UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

"Mat. Luis Manuel Rivera Gutierrez"

Series de Fourier y Criterios de Convergencia

Tesis que para obtener el título
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas presenta

David Yañez Olmos

Dirigida por el Doctor
Fernando Garibay Bonales

Morelia Michoácan México **Noviembre 2015**

A mi madre,
por el apoyo y sacrificios que ha realizado
para brindarme a mi y a mis hermanos
lo que en conciencia ha creído que es bueno.

A mis hermanos,
llevan cada uno una parte de mi alma
y estoy convencido de que pocas son las cosas en la vida
de las cuales se puede estar seguro de tener siempre consigo;
por ser una de ellas.

A mis amigos y Profesores

Agradecimientos

Al finalizar un trabajo complicado como lo es el desarrollo de una tesis, es inevitable en el muy humano egocentrismo que te lleva a concentrar la mayor parte del mérito al aporte que has hecho. Sin embargo, analizando objetivamente, de manera inmediata se tiene que este trabajo no hubiese sido posible sin la participación de personas que me han facilitado las cosas en este periodo, para que el trabajo llegue a un feliz término. Es un placer utilizar este espacio para ser justo con estas personas, expresándoles mis agradecimientos.

Primero que nada al Dr. Fernando Garibay Bonales por haber confiado en mi persona, por la paciencia, también por estar siempre dispuesto a ir más allá de los temarios para satisfacer nuestra curiosidad, porque después de aquel curso de anásisis matemático I el análisis se volvió una de mis pasiones y por la dirección de este trabajo. Le agradezco también por haberme facilitado todos los medios posibles para llevar a cabo todas las actividades, así como toda la confianza que me brindó y por los buenos consejos gracias a usted.

También al Dr. Peter Zhevandrov Bolshakova por estar siempre dispuesto a atender mis dudas en cada uno de los cursos que en el cual fui su alumno, por la confianza y los buenos consejos gracias.

A mis amigos Roberto Abrego, Omar Fabian, Adriana Rojas y Ana Rosa Soto. Por la confianza que me han tenido y por su ayuda, pues sin ustedes no habría sido posible concluir esta carrera; espero dejar algo bueno en cada una de sus vidas como, a mi parecer han hecho ustedes en la mía.

Resumen

"La razón no me ha enseñano nada. Todo lo que yo sé me ha sido dado por la razón"

Gottfried Leibniz

En las obras de Fourier tituladas *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* y *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides,* de 1807 a 1811 comienza deduciendo las ecuaciones que gobiernan la difusión de calor y posteriormente resuelve el problema de la distribución de temperatura en un tiempo dado a partir de la distribución en el instante inicial.

Para escribir la solución a la ecuación de difusión de calor, se necesita escribir la función que da el dato inicial como suma de una serie trigonométrica es decir dado el problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x} \quad \text{con} \quad -\pi < x < \pi, \quad 0 < t < T \quad \text{y} \quad 0 < \alpha^2 \\ u(-\pi,t) = 0, u(\pi,t) = 0 \quad \text{con} \quad u(x,0) = h(x) \quad -\pi \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

donde

$$u(x,0) = h(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) \quad \text{con} \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (0.0.1)$$

para

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cos(nx)dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)\operatorname{sen}(nx)dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x)\operatorname{sen}(nx)dx,$$

los cuales son llamados coeficientes de Fourier de h. La pregunta principal en este trabajo es decir, ¿Bajo que condiciones se garantiza la convergencia puntual o uniforme de la serie trigonométrica (0.0.2) a la función? En términos más generales hacemos la misma pregunta para las funciones $2\pi-$ periódicas Lebesgue integrables y estudiar la convergencia de la serie de Fourier en le sentido de convergencia puntual, uniforme y además la convergencia en norma en los espacios clásicos de Banach $L_p(\mathbb{T})$ para $1 \leq p$, haciendo uso de la teoría de integración de Lebesgue.

Además abordando el problema de la divergencia de la serie de Fourier principalmente para funciones continuas y posteriormente extendiendo el problema a funciones 2π -periódicas Lebesgue integrables.

Palabras Clave: Series de Fourier - Criterios de Convergencia de Fourier.

Abstract

"The reason has not taught me anything. All I know has given me the reason"

Gottfried Leibniz

In the works of Fourier titled *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* y *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides,* of 1807-1811, Fourier begins with the deduction of the equations that governing the heat diffusion, and then solves the problem of temperature distribution in a given time, from an initial distribution.

To write the solution of the heat diffusion equation, you need to write the function that give the initial data like a sum of a trigonometric series, i.e, considering the problem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x} \quad \text{con} \quad -\pi < x < \pi, \;\; 0 < t < T \;\; \text{y} \;\; 0 < \alpha^2 \\ u(-\pi,t) = 0, u(\pi,t) = 0 \quad \text{con} \quad u(x,0) = h(x) \quad -\pi \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

Where

$$u(x,0) = h(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) \quad \text{con} \quad -\pi \leq x \leq \pi, \tag{0.0.2}$$

for

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cos(nx) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \operatorname{sen}(nx) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) \operatorname{sen}(nx) dx,$$

which are called Fourier coefficients of h: The main question in this work is, under what conditions we can guarantee pointwise convergence or uniform convergence of the trigonometric series (0.0.2) to the function? More generally, we do the same question for functions $2\pi-$ periodic Lebesgue integrable and we study the convergence of the Fourier series in her sense of pointwise convergence, uniform convergence and also the convergence in norm, in the classical Banach spaces $L_p(\mathbb{T})$ to $1 \leq p$; using the theory of Lebesgue integration.

Also we address the problem of the divergence of the Fourier series, mainly for continuous functions and subsequently, extending the problem for the functions 2π periodic Lebesgue integrable.

Introducción

"Cualquier cosa que sea contraria a la naturaleza lo es también a la razón, y cualquier cosa que sea contraria a la razón es absurda"

Baruch Spinoza

En las dos obras de Fourier tituladas *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* y *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides,* de 1807 a 1811 comienza deduciendo la ecuación que gobierna la difusión del calor. Después resuelve el problema de la distribución de temperatura en un tiempo dado a partir de la distribución en el instante inicial, en varios casos. Para ello inventa el método de separación de variables, conocido como método de Fourier. Para escribir la solución necesita escribir la función que da el dato inicial como suma de una serie trigonométrica. Éste es precisamente el aspecto del trabajo de Fourier del que nos vamos a ocupar aquí, dejando a un lado sus otros méritos.

Aunque se presenta de varias maneras según el tipo de problema estudiado, en el caso general y para una función de período 2π el problema consiste en, dada una función f, encontrar una serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)),$$

cuya suma coincida con $f(x)$ para cada x. En primer lugar Fourier decidió que los coeficientes debían venir dados por las fórmula

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)dx.$$

Fourier afirmaba que dada una función 2π periódica, ésta se podría representar por medio de su serie de Fourier. Los intentos de probar la convergencia de la serie de Fourier aparecieron inmediatamente. Poisson y Cauchy publicaron sendas pruebas incorrectas. Fue Dirichlet quien en 1829 inauguró una nueva época ya que publicó el primer resultado correcto de convergencia, a saber

Si una función acotada es continua a trozos y monótona a trozos, su serie de Fourier converge en cada punto a la semisuma de los límites laterales de la funcion.

En 1881 Camille Jordan extendió el criterio de Dirichlet a las funciones de variación acotada. Probó que toda función de variación acotada se puede escribir como diferencia de dos funciones crecientes, por lo que se limitó a señalar que la demostración de Dirichlet es aplicable, sin modificación. El concepto de función de variación acotada nació precisamente en ese trabajo de Jordan.

El segundo criterio de convergencia se debe a Rudolph Lipschitz.

Si una función f satisface

$$|f(x+t) - f(x)| \leq C|t|^{\alpha}$$

para algún $\alpha > 0$ y todo t suficientemente pequeño, la serie de Fourier de f converge a $f(x)$ en el punto x.

Tiempo después Riemann obtiene algunos resultados con respecto a las series de Fourier, prueba dos resultados importantes:

1. Los coeficientes de Fourier de una función integrable tienden a cero (Lema de Riemann-Lebesgue).
2. La convergencia o divergencia de la serie de Fourier en un punto sólo depende de los valores de la función en una vecindad del punto (principio de localización de Riemann).

Cauchy había escrito que el límite de una sucesión de funciones continuas es una función continua (lo que implicaría de paso que sólo las funciones continuas son representables por series trigonométricas). Ante la evidencia de que no era cierto, la necesidad de corregirlo condujo al concepto de convergencia uniforme.

En 1870 Heine publicó un trabajo que comenzaba indicando cómo Weierstrass había demostrado que la convergencia uniforme permitía integrar término a término una serie de funciones, y que sin esa condición podía ser falso. Por tanto, no estaba justificado que si una serie trigonométrica representaba a una función, sus coeficientes tuvieran que ser los dados por la fórmula de Fourier. Incluso, señalaba Heine, los criterios de convergencia sólo decían que la serie de Fourier convergía a la función, pero no que no pudiese haber otras series trigonométricas con la misma suma. Esto conduce inmediatamente a la pregunta de la unicidad.

Cantor estudió este problema por influencia de Heine y sus investigaciones le condujeron al estudio de subconjuntos de la recta real con implicaciones en la futura teoría de conjuntos y en los conceptos topológicos.

A pesar de esa convicción general que Heine sugería, la sorpresa no tardó en llegar. En 1873, sólo tres años después de la publicación del artículo de Heine, Paul du Bois-Reymond anunció un contraejemplo, que mostraba que la serie de Fourier de una función continua puede ser divergente en un punto. No sólo no era uniformemente convergente, ni siquiera lo era puntualmente.

Hoy es habitual presentar el resultado de du Bois-Reymon en forma no constructiva utilizando el principio de acotación uniforme.

Una solución al problema de representación de funciones continuas mediante la serie de Fourier, vino a cambiar la manera de sumar la sucesión de sumas parciales de Fourier. En 1900, Fejér publicó un trabajo en el que mostraba que las funciones continuas siempre se recuperan y con convergencia uniforme, si antes de pasar el límite a la sucesión de sumas parciales de Fourier, se toma los promedios de la sumas parciales. Es decir,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{s_0(f,x) + s_1(f,x) + \cdots + s_N(f,x)}{N+1} = f(x) \qquad \text{uniformemente,}$$

si f es continua. El resultado de Fejér permite recuperar una función continua apartir de sus coeficientes de Fourier.

Aparentemente el siglo XIX se cerraba con respuestas satisfactorias para las series de Fourier. Se tenían varios criterios de convergencia, se sabía que la funciones continuas podían tener series de Fourier divergentes, se recuperaba la función original si se utilizaban métodos de sumabilidad para la serie.

El problema renace con la teoría de la medida e integración de Lebesgue y del análisis funcional. La tesis de Lebesgue con la que nace su teoría de integración apareció en 1902. La nueva teoría trajo más funciones integrables, pero no sólo eso: la identificación de funciones que coinciden en casi todo punto sugiere una nueva manera de comparar la suma de la serie y las funciones de partida, podrían no coincidir en todos los puntos pero de modo que la discrepancia sea sólo en un conjunto "pequeño" es decir, de medida nula; pregunta interesante, incluso para funciones continuas.

Lebesgue estudió las series de Fourier con la nueva herramienta. En un trabajo escribió: "*voy a aplicar la noción de integral al estudio del desarrollo trigonométrico de las funciones no integrables en el sentido de Riemann*". Además de extender los resultados previos al nuevo contexto, dio un ejemplo de función integrable con su definición pero no con la de Riemann, que tenía serie de Fourier divergente.

Algunos resultados de Lebesgue son los siguientes:

1. Los coeficientes de Fourier de una función integrable tienden a cero (lema de Riemann-Lebesgue).

2. Si f es integrable, los promedios de las sumas parciales de su serie de Fourier convergen a f en casi todo punto.

3. La serie que resulta al integrar término a término una serie de Fourier siempre es convergente y su suma es una primitiva de la función original.

Una vez probado el lema de Riemann-Lebesgue, tanto el principio de localización de Riemann como el criterio de convergencia, se extiende inmediatamente a la nueva clase de funciones integrables. El resultado de sumabilidad nos dice que siempre se recupera la función de partida en casi todo punto con mediante el método de Fejér.

Por otro lado Fatou observó que hay series trigonométricas convergentes que no son series de Fourier.

En los primeros años del siglo XX se desarrollaron los conceptos que condujeron a la teoría de los espacios de Hilbert, nombre popularizado años después. Partiendo de trabajos previos sobre ecuaciones integrales de Volterra, Fredholm y otros, D. Hilbert y su alumno E. Schmidt se encontraron con propiedades de ortogonalidad y sistemas lineales de un número infinito de ecuaciones, etc., y desarrollaron los conceptos asociados a los espacios l^2. Junto con ideas que Fréchet esbozaba en su tesis en 1906 sobre espacios métricos, Riesz elaboró la noción de distacia en los espacios de funciones L_2 y poco después llegaron los teoremas que permitían la identificación de funciones de cuadrado integrable con sucesiones de l^2.

Riesz-Fischer prueba la completitud de L_2 : las sucesiones de Cauchy convergen en la norma de L_2. Una consecuencia inmediata del teorema de Riesz-Fischer es la convergencia en norma cuadrática de la serie de Fourier.

$$\lim_{n\to\infty} || \, s_n(f) - f \, ||_{L_2} = 0.$$

La convergencia en L_2 de la serie de Fourier sugería el estudio del problema análogo en los espacios L_p es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \| s_n(f) - f \|_{L_p} = 0 \qquad \text{para} \qquad f \in L_p \quad \text{si} \quad 1 \leq p, \quad p \neq 2,$$

para p finito, por supuesto, ya que si $p = \infty$, la convergencia sería uniforme y el límite debería ser una una función continua (y ya sabemos que ni siquiera eso es suficiente).

La primera respuesta vino en sentido negativo: Banach y Steinhaus probaron en 1918 que no hay convergencia en media, es decir, en L_1.

Fue Marcel Riesz quien consiguió demostrar en 1923 que la respuesta a la convergencia en norma es afirmativa si $1 < p < \infty$.

Nikolai Lusin publicó en 1913 una nota en la que presenta una condición necesaria y suficiente para la convergencia puntual de la serie de Fourier de una función de L_2. Lusin comenzó viendo que la serie de Fourier de f converge casi en todo punto si y sólo si se cumplen simultáneamente:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\overline{f}(x+t) - \overline{f}(x-t)}{2\tan(\frac{t}{2})} dt = f(x) \qquad c.d \tag{I}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\overline{f}(x+t) - \overline{f}(x-t)}{t} \cos(nt) dt = 0, \tag{II}$$

donde $\overline{f}$ es la función conjugada de f (las integrales en cero se entienden como valor principal). Probó que (I) se cumple para toda función de L_2, de modo que (II) quedaba como única condición necesaria y suficiente. Ahora bien, satisface la condición (I) Lusin indica que es (infinitamente probable) que lo mismo ocurra con (II). De aquí nace la *conjetura de Lusin: la serie de Fourier de una función de L_2 converge en casi todo punto.*

Kolmogorov, uno de los matemáticos más destacados del siglo XX y alumno de Lusin demostró en 1923 que existe una función integrable cuya serie de Fourier diverge en casi todo punto y poco después, en 1926, fue capaz de llevar la divergencia a todo punto (ver [1]).

Ante esta situación lo que Lennart Carleson obtuvo en 1965 fue una auténtica sorpresa. En efecto, probó que la conjetura de Lusin era cierta: la serie de Fourier de una función de L_2 converge en casi todo punto. Por tanto, también la de una función continua, lo que tampoco se conocía en ese momento. Su demostración consistió precisamente en probar que

$$\sup_{t>0} t^2 |\{x : \sup_N |s_N(f,x)| > t\}| \leq C||f||_{L_2}^2,$$

se cumplía (ver [5]).

El premio Abel 2006 fue otorgado a Lennart Carleson. Indudablemente el nombre de Carleson va unido sobre todo al teorema de convergencia en casi todo punto de las funciones de L_2. Poco después Richard Hunt extendió el resultado de Carleson hasta cubrir el rango de todos los espacios L_p con $p > 1$ (ver [9]).

La anterior reseña histórica sobre series de Fourier, fue en gran parte tomada de [4].

Los objetivos del presente trabajo consiste en dar una introducción formal al estudio de las series de Fourier y presentar algunos de los teoremas clásicos de convergencia usando teoría de la medida de Lebesgue. El teorema de mayor interés para este trabajo, es el Teorema de Kahane-Katznelson: "Dado un conjunto E de medida cero en $[0, 2\pi]$; existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en todo punto de E". Este resultado será probado en el capítulo 5. El material de esta tesis está basado fuertemente en el contenido del capítulo 8 del libro [6] de Karl Stromberg.

Índice

Capítulo 1

Series Trigonométricas y Series de Fourier.

En términos muy generales, el programa para el análisis es aprender a descomponer (analizar) funciones arbitrarias en partes componentes que son funciones más sencillas y reconstruir las funciones originales. Por muchas razones (utilidad en aplicaciones físicas, propiedades matemáticas intrínsecas), las más comúnmente elegidas son las funciones trigonométricas.

$$t \longrightarrow a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt).$$

El propio Fourier parecía creer que cualquier función 2π-periódica, podría ser representada por una serie de funciones trigonométricas.

Iniciaremos este estudio dando resultados formales de las series trigonométricas y posteriormente pasando al estudio de las series de Fourier como caso particular.

1.1. Series Trigonométricas

Definición 1.1 *Una serie trigonométrica es una serie de la forma*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kt) + b_k \operatorname{sen}(kt)\right), \tag{1.1.1}$$

donde $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *y* $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ *son sucesiones de números complejos y* $t \in \mathbb{R}$.

La n-ésima suma parcial de (1.1.1) es la función s_n definida en $\mathbb{R}$ por

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kt) + b_k \operatorname{sen}(kt)\right), \tag{1.1.2}$$

por la fórmula de Euler, tenemos que

$$s_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}, \tag{1.1.3}$$

donde escribimos $b_0 = 0$,

$$c_k = \frac{(a_k - ib_k)}{2}, \qquad c_{-k} = \frac{(a_k + ib_k)}{2}, \tag{1.1.4}$$

$$a_k = c_k + c_{-k}, \qquad b_k = i(c_k - c_{-k}), \tag{1.1.5}$$

para cada $k \geq 0$. Escribimos $s_0(t) = c_0 = \frac{a_0}{2}$. De las ecuaciones (1.1.4) reescribimos (1.1.1) como

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

Las funciones de la forma (1.1.2) son llamadas **polinomios trigonométricos.**

Definición 1.2 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periódica. Para un número real positivo p, escribimos $f \in L_p(\mathbb{T})$ si f es Lebesgue medible y*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mid f(t) \mid^p dt < \infty.$$

En este caso definimos la norma de $f \in L_p(\mathbb{T})$ como el número

$$\| f \|_p = \| f \|_{L_p(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mid f(t) \mid^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si f es continua en $\mathbb{R}$ (2π-periódica), escribimos $f \in C(\mathbb{T})$ y definimos la norma uniforme de f como el número

$$\| f \|_u = \| f \|_\infty = \| f \|_{C(\mathbb{T})} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \mid f(t) \mid = \sup_{-\pi \leq t \leq \pi} \mid f(t) \mid .$$

Denotaremos por $TP(\mathbb{T})$ en conjunto de polinomios trigonométricos, es obvio que $TP(\mathbb{T}) \subseteq C(\mathbb{T}) \subseteq L_p(\mathbb{T})$ para $p > 0$.

Teorema 1.1 (1). *Si $f \in C(\mathbb{T})$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe $P \in TP(\mathbb{T})$ tal que $\| f - P \|_u < \epsilon$.*

(2). *Si $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe $P \in TP(\mathbb{T})$ tal que $\| f - P \|_p < \epsilon$.*

Prueba:

(1) Sea $f \in C(\mathbb{T})$ y $\epsilon > 0$. Escribamos $X = \{z \in \mathbb{C} \ : \mid z \mid = 1\}$ y definamos F en X, por $F(z) = f(t)$ donde $z = e^{it}$ (por la periodicidad de f y el Teorema(5.11) en [6], la definición de F es independiente de la elección de $t \in \mathbb{R}$ tal que $z = e^{it}$ tomando $t = Arg(z)$). Sabemos que $w = Arg(z)$ y f son continuas, así se tiene que $F(z) = f(Arg(z))$ es continua.

Ahora aplicando Teorema (3.129) de [6], obtenemos $(c_n)_{n=-N}^{N} \subseteq \mathbb{C}$ tal que

$$\left| F(z) - \sum_{n=-N}^{N} c_n z^n \right| < \epsilon, \tag{1.1.6}$$

para todo $z \in X$. De (1.1.6) se sigue que $p(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$.

(2) Sea $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$ y $\epsilon > 0$. Ahora de Teorema (6.111) en [6], obtenemos $g \in C([-\pi, \pi])$ tal que

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mid f - g \mid^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1.1.7}$$

Sea $0 < \beta < \infty$ tal que $\mid g \mid \leq \beta$ para $t \in [-\pi, \pi]$. Ahora tomando $\delta = 2\pi \left(\frac{\epsilon}{6\beta} \right)^p$, donde se puede suponer que $\delta < 2\pi$.

Ahora modifiquemos g en $[\pi - \delta, \pi]$ para obtener $h \in C([-\pi, \pi])$ tal que $\mid h \mid \leq \beta$, $g = h$ en $[-\pi, \pi - \delta]$ y $h(\pi) = h(-\pi)$.

Por ejemplo si definimos h en $[\pi - \delta, \pi]$ dada por

$$h(t) = \delta^{-1}[(\pi - t)g(\pi - \delta) + (t - \pi + \delta)g(-\pi)], \tag{1.1.8}$$

se sigue que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mid g - h \mid^p = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\delta}^{\pi} \mid g - h \mid^p \leq \frac{(2\beta)^p \delta}{2\pi} = \left(\frac{\epsilon}{3} \right)^p. \tag{1.1.9}$$

Tenemos que $h \in C(\mathbb{T})$, aplicando la parte (1) obtenemos $P \in TP(\mathbb{T})$ tal que

$$\mid\mid h - P \mid\mid_u < \frac{\epsilon}{3}.$$

Así se tiene

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mid h-P\mid^{p}\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1.1.10}$$

Finalmente de las ecuaciones (1.1.7), (1.1.9) y (1.1.10) y desigualdad de Minkowski (ver [6], Página 340), se tiene

$$\begin{aligned} \| f-P \|_{L_p} &= \| f-g+g-h+h-P \|_{L_p} \\ &\leq \| f-g \|_{L_p} + \| g-h \|_{L_p} + \| h-P \|_{L_p} \\ &< \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Observación 1.1 *Por el Teorema (1.1-1), tenemos que si $f \in C(\mathbb{T})$, entonces existe $(P_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq TP(\mathbb{T})$ tal que $P_n \to f$ uniformemente en $\mathbb{R}$.*

Teorema 1.2 *Consideremos la serie trigonométrica $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ con sumas parciales s_n como en (1.1.3). Supongamos que existe una subsucesión $(s_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ y una función f que satisface alguna de las siguientes condiciones:*

(1). *$f \in C(\mathbb{T})$ y $\| f - s_{n_j} \|_u \to 0$ cuando $j \to \infty$.*

(2). *$f \in L_p(\mathbb{T})$ para $1 \leq p < \infty$ y $\| f - s_{n_j} \|_p \to 0$ cuando $j \to \infty$.*

Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$, tenemos

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt. \tag{1.1.11}$$

Prueba:

Supongamos (1), entonces $f \in L_p(\mathbb{T})$. Ahora si $\| f - s_{n_j} \|_u \to 0$, se sigue que $\| f - s_{n_j} \|_p \to 0$ y por tanto

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mid f-s_{n_j}\mid^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sup \mid f-s_{n_j}\mid^{p}\right)^{\frac{1}{p}} = \| f-s_{n_j} \|_u,$$

esto muestra que (1) implica (2).

Supongamos (2), sea $n \in \mathbb{Z}$ fijo. Sea $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_j > \mid n \mid$ para $j > j_0$, es fácil ver que para k entero

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t}dt = \begin{cases} 1 \text{ si } k=n \\ 0 \text{ si } k\neq n \end{cases}$$

Entonces para $j > j_0$, se tiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_{n_j} e^{-int}dt = \sum_{k=-n_j}^{n_j} c_k \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t}dt = c_n.$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\left| c_n - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\right| &= \lim_{j\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-s_{n_j}(t))e^{-int}dt\right| \\ &\leq \lim_{j\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mid f(t)-s_{n_j}(t)\mid dt \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \mid\mid f - s_{n_j}\mid\mid_p = 0,\end{aligned}$$

la segunda desigualdad se sigue de la desigualdad de Hölder (ver [6], Página 340).

$\square$

Observación 1.2 *Usando la notación del Teorema (1.2), escribimos* $f_j = s_{n_j} - s_{n_{j-1}}$ *y* $f_1 = s_{n_1}$*, entonces las hipótesis del Teorema (1.2-1) nos dicen que la serie* $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$*, la cual se obtiene de la serie trigonométrica, converge uniformemente.*

1.2. Series de Fourier

Definición 1.3 *Sea* $f \in L_1(\mathbb{T})$*. Definimos* $\hat{f}$ *en* $\mathbb{Z}$ *por*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt. \tag{1.2.1}$$

La serie trigonométrica dada por

$$s(f,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikt}, \tag{1.2.2}$$

es llamada la **serie de Fourier** de f, y para cada entero k, el número complejo $\hat{f}(k)$ el k-ésimo coeficiente de Fourier de f.

Denotamos la n-ésima suma parcial de (1.2.2), para $n \geq 0$ por

$$s_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt}.$$

Como en (1.1.5), escribimos

$$a_n = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) \qquad \text{y} \qquad b_n = i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)), \qquad \text{para} \quad n \geq 0. \quad (1.2.3)$$

Entonces tenemos

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\text{sen}(nt)dt. \quad (1.2.4)$$

Con esta notación, tenemos

$$s_n(f,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kt) + b_k\,\text{sen}(kt)) \quad (1.2.5)$$

y

$$s(f,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kt) + b_k\,\text{sen}(kt)). \quad (1.2.6)$$

Escribimos

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

donde $c_k = \hat{f}(k)$ para todo entero k. Entonces se tiene

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kt) + b_k\,\text{sen}(kt)), \quad (1.2.7)$$

usamos el símbolo $\sim$ evitando la igualdad ya que no hay garantía de que la serie de Fourier de f converge a la función f, en algún sentido.

Observación 1.3 *Las integrales (1.1.11) y (1.2.1) pueden ser tomadas en cualquier intervalo de longitud 2π, sin alterar su valor.*
Si $f \in L_1(\mathbb{T})$ y $a \in \mathbb{R}$, la sustitución $u = t - 2\pi$ tenemos

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_a^{\pi} f(t)dt + \int_{\pi}^{a+2\pi} f(t)dt = \int_a^{\pi} f(t)dt + \int_{-\pi}^{a} f(u)du = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt.$$

Lema 1.1 *Si $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ es no creciente con límite cero, entonces*

$$\left|\sum_{n=p}^{p} b_n e^{in\theta}\right| \leq \frac{2b_p}{\text{sen}(\frac{\theta}{2})},$$

para enteros p, q tal que $q \geq p \geq 0$ y $0 < \theta < 2\pi$.

Prueba:

Si $(a_n(z))_{n=1}^{\infty}$ y $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, entonces

$$a_n b_n = (s_n - s_{n-1})b_n = s_n(b_n - b_{n+1}) + s_n b_{n+1} - s_{n-1}b_n.$$

Luego

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q} s_n(b_n - b_{n+1}) + s_q b_{q+1} - s_{p-1}b_p. \tag{1.2.8}$$

Sea $X_\delta = \{z \in \mathbb{C} \ : \mid z \mid \leq 1, \mid z-1 \mid \geq \delta\}$ con $0 < \delta < 2$ y $a_n(z) = z^n$, entonces

$$\mid s_n(z) \mid = \left| \sum_{k=0}^{n} z^k \right| = \left| \frac{z^{n+1}-1}{z-1} \right| \leq \frac{2}{\mid z-1 \mid},$$

para $n \geq 0$ y $z \in X_\delta$.

Si $z = e^{i\theta}$, entonces

$$|z-1| = \left| e^{i\frac{\theta}{2}} \right| \left| e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right| = 2 \left| \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|.$$

Aplicando (1.2.8) y la desigualdad anterior tenemos

$$\left| \sum_{n=p}^{q} b_n e^{in\theta} \right| \leq \sum_{n=p}^{q} \mid s_n(e^{i\theta}) \mid (b_n - b_{n+1}) + \mid s_q(e^{i\theta}) \mid b_{q+1} + \mid s_{p-1}(e^{i\theta}) \mid b_p$$

$$\leq \frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})} \left(\sum_{n=p}^{q} (b_n - b_{n+1}) + b_{q+1} + b_p \right) = \frac{2b_p}{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}.$$

$\square$

Teorema 1.3 *Si $f \in L_1(\mathbb{T})$ definida por $f(t) = \dfrac{\pi - t}{2}$ para $0 < t < 2\pi$ y $f(0) = 0$ (f está definida para $t \in \mathbb{R}$ y 2π-periódica), entonces*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kt)}{k} \tag{1.2.9}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. La serie (1.2.9) es la serie de Fourier de f y converge uniformemente en $[\delta, 2\pi - \delta]$ a f para $0 < \delta < \pi$, y sus sumas parciales satisfacen

$$|s_n(f,t)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(kt)}{k} \right| < 2\pi + 1, \tag{1.2.10}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prueba: Calculemos los coeficientes de Fourier de f. Tenemos para $k \neq 0$ tenemos

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - t}{2} e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2} e^{-ikt} dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{t}{2} e^{-ikt} dt,$$

el primer término se anula, y después de integrar por partes el segundo obtenemos que

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2ik} \qquad \text{para} \qquad k \neq 0;$$

así

$$a_k = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k) = 0, \quad b_k = i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k)) = \frac{1}{k} \quad y \quad a_0 = 2\hat{f}(0) = 0.$$

De (1.2.6), se tiene que $s(f,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(kt)}{k}$.

Sea $\{\frac{1}{k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión monótona decreciente con límite 0. Si $\{z^k\}_{k=1}^{\infty}$ es tal que $z = e^{it}$, entonces tenemos que

$$|s_n(z)| = \left| \sum_{k=0}^{n} z^k \right| = \left| \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \right| \leq \frac{2}{|z-1|}, \tag{1.2.11}$$

para cada $n \geq 0$, entonces

$$|z - 1| = \left| e^{i\frac{t}{2}} \right| \left| e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}} \right| = 2 \left| \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \right|.$$

Así, para $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$ tenemos que $|z-1| \geq 2\operatorname{sen}(\frac{\delta}{2})$ y por (1.2.11)

$$|s_n(z)| \leq \frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{\delta}{2})} \qquad \text{para cada} \qquad n \geq 0.$$

Luego por Teorema (7.36) en [6] la serie converge uniformemente.

Sabemos que para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$,

$$-Log(1 - z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

es continua para cada $X_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, |z-1| \geq \delta\}$ con $0 < \delta < 2$. Más aún por el Corolario (7.38-i) de [6], la igualdad se verifica en cada X_δ y en particular para $|z| \leq 1$, $z \neq 1$.

Dado que

$$-Log(1-z) = Log(|1-z|) - iArg(1-z) \qquad \text{con} \qquad z \neq 0,$$

obtenemos que $|1-e^{i\theta}| = 2\ |\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})|$.

Si $0 < \theta < 2\pi$, entonces $\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) > 0$ y $1 - e^{i\theta} = 2\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta-\pi}{2})}$. Se tiene que

$$-Arg(1-e^{i\theta}) = \frac{\pi-\theta}{2},$$

y así

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Es fácil ver que

$$\frac{2x}{\pi} < \operatorname{sen}(x) < x \qquad \text{para} \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{1.2.12}$$

Sólo consideremos $0 < t < \pi$ ya que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$. Sea t fijo y m un entero tal que $m \leq \frac{1}{t} < m+1$. Si $m \geq 1$, entonces de (1.2.12) tenemos

$$0 < \sum_{k=1}^{m} \frac{\operatorname{sen}(kt)}{k} < \sum_{k=1}^{m} \frac{kt}{k} = mt \leq 1, \tag{1.2.13}$$

ya que $1 \leq k \leq m$ y $0 < kt \leq 1 < \dfrac{\pi}{2}$.

Si $n > m$, usando (1.2.12) y Lema (1.1) tenemos

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(kt)}{k}\right| \leq \frac{2}{(m+1)\operatorname{sen}(\frac{t}{2})} < \frac{2}{(\frac{1}{t})(\frac{2}{\pi})(\frac{t}{2})} = 2\pi. \tag{1.2.14}$$

Así usando (1.2.13), (1.2.14) y desigualdad del triángulo tenemos que

$$|s_n(f,t)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(kt)}{k}\right| < 2\pi + 1,$$

para $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$.

□

Observación 1.4 *Si f impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$, entonces*

$$\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos(kt)dt = -\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt,$$

así

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = 0.$$

Similarmente, si la función es par $f(-x) = f(x)$, $b_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Es claro que por (1.2.1), la función $f \to \hat{f}$, donde $\hat{f} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ es lineal y continua.

Se tiene lo siguiente

$$\widehat{\alpha f + \beta} g(n) = \alpha\hat{f}(n) + \beta\hat{g}(n),$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g \in L_1(\mathbb{T})$ y $n \in \mathbb{Z}$.
Además se tiene

$$\| \hat{f} \|_u = \sup_{n\in\mathbb{Z}} | \hat{f}(n) | \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} | f | = \| f \|_{L_1},$$

para cada $f \in L_1(\mathbb{T})$.

Teorema 1.4 *Si $f, g \in L_1(\mathbb{T})$ y $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $f = g$ c.d. en $\mathbb{R}$, (donde c.d. quiere decir casi dondequiera).*

Prueba: Escribamos $h = f - g$, tenemos que $\hat{h}(n) = \hat{f}(n) - \hat{g}(n) = 0$ para toda n. Definamos H en $\mathbb{R}$ como

$$H(x) = \int_{0}^{x} h(t)dt.$$

Además se tiene que

$$H(x + 2\pi) - H(x) = \int_{x}^{x+2\pi} h(t)dt = 2\pi\hat{h}(0) = 0.$$

Definamos $F \in C(\mathbb{T})$ por $F(x) = H(x) - \hat{H}(0)$, entonces

$$\hat{F}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} [H(x) - \hat{H}(0)]dx = \hat{H}(0) - \hat{H}(0) = 0, \tag{1.2.15}$$

se sigue de [6] Teorema (6.84) que F es absolutamente continua en $[0, 2\pi]$, por tanto continua y además $F'(x) = h(x)$ c.d.

Aplicando integración por partes y considerando $n \neq 0$ se tiene,

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2i\pi n}\int_0^{2\pi} h(t)e^{-int}dt = \frac{1}{in}\hat{h}(n) = 0. \qquad (1.2.16)$$

Dado un polinomio trigonométrico $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$, de (1.2.15) y (1.2.16) tenemos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\overline{P}(t)dt = \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n}\hat{F}(n) = 0.$$

Por el Teorema (1.1-1), existe $(P_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq TP(\mathbb{T})$ tal que $P_n \to F$ uniformemente en $\mathbb{R}$. Luego

$$\int_0^{2\pi} \mid F(t) \mid^2 dt = \int_0^{2\pi} F(t)\overline{F}(t)dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi} F(t)\overline{P}(t)dt = 0,$$

ya que $F \in C(\mathbb{T})$. Concluímos entonces que $F(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Pero además se tiene que $f(t) - g(t) = h(t) = F'(t) = 0$ c.d. en $\mathbb{R}$.

$\square$

Observación 1.5 *Sea $g \in L_1(\mathbb{T})$ y además supongamos que existe $(s_{n_j}(g,t))_{j=1}^{\infty} \subseteq (s_n(g,t))_{n=1}^{\infty}$ que converge uniformemente a f en $\mathbb{R}$. Entonces $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y por tanto $f = g$ c.d.*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_{n_j}(g,t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{j\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-n_j}^{n_j}\hat{g}(k)e^{ikt}\right)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{j\to\infty}\sum_{k=-n_j}^{n_j}\hat{g}(k)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t}dt = \hat{g}(n),
\end{aligned}$$

así se tiene que $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, y por el Teorema (1.4), se deduce que $f = g$ c.d.

Como ejemplos ilustrativos, veamos como de las primeras cuatro sumas parciales de Fourier se aproximan a la gráfica de las funciones dadas.

Ejemplo 1.1 *Tomemos la función 2π-periódica definida en $\mathbb{R}$ como*

$$f(x) = \begin{cases} -1 \; si & -\pi < x < 0 \\ \;\;1 \; si & \;\;\;0 < x < \pi. \end{cases}$$

Se tiene que $f(-x) = f(x)$, de la Observación (1.4) tenemos que $a_n = 0$ para cada n. Para $n \neq 0$ tenemos

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\mathrm{sen}(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{sen}(nt)dt = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ impar} \\ \;0 & \text{si } \;\; n \text{ par}. \end{cases}$$

De aquí que los coeficientes de Fourier de f son

$$b_1 = \frac{4}{\pi}, b_2 = 0, b_3 = \frac{4}{3\pi}, b_4 = 0, b_5 = \frac{4}{5\pi}, ...,$$

y puesto que los coeficientes a_n son nulos, la serie de Fourier correspondiente a f es

$$f \sim \frac{4}{\pi}\left(\mathrm{sen}(x) + \frac{1}{3}\mathrm{sen}(3x) + \frac{1}{5}\mathrm{sen}(5x) + \cdots\right).$$

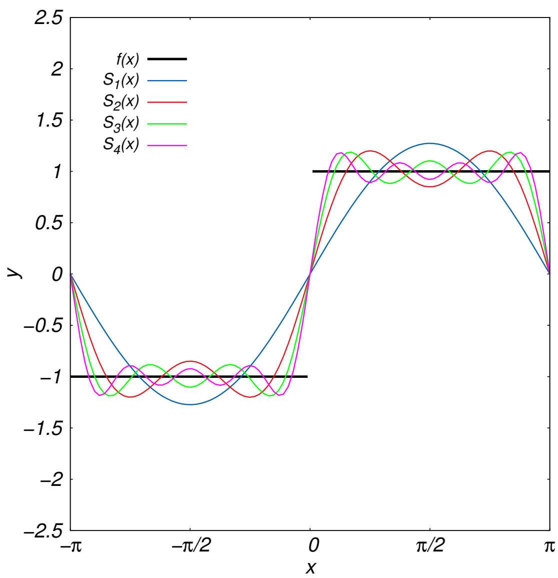

Figura 1.1

Ejemplo 1.2 *Considera la función 2π-periódica definida como:*

$$g(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ \frac{\pi - t}{2} & si\ 0 < x < 2\pi, \end{cases}$$

calculando la serie de Fourier correspondiente a g, se tiene que para $k \neq 0$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - t}{2} e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2} e^{-ikt} dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{t}{2} e^{-ikt} dt.$$

Observemos que el primer término se anula. Por otra parte, integrando por partes se tiene que

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2ik} \qquad \text{para} \qquad k \neq 0,$$

así se tiene que

$$a_k = \hat{g}(k) + \hat{g}(-k) = 0, \quad b_k = i(\hat{g}(k) - \hat{g}(-k)) = \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad a_0 = 2\hat{g}(0) = 0.$$

De aquí se sigue que la serie de Fourier de g es

$$g \sim \left(\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x) + \cdots\right)$$

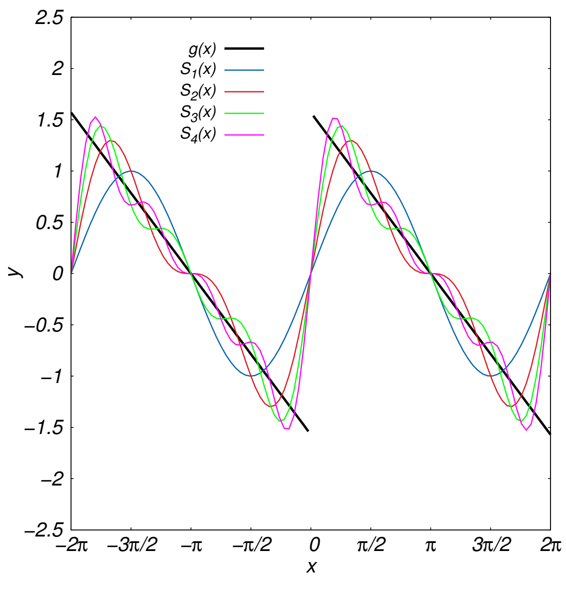

Figura 1.2

Capítulo 2

¿Qué series trigonométricas son series de Fourier?

En el presente capítulo se probarán varios resultados clásicos de series de Fourier, por mencionar algunos de ellos:

1. Los coeficientes de Fourier de funciones en $L_1(\mathbb{T})$ decaen a cero (lema de Riemann-Lebesgue).

2. No toda serie trigonométrica de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kt) + b_k \operatorname{sen}(kt)\right),$$

   donde $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ y $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ son sucesiones de números complejos y $t \in \mathbb{R}$, es serie de Fourier de alguna función de $L_1(\mathbb{T})$.

3. Los coeficientes de Fourier pueden tender a cero, tan lentamente como se quiera.

4. Identidades de Parseval para funciones de $L_2(\mathbb{T})$, así como la convergencia de las serie de Fourier, en el espacio de $L_2(\mathbb{T})$.

2.1. Lema de Riemann-Lebesgue

Lema 2.1 (Riemann-Lebesgue) *Sea $f \in L_1(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Prueba: Primero supongamos que $f = \xi_I$, donde I es un intervalo acotado $I = [a, b]$. Si $x \neq 0$ tenemos que

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt\right| = \left|\int_{a}^{b} e^{-ixt}dt\right| = \left|\frac{-1}{ix}(e^{-ixb} - e^{-ixa})\right| \leq \frac{2}{|x|}.$$

Por tanto se cumple para f. Ahora si $f \in M_0(\mathbb{R})$, entonces $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi_{I_j}$, con $(I_j)_{j=1}^{n}$ intervalos disjuntos y $(\alpha_j)_{j=1}^{n} \subseteq \mathbb{R}$, entonces

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{I_j} e^{-ixt}dt\right| \leq \frac{2\sum|\alpha_j|}{|x|}.$$

Ahora sea $f \in L_1^r(\mathbb{R})$ y $\epsilon > 0$. Entonces del Teorema (6.18) de [6], existe $\phi \in M_0(\mathbb{R})$ tal que $\int |f - \phi| < \frac{\epsilon}{2}$. Tomemos $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)e^{-ixt}dt\right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{siempre que} \qquad |x| > x_0.$$

Entonces para $|x| > x_0$ se sigue que

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt\right| &\leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - \phi(t)]e^{-ixt}dt\right| + \left|\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)e^{-ixt}dt\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - \phi(t)|dt + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.\end{aligned}$$

□

Corolario 2.1 *Si $f \in L_1(\mathbb{T})$, entonces* $\lim\limits_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0$.

Prueba: Aplicando Lema (2.1) para $f\ \xi_{[-\pi,\pi]}$, donde $\xi_{[-\pi,\pi]}$ es la función característica en $[-\pi, \pi]$.

□

Teorema 2.1 *Sea $f \in L_1(\mathbb{T})$, entonces la serie de Fourier de f es*

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kt) + b_k \operatorname{sen}(kt))$$

como en (1.2.7). Por lo que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$ converge y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)(\pi - t)dt. \tag{2.1.1}$$

La función F definida en $\mathbb{R}$ por $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ satisface

$$F(x) - \frac{a_o x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(a_k \operatorname{sen}(kx) - b_k \cos(kx)\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.1.2}$$

La segunda serie en (2.1.2) converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Además si $\alpha \leq \beta$ en $\mathbb{R}$, entonces

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^\beta \frac{a_0}{2}dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta (a_k \cos(kt) + b_k \operatorname{sen}(kt))dt. \tag{2.1.3}$$

Prueba:

Para cada $x \in \mathbb{R}$, considere la función $t \to f(x+t)$. Dado que

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha),$$

tomando el cambio de variable $u = x + t$ y Observación (1.3), los coeficientes de Fourier $b_k(x)$ de $f(x+t)$ están dados por

$$\begin{aligned} b_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\operatorname{sen}(kt)dt &= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(u)\operatorname{sen}(k(u-x))du \\ &= b_k \cos(kx) - a_k \operatorname{sen}(kx). \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Así que

$$\frac{b_k(x)}{k} = \frac{1}{k}(b_k \cos(kx) - a_k \operatorname{sen}(kx)) \qquad \text{para} \qquad k \neq 0,$$

que es el negativo del k-ésimo término de la segunda serie en la ecuación (2.1.2).

Afirmamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(x)}{k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)(\pi - t)dt, \tag{2.1.5}$$

para toda $x \in \mathbb{R}$ y así la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(x)}{k}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Sea $\epsilon > 0$, escribamos

$$A = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|dt \qquad \text{y} \qquad B = \frac{\pi}{2} + (2\pi + 1).$$

Haciendo uso del Teorema (6.79) en [6], obtenemos $0 < \delta < \pi$ tal que

$$\int_E |f| < \frac{\epsilon}{2B} \qquad \text{si} \qquad E \subseteq [0, 4\pi] \qquad \text{medible} \quad \text{con} \qquad \lambda(E) \leq 2\delta.$$

Ahora por el Teorema (1.3) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{\pi - t}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(kt)}{k} \right| < \frac{\epsilon}{2A+1}, \tag{2.1.6}$$

para toda $n > N$ y $\delta \leq t \leq 2\pi - \delta$.

Notemos que el Teorema (1.3) muestra que (2.1.6) es menor que B para $t \in [0, 2\pi]$ y toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $D = [0, \delta] \cup [2\pi - \delta, 2\pi]$. Para $x \in [0, 2\pi]$, $n > N$ y usando (2.1.4) y (2.1.6) tenemos

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t)(\pi - t)dt - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k(x)}{k} \right| = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \left[\frac{\pi - t}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(kt)}{k} \right] dt \right|$$
$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{2\pi - \delta} |f(x+t)| \frac{\epsilon}{2A+1} dt + \frac{1}{d\pi} \int_D |f(x+t)| B dt$$
$$\leq \frac{\epsilon}{2A+1} A + \frac{B}{\pi} \int_{D+x} |f(u)| du < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2\pi} < \epsilon.$$

Ya que (2.1.1) es 2π-periódica en x, la afirmación queda demostrada.

Ahora se tiene que $b_k(0) = b_k$, entonces tenemos que (2.1.1) se sigue de la ecuación (2.1.5). Además observemos que para $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t)(\pi - t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_x^{x+2\pi} f(u)(\pi - u + x)du$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{2\pi + x} - \int_0^x \right\} f(u)(\pi - u + x)du$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u)(\pi - u)du + \frac{x}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u)du$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^x f(v + 2\pi)(x - v - \pi)dv - \frac{1}{2\pi} \int_0^x f(v)(\pi - v + x)dv$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} + \frac{a_0 x}{2} - F(x) \tag{2.1.7}$$

ya que $f(v + 2\pi) = f(v)$. Sustituyendo (2.1.5) y (2.1.7) en la ecuación (2.1.1) se obtiene (2.1.2).

Evaluando en $x = \alpha$ y $x = \beta$ en la ecuación (2.1.2) y restando se obtiene

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta \frac{a_0}{2} dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k} (\operatorname{sen}(\beta k) - \operatorname{sen}(\alpha k)) - \frac{b_k}{k} (\cos(\beta k) + \cos(\alpha k)) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta (a_k \cos(kt) + b_k \operatorname{sen}(kt)) \, dt,$$

así se prueba (2.1.3).

$\square$

Ejemplo 2.1 *Consideremos la serie* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)}$ *la cual diverge a* ∞. *Ahora por el Teorema (2.1), se tiene que la serie trigonométrica*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nt)}{\log(n)},$$

no es serie de Fourier de alguna función que esté en $L_1(\mathbb{R})$. *Sin embargo la serie trigonométrica converge uniformemente en* $[\delta, 2\pi - \delta]$ *para* $0 < \delta < \pi$.

El problema del reconocimiento de si una serie trigonométrica es o no una serie de Fourier mediante la inspección de sus coeficientes, es un problema sin resolver y parece ser de extrema dificultad. Este problema es equivalente a saber cuál es el rango de la función $f \to \hat{f}$ de $L_1(\mathbb{T})$ en $c_0(\mathbb{Z})$.

2.2. Riesz-Fischer

Lema 2.2 (Riesz-Fischer) *Supongamos que* $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ *tal que*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \lim_{p \to \infty} \sum_{n=-p}^{p} |c_n|^2 < \infty.$$

Entonces existe $f \in L_2(\mathbb{T})$ *tal que* $\hat{f}(n) = c_n$ *para cada* n. *Además se tiene que* $|| f - s_p(t) ||_2 \to 0$ *cuando* $p \to \infty$.

Prueba: Escribamos $s_p(t) = \sum_{n=-p}^{p} c_n e^{int}$ para $p \geq 0$. Entonces para $q > p \geq 0$ se sigue que

$$\|s_q - s_p\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |s_q(t) - s_p(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{p<|n|\leq q} c_n e^{int} \right) \left(\sum_{p<|k|\leq q} \bar{c_n} e^{-int} \right) dt$$

$$= \sum_{p<|n|\leq q} \sum_{p<|k|\leq q} c_n \bar{c_n} \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t} dt = \sum_{p<|k|\leq q} |c_n|^2,$$

lo cual converge a 0 cuando $p, q \to \infty$. Haciendo uso del Teorema (6.110) de [6], se tiene que existe $f \in L_2(\mathbb{T})$ tal que $\|f - s_p\|_2 \to 0$ cuando $p \to \infty$.

Luego por el Teorema (1.2) es claro que $\hat{f}(n) = c_n$ para cada n.

□

Teorema 2.2 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Definamos en $\mathbb{R}$ las funciones D_n y K_n por*

$$D_n(\theta) = \sum_{j=-n}^{n} e^{ijt}, \qquad K_n(\theta) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} D_j(\theta).$$

Entonces, si $\theta \in \mathbb{R}$ es tal que $\theta \neq 2\pi k$ para $k \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos:

(1). $D_n(\theta) = 1 + 2\sum_{j=1}^{n} \cos(j\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}[(n+\frac{1}{2})\theta]}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)}$

(2). $K_n(\theta) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ij\theta} = \dfrac{1}{n+1} \left[\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2}\theta)}{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}\right]^2.$

Prueba: La primera igualdad es fácil de obtener. Sumando la progresión geométrica se tiene que

$$D_n(\theta) = \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-in\theta}}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} - e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}.$$

Ahora para probar (2), notemos que

$$(n+1)K_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=-k}^{k} e^{ij\theta} = \sum_{j=-n}^{n} \sum_{k=|j|}^{n} e^{ij\theta} = \sum_{j=-n}^{n} (n+1-|j|)e^{ij\theta}.$$

Entonces utilizando (1) y el hecho de que $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$ para todo $a, b \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(n+1)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) K_n(\theta) &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left[\cos(k\theta) - \cos\left[(k+1)\theta\right]\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \cos(n+1)\theta\right] = \operatorname{sen}^2\left(\frac{n+1}{2}\theta\right).
\end{aligned}$$

□

Lema 2.3 *Si* $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *es una sucesión monótona y* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente, entonces* $\lim\limits_{k\to\infty} ka_k = 0$.

Prueba: Primeramente supongamos que $a_k \geq 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Además por monotonía tenemos que $a_{k+1} \leq a_k$ para cada entero k.

Si $C_k = \sum_{j=k}^{\infty} a_j$, entonces $C_k \geq ka_{2k} \geq 0$. Entonces tomando límite se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} ka_{2k} = 0.$$

Ahora tenemos que $2a_{2k+1} + a_{2k+1} \leq 2a_{2k} + a_{2k+1}$ así que $\lim\limits_{k\to\infty}(2k+1)a_{2k+1} = 0$. De aquí se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} ka_k = 0.$$

Si $a_k < 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y de la monotonía se tiene que $a_k \leq a_{k+1}$ para cada k. Tomando $b_k = -a_k > 0$ para cada k, $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$ y además b_k es monótona decreciente, por el resultado anterior tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} kb_k = -\lim_{k\to\infty} ka_k = 0.$$

□

Teorema 2.3 *Sea* $(a_k)_{k=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ *una sucesión decreciente con límite cero. Supongamos que esta sucesión es convexa:* $2a_k \leq a_k + a_{k+2}$ *para todo* $k \geq 0$. *Entonces la función* f *definida en* $\mathbb{R}$ *por*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) \tag{2.2.1}$$

pertenece a $L_1^+(\mathbb{T})$ $(f \geq 0)$ *y la serie (2.2.1) es la serie de Fourier de* f. *Además esta serie converge uniformemente en* $[\delta, 2\pi - \delta]$ *siempre que* $0 < \delta < \pi$ *y así* f *es continua excepto posiblemente en múltiplos enteros de* 2π.

Prueba: Claramente f es $2\pi-$periódica y haciendo uso del Corolario (7.38) de [6], se tiene que converge uniformemente en $[\delta, 2\pi - \delta]$ para $0 < \delta < \pi$, así que f es medible en $\mathbb{R}$.

Tenemos que $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k.a_{k+1}) = a_0 < \infty$, por convexidad se tiene que

$$(a_k - a_{k+1}) \geq (a_{k+1} - a_{k+2}) \qquad \text{para todo} \qquad k$$

y por el Lema (2.3) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0.$$

Ahora sea D_n y K_n como en el Teorema (2.2) y apliquemos (1.19) dos veces para obtener

$$2s_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} 2a_k \cos(kt) \ = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) D_k(t) + a_{n+1} D_n(t)$$

$$2s_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2})(k+1) K_k(t) + (a_{n+1} - a_{n+2})(n+1) K_n(t) + a_{n+1} D_n(t).$$

Ahora si $t \neq 2\pi m$ para ($m \in \mathbb{Z}$), se sigue de el Teorema (2.2) y del hecho que $a_k \to 0$, que los dos últimos términos de la igualdad anterior convergen a 0 cuando $n \to \infty$. Esto prueba que

$$2f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2})(k+1) K_k(t), \tag{2.2.2}$$

para $t \neq 2m\pi$ y $m \in \mathbb{Z}$. Por convexidad y el hecho que $K_k(t) \geq 0$, entonces $f(t) \geq 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Notemos que por el Teorema (2.2-2) tenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_k(t) \cos(nt) dt = \begin{cases} 1 - \frac{n}{k+1} \text{ si } & 0 \leq n \leq k \\ 0 \text{ si } & 0 \leq k < n \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Usando nuevamente (1.19), tenemos que

$$a_n = \sum_{k=n}^{q} (a_k - a_{k+1}) 1 + a_{q+1}$$

$$= \sum_{k=n}^{q} (a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2})(k+1-n) + (a_{q+1} - a_{q+2})(q+1-n) + a_{q+1}$$

siempre que $0 \leq n \leq q$. Tomando el límite cuando $q \to \infty$, los dos últimos términos convergen a 0, así

$$a_n = \sum_{k=n}^{\infty} (a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2})(k+1-n). \tag{2.2.4}$$

Como todos los términos en (2.2.2) son positivos, y usando el Teorema (6.46) de [6], nos permite integrar término a término; ahora aplicando (2.2.3) y (2.2.4) con $n = 0$, obtenemos

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = a_0 < \infty,$$

esto prueba que $f \in L_1^+(\mathbb{T})$.

Finalmente multiplicando (2.2.2) por $\cos(nt)$ término a término, es claro que la sucesión de sumas parciales de (2.2.2) está dominada por $2f$ en $[0, 2\pi]$, así haciendo uso del Teorema (6.55) en [6], nos permite integrar término a término.

Aplicando (2.2.3) y (2.2.4) se sigue que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt = a_n$$

para cada $n \geq 0$.

$\square$

Corolario 2.2 *Sea $(c_n)_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ no negativa que converge a cero. Entonces existe $f \in L_1^+(\mathbb{T})$ tal que $\hat{f}(-n) = \hat{f}(n) > c_n$ para cada $n \geq 0$.*

Prueba: Solo necesitamos encontrar una sucesión convexa $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $a_n > 2c_n$ para toda n, como en el Teorema (2.3), para poder definir f como fue definida en (2.2.1) y tenemos que $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n) = \frac{a_n}{2}$ para toda $n \geq 0$.

Para obtener $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, primero obtengamos una sucesión $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ de enteros no negativos.
Sea $n_0 = 0$. Si n_{k-1} ha sido elegido para $k \geq 1$, entonces seleccionemos $n_k > 2n_{k-1}$ tal que

$$c_n < \frac{1}{2^{k+2}} \qquad \text{para} \qquad n \geq n_k. \tag{2.2.5}$$

Es claro que

$$2(n_{k+1} - n_k) > (n_k - n_{k-1}) \tag{2.2.6}$$

para todo $k \geq 1$. Sea

$$M = 1 + 2\max\{c_n : 0 \leq n < n_1\}. \tag{2.2.7}$$

Definamos a_n por

$$a_n = \frac{1}{2} + M(n_1 - n) \qquad \text{para} \qquad 0 \leq n \leq n_1$$

y

$$a_n = \frac{(2n_{k+1} - n_k - n)}{(2^{k+1}(n_{k+1} - n_k))} \qquad \text{para} \qquad n_k \leq n \leq n_{k+1}$$

para $k > 0$.

Notemos que para $n = n_k$ se obtiene $a_{n_k} = \frac{1}{2^k}$ con $k \geq 1$. Es obvio que $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ es decreciente y tiene límite 0, además por (2.2.5) y (2.2.7) se tiene que $2c_n < a_n$ para todo $n \geq 0$.

Por la propiedad de convexidad, se tiene

$$a_{n-1} + a_{n+1} \geq 2a_n \qquad \text{si} \qquad n_{k-1} < n < n_k \qquad \text{para} \qquad k > 0.$$

Si $n = n_k$ usemos (2.2.6) y el hecho que $a_{n_1-1} > M \geq 1 \geq \frac{(n_1+1)}{2n_1}$ (para el caso $k = 1$) para obtener

$$\begin{aligned} a_{n_k-1} + a_{n_k+1} &\geq \frac{n_k - n_{k-1} + 1}{2^k(n_k - n_{k-1})} + \frac{n_{k+1} - n_k - \frac{1}{2}}{2^k(n_{k+1} - n_k)} \\ &= \frac{1}{2^k}\left[1 + \frac{1}{n_k - n_{k-1}} + 1 - \frac{1}{2(n_{k+1} - n_k)}\right] \\ &= 2a_{n_k} + \frac{1}{2^k}\left[\frac{1}{n_k - n_{k-1}} - \frac{1}{2(n_{k+1} - n_k)}\right] > 2a_{n_k}. \end{aligned}$$

□

El Corolario (2.2) muestra que las sucesiones de los coeficientes de Fourier pueden tender a 0 tan lentamente como se quiera.

Ejemplo 2.2 *Para cualquier sucesión convexa, con límite 0 como en el Teorema (2.3) tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \infty,$$

tenemos por el Teorema (2.3) que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt),$$

es una serie de Fourier, y sin embargo el Teorema (2.1) nos dice que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt),$$

no es serie de Fourier.

Lema 2.4 *Sea $f \in L_2(\mathbb{T})$. Entonces*

(1). $\|s_p(f)\|_2 \leq \|f\|_2$ *para* $p \geq 0$.

(2). $\lim\limits_{p\to\infty} \|f - s_{p(f)}\|_2 = 0.$ *donde $s_p(f)$ es como en (1.18).*

Prueba: Como abreviatura denotemos,

$$\langle g,h\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\bar{h}(t)dt, \qquad e_n = e^{int}, \qquad y \qquad s_p = s_p(f) = \sum_{n=-p}^{p} \hat{f}(n)e_n.$$

Entonces $\|f\|_2^2 = \langle f,f\rangle$, $\hat{f}(n) = \langle f,e_n\rangle = \overline{\langle e_n,f\rangle}$, $\langle e_n,e_k\rangle = 0$ para $k\neq n$ y 1 si $k=n$,

$$\langle s_p,f\rangle = \sum_{n=-p}^{p}\hat{f}(n)\langle e_n,f\rangle = \sum_{n=-p}^{p}|\hat{f}(n)|^2,$$

$$\langle f,s_p\rangle = \sum_{n=-p}^{p}\overline{\hat{f}(n)}\langle f,e_n\rangle = \sum_{n=-p}^{p}|\hat{f}(n)|^2$$

y

$$\langle s_p,s_p\rangle = \sum_{n=-p}^{p}\sum_{k=-p}^{p}\hat{f}(n)\overline{\hat{f}(k)}\langle e_n,e_k\rangle = \sum_{n=-p}^{p}|\hat{f}(n)|^2.$$

Por lo tanto

$$0 \le \|f-s_p\|_2^2 = \langle f-s_p,f-s_p\rangle = \langle f,f\rangle - \langle f,s_p\rangle - \langle s_p,f\rangle + \langle s_p,s_p\rangle = \|f\|_2^2 - \sum_{n=-p}^{p}|\hat{f}(n)|^2$$

para $p\ge 0$, así

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2 \le \|f\|_2^2. \tag{2.2.8}$$

Ahora por (2.2.8) y el Teorema (2.2) existe $g\in L_2(\mathbb{T})$ tal que $\hat{g}(n) = \hat{f}(n)$ para toda n, y

$$\|g-s_p\|_2 = \|g-s_p(g)\|_2 \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad p\to\infty.$$

Por el Teorema (1.4) tenemos que $f=g$ c.d, y así $\|f-s_p\|_2 = \|g-s_p\|\to 0$.

□

2.3. Identidades de Parseval

Lema 2.5 (Identidades de Parseval) *Sea* $f,g\in L_2(\mathbb{T})$. *Entonces*

(1). $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g}(t)dt$

(2). $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt.$

En particular, estas dos series convergen.

Prueba: Usemos la notación de la prueba anterior, tenemos

$$\langle s_p(f), s_p(g)\rangle = \sum_{n=-p}^{p}\sum_{k=-p}^{p} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(k)}\langle e_n, e_k\rangle = \sum_{n=-p}^{p} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$$

para todo $p \geq 0$, y así usamos Lema (2.4) y Desigualdad de Schwarz (ver [6], Página 340), se tiene

$$\begin{aligned}
|\langle f, g\rangle - \sum_{n=-p}^{p} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}| &= |\langle f, g\rangle - \langle s_p(f), s_p(g)\rangle| \\
&\leq |\langle f, g\rangle - \langle s_p(f), g\rangle| + |\langle s_p(f), g\rangle - \langle s_p(f), s_p(g)\rangle| \\
&\leq \|f - s_p(f)\|_2\|g\|_2 + \|s_p(f)\|_2\|g - s_p(g)\|_2 \\
&\leq \|f - s_p(f)\|_2\|g\|_2 + \|f\|_2\|g - s_p(g)\|_2 \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad p \to \infty.
\end{aligned}$$

Por tanto concluímos que

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{n=-p}^{p} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \langle f, g\rangle,$$

así se cumple (1). Finalmente (2) se sigue de (1) con $f = g$.

□

Observación 2.1 *Combinando Lema (2.5) y Teorema (2.2) tenemos que la función $f \to \hat{f}$, restringida a $L_2(\mathbb{T})$, es una isometría lineal de $L_2(\mathbb{T})$ sobre $l_2(\mathbb{Z})$.*

En resultados anteriores se ha probado que si $f \in L_2(\mathbb{T})$, entonces la series de Fourier de f converge en norma cuadrática de $L_2(\mathbb{T})$. Es decir, para cada $f \in L_2(\mathbb{T})$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_{n(f)}\|_{L_2} = 0.$$

De aquí se sugiere el estudio del problema análogo en los espacios $L_p(\mathbb{T})$ si $1 \leq p$ y $p \neq 2$, el cual se discutirá al final del capítulo 4.

Capítulo 3

Sumabilidad de las Series de Fourier

Dada $f \in L_1(\mathbb{T})$, la serie de Fourier de f es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_k \cos(nx) + b_k \operatorname{sen}(nx));$$

la pregunta central es, dada $f \in L_1(\mathbb{T})$, ¿cuándo $s_n(f, x)$ converge a $f(x)$ para cada x en algún sentido?, es decir convergencia puntual, convergencia uniforme, convergencia en norma $L_p(\mathbb{T})$ para $1 \leq p$, etc.

En el presente capítulo se analizara, que la convergencia puntual de la sucesión de sumas parciales de Fourier de f, $s_n(f, x)$ puede no converger al valor $f(x)$ para algún x, incluso para funciones continuas como se verá en el siguiente capítulo.

Sin embargo, cambiando el criterio de sumabilidad de la sucesión de sumas parciales de Fourier $s_n(f, x)$ de f,(por ejemplo, sumabilidad de Cesáro, sumabilidad de Abel, etc), se puede recuperar la función en sus puntos de continuidad como se verá en el presente apartado.

3.1. Sumabilidad de Cesáro y de Abel.

Definición 3.1 *Sea $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ sucesión de números complejos. Escribimos*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \qquad y \qquad \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k.$$

Si existe un $s \in \mathbb{C}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = s$, entonces decimos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ es Cesáro convergente. Y escribimos

$$C - \sum_{k=0}^{\infty} c_k = s.$$

Sea $(c_n(x))_{n=0}^{\infty}$ *sucesión de funciones complejas definidas en* $X \neq \varnothing$ *y sea* $\sigma_n(x)$ *como se definió anteriormente. Si existe una función compleja* s *definida en* X*, tal que* $\sigma_n(x) \to s(x)$ *uniformemente en* X *cuando* $n \to \infty$*. Entonces decimos que la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x)$ *es Cesáro uniformemente convergente a* s *en* X*.*

Definición 3.2 *Sea* $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de números complejos, tal que*

$$A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n,$$

converge para $0 \leq r < 1$*. Si* $\lim\limits_{r \uparrow 1} A(r) = s \in \mathbb{C}$*, entonces decimos que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *es Abel convergente. En este caso escribimos*

$$A - \sum_{n=0}^{\infty} c_n = s.$$

De igual forma si $(c_n(x))_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones complejas definidas en* X*, tal que*

$$A(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) r^n,$$

es convergente para $x \in X$ *y* $0 \leq r < 1$*. Y si existe una funcion* s *en* X *tal que* $\lim\limits_{r \uparrow 1} A(x, r) = s(x)$ *uniformemente en* X*. Decimos que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)$ *es Abel uniformemente convergente a* s*.*

Teorema 3.1 *Sea* $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ *sucesión de funciones complejas acotadas, definidas en* $X \neq \varnothing$*. Consideremos*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n. \tag{3.1.1}$$

Si (3.1.1) es C uniformemente convergente a s *en* X*, entonces (3.1.1) es Abel uniformemente convergente.*

Prueba: Sabemos que $\lim\limits_{n \to \infty} ||s - \sigma_n||_u = 0$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||s - \sigma_n||_u < \frac{\epsilon}{2}$ si $n \geq n_0$. Sea $r_0 \in [0, 1)$ tal que

$$(1 - r_0)^2 \sum_{n=0}^{n_0} (n + 1) ||s - \sigma_n||_u < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.1.2}$$

Ya que la serie (3.1.1) es C convergente para cada $x \in X$. Se tiene que $\sigma_n(x) \to s(x)$ con $s(x) \in \mathbb{C}$, así que

$$\frac{s_n(x)}{n} = \frac{[(n + 1)\sigma_n(x) - n\sigma_{n-1}(x)]}{n} \to s(x) - s(x) = 0,$$

y
$$\frac{c_n(x)}{n} = \frac{s_n(x)}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{s_{n-1}(x)}{n-1} \to 0.$$
De esto se sigue que $|c_n(x)| \leq n$ para $n \geq n_1$, así

$$|A(x,r)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(c) r^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x)||r^n| \leq \sum_{n=0}^{n_1-1} |c_n(x)||r|^n + \sum_{n=n_1}^{\infty} n|r|^n,$$

Ahora aplicando el criterio de convergencia de Cauchy (ver [6], Página 70), al último término de la desigualdad anterior, se tiene

$$n|r|^n \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|r|^n} = |r| < 1,$$

así la serie $A(x,r)$ esta acotada por una serie converge para cada $x \in X$ y para $|r| < 1$.

Ahora tenemos que
$$(1-r)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 1r^n$$
y aplicando producto de Cauchy

$$A(x,r) = (1-r)\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x) r^n$$
y nuevamente aplicando producto de Cauchy tenemos que

$$A(x,r) = (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n(x) r^n, \tag{3.1.3}$$
para toda $x \in X$ y $|r| < 1$.

Tenemos que
$$s(x) = (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) s(x) r^n,$$
y haciendo la diferencia con (3.1.3) se sigue que

$$s(x) - \sigma_n(x) = (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left[s(x) - \sigma_n(x)\right] r^n,$$
para $x \in X$ y $|r| < 1$.

Ahora sea $x \in X$ y $r_0 \leq r < 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
|s(x) - A(x,r)| &\leq (1-r_0)^2 \sum_{n=0}^{n_0} (n+1)||s-\sigma_n||_u + (1-r)^2 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (n+1)||s-\sigma_n||_u r^n \\
&< \frac{\epsilon}{2} + (1-r)^2 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (n+1)\frac{\epsilon}{2} r^n \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}(1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 3.2 *Sea $f \in L_1(\mathbb{T})$, D_n y K_n como en Teorema (2.2) :*

$$
D_n(t) = \frac{\operatorname{sen}\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}t)}, \qquad K_n(t) = \frac{\operatorname{sen}^2\left[(\frac{n+1}{2})t\right]}{(n+1)\operatorname{sen}^2[(\frac{1}{2})t]}
$$

y sea

$$
P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt}
$$

para todo $n \geq 0$, $0 \leq r < 1$, y $x, t \in \mathbb{R}$. Entonces

(1). $P_r(t) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}$,

(2). $s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt$,

(3). $\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt$,

(4). $\alpha_r(f,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\hat{f}(k)e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)dt$

Prueba: Para probar (1), sea $t \in \mathbb{R}$ fijo y $0 \leq r < 1$. Ya que la p-ésima suma parcial de $P_r(t)$

$$
\sum_{k=-p}^{p} r^{|k|}e^{ikt} = \sum_{k=0}^{p} r^k e^{ikt} + \sum_{k=1}^{p} r^k e^{-ikt},
$$

tomando límite $p \to \infty$ tenemos

$$
\sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{ikt} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikt} = \frac{1}{1-re^{it}} + \frac{re^{-it}}{1-re^{-it}} = \frac{1-re^{-it}+re^{-it}-r^2}{1-2\cos(t)+r^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}
$$

Para probar (2) y (3) usemos la definición de D_n y K_n dada en el Teorema (2.2), entonces tenemos

$$\begin{aligned} s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx} &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-iku}du e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left[\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-u)}\right] du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)D_n(x-u)du \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(f,x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)D_k(x-u)du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left[\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x-u)\right] du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)K_n(x-u)du, \end{aligned}$$

ahora haciendo la sustitución $t = x - u$ queda probado (2) y (3). Para mostrar (4) tomemos la p-ésima suma parcial, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=-p}^{p} r^{|k|}\hat{f}(k)e^{ikx} &= \sum_{k=-p}^{p} r^{|k|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-iku}du e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-p}^{p} r^{|k|}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{ik(x-u)}du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left[\sum_{k=-p}^{p} r^{|k|}e^{ik(x-u)}\right] du. \end{aligned}$$

Ya que la función $P_r(t)$ converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$ del Teorema (3.106) de [6] con $0 \leq r < 1$, es posible pasar el límite dentro del signo de integral.

$\square$

A las funciones $D_n(t)$, $K_n(t)$ y $P_r(t)$ definidas anteriormente son llamadas el núcleo de Dirichlet, Fejér y Poisson respectivamente. El siguiente teorema nos muestra algunas propiedades de dichos núcleos.

Teorema 3.3 *Sea K_n y P_r como anterior. Entonces, para $n \geq 0$, $0 \leq r < 1$, y $t \in \mathbb{R}$, tenemos*

(1). $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1,$

(2). $K_n(t) = K_n(-t)$ *y* $P_r(t) = P_r(-t),$

(3). $0 \leq K_n(t) \leq n+1$ *y* $\frac{1-r}{1+r} \leq P_r(t) \leq \frac{1+r}{1-r},$

(4). $0 \leq K_n(t) \leq \frac{\pi^2}{(n+1)t^2}$ *si* $0 < t \leq \pi.$

Prueba: Es claro que por definición de $D_k(t)$ en Teorema (2.2), se tiene

$$|D_k(t)| = \left|\sum_{j=-k}^{k} e^{ijt}\right| \leq 2k+1,$$

y así

$$(n+1)K_n(t) \leq \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2.$$

Ahora sabemos que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \geq \frac{t}{\pi} \qquad \text{para} \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$

De (2.10) para $n = 0$, se prueba la primera igualdad de (1). Ahora del Teorema (3.2) tenemos que

$$P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k\left(e^{-ikt} + e^{ikt}\right) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k\cos(kt).$$

Ya que la función $P_r(t)$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, se sigue que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)dt = 1.$$

Es claro (2), ahora tenemos que

$$(n+1)K_n(t) \leq \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2,$$

esto prueba la primera desigualdad de (3). Sabemos que $-1 \leq \cos(t) \leq 1$ y $0 \leq r < 1$, tenemos

$$(1+r)^2 = 1 + 2r + r^2 \geq 1 - 2r\cos(t) + r^2$$

y

$$1 - 2r\cos(t) + r^2 \geq 1 - 2r + r^2 = (1-r)^2$$

por tanto

$$\frac{1-r}{1+r} \leq P_r(t) \leq \frac{1+r}{1-r}.$$

Si $\operatorname{sen}(\frac{t}{2}) \geq \frac{t}{\pi}$ para $0 \leq t \leq \pi$, entonces $\frac{t^2}{\pi^2} \leq \operatorname{sen}^2(\frac{t}{2})$ para $0 \leq t \leq \pi$, así

$$0 \leq K_n(t) \leq \frac{1}{(n+1)\operatorname{sen}^2(\frac{t}{2})} \leq \frac{\pi^2}{t^2(n+1)}.$$

$\square$

3.2. Teorema de Fejér

Teorema 3.4 (Fejér) *Si $f \in L_1(\mathbb{T})$, entonces*

(1). *Si $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x-) = \lim_{t\uparrow x} f(t)$ y $f(x+) = \lim_{t\downarrow x} f(t)$ existen y son finitos, entonces $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f,x) = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}$.*

(2). *Si f es continua en el intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, entonces el polinomio trigonométrico*

$$\sigma_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{f}(k)e^{ikx}$$

converge uniformemente a f en $[a,b]$.

A dichos polinomios $\sigma_n(f)$ son llamados sumas de Fejér de f.

Prueba: Fijemos $x \in \mathbb{R}$, sea $s(x) \in \mathbb{C}$ arbitrario. Entonces por Teorema (3.2-3) y Teorema (3.3-1) se tiene que

$$\sigma_n(f,x) - s(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - s(x)]\, K_n(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x-t) + f(x+t) - 2s(x)]\, K_n(t)dt, \quad (3.2.1)$$

donde escribimos $s(x) = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}$. Sea $\epsilon > 0$ dado. Escojamos $0 < \delta < \pi$ tal que

$$|f(x-t) + f(x+t) - 2s(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad (3.2.2)$$

siempre que $0 < t < \delta$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left[\frac{2\pi^2}{N\delta^2}\right](||f||_1 + |s(x)|) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.2.3}$$

Escribimos $\phi(x,t) = f(x-t) + f(x+t) - 2s(x)$; de (3.2.1) tenemos

$$|\sigma_n(f,x) - s(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi |\phi(x,t)K_n(t)|dt.$$

De (3.2.2), (3.3-3) y (3.3-1) se tiene que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta |\phi(x,t)K_n(t)|dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \frac{\epsilon}{2}K_n(t)dt \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

De forma similar las ecuaciones (3.3-4) y (3.2.3) muestran que para $n \geq N$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_\delta^\pi |\phi(x,t)K_n(t)|dt &\leq \int_\delta^\pi |\phi(x,t)|\frac{\pi^2}{(n+1)t^2}dt \\
&\leq \frac{\pi^2}{(n+1)\delta^2}\int_\delta^\pi \left[|f(x-t)| + |f(x+t)| + 2|s(x)|\right]dt \\
&\leq \left(\frac{\pi^2}{(n+1)\delta^2}\right)(2\pi||f||_1 + 2\pi||f||_1 + 2\pi|s(x)|) < \pi\epsilon, \qquad (3.2.4)
\end{aligned}$$

de esto concluímos que

$$|\sigma_n(f,x) - s(x)| < \epsilon \tag{3.2.5}$$

para toda $n \geq N$. La prueba
de (2) es casi la misma que para (1), a la cual se le harán las siguientes modificaciones.

Supongamos que f es continua en $[a,b]$, entonces escribimos $s(x) = f(x)$ para $x \in [a,b]$. La función f es uniformemente continua en $[a,b]$, entonces escojamos $0 < \delta < \pi$ independiente de $x \in [a,b]$ tal que se cumpla (3.2.2) para toda $x \in [a,b]$ y $0 < t < \delta$.
Ahora sea $N \in \mathbb{N}$ para obtener (3.2.3) donde $|s(x)|$ se remplaza por

$$M = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\},$$

así N es independiente de $x \in [a,b]$. Cambiemos a $|s(x)|$ en (3.2.4) por M para tener (3.2.5) con $x \in [a,b]$ y $n \geq N$.

$\square$

Observación 3.1 *Del Teorema (3.4-2) $\sigma_n(f,x)$ puede ser remplazada por $\alpha_r(f,x)$ lo cual se sigue del Teorema (3.1).*

3.3. Teorema de Lebesgue

Teorema 3.5 (Lebesgue) *Si f es una función compleja Lebesgue medible definida casi en todo $\mathbb{R}$ tal que*

$$\int_a^b |f(t)|dt < \infty,$$

para cada $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ (a tal función decimos que es localmente integrable),

entonces existe $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue medible tal que $\lambda(\mathbb{R}\backslash E) = 0$ y

(1). $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - c|dt = |f(x) - c|$ *para cada $x \in E$ y $c \in \mathbb{C}$.*

(2). $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^{h} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(s)|dt = 0$ *para cada $x \in E$.*

(donde λ es la medida de Lebesgue)

Prueba: Sea $(c_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ denso numerable. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ a F_n en $\mathbb{R}$ por

$$F_n(x) = \int_0^x |f(t) - c_n|dt$$

y sea $E_n = \left\{x \in \mathbb{R} : F_n'(x) = |f(x) - c_n|\right\}$. Haciendo uso del Teorema (6.84) de [6], se tiene que $\lambda(\mathbb{R}\backslash E_n) = 0$, y por tanto E_n contiene a cada x para el cual f es continua.

Ahora sea $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Así E es medible y

$$\lambda(\mathbb{R}\backslash E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathbb{R}\backslash E_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(\mathbb{R}\backslash E_n) = 0,$$

entonces $\lambda(\mathbb{R}\backslash E) = 0$. Sea $x \in E$, $c \in \mathbb{C}$ y $\epsilon > 0$ dado. Fijemos n tal que $|c_n - c| < \frac{\epsilon}{3}$. Entonces $x \in E_n$, y por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - c_n|dt - |f(x) - c_n|\right| &= \left|\frac{F_n(x+h) - F_n(h)}{h} - |f(x) - c_n|\right| \\ &< \frac{\epsilon}{3}, \qquad (3.3.1)\end{aligned}$$

siempre que $0 < |h| < \delta$ ($h \in \mathbb{R}$).

Es obvio que

$$||f(t)-c|-|f(t)-c_n|| \leq |c-c_n| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{para cada } \ t,$$

y así tenemos que

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-c|dt - \frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-c_n|dt\right| < \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{\epsilon}{3}dt\right| = \frac{\epsilon}{3}, \tag{3.3.2}$$

para $0 \neq h \in \mathbb{R}$. También se tiene que

$$||f(x)-c_n|-|f(x)-c|| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{3.3.3}$$

Combinando la ecuaciones (3.3.1), (3.3.2) y (3.3.3) se tiene

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-c|dt - |f(x)-c|\right| &\leq \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-c|dt - \frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-c_n|dt\right| \\ &+ ||f(x)-c|-|f(x)-c_n|| + \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-c_n|dt - |f(x)-c_n|\right| \\ &< \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

siempre que $0 < |h| < \delta$ $(h \in \mathbb{R})$. Esto prueba (1).
Ahora fijemos $x \in E$, $0 \neq h \in \mathbb{R}$ y tomando los cambios de variable $u = x+t$ y $v = x-t$, se sigue que

$$\begin{aligned}0 &\leq \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|dt \\ &\leq \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt + \frac{1}{h}\int_0^h |f(x-t)-f(x)|dt \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(u)-f(x)|du + \frac{1}{-h}\int_0^{x-h}|f(v)-f(x)|dv,\end{aligned}$$

así (2) se sigue de (1) tomando límite para $c = f(x)$.

□

Definición 3.3 *Sea f como en el Teorema (3.5). Un punto $x \in \mathbb{R}$ es llamado punto de Lebesgue de f, si el Teorema (3.5-2) se satisface. El conjunto de puntos de Lebesgue de f es llamado conjunto de Lebesgue de f.*

Ejemplo 3.1 *El Teorema (3.5) nos dice que si f es localmente integrable, entonces casi todo punto de $\mathbb{R}$ es punto de Lebesgue de f. Pero no todo punto de Lebesgue satisface el Teorema (3.5-1).*

Tomemos la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si} & t > 0 \\ 0 \text{ si} & t = 0 \\ -1 \text{ si} & t < 0. \end{cases}$$

Se tiene

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) + f(x-t) - 2f(s)| dt = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - f(-t)| dt = 0.$$

Así $x = 0$ es punto de Lebesgue, sin embargo $x = 0$ no satisface el Teorema (3.5-1), ya que si tomamos $c = 0$, tenemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - c| dt = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(t)| dt = 1 \neq 0.$$

3.4. Teorema de Fejér-Lebesgue

Teorema 3.6 (Fejér-Lebesgue) *Si $f \in L_1(\mathbb{T})$, entonces $\lim_{n \to \infty} \sigma_n(f, x) = f(x)$ para cada x punto de Lebesgue de f. En particular, la serie de Fourier de f es $C-$ convergente casi para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Prueba: Sea x punto de Lebesgue de f fijo. Escribamos

$$\phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

y

$$\Phi(h) = \int_0^h |\phi(t)| dt, \qquad \Phi(\pi) = a.$$

Sea $\epsilon > 0$ dado. Entonces por el Teorema (3.5-2), existe $0 < \delta < \pi$ tal que

$$\left| \frac{1}{h} \Phi(h) \right| < \frac{\epsilon}{13} \qquad \text{para} \qquad 0 < |h| \leq \delta.$$

Ahora por el Teorema (3.3-4) escojamos $N \gg \frac{1}{\delta}$ tal que

$$0 \leq K_n(t) < \frac{\epsilon}{a+1}$$

si $n \geq N$ y $\delta \leq t \leq \pi$.

Ahora tenemos

$$2\pi |\sigma_n(f, x) - f(x)| \leq \int_0^\pi |\phi(t)| K_n(t) dt = \int_0^{\frac{1}{n}} |\phi(t)| K_n(t) dt$$

$$+\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |\phi(t)|K_n(t)dt + \int_{\delta}^{\pi} |\phi(t)|K_n(t)dt. \qquad (3.4.1)$$

Estimaremos cada una de estas integrales para $n \geq N$. Del Teorema (3.3-3), se tiene

$$\int_0^{\frac{1}{n}} |\phi(t)|K_n(t)dt \leq \int_0^{\frac{1}{n}} |\phi(t)|(n+1)dt = (n+1)\Phi\left(\frac{1}{n}\right) \leq 2n\Phi\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{2\epsilon}{13}, \qquad (3.4.2)$$

ya que $0 < \frac{1}{n} < \delta$.

$$\int_{\delta}^{\pi} |\phi(t)|K_n(t)dt \leq \int_{\delta}^{\pi} |\phi(t)|\frac{\epsilon}{a+1}dt \leq \frac{\epsilon}{a+1}\Phi(\pi) < \epsilon. \qquad (3.4.3)$$

La función

$$\Phi(h) = \int_0^h |\phi(t)|dt$$

es absolutamente continua en $[\frac{1}{n}, \delta]$ por el Teorema (6.84) en [6], también la función $G(t) = \frac{1}{t^2}$ es absolutamente continua en el mismo intervalo.

Si nombramos

$$F(t) = \int_0^h |\phi(t)|dt,$$

usando el Teorema (3.3-4), y integración por partes Teorema (6.90) en [6], se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |\phi(t)|K_n(t)dt &\leq \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |\phi(t)|\frac{\pi^2}{(n+1)t^2}dt = \frac{\pi^2}{(n+1)}\left[\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |\phi(t)|\frac{1}{t^2}dt\right] \\
&= \frac{\pi^2}{(n+1)}\left[\int_0^{\delta} |\phi(t)|dt\frac{1}{\delta^2} - n^2\int_0^{\frac{1}{n}} |\phi(t)|dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta}\left(\Phi(t)\frac{2}{t^3}\right)dt\right] \\
&= \frac{\pi^2}{(n+1)}\left[\delta^{-2}\Phi(\delta) - n^2\Phi\left(\frac{1}{n}\right) + 2\int_{\frac{1}{n}}^{\delta}\Phi(t)t^{-3}dt\right] \\
&< \frac{\pi^2}{(n+1)}\delta^{-1}\frac{\epsilon}{13} + \frac{2\pi^2}{(n+1)}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta}\frac{\epsilon}{13}t^{-2}dt \\
&< \frac{\pi^2\epsilon}{13} + \left(\frac{2\pi^2\epsilon}{13(n+1)}\right)(n - \delta^{-1}) < \frac{3\pi^2\epsilon}{13}. \qquad (3.4.4)
\end{aligned}$$

Ahora de las ecuaciones (1.13), (1.14), (1.15) y (1.12) se sigue

$$|\sigma_n(f,x) - f(x)| < \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\epsilon}{13} + \frac{3\pi^2\epsilon}{13} + \epsilon\right] < \frac{\epsilon}{13} + \frac{6\epsilon}{13} + \frac{3\epsilon}{13} < \epsilon$$

para todo $n \geq N$.

□

Corolario 3.1 *Si $f \in L_1(\mathbb{T})$ y si su serie de Fourier $s(f)$ de f converge c.d. en $\mathbb{R}$ a una función g, entonces $g = f$ c.d.*

Prueba: Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} s_n(f,x) = g(x)$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|g(x) - s_n(f,x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para $n \geq n_0$.

Ahora sea $N > n_0$ tal que

$$\frac{1}{N}\left|\sum_{k=0}^{n_0}(g(x) - s_k(f,x))\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Si $n > N$ entonces

$$\begin{aligned}
|g(x) - \sigma_n(x)| &= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(g(x) - s_k(f,x))\right| \\
&\leq \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0}(g(x) - s_k(f,x))\right| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}|g(x) - s_k(f,x)| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{n-n_0}{n+1}\frac{\epsilon}{2} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Usando el Teorema (3.6) se sigue que

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(f,x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(f,x) = f(x).$$

□

Teorema 3.7 *Si $f \in C(\mathbb{T})$, entonces la función F definida en el disco unitario $D = \left\{re^{i\theta} \ : \ \theta \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq r \leq 1\right\}$ por*

$$F(e^{i\theta}) = f(\theta) \qquad y \qquad F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)P_r(t)dt \qquad si \qquad 0 \leq r < 1.$$

es continua.

Prueba: Claramente la función está bien definida. Para $|z| < 1$, escribimos $z = re^{i\theta}$ y usando Teorema (3.2-4) tenemos que

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\hat{f}(k)e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{\infty}\hat{f}(k)z^k + \sum_{k=1}^{\infty}\hat{f}(-k)\overline{z}^k.$$

La función $\hat{f}$ es acotada, por tanto las dos series convergen para $|z| = |\overline{z}| < 1$. Así estas dos sumas son continuas para $|z| < 1$. Esto prueba que la función F es continua en $D^0 = \{z \in \mathbb{C} \quad : \quad |z| < 1\}$.

Ya que la función $f \in C(\mathbb{T})$, entonces por el Teorema (3.4-2) con $[a, b] = [-\pi, \pi]$ y Teorema (3.1) se sique que

$$\lim_{r \uparrow 1} F(re^{i\theta}) = \lim_{r \uparrow 1} \alpha_r(f, \theta) = f(\theta) = F(e^{i\theta})$$

uniformemente para $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $0 < \delta < 1$ tal que $1 - \delta < r \leq 1$ implica que

$$|F(re^{i\theta}) - F(e^{i\theta})| < \frac{\epsilon}{2} \tag{3.4.5}$$

para toda $\theta \in \mathbb{R}$.

Sabemos que f es continua y periódica, entonces se tiene que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, así existe $0 < \eta \leq \delta$ tal que

$$|F(e^{i\theta}) - F(e^{i\alpha})| = |f(\theta) - f(\alpha)| < \frac{\epsilon}{2} \tag{3.4.6}$$

para cada $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$ tal que $|\alpha - \theta| < \eta$.

Ahora para verificar la continuidad de F en la frontera de D, sea $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo. Sea $\epsilon > 0$ dado, escojamos δ y η como anteriormente, entonces aplicando (3.4.5) y (3.4.6) se tiene que

$$|F(re^{i\theta}) - F(e^{i\alpha})| \leq |F(re^{i\theta}) - F(e^{i\theta})| + |F(e^{i\theta}) - F(e^{i\alpha})| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

siempre que $1 - \delta < r \leq 1$ y $|\theta - \alpha| < \eta$.

□

Teorema 3.8 *Si $f \in L_1(\mathbb{T})$ esencialmente acotada: $|f(x)| \leq M < \infty$ c.d. en $\mathbb{R}$, entonces $||\sigma_n(f)||_u \leq M$ para cada $n \geq 0$.*

Prueba: Por Teorema (3.2-3) y el Teorema (3.3-1) se tiene que

$$|\sigma_n(f, x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x - t)| K_n(t) dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M K_n(t) dt = M$$

para cada x y para cada n.

□

Capítulo 4

Localización de Riemann y Criterios de Convergencia

En este apartado establecemos unos pocos (de los muchos) teoremas clásicos que se ocupan de la convergencia ordinaria, es decir; puntual, uniforme y convergencia en norma (en $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p$) de las series de Fourier. Queremos criterios que nos permitan deducir la convergencia de una propiedad sencilla de la función.

Iniciaremos mostrando el teorema clásico de no convergencia puntual para funciones continuas probado por du Bois-Reymond en 1873. La prueba será presentada en forma no constructiva haciendo uso del teorema de acotación uniforme.

4.1. No convergencia puntual

Teorema 4.1 *Existe f función continua con valores en $\mathbb{R}$ cuya serie de Fourier diverge en un punto t_0.*

Prueba: Sea X el espacio normado de las funciones continuas $2\pi-$periódicas con norma definida por

$$||x||_\infty = \sup\{|x(t)| \ : \ t \in [a,b]\}\,. \tag{4.1.1}$$

Se tiene que X es un espacio de Banach con $a = 0$ y $b = 2\pi$. Tomemos $t_0 = 0$. Para probar nuestra afirmación, haremos uso del teorema de acotación uniforme Teorema (4.7-3) en [3], para $T_n = s_n$, donde $s_n(x)$ es el valor en $t = 0$ de la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de x como en (1.1.2).

Entonces se tiene que

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{n} a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos(mt)\right]dt,$$

donde

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos(mt)dt.$$

Ahora haciendo los siguientes cálculos tenemos que

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)\sum_{m=1}^{n}\cos(mt) &= \sum_{m=1}^{n} 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)\cos(mt) \\ &= \sum_{m=1}^{n}\left[-\operatorname{sen}\left(\left(m-\frac{1}{2}\right)t\right) + \operatorname{sen}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right)\right] \\ &= -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right) + \operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) \qquad (4.1.2) \end{aligned}$$

y dividiendo (4.1.2) por $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)$ y arreglando términos tenemos que

$$1 + 2\sum_{m=1}^{n}\cos(mt) = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)} = D_n(t),$$

donde $D_n(t)$ es el núcleo de Dirichlet como en el Teorema (2.2). Por lo tanto $s_n(x)$ se puede escribir como

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)D_n(t)dt \qquad \text{donde} \qquad D_n(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)}. \qquad (4.1.3)$$

Ahora usemos esto para probar que s_n es un funcional lineal acotado. Entonces de (4.1.1) y (4.1.3) tenemos que

$$|s_n(t)| \leq \frac{1}{2\pi}\sup|x(t)|\int_0^{2\pi}|D_n(t)|dt = \frac{||x||_\infty}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D_n(t)|dt.$$

Desde luego cada s_n es acotado, más aun tomando el supremo sobre toda x tal que $||x||_\infty = 1$, tenemos que

$$||s_n|| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D_n(t)|dt.$$

En realidad la igualdad se da, como probaremos a continuación.

Escribamos

$$|D_n(t)| = y(t)D_n,$$

donde $y(t) = +1$ para cada t donde $D_n(t) \geq 0$ y $y(t) = -1$ en otro caso. Claramente y no es continua, entonces dado $\epsilon > 0$ podemos modificar y a una función x continua tal que $||x||_\infty = 1$ y tener

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} [x(t) - y(t)]\, D_n(t)dt\right| < \epsilon.$$

Ahora escribamos esto en dos integrales y usando (4.1.3) para tener

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} x(t)D_n(t)dt - \int_0^{2\pi} y(t)D_n(t)dt\right| = \left|s_n(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)|dt\right| < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario y $||x||_\infty = 1$, esto prueba que

$$||s_n|| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)|dt. \tag{4.1.4}$$

Finalmente, probemos que la sucesión $||s_n||$ no es acotada.

Sustituyamos en (4.1.4) la expresión de D_n de (4.1.3), y usando el hecho que

$$\left|\text{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)\right| < \frac{t}{2} \qquad \text{para} \qquad t \in (0, 2\pi]$$

y tomando $v = \left(n + \frac{1}{2}\right)t$, tenemos

$$\begin{aligned}
||s_n|| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\text{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\text{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)}\right| dt \\
&> \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\,\text{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)|}{t}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|\,\text{sen}(v)|}{v}dv \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\,\text{sen}(v)|}{v}dv \\
&\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\,\text{sen}(v)|dv \\
&= \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1} \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad n \to \infty,
\end{aligned}$$

ya que la serie armónica es divergente. Así $||s_n||$ no es acotada. Ya que X es completo, el Teorema de Acotación Uniforme nos garantiza la existencia de $x \in X$ tal que $|s_n(x)|$ es divergente.

Ahora por la definición de s_n, esto muestra que la serie de Fourier de x es divergente en $t = 0$.

$\square$

A continuación demostraremos un teorema mucho más general.

Definición 4.1 *Sea (X, τ) espacio topológico, con $M \subseteq X$. Decimos que M es de* ***primera categoría*** *si*

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

donde A_i es nunca denso, es decir ($int(\overline{A_i}) = \emptyset$). Si M no es de primera categoría, entonces decimos que es de ***segunda categoría.***

Definición 4.2 *Sea (X, τ) espacio topológico, y $M \subseteq X$. Si M es de* ***primera categoría****, entonces decimos que $M^c = X \setminus M$ es conjunto* ***residual****.*

Teorema 4.2 (Principio de Acotación Uniforme) *Sea X, Y espacios de Banach y $A \subseteq L(X, Y)$. Si $\sup_{T \in A} \{||T(x)||\} < \infty$ para cada x en algún conjunto de segunda categoría, entonces $\sup_{T \in A} \{||T||\} < \infty$.*

Prueba: Sean los conjuntos

$$D_n = \bigcap_{T \in A} \{x \in X : ||T(x)|| \leq n\}.$$

Para cada n, se tiene que $D_n \subseteq X$ es cerrado. Si $z \in \overline{D_n}$, existe sucesión $(x_n) \subset D_n$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = z$. Ahora si $T \in A$, entonces $||T(x_j)|| \leq n$ para cada j.

Tomando el límite $j \to \infty$ y haciendo uso de la continuidad de T, se tiene que $||T(z)|| \leq n$. De esto se sigue que $\overline{D_n} \subseteq D_n$, y así cada D_n es cerrado.

Existe $n \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in D_n$ tal que $B(x_0, r) \subset D_n$ para algún $r > 0$. Si $int(D_n) = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $X \backslash D_n$ es abierto y denso para cada n. Usando el teorema de categoría de Baire Teorema (4.7-2) de [3], se tiene que

$$\beta = \bigcap_{n=1}^{\infty} X \backslash D_n,$$

es denso en X. Si $x \in \beta$ y $T \in A$ se tiene que $||T(x)|| = \infty$, lo que es una contradicción, ya que los operadores son continuos. Ahora sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $int(D_n) \neq \emptyset$, entonces $B(x_0, r) \subset D_n$ para algún $r > 0$ y $x_0 \in D_n$.

Sea $T \in A$ y $x \in X$ tal que $||x|| \leq r$, entonces se sigue que

$$\begin{aligned} ||T(x)|| &= ||T(x - x_0) + T(x_0)|| \\ &\leq ||T(x - x_0)|| + ||T(x_0)|| \\ &\leq n + n = 2n. \end{aligned}$$

Ahora si $x \in X$ tal que $||x|| = 1$, entonces $||rx|| = r$. Así se tiene que $||T(rx)|| \leq 2n$, entonces $||T(x)|| \leq \frac{2n}{r}$, de esto se sigue que

$$\sup_{T \in A} \{||T||\} < \infty.$$

□

Teorema 4.3 (Principio de Condensación de Singularidades) *Sean X y Y espacios de Banach y $\{T_{j,k}\} \subseteq L(X, Y)$. Supongamos que para cada k, existe $x \in X$ tal que* $\sup\{||T_{j,k}(x)|| : j \in \mathbb{N}\} = \infty$. *Entonces existe $B \subseteq X$ residual tal que para cada $x \in B$ se tiene que* $\sup\{||T_{j,k}(x) : j \in \mathbb{N}\} = \infty$ *para cada k.*

Prueba: Supongamos que el conjunto de las $x \in X$ tal que $\sup\{||T_{j,k}(x) : j \in \mathbb{N}\} < \infty$ para cada k es de segunda categoría en X.

Sea $k \in \mathbb{N}$ fija. Entonces por principio de acotación uniforme Teorema (4.2) se tiene que

$$\sup\{||T_{j,k}|| : j \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Pero esto no puede ser, ya que existe $x \in X$ donde el supremo es infinito. De donde el conjunto dado debe ser de primera categoría, así su complemento es residual.

□

Teorema 4.4 *Existe un conjunto G_δ denso $F \subset C(\mathbb{T})$, con la propiedad: Para cada $f \in F$, el conjunto de puntos donde la serie de Fourier de f diverge, es un conjunto denso en $\mathbb{R}$.*

Prueba: Denotemos la n-ésima suma parcial de Fourier de f en $x \in \mathbb{T}$ como,

$$s_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x - t) dt,$$

donde $D_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} e^{ijt}$ núcleo de Dirichlet. Ahora sea $x \in \mathbb{T}$ fijo. Consideremos los operadores

$$\Theta_n : C(T) \to \mathbb{R} \quad \text{dados por} \quad \Theta_n(f) = s_n(f, x).$$

Por el Teorema (4.1) se tiene

$$||\Theta_n|| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt,$$

y además $\dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \to \infty$ cuando $n \to \infty$. De esto se sigue que

$$\sup \{||\Theta_n|| : n \in \mathbb{N}\} = \infty.$$

Aplicando el principio de acotación uniforme Teorema (4.2) y acontinuación el principio de condensación de singularidades Teorema (4.3), se tiene que existe $F_x \subset C(\mathbb{T})$ residual, tal que $\sup \{||\Theta_n(f)|| : n \in \mathbb{N}\} = \infty$ para cada $f \in F_x$.

Dado que $F_x = A_x^c = X \backslash A_x$, donde A_x es de primera categoría, se tiene que

$$A_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

donde cada A_i es nunca denso. Ahora tenemos que $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \cup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$, así que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} X \backslash \overline{A_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} X \backslash A_i = A_x^c = F_x.$$

Se tiene que cada $X \backslash \overline{A_i}$ es abierto y denso, así F_x contiene un G_δ denso, por teorema de categoría de Baire Teorema (4.7-2) de [3].

Si $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{T}$ es denso numerable, entonces para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $F_{x_j} \subset C(\mathbb{T})$ residual; se sigue que

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} F_{x_j} \subset C(\mathbb{T})$$

contiene un conjunto G_δ denso con la propiedad deseada.

$\square$

El siguiente teorema nos da una manera de ver la suma parcial de una serie de Fourier como una integral más simple que la integral de Dirichlet dada anteriormente en el Teorema (3.2-2).

Teorema 4.5 *Sea $f \in L_1(\mathbb{T})$ y $0 < \delta \leq \pi$ dado. Entonces*

(1). $s_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x-t)+f(x+t)]\frac{\text{sen}(nt)}{t}dt + \epsilon_n(x)$ *donde la* $\epsilon_n(x)$ *depende de la función y de* δ*. Además converge uniformemente a 0 en* $\mathbb{R}$ *cuando* $n \to \infty$.

(2). $1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\delta \frac{\text{sen}(nt)}{t}dt + \epsilon'_n$*, donde los números* ϵ'_n *dependen de* δ *y tienen límite 0 cuando* $n \to \infty$.

Prueba: Por el Teorema (3.2) tenemos

$$D_n(t) = \frac{\text{sen}[(n+\frac{1}{2})t]}{\text{sen}(\frac{t}{2})} = [\text{sen}(nt)]\cot\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(nt),$$

entonces del Teorema (3.2-2) tenemos que

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{1}{2}\left[\cot\left(\frac{t}{2}\right)\right]\text{sen}(nt)dt + \alpha_n(x), \tag{4.1.5}$$

donde

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\cos(nt)dt. \tag{4.1.6}$$

Aplicando la regla de L'Hospital dos veces para mostrar que

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{2}\cot\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{t}\right] = 0,$$

se tiene

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{2}\cot\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{t}\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{\frac{-t}{2}\,\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{t\cos\left(\frac{t}{2}\right) + 2\,\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}\right]$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{t\cos\left(\frac{t}{2}\right) + 2\,\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{2t\,\text{sen}(\frac{t}{2}) - 8\cos(\frac{t}{2})}\right] = 0.$$

Definamos la función $2\pi-$periódica dada por

$$g_1(t) = \frac{1}{2}\cot\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{t}$$

para $0 < |t| < \pi$ y $g_1(0) = g_1(\pi) = 0$; es acotada y pertenece a $L_1(\mathbb{T})$ (es continua excepto en múltiplos impares de π).

Por (4.1.5) tenemos

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{\operatorname{sen}(nt)}{t}dt + \beta_n(x) + \alpha_n(x), \tag{4.1.7}$$

donde

$$\beta_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g_1(t)\operatorname{sen}(nt)dt. \tag{4.1.8}$$

Ahora definamos g_2 función $2\pi-$periódica tal que $g_2(t) = \frac{1}{t}$ si $\delta \leq |t| < \pi$ y $g_2(t) = 0$ si $|t| < \delta$ ó $t = \pi$.

Entonces g_2 es acotada y pertenece a $L_1(\mathbb{T})$. De la ecuación (4.1.7) se tiene

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\frac{\operatorname{sen}(nt)}{t}dt + \gamma_n(x) + \beta_n(x) + \alpha_n(x), \tag{4.1.9}$$

donde

$$\gamma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g_2(t)\operatorname{sen}(nt)dt. \tag{4.1.10}$$

De aquí tenemos que la integral en (4.1.9) es igual a (1). Por tanto

$$\epsilon_n(x) = \gamma_n(x) + \beta_n(x) + \alpha_n(x).$$

Ahora (4.1.6), (4.1.8) y (4.1.10) convergen uniformemente a 0 por el Lema (4.1) cuando $n \to \infty$. Esto prueba (1). Para probar (2) tomemos $f(t) = 1$ para toda t, entonces $s_n(f,x) = 1$ para cada n y para cada x.

$\square$

Lema 4.1 *Sean $f, g \in L_1(\mathbb{T})$ con g acotada en $\mathbb{R}$: $|g(t)| \leq M < \infty$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\lim_{|n|\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)e^{int}dt = 0$$

uniformemente para $x \in \mathbb{R}$.

Prueba: Sea $\epsilon > 0$ dado. Por el Teorema (1.1-2) existe un polinomio trigonométrico

$$P(t) = \sum_{j=-p}^{p} c_j e^{ijt}, \tag{4.1.11}$$

tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(u) - P(u)|du < \frac{\epsilon}{2M+1}. \tag{4.1.12}$$

Escribimos

$$\eta = \frac{\epsilon}{1 + 4\pi\sum_{j=-p}^{p}|c_j|}, \tag{4.1.13}$$

ahora por el Lema (2.1) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\hat{g}(k)| < \eta$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$ tal que $|k| \geq N - p$.

Para $|n| > N$ y $-p \leq j \leq p$, tenemos $|j - n| \geq |n| - |j| \geq N - p$, así se tiene que

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij(x-t)} g(t) e^{int} dt \right| = \left| e^{ijx} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-i(j-n)t} dt \right| = 2\pi |\hat{g}(j-n)| < 2\pi\eta.$$

Usando (4.1.11) y (4.1.13) tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} P(x-t) g(t) e^{int} dt \right| &\leq \sum_{j=-p}^{p} |c_j| \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij(x-t)} g(t) e^{int} dt \right| \\ &\leq 2\pi\eta \sum_{j=-p}^{p} |c_j| < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

para toda x y $|n| > N$. Claramente de (4.1.12) y tomando el cambio de variable $u = x - t$ y del hecho que las funciones f y P son $2\pi-$periódicas tenemos

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t) e^{int} dt - \int_{-\pi}^{\pi} P(x-t) g(t) e^{int} dt \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - P(x-t)| \, |g(t) e^{int}| dt \\ &\leq M \int_{-\pi}^{\pi} |f(u) - P(u)| du < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

Ahora de las ecuaciones (4.1.14) y (4.1.15) se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t) e^{int} dt \right| &\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t) e^{int} dt - \int_{-\pi}^{\pi} P(x-t) g(t) e^{int} dt \right| \\ &+ \left| \int_{-\pi}^{\pi} P(x-t) g(t) e^{int} dt \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

4.2. Localización de Riemann

Dado que los coeficientes de Fourier de una función dependen de la estructura de la función en todo su dominio, parece sorprendente que el comportamiento de convergencia o divergencia de la serie de Fourier en cualquier punto particular, depende solamente de la estructura de la función en una vecindad arbitrariamente pequeña de ese punto.

Teorema 4.6 (Localización de Riemann) *Sean $f_1, f_2 \in L_1(\mathbb{T})$, y supongamos que $f_1(x) = f_2(x)$ para cada x en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} |s_n(f_1, x) - s_n(f_2, x)| = 0$$

para cada $x \in I$. Esta convergencia es uniforme en cada intervalo cerrado $J \subseteq I$.

Prueba: Sea $J \subseteq I$ y tomemos $0 < \delta < \pi$ tal que $x + t$ y $x - t$ estan en I para cada $x \in J$ y $0 \leq t \leq \delta$.

Escribamos $f = f_1 - f_2$, entonces la integral en el Teorema (4.5-1) es 0, y así se tiene que

$$s_n(f, x) = s_n(f_1, x) - s_n(f_2, x) = \epsilon_n(x)$$

para cada $x \in J$.

□

Podemos cambiar la pregunta de la convergencia uniforme de las series de Fourier como una pregunta equivalente sobre límite de integrales.

Teorema 4.7 *Sea $f \in L_1(\mathbb{T})$, $0 < \delta \leq \pi$, y $X \subseteq \mathbb{R}$ dado. Escribimos $\phi(x, t) = f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)$. Supongamos que f es acotada en X : $|f(x)| \leq M < \infty$ para cada $x \in X$. Entonces para que*

(1). $\lim_{n\to\infty} s_n(f, x) = f(x)$ *uniformemente para $x \in X$,*

es necesario y suficiente que

(2). $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{\phi(x,t)}{t} \operatorname{sen}(nt)dt = 0$ *uniformemente para cada $x \in X$.*

Prueba: Multiplicando la ecuación (2) del Teorema (4.5) por $f(x)$ y restando la ecuación (1) del Teorema (4.5) se tiene que

$$s_n(f, x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{\phi(x,t)}{t} \operatorname{sen}(nt)dt + [\epsilon_n(x) - \epsilon'_n(x)].$$

La función f es acotada en X, entonces $[\epsilon_n(x) - \epsilon'_n(x)]$ converge uniformemente a 0 en X.

□

4.3. Criterio de Dini

Teorema 4.8 (Dini) *Si $f \in L_1(\mathbb{T})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ dado. Supongamos que existe $0 < \delta \leq \pi$ tal que*

$$\int_0^\delta \frac{|\phi(x_0,t)|}{t} dt < \infty, \tag{4.3.1}$$

donde ϕ es como en el Teorema (4.7). Entonces $\lim_{n\to\infty} s_n(f,x_0) = f(x_0)$.

Prueba: Tenemos $X = \{x_0\}$. Definamos la función g en $\mathbb{R}$ como

$$g(t) = \begin{cases} t^{-1}\phi(x_0,t) & \text{si} \quad 0 < t < \delta \\ 0 \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora aplicando el Lema (2.1) (Riemann Lebesgue) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-int} dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{\phi(x_0,t)}{t} e^{-int} dt = 0.$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{\phi(x_0,t)}{t} \operatorname{sen}(nt) dt = 0$, uniformemente para $x \in X$. Por tanto se satisface el Teorema (4.7-2).

□

Corolario 4.1 *Si $f \in L_1(\mathbb{T})$, $x_0 \in \mathbb{R}$, y*

$$|f(x_0+t) - f(x_0)| \leq M|t|^\alpha \qquad \textit{para} \qquad 0 < |t| < \delta$$

para reales positivos α, δ y M independientes de t, Entonces $\lim_{n\to\infty} s_n(f,x_0) = f(x_0)$.

Prueba: Tenemos que $|\phi(x_0,t)| = |f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)| \leq 2M$ para $0 < t < \delta$, entonces se sigue que $t^{-1}|\phi(x_0,t)| \leq 2Mt^{\alpha-1}$ para $0 < t < \delta$ y además

$$\int_0^\delta t^{\alpha-1} dt = \frac{\delta^\alpha}{\alpha} < \infty.$$

Así tenemos que se satisfacen las hipótesis del Teorema (4.8).

□

Corolario 4.2 *Si $f \in L_1(\mathbb{T})$, $x_0 \in \mathbb{R}$, y f diferenciable en x_0. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f,x_0) = f(x_0).$$

Prueba: Ya que la función f es diferenciable por la izquierda y la derecha en x_0 tenemos lo siguiente,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = f'_+(x_0)$$

y

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = f'_-(x_0).$$

Por tanto existe $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tal que

$$|f(x_0+t)-f(x_0)| \leq (1+|f'_+(x_0)|)t \qquad \text{si} \qquad 0 < t < \delta_1$$

y

$$|f(x_0+t)-f(x_0)| \leq (1+|f'_-(x_0)|)|t| \qquad \text{si} \qquad -\delta_2 < t < 0.$$

Sea $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\}$, $\alpha = 1$ y $M \gg \text{máx}\left\{|f'_+(x_0)|, |f'_-(x_0)|\right\}$ se tiene que

$$|f(x_0+t)-f(x_0)| \leq M|t| \qquad \text{para} \qquad 0 < |t| < \delta,$$

así se satisface Corolario (4.1-1).

□

Definición 4.3 *Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ con $a \leq b$. Una partición en $[a,b]$ es un conjunto finito ordenado $P = \{a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = b\}$. Y sea $B_{a,b}$ la colección de todas las particiones de $[a,b]$. Para una función real f en $[a,b]$, definimos la variación de f en $[a,b]$ correspondiente a $P = \{a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = b\}$ por*

$$V_a^b(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \in [0,\infty).$$

Definimos la variación total de f en $[a,b]$ por

$$V_a^b(f) = \sup_{P\in B_{a,b}} V_a^b(f,P) \in [0,\infty].$$

Decimos que f es una función de variación acotada en $[a,b]$ si $V_a^b(f) < \infty$. Escribimos como $VA([a,b])$ a la colección de funciones de variación acotada.

Teorema 4.9 *Sea $f \in L_1(\mathbb{T})$ tal que $V_0^{2\pi} f < \infty$. En este caso decimos que $f \in VA(\mathbb{T})$. Entonces*

$$|n\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{4} V_0^{2\pi} f \qquad \textit{para toda} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Prueba: Sean $k, n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \neq 0$, haciendo el cambio de variable $u = t + \frac{k\pi}{n}$ escribimos

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu}dt = \frac{(-1)^k}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(t+\frac{k\pi}{n}\right)e^{-int}dt;$$

así

$$2\hat{f}(n) = \frac{(-1)^k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f\left(t+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(t+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]e^{-int}dt.$$

Ahora sumando la ecuación aterior de 1 a $2|n|$ tenemos lo siguiente:

$$4n\hat{f}(n) = \frac{(-1)^k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{2|n|}\left[f\left(t+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(t+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]e^{-ikt}dt,$$

de esto tiene que

$$4|n\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{2|n|}\left|f\left(t+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(t+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right|dt,$$

ya que la función es de variación acotada tenemos

$$4|n\hat{f}(n)| \leq V_0^{2\pi}f.$$

□

En el Teorema (7.40) de [6], se afirma que la convergencia de Abel es un método regular, es decir,

$$\text{si} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n = s, \qquad \text{entonces} \qquad A - \sum_{n=0}^{\infty} c_n = s.$$

Por esta razón, cualquier teorema que afirma que la convergencia de una serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ que converge a s, implica que $M - \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge a s, donde M es algún método de sumabilidad, es llamado teorema Abeliano. El reciproco de un teorema Abeliano en general es falso, pero podría admitir algunas hipótesis adicionales: En 1897 A.Tauber probo que,

$$\text{si} \qquad A - \sum_{n=0}^{\infty} c_n = s \ \text{ y } \ nc_n \longrightarrow 0, \qquad \text{entonces} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} = s.$$

Debido a esto, cualquier teorema que afirma la convergencia ordinaria, la cual se sigue de un método de sumabilidad y alguna hipótesis adicional es llamado teorema Tauberiano. La hipótesis además se llama hipótesis Tauberiana. A continuación demostraremos un teorema Tauberiano celebre.

Teorema 4.10 (Tauberiano de Hardy-Littlewood) *Sea $X \neq \varnothing$ y $(a_n(x))_{n=0}^{\infty}$ sucesión de funciones reales definidas en X. Supongamos que existe $C > 0$ tal que*

$$na_n(x) \leq C,$$

para cada $x \in X$ y $n \geq 0$. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ es Abel uniformemente convergente para una función s definida en X, entonces esta serie converge uniformemente a s en X.

Prueba: Tenemos que para $x \in X$, la serie

$$A(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) r^n,$$

converge para $0 \leq r < 1$ y $\lim\limits_{r \uparrow 1} A(x,r) = s(x)$ uniformemente para $x \in X$. Es decir, dado $\epsilon > 0$, existe $0 < r_0 < 1$ tal que $|A(x,r) - s(x)| < \epsilon$ siempre que $x \in X$ y $r_0 < r < 1$.

Es claro que si $k \in \mathbb{N}$, entonces $A(x, r^k) \to s(x)$ uniformemente en X cuando $r \uparrow 1$ ($r_0^{\frac{1}{k}} < r < 1$ entonces $r_0 < r^k < 1$).

Ahora si $P(r) = \sum_{k=0}^{m} c_k r^k$ es un polinomio real tal que $P(0) = 0$ y $P(1) = 1$, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) P(r^n) = \sum_{k=1}^{m} c_k \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) r^{nk} = \sum_{k=1}^{m} c_k A(x, r^k) \to \sum_{k=1}^{m} c_k s(x) \\ = s(x)P(1) = s(x), \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

uniformemente en X cuando $r \uparrow 1$.

Definamos la siguiente función en $[0,1]$ como

$$\phi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq r < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Para $x \in X$ y $0 < r < 1$, definamos

$$\Phi(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \phi(r^n) = \sum_{n=0}^{N(r)} a_n(x),$$

donde $N(r) = \max\left\{ n \in \mathbb{N} : n \leq \frac{-\log(2)}{\log(r)} \right\}$. $N(r)$ es claramente no decreciente de $[\frac{1}{2}, 1]$ en $\mathbb{N}$.

La prueba se completaría si logramos probar que

$$\lim_{r\uparrow 1}\Phi(x,r)=s(x), \tag{4.3.3}$$

uniformemente en X. Consideremos la función

$$\psi(r)=\begin{cases}\frac{-1}{1-r} & \text{si} \quad 0\le r<\frac{1}{2}\\ \\ \frac{1}{r} & \text{si} \quad \frac{1}{2}\le r\le 1.\end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$\phi(r)=r+r(1-r)\psi(r), \tag{4.3.4}$$

para cada $r\in[0,1]$. Sea $0<\epsilon<C$ dado. Escribamos $\delta=\frac{\epsilon}{24C}$. Sean f_1 y f_2 funciones continuas en $[0,1]$ tal es que

$$f_1(r)+\delta\le\psi(r)\le f_2(r)-\delta, \tag{4.3.5}$$

para $0\le r\le 1$ y

$$\int_0^1 [f_2(r)-f_1(r)]\,dr<10\delta. \tag{4.3.6}$$

(Por ejemplo podemos tomar $f_1=\psi-\delta$ en $[0,\frac{1}{2})\cup[\frac{1}{2}+\delta,1]$ y lineal en $[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\delta]$, $f_2=\psi+\delta$ en $[0,\frac{1}{2}-\delta]\cup[\frac{1}{2},1]$ y lineal en $[\frac{1}{2}-\delta,\frac{1}{2}]$)

Ahora aplicamos el teorema de aproximación de Weierstrass (ver [6], Página 149) a las funciones f_1 y f_2, así se tienen dos polinomios Q_1 y Q_2 tal es que

$$|f_j(r)-Q_j(r)|<\delta, \tag{4.3.7}$$

para $0\le r\le 1$ y $j=1,2$.

Es claro que por las ecuaciones (4.3.5) y (4.3.7) se sigue que

$$Q_1(r)<\psi(r)<Q_2(r), \tag{4.3.8}$$

para $0\le r\le 1$ y por (4.3.6) y (4.3.7) se tiene

$$\left|\int_0^1 [Q_2(r)-Q_1(r)]\,dr\right|\le\int_0^1 |Q_2(r)-Q_1(r)|dr$$

$$\le\int_0^1 |Q_2(r)-f_2(r)|dr+\int_0^1 |f_1(r)-Q_1(r)|dr+\int_0^1 |f_2(r)-f_1(r)|dr$$
$$<\delta+\delta+10\delta=12\delta.$$

Por lo tanto

$$\int_0^1 [Q_2(r) - Q_1(r)]\, dr < 12\delta. \tag{4.3.9}$$

Ahora definamos los polinomios P_1, P_2 y Q por

$$P_j(r) = r + r(1-r)Q_j(r), \qquad Q(r) = Q_2(r) - Q_1(r).$$

Entonces

$$P_2(r) - P_1(r) = r(1-r)Q(r);$$

usando (4.3.4), (4.3.8) y (4.3.9) tenemos

$$P_1(r) \leq \phi(r) \leq P_2(r,)$$

$$Q(r) > 0, \qquad \int_0^1 Q(r)dr < 12\delta = \frac{\epsilon}{2C},$$

$$P_1(0) = P_2(0) = 0, \qquad P_1(1) = P_2(1) = 1$$

para $0 \leq r \leq 1$.

Notemos que para $0 \leq r \leq 1$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$1 - r^n = (1-r)(1 + r + ... + r^{n-1}) \leq n(1-r).$$

El polinomio Q podemos escribirlo como $Q(r) = \sum_{k=0}^{q} b_k r^k$. Combinando lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\Phi(x,r) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) P_1(r^n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \left[\phi(r^n) - P_1(r^n)\right] \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n} \left[P_2(r^n) - P_1(r^n)\right] \\
&= C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - r^n) r^n Q(r^n) \\
&\leq (1-r) C \sum_{n=1}^{\infty} r^n Q(r^n) \\
&= (1-r) C \sum_{k=0}^{q} \left[\sum_{n=1}^{\infty} r^{n(k+1)}\right] \\
&= C \sum_{k=0}^{q} b_k \frac{(1-r) r^{k+1}}{1 - r^{k+1}} = C g(r), \qquad (4.3.10)
\end{aligned}$$

donde g está definida en $(0,1)$. Similarmente

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)P_2(r^n) - \Phi(x,r) \leq Cg(r), \tag{4.3.11}$$

para $0 < r < 1$ y toda $x \in X$. Tenemos que $\lim\limits_{r\to 1}\left[\dfrac{(1-r^{k+1})}{(1-r)}\right] = k+1$,

$$\lim_{r\uparrow 1} g(r) = \sum_{k=0}^{q} \frac{b_k}{k+1} = \int_0^1 Q(r) < \frac{\epsilon}{2C}.$$

Entonces existe $0 < r_0 < 1$ tal que $Cg(r) < \frac{\epsilon}{2}$ siempre que $r_0 < r < 1$. Entonces (4.3.10) y (4.3.11) nos muestran que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)P_2(r^n) - \frac{\epsilon}{2} < \Phi(x,t) < \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)P_1(r^n) + \frac{\epsilon}{2}, \tag{4.3.12}$$

si $r_0 < r < 1$ y $x \in X$. Ahora de (4.3.2) para P_j para $j = 1,2$, existen $0 < r_j < 1$ tal que

$$\left| s(x) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)P_j(r^n) \right| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{4.3.13}$$

siempre que $r_j < r < 1$ y $x \in X$. Tomemos $r_3 = \max\{r_0, r_1, r_2\}$. Por (4.3.12) y (4.3.13) tenemos que

$$s(x) - \epsilon < \Phi(x,r) < s(x) + \epsilon,$$

si $r_3 < r < 1$ y $x \in X$. Esto prueba (4.3.3).

□

4.4. Criterio de Jordan

Teorema 4.11 (Jordan) *Supongamos que $f \in L_1(\mathbb{T})$, $a < b$ en $\mathbb{R}$, y $V_a^b f < \infty$. Si $a < x < b$, entonces*

(1). $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(f,x) = \dfrac{f(x+) + f(x-)}{2}$.

Si f es continua en (a,b) y $J \subseteq (a,b)$ intervalo cerrado, entonces

(2). $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(f,x) = f(x)$ *uniformemente en J.*

Prueba: Tomemos $g \in L_1(\mathbb{T})$ tal que $g = f$ en $[a,b]$ y $V_0^{2\pi} g < \infty$.
[Si $b - a \geq 2\pi$ tomamos $g = f$; si $b - a < 2\pi$ tomamos $g = 0$ en $(b, a+2\pi)$]. Por Teorema (4.9) tenemos

$$\left| k[\hat{g}(-k)e^{-ikx} + \hat{g}(k)e^{ikx}] \right| \leq \frac{1}{2} V_0^{2\pi} g = C < \infty,$$

para toda $k \in \mathbb{N}$ y para toda $x \in \mathbb{R}$.

Aplicando la Observación (3.1) tenemos que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k)e^{ikx}$ es
Abel uniformemente convergente a $g = f$ en $X = J$, respectivamente para $X = \{x\}$.

Ahora por Teorema (4.10)(Hardy-Littlewood) tenemos que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k)e^{ikx}$ converge uniformemente a g. Ya que $g = f$ en $[a, b]$ y aplicando el Teorema (4.6)(Localización de Riemann) para $I = (a, b)$ obtenemos la conclusión para f.

□

Corolario 4.3 *Si $f \in C(\mathbb{T})$ y $V_0^{2\pi} f < \infty$, (en tal caso escribimos $f \in CVA(\mathbb{T})$), entonces $s_n(f) \to f$ uniformemente en $\mathbb{R}$ cuando $n \to \infty$.*

Prueba: Tomemos $[a, b] = [-\pi, 3\pi]$ y $J = [0, 2\pi]$, entonces por el Teorema (4.11) $s_n(f) \to f$ uniformemente en $\mathbb{R}$.

□

Se debe observar que la condición de Dini y la de variación acotada son independientes entre sí. Por ejemplo la función

$$f(\phi) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \quad \phi = 0 \\ \frac{1}{\log\left(\frac{1}{|x|}\right)} \ \text{ si } \quad |x| \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

es de variación acotada, ya que f es estrictamente creciente en $[0, \frac{1}{2}]$, sin embargo f no satisface la condición de Dini en $x = 0$, ya que si $0 < \delta < 1$ tenemos

$$\int_0^\delta \frac{|f(0+t) + f(0-t) - 2(0)|}{t} dt = \int_0^\delta \frac{2f(t)}{t} dt = 2 \int_0^\delta \frac{1}{t \log\left(\frac{1}{t}\right)} dt,$$

tomando el cambio de variable $u = \frac{1}{\log\left(\frac{1}{t}\right)}$ tenemos $du = \frac{1}{t} u^2 dt$, entonces se sigue

$$\int \frac{1}{t \log\left(\frac{1}{t}\right)} dt = \int \frac{u}{u^2} du = \int \frac{1}{u} du = \log(u).$$

Se deduce que

$$2 \int_0^\delta \frac{1}{t \log\left(\frac{1}{t}\right)} dt = \lim_{n\to\infty} 2 \int_{\frac{1}{n}}^\delta \frac{1}{t \log\left(\frac{1}{t}\right)} dt = -2 \lim_{n\to\infty} \log\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right) \Big|_{\frac{1}{n}}^{\delta} \to \infty$$

si $n \to \infty$. Por otro lado tenemos que la función

$$f(\phi) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad \phi = 0 \\ \quad \phi \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\phi}\right) \quad |x| \leq \pi, \end{cases}$$

satisface la condición de Dini en $x = 0$,

$$\int_0^\delta \frac{|f(0+\phi) + f(0-\phi) - 2f(0)|}{\phi} d\phi = \int_0^\delta \frac{|\phi \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\phi}\right) - \phi \operatorname{sen}\left(\frac{1}{-\phi}\right)|}{\phi} d\phi \leq \int_0^\delta \frac{2\phi}{\phi} d\phi < \infty.$$

Sin embargo no es de variación acotada, ya que si tomamos la partición

$$P = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{2}{\pi\,(2n+1)}, x_2 = \frac{1}{n\pi}, ..., x_{n-1} = \frac{2}{\pi}, x_n = \pi \right\},$$

se tiene

$$V_0^\pi\,(f, P) = \sum_{j=1}^{n} \left| x_j \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_j}\right) - x_{j-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_{j-1}}\right) \right| = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2j+1} \to \infty$$

cuando $k \to \infty$.

4.5. Criterio de Lebesgue-Gergen

El siguiente teorema de convergencia es un tanto complicado, ya que utiliza las técnicas de demostración de los teoremas anteriormente probados.

Teorema 4.12 (Lebesgue-Gergen) *Sea $f \in L_1(\mathbb{T})$, $X \subseteq \mathbb{R}$, y $0 < \delta' < \pi$. Escribimos $\phi(t) = \phi(x,t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$. Supongamos que f es acotada en X,*

(1). $\displaystyle\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \phi(t)dt = 0$ *uniformemente para $x \in X$.*

y

(2). $\displaystyle\lim_{h\downarrow 0} \int_h^{\delta'} t^{-1}|\phi(h+h) - \phi(t)|dt = 0$ *uniformemente para $x \in X$.*

Entonces $s_n(f,x) \to f(x)$ uniformemente en X, cuando $n \to \infty$.

Prueba: Supongamos que f es una función real. Sea $\epsilon > 0$ dado. Escribamos

$$\Phi(u) = \int_0^u \phi(t)dt.$$

Ahora por la convergencia uniforme de (1) y (2) se tiene que existe $0 < \delta < \frac{\delta'}{2}$ tal que para toda $x \in X$, se tiene

$$|u^{-1}\Phi(u)| < \epsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < u \leq \delta \tag{4.5.1}$$

y

$$\int_h^{\delta'} t^{-1}|\phi(t+h) - \phi(t)|dt < \epsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < h < \delta. \tag{4.5.2}$$

Sea

$$g(s) = \int_0^s |f(u)|du,$$

y escojamos $0 < M < \infty$ tal que $|f(x)| < M$ para cada $x \in X$, si $h > 0$ y $x \in X$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\int_\delta^{\delta+h} t^{-1}|\phi(t)|dt &\leq \delta^{-1}\int_\delta^{\delta+h} [|f(x+t)| + |f(x-t)| + 2|f(x)|]\, dt \\ &\leq \delta^{-1}\left(2w_g(h) + 2Mh\right),\end{aligned}$$

donde $w_g(h) = \sup\{|g(u) - g(v)| : \quad |u - v| \leq h\}$.

La función g es continua ya que dado $\epsilon > 0$, y $s \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$|g(s+h) - g(s)| = \left|\int_0^{s+h} |f(u)|du - \int_0^s |f(s)|\right| = \int_s^{s+h} |f(u)|du;$$

haciendo uso del Teorema (6.79) de [6], existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_s^{s+h} |f(u)|du < \epsilon \qquad \text{si} \qquad |h| < \delta.$$

Claramente la función g es 2π-periódica, entonces g es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, así $w_g(h) \to 0$ cuando $h \downarrow 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ con $N > \frac{2\pi}{\delta}$ tal que para toda $x \in X$, se tiene

$$\int_\delta^{\delta+h} t^{-1}|\phi(t)|dt < \epsilon \qquad \text{si} \qquad h = \frac{\pi}{n} \qquad \text{para} \qquad n \geq N. \tag{4.5.3}$$

Ahora fijemos $n > N$. Notemos que $h < \frac{\delta}{2}$ y $\delta + h < \delta' \leq \pi$. Aplicando integración por partes Teorema (6.90) de [6], para

$$F(t) = \int_0^t \phi(u)du \qquad \text{y} \qquad G(t) = \frac{\operatorname{sen}(nt)}{t},$$

tenemos

$$\int_a^b \phi(t)\frac{\operatorname{sen}(nt)}{t}dt = t^{-1}\Phi(t)\operatorname{sen}(nt)\Big|_a^b - \int_a^b \left[t^{-1}\Phi(t)\right]\left\{n\cos(nt) - t^{-1}\operatorname{sen}(nt)\right\}dt; \tag{4.5.4}$$

así

$$|n\cos(nt) - t^{-1}\operatorname{sen}(nt)| \leq 2n,$$

para cada $t \in \mathbb{R}$ y además (4.5.1) nos muestra que para cada $x \in X$ se tiene

$$\left|\int_a^b \phi(t)\frac{\operatorname{sen}(nt)}{t}dt\right| < 2\epsilon + 2n\epsilon(b-a) \leq (4\pi+2)\epsilon \tag{4.5.5}$$

si $0 \leq a < b \leq 2h$.

Nuestro plan es ahora probar que para toda $x \in X$ y para nuestra $n > N$ fija

$$\left|\int_0^\delta \frac{\phi(t)}{t}\operatorname{sen}(nt)dt\right| < 29\epsilon. \tag{4.5.6}$$

Entonces del Teorema (4.7-2), nos permitiría afirmar que $s_n(f,x) \to f(x)$ uniformemente en X.

De (4.5.5) se tiene que

$$\left|\int_0^h \frac{\phi(t)}{t}\operatorname{sen}(nt)dt\right| < 15\epsilon. \tag{4.5.7}$$

Ahora escribamos

$$I = \int_h^\delta \frac{\phi(t)}{t}\operatorname{sen}(nt)dt = \int_{2h}^{\delta+h} \frac{\phi(t)}{t}\operatorname{sen}(nt)dt + \alpha, \tag{4.5.8}$$

donde

$$\alpha = \int_h^\delta \frac{\phi(t)}{t}\operatorname{sen}(nt)dt - \int_{2h}^{\delta+h} \frac{\phi(t)}{t}\operatorname{sen}(nt)dt = \int_h^{2h} \frac{\phi(t)}{t}\operatorname{sen}(nt)dt - \int_\delta^{\delta+h} \frac{\phi(t)}{t}\operatorname{sen}(nt)dt.$$

Usando (4.5.5) y (4.5.3) tenemos que

$$|\alpha| < (4\pi+2)\epsilon + \epsilon < 16\epsilon. \tag{4.5.9}$$

Por (4.5.8) y la igualdad $\operatorname{sen}(n(u+h)) = -\operatorname{sen}(nu)$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
2I - \alpha &= \int_h^\delta \left[\frac{\phi(u)}{u} - \frac{\phi(u+h)}{u+h}\right] \operatorname{sen}(nu)du \\
&= \int_h^\delta \frac{\phi(u) - \phi(u+h)}{u+h} \operatorname{sen}(nu)du \\
&+h \int_h^{2h} \frac{\phi(u)\operatorname{sen}(nu)}{u(u+h)} du + h\int_{2h}^\delta \frac{\phi(u)\operatorname{sen}(nu)}{u(u+h)} du. \\
&= I_1 + hI_2 + hI_3. \qquad (4.5.10)
\end{aligned}
$$

Por (4.5.2) tenemos que

$$|I_1| < \epsilon. \qquad (4.5.11)$$

Ahora usando el Teorema (6.101) de [6], con la función decreciente $(u+h)^{-1}$ definida en $[0, 2h]$ y de (4.5.5) tenemos que

$$|hI_2| = \left|\frac{1}{2}\int_h^\xi \frac{\phi(u)\operatorname{sen}(nu)}{u} du\right| < 8\epsilon. \qquad (4.5.12)$$

Ahora se tiene que

$$hI_3 = -h\int_h^{\delta-h} \frac{\phi(t+h)\operatorname{sen}(nt)}{(t+h)(t+2h)} dt = -h\int_h^\delta \frac{\phi(t+h)\operatorname{sen}(nt)}{(t+h)(t+2h)} dt + \beta; \qquad (4.5.13)$$

usando (4.5.3) tenemos que

$$|\beta| = \left|h\int_\delta^{\delta+h} \frac{\phi(u)\operatorname{sen}(nu)}{u(u+h)} du\right| \le \frac{h}{\delta+h}\int_\delta^{\delta+h} u^{-1}|\phi(u)|du < \epsilon. \qquad (4.5.14)$$

Ahora de las ecuaciones (4.5.13) y (4.5.10) se sigue que

$$hI_2 + 2hI_3 - \beta = h\int_h^\delta \left[\frac{\phi(t)}{t(t+h)} - \frac{\phi(t+h)}{(t+h)(t+2h)}\right] \operatorname{sen}(nt)dt = A + B, \quad (4.5.15)$$

donde

$$A = h\int_h^\delta \frac{\phi(t) - \phi(t+h)}{(t+h)(t+2h)} \operatorname{sen}(nt)dt \qquad\qquad B = 2h^2\int_h^\delta \frac{\phi(t)\operatorname{sen}(nt)}{t(t+h)(t+2h)} dt.$$

Aplicando (4.5.2) tenemos que

$$|A| \le h\int_h^\delta \frac{|\phi(t) - \phi(t+h)|}{t3h} dt < \frac{\epsilon}{3}. \qquad (4.5.16)$$

Aplicando nuevamente integración por partes se tiene que

$$B = \frac{2h^2\Phi(\delta)\operatorname{sen}(n\delta)}{\delta(\delta+h)(\delta+2h)} - 2h^2\int_h^\delta \Phi(t)\frac{d}{dt}\left[\frac{\operatorname{sen}(nt)}{t(t+h)(t+2h)}\right]dt.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dt}\left[\frac{\operatorname{sen}(nt)}{t(t+h)(t+2h)}\right]\right| &= \left|\frac{n\cos(nt)}{t(t+h)(t+2h)} - \frac{\operatorname{sen}(nt)(3t^2+6th+2h^2)}{t^2(t+h)^2(t+2h)^2}\right| \\
&\leq nt^{-3} + \frac{(3t^2+6nt+2h^2)}{t^2(t+h)^2(t+2h)^2} \\
&\leq nt^{-3} + \frac{(3t^2+6nt+3h^2)}{t^2(t+h)^2(t+2h)^2} \\
&= nt^{-3} + 3\frac{(t^2+2nt+h^2)}{t^2(t+h)^2(t+2h)^2} \\
&\leq nt^{-3} + 3t^{-4}.
\end{aligned}$$

Desde (4.5.1) tenemos que

$$|B| < \epsilon + 2h^2\int_h^\delta \epsilon(nt^{-2}+3t^{-3})dt < \epsilon + 2\pi\epsilon + 3\epsilon < 11\epsilon. \tag{4.5.17}$$

Concluímos de (4.5.10) y (4.5.15) que

$$4I = 2\alpha + 2I_1 + hI_2 + \beta + A + B,$$

usando las ecuaciones (4.5.9),(4.5.11),(4.5.12),(4.5.14),(4.5.16) y (4.5.17) se concluye que

$$|4I| < 32\epsilon + 2\epsilon + 8\epsilon + \epsilon + \epsilon + 11\epsilon < 56\epsilon.$$

Ahora de (4.5.8) y (4.5.7) implica (4.5.6).

□

4.6. Criterio de Dini-Lipschitz

Teorema 4.13 (Dini-Lipschitz) *Si $f \in L_1(\mathbb{T})$ y $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo abierto no vacío. Supongamos que*

$$\lim_{t\to 0}\sup_{x\in I}\left(|f(x+t)-f(x)|\log\left(\frac{1}{|t|}\right)\right) = 0.$$

Entonces $s_n(f) \to f$ uniformemente en cada intervalo cerrado $J \subset I$.

Prueba: Sea $J \subset I$ intervalo cerrado. Tomemos $0 < \delta' < 1$ tal que $x \pm t \in I$ para cada $x \in J$ y $0 < t \leq \delta'$. Verificaremos las hipótesis del Teorema (4.12) para $X = J$.

Ya que

$$\lim_{t \to 0} \sup_{x \in I} \left(|f(x+t) - f(x)| \log \left(\frac{1}{|t|} \right) \right) = 0,$$

entonces tenemos que dado $\epsilon > 0$, existe $0 < \delta < e^{-1}$ tal que

$$|f(x+t) - f(x)| \log \left(\frac{1}{|t|} \right) < \epsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < |t| < \delta.$$

Tenemos que $e < \frac{1}{\delta} < \frac{1}{|t|}$, así se tiene

$$|f(x+t) - f(x)| < \epsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < |t| < \delta.$$

De lo anterior se tiene que f es continua en I y por lo tanto acotada en $J \subset I$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $0 < \delta < \text{mín}\{\delta', e^{-1}\}$ tal que

$$|f(u+v) - f(u)| < \left(\log \left(\frac{1}{|v|} \right) \right)^{-1} \left(\frac{\epsilon}{2} \right) \qquad \text{si} \qquad u \in I \ \text{ y } \ 0 < |v| < \delta.$$

Entonces para $0 < t < \delta$ y $x \in X$ tenemos

$$|\phi(t)| \leq |f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)| < \left(\log \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{-1} \epsilon < \epsilon.$$

En particular se tiene

$$\left| \frac{1}{h} \int_0^h \phi(t) dt \right| < \epsilon \qquad \text{si} \qquad x \in X \qquad \text{y} \qquad 0 < h < \delta,$$

lo cual se verifican las hipótesis de Teorema (4.12-1).

Si $x \in X$, $0 < t < \delta'$, y $0 < h < \delta$, entonces

$$|\phi(t+h) - \phi(t)| \leq |f(x+t+h) - f(x+t)| + |f(x-t-h) - f(x-t)| < \left(\log \left(\frac{1}{h} \right) \right)^{-1} \epsilon$$

ya que $x \pm t \in I$. Tenemos que $\log(\delta') < 0$ y $-\log(h) = \log(h^{-1})$,

$$\int_h^{\delta'} t^{-1} |\phi(x+t) - \phi(t)| dt < \left(\log(h^{-1}) \right)^{-1} \epsilon \int_h^{\delta'} t^{-1} dt < \epsilon,$$

siempre que $x \in X$ y $0 < h < \delta$. Por lo que se cumple Teorema (4.12-2).

$\square$

4.7. Convergencia en $\mathbf{L}_p(\mathbb{T})$

La convergencia en $L_2(\mathbb{T})$ de las series de Fourier, sugiere el estudio del problema análogo en los espacios $L_p(\mathbb{T})$ si $1 \leq p$ y $p \neq 2$.

La primera respuesta vino en sentido negativo: Banach y Steinhaus probaron en 1918 que no hay convergencia en media, es decir en $L_1(\mathbb{T})$.

Teorema 4.14 *Si $f, g \in L_1(\mathbb{T})$. Para cada t, la función $f(t-\tau)g(\tau)$ es integrable como función de τ en T, y escribimos*

(1). $h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau)g(\tau)d\tau,$ *entonces* $h \in L_1(\mathbb{T})$.

(2). $||h||_{L_1(\mathbb{T})} \leq ||f||_{L_1(\mathbb{T})}||g||_{L_1(\mathbb{T})}$.

(3). $\hat{h}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$ *para cada n.*

Prueba: Tomemos la función $F(t,\tau) = f(t-\tau)g(\tau)$, para cada τ fija. $F(t,\tau)$ es múltiplo constante de $f(t-\tau)$ entonces es integrable y tenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(t,\tau)|dt\right)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(\tau)|||f||_{L_1}d\tau = ||f||_{L_1}||g||_{L_1}.$$

Ahora aplicando el Teorema de Fubini se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h(t)|dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(t,\tau)d\tau\right|dt &\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(t,\tau)|dtd\tau \\ &= ||f||_{L_1}||g||_{L_1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(t)e^{-int}dt = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t-\tau)e^{-in(t-\tau)}g(\tau)e^{-in\tau}dtd\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-int}dt\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\tau)e^{-in\tau}d\tau = \hat{f}(n)\hat{g}(n).\end{aligned}$$

□

Definición 4.4 *Si $f, g \in L_1(\mathbb{T})$, definimos la convolución de f y g a la función h definida en el Teorema (4.14-1) y la denotamos $f * g$.*

Teorema 4.15 *$L_p(\mathbb{T})$ admite convergencia en norma si y solo si* $\sup ||s_n||_p < \infty$. *Es decir, existe constante K tal que $||s_n(f)||_{L_p} \leq K||f||_{L_p}$ para cada f y para cada n.*

Prueba: Supongamos que $s_n(f)$ converge a f en norma para cada $f \in L_p(\mathbb{T})$, así $s_n(f)$ es acotada para cada $f \in L_p(\mathbb{T})$.

Entonces por teorema de acotación uniforme Teorema (4.7-3) de [3], se sigue que $||s_n||_{L_p}$ es acotada.

Ahora sea $f \in L_p(\mathbb{T})$, entonces dado $\epsilon > 0$, por Teorema (1.2-2) existe un polinomio trigonométrico P tal que $||f - P||_{L_p} < \frac{\epsilon}{2K}$.

Sea n el grado de P, entonces $s_n(P) = P$, así

$$\begin{aligned} ||s_n(f) - f||_{L_p} &= ||s_n(f) - s_n(P) + P - f||_{L_p} \\ &\leq ||s_n(f - P)||_{L_p} + ||P - f||_{L_p} \\ &\leq K\left(\frac{\epsilon}{2K}\right) + \frac{\epsilon}{2K} < \epsilon. \end{aligned}$$

□

Sabemos que

$$K_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt} \qquad \text{y} \qquad D_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} e^{ijt}.$$

Entonces

$$\sigma_n(f,t) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \hat{f}(j) e^{ijt} = (K_n * f)(t)$$

y

$$s_n(f,t) = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j) e^{ijt} = (D_n * f)(t).$$

Del Teorema (4.14-2) tenemos que $||s_n(f,t)||_{L_1} \leq ||D_n(t)||_{L_1} ||f||_{L_1}$, así se tiene que

$$||s_n||_{L_1} \leq ||D_n||_{L_1}. \tag{4.7.1}$$

Ahora sea

$$||\sigma_N(D_n)||_{L_1} = ||s_n(K_N)||_{L_1} \leq ||s_n||_{L_1} ||K_N||_{L_1} = ||s_n||_{L_1}.$$

Ya que $D_n(t) \in C(\mathbb{T})$, entonces por el Teorema (3.4-2), $\sigma_N(D_n) \to D_n$ cuando $N \to \infty$. Por tanto

$$||s_n||_{L_1} \geq ||D_n||_{L_1}. \tag{4.7.2}$$

De (4.7.1) y (4.7.2) tenemos que $||s_n||_{L_1} = ||D_n||_{L_1}$. Ahora se tiene del Teorema (4.1) que $||D_n||_{L_1} \to \infty$ cuando $n \to \infty$. De lo anterior y del Teorema (4.15) se deduce que $L_1(\mathbb{T})$ no admite convergencia en norma.

Fué Marcel Riesz quien consiguió demostrar en 1923 que la respuesta a la convergencia en norma es afirmativa si $1 < p < \infty$, para tal demostración haremos usos de la existencia de un operador lineal acotado

$$H : L_p(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T}), \qquad \text{para} \qquad 1 < p < \infty,$$

llamado la **Tranformada de Hilbert** en $\mathbb{T}$, con la propiedad

$$\widehat{Hf}(n) = -i\ sgn(n)\hat{f}(n).$$

Así para cada $f \in L_p(\mathbb{T})$ se define

$$Hf \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} -i\ sgn(n)\hat{f}(n)e^{int}.$$

La existencia y acotación de tal operador se encuentra en [8], Cap 10-12.

Introduzcamos la proyección de Riesz

$$P : L_p(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})$$

definida por

$$P(f) = \frac{1}{2}\hat{f}(0) + \frac{1}{2}\left(f - iHf\right),$$

notemos que P es también acotado para $1 < p < \infty$ ya que $|\hat{f}(0)| \leq ||f||_{L_p}$, por la desigualdad de Hölder (ver [6], Página 340).

Observemos también que

$$P(f) \sim \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n)e^{int},$$

ya que $i(-i\ sgn(n)) = sgn(n)$.

Lema 4.2 *Para $m \in \mathbb{N}$ tenemos que*

$$e^{-imt}P\left(e^{imt}f\right) - e^{i(m+1)t}P\left(e^{-i(m+1)t}f\right) = s_m(f). \tag{4.7.3}$$

Prueba:

$$e^{imt}f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{i(n+m)t}$$

$$P\left(e^{imt}f\right) \sim \sum_{n \geq -m}^{\infty} \hat{f}(n)e^{i(n+m)t}$$

$$e^{-imt}P\left(e^{imt}f\right) \sim \sum_{n \geq -m}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$$

$$e^{i(m+1)t}P\left(e^{-i(m+1)t}f\right) \sim \sum_{n \geq m+1}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}.$$

Restando las dos últimas ecuaciones tenemos

$$e^{-imt}P\left(e^{imt}f\right) - e^{i(m+1)t}P\left(e^{-i(m+1)t}f\right) = s_m(f).$$

□

Ahora de (4.7.3) y de la acotación de la proyección de Riesz tenemos que

$$\sup ||s_n||_{L_p} \leq 2||P||_{L_p} < \infty, \tag{4.7.4}$$

para $1 < p < \infty$.

Teorema 4.16 *Si* $1 < p < \infty$ *y* $f \in L_p(\mathbb{T})$, *entonces*

$$\lim_{n \to \infty} ||s_n(f) - f||_{L_p} = 0.$$

Prueba:
De (4.7.4) tenemos que $\sup ||s_n||_{L_p} < \infty$, ahora del Teorema (4.15) se sigue que

$$\lim_{n \to \infty} ||s_n(f) - f||_{L_p} = 0.$$

□

Capítulo 5

Series de Fourier Divergentes

La prueba del siguiente teorema es la parte principal de este trabajo, la cual es una elaboración detallada de la prueba dada en el libro de Katznelson [10]. La prueba se construye mediante el uso de polinomios trigonométricos que tienen propiedades especiales.

Lo que se prueba es lo siguiente: dado un conjunto $E \subset [-\pi, \pi]$ tal que $\lambda(E) = 0$ (λ es la medida de Lebesgue), existe $f \in C(\mathbb{T})$ para la cual $s_n(f, x)$ diverge para cada $x \in E$.

Lema 5.1 *Supongamos que $V \subseteq [-\pi, \pi]$ es unión de una familia finita de intervalos de longitud positiva, tal que $\delta = \lambda(V) > 0$. Entonces existe un polinomio trigonométrico Q tal que*

(1). $||Q||_u = \sup \{|Q(t)| \ : \ t \in \mathbb{R}\}$

y

(2). $S^*(Q, t) = \sup \{|S_n(Q, t)| \ : \ n \geq 0\} > \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{1}{3\delta}\right)$ *para* $t \in V.$

Prueba: Primeramente escojamos $0 < \epsilon < 1$ y un número finito de puntos $\{t_1, t_2, t_3, ..., t_p\} \subset V$ tal que $p\ \epsilon < \delta$ y los intervalos $[t_j - \epsilon, t_j + \epsilon]$ para $1 \leq j \leq p$ cubran a V.

Para ver esto sean $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_q$ las longitudes de q intervalos disjuntos tal que su unión sea V, escojamos $0 < \epsilon < 1$ y $\epsilon < \delta_1$. Para cada $1 \leq k \leq q$, sea

$$A_k = \{n \in \mathbb{N} \ \ : \ \ n\epsilon \geq \delta_k\};$$

tomemos $p_k = \text{mín}\{A_k\} - 1$, así tenemos que $p_k\epsilon < \delta_k \leq 2p_k\epsilon$.

Ahora cubrimos el $k-$ésimo intervalo con p_k intervalos de longitud 2ϵ. Tomando $p = p_1 + p_2 + \cdots + p_q$, tenemos que

$$p\epsilon = p_1\epsilon + p_2\epsilon + \cdots + p_q\epsilon < \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_q \leq \delta,$$

y además para cada p_k con $1 \leq k \leq q$ podemos obtener p_k puntos del intervalo $k-$ésimo, digamos $\{t_{k1}, t_{k2}, ..., t_{kp_k}\}$ y tomando los intervalos $[t_{kj} - \epsilon, t_{kj} + \epsilon]$ para $1 \leq j \leq q_k$ y de longitud 2ϵ que lo cubran, y posteriormente tomando la unión obtenemos $\{t_1, t_2, t_3, ..., t_p\} \subset V$.

Para $z \in \mathbb{C}$ tal que $z \neq 1$, definamos $\phi(z) = (1-z)^{-1}$ y entonces

$$\begin{aligned} Re\left[\phi(re^{it})\right] &= \frac{1}{2}\left[\phi(re^{it}) + \overline{\phi(re^{it})}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1-re^{-it}}{(1-re^{it})(1-re^{it})} + \frac{1-re^{it}}{(1-re^{-it})(1-re^{it})}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(t)}\right] \end{aligned} \tag{5.0.1}$$

para $0 \leq r < 1$ y $t \in \mathbb{R}$. Es claro que $\phi(0) = 1$, también se tiene que $-1 \leq \cos(t)$ entonces $-2r\cos(t) \leq 2r$, así

$$Re\left[\phi(re^{it})\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(t)}\right] \geq \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1-r^2}{1+r^2+2r}\right] > \frac{1}{2}$$

para $|z| < 1$. Ahora usando la ecuacion (5.0.1) y del hecho que $\cos(\epsilon) > 1 - \epsilon^2$ para $0 < \epsilon < 1$, tenemos

$$\begin{aligned} Re\left[\phi(\frac{1}{1+\epsilon}e^{it})\right] &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1-(\frac{1}{1+\epsilon})^2}{1+(\frac{1}{1+\epsilon})^2 - \frac{2}{1+\epsilon}\cos(t)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2-\frac{2}{1+\epsilon}\cos(t)}{1+(\frac{1}{1+\epsilon})^2 - \frac{2}{1+\epsilon}\cos(t)}\right] \\ &> \frac{(1+\epsilon)^2}{(1+\epsilon)}\left[\frac{(1+\epsilon)-\cos(t)}{1+(2\epsilon-1)(1+\epsilon)^2}\right] \\ &\geq (1+\epsilon)\left[\frac{(1+\epsilon)-1}{2\epsilon^3+3\epsilon^2}\right] \\ &= \frac{\epsilon+\epsilon^2}{2\epsilon^3+3\epsilon^2} > \frac{\epsilon+\epsilon^2}{3\epsilon^3+3\epsilon^2} = \frac{1}{3\epsilon} \quad \text{si} \quad t \in [-\epsilon, \epsilon] \end{aligned} \tag{5.0.2}$$

Definamos la función f por

$$f(z) = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} \phi(ze^{-it_j}). \tag{5.0.3}$$

Se satisface $f(0) = 1$, $Re\,[f(z)] > \frac{1}{2}$ para $|z| < 1$. De (5.0.2) tenemos

$$Re\left[f\left(\frac{1}{1+\epsilon}e^{it}\right)\right] = Re\left[\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\phi\left(\frac{1}{1+\epsilon}e^{i(t-t_j)}\right)\right] > \frac{1}{3p\;\epsilon} > \frac{1}{3\delta} \quad \text{si} \quad t \in \overline{V} \quad (5.0.4)$$

ya que para algún j se tiene que $|t - t_j| \leq \epsilon$.

Escribamos $F(z) = \log(f(z)) = \log(|f(z)|) + iArg(f(z))$, entonces tenemos que $F(0) = 0$,

$$|Im[F(z)]| = |Arg(f(z))| < \frac{\pi}{2}, \qquad (5.0.5)$$

$$|F(z)| \geq Re\,[F(z)] = \log(|f(z)|) \geq \log(Re\,[f(z)]) \qquad (5.0.6)$$

para $|z| < 1$.

Ahora nuestra próxima prueba es demostrar que la función F tiene expansión en serie de potencias

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n, \qquad (5.0.7)$$

convergente uniformemente en el circulo $|z| = \frac{1}{1+\epsilon}$.

Para esto es suficiente mostrar una expansión que converge en $|z| < R = 1 - (2a)^{-1}$, donde $a = 1 + \epsilon^{-1}$, para entonces $\frac{1}{1+\epsilon} = 1 - a^{-1} < R$.

Tenemos que

$$|\phi(z) - a| = a\left|\frac{z - (1 - a^{-1})}{z - 1}\right| < a \quad \text{si} \quad |z| < R,$$

si $\alpha = 1 - a^{-1} < 1$ y $|z| < \frac{(1+\alpha)}{2} = R$, entonces $2Re(z) < 1 + \alpha$, de donde

$$|z-1|^2 - |z-\alpha|^2 = (1-\alpha)(1+\alpha-2Re(z)) > 0$$

así $|z - \alpha| < |z - 1|$.

Se tiene de la ecuación (5.0.3) que

$$|f(z) - a| = \left|\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\phi\left(ze^{-it_j}\right) - \frac{p\;a}{p}\right| \leq \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\left|\phi\left(ze^{-it_j}\right) - a\right| < a,$$

si $|z| < R$. Sabemos que para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$ tenemos que

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

(ver [6], Página 242). Entonces tenemos que si $z = \frac{w-a}{a}$, se tiene

$$\log(w) = \log(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{w-a}{a} \right)^k, \tag{5.0.8}$$

para $|w-a| < a$. Escribamos

$$f_k(z) = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{f(z)-a}{a} \right)^k,$$

con $w = f(z)$ y sustituyendo en la ecuación (5.0.8) se tiene

$$F(z) = \log(a) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z), \tag{5.0.9}$$

para $|z| < R$ y así la serie (5.0.9) converge uniformemente en el dico $|z| \leq r$ donde $0 < r < R$.

Ya que ϕ tiene expansión en serie de potencias convergente en el disco $|z| < 1$, así f también la tiene en el disco, y tomando para cada k producto de Cauchy Definición (2.68) y Teorema (2.71) de [6], se tiene que f_k también tiene expansión en serie en $|z| < R$.

Ahora el Teorema (7.57) de [6] nos asegura la existencia de los $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ en (5.0.7). ($A_0 = 0$ ya que $F(0) = 0$). Para $t \in \mathbb{R}$ escribamos

$$g(t) = \frac{2}{\pi} F\left(\frac{1}{1+\epsilon} e^{it} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{int}, \tag{5.0.10}$$

donde $a_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1+\epsilon} \right)^n A_n$. De (5.0.5) tenemos que $||Im(g)||_u < 1$ y combinando (5.0.4) y (5.0.6) tenemos que para $\beta = \sup \left\{ |g(t)| \ : \ t \in \overline{V} \right\}$ se satisface que

$$\beta \geq |g(t)| = \frac{2}{\pi} \left| F\left(\frac{1}{1+\epsilon} e^{it} \right) \right| > \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{1}{3\delta} \right).$$

Definamos la suma parcial $g_N(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{int}$ y del hecho que (5.0.10) converge uniformemente, se tiene que

$$||Im(g_N)||_u \to ||Im(g)||_u \qquad \text{cuando} \qquad N \to \infty.$$

Para $t \in \overline{V}$ tenemos que

$$|g_N(t)| \geq \beta - ||g - g_N||_u \to \beta \quad \text{cuando} \quad N \to \infty.$$

Ahora existe un $N \in \mathbb{N}$ fijo, tal que

$$||Im(g_N)||_u < 1 \tag{5.0.11}$$

y

$$|g_N(t)| > \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{1}{3\delta}\right) \quad \text{para toda} \quad t \in V. \tag{5.0.12}$$

Definamos Q por

$$\begin{aligned} Q(t) = e^{-iNt} Im\,(g_N(t)) &= \frac{e^{-iNt}}{2i}\left[g_N(t) - \overline{g_N(t)}\right] \\ &= \frac{1}{2i}\sum_{k=-N+1}^{0} a_{k+N}e^{ikt} - \frac{1}{2i}\sum_{k=-2N}^{-N-1} \overline{a}_{-k-N}e^{ikt}. \end{aligned}$$

Por tanto (1) se sigue de (5.0.11) y

$$S^*(Q,t) \geq |S_N(Q,t)| = \left|\frac{e^{-iNt}}{2i} g_N(t)\right| = \frac{1}{2}|g_N(t)|,$$

y así (2) se sigue de (5.0.12).

□

5.1. Teorema de Kahane-Katznelson

En 1966 Kahane y Katznelson demostraron que dado un conjunto E con medida de Lebesgue cero, existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en E.

Teorema 5.1 (Kahane - Katznelson, 1966) *Si $E \subseteq [-\pi, \pi]$ y $\lambda(E) = 0$, entonces existe una función $f \in C(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier $s(f)$ diverge en cada punto de E y cuyos coeficientes $\hat{f}(n) = 0$ para $n < 0$.*

Prueba: Dado $\frac{\epsilon}{2^j} > 0$ y $j \in \mathbb{N}$, existe $\{I_{j,n}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [-\pi, \pi]$ tal que

$$E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{j,n} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_{j,n}| < \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Ahora sea $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{I_{(j,n)} : (j,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\right\}$, ya que el producto de conjuntos que son numerables es también numerable. Se tiene que la familia $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subintervalos de $[-\pi, \pi]$, $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon$ y para cada $t \in E$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \ : \ t \in I_n\}$ es infinito.

Escojamos $1 \leq n_1 < n_2 < ...$, tal que

$$3\sum_{n=n_k}^{\infty} |I_n| < e^{-\pi k^3}.$$

Sea $V_k = \bigcup_{n=n_k}^{n_{k+1}} I_n$ y Q_k el polinomio trigonométrico dado por Lema (5.1) en V_k, entonces $3\delta_k = 3\lambda(V_k) < e^{-\pi k^3}$, así tenemos que $\frac{1}{3\delta_k} > e^{\pi k^3}$, por tanto $\log(\frac{1}{3\delta_k}) > \log(e^{\pi k^3}) = \pi k^3$.

$$S^*(Q_k, t) > k^3 \qquad \text{para toda} \qquad t \in V_k. \tag{5.1.1}$$

Por la elección de los I_n, se tiene que

$$\{k \in \mathbb{N} \ : \ t \in V_k\} \quad \text{es infinito para todo} \quad t \in E. \tag{5.1.2}$$

Ahora sea N_k el grado de Q_k, definido por

$$N_k = \text{máx}\left\{|n| : n \in \mathbb{Z},\ \hat{Q}_k(n) \neq 0\right\}.$$

Escojamos enteros $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $p_1 = N_1$ y

$$p_k - N_k > p_{k-1} + N_{k-1} \qquad \text{para} \qquad k > 1. \tag{5.1.3}$$

Definamos f en $\mathbb{R}$ por

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} e^{ip_k t} Q_k(t). \tag{5.1.4}$$

Ya que $||Q_k(t)||_u < 1$, entonces

$$|k^{-2}e^{ip_k t}Q_k(t)| = |k^{-2}Q_k(t)| = k^{-2}||Q_k(t)||_u \leq k^{-2}.$$

Por el criterio $M-$Weierstrass (ver [6], Página 141), se tiene que (5.1.4) converge uniformemente en $\mathbb{R}$, así $f \in C(\mathbb{T})$.

Podemos integrar término a término, entonces se tiene que

$$\hat{f}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t) e^{-i(n-p_k)t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \hat{Q}_k(n - p_k),$$

donde se tiene que $\hat{Q}_k(n - p_k) = 0$ si no se satisface

$$-N_k + p_k \leq n \leq N_k + p_k.$$

Entonces

$$\hat{f}(n) = k^{-2}\hat{Q}_k(n - p_k) \qquad \text{si} \qquad |n - p_k| \leq N_k$$

y $\hat{f}(n) = 0$ en otro caso, en particular $\hat{f}(n) = 0$ si $n < 0$. Se tiene lo siguiente ($n < 0 = -N_1 + p_1 \leq -N_k + p_k$, entonces $n - p_k < -N_k$ para toda k).

Para $k \in \mathbb{N}$ fijo, $0 \leq N \leq N_k$ y $t \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned} S_{p_k+N}(f,t) - S_{p_k-N-1}(f,t) &= \sum_{n=p_k-N}^{p_k+N} \hat{f}(n)e^{int} = \sum_{j=-N}^{N} k^{-2}\hat{Q}_k(j)e^{i(p_k+j)t} \\ &= k^{-2}e^{ip_kt}S_N(Q_k,t). \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Ahora fijemos $t \in E$, $j \in \mathbb{N}$. Usando (5.1.2) y (5.1.3) para obtener $k = k(t,j)$ tal que $k > j$, $p_k - N_k - 1 > j$ y $t \in V_k$ y a continuación de (5.1.1) seleccionamos $0 \leq N \leq N_k$ tal que

$$|S_N(Q_k,t)| > k^3.$$

Escribamos $m_j = p_k - N - 1$ y $n_j = p_k + N$, entonces de (5.1.5) tenemos que

$$|S_{n_j}(f,t) - S_{m_j}(f,t)| = k^{-2}|S_N(Q_k,t)| > k > j,$$

de esto se sigue que $(S_n(f,t))_{n=1}^{\infty}$ no es sucesión de Cauchy, así no puede ser convergente.

$\square$

Apéndice A

Fenómeno de Gibbs

En la vecindad de una discontinuidad, no se puede esperar la convergencia de las sumas parciales de Fourier. La forma específica de la convergencia no uniforme se ilustra de la mejor manera por medio de los siguientes ejemplos.

Ejemplo A.1 *Tomemos la función 2π-periódica definida en $\mathbb{R}$ como*

$$f(x) = \begin{cases} -1 \ si & -\pi < x < 0 \\ \ \ 1 \ si & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Sabemos que la serie de Fourier asociada a f es

$$f \sim \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}[(2j+1)t]}{(2j+1)},$$

de lo cual tenemos que

$$\begin{aligned} s_N(f,t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\frac{\operatorname{sen}[(2k+1)t]}{(2k+1)} \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\int_0^t \cos[(2k+1)x]dx \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^t\left(\sum_{k=0}^{N}\cos[(2k+1)x]\right)dx. \end{aligned} \tag{A.0.1}$$

De la identidad $\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2\cos(a)\operatorname{sen}(b)$, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{N}\cos[(2k+1)x] = \frac{\operatorname{sen}[2(N+1)x]}{2\operatorname{sen}(x)}.$$

De (A.0.1) se tiene que

$$s_N(f,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{\operatorname{sen}[2(N+1)x]}{\operatorname{sen}(x)}dx, \tag{A.0.2}$$

derivando se tiene que

$$s'_N(f,t) = \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{sen}[2(N+1)t]}{\operatorname{sen}(t)},$$

con el primer máximo en $(0,\pi]$ dado por $t = \dfrac{\pi}{2(N+1)}$.
Sustituyendo en (A.0.2) se tiene que

$$s_N\left(f, \frac{\pi}{2(N+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2(N+1)}} \frac{\operatorname{sen}[2(N+1)x]}{\operatorname{sen}(x)}dx,$$

tomando el cambio de variable $u = 2(N+1)x$ tenemos

$$s_N(f, \frac{\pi}{2(N+1)}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u}\frac{u/2(N+1)}{\operatorname{sen}(u/2(N+1))}du.$$

Ahora se tiene que

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\sup_{v\in(0,\pi)}\left|1 - \frac{v/2(N+1)}{\operatorname{sen}(v/2(N+1))}\right|\right\} = 0.$$

Por tanto se tiene

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}du - s_N\left(f, \frac{\pi}{2(N+1)}\right)\right\} \\
&= \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}du - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}\frac{u/2(N+1)}{\operatorname{sen}(u/2(N+1))}du\right\} \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}\left\{1 - \frac{u/2(N+1)}{\operatorname{sen}(u/2(N+1))}\right\}du = 0.
\end{aligned}$$

De lo anterior se deduce

$$\lim_{N\to\infty} s_N\left(f, \frac{\pi}{2(N+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}du > 1.$$

La suma parcial de Fourier excede a la función salto en el punto de discontinuidad. Por ejemplo, a la derecha del punto $x = 0$ se puede ver en Figura 1.1 como la gráfica de la suma parcial de Fourier supera con nitidez a la de la función salto.

Ejemplo A.2 *Dada la función 2π-periódica definida como.*

$$g(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ \frac{\pi - t}{2} & si\ 0 < x < 2\pi. \end{cases}$$

De el Teorema (1.3) tenemos que

$$g \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kt)}{k},$$

de aquí que

$$s_N(g,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kt)}{t} = \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{N} \cos(kx) \right) dx = \int_0^t \frac{\operatorname{sen}[(N+\frac{1}{2})x]}{2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})} dx - \frac{t}{2}$$

$$= \int_0^t \frac{\operatorname{sen}[(N+\frac{1}{2})x]}{x} dx + \int_0^t \left(\frac{1}{2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})} - \frac{1}{x} \right) \operatorname{sen}[(N+\frac{1}{2})x] dx - \frac{t}{2}. \quad \text{(A.0.3)}$$

Definamos

$$g(x) = \frac{1}{2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})} - \frac{1}{x}$$

en $(0, \pi]$, claramente $g \in C^1$. Aplicando L'Hospital tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} g(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{x - 2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{2x\operatorname{sen}(\frac{x}{2})} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(\frac{x}{2})}{x\cos(\frac{x}{2}) + 2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\frac{-x}{2}\operatorname{sen}(\frac{x}{2}) + 2\cos(\frac{x}{2})} = 0. \end{aligned}$$

Definiendo $g(0) = 0$, tenemos que $g \in C^1$ en $[0, \pi]$, por tanto integrando por partes y del hecho que $g \in C^1$ se tiene que

$$\int_0^t \left(\frac{1}{2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})} - \frac{1}{x} \right) \operatorname{sen}[(N + \frac{1}{2})x] dx \to 0$$

uniformemente para $0 \le t \le \pi$ cuando $N \to \infty$.
Sea $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ suceción no negativa tal que $h_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y además $nh_n \to \pi$ cuando $n \to \infty$.

Sustituyendo en (A.0.3) y tomando límites tenemos

$$\lim_{N\to\infty} s_N(g,h_N) = \lim_{N\to\infty}\int_0^{h_N} \frac{\operatorname{sen}[(N+\frac{1}{2})x]}{x}dx+$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{h_N}\left(\frac{1}{2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}-\frac{1}{x}\right)\operatorname{sen}[(N+\frac{1}{2})x]dx - \lim_{N\to\infty}\frac{h_N}{2}.$$

Las dos últimos límites convergen a cero cuando $N\to\infty$. Tomando el cambio de variable $u=(N+\frac{1}{2})x$ tenemos

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{h_N} \frac{\operatorname{sen}[(N+\frac{1}{2})x]}{x}dx$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_0^{(N+\frac{1}{2})h_N}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}dx \to \int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}du > \frac{\pi}{2}.$$

Como en el ejemplo (A.1), también se exhibe el fenómeno en las proximidades de la discontinuidad $x=0$. Lo cual se puede observar más claramente en Figura 1.2.

Bibliografía

[1] A.N.Kolmogorov, Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout, C.R.Acad. Sci, Paris 183 (1926), 1327-1328

[2] C. Goffman, G. Pedrick: *Fuctional Analysis*, Chelsea Publishing Company New York, (2002).

[3] Kreyszig: *Itroductory Functional Analysis with Aplications*, Wiley Classics Library Edition, (1989).

[4] F. Duoandikoetxea Zuazo *200 años de convergencia de las series de Fourier*

[5] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math. 116 (1966), 135-157.

[6] R. Stromberg, *An Introduction to Classical Real Analysis*, Kansas State University, (1980).

[7] J.-P, Y. Katznelson, Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques, Studia Math. 26. No 3, 305-306, (1966).

[8] S. Laugesen *Lecture Notes on Harmonic Analysis*, University of Illinois at Urbana Champaign, (2009).

[9] R. A. Hunt, On the convergence of Fourier series en Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues (Proc. Conf., Edwardsville, Ill., 1967), Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, 1968, 235-255.

[10] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, New York. John Wiley & Sons, Inc, (1968).