2)$ y $p^o(\omega) = H(-\omega^2)$ satisfagan la propiedad de la alternancia. Considerando la estabilidad del polinomio intervalo $\mathcal{I}(z)$ vemos que la familia es estable si y sólo si todos sus elementos satisfacen la propiedad de la alternancia. En vista del teorema de Kharitonov, debe por lo tanto ser cierto que la verificación de la propiedad de la alternancia de los cuatro polinomios de Kharitonov garantiza la propiedad de la alternancia para cada miembro de la familia (nótese que esto se demuestra en las ecuaciones (3.1.12) y (3.1.13)). Este punto de vista se expresa en la siguiente version del teorema de Kharitonov.

Sean $\omega_{e_i}^{max}(\omega_{e_i}^{min})$ denotando las raíces positivas de $K_{max}^e(\omega)(K_{min}^e(\omega))$ y sean $\omega_{o_i}^{max}(\omega_{o_i}^{min})$ denotando las raíces positivas de $K_{max}^o(\omega)(K_{min}^o(\omega))$.

Teorema 3.4 *La familia $\mathcal{I}(z)$ contiene sólo polinomios estables si y sólo si*

1. *Los polinomios $K_{max}^e(\omega)$, $K_{min}^e(\omega)$, $K_{max}^o(\omega)$, $K_{min}^o(\omega)$ tienen sólo raíces reales, simples y el conjunto de las raíces positivas se interlaza como sigue:*

$$0 < \omega_{e_1}^{min} < \omega_{e_1}^{max} < \omega_{o_1}^{min} < \omega_{o_1}^{max} < \omega_{e_2}^{min} < \omega_{e_2}^{max} < \dots,$$

2. *$K_{max}^e(0)$, $K_{min}^e(0)$, $K_{max}^o(0)$, $K_{min}^o(0)$ no son cero y tienen el mismo signo.*

Este teorema se ilustra en la siguiente imagen que muestra que la alternancia de los “tubos” par e impar implica la alternancia de la parte par e impar de cada polinomio en la familia intervalo.

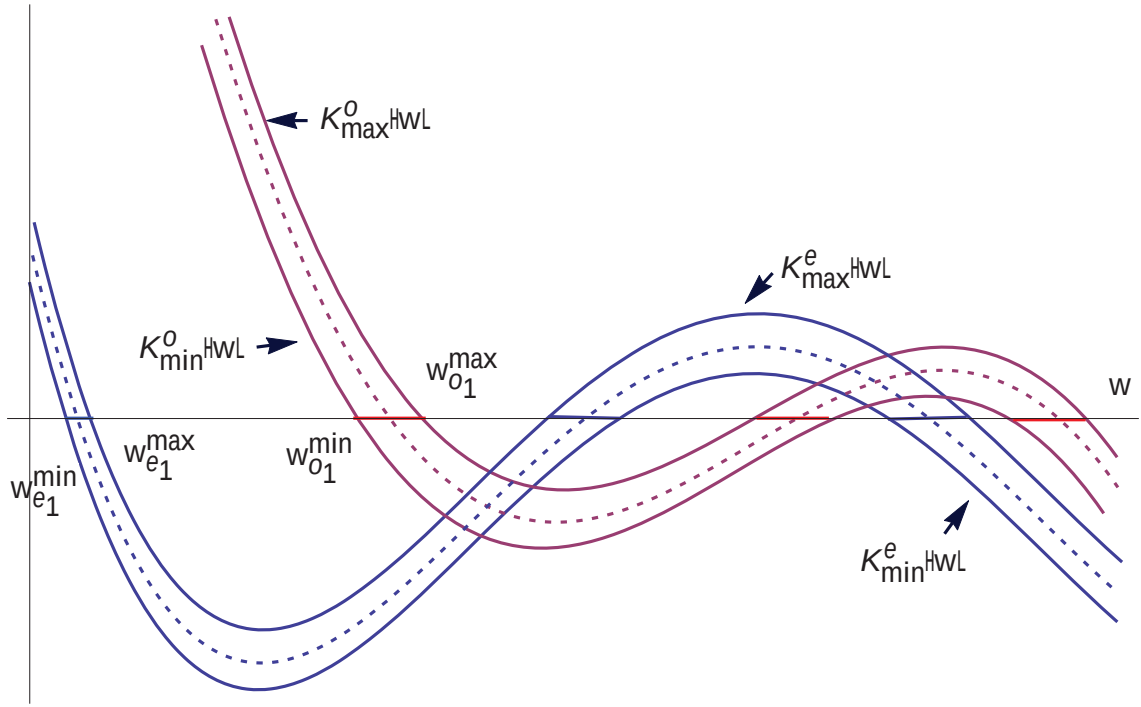


Figura 3.5: “Tubos” par e impar.

Ejemplo 3.2 Considere el polinomio intervalo

$$P(z) = z^7 + c_6 z^6 + c_5 z^5 + c_4 z^4 + c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0,$$

donde

$$c_6 \in [9, 9,5], \quad c_5 \in [31, 31,5], \quad c_4 \in [71, 71,5], \quad c_3 \in [111, 111,5],$$

$$c_2 \in [109, 109,5], \quad c_1 \in [76, 76,5], \quad c_0 \in [12, 12,5].$$

Entonces

$$K_{max}^e(\omega) = -9\omega^6 + 71,5\omega^4 - 109\omega^2 + 12,5,$$

$$K_{min}^e(\omega) = -9,5\omega^6 + 71\omega^4 - 109,5\omega^2 + 12,$$

$$K_{max}^o(\omega) = -\omega^6 + 31,5\omega^4 - 111\omega^2 + 76,5,$$

$$K_{min}^o(\omega) = -\omega^6 + 31\omega^4 - 111,5\omega^2 + 76.$$

Podemos verificar la propiedad de la alternancia de estos polinomios (ver figura 3.6)

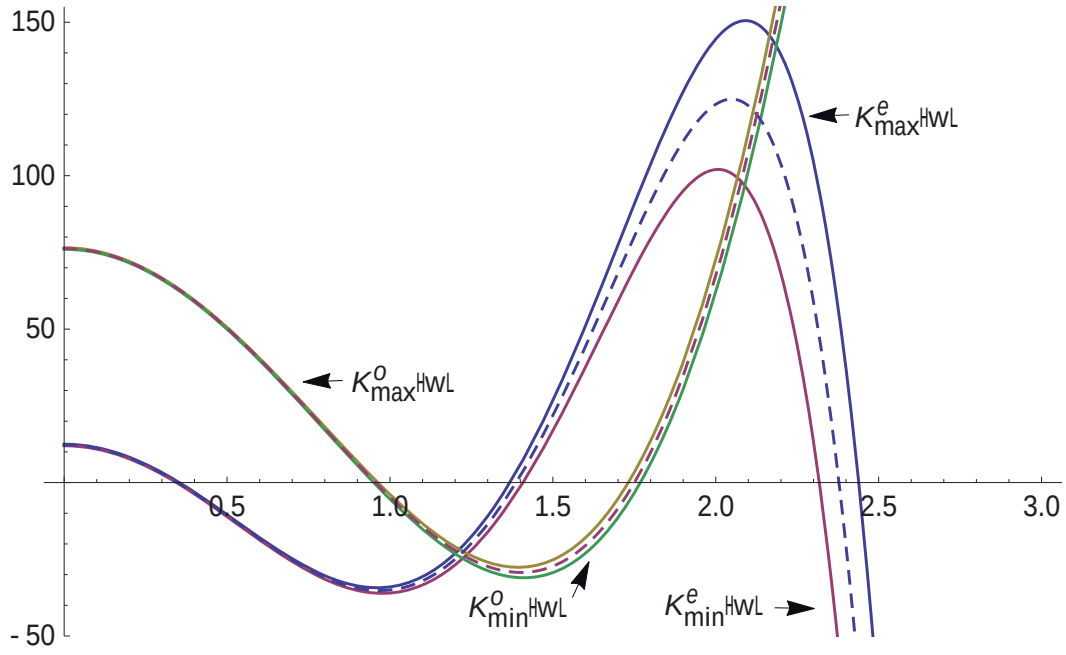


Figura 3.6: Ejemplo 3.2.

La figura 3.6 muestra como los polinomios cuya parte par está acotada por K_{max}^e y K_{min}^e , que además satisfacen que su parte impar está acotada por K_{max}^o y K_{min}^o en el eje imaginario, satisfacen la propiedad de la alternancia cuando los polinomios de Kharitonov son estables. Esto nos muestra que los polinomios intervalo estables satisfacen la propiedad de la alternancia de sus “tubos” par e impar.

Interpretación del conjunto Imagen

Es instructivo interpretar el teorema de Kharitonov en terminos de la evolución de la imagen del conjunto $\mathcal{I}(z)$ en el plano complejo evaluado a lo largo del eje imaginario, al cual llamaremos **rectángulos de Kharitonov** asociados a $\mathcal{I}(z)$. Sea $\mathcal{I}(i\omega)$ el conjunto de números complejos $p(i\omega)$ obtenido al evaluar los polinomios pertenecientes a la familia $\mathcal{I}(z)$ en $i\omega$. Se sigue de las relaciones en (3.1.12) y (3.1.13) que $\mathcal{I}(i\omega)$ es un rectángulo en el plano complejo con esquinas $K_1(i\omega), K_2(i\omega), K_3(i\omega), K_4(i\omega)$. Se muestra en la figura 3.7 que mientras ω corre desde 0 a $+\infty$ el rectángulo $\mathcal{I}(i\omega)$ varia en tamaño y locación pero siempre sus lados se mantienen paralelos al eje real y al eje imaginario del plano complejo (ver la ecuación (3.1.10)). Ilustraremos esto usando un ejemplo numérico.

Ejemplo 3.3 Considere el polinomio intervalo del ejemplo 3.2. El conjunto imagen de esta familia es calculado para varias frecuencias. De estas frecuencias dependen los rectángulos que se muestran en la figura 3.7

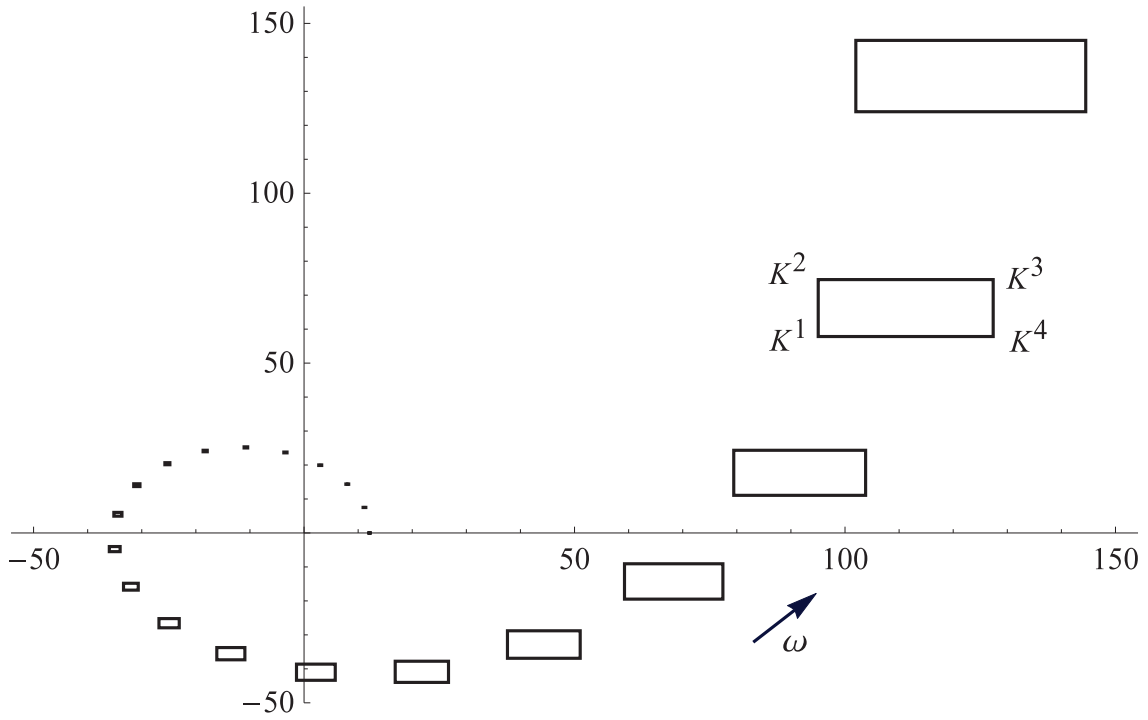


Figura 3.7: Conjunto imagen del polinomio intervalo (rectángulos de Kharitonov).

Ahora presentaremos una prueba alternativa al teorema de Kharitonov basada en el análisis del conjunto imagen.

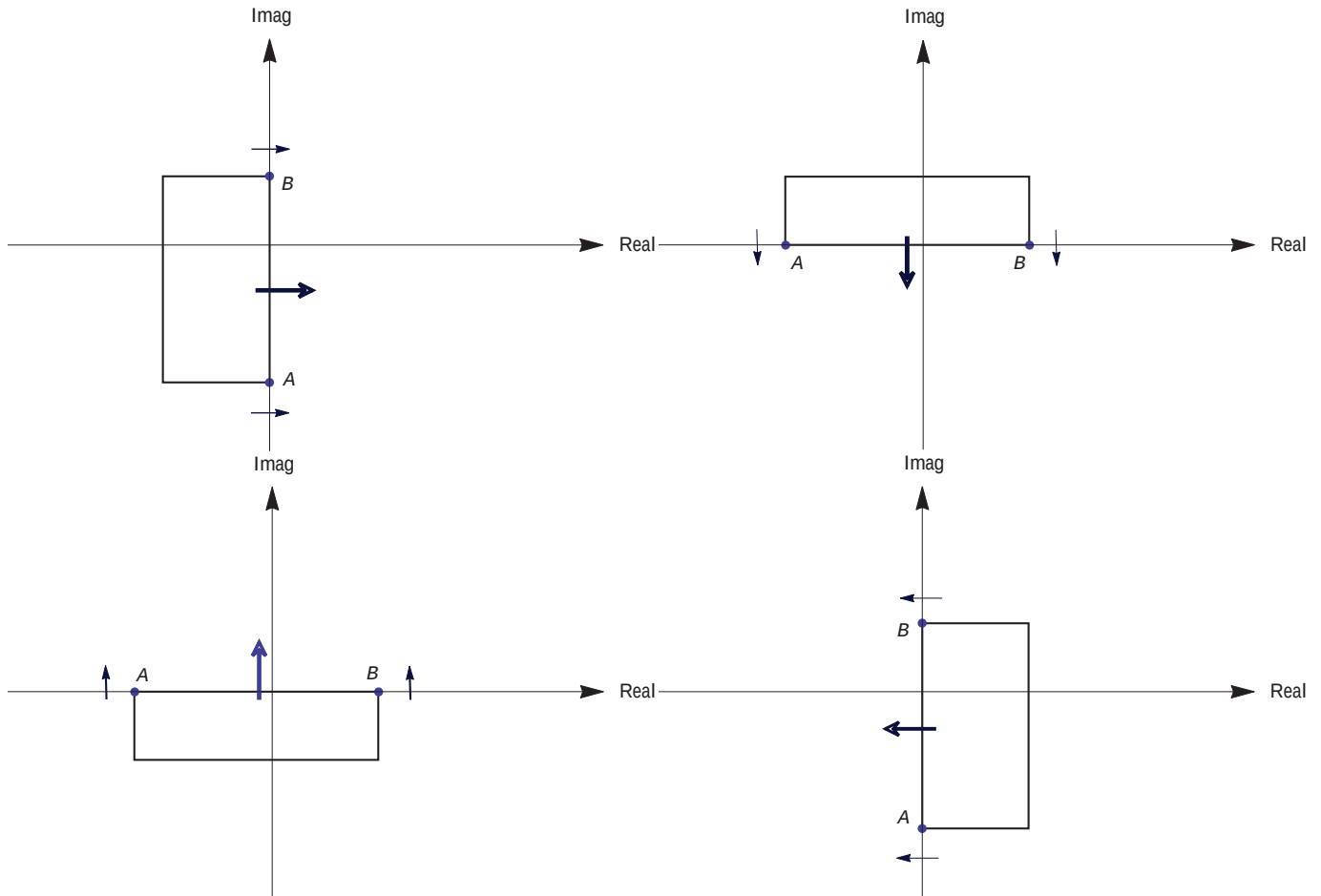
Teorema 3.5 *Supongamos que la familia $\mathcal{I}(z)$ es de grado invariante n y que contiene al menos un polinomio estable. Entonces la estabilidad de la familia $\mathcal{I}(z)$ se satisface si y sólo si los rectángulos de Kharitonov no “pasan” a través del origen.*

Es decir, el origen no pertenece al conjunto imagen de $\mathcal{I}(z)$ evaluado en el eje imaginario.

Demostración

La estabilidad de la familia $\mathcal{I}(z)$ puede ser comprobada verificando que no existan polinomios en la familia que tengan raíces imaginarias puras. Esto se sigue inmediatamente del teorema de intersección de la frontera del capítulo 1. Ciertamente, si un elemento de $\mathcal{I}(z)$ tiene una raíz inestable, entonces debe existir un ω^* y un polinomio con una raíz en $i\omega^*$. El caso $\omega^* = 0$ queda excluido ya que contradice el requerimiento de que $K_{max}^e(0)$ y $K_{min}^e(0)$ tengan el mismo signo. Por lo tanto, solamente es necesario comprobar que el rectángulo $\mathcal{I}(i\omega^*)$ excluye el origen del plano complejo para todo $\omega^* > 0$. Supongamos que los polinomios de Kharitonov son estables. Supongamos además que las esquinas $K^1(i\omega)$, $K^2(i\omega)$, $K^3(i\omega)$, $K^4(i\omega)$, comienzan en el eje real positivo, por la propiedad de la fase monótona creciente de los polinomios Hurwitz se sigue que las esquinas giran estrictamente en sentido contrario a las manecillas del reloj al rededor del origen y no pasan por él cuando

ω va de 0 a $+\infty$. Ahora supongamos para llegar a una contradicción que $0 \in I(i\omega^*)$ para algún $\omega^* > 0$. Dado que $I(i\omega^*)$ cambia continuamente con respecto de ω y el origen se encuentra fuera de $I(0)$ se sigue que existe un $\omega_0 \leq \omega^*$ para el que el origen comienza a entrar al conjunto $I(i\omega_0)$. Consideremos ahora la situación límite en la que el origen se encuentra en la frontera de $I(i\omega_0)$ y esta a punto de entrar a este conjunto en cuanto ω se incremente (esto es representado en la figura de abajo). El origen debe encontrarse en uno de los cuatro lados del rectángulo, digamos en AB. Se puede verificar con facilidad que en cada uno de los casos, la entrada del origen implica que la función fase de una de las esquinas correspondiente a A o B decrece cuando ω se incrementa a partir de ω_0 . Dado que las esquinas corresponden a los polinomios de Kharitonov que supusimos estables, tenemos una contradicción con la propiedad de la fase monótona creciente para polinomios Hurwitz. $\square$



Capítulo 4

El teorema de Kharitonov mediante polinomios ortogonales

En este capítulo estudiamos la relación que existe entre los polinomios ortogonales, el problema de momentos y los polinomios Hurwitz. Reformulamos el teorema de Kharitonov en vista a dicha relación. Lo presentado en este capítulo fue tomado de «An Introduction to Orthogonal Polynomials» T.S. Chihara [5], «El problema de los momentos: Notas introductorias» E. Torrano [13], «On matrix Hurwitz type polynomials and their interrelations to Stieltjes positive definite sequences...» A.E. Choque [6] y «On Dyukarev's resolvent matrix for a truncated Stieltjes matrix moment problem...» A.E. Choque [7].

4.1. Teoría elemental de los polinomios ortogonales

Consideremos una función w no negativa e integrable en un intervalo (a, b) . Asumamos que $w(x) > 0$ en un subconjunto de (a, b) lo suficientemente grande, de modo que

$$\int_a^b w(x)dx > 0$$

(es decir, $w(x) > 0$ en un subconjunto de medida positiva según Lebesgue). En el caso en el que (a, b) es no acotado, también tendremos que imponer el requerimiento adicional de que los momentos

$$\mu_n = \int_a^b x^n w(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1.1)$$

sean todos finitos. Ahora, si hay una sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $P_n(x)$ de grado n , tal que

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)w(x)dx = 0 \quad \text{para } m \neq n, \quad (4.1.2)$$

entonces $\{P_n(x)\}$ es llamada una sucesión de polinomios ortogonal con respecto a la función de peso $w(x)$ en (a, b) .

Si escribimos, para cualquier función integrable f ,

$$\mathcal{L}[f] = \int_a^b f(x)w(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1.3)$$

entonces (4.1.1) y (4.1.2) pueden ser escritos como

$$\mathcal{L}[x^n] = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1.4)$$

$$\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0, \quad m \neq n; \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1.5)$$

Notemos que $\mathcal{L}$ es lineal, es decir

$$\mathcal{L}[af(x) + bg(x)] = a\mathcal{L}[f(x)] + b\mathcal{L}[g(x)] \quad (4.1.6)$$

para constantes arbitrarias a y b y funciones integrables f y g . Sin usar (4.1.3), podemos observar que (4.1.4) y (4.1.6) por si solos son suficientes para definir $\mathcal{L}[P(x)]$ para cualquier polinomio $P(x)$. En efecto

$$\mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^n c_k x^k\right] = \sum_{k=0}^n c_k \mu_k.$$

Así, la última observación sugiere una generalización más. En lugar de (4.1.3) considere una sucesión arbitraria de numeros reales o complejos $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$. Usamos (4.1.4) y (4.1.6) para definir un funcional lineal $\mathcal{L}$ en el espacio vectorial de todos los polinomios de una variable real.

Si hay una sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}$ satisfaciendo (4.1.5) y la condición adicional

$$\mathcal{L}[P_n^2(x)] \neq 0$$

(que es automaticamente satisfecha si $\mathcal{L}$ es definida por (4.1.3)), la llamaremos una sucesión de polinomios ortogonal con respecto a $\mathcal{L}$. No toda “sucesión de momentos” $\{\mu_n\}$ dará lugar a una sucesión de polinomios ortogonales.

Definición 4.1 [5, Definición 2.1] Sea $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos y sea $\mathcal{L}$ una función de valores complejos definida en el espacio vectorial de todos los polinomios dada por

$$\mathcal{L}[x^n] = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{L}[\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x)] = \alpha_1 \mathcal{L}[p_1(x)] + \alpha_2 \mathcal{L}[p_2(x)]$$

para todo número complejo α_i y todos los polinomios $p_i(x)$, $i = 1, 2$. Entonces $\mathcal{L}$ es llamado el funcional de momentos determinado por la sucesión de momentos $\{\mu_n\}$. El número μ_n es llamado el momento de orden n .

Definición 4.2 [5, Definición 2.2] Una sucesión $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es llamada sucesión polinomial ortogonal con respecto al funcional de momentos $\mathcal{L}$, si para todos los enteros no negativos m y n tenemos

1. $P_n(x)$ es un polinomio de grado n ,
2. $\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0$ para $m \neq n$,
3. $\mathcal{L}[P_n^2(x)] \neq 0$.

“Sucesión polinomial ortogonal” puede ser abreviado como “SPO” y lo usaremos para decir $P_n(x)$ es una SPO para $\mathcal{L}$.

Teorema 4.1 [5, Teorema 2.1] Sea $\mathcal{L}$ un funcional de momentos y sea $\{P_n(x)\}$ una sucesión de polinomios. Entonces los siguientes resultados son equivalentes:

- (a) $\{P_n(x)\}$ es una SPO con respecto a $\mathcal{L}$,
- (b) $\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] = 0$ para todo polinomio $\pi(x)$ de grado $m < n$, mientras que $\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] \neq 0$ si $m = n$,
- (c) $\mathcal{L}[x^m P_n(x)] = K_n \delta_{nm}$ donde $K_n \neq 0$, $m = 0, 1, \dots, n$.

Demostración

Sea $\{P_n(x)\}$ una SPO para $\mathcal{L}$. Dado que cada $P_k(x)$ es de grado k , es claro que $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)\}$ es una base para el subespacio vectorial de polinomios de grado a lo más m . Así, si $\pi(x)$ es un polinomio de grado m , existen constantes c_k tal que

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^m c_k P_k(x), \quad c_m \neq 0.$$

Por la linealidad de $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] = \sum_{k=0}^m c_k \mathcal{L}[P_k(x)P_n(x)] = 0 \quad \text{si } m < n,$$

$$\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] = c_n \mathcal{L}[P_n^2(x)] \quad \text{si } m = n.$$

Así (a) $\Rightarrow$ (b). Trivialmente (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) lo que completa la prueba. $\square$

Definición 4.3 [5, Definición 3.1] *El funcional de momentos $\mathcal{L}$ es llamado positivo-definido si $\mathcal{L}[\pi(x)] > 0$ para todo polinomio $\pi(x)$ que no es idénticamente cero y es no-negativo para todo real x .*

Si $\mathcal{L}$ es positivo-definido, se sigue inmediatamente que

$$\mu_{2k} = \mathcal{L}[x^{2k}] > 0.$$

Entonces

$$0 < \mathcal{L}[(x+1)^{2n}] = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \mu_{2n-k},$$

se sigue por inducción que μ_{2k+1} es real.

4.2. Ceros

Cuando el funcional de momentos es positivo-definido, los ceros de los correspondientes polinomios ortogonales exhiben una cierta regularidad en su comportamiento.

Definición 4.4 [5, Definición 5.1] *Sea $E \subset (-\infty, \infty)$. Un funcional de momentos $\mathcal{L}$ se dice que es definido-positivo en E si y sólo si $\mathcal{L}[\pi(x)] > 0$ para todo polinomio $\pi(x)$ que es no-negativo en E y que no es idénticamente 0 en E . El conjunto E es llamado un conjunto de soporte para $\mathcal{L}$.*

Desde ahora $\mathcal{L}$ denotará un funcional de momentos definido-positivo y $\{P_n(x)\}$ su correspondiente SPO.

Teorema 4.2 [5, Teorema 5.2] *Sea I un intervalo que es un conjunto de soporte para $\mathcal{L}$. Los ceros de $P_n(x)$ son todos reales, simples y están localizados en el interior de I .*

Demostración

Dado que $\mathcal{L}[P_n(x)] = 0$, $P_n(x)$ debe cambiar de signo al menos una vez en el interior de I . Es decir, $P_n(x)$ tiene al menos un cero de multiplicidad impar localizado en el interior de I .

Sean $x_1, x_2, \dots, x_k$ los distintos ceros de multiplicidad impar en el interior de I , tomando

$$\rho(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_k).$$

Entonces $\rho(x)P_n(x)$ es un polinomio que no tiene ceros de multiplicidad impar en el interior de I , por lo tanto $\rho(x)P_n(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Así, $\mathcal{L}[\rho(x)P_n(x)] > 0$. Pero esto contradice el teorema (4.1) a menos que $k \geq n$. Es decir, $k = n$ entonces $P_n(x)$ tiene n distintos ceros en el interior de I . $\square$

Por lo que a los ceros de $P_n(x)$ (denotemoslos por x_{ni}), podemos ordenarlos de menor a mayor

$$x_{n1} < x_{n2} < \cdots < x_{nn} \quad n \geq 1. \quad (4.2.1)$$

Ya que el coeficiente principal de $P_n(x)$ es positivo, se sigue que

$$P_n(x) > 0 \quad \text{para } x > x_{nn}; \quad \text{sgn } P_n(x) = (-1)^n \quad \text{para } x < x_{n1}. \quad (4.2.2)$$

Donde sgn denota la función signo definida por

$$\text{sgn } x = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Enunciamos el siguiente teorema sin demostración.

Teorema 4.3 [5, Teorema 5.3] (*Separación de los ceros*) Los ceros de $P_n(x)$ y $P_{n+1}(x)$ se separan mutuamente, es decir

$$x_{n+1,i} < x_i < x_{n+1,i+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2.3)$$

Observación 4.1 Notemos que el teorema 4.2 y el teorema 4.3, nos hacen recordar la alternancia de los polinomios Hurwitz.

4.3. El problema de momentos

Un poco de historia.

En 1894 T.J Stieltjes publicó su clásico trabajo “Recherches sur les fractions continues” que contenía gran número de nuevas ideas, entre ellas un nuevo concepto de integral, nuestra moderna integral de Stieltjes. En él propuso y resolvió completamente el siguiente problema que llamó “Problema de los momentos”.

Se trata de encontrar una función de variación acotada y no decreciente $\alpha(x)$ en el intervalo $[0, \infty)$ tal que sus momentos tomen un predeterminado conjunto de valores $\{\mu_n\}$, es decir

$$\int_0^\infty x^n d\alpha(x) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Haciendo uso de la teoría de las fracciones continuas Stieltjes demostró una condición necesaria y suficiente para la existencia de la solución.

H. Hamburger (1920) extendió el problema de Stieltjes a todo el eje real. Esta extensión no es trivial en absoluto pues al permitir que la x pueda tomar valores negativos aumenta la complejidad del problema. Hamburger hace por primera vez uso del principio de selección de E. Helly.

R. Nevanlinna (1922) utilizando la moderna teoría de funciones profundiza en el problema indeterminado, debiéndosele la noción de “solución extremal”.

Sea $\{s_k\}$ una sucesión de números reales, se trata de encontrar condiciones necesarias y suficientes para que exista una función $\alpha(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa, monótona creciente y de variación acotada que verifique

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n d\alpha(x) = s_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3.1)$$

A este problema se le denomina problema de momentos de Hamburger (PMH). Cuando dicha $\alpha(x)$ existe y es única, se dice que el problema de momentos es determinado, de otra forma, se dice que el problema de momentos es indeterminado.

Teorema 4.4 *(Condición necesaria y suficiente)*[13, Teorema 1.5] Dada una sucesión $\{s_k\}$, el (PMH) tiene solución si y sólo si, para cualquier polinomio no negativo $Q(x)$ se tiene

$$\mathcal{L}[Q(x)] > 0,$$

donde $\mathcal{L}$ es el funcional de momentos asociado a $\{s_k\}$.

En otras palabras, el (PMH) tiene solución si y sólo si, el funcional asociado a la sucesión $\{s_k\}$ es definido-positivo.

Para una demostración vea [13].

Teorema 4.5 [5, Teorema 3.4] El funcional $\mathcal{L}$ asociado a la sucesión $\{s_k\}$ es definido-positivo si y sólo si, los siguientes determinantes Δ_k satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_k \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & \cdots & s_{2k} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3.2)$$

Demostración

Sea el polinomio de grado n , $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, elevándolo al cuadrado y aplicándole el funcional resulta

$$\mathcal{L}[P_n(x)^2] = \mathcal{L}\left[\sum_{j=0}^n a_j x^j \sum_{k=0}^n a_k x^k\right] = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_j a_k \mathcal{L}[x^{j+k}] = \sum_{j,k=0}^n a_j a_k s_{j+k}.$$

En forma matricial

$$= (a_0, a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

que es una función cuadrática. La matriz formada por los términos de la sucesión $\{s_k\}$ es llamada **matriz de momentos de Hankel**. El resultado será positivo para cualquier polinomio (para valores cualesquiera de a_j y a_k), si y sólo si, la forma cuadrática es definida positiva. De acuerdo con el criterio de Sylvester, la condición necesaria y suficiente para que esto ocurra es que los determinantes principales de las matrices de momentos de Hankel sean todos positivos. $\square$

Observación 4.2 *Notemos que la matriz de momentos de Hankel es una matriz Hermitiana ($\{s_k\}$ está compuesta de números reales). Por lo que tenemos el siguiente corolario.*

Corolario 4.6 *El funcional $\mathcal{L}$ asociado a la sucesión $\{s_k\}$ es definido-positivo si y sólo si, la matriz de momentos Hankel es definida positiva.*

Para $j \geq 0$, sean

$$H_{1,j} := \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_j \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_j & s_{j+1} & \cdots & s_{2j} \end{pmatrix}, \quad H_{2,j} := \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{j+1} \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{j+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j+1} & s_{j+2} & \cdots & s_{2j+1} \end{pmatrix}. \quad (4.3.3)$$

Ahora volvamos al problema de momentos de Stieltjes

Proposición 4.7 *(Condición necesaria del problema de Stieltjes)/[13, Teorema 1.6] Sea $\{s_k\}$ una sucesión de números reales. Si existe una función $\alpha(x) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente y de variación acotada tal que*

$$s_n = \int_0^\infty x^n d\alpha(x),$$

entonces se satisfacen las siguientes desigualdades

$$|H_{1,j}| \geq 0, \quad |H_{2,j}| \geq 0 \quad (4.3.4)$$

La demostración de este resultado se puede ver en [2, pag. 139].

En realidad la condición de la proposición anterior es también suficiente, pero la demostración requiere del desarrollo de teoría que no necesitamos en este trabajo. Las matrices definidas en (4.3.3) son las matrices de momentos de Hankel para el problema de momentos de Stieltjes.

Observación 4.3 *Notemos que para que el problema de momentos de Stieltjes tenga solución, es necesario y suficiente que las matrices de momentos de Hankel $H_{1,j}$ y $H_{2,j}$ sean semidefinidas positivas.*

Definición 4.5 [6, Definición 1.3] Sea una sucesión finita de números reales $(s_j)_{j=0}^m$ dada. El problema de momentos de Stieltjes truncado (TMST) consiste en encontrar el conjunto $\mathbb{M}_m$ de todas las funciones acotadas no decrecientes σ tal que

$$s_j = \int_{[0,\infty)} t^j d\sigma(t) \quad (4.3.5)$$

para cada $0 \leq j \leq m$.

Definición 4.6 La sucesión $(s_j)_{j=0}^{2n}$ ($(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ respectivamente) es llamada sucesión positiva de Stieltjes si ambas matrices correspondientes $H_{1,n}$ y $H_{2,n-1}$ ($H_{1,n}$ y $H_{2,n}$ respectivamente) son positivas definidas.

4.4. Polinomios ortogonales de Stieltjes

Ahora consideremos una generalización de los polinomios estudiados anteriormente a polinomios matriciales.

Para $k = 1, \dots, n$ sea A_k una $q \times q$ matriz real. Consideremos el polinomio matricial

$$\mathbf{f}_n(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_n z^n. \quad (4.4.1)$$

El polinomio matricial (4.4.1) es de grado n si A_n es distinto de cero. En lo que sigue se supondrá siempre que $\det A_n \neq 0$. Sea

$$\mathbf{g}_n(z) = \begin{cases} A_0 + A_2 z + \dots + A_{n-2} z^{m-1} + A_n z^m & \text{si } n = 2m, \\ A_0 + A_2 z + \dots + A_{n-3} z^{m-2} + A_{n-1} z^{m-1} & \text{si } n = 2m + 1, \end{cases} \quad (4.4.2)$$

$$\mathbf{h}_n(z) = \begin{cases} A_1 + A_3 z + \dots + A_{n-3} z^{m-2} + A_{n-1} z^{m-1} & \text{si } n = 2m, \\ A_1 + A_3 z + \dots + A_{n-2} z^{m-1} + A_n z^m & \text{si } n = 2m + 1. \end{cases} \quad (4.4.3)$$

diremos que (4.4.2) es la $\mathbf{g}_n$ parte de $\mathbf{f}_n$ y que (4.4.3) es la $\mathbf{h}_n$ parte de $\mathbf{f}_n$. Es obvio que $\mathbf{f}_n = \mathbf{g}_n(z^2) + z\mathbf{h}_n(z^2)$.

Observación 4.4 Notemos que para $q = 1$ $\mathbf{g}_n(z) = G(z)$ y $\mathbf{h}_n(z) = H(z)$.

También generalizamos el problema de momentos de Stieltjes a su caso matricial.

El problema matricial de momentos de Stieltjes truncado

Definición 4.7 Sea una sucesión finita de $q \times q$ matrices complejas Hermitianas $(s_j)_{j=0}^m$ dada. El problema (MMST) consiste en encontrar el conjunto $\mathbb{M}_m$ de todas las medidas $q \times q$ Hermitianas no negativas σ , definidas en la sigma-álgebra de Borel $\mathcal{B} \cap [0, \infty)$ tal que

$$s_j = \int_{[0,\infty)} t^j d\sigma(t) \quad (4.4.4)$$

para cada $0 \leq j \leq m$.

Las matrices de momentos de Hankel para este problema, están definidas de la misma forma que en (4.3.3). Análogamente decimos que la sucesión $(s_j)_{j=0}^{2n}$ ($(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ respectivamente) es llamada sucesión positiva de Stieltjes si ambas matrices correspondientes $H_{1,n}$ y $H_{2,n-1}$ ($H_{1,n}$ y $H_{2,n}$ respectivamente) son positivas definidas.

Introduzcamos también un número de matrices auxiliares y dos familias de polinomios ortogonales y sus polinomios de segunda especie. Sea $R_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{(j+1)q \times (j+1)q}$ que esta dada por

$$R_j(z) := (I_{(j+1)q} - zT_j)^{-1}, \quad j \geq 0, \quad (4.4.5)$$

con

$$T_0 := 0_q, \quad T_j := \begin{pmatrix} 0_{q \times jq} & 0_q \\ I_{jq} & 0_{jq \times q} \end{pmatrix}, \quad j \geq 1. \quad (4.4.6)$$

Observe que para cada $j \in \mathbb{N}_0$, la función de valores matriciales R_j puede ser representada por

$$T_j := \begin{pmatrix} I_q & 0_q & 0_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ zI_q & I_q & 0_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ z^2I_q & zI_q & I_q & \cdots & 0_q & 0_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z^jI_q & z^{j-1}I_q & z^{j-2}I_q & \cdots & zI_q & I_q \end{pmatrix}. \quad (4.4.7)$$

Sea

$$v_0 := I_q, \quad v_l := 0_q \quad \text{si } l < 0, \quad v_j := \begin{pmatrix} I_q \\ 0_{jq \times q} \end{pmatrix} \quad \text{para toda } j \in \mathbb{N}. \quad (4.4.8)$$

Además, sea

$$y_{[j,k]} := \begin{pmatrix} s_j \\ s_{j+1} \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} \quad 0 \leq j \leq k \quad (4.4.9)$$

y $y_{[j,k]} = 0_q$ si $j > k$. Tomemos

$$u_{1,0} := 0_q, \quad u_{1,j} := \begin{pmatrix} 0_q \\ -y_{[0,j-1]} \end{pmatrix} \quad u_{2,j} := -y_{[0,j]}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.4.10)$$

Establezcamos

$$Y_{1,j} := y_{[j,2j-1]}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad \text{y} \quad Y_{2,j} := y_{[j+1,2j]}, \quad 2 \leq j \leq n. \quad (4.4.11)$$

Ahora, sean

$$\hat{H}_{1,0} := s_0, \quad \hat{H}_{1,j} := s_{2j} - Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1} Y_{1,j}, \quad j \geq 1, \quad (4.4.12)$$

$$\hat{H}_{2,0} := s_1, \quad \hat{H}_{2,j} := s_{2j+1} - Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j}, \quad j \geq 1, \quad (4.4.13)$$

$\hat{H}_{1,j}$ y $\hat{H}_{2,j}$ son llamados el complemento de Schur del bloque $H_{1,j-1}$ en $H_{1,j}$ y del bloque $H_{2,j-1}$ en $H_{2,j}$ respectivamente.

Definición 4.8 [6, Definición 1.4] Sea σ una función de variación acotada no decreciente en $[0, \infty)$. Una sucesión finita de polinomios $(P_j)_{j=0}^n$ es llamada polinomios ortogonales de Stieltjes (PO de Stieltjes) con respecto a σ si

1. $\deg P_j(t) = j$ para todo $j \in \{0, \dots, n\}$,
2. $\int_{[0, \infty)} P_m(t) d\sigma(t) P_j^*(t) = \delta_{mj} C_{mj}$ para todo $m, j \in \{0, \dots, n\}$, donde δ_{mj} es la delta de Kronecker y C_{mj} es una constante distinta de cero.

Ahora definiremos cuatro polinomios mónicos.

Definición 4.9 [6, Definición 1.5]

$$P_{1,0}(z) := I_q, \quad Q_{1,0}(z) := 0_q, \quad P_{2,0}(z) := I_q, \quad Q_{2,0}(z) := s_0. \quad (4.4.14)$$

Para $j \geq 1$, definimos

$$P_{1,j}(z) := (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j, \quad (4.4.15)$$

$$P_{2,j}(z) := (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j, \quad (4.4.16)$$

$$Q_{1,j}(z) := -(-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) u_{1,j}, \quad (4.4.17)$$

$$Q_{2,j}(z) := -(-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) u_{2,j}. \quad (4.4.18)$$

Los polinomios $Q_{1,j}$ y $Q_{2,j}$ son llamados polinomios de segunda especie con respecto a $P_{1,j}$ y $P_{2,j}$ respectivamente.

Proposición 4.8 [6, Proposición 1.6]

a) Los polinomios $P_{1,j}$ y $P_{2,j}$ son PO de Stieltjes con respecto a σ y $t\sigma$ respectivamente. Más precisamente

$$\int_{[0, \infty)} P_{k,j}(t) t^{k-1} d\sigma(t) P_{k,l}^*(t) = \begin{cases} 0_q & : j \neq l \\ \widehat{H}_{k,j} & : j = l \end{cases} \quad k = 1, 2. \quad (4.4.19)$$

b) Las siguientes igualdades se cumplen

$$Q_{1,j}(x) = \int_{[0, \infty)} \frac{P_{1,j}(x) - P_{1,j}(t)}{x - t} d\sigma(t), \quad 0 \leq j \leq n, \quad (4.4.20)$$

$$Q_{2,j}(x) = \int_{[0, \infty)} \frac{P_{2,j}(x) - P_{2,j}(t)}{x - t} t d\sigma(t) + P_{2,j}(x) s_0, \quad 0 \leq j \leq n - 1. \quad (4.4.21)$$

También tenemos el siguiente lema:

Lema 4.9 [6, Lema 1.7] Sean $P_{k,j}, Q_{k,j}$, $k = 1, 2$, como en la definición 4.9. Entonces la solución extremal al problema MMST definido en $z \in \mathbb{C} [0, \infty)$ toma la siguiente forma:

$$s_M(z) := -\frac{Q_{1,n}^*(\bar{z})}{P_{1,n}^*(\bar{z})}, \quad (4.4.22)$$

$$s_\mu(z) := -\frac{Q_{2,n}^*(\bar{z})}{zP_{2,n}^*(\bar{z})}. \quad (4.4.23)$$

Para una demostración vea [7]. Usamos los subíndices M y μ para distinguir entre las soluciones. Ahora presentamos el teorema fundamental de este capítulo.

Teorema 4.10 [6, Teorema 2.5]

a) Sea el polinomio f_n un polinomio Hurwitz con $A_0 = I_q$. Entonces existe un sucesión de Stieltjes $(s_j)_{j=0}^{2m}$ ($(s_j)_{j=0}^{2m+1}$ respectivamente) y PO de Stieltjes mónicos $P_{1,j}, P_{2,j}$ en $[0, \infty)$ y sus correspondientes polinomios de segunda especie $Q_{1,j}$ y $Q_{2,j}$ tal que

$$f_n(t) = \begin{cases} (-1)^m P_{1,m}^*(-t^2) + (-1)^{m+1} t Q_{1,m}^*(-t^2), & n = 2m \\ (-1)^m Q_{2,m}^*(-t^2) + (-1)^m t P_{2,m}^*(-t^2), & n = 2m + 1. \end{cases} \quad (4.4.24)$$

b) Sea $(s_j)_{j=0}^{2m}$ ($(s_j)_{j=0}^{2m+1}$ respectivamente) una sucesión positiva de Stieltjes, y sean $P_{1,m}, P_{2,m}$ sus correspondientes PO de Stieltjes mónicos en $[0, \infty)$ con sus correspondientes polinomios de segunda especie $Q_{1,m}$ y $Q_{2,m}$ los cuales son construidos con $(s_j)_{j=0}^{2m}$ ($(s_j)_{j=0}^{2m}$ respectivamente). Entonces el polinomio formado en (4.4.27) es un polinomio Hurwitz.

En la demostración de este teorema (ver [6]), se utiliza el hecho de que $f_n(t)$ puede ser escrito de la forma $f_n(t) = g_n(t) + th_n(t)$ y se demuestra que para $n = 2m$ y $A_n = I_q$ podemos escribir $g_n(t) = (-1)^m P_{1,m}^*(-t)$ y $h_n(t) = (-1)^{m+1} Q_{1,m}^*(-t)$. Para $n = 2m + 1$ y $A_n = I_q$ tenemos $h_n(t) = (-1)^m P_{2,m}^*(-t)$ y $g_n(t) = (-1)^m Q_{2,m}^*(-t)$.

El siguiente lema representa la relación entre los coeficientes de los polinomios g_n , h_n y los momentos s_j .

Lema 4.11 [6, Lema 2.1] Sean g_n y h_n la parte par e impar del polinomio f_n definidos en (4.4.2) y (4.4.3). Para $|z| \geq |z_0|$ la expansión en series de potencias de $\frac{h_n}{g_n}$ en potencias negativas de z , tiene la forma:

$$\frac{h_n}{g_n} = \frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} + \cdots + (-1)^n \frac{s_n}{z^{n+1}} + \cdots, \quad n = 2m, \quad (4.4.25)$$

$$\frac{g_n}{h_n} = s_0 - \frac{s_1}{z} + \cdots + (-1)^n \frac{s_n}{z^n} + \cdots, \quad n = 2m + 1. \quad (4.4.26)$$

Ejemplo 4.1 *Asumamos que $q = 1$. Sean s_j los momentos definidos por $s_j = j!$ para $j = 0, 1, \dots, 6$. Esta secuencia de escalares es una sucesión positiva de momentos de Stieltjes dado que $H_{1,3}$ y $H_{2,2}$ son matrices definidas positivas. Sus correspondientes polinomios ortogonales $P_{1,j}$ y $P_{2,j}$ para estos momentos toman la forma*

$$P_{1,0}(z) = 1, \quad P_{1,1}(z) = z - 1,$$

$$P_{1,2}(z) = z^2 - 4z + 2, \quad P_{1,3}(z) = z^3 - 9z^2 + 18z - 6,$$

$$P_{2,0}(z) = 1, \quad P_{2,1}(z) = z - 2,$$

$$P_{2,2}(z) = z^2 - 6z + 6, \quad P_{2,3}(z) = z^3 - 12z^2 + 36z - 24.$$

Los polinomios de segunda especie de $P_{1,j}$ y $P_{2,j}$ se escriben como

$$Q_{1,0}(z) = 0, \quad Q_{1,1}(z) = 1,$$

$$Q_{1,2}(z) = z - 3, \quad Q_{1,3}(z) = z^2 - 8z + 11,$$

$$Q_{2,0}(z) = 1, \quad Q_{2,1}(z) = z - 1,$$

$$Q_{2,2}(z) = z^2 - 5z + 2, \quad Q_{2,3}(z) = z^3 - 11z^2 + 26z - 6.$$

Finalmente, los polinomios Hurwitz correspondientes a estos polinomios están dados por

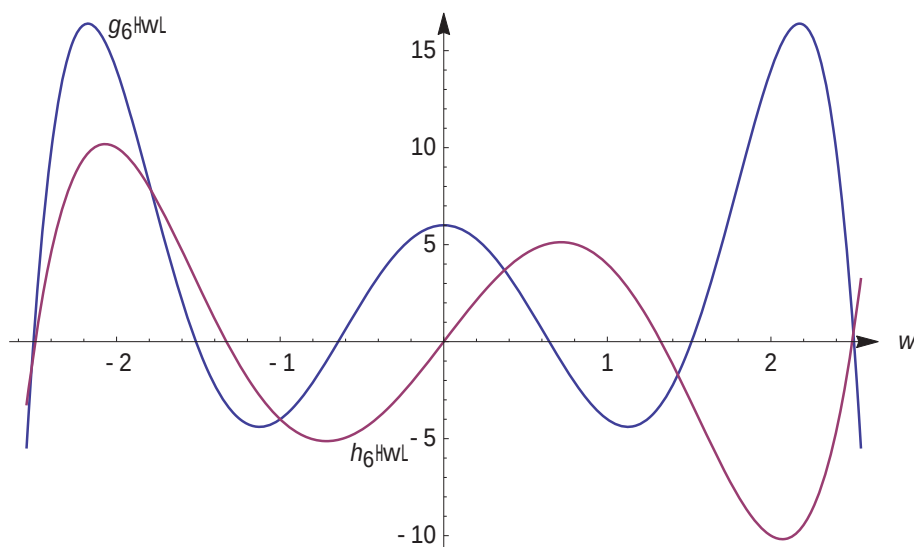
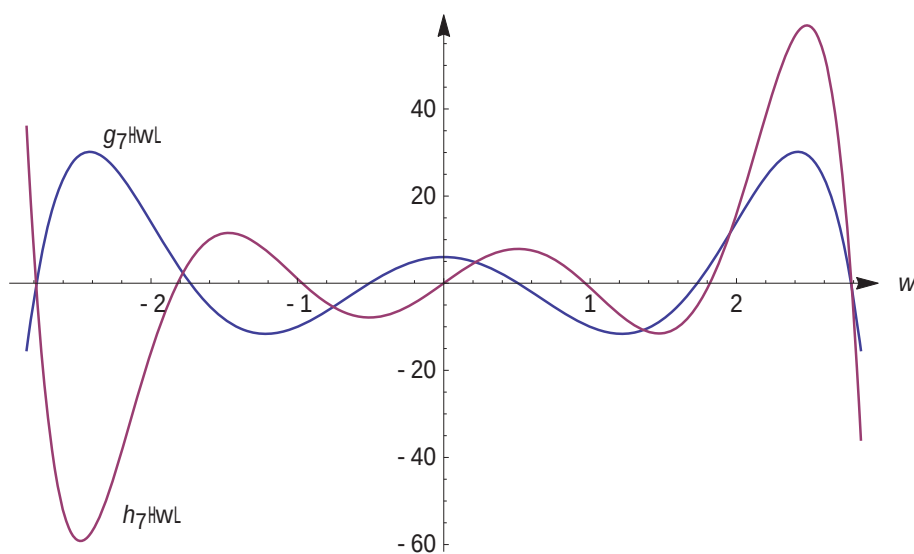
$$f_1(t) = t + 1, \quad f_2(t) = t^2 + t + 1, \quad f_3(t) = t^3 + t^2 + 2t + 1,$$

$$f_4(t) = t^4 + t^3 + 4t^2 + 3t + 2, \quad f_5(t) = t^5 + t^4 + 6t^3 + 5t^2 + 6t + 2,$$

$$f_6(t) = t^6 + t^5 + 9t^4 + 8t^3 + 18t^2 + 11t + 6,$$

$$f_7(t) = t^7 + t^6 + 12t^5 + 11t^4 + 36t^3 + 26t^2 + 24t + 6.$$

Las gráficas de las partes g_6, h_6 y g_7, h_7 de los polinomios f_6 y f_7 respectivamente se muestran en la siguiente imagen lo cual comprueba que cumplen la propiedad de la alternancia.

Figura 4.1: Alternancia de los polinomios ortogonales f_6 .Figura 4.2: Alternancia de los polinomios ortogonales f_7 .

Con lo anterior es inmediata la demostración del siguiente teorema:

Teorema 4.12 (de Kharitonov mediante polinomios ortogonales) *El polinomio intervalo*

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0, \quad \text{con } a_i \in [\alpha_i, \beta_i]$$

es estable, si y sólo si, para cada polinomio de Kharitonov $K_i(z)$ asociado al polinomio intervalo, existe un sucesión de Stieltjes $(s_j)_{j=0}^{2m}$ ($(s_j)_{j=0}^{2m+1}$ respectivamente) y

PO de Stieltjes mónicos $P_{1i,j}, P_{2i,j}$ en $[0, \infty)$ y sus correspondientes polinomios de segunda especie $Q_{1i,j}$ y $Q_{2i,j}$ tal que

$$K_i(z) = \begin{cases} (-1)^m P_{1i,m}^*(-z^2) + (-1)^{m+1} z Q_{1i,m}^*(-z^2), & n = 2m \\ (-1)^m Q_{2i,m}^*(-z^2) + (-1)^m z P_{2i,m}^*(-z^2), & n = 2m + 1 \end{cases} \quad (4.4.27)$$

con $i = 1, \dots, 4$.

Ahora desarrollaremos un ejemplo que nos permita usar los teoremas que estudiamos en este trabajo.

4.5. Un ejemplo ilustrativo: Oscilaciones amortiguadas

Empecemos recordando el sistema sencillo que recoge las características esenciales del movimiento armónico simple: el movimiento de una masa puntual unida a un resorte alrededor del equilibrio (ver Resumen). Reducir el problema a su máxima simplicidad (conservando las características de interés) requiere varias aproximaciones razonables. Consideramos una masa puntual m y un movimiento en una única dimensión, i.e. el movimiento tiene un único grado de libertad; el resorte no tiene masa y su comportamiento es perfectamente lineal. Como grado de libertad para la descripción del sistema escogemos el desplazamiento en la coordenada x de la posición de equilibrio, según indica la figura

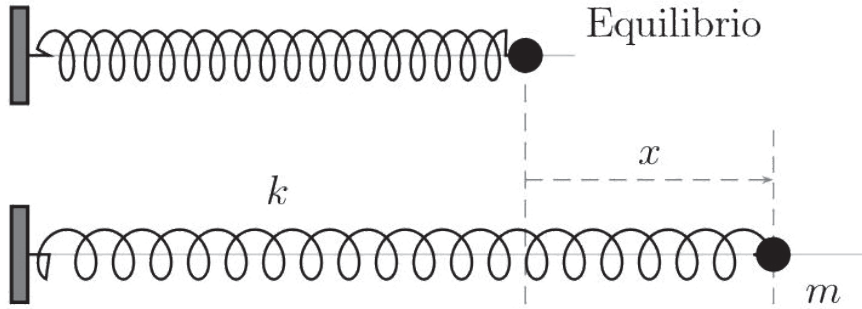


Figura 4.3: Oscilador armónico.

Recordando la segunda ley de Newton,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

en nuestro problema con un grado de libertad, $\mathbf{F} \rightarrow F$ y $p = mv \rightarrow m\dot{x}$; si la masa m permanece constante, tenemos sencillamente

$$F = m \frac{dx}{dt} = m\ddot{x}. \quad (4.5.1)$$

Recordando la ley de Hooke,

$$F = -kx, \quad k > 0. \quad (4.5.2)$$

La fuerza se opone al desplazamiento y su intensidad es proporcional al mismo, siendo k la constante elástica o recuperadora del resorte. Las dimensiones de k son $[k] = MT^{-2}$. Empleando ec. (4.5.1) y ec. (4.5.2), obtenemos

$$m\ddot{x} = -kx \Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (4.5.3)$$

Antes de continuar con el análisis, recordemos qué aproximaciones simplificadas hemos realizado para llegar a la ecuación anterior, ec. (4.5.3): la masa es puntual y constante, el sistema tiene un único grado de libertad y el comportamiento del resorte es lineal. Si bien podemos imaginar circunstancias en que no se cumplan, son suficientemente razonables y permiten describir adecuadamente el sistema en multitud de casos en que además de razonables son acertadas. Regresando a ec. (4.5.3), la combinación $\frac{k}{m}$ tiene dimensiones $[\frac{k}{m}] = T^{-2}$, y es una constante propia del sistema (de hecho es la cantidad relevante que describe la estructura del sistema), de modo que introducimos $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ con $[\omega_0] = T^{-1}$, para reescribir la ecuación de movimiento (4.5.3) de forma sencilla,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (4.5.4)$$

La ecuación de movimiento del grado de libertad x del sistema es por tanto una ecuación diferencial lineal de segundo orden y con coeficientes constantes. No resulta difícil encontrar soluciones sencillas, por ahora nos interesa el caso del oscilador armónico amortiguado, no la forma explícita de sus soluciones, sino sus propiedades, es decir su forma cualitativa.

En el análisis anterior la oscilación del sistema considerado se mantendría por un tiempo infinito sin ver disminuida su amplitud. Esta descripción, obviamente, no reproduce de forma fiel o verosímil el comportamiento de multitud de sistemas físicos reales. ¿Cómo podemos modificar nuestra descripción de un oscilador armónico alrededor del equilibrio para obtener una descripción más acorde a lo observado en la naturaleza?. Obtuvimos la ecuación del movimiento armónico simple uniendo una ley dinámica $m\ddot{x} = F$ con una forma particular de la fuerza $F = -kx$. Para enriquecer nuestra descripción, no modificaremos la ley dinámica y sí en cambio nos plantearemos qué clase de modificación sencilla de la forma de la fuerza es útil a nuestro propósito. Para mantener la linealidad del sistema, tan solo consideramos términos con una única potencia de x : eso descarta automáticamente cualquier término $x^2, x\dot{x}, x^3$, etc, en F . Tampoco queremos incluir derivadas temporales de orden superior. Esto nos deja con una única dependencia para modificar la forma de la fuerza: $\dot{x}$. Físicamente, resulta razonable suponer añadir términos que dependen de la velocidad del grado de libertad x , cosa habitual al describir, por ejemplo, la presencia de fuerzas de rozamiento. Dicho esto, escribimos explícitamente la forma de la fuerza en este contexto:

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (4.5.5)$$

La combinación $\frac{\gamma}{m}$ tiene dimensiones $(t)^{-1}$, introducimos una nueva constante Γ con $\frac{\gamma}{m} = 2\Gamma$ (el factor 2 incluido aquí simplificará expresiones posteriores); adicionalmente, denominamos ahora ω_0 a la frecuencia natural del oscilador, esto nos lleva a la ecuación

$$\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Como dijimos antes nos interesa solo la forma cualitativa de las soluciones a la ecuación diferencial (4.5.5). Consideremos ahora un ejemplo particular.

Ejemplo 4.2 *Una masa de $15 \pm 0,5$ kg conectada a un resorte con $k = 200 \pm 10 \frac{N}{m}$ oscila en una superficie horizontal cuya constante de amortiguamiento $\gamma = 9 \pm 1 s^{-1}$. Tenemos entonces una familia de ecuaciones diferenciales*

$$\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

con $m \in [14,5, 15,5]$, $k \in [190, 210]$ y $\gamma \in [8, 10]$ lo que implica que $\omega_0^2 \in [\frac{380}{31}, \frac{420}{29}]$ y $2\Gamma \in [\frac{16}{31}, \frac{20}{29}]$.

Dado que la solución de este tipo de ecuaciones es bien conocida, lo que planeamos en este ejemplo es verificar el teorema de Kharitonov para un caso físico. Haciendo un cambio de variable

$$\begin{aligned} y_1 &= x, & \dot{y}_1 &= y_2, \\ y_2 &= \dot{x}, & \dot{y}_2 &= -2\Gamma y_2 - \omega_0^2 y_1. \end{aligned}$$

El cual podemos escribir de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Calculando su Polinomio característico $P_c(\lambda)$ tenemos

$$P_c(\lambda) = \lambda^2 + 2\Gamma\lambda + \omega_0^2,$$

con

$$\omega_0^2 \in \left[\frac{380}{31}, \frac{420}{29} \right] \quad \text{y} \quad 2\Gamma \in \left[\frac{16}{31}, \frac{20}{29} \right].$$

Construimos los polinomios de Kharitonov para esta familia

$$\begin{aligned} K_1(\lambda) &= \frac{380}{31} + \frac{16}{31}\lambda + \lambda^2, & K_2(\lambda) &= \frac{380}{31} + \frac{20}{29}\lambda + \lambda^2, \\ K_3(\lambda) &= \frac{420}{29} + \frac{16}{31}\lambda + \lambda^2, & K_4(\lambda) &= \frac{420}{29} + \frac{20}{29}\lambda + \lambda^2. \end{aligned}$$

Por medio de los rectángulos de Kharitonov comprobamos que la familia entera es estable

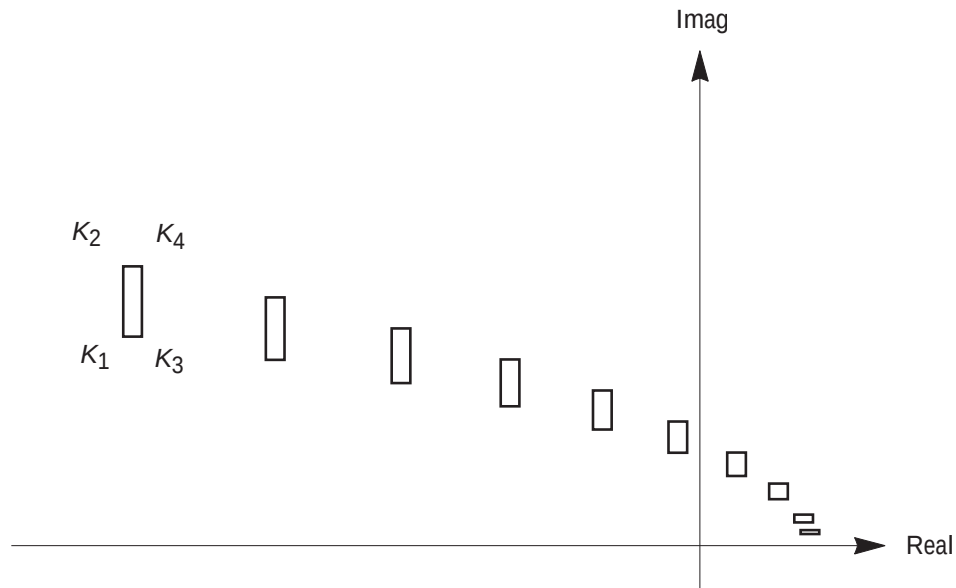


Figura 4.4: Rectángulos de Kharitonov.

Mediante los tubos de Kharitonov vemos que todos los polinomios en la familia satisfacen la propiedad de la alternancia.

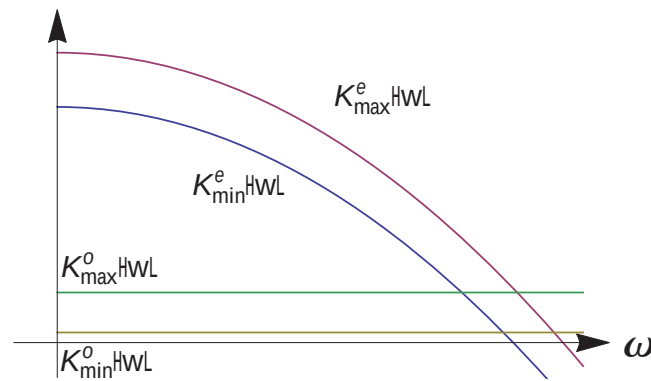


Figura 4.5: "Tubos" de Kharitonov.

Esto es el resultado que esperaríamos de un movimiento armónico amortiguado, después de un cierto tiempo t la posición $x(t)$ regresa al punto de equilibrio del sistema, es decir, toda solución de la ecuación diferencial resulta ser asintóticamente estable.

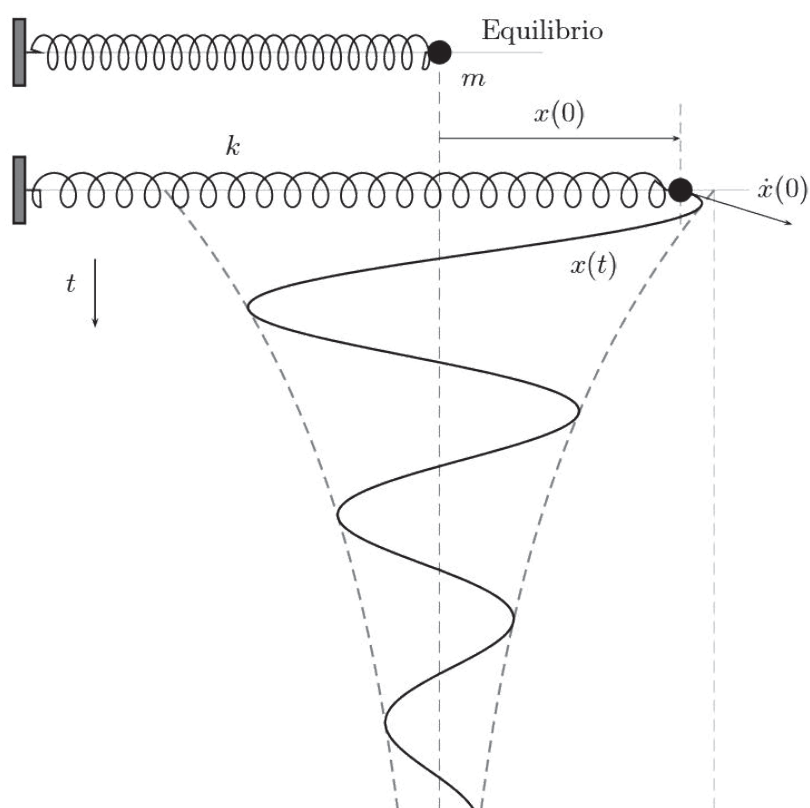


Figura 4.6: Oscilador armónico amortiguado.

Apéndice A

Estabilidad asintótica de una posición de equilibrio de una familia de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

V.L. Kharitonov

(Traducción del artículo «Asymtotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations» V.L. Kharitonov [10] (1978)) hecha por el autor.

Para que la solución trivial de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}\mathbf{x}$$

con coeficientes constantes, donde $\mathbb{A}$ es una matriz real de $n \times n$, sea asintóticamente estable, es necesario y suficiente que todos los ceros del polinomio característico se encuentren en el semiplano izquierdo del plano complejo.

Si los elementos de $\mathbb{A}$ son conocidos sólo aproximadamente, la question de la estabilidad asintótica de la solución $\mathbf{x} = 0$ requiere de la investigación de la familia de polinomios

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad (\text{A.0.1})$$

donde

$$a_i \in [\alpha_i, \beta_i] \quad (\alpha_i \leq \beta_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A.0.2})$$

Problema. Encontrar condiciones bajo las que todos los ceros de los polinomios (A.0.1) y (A.0.2) tengan parte real negativa.

Sea G^n el conjunto de todos los polinomios de la forma (A.0.1) cuyos ceros se encuentran en el semiplano izquierdo, sea S^n la familia de polinomios (A.0.1), (A.0.2), y sea S_1^n la familia de los 2^n polinomios en S^n en los que cada coeficiente a_i es igual a α_i o β_i .

Teorema A.1 *Para que $S^n \subset G^n$ es necesario y suficiente que $S_1^n \subset G^n$.*

La necesidad es obvia ya que $S_1^n \subset S^n$, para probar la parte suficiente usaremos un lema. Considere la familia de polinomios $\hat{S}^n$ de la forma (A.0.1), (A.0.2), tal que

$$a_{2k+1} \in [\alpha_{2k+1}, \beta_{2k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

A cada polinomio de $\hat{S}^n$ le corresponde un único par de funciones $h(\lambda)$ y $g(\lambda)$ asociado a $f(z)$ por la igualdad

$$f(z) = h(z^2) + zg(z^2). \quad (\text{A.0.3})$$

Los polinomios $h(\lambda)$ y $g(\lambda)$ son de grado m si $n = 2m + 1$, y $h(\lambda)$ es de grado m y $g(\lambda)$ es de grado $m - 1$ si $n = 2m$. Para $f(z) \in \hat{S}^n$ y $n = 2m$ el polinomio $h(\lambda)$ es fijo, y para $n = 2m + 1$ el polinomio $g(\lambda)$ es fijo. La familia $\hat{S}_1^n$ consiste de $2^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$ polinomios.

Lema A.2 *Para que $\hat{S}^n \subset G^n$, es suficiente que $\hat{S}_1^n \subset G^n$.*

Demostración Supongamos que $n = 2m$. El teorema de Hermite-Biehler 2.14 implica que, para que $f(z) \in G^n$, es necesario y suficiente que $h(\lambda)$ y $g(\lambda)$ formen un par positivo, i.e los ceros de los polinomios deben ser distintos, reales, negativos y se interlazan como sigue:

$$u_1 < v_1 < u_2 < v_2 < \dots < v_{m-1} < u_m < 0$$

donde u_i son los ceros $h(\lambda)$ y v_i los ceros de $g(\lambda)$. Se sigue de la condición en el lema que $h(\lambda)$ forma un par positivo con todo $g(\lambda)$ correspondiente a los polinomios de $\hat{S}_1^n$. Denotemos estos polinomios por $g_1(\lambda), \dots, g_{2^m}(\lambda)$. Todo polinomio $f(z) = h(z^2) + zg_i(z^2)$ ($i = 1, 2, \dots, 2^m$) es, por condición, un polinomio Hurwitz; por lo tanto todos los coeficientes de todos los polinomios $g_i(\lambda)$ son positivos. Si el valor absoluto de λ es lo suficientemente grande, $\text{sgn}(g_i(\lambda)) = \text{sgn}((-1)^{m-1})$ para $i = 1, 2, \dots, 2^m$. Todos los $g_i(\lambda)$ cambian de signo por primera vez en el intervalo (u_1, u_2) i.e, $\text{sgn}(g_i(u_2)) = \text{sgn}((-1)^{m-2})$, ($i = 1, 2, \dots, 2^m$); similarmente, $\text{sgn}(g_i(u_k)) = \text{sgn}((-1)^{m-k})$, ($i = 1, 2, \dots, 2^m$). Consideremos un polinomio arbitrario en $\hat{S}^n$; su correspondiente polinomio $g(\lambda)$ claramente cambia de signo en cada intervalo (u_k, u_{k+1}) ; i.e tiene ceros en este intervalo. Por lo tanto $g(\lambda)$ forma un par positivo con $h(\lambda)$, y por lo tanto, cada polinomio en $\hat{S}^n$ también está en G^n . Esto prueba el teorema para $n = 2m$; la prueba es similar para $n = 2m + 1$. $\square$

Observación A.1 *Es conocido [4] que, para que el polinomio $f(z)$ de grado n cumpla $f(z) \in G^n$ cuando $a_1 > 0$, es necesario y suficiente que el polinomio de grado $(n-1)$*

$$\varphi(z) = \frac{(-1)^n z f(-z) - (z - 2a_1) f(z)}{2a_1^2} = z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-1}, \quad (\text{A.0.4})$$

donde

$$b_i = \begin{cases} \frac{a_1 a_{i+1} - a_{i+2}}{a_1^2}, & i \text{ par} \\ \frac{a_{i+1}}{a_1}, & i \text{ impar} \end{cases} \quad (\text{A.0.5})$$

pertenezca a G^{n-1} .

Ahora probaremos la parte suficiente del teorema A.1, aplicando inducción matemática sobre n .

Demostración Supongamos que el teorema A.1 vale para todas las familias de la forma (A.0.1) y (A.0.2) cuando los grados de los polinomios son menores que n . Notemos que para $n = 1, 2, 3$ la afirmación del teorema es obvia. El lema implica que, para que la función $f(z)$ de S^n pertenezca a G^n , es suficiente que el polinomio correspondiente de $\hat{S}_1^n$ pertenezca a G^n . Incluimos $f(z) \in \hat{S}_1^n$ en la familia $\hat{S}^n$ de polinomios tal que $a_{2k} \in [\alpha_{2k}, \beta_{2k}]$, $k = 1, 2, \dots, [(n-1)/2]$.

Correspondiendo a cada polinomio en $\hat{S}^n$, contruimos $\varphi(z)$ usando (A.0.4); esto produce una familia S^{n-1} de polinomios cuyos coeficientes $b_i \in [\gamma_i, \delta_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), donde

$$\gamma_{2k+1} = \frac{a_1 \alpha_{2k+2} - a_{2k+3}}{a_1^2}, \quad \delta_{2k+1} = \frac{a_1 \beta_{2k+2} - a_{2k+3}}{a_1^2}, \quad \gamma_{2k} = \delta_{2k} = \frac{a_{2k+1}}{a_1}.$$

En virtud de la hipótesis de inducción, para que $S^{n-1} \subset G^{n-1}$, es suficiente que $S_1^{n-1} \subset G^{n-1}$. Pero esto significa que, para que $\hat{S}^n \subset G^n$, es suficiente que $\hat{S}_1^n \subset G^n$. Nosotros formamos $\hat{S}_1^n$ de la misma manera que a S_1^n . Este razonamiento es válido para cada $f(z) \in \hat{S}_1^n$, por lo tanto, para que $f(z) \in S^n$ se encuentre en G^n , es suficiente que $S_1^n \subset G^n$. Esto completa la prueba del teorema A.1. $\square$

Teorema A.3 *Para que $S_1^n \subset G^n$, es necesario y suficiente que los siguientes cuatro polinomios de S_1^n se encuentren en G^n .*

$f_1(z)$

$$a_{n-2k} = \begin{cases} \beta_{n-2k}, & k \text{ par} \\ \alpha_{n-2k}, & k \text{ impar} \end{cases}$$

$$a_{n-2k-1} = \begin{cases} \beta_{n-2k-1}, & k \text{ par} \\ \alpha_{n-2k-1}, & k \text{ impar} \end{cases}$$

$f_2(z)$

$$a_{n-2k} = \begin{cases} \alpha_{n-2k}, & k \text{ par} \\ \beta_{n-2k}, & k \text{ impar} \end{cases}$$

$$a_{n-2k-1} = \begin{cases} \alpha_{n-2k-1}, & k \text{ par} \\ \beta_{n-2k-1}, & k \text{ impar} \end{cases}$$

$f_3(z)$

$$a_{n-2k} = \begin{cases} \alpha_{n-2k}, & k \text{ par} \\ \beta_{n-2k}, & k \text{ impar} \end{cases}$$

$$a_{n-2k-1} = \begin{cases} \beta_{n-2k-1}, & k \text{ par} \\ \alpha_{n-2k-1}, & k \text{ impar} \end{cases}$$

$f_4(z)$

$$a_{n-2k} = \begin{cases} \beta_{n-2k}, & k \text{ par} \\ \alpha_{n-2k}, & k \text{ impar} \end{cases}$$

$$a_{n-2k-1} = \begin{cases} \alpha_{n-2k-1}, & k \text{ par} \\ \beta_{n-2k-1}, & k \text{ impar} \end{cases}$$

De nuevo la necesidad es evidente, probemos la parte suficiente. Supongamos que $n = 2m$ (la prueba para $n = 2m + 1$ es similar); usaremos el mismo tipo de razonamiento que aplicamos en la prueba del lema. Para $g_i(\lambda)$ seleccionamos dos: $\hat{g}(\lambda)$ con los coeficientes

$$a_{2k+1} = \begin{cases} \alpha_{2k+1}, & k \text{ par}, \\ \beta_{2k+1}, & k \text{ impar}, \end{cases}$$

y $\hat{g}(\lambda)$ con los coeficientes

$$a_{2k+1} = \begin{cases} \beta_{2k+1}, & k \text{ par}, \\ \alpha_{2k+1}, & k \text{ impar}. \end{cases}$$

Es fácil de ver que la gráfica de cada $g(\lambda)$ tal que $a_{2k+1} \in [\alpha_{2k+1}, \beta_{2k+1}]$ está entre las graficas de $\hat{g}(\lambda)$ y $\hat{g}(\lambda)$ para $\lambda < 0$; por lo tanto, si $\hat{g}(\lambda)$ y $\hat{g}(\lambda)$ forman pares positivos con $h(\lambda)$, entonces $f(z) = h(z^2) + zg(z^2)$ está en G^n . Considere los siguientes polinomios: $\hat{h}(\lambda)$ con los coeficientes

$$a_{2k} = \begin{cases} \alpha_{2k}, & k \text{ par}, \\ \beta_{2k}, & k \text{ impar}, \end{cases}$$

y $\hat{h}(\lambda)$ con los coeficientes

$$a_{2k} = \begin{cases} \beta_{2k}, & k \text{ par}, \\ \alpha_{2k}, & k \text{ impar}. \end{cases}$$

Si $\hat{h}(\lambda)$ y $\hat{h}(\lambda)$ forman pares positivos con $\hat{g}(\lambda)$ y $\hat{g}(\lambda)$, entonces cada $h(\lambda)$ y $g(\lambda)$ cuyos coeficientes satisfagan (A.0.2) forman un par positivo, esto es, $S_1^n \subset G^n$. De lo cual se sigue el teorema A.3.

Ahora consideremos el problema original. Sea la matriz $A \in U$ si $a_{ij} \in [\alpha_{ij}, \beta_{ij}]$ y $\alpha_{ij} \leq \beta_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), y sea $f(z) \in W$ si $f(z)$ es el polinomio característico para alguna matriz de U . Pongamos

$$\alpha_i = \min_W a_i, \quad \beta_i = \max_W a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Tenemos el siguiente resultado

Teorema A.4 *Para que todos los sistemas (A.0.1) con $\mathbb{A} \in U$ tengan estabilidad asintótica en las posiciones de equilibrio $\mathbf{x} = 0$, es necesario y suficiente que los cuatro polinomios descritos en el teorema A.3 pertenezcan a G^n .*

Observación A.2 *Los teoremas A.1 y A.3 siguen siendo válidos para la familia de polinomios*

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n,$$

donde

$$a_i \in [\alpha_i, \beta_i] \quad (\alpha_i \leq \beta_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Apéndice B

Integral de Stieltjes

Definición B.1 Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y sea t_k un punto del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Una suma de la forma

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta \alpha_k,$$

se llama una **suma de Riemann-Stieltjes** de f respecto de α en $[a, b]$. Decimos que f es **Riemann-Stieltjes integrable** si existe un número A que satisface la siguiente propiedad:

Para cada $\epsilon > 0$, existe una partición P_ϵ de $[a, b]$ tal que, para cada partición P más fina que P_ϵ y para cada elección de los puntos t_k del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se tiene $|S(P, f, \alpha) - A| < \epsilon$. Cuando tal número A existe, es único y se representa por medio de

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

B.1. Medidas de Stieltjes y Borel

Sea F una función no decreciente definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, y supongamos que F es continua por la izquierda, en cada punto de $(a, b]$. Definiendo las medidas de todos los segmentos, los intervalos y los semisegmentos, pertenecientes al segmento básico $[a, b]$, mediante las igualdades

$$\begin{aligned} m(\alpha, \beta) &= F(\beta) - F(\alpha + 0), \\ m[\alpha, \beta] &= F(\beta + 0) - F(\alpha), \\ m(\alpha, \beta] &= F(\beta + 0) - F(\alpha + 0), \\ m[\alpha, \beta) &= F(\beta) - F(\alpha). \end{aligned}$$

podemos extender después esta medida, empleando el procedimiento de Lebesgue de prolongación de medida, a un σ -anillo que contiene todos los subconjuntos abiertos

y cerrados (y consecuentemente, todos los subconjuntos borelianos) del segmento $[a, b]$. La medida μ_F que se obtiene a partir de esta construcción se llama *medida de Lebesgue-Stieltjes* correspondiente a la función F , mientras que la propia función F se llama la *función generatriz* de esta medida.

Definición B.2 Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{B}$ la σ -álgebra de borel definida sobre X . Una función $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ que además es contable aditiva, es llamada una *medida de Borel*.

Definición B.3 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un arco en X es un embebimiento $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$, es decir, una aplicación continua que es un homeomorfismo restringida a su rango $\sigma : [0, 1] \rightarrow \sigma([0, 1])$. Se puede sustituir $[0, 1]$ por cualquier otro intervalo cerrado $[a, b]$, ya que son todos homeomorfos.

Se dice que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio **conexo por arcos** o **arcoconexo** si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existe un arco σ tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$.

Bibliografía

- [1] J. Ackermann: *Robust Control: The parameter space approach*, Springer (1993).
- [2] N.I. Ahiezer, M. Krein: *Some questions in the theory of moments*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1962).
- [3] S.P. Bhattacharyya, H. Chapellat, L.H. Keel: *Robust Control: The parametric approach*, Prentice Hall, NJ, (1995).
- [4] N.G. Chetaev: *Motion Stability (en ruso)*, Nauka, Moscow (1965).
- [5] T.S. Chihara: *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, London (1978).
- [6] A.E. Choque Rivero: *On matrix Hurwitz type polynomials and their interrelations to Stieltjes positive definite sequences and orthogonal matrix polynomials* Linear Algebra and its Applications 476 (2015) 56-84.
- [7] A.E. Choque Rivero: *On Dyukarev's resolvent matrix for a truncated Stieltjes matrix moment problem under the view of orthogonal matrix polynomials* Linear Algebra and its Applications 474 (2015) 44-109.
- [8] A.E. Choque Rivero: *Traducción del ruso al español no publicada del libro «Stable Polynomials M.M Postnikov»* (2015).
- [9] F.R. Gantmacher: *The Theory of Matrices*, American Mathematical Society, (1987).
- [10] V.L. Kharitonov: *Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations*, A.A. Zhdanov Leningrad State University. Translated from *Differentsialnye Uravneniya*, Vol.14, No. 11, pp. 2086-2088, November, 1978.
- [11] M.M. Postnikov: *Stable Polynomials (Russian)*, Nauka, Moscow, (1981).
- [12] M.R. Spiegel: *Variable Compleja*, Serie Schaum.

- [13] E. Torrano: *El problema de los momentos: Notas introductorias*, Depto. Matemática Aplicada F.I.
[http://www.dma.fi.upm.es/docencia/doctorado/Curso04-05/
polinomiosortogonales/documentos/pmomen.pdf](http://www.dma.fi.upm.es/docencia/doctorado/Curso04-05/polinomiosortogonales/documentos/pmomen.pdf)