



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLAS DE HIDALGO

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

“Mat. Luís Manuel Rivera Gutiérrez”

PROPIEDAD DEL PUNTO FIJO EN CONTINUOS

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LIC. EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

FANNY PAULET LEMUS GARCÍA

ASESOR

DRA. MARÍA LUISA PÉREZ SEGUÍ

MORELIA, MICHOACÁN, NOVIEMBRE 2015.



*"Si simplemente hace girar la rueda, es álgebra;
pero si contiene una idea, es topología.*

SOLOMON LEFSCHETZ

*"Si simplemente hace girar la rueda, es álgebra;
pero si contiene una idea, es topología."*

SOLOMON LEFSCHETZ

Índice general

1. Nociones preliminares	3
1.1. Topología inducida por una métrica	5
1.2. Continuidad	8
1.3. Producto topológico	10
1.4. Compacidad	13
1.5. Conexidad	19
2. Teoría de continuos	24
2.1. Métrica de Hausdorff	26
3. Propiedad del punto fijo en continuos	34
3.1. Perros y conejos	34
3.2. Árboles	38
3.3. Aproximación mediante funciones	40
3.4. Continuos encadenables	43
3.5. Dendritas	47
4. Teorema del punto fijo de Brouwer	51
4.1. Grupo fundamental	51
4.2. Espacios cubrientes	58
4.3. Una aplicación sobre el teorema de Brouwer	62

Resumen

En este trabajo estudiamos la propiedad del punto fijo en continuos. Empezaremos dando las nociones básicas para definir el espacio topológico de nuestro interés, los continuos. Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Daremos una intruducción a la teoria de continuos para después definir la propiedad del punto fijo. Si X es un espacio topológico y f es una función continua de X en X , decimos que X tiene la propiedad del punto fijo si existe $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Los continuos son espacios muy interesantes dentro de los cuales se encuentra la n -celda. El hecho de que la n -celda tenga la propiedad del punto fijo, nos da importantes aplicaciones en economía, ecuaciones diferenciales, fisica, etc. A lo largo del trabajo, estudiamos diferentes continuos, y utilizamos diversas técnicas para demostrar la propiedad, un caso interesante son las dendritas, a las cuales nos aproximaremos mediante árboles, por lo que antes habremos demostrado que los árboles tienen la propiedad del punto fijo. En este trabajo, daremos una demostración del Teorema del punto fijo de Brouwer para dimensión 2, es decir, para la 2-celda, utilizando resultados de topología algebraica como lo son el grupo fundamental y espacios cubrientes. Finalmente, daremos una aplicación del Teorema de Brouwer.

Palabras clave: Punto fijo, continuos, dendritas, Brouwer, grupo fundamental.

Abstract

We study the fixed point property of continua. We start giving basics notions in order to define the topological space which we are interested, the continua. A continuum is a metric, compact, connected and not empty space. We give an introduction about continuum theory in order to define formally fixed point property. If X is a topological space and f is a continuous function from X to X , we say that X has the fixed point property if exists x in X such that $f(x) = x$. The n -cell is an interesting type of continua. The fact of the n -cell has the fixed point property gives us important applications in economics, differential equations, physics, etc. Throughout the paper, we study different continuum, and use many techniques in order to prove the property, dendrites that are an infinity subset are an interesting case of continua, through trees we will approach it, we will have shown that trees have fixed point property. In this paper, we will give a demonstration of Brouwer Fixed Point Theorem in two dimensions, that is, to the two-cell, using algebraic topology results, like the fundamental group and covering spaces. Finally, we give an application of Brouwer Theorem.

Word keys: Fixed point, continuum, dendrits, Brouwer, fundamental group.

Introducción

Introducción En este trabajo se dan algunos resultados sobre la *propiedad del punto fijo* en un tipo de espacios topológicos llamados *continuos*.

En el capítulo 1, de Nociones Preliminares, como su nombre lo indica, se dan alguna notación que usaremos a lo largo de esta tesis, así como los resultados y conceptos de topología de los espacios métricos que son necesarios para el desarrollo de la misma. Comenzamos con la definición de métrica para después definir la topología inducida por ésta. Mencionamos y probamos resultados sobre continuidad, topología producto, compacidad y finalmente de conexidad, enfocándonos en espacios topológicos métricos.

En el capítulo 2 se da una introducción acerca de la teoría de continuos. Para definir un continuo se necesitan los conceptos de compacidad y conexidad. También veremos algunas técnicas para generar ejemplos interesantes de continuos, como lo es la intersección anidada de éstos. Para concluir el capítulo se define la métrica de Hausdorff H_d en el espacio de subconjuntos de un espacio topológico X , la cual determina qué tan cercano es el parecido de dos subconjuntos del espacio, para después definir el límite superior y límite inferior de una sucesión de conjuntos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de 2^X . Veremos también que estos dos límites no siempre coinciden, pero si se cumplen las condiciones para que $\lim inf = \lim sup$ entonces tendremos que la sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a un $A \in 2^X$ según la topología dada por la métrica H_d .

En el capítulo 3 se define la *propiedad del punto fijo*, para después estudiar la propiedad solamente en los espacios topológicos que nos interesan: los continuos. Más adelante mostramos una manera informal de ver que algunos continuos tienen la propiedad del punto fijo, representando a los puntos $x \in X$ por un conejo, mientras que las imágenes de x bajo una función continua f serán representados por un perro; el que el perro “alcance” al conejo durante su recorrido por X significa que se encuentra ahí un punto fijo. Se hace esta analogía con diversos continuos como lo son, el intervalo, el triodo simple y el círculo de Varsovia. Luego, para justificar el por qué podemos convencernos de si un continuo tiene la propiedad

del punto fijo con la analogía propuesta, daremos una transición entre la demostración de *perros y conejos* a la demostración meramente topológica. Veremos que un continuo tiene la propiedad del punto fijo si podemos aproximarnos a él mediante subcontinuos que la tengan. Las dendritas serán un ejemplo de esto, ya probado que los continuos llamados *árboles* satisfacen la propiedad, pues estudiaremos a las dendritas como límite de sucesiones formadas por árboles en 2^X . Por último estudiaremos los continuos encadenables y concluiremos que también tienen la propiedad del punto fijo.

El objetivo del capítulo 4 será demostrar el teorema de Brouwer en dos dimensiones, el cuál nos dice que la 2 – *celda* tiene la propiedad del punto fijo. Para esto necesitaremos varios resultados de topología algebraica como lo son el grupo fundamental y espacios cubrientes. Particularmente nos interesa calcular el grupo fundamental de la circunferencia mediante la teoría de espacios cubrientes; se demuestra que la circunferencia no es retracto del disco para finalmente concluir que el disco satisface la propiedad del punto fijo. Para concluir el trabajo, se muestra una aplicación en álgebra lineal sobre el teorema de Brouwer.

Capítulo 1

Nociones preliminares

En este capítulo haremos un resumen de nociones generales de topología aplicadas a espacios métricos y aprovecharemos para introducir notación. En todo el trabajo, si X es un espacio topológico y Y un subconjunto de X , los símbolos $\bar{Y}$, ∂Y , $Int(Y)$ y Y' denotan la cerradura de Y , la frontera de Y , el interior de Y y el conjunto de puntos de acumulación de Y en X , respectivamente. El espacio topológico X dotado con la topología τ se denota por (X, τ) . Como es usual, los símbolos $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$, representan el conjunto vacío, el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números reales y el n -ésimo producto cartesiano de $\mathbb{R}$, respectivamente. Si A es un conjunto, la cardinalidad de A se denotará como $|A|$. En todo el trabajo, cuando tratemos con subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, los consideramos con la topología euclidiana. Si A y B son dos subconjuntos de X , diremos que A y B son ajenos si $A \cap B = \emptyset$. Nos referiremos al intervalo $[0, 1]$ como I , a la esfera de dimensión n contenida en $\mathbb{R}^{n+1}$ como S^n y la n -celda será el n -ésimo producto cartesiano del intervalo $[0, 1]$. La unión ajena de conjuntos $U_1, U_2, \dots, U_n$ la denotaremos como $\bigcup_{i=1}^n U_i$.

Un espacio métrico es un conjunto en donde se introduce la noción de distancia entre sus elementos. Se intenta generalizar lo que sucede en el plano o el espacio, donde ya conocemos lo que es la distancia (euclidiana) entre dos puntos. El problema surge al querer definir lo que se entiende por distancia entre dos elementos de un conjunto abstracto X .

1.1 Definición. Una distancia ó métrica en un conjunto X es una función $d : (X \times X) \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada par de puntos $x, y \in X$ le asocia un número real $d(x, y)$ que satisface:

- i) Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$.
- ii) $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$.

iii) Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.

iv) Desigualdad triangular: para todo $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

1.2 Definición. Un espacio métrico es un par (X, d) , donde X es un conjunto y d es una métrica definida en X .

1.3 Definición. Sea (X, d) un espacio métrico. La distancia de un punto x de X a un subconjunto Y de X se define como:

$$d(x, Y) = \inf\{d(x, y) \mid y \in Y\}.$$

Recordemos que el ínfimo de un conjunto de números reales acotado inferiormente siempre existe.

1.4 Definición. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $r > 0$. Se define

i) la bola con centro en x y radio r , como el conjunto $B_r^X(x) = \{a \in X \mid d(x, a) < r\}$.

ii) el disco con centro en x y radio r , como el conjunto $D_r^X(x) = \{a \in X \mid d(x, a) \leq r\}$.

1.5 Definición. Sea (X, d) un espacio métrico y sea U un subconjunto de X . Diremos que U es un conjunto abierto si para cada punto $u \in U$, existe una bola $B_{r_u}(u)$ contenida en U .

1.6 Proposición. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces cada bola es un conjunto abierto.

Demostración. Sea $B_r(a)$ una bola en X . Veamos que si $x \in B_r(a)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset B_r(a)$. Tomemos $\delta = r - d(x, a) > 0$ y comprobemos que si $y \in B_\delta(x)$, entonces $y \in B_r(a)$. Tenemos que $d(x, y) < \delta$ y, por la desigualdad triangular,

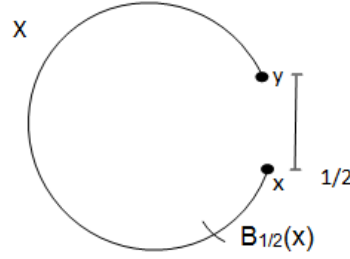
$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \delta = d(a, x) + r - d(a, x) = r,$$

lo que significa que $y \in B_r(a)$ y por lo tanto $B_\delta(x) \subset B_r(a)$. □

1.7 Proposición. En (X, d) un espacio métrico, para cada $x \in X$ y $r > 0$, $D_r(x)$ es un conjunto cerrado.

Demostración. Basta probar que $X \setminus D_r(x)$ es abierto. Sea $y \in X \setminus D_r(x)$; entonces $d(x, y) > r$. Llamemos $r_1 = d(x, y) - r$, luego no es difícil ver que $B_{r_1}(y) \subset X \setminus D_r(x)$. Por lo tanto $X \setminus D_r(x)$ es abierto. □

En general se tiene que $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset D_\varepsilon(x)$ pero no necesariamente se da la igualdad. Por ejemplo, en la figura siguiente, observamos que y pertenece a $D_{\frac{1}{2}}(x)$ pero no a $\overline{B_{\frac{1}{2}}(x)}$. La contención se da pues $B_\varepsilon(x) \subset D_\varepsilon(x)$ y $\overline{B_\varepsilon(x)}$ es el menor cerrado que contiene a $B_\varepsilon(x)$.



1.1. Topología inducida por una métrica

1.8 Proposición. Sean d_1 y d_2 dos métricas en X . Entonces son equivalentes las siguientes dos afirmaciones:

- i) Todo abierto con d_1 es abierto con d_2 .
- ii) Dados $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta^{d_2}(x) \subset B_\varepsilon^{d_1}(x)$.

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii) Dados $\varepsilon > 0$ y $x \in X$ tenemos que $B_\varepsilon^{d_1}(x)$ es un conjunto abierto con d_1 , entonces es abierto con d_2 , es decir, para todo $y \in B_\varepsilon^{d_1}(x)$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta^{d_2}(y) \subset B_\varepsilon^{d_1}(x)$. En particular, para x existe δ tal que $B_\delta^{d_2}(x) \subset B_\varepsilon^{d_1}(x)$.

ii) $\Rightarrow$ i) Sea U un abierto con d_1 y sea $x \in U$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon^{d_1}(x) \subset U$. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta^{d_2}(x) \subset B_\varepsilon^{d_1}(x) \subset U$. Entonces U es un abierto con d_2 . $\square$

1.9 Definición. Dos métricas d_1 y d_2 son equivalentes si

$$U \text{ es abierto con } d_1 \Leftrightarrow U \text{ es abierto con } d_2.$$

Si $X = \mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$, d_e llamada *distancia euclidiana* es distancia.

1.10 Definición. En (X, d) un espacio métrico, se define la métrica acotada determinada por d como

$$d_a(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}.$$

1.11 Proposición. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces d_a es métrica equivalente a la métrica d .

Demostración. Se puede probar fácilmente d_a cumple las condiciones i) – iv) de 1.1 y por lo tanto es métrica. Veamos ahora que los abiertos de d_a y de d coinciden. Supongamos que U es un abierto en d . Queremos ver que U es un abierto según la métrica acotada.

$\Rightarrow$) Sea $x \in U$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon^d(x) \subset U$. Sea $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, 1\}$. Entonces $B_{\varepsilon'}^d(x) \subset U$, pero $B_{\varepsilon'}^{d_a}(x) = B_{\varepsilon'}^d(x) \subset U$.

$\Leftarrow$) Análogamente se demuestra que todo abierto en d_a lo es también en d . $\square$

1.12 Definición. En un espacio métrico (X, d) , la familia $\tau_d = \{U \subset X \mid U \text{ es abierto}\}$ es una topología sobre X , llamada topología métrica.

1.13 Definición. Un espacio topológico (X, τ) es metrizable, si existe una métrica d sobre X tal que $\tau_d = \tau$.

1.14 Observación. Dos métricas son equivalentes inducen la misma topología.

1.15 Definición. Sea (X, d_X) un espacio métrico y sea Y un subconjunto de X . Decimos que Y es acotado si existe algún número real $k > 0$ tal que para todo $x, y \in Y$ se verifica que

$$d(x, y) \leq k.$$

1.16 Definición. Sea (X, d) un espacio métrico y sea Y un subconjunto acotado de X . El diámetro de Y se define como:

1.17 Definición. Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto de X . Un abierto relativo en Y es un subconjunto $V = Y \cap U$, donde U es un abierto de X . Análogamente se define cerrado relativo a Y .

1.18 Observación-Definición. El conjunto de abiertos relativos forma una topología τ_Y para Y y decimos que Y es subespacio de X . La métrica restringida a Y induce la topología τ_Y . Para $y \in Y$ y $r > 0$, $B_r^Y(y) = B_r^X(y) \cap Y$.

1.19 Definición. Sea X un espacio topológico y sea $x \in X$. Un subconjunto V de X es una vecindad de x si existe un conjunto abierto U en X tal que $x \in U \subset V$.

A continuación se da algunos *axiomas de separación*, éstas son propiedades que puede cumplir un espacio topológico, en el cual podemos separar puntos y conjuntos por medio de abiertos de la topología.

1.20 Definición. Un espacio topológico X es T_1 si para todo $x, y \in X$ existen U y V abiertos en X tales que x esté en U pero no en V y y esté en V pero no en U .

1.21 Definición-Proposición. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $x, y \in X$. Entonces existen $r_x, r_y > 0$ tales que

Se dice entonces que (X, d) es un espacio T_2 o que tiene la propiedad de Hausdorff.

Demostración. Sea $r = d(x, y)$. Entonces las bolas abiertas $B_{r/2}(x)$ y $B_{r/2}(y)$, tienen intersección vacía. $\square$

1.22 Definición. Un espacio topológico T_1 es regular si para cada A subconjunto cerrado de X y cada $x \in X \setminus A$, existen conjuntos ajenos U y V abiertos en X tales que $A \subset U$ y $x \in V$.

1.23 Definición. Un espacio topológico X es normal si es T_1 y dados A y B conjuntos cerrados ajenos de X , existen U y V abiertos ajenos en X tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

1.24 Teorema. Un espacio topológico X es normal si, y sólo si, X es T_1 y para cada A subconjunto cerrado de X y cada U subconjunto abierto de X tal que $A \subset U$, existe un conjunto abierto V en X tal que $A \subset V \subset \bar{V} \subset U$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que X es normal. Sea A un subconjunto cerrado de X y U un subconjunto abierto de X tal que $A \subset U$. Luego, A no interseca al conjunto cerrado $B = (X \setminus U)$. De aquí que existen abiertos V y W ajenos que contienen a A y a B respectivamente. Si $y \in B$ entonces W es una vecindad de y que no interseca a V , por lo que $y \notin \bar{V}$. Así, $\bar{V} \subset U$ y por lo tanto se cumple que $A \subset V \subset \bar{V} \subset U$.

$\Leftarrow$) Supongamos que para cada A subconjunto cerrado de X y cada U subconjunto abierto de X tal que $A \subset U$, existe un conjunto abierto V en X tal que $A \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Sean A y B dos subconjuntos cerrados ajenos de X . Luego, $U = X \setminus B$ es un abierto de X que contiene a A . Podemos tomar V abierto tal que $A \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Notemos que V y $X \setminus \bar{V}$ son abiertos ajenos, $A \subset V$ y $B = X \setminus U \subset X \setminus \bar{V}$. Por lo tanto X es normal. $\square$

1.25 Lema. Sean X un espacio métrico y Y un subconjunto de X . Si Y es unión de dos subconjuntos U y V ajenos y cerrados relativos a Y . Entonces $U \cap \bar{V} = \emptyset$ y $V \cap \bar{U} = \emptyset$.

Demostración. Como U es cerrado relativo a Y entonces $U = Y \cap \bar{U}$. Luego, $\bar{U} \cap V = \bar{U} \cap (Y \cap V) = (\bar{U} \cap Y) \cap V = U \cap V = \emptyset$. Análogamente $V \cap \bar{Y} = \emptyset$. $\square$

1.26 Proposición. Todo espacio métrico (X, d) es normal.

Demostración. Sean C y D dos cerrados disjuntos en X . Para cada $c \in C$, tomamos $\varepsilon_c > 0$ tal que $B_{\varepsilon_c/2}(c) \cap D = \emptyset$. Luego, $\bigcup_{c \in C} B_{\varepsilon_c}(c)$ es un abierto que contiene a C y no interseca a D . Análogamente construimos un abierto que contenga a D y no interseque a C . $\square$

1.27 Definición. Dado $x \in X$, una base local en x es una familia de vecindades abiertas β_x para x tal que si N es vecindad de x , entonces existe $B \in \beta_x$ tal que $B \subset N$.

1.28 Definición. Un espacio topológico X es 1° numerable si para todo $x \in X$ existe una base local (a lo más) numerable.

1.2. Continuidad

Las funciones que naturalmente se asocian a los espacios topológicos son las funciones continuas. El concepto de continuidad es el más importante en topología. Las funciones continuas entre espacios topológicos son las que preservan cercanía, es decir, son las que envían puntos que están cerca en un espacio a puntos cercanos en el otro. Para espacios métricos tomaremos como definición base la siguiente.

1.29 Definición. Sean (X, d_X) , (Y, d_Y) espacios métricos. Se dice que $f : X \rightarrow Y$ es continua en $x \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe δ tal que $f(B_\delta^X(x)) \subset B_\varepsilon^Y(f(x))$. Si f es continua en x para cada $x \in X$, entonces decimos que f es continua.

1.30 Teorema. Sean (X, d_X) , (Y, d_Y) espacios métricos y sea $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) f es continua.
- b) Para cada V abierto en (Y, d_Y) , $f^{-1}(V)$ es abierto en (X, d_X) .
- c) Para todo $x \in X$ y para todo abierto V que contenga a $f(x)$, existe U abierto con $x \in U$ tal que $f(U) \subseteq V$.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) Supongamos que f es continua. Sea V un abierto en (Y, d_Y) y sea $a \in f^{-1}(V)$. Luego, $f(a) \in V$. Como V es abierto, sea $\varepsilon_a > 0$ tal que $B_{\varepsilon_a}^Y(f(a)) \subset V$. Como f es continua en a , existe $\delta_a > 0$ tal que $f(B_{\delta_a}^X(a)) \subset B_{\varepsilon_a}^Y(f(a))$. Luego, $B_{\delta_a}^X(a) \subset f^{-1}(B_{\varepsilon_a}^Y(f(a))) \subset f^{-1}(V)$, por lo que $f^{-1}(V)$ es abierto en (X, d_X) .

b) $\Rightarrow$ a) Por hipótesis, para cada $a \in X$ y para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(a)))$ es abierto en (X, d_X) . Como $a \in f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(a)))$, debe existir $\delta > 0$ tal que $B_\delta^X(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(a)))$, con lo que queda probada la continuidad de f .

b) $\Rightarrow$ c) Sean $x \in X$ y V un subconjunto abierto en Y tal que $f(x) \in V$ y sea $U = f^{-1}(V)$. Así, U es un abierto de X y además $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$.

c) $\Rightarrow$ b) Ahora probaremos que $f^{-1}(W)$ es un abierto de X para todo W abierto de Y . Sea $x \in f^{-1}(W)$. Entonces $f(x) \in W$ y por ser W abierto de Y , existe una vecindad V de x tal que $f(V) \subset W$. Luego, $V \subset f^{-1}(W)$ y así, cualquier $x \in f^{-1}(W)$ es un punto interior de $f^{-1}(W)$. Por lo tanto $f^{-1}(W)$ es abierto en X . $\square$

1.31 Definición. Una función $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo si es continua, biyectiva y f^{-1} es continua. En este caso decimos que X y Y son homeomorfos y lo denotamos por $X \approx Y$.

De manera intuitiva, la definición de homeomorfismo nos dice los dos espacios son “el mismo” pero vistos de otra manera, es decir, uno se obtiene del otro sólo cambiando el nombre de los elementos.

1.32 Definición. *Un arco es un espacio topológico homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.*

1.33 Definición. *Una curva cerrada simple es un espacio topológico homomorfo a S^1 .*

1.34 Definición. *Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de un espacio métrico (X, d) . Decimos que la sucesión converge a $x \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $x_n \in B_\varepsilon(x)$.*

En espacios métricos, las sucesiones son muy útiles ya que nos permiten probar la continuidad de funciones.

1.35 Observación. *Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en (X, d_X) tal que $x_n \in B_{1/n}(x)$, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x .*

1.36 Proposición. *Sea $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ una función entre espacios métricos. La función f es continua en $x \in X$ si, y sólo si, para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a x , se cumple que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que f es continua en x . Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe δ tal que $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_\delta(x)$ para $n \leq N$ y, por consiguiente, $f(x_n) \in B_\varepsilon(f(x))$, esto es, $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.

$\Leftarrow$) Supongamos que f no es continua en x ; queremos encontrar una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converga a x tal que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ no converja a $f(x)$. Si f no es continua en x entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, $f(B_\delta(x)) \not\subset B_\varepsilon(f(x))$. Tomemos $\delta = \delta_1 = 1$ y x_1 tal que $x_1 \in B_1(x)$ pero $f(x_1) \notin B_\varepsilon(f(x))$. Tomemos, en general $\delta = \delta_n < 1/n$ y $x_n \in B_{\delta_n}(x)$ con $f(x_n) \notin B_\varepsilon(f(x))$. Luego, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x pero $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a $f(x)$. $\square$

1.37 Teorema. *Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es sucesión convergente en (X, d_X) entonces el punto de convergencia es único.*

Demostración. Supongamos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a dos puntos distintos $x, y \in X$. Sea $r = d(x, y)$. Por 1.21, las bolas abiertas $B_{r/2}(x)$ y $B_{r/2}(y)$ tienen intersección vacía, lo cual contradice la convergencia. $\square$

1.38 Observación. La convergencia de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a x en (X, d_X) se denota como $\lim(x_n) = x$. También escribimos $x_n \rightarrow x$.

1.39 Proposición. Sea X un espacio topológico y sea $f : X \rightarrow Y$ una función.

- a) Si $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ es una unión arbitraria de abiertos y $f|_{U_\lambda}$ es continua para cada $\lambda \in \Lambda$ entonces f es continua.
- b) Si $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ es una unión finita de cerrados y $f|_{U_i}$ es continua para cada $i = 1, \dots, n$ entonces f es continua.

Demostración. a) Sea U un abierto de Y . Entonces

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda} (f|_{U_\lambda})^{-1}(U).$$

Luego, $(f|_{U_\lambda})^{-1}(U)$ es abierto en U_λ y por lo tanto abierto en X . Así $\bigcup_{\lambda} (f|_{U_\lambda})^{-1}(U)$ es abierto en X y f es continua.

b) La demostración es análoga a a), usando que la unión finita de cerrados es cerrado. $\square$

1.3. Producto topológico

Un método para construir espacios nuevos a partir de espacios topológicos dados es mediante el producto cartesiano. La topología producto nos proporciona una manera de dotar de una topología al producto cartesiano de varios espacios topológicos, de tal manera que las “buenas propiedades” se preserven; particularmente importante es que las proyecciones sobre cada factor sean continuas y abiertas.

1.40 Definición (Producto cartesiano). Sea $\{A_i : i \in \Lambda\}$ una familia de conjuntos. El producto cartesiano de esta familia se define como

$$\prod_{i \in \Lambda} A_i = \{f : \Lambda \rightarrow \bigcup_{i \in \Lambda} (A_i) \mid \forall j f(j) \in A_j\}.$$

Si $f \in \prod_{i \in \Lambda} A_i$ y $f(i) = a_i$ entonces escribimos $f = (a_i)_{i \in \Lambda}$.

Sea

$$\pi_j : \prod_{i \in \Lambda} A_i \rightarrow A_j$$

la función que asigna a cada elemento del producto cartesiano su j -ésima coordenada,

$$\pi_j(a_i) = a_j.$$

El *Axioma de Elección* nos dice que si cada A_i es no vacío, entonces el producto cartesiano $\prod_{i \in \Lambda} A_i$ es no vacío.

?? Propiedades del producto cartesiano: Sean $A_i, B_i \subset X_i$ para toda $i \in \Lambda$:

- a) Si $A_i \subset B_i$ para toda $i \in \Lambda$ entonces $\prod A_i \subset \prod B_i$.
- b) $\prod A_i \cap \prod B_i = \prod (A_i \cap B_i)$.
- c) $\prod A_i \cup \prod B_i \subset \prod (A_i \cup B_i)$.
- d) $\prod (A_i \setminus B_i) \subset \prod A_i \setminus \prod B_i$.

Topología producto

Sea $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in \Lambda\}$ una familia de espacios topológicos. Se da a $\prod_{i \in \Lambda} X_i$ la menor topología en la cual las proyecciones $\pi_j : \prod_{i \in \Lambda} X_i \rightarrow X_j$ son continuas. Así la topología debe satisfacer que si $U_j \in \tau_j$ para $j \in \Lambda$, entonces $\pi_j^{-1}(U_j) = U_j \times \prod_{i \neq j} X_i$ es un abierto en $\prod X_i$. De esta manera, los elementos de la forma $U_j \times \prod_{i \neq j} X_i$ forman una subbase de una topología a la que se define como *topología producto*. En este caso, una base para $\prod X_i$ está formada por los elementos:

$$U_{j_1} \times U_{j_2} \times \cdots \times U_{j_r} \times \prod_{i \notin \{j_1, j_2, \dots, j_r\}} X_i,$$

donde r es cualquier natural, $j_1, j_2, \dots, j_r$ son elementos de Λ y cada U_{j_i} es abierto en X_{j_i} .

1.41 Proposición. Sea $X = \prod_{i \in \Lambda} X_i$. Entonces para cada $i \in \Lambda$ la proyección $\pi_i : \prod_{i \in \Lambda} X_i \rightarrow X_i$ es una función abierta y continua.

Demostración. La continuidad de π_i se sigue de la definición de la topología producto. Para mostrar que cada proyección π_i es abierta, basta ver que la imagen de cada básico es un abierto. Sea

$$U = U_{j_1} \times U_{j_2} \times \cdots \times U_{j_r} \times \prod_{i \notin \{j_1, j_2, \dots, j_r\}} X_i$$

un abierto básico; si $i = j_k$ entonces $\pi_i(U) = U_{j_k}$ y si $i \notin \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ entonces $\pi_i(U) = X_i$. En cualquiera de los dos casos, $\pi_i(U)$ es abierto en X_i . $\square$

El producto de espacios métricos no necesariamente es métrico, pero sí lo es, si la cantidad de espacios es numerable.

1.42 Teorema. *Sea $\{(X_i, d_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de espacios métricos. Entonces el producto $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ con la topología producto es metrizable.*

Demostración. Recordemos que dos métricas equivalentes generan la misma topología; así, se puede remplazar cada métrica d_i por la métrica acotada $d_i^a(x, y) = \min\{1, d_i(x, y)\}$.

Definamos la métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ para el producto como

$$d(x, y) : \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i^a(x_i, y_i)}{2^i},$$

donde $x = (x_n)_n$ y $y = (y_n)_n$. Veamos que d es una métrica verificando las propiedades *i)–iv)* de 1.1.

Verifiquemos las propiedades *i), ii)* y *iii)*. Para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$2^{-i} \min\{1, d_i(x_i, y_i)\} = 2^{-i} \min\{1, d_i(y_i, x_i)\} \geq 0 ;$$

luego

$$d(x, y) = d(y, x) \geq 0.$$

ii) $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $2^{-i} \min\{1, d_i(x_i, y_i)\} = 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$; esto es, para cada i se tiene que $d_i(x, y) = 0$, lo cual sucede si, y sólo si, $x_i = y_i$ para cada i , con lo cual $x = y$.

iv) Para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$d_i^a(x_i, y_i) \leq d_i^a(x_i, z_i) + d_i^a(z_i, y_i);$$

luego,

$$2^{-i} d_i^a(x_i, y_i) \leq 2^{-i} d_i^a(x_i, z_i) + 2^{-i} d_i^a(z_i, y_i),$$

lo que implica

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Nótese además que d es una métrica acotada,

$$d(x, y) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Con esto se concluye que la serie $d(x, y)$ es convergente y d está bien definida. Veamos ahora que la topología generada por esta métrica es la topología producto. Primero verifiquemos que la topología generada está contenida en la topología producto. Sea $B_\varepsilon^d(x)$ un elemento de la base. Escogemos k suficientemente grande de manera que $1/2^{k-1} < \varepsilon/2$, lo que implica que

$$\sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} < \varepsilon/2.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$ se define una bola abierta $B_{\varepsilon_i}(x_i) \subset X_i$ de la siguiente manera: si $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ entonces $\varepsilon_i = \varepsilon/4$; y si $i \geq k$ tomamos $B_{\varepsilon_i}(x_i) = X_i$

El conjunto

$$V = B_{\varepsilon_1}(x_1) \times B_{\varepsilon_2}(x_2) \times \dots \times B_{\varepsilon_k}(x_k) \times \dots$$

es un abierto de la topología producto que contiene a x . Además $V \subset B_{\varepsilon}^d(x)$, pues dado $y \in V$ pasa que

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{i \geq 0} 2^{-i} d_i(x_i, y_i) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} 2^{-i} d_i(x_i, y_i) + \sum_{i \geq k} 2^{-i} \\ &< \sum_{i=0}^{k-1} 2^{-i} \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{i \geq k} 2^{-i} \\ &\leq 2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) + \sum_{i \geq k} 2^{-i} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Para la otra inclusión, sea $x \in X$ y sea U un abierto básico de la topología producto con $x \in U$, es decir, $U = \prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$ donde $U_n = X_n$ excepto para un número finito de índices $n_1, n_2, \dots, n_k$, y para $i = 1 \dots k$,

$$U_{n_i} = B_{\varepsilon_i}^{d_{n_i}^a}(x_{n_i}) \subset X_{n_i}.$$

Veamos que $B_{\varepsilon}^d(x) \subset U$. Sea $\varepsilon = \min \{\frac{\varepsilon_1}{2}, \dots, \frac{\varepsilon_k}{2}\}$ y sea y tal que $d(x, y) < \varepsilon$. Entonces $d_i^a(x_i, y_i) < 2^i \varepsilon \leq \varepsilon_i$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Luego, $y_{n_i} \in B_{\varepsilon_i}^{d_{n_i}^a}(x_{n_i})$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Por lo tanto $y \in U$. $\square$

1.4. Compacidad

La compacidad es una de las muchas propiedades que puede adoptar un espacio topológico y resultará muy importante en este trabajo.

1.43 Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que X es compacto si, y sólo si, dada cualquier familia de abiertos $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in \Lambda\}$ que cubre a X , es decir, tal que $X = \bigcup_{i \in \Lambda} U_i$, se puede extraer una subfamilia finita $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}\}$ tal que $X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k}$. En este caso se dice que $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}\}$ es subcubierta de $\mathcal{U}$.

1.44 Ejemplo. $(\mathbb{R}, \text{usual})$ no es compacto. Si $\{U_n = (-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, no podemos extraer una subcubierta finita.

1.45 Definición. Sea A un subconjunto de X . Decimos que A es compacto si pasa cualquiera de las dos siguientes equivalencias:

- a) A , como espacio topológico con la topología relativa, es compacto.
- b) Si dada cualquier familia de abiertos $\{U_i \mid i \in \Lambda\}$ que cubre a A , es decir, tal que $A \subset \bigcup_{i \in \Lambda} U_i$, se puede extraer una subfamilia finita $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}\}$ tal que $A \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k}$.

1.46 Proposición. Si X es un espacio compacto y C es un subconjunto cerrado de X , entonces C es compacto.

Demostración. Dada $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para C , formemos una cubierta $\mathcal{V}$ para X agregando a $\mathcal{U}$ el abierto $X \setminus C$.

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{X \setminus C\}$$

Como X es compacto, tomamos una subcubierta finita de $\mathcal{V}$, $\{U_1, U_2, \dots, U_k, X \setminus C\}$. Entonces $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ es la subcubierta de $\mathcal{U}$ buscada. $\square$

1.47 Proposición. Si X es un espacio métrico y C es un subconjunto compacto de X , entonces C es cerrado.

Demostración. Demostremos que $X \setminus C$ es abierto. Sea $x \in X \setminus C$. Para cada $c \in C$, sean V_c y U_c abiertos ajenos tales que $c \in U_c$ y $x \in V_c$. De la cubierta $\mathcal{U} = \{U_c \mid c \in C\}$ de C , tomamos una subcubierta de C finita $\{U_{c_1}, U_{c_2}, \dots, U_{c_k}\}$. Sea $V = V_{c_1} \cap V_{c_2} \cap \dots \cap V_{c_k}$. Luego, $x \in V \subset X \setminus C$ y por lo tanto $X \setminus C$ es abierto. $\square$

1.48 Observación. En la proposición anterior usamos que todo espacio métrico es Hausdorff. De hecho, el resultado es verdadero para estos espacios.

1.49 Proposición. Si $f : X \rightarrow Y$ es continua y A es un subconjunto compacto entonces $f(A)$ es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para $f(A)$. Consideremos $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$. Por ser f continua, cada elemento de $\mathcal{V}$ es abierto. Además, si $x \in A$, entonces $f(x) \in f(A)$ y existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $f(x) \in U$, de donde $x \in f^{-1}(U) \in \mathcal{V}$, por lo que $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de A . Como A es compacto, $\mathcal{V}$ tiene una subcubierta finita: $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \dots, f^{-1}(U_r)\}$. Veamos que $\{U_1, \dots, U_r\}$ es cubierta de $f(A)$. Si $f(x) \in f(A)$ con $x \in A$, entonces existe $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ tal que $x \in f^{-1}(U_i)$, de donde $f(x) \in U_i$. $\square$

1.50 Teorema (Teorema de Tychonoff). *El producto topológico de espacios compactos es compacto.*

Demostración. Probaremos esto en el caso de un número finito de espacios. Para ello recurriremos a un lema.

1.51 Lema (Lema del tubo). *Sean X y Y espacios topológicos con Y compacto. Sean $x \in X$ y U un abierto que contiene a $\{x\} \times Y$. Entonces existe W vecindad abierta de x tal que $W \times Y \subset U$.*

Demostración. Para cada $y \in Y$, sea $U_y \times V_y$ un producto de abiertos tal que $(x, y) \in U_y \times V_y \subset U$. Entonces $\{U_y \times V_y \mid y \in Y\}$ es una cubierta abierta de $\{x\} \times Y$ que es homeomorfo a Y y por lo tanto compacto. Sea $\{U_{y_1} \times V_{y_1}, \dots, U_{y_t} \times V_{y_t}\}$ una subcubierta finita de $\{x\} \times Y$. Sea $W = \bigcap_{1 \leq i \leq t} U_{y_i}$ vecindad de x . Claramente se cumple que $W \times Y \subset U$. $\square$

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para $X \times Y$. Para cada $x \in X$, sea $\mathcal{U}_x = \{U \in \mathcal{U} \mid (U \cap \{x\}) \times Y \neq \emptyset\}$, entonces $\mathcal{U}_x$ es una cubierta abierta para $\{x\} \times Y$.

Usando el lema del tubo, tomemos W_x vecindad de x tal que $W_x \times Y \subset U_x$. Sea $\mathcal{W} = \{W_x \mid x \in X\}$. Entonces $\mathcal{W}$ es cubierta abierta de X de la que extraemos subcubierta finita $\{W_{x_1}, W_{x_2}, \dots, W_{x_k}\}$. Así, la subcubierta finita de $\mathcal{U}$ es precisamente $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_k}\}$. $\square$

1.52 Definición. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X . Diremos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersección finita, abreviado **pif**, si todo subconjunto finito de elementos de $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía.

1.53 Proposición. *Un espacio topológico X es compacto si, y sólo si, cualquier familia de subconjuntos cerrados de X que tenga la pif tiene intersección no vacía.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de cerrados con la pif. Supongamos que

$\bigcap_{C \in \mathcal{F}} C = \emptyset$. Entonces

$$X \setminus \bigcap_{C \in \mathcal{F}} C = \bigcup_{C \in \mathcal{F}} (X \setminus C),$$

y así $\{X \setminus C \mid C \in \mathcal{F}\}$ es una cubierta abierta de X . Tomamos una subcubierta finita $\{X \setminus C_1, \dots, X \setminus C_k\}$. Luego,

$$X = \bigcup_{i=1}^k (X \setminus C_i) = X \setminus \bigcap_{i=1}^k C_i = \bigcap_{i=1}^k C_i = \emptyset,$$

lo cual contradice nuestra hipótesis.

$\Leftarrow$) El regreso se demuestra análogamente. $\square$

1.54 Corolario. Si X es un espacio compacto y $\mathcal{F}$ es una familia no vacía de conjuntos con la pif, entonces $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \neq \emptyset$.

1.55 Teorema (Heine -Borel). Un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Por ser $\mathbb{R}^n$ un espacio Hausdorff, C es cerrado. Sea $\mathcal{U} = \{B_n(0) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tomamos $\{B_{n_1}(0), \dots, B_{n_r}(0)\}$ subcubierta de C con $n_1 < n_2, \dots, < n_r$. Luego $C \subset B_{n_r}(0)$.

$\Leftarrow$) Sea C un conjunto cerrado y acotado. Sean a_i y $b_i \in \mathbb{R}^n$ tales que $C \subset [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Por ser C un cerrado dentro de un compacto se tiene que C es compacto. $\square$

1.56 Definición. Un espacio topológico X es compacto por sucesiones si toda sucesión tiene subsucesión convergente.

Veremos que en espacios métricos, ser compacto es equivalente a ser compacto por sucesiones. Una característica importante de los espacios métricos es que son 1° numerables. Enunciamos esto con precisión en el siguiente resultado.

1.57 Proposición. Si X es un espacio métrico y $x \in X$ entonces existe un conjunto de abiertos $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tales que

- i) $x \in U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- ii) $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ y
- iii) si V es otro abierto que contiene a x , entonces $V \supset U_n$ para alguna n .

Demostración. Basta tomar $U_n = B_{1/n}(x)$. $\square$

Nota. Una familia de abiertos que contiene a x que cumple ii) se le llama *base local en x* .

1.58 Proposición. Si X es compacto y A es un subconjunto infinito entonces A tiene al menos un punto de acumulación.

Demostración. Supongamos que $A' = \emptyset$. Como $A \cup A' = \overline{A}$ entonces A es cerrado y por 1.46, A es compacto. Para cada $a \in A$, sea U_a un abierto tal que $(U_a \setminus \{a\}) \cap A = \emptyset$; así $U_a \cap A = \{a\}$. Tenemos que $\mathcal{U} = \{U_a \mid a \in A\}$ es cubierta abierta para A y tomamos una subcubierta finita $\{U_{a_1}, \dots, U_{a_r}\}$. Luego, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ lo cual es una contradicción, ya que A es infinito. $\square$

En el siguiente lema aprovechamos la propiedad de ser T_1 de los espacios métricos.

1.59 Lema. Sean X un espacio métrico y A un subconjunto de X . Si x es un punto de acumulación de A , entonces toda vecindad de x tiene una cantidad infinita de puntos de A .

Demostración. Supongamos lo contrario y sea U abierto con $x \in U$ tal que $U \cap A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Como X es T_1 , para cada $i = 1, 2, \dots, n$ sea V_i vecindad de x tal que $a_i \notin V_i$. Entonces $V = \cap V_i$ es vecindad de x y $(V \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$, lo cual es una contradicción. $\square$

1.60 Lema. Sea X es un espacio métrico y 1° numerable. Si todo subconjunto infinito tiene punto de acumulación entonces X es compacto por sucesiones.

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en X .

Caso 1. Si $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es finito, entonces algún elemento de A se repite para infinitos n . La subsucesión constante con ese valor es la subsucesión buscada.

Caso 2. Si $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es infinito y $x \in A'$ entonces tomemos $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, una base local de x tal que $U_1 \supset U_2 \supset U_3, \dots$. Construyamos una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^\infty$ que converja a x de la siguiente manera:

Sea $x_{n_1} \in (U_1 \cap A)$.

Sea $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in U_2 \cap A$.

Sea $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_3} \in U_3 \cap A$.

Inductivamente formamos los términos de la sucesión y así, $(x_{n_k})_k$ es la subsucesión convergente buscada. $\square$

1.61 Lema. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$ una cubierta abierta para X . Entonces existe $\delta > 0$ tal que todo subconjunto Y de diámetro menor que δ está contenido en algún elemento de $\mathcal{U}$ (se dice que δ es un número de Lebesgue para la cubierta $\mathcal{U}$).

Demostración. Para cada $x \in X$ sea $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$ y sea r_x tal que $B_{2r_x}(x) \subset U_x$.

Sea $\mathcal{V} = \{B_{r_x}(x) \mid x \in X\}$. Como X es compacto, extraemos subcubierta finita

$$\{B_{r_{x_1}}(x_1), B_{r_{x_2}}(x_2), \dots, B_{r_{x_n}}(x_n)\}.$$

Sea $0 < \delta < \min\{r_{x_i} \mid i = 1, \dots, n\}$. Sea A un abierto de diámetro d tal que $d < \delta$. Sea $a \in A$ y sea x_i tal que $a \in B_{r_{x_i}}(x_i)$. Si b es un punto en A , entonces $d(b, a) \leq d < \delta < r_{x_i}$. Luego,

$$d(b, a) < r_{x_i} \text{ y } d(a, x_i) < r_{x_i},$$

por lo que

$$d(b, x_i) < 2r_{x_i} \text{ y } b \in B_{2r_{x_i}}(x_i) \subset U_{x_i}.$$

De lo anterior concluimos que $A \subset U_{x_i}$. $\square$

1.62 Definición. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio métrico es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m < N$ se cumple que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

1.63 Lema. Si una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X, d) converge a $x \in X$ entonces es de Cauchy.

Demostración. Como $x_n \rightarrow x$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n < N$ entonces $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, para todo $n, m < N$ se tiene que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

1.64 Proposición. Sea X un espacio métrico y compacto por sucesiones. Entonces para toda $\varepsilon > 0$, existe un número finito de puntos $x_1, x_2, \dots, x_n$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$.

Demostración. Supongamos que no y sea $\varepsilon > 0$ tal que ninguna unión finita de bolas de radio ε cubra a X . Por recursión construyamos una sucesión de la siguiente manera, sea $x_1 \in X$ arbitrario y para $n \geq 2$ sea $x_n \in X \setminus B_\varepsilon(x_1), \dots, B_\varepsilon(x_{n-1})$. Como X es compacto por sucesiones, $(x_n)_n$ tiene subsucesión convergente, lo cual es imposible, ya que los términos de la sucesión distan más de 2ε , esto es, la sucesión no es de Cauchy y por lo tanto no converge. □

1.65 Teorema. Sea (X, d) un espacio métrico, entonces las siguientes propiedades de X son equivalentes:

- a) X es compacto.
- b) Todo subconjunto infinito de X tiene punto de acumulación.
- c) X es compacto por sucesiones.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) Se demostró en 1.58.

b) $\Rightarrow$ c) Siendo X 1° numerable, la prueba se dio en 1.60 y por lo tanto X es compacto por sucesiones.

c) $\Rightarrow$ a) Probemos ahora la compacidad de X . Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X y sea δ el número de Lebesgue para $\mathcal{U}$. Por 1.65, existen $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup B_{\delta/2}(x_i)$. Por 1.62, cada $B_{\delta/2}(x_i)$ está contenida dentro de un elemento U_i de $\mathcal{U}$. Así, $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ es una subcubierta finita de X . □

1.5. Conexidad

La conexidad es uno de los invariantes topológicos más importantes. Intuitivamente, un objeto es conexo si está formado de una sola “pieza” o si “no se puede separar”, y desconexo si está compuesto por varias “partes”. Sin embargo, esta formulación tan simple requiere de una elaboración formal más cuidadosa.

1.66 Definición. *Un espacio topológico X es desconexo si existe una pareja de abiertos no vacíos (U, V) de X , tal que $U \cap V = \emptyset$ y $X = U \cup V$. A (U, V) se le llama separación de abiertos para X . Si no existe dicha separación entonces X es conexo.*

1.67 Observación. *Un espacio topológico X es conexo si los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados a la vez son el vacío y el total.*

1.68 Teorema. *Si $A \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, entonces es conexo.*

Demostración. Supongamos que A es desconexo, entonces existe (U, V) separación de abiertos relativos a A . Sean $x_1 \in U$ y $x_2 \in V$, sin pérdida de generalidad $x_1 < x_2$. Como A es un intervalo, $[x_1, x_2] \subset A$. Como U es un abierto relativo a A , existe $\delta_1 > 0$ tal que $[x_1, x_1 + \delta_1] \subset U$, análogamente existe δ_2 tal que $(x_2, x_2 + \delta_2] \subset V$. Sean $V' = \{x \in V \mid x < x_1\}$ y $y = \inf\{V'\}$. Entonces $x_1 < y < x_2$. Como A es un intervalo, $y \in A$. Si $y \in U$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $(y - \delta, y + \delta) \subset U$ y $y + \delta$ sería cota inferior de V' , lo que contradice el hecho de ser el ínfimo. Si $y \in V$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $(y - \delta, y + \delta) \subset V$, de donde y no sería cota inferior de V' , lo cual sería una contradicción. Por lo tanto, A es conexo. $\square$

1.69 Proposición. *La conexidad es invariante topológica.*

1.70 Ejemplo. a) $I = [0, 1]$ es conexo.

b) El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es desconexo. Sean $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{2}\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{2}\}$. Luego, (A, B) es una separación de abiertos para $\mathbb{Q}$.

c) El conjunto $X = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x > 0\}$ es conexo por ser homeomorfo a $[0, 1]$.

1.71 Observación. *Si C es un subconjunto conexo de X y (U, V) es una separación de abiertos para X entonces $C \subset U$ ó $C \subset V$.*

1.72 Proposición. *Si $\{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de conexos de $\mathbb{R}^n$ tales que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \neq \emptyset$ entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ es desconexo. Sea (U, V) una separación de abiertos para $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ y sea $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$. Sin pérdida de generalidad $x \in U$ luego, para todo C_λ , $C_\lambda \cap U \neq \emptyset$. Por ser C_λ conexo C_λ está contenido en U para toda $\lambda \in \Lambda$ y por lo tanto $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \subset U$ y así, $V \neq \emptyset$. $\square$

1.73 Proposición. Si $C_1, C_2, \dots$ son conjuntos conexos tales que $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ es conexo.

Demostración. La demostración es análoga a 1.72. Si (U, V) es una separación de abiertos para $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Supongamos que $C_1 \subset U$, pero $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, por lo que $C_2 \subset U$. Luego, $C_2 \subset U$, pero $C_2 \cap C_3 \neq \emptyset$, por lo que $C_3 \subset U$ y así sucesivamente. Por lo tanto, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subset U$. $\square$

1.74 Lema. Sea (X, d) un espacio métrico y sea C un subconjunto conexo de X . Si D es tal que $C \subset D \subset \overline{C}$ entonces D es conexo.

Demostración. Supongamos que D es desconexo, es decir, existe separación de abiertos ajenos (U, V) . Como C es conexo entonces $C \subset U$ ó $C \subset V$, sin pérdida de generalidad, sea $C \subset U$. Tomemos $d \in (V \cap D)$. Como $d \in \overline{C}$ entonces $C \cap V \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción ya que $U \cap V = \emptyset$ y por lo tanto D es conexo. $\square$

1.75 Corolario. Sea (X, d) un espacio métrico. Si Y es un subconjunto conexo de X entonces $\overline{Y}$ también es conexo.

1.76 Ejemplo. Ya vimos que $X = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x > 0\}$ es conexo, por lo que la curva del topólogo, definida por

$$\overline{X} = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x > 0\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]),$$

también es conexa.

1.77 Proposición. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y X es un espacio conexo entonces $f(X)$ también es conexo.

Demostración. Supongamos que $f(X)$ es desconexo, es decir, existe separación de abiertos (U, V) para $f(X)$. Por ser f continua $(f^{-1}(U), f^{-1}(V))$ es una separación de abiertos para X , lo que contradice la conexidad de X . $\square$

1.78 Teorema (Teorema del valor intermedio). *Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$. Entonces para cada y tal que $f(a) < y < f(b)$, existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$.*

Demostración. Por ser f continua y $[a, b]$ un conjunto conexo, se sigue que $f([a, b])$ es conexo. Si $f(a) < y < f(b)$ y $y \notin f([a, b])$ entonces $((-\infty, y), (y, \infty))$ formarían una separación de abiertos para $f([a, b])$. $\square$

1.79 Proposición. *Si X y Y son espacios conexos entonces $X \times Y$ es conexo.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea $y_0 \in Y$. Entonces $\{x\} \times Y$ y $\{y_0\} \times X$ son conjuntos conexos por ser homeomorfos a Y y X respectivamente.

Para todo $x \in X$, $C_x = \{x\} \times Y$ es un conexo que intersecta a $(X \times \{y_0\})$ y por lo tanto $C_x \cup (X \times \{y_0\})$ también es conexo. Luego, $\bigcap_{x \in X} (C_x \cup (X \times \{y_0\})) = C_x$ que es distinto del vacío y por lo tanto $\bigcup_{x \in X} C_x \cup (X \times \{y_0\}) = X \times Y$ es conexo. $\square$

1.80 Proposición. *Si $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de conexos entonces $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es conexo.*

Demostración. Sea $a = (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in X$ fijo. Para cada $A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t\} \subset \Lambda$ conjunto finito sea $Y_A = X_{\lambda_1} \times X_{\lambda_2} \times \dots \times X_{\lambda_t} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} \{a_\lambda\}$. El conjunto Y_A es conexo por ser homeomorfo a $X_{\lambda_1} \times \dots \times X_{\lambda_t}$ y, como $a \in \bigcap Y_A$, entonces $Y = \bigcup Y_A$ también es conexo.

Ahora probaremos que Y es denso en X . Sea $U = \{U_{\lambda_1} \times \dots \times U_{\lambda_t} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} \text{un básico del producto}\}$. Sea $A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ entonces $U \cap Y_A \neq \emptyset$, por lo tanto Y_A es denso en el producto y $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es conexo. $\square$

1.81 Definición. *Decimos que un espacio topológico X , es conexo por trayectorias, abreviado **c.p.t.** si dados x y $y \in X$ existe una trayectoria que empieza en x y termina en y , es decir, existe $f : [0, 1] \rightarrow X$ continua tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.*

1.82 Lema. *Si X es un espacio conexo por trayectorias entonces es conexo.*

Demostración. Supongamos que X es desconexo y sea (U, V) una separación de abiertos para X . Sean $u \in U$ y $v \in V$. Si $f : [0, 1] \rightarrow X$ es una trayectoria de u a v entonces (U, V) es una separación de abiertos de $f[0, 1]$, pero $f[0, 1]$ es conexo por ser imagen continua de un conexo, así que tenemos una contradicción. $\square$

1.83 Ejemplo. a) $\mathbb{Q}$ no es c.p.t. ni conexo.

b) La curva del topólogo es conexa pero no c.p.t. ya que no existe ningún camino que una al punto $(0,0)$ con $(1, \text{sen}(1))$. Si tal camino f existiera ($f : [0,1] \rightarrow X$ con $f(0) = (0,0)$, $f(1) = (1, \text{sen}(1))$), por ser $f([0,1])$ conexo entonces $f([0,1]) = X$. Luego, sea $(x_1 < x_2 < \dots)$ una sucesión en $[0,1]$ que converja a 1 y tal que:

$$f(x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por ser f continua, la sucesión $(f(x_n))_n$ debe converger a un punto: $f(1) = (1, \text{sen}(1))$. Claramente la sucesión $(f(x_n))_n$ tiene dos puntos de convergencia, lo que contradice la continuidad de f .

1.84 Definición. Sea X un espacio topológico. Decimos que C es componente de X si es máximo conexo (es decir, C es conexo y si $C \subsetneq D$ entonces D no es conexo).

1.85 Proposición. Si C es componente entonces C es cerrado.

Demostración. Por ser $\overline{C}$ conexo y $C \subset \overline{C}$ entonces $C = \overline{C}$. □

1.86 Definición. Si $C \subset X$ es máximo c.p.t. entonces C es componente por trayectorias.

1.87 Definición. Un espacio X es localmente conexo si para todo $x \in X$ y todo abierto N con $x \in N$, existe $U \subset N$ abierto y conexo.

1.88 Definición. Un espacio X es localmente conexo por trayectorias si para todo $x \in X$ y todo abierto N con $x \in N$, existe $U \subset N$ abierto y conexo por trayectorias.

1.89 Observación. Localmente conexo por trayectorias $\Rightarrow$ localmente conexo.

1.90 Proposición. Un espacio topológico X es localmente conexo (respectivamente localmente c.p.t.) si, y sólo si, las componentes (respectivamente componentes c.p.t.) de los abiertos son abiertos.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos X localmente conexo y sea U un abierto de X . Sea C componente de U y sea $a \in C$. Por ser U abierto, $a \in U$. Luego, tomemos abierto conexo V con $a \in V$ tal que $V \subset U$, por lo tanto $V \subset C$.

$\Leftarrow$) Sea $x \in X$ y sea N una vecindad de x . Sea $U \subset N$ abierto de X tal que $x \in U$. Sea C componente de U que contiene a x . Por hipótesis C es abierta y por lo tanto es la vecindad conexa de x contenida en N . □

1.91 Proposición. *Si X es localmente c.p.t. entonces las componentes son las componentes por trayectorias.*

Demostración. Afirmación: Toda componente por trayectorias es componente.

Sea T una componente por trayectorias. Por ser T conexa, T está contenida en C para alguna C componente conexa. Demostremos que $T = C$ por contradicción.

Por 1.90, sabemos que las componentes por trayectorias son abiertas. Para cada $x \in C \setminus T$, tomamos T_x la componente por trayectorias de x . Como T_x es conexo y $T_x \cap C \neq \emptyset$ entonces $T_x \subset C$.

Sea

$$U = \bigcup_{x \in C \setminus T} T_x.$$

Luego, U es abierto y por lo tanto (U, T) es una separación de abiertos de C , por lo que $C = T$ y toda componente por trayectorias es componente.

Usemos lo anterior para ver que toda componente es componente por trayectorias. Sea C una componente de X y sea $x \in C$. Consideremos T_x la componente por trayectorias que contiene a x . Entonces $T_x \subset C$ y por lo anterior, $T_x = C$. $\square$

1.92 Corolario. *Si X es conexo y localmente c.p.t. entonces X es c.p.t.*

1.93 Corolario. *Si X es localmente c.p.t. y U es un subconjunto abierto conexo de X entonces U es c.p.t.*

1.94 Corolario. *Si U es un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$, entonces U es c.p.t.*

Capítulo 2

Teoría de continuos

En el capítulo anterior revisamos propiedades de un espacio métrico, compacidad y conexidad, las cuales nos ayudarán a la comprensión de la teoría de continuos que abordaremos en este capítulo.

2.1 Definición. Sea (X, d) un espacio métrico y sea Y un subconjunto de X . Decimos que:

- 1) X es un continuo si es compacto, conexo y no vacío.
- 2) Y es un subcontinuo de X si es un continuo como subespacio. Es un subcontinuo propio de X si, además, $Y \subsetneq X$.

Usaremos el término *no degenerado* para continuos con más de un punto.

2.2 Ejemplo. El intervalo $[0, 1]$, S^n , la circunferencia y la n -celda son continuos.

Una de las técnicas más importantes para obtener ejemplos de continuos es el uso de *intersecciones anidadas*.

2.3 Proposición. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos compactos tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$ y sea $X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Si U es un abierto de X_1 tal que $X \subset U$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, $X_n \subset U$. En particular, si cada $X_n \neq \emptyset$ entonces X es un compacto no vacío.

Demostración. Supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X_n \setminus U$. Por 1.66 $X_1 \setminus U$ es compacto por sucesiones, por lo que la sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión que converge a algún punto $p \in X_1 \setminus U$. Para cada k , $x_n \in X_k$ para toda $n \geq k$. Luego que, $p \in X_k$ para cada k y por lo tanto $p \in X$, pero $p \notin U$, lo que contradice que $X \subset U$. Luego, existe N tal

que para toda $n \geq N$ $X_n \subset U$. Ahora veamos que $X \neq \emptyset$ si cada $X_n \neq \emptyset$. Supongamos que $X = \emptyset$, si tomamos $U = \emptyset$ entonces $X_n = \emptyset$ lo cual contradice la hipótesis. Como los X_n son compactos, entonces son cerrados, luego X es cerrado y por lo tanto compacto. $\square$

2.4 Teorema. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de continuos tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ $X_n \supset X_{n+1}$, entonces $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es un continuo.

Demostración. Por la proposición anterior $X \neq \emptyset$, métrico y compacto; por lo que sólo falta ver que X es conexo. Supongamos que X es desconexo y sea (U, V) separación de abiertos para X . Como $U \cup V \supset X$ entonces $X_n \subset (X \cap U) \cup (X \cap V)$. Supongamos que $X_n \subset X \cap U$. Usando que $X_n \supset X_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots \subset (X \cap U)$ entonces $(X \cap V) = \emptyset$, lo cual contradice la desconexidad de X . $\square$

Una gran cantidad de ejemplos interesantes se construyen usando la proposición anterior.

2.5 Ejemplo. Comenzamos dividiendo el cuadrado $S_0 = [0, 1] \times [0, 1]$ en nueve cuadrados congruentes y tomamos $S_1 = S_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Análogamente, dividimos cada uno de los ocho cuadrados restantes en nueve cuadrados congruentes, y llamamos S_2 al continuo que se obtiene al quitar cada uno de los ocho cuadrados centrales. Continuando de esta manera, se define S_3, S_4 , etc. Sea $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$; entonces por 2.4, S es un continuo. A este continuo se le llama Curva Universal de Sierpinski.

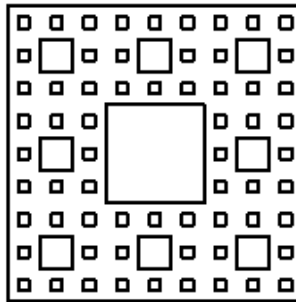


Figura 2.1: S_4 para la construcción de la Curva Universal de Sierpinski

2.1. Métrica de Hausdorff

En esta sección definiremos la métrica de Hausdorff en el conjunto de los subconjuntos cerrados de un espacio métrico. En general puede decirse que la métrica de Hausdorff nos da la noción de proximidad física entre dos conjuntos. Ésta nos determina qué tan lejos está un conjunto de otro y de esta manera tendremos una topología para este conjunto. Luego veremos una descripción apropiada de convergencia respecto a ésta métrica.

2.6 Definición. Para X un espacio topológico se definen los siguientes conjuntos:

- a) $2^X = \{A \subset X \mid A \text{ es cerrado en } X \text{ y distinto del vacío}\}.$
- b) $C(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es conexo}\}.$

Sea X un espacio métrico y compacto con métrica d . Para todo $\varepsilon > 0$ y para cada $A \in 2^X$,

- c) $N_d(\varepsilon, A) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon \text{ para algún } a \in A\}$ se llama nube de radio ε y centro A .

Ahora, para cada $A, B \in 2^X$,

- d) $H_d(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset N_d(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\varepsilon, A)\}.$

2.7 Observación. Los espacios X en los que estamos trabajando son compactos, por lo que los elementos de 2^X son compactos.

H_d es llamada la métrica de Hausdorff inducida por d y se asocia a los espacios 2^X y C^X . Intuitivamente, los conjuntos A y B están muy cerca respecto a H_d siempre que cada punto de A esté muy cerca de B y viceversa.

2.8 Teorema. La métrica de Hausdorff H_d es, en efecto, una métrica.

Demostración. Para ver que H_d es una métrica, demostremos lo siguiente:

- i) $H_d(A, B) \geq 0.$
- ii) $H_d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$
- iii) $H_d(A, B) = H_d(B, A).$
- iv) $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C).$

Sea $E_d(A, B) = \{\varepsilon > 0 \mid A \subset N_d(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\varepsilon, A)\}$. Entonces $H_d(A, B) = \inf E_d(A, B)$. El conjunto $E_d(A, B)$ está acotado inferiormente por 0 y es distinto del vacío ya que $A \subset N_d(\text{diám}(X) + 1, B)$ y $B \subset N_d(\text{diám}(X) + 1, A)$, de donde $(\text{diám}(X) + 1) \in E_d(A, B)$.

i) Claramente $H_d(A, B) \geq 0$ ya que $H_d(A, B) = \inf E_d(A, B)$ y $E_d(A, B)$ está acotado inferiormente por 0.

ii) $\Rightarrow$) Supongamos que $H_d(A, B) = 0$ con $A, B \in 2^X$ distintos. Sea $a \in A$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta \in E_d(A, B)$ tal que $\delta < \varepsilon$, de donde se sigue que $A \subset N_d(\delta, B) \subset N_d(\varepsilon, B)$. Luego, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta < \varepsilon$, de modo que $B_\varepsilon(a) \cap B \neq \emptyset$, de aquí que $a \in \overline{B}$, pero como B es cerrado, entonces $a \in B$. Por lo tanto $A \subset B$. Análogamente se demuestra que $B \subset A$. Por lo tanto, $A = B$.

$\Leftarrow$) Veamos que $H_d(A, A) = 0$. Es claro que para todo $\varepsilon > 0$, $A \subset N_d(\varepsilon, A)$, por lo que $\inf E_d(A, A) = 0$. Por lo tanto, $H_d(A, A) = 0$.

iii) El hecho de que $H_d(A, B) = H_d(B, A)$ se sigue de la definición de H_d .

iv) Sean $A, B, C \in 2^X$ distintos. Queremos ver que

$$\inf E_d(A, C) \leq \inf E_d(A, B) + \inf E_d(B, C),$$

que es equivalente a demostrar que

$$\inf E_d(A, C) \leq \inf \{\delta + \eta \mid \delta \in E_d(A, B), \eta \in E_d(B, C)\}.$$

Sean $\delta \in E_d(A, B)$, $\eta \in E_d(B, C)$. Por definición, $A \subset N_d(\delta, B)$ y $B \subset N_d(\eta, C)$. Dada $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$ y además existe $c \in C$ tal que $d(b, c) < \eta$, de donde $d(a, c) < \delta + \eta$ y así $A \subset N_d(\delta + \eta, C)$. De manera análoga se llega a que $C \subset N_d(\delta + \eta, A)$. Así que $(\delta + \eta) \in E_d(A, C)$. Tenemos entonces que

$$\inf E_d(A, C) \leq \delta + \eta$$

luego, $\inf E_d(A, C)$ es cota inferior del conjunto $\{\delta + \eta \mid \delta \in E_d(A, B), \eta \in E_d(B, C)\}$, por lo que

$$\inf E_d(A, C) \leq \inf \{\delta + \eta \mid \delta \in E_d(A, B), \eta \in E_d(B, C)\}.$$

Por lo tanto, H_d es métrica. □

Se da ahora una descripción para la convergencia de conjuntos según la métrica de Hausdorff.

Convergencia en 2^X

2.9 Definición. Sea $(A_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos de 2^X . Se define el límite inferior de A_n y el límite superior de A_n de la siguiente manera:

- a) $\liminf (A_n) = \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset\}$
- b) $\limsup (A_n) = \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0 \forall k \in \mathbb{N} \exists n > k B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset\}$

2.10 Ejemplo. Sea $X = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3 \text{ y } 0 \leq y \leq 1\}$. Definamos la sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in 2^X$ por

$$A_n = \begin{cases} [1, 3] \times \{\frac{1}{n}\}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ [0, 2] \times \{\frac{1}{n}\}, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$\liminf (A_n) = [1, 2] \times \{0\}$ y $\limsup (A_n) = [0, 3] \times \{0\}$ (ver figura 2.2).

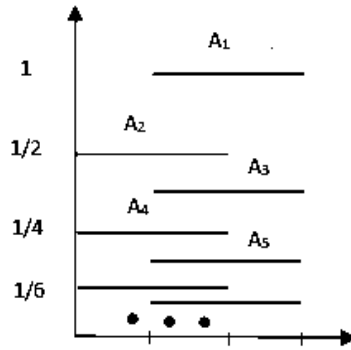


Figura 2.2: Sucesión $(A_n)_{n=1}^\infty \in 2^X$

2.11 Definición. Sean X un espacio topológico y $(A_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de subconjuntos de X y $A \subset X$. Si $\liminf (A_n) = A = \limsup (A_n)$ entonces escribimos $\lim(A_n) = A$.

Veremos después que, en este caso, la sucesión $(A_n)_n$ converge a A en el espacio 2^X con la métrica de Hausdorff (ver 2.15).

2.12 Proposición. Sea X un continuo y $(A_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en 2^X . Entonces:

- a) $\liminf (A_n) \subset \limsup (A_n)$,
- b) $\liminf (A_n)$ y $\limsup (A_n)$ son conjuntos cerrados,
- c) $\limsup (A_n) \neq \emptyset$ para toda sucesión $(A_n)_{n=1}^\infty$.

Demostración. a) Sea $x \in \liminf (A_n)$. Por definición, para todo $\varepsilon < 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para toda } n \geq N.$$

Luego,

$$B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para una infinitos } n.$$

Por lo tanto, $x \in \limsup (A_n)$.

b) Demostraremos que $\overline{\limsup (A_n)} \subseteq \limsup (A_n)$. Sea $x \in \overline{\limsup (A_n)}$ y sea $\varepsilon > 0$.

Entonces

$$\limsup (A_n) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset,$$

de modo que existe $z \in \limsup (A_n) \cap B_\varepsilon(x)$. Luego, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(z) \subseteq B_\varepsilon(x).$$

Ahora, como $z \in \limsup (A_n)$, entonces $B_\delta(z) \cap A_n \neq \emptyset$ para infinitos n , por lo que $x \in \limsup (A_n)$. Por lo tanto, $\limsup (A_n)$ es un conjunto cerrado en X .

Análogamente se demuestra que $\liminf (A_n)$ también es un conjunto cerrado en X .

c) Sea $(A_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos de 2^X y sea $(a_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos de X tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A_n$. Por ser X compacto, existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ que converge a algún $x \in X$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_k} \in B_\varepsilon(x)$ para toda $k > K$. De aquí que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para infinitos n , por lo que $x \in \limsup (A_n)$ y así $\limsup (A_n) \neq \emptyset$. $\square$

2.13 Lema. Sean X un espacio topológico, $(A_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de subconjuntos de X y $A \subset X$. Entonces las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

- i) $\lim A_i = A$;
- ii) $A \subset \liminf (A_i)$ y $\limsup (A_i) \subset A$.

Demostración. El lema se deduce inmediatamente de la definición 2.11 y de 1.58 a). $\square$

2.14 Proposición. Sea $(A_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos de 2^X . Entonces

- i) $x \in \liminf (A_n)$ si, y sólo si, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ de X tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in A_n$ y la sucesión converge a x .
- ii) $x \in \limsup (A_n)$ si, y sólo si, existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2, \dots$ y existen puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que la sucesión $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ converge a x .

Demostración. i) $\Rightarrow$) Sea $x \in \liminf (A_n)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in A_n$ tal que

$$d(x_n, x) = \min\{d(x, y) \mid y \in A_n\},$$

donde d es la métrica definida en X . Probemos ahora que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x .

Sea $\varepsilon > 0$. Como $x \in \liminf(A_n)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$, $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$, de manera que para cada $n > N$, existe $a_n \in A_n$ tal que $d(x, a_n) < \varepsilon$. Luego, para todo $n \geq N$ pasa que

$$d(x_n, x) = \min\{d(x, y) \mid y \in A_n\} \leq d(x, a_n) < \varepsilon.$$

Así, para todo $n \geq N$, $d(x_n, x) < \varepsilon$ se tiene que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x .

i) $\Leftarrow$) Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de X que converge a $x \in X$ y tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A_n$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces

$$d(x_n, x) < \varepsilon, \text{ es decir, } x_n \in B_\varepsilon(x).$$

De esta manera, para todo $n \geq N$

$$x_n \in B_\varepsilon(x) \cap A_n.$$

Así, $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ y, por lo tanto, $x \in \liminf(A_n)$.

ii) $\Rightarrow$) Supongamos que $x \in \limsup(A_n)$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$,

$$B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para infinitos } n.$$

Sea $\varepsilon = 1$ y sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} \in B_1(x) \cap A_{n_1}$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y sea $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_2} \in B_{\frac{1}{2}}(x) \cap A_{n_2}$. Continuamos el proceso tomando naturales $n_1 < n_2 < \dots$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ tales que

$$d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}.$$

La sucesión construida $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge a x .

ii) $\Leftarrow$) Supongamos que existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2, \dots$ y existen puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ tales que la sucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge a $x \in X$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > K$, $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$. Esto implica que

$$x_{n_k} \in B_\varepsilon(x) \cap A_{n_k} \neq \emptyset,$$

de manera que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para infinitos n . Por lo tanto, $x \in \limsup(A_n)$. $\square$

2.15 Teorema. Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de 2^X . Entonces $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ converge con la métrica de Hausdorff a un punto $A \in 2^X$ si, y sólo si, $\liminf(A_n) = A = \limsup(A_n)$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ converge con la métrica de Hausdorff a algún $A \in 2^X$. Demostraremos que $\liminf(A_n) = \limsup(A_n) = A$, para lo cual es suficiente demostrar que

1. $A \subseteq \liminf (A_n)$ y,
2. $\limsup (A_n) \subseteq A$.

1. Por hipótesis, $\lim A_n = A \in 2^X$ con la métrica de Hausdorff; entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $H_d(A_n, A) < \varepsilon$, es decir,

$$A_n \subseteq N(\varepsilon, A) \text{ y } A \subseteq N(\varepsilon, A_n).$$

Sea $a \in A$. Entonces $a \in N(\varepsilon, A_n)$, esto es, existe $x_n \in A_n$ tal que $d(a, x_n) < \varepsilon$, de manera que $B_\varepsilon(a) \cap A_n \neq \emptyset$ para $n \geq N$. Por lo tanto $a \in \liminf (A_n)$.

2. Supongamos que $\limsup (A_n)$ no está contenido en A . Entonces existe $x \in X$ tal que $x \in \limsup (A_n)$ pero $x \notin A$. Por ser A cerrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Como $x \in \limsup (A_n)$, se tiene que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para infinitos n . Dado que $(A_n)_{n=1}^\infty$ converge a A con la métrica de Hausdorff, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A) \text{ y } A \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n) \text{ para toda } n \geq N.$$

Elegimos $M \geq N$ tal que

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A_M \neq \emptyset.$$

Tomemos $z \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A_M \neq \emptyset$. Luego, $z \in N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$ y existe $a \in A$ tal que $d(a, z) < \frac{\varepsilon}{2}$, por lo que

$$d(x, a) < d(x, z) + d(z, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $B_\varepsilon(x)$ intersecta a A , lo que contradice la elección de ε . Así concluimos que

$$\lim A_n = A \Rightarrow \liminf (A_n) \text{ y } \limsup (A_n) = A.$$

$\Leftarrow$) Supongamos que $\limsup (A_n) = \liminf (A_n)$. Queremos demostrar que $\lim A_n = A$ con la métrica de Hausdorff. Sea $A = \limsup (A_n)$. Así $A \neq \emptyset$ y A es cerrado, esto es, $A \in 2^X$. Sea $\varepsilon > 0$, probemos que

- i) existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M_1$, $A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$ y,
- ii) existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M_2$, $A_n \subseteq N(\varepsilon, A)$.

i) Observemos que la familia $\{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \mid a \in A\}$ es una cubierta abierta para A , y A es un compacto por ser cerrado y estar contenido en un compacto, luego existen $m \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^m B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i).$$

Como $A = \liminf (A_n)$ y $a_i \in A$, dado $\lambda > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $B_\lambda(a_i) \cap A_n \neq \emptyset$; así para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_i$ entonces $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i) \cap A_n \neq \emptyset$. Sea $M_1 = \max\{N_1, N_2, \dots, N_m\}$; entonces dada $n \geq M_1$ y $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, se tiene que $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i) \cap A_n \neq \emptyset$. Afirmación: $A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$ para todo $n \geq M_1$.

En efecto, sea $n \geq M_1$ y sea $a \in \bigcup_{i=1}^m B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i)$. Entonces existe $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que $a \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i)$, esto es

$$d(a, a_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Además para $n \geq M_1$ existe $x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i) \cap A_n$, luego

$$d(a, x) \leq d(a, a_i) + d(a_i, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$d(a, x) < \varepsilon \text{ lo que implica que } a \in N(\varepsilon, A_n) \text{ para } n \geq M_1,$$

y esto prueba i).

ii) Supongamos falso el resultado, esto es, supongamos que para todo $N \in \mathbb{N}$, existen $n \geq N$ tal que $A_n \not\subseteq N(\varepsilon, A)$. Así, para

$$N = 1 \text{ existe } n_1 \geq 1 \text{ tal que } A_{n_1} \not\subseteq N(\varepsilon, A),$$

para

$$N = n_1 + 1 \text{ existe } n_2 > n_1 \text{ tal que } A_{n_2} \not\subseteq N(\varepsilon, A).$$

De manera recursiva, construimos una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \dots$ tal que

$$A_{n_k} \not\subseteq N(\varepsilon, A) \text{ para toda } k \geq N.$$

Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$ tomemos $x_{n_k} \in A_{n_k} \setminus N(\varepsilon, A) \subseteq X$. Como X es compacto, existe una subsucesión $(x_{n_{k_i}})_{i=1}^\infty$ de $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ tal que $x_{n_{k_i}} \rightarrow x_0$ para algun $x_0 \in X$. Observemos que para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$x_{n_{k_i}} \in X \setminus N(\varepsilon, A) \text{ y } X \setminus N(\varepsilon, A)$$

es un conjunto cerrado en X , entonces

$$\lim(x_{n_{k_i}}) = x_0 \in X \setminus N(\varepsilon, A) \text{ lo que implica que } x_0 \notin A.$$

Ahora, $\lim(x_{n_{k_i}}) = x_0$ y $(A_{n_{k_i}})_{i=1}^\infty$ es una subsucesión de $(A_n)_{n=1}^\infty$, entonces por la proposición anterior se tiene que

$$x_0 \in \limsup (A_n) = A,$$

por lo que $x_0 \in A$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $N \geq M_2$, $A_n \subseteq N(\varepsilon, A)$.

Ya probamos i) y ii), luego hacemos $N = \max\{M_1, M_2\}$. Entonces, para $n \geq N$, tenemos

$A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$ y $A_n \subseteq N(\varepsilon, A)$ por lo que $H_d(A, A_n) < \varepsilon$ si $n \geq N$.

Por lo tanto, $\lim A_n = A \in 2^X$ con la métrica de Hausdorff.

□

Capítulo 3

Propiedad del punto fijo en continuos

El tema principal del trabajo se abordará en este capítulo. Nos interesa ver cómo se comporta la *propiedad del punto fijo*, abreviada *p.p.f.* en los continuos. En general es difícil predecir bajo qué operaciones se conserva la propiedad del punto fijo. Esta propiedad se puede definir en cualquier espacio topológico. Veremos algunas condiciones necesarias para que un continuo cumpla dicha propiedad, como lo es la conexidad del espacio.

3.1 Definición. *Un punto fijo de una función $f : X \rightarrow X$, es un punto x tal que $f(x)=x$.*

3.2 Definición. *Decimos que un espacio métrico (X, d) tiene la propiedad del punto fijo (abreviado **p.p.f.**), si para toda función continua $f : X \rightarrow X$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

3.3 Ejemplo. a) *Para $n \geq 1$, la n -esfera no tiene la p.p.f.*

Sea $f : S^n \rightarrow S^n$ tal que $x \mapsto -x$ para toda $x \in S^n$. Entonces f es continua y no contiene puntos fijos.

b) *El toro no tiene la p.p.f. Más aún, el toro sólido no tiene la p.p.f.*

Sea $z \in \mathbb{C}$ de norma 1, $z \neq 1$ y sea $f : S^1 \times D^2 \rightarrow S^1 \times D^2$ tal que $(x, y) \mapsto (zx, y)$. Entonces f es continua sin puntos fijos.

3.1. Perros y conejos

Verificar si la propiedad del punto fijo se cumple para un espacio, en este caso continuos, puede resultar complicado. Veremos una manera informal de ver esta propiedad con perros y conejos. Dada una función continua $f : X \rightarrow X$ y dado un punto $t \in X$, t representa la posición de un perro que tratará de alcanzar a un conejo $f(t)$. En el momento que el perro

atrape al conejo, es decir, cuando $t = f(t)$ para algún $t \in X$, entonces se habrá producido un punto fijo.

El intervalo

Comenzaremos con el caso básico del intervalo $[0, 1]$.

Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua. Supongamos que $f(x) \neq x$ para todo $x \in I$. Situemos al perro en un extremo del intervalo $t = 0$ y sea $f(0)$ el punto inicial del conejo (ver figura 3.1). Estamos suponiendo que $f(0) > 0$. Entonces al iniciar el recorrido, $x < f(x)$ (con el orden usual), pero al terminar, el perro está en la posición $t = 1$, de manera que el conejo ahora se encuentra en $f(1) < 1$. La idea intuitiva es que en algún momento la situación del perro y el conejo se invierte y esto sólo es posible si el perro alcanza al conejo. Formalmente, sea $A = \{x \in I \mid f(x) > x\}$. Como $0 \in A$ entonces $A \neq \emptyset$. Veamos que A es abierto.

Sea $x \in A$. Tomemos U abierto con $f(x) \in U$ pero tal que $x \notin U$. Como f es continua, existe V abierto con $x \in V$ tal que $f(V) \subset U$. Para todo $y \in V$, $f(y) > y$ y por lo tanto $y \in A$. Así tenemos que A es abierto.

Análogamente se demuestra que $B = \{x \in I \mid f(x) < x\}$ es abierto y, como $1 \in B$, entonces $B \neq \emptyset$. De esta manera se tiene una separación de I en abiertos no vacíos, lo cual contradice la conexidad de I . Por lo tanto, existe $p \in I$ tal que $f(p) = p$.



Figura 3.1: Intervalo $[0, 1]$

El n-odo

3.4 Definición. Para $3 \leq n < \infty$, un n -odo simple es un continuo homeomorfo al continuo obtenido de unir el punto $(0, 1)$ en el plano $\mathbb{R}^2$ con cada uno de los puntos $(1, 0)$, $(2, 0)$, $\dots$, $(n, 0)$ mediante un arco.

Veamos que también el n -odo simple tiene la p.p.f. Usaremos la idea de los perros y conejos. El perro inicia su recorrido en el punto $(0, 1)$, mientras que el conejo se encuentra en algún punto del arco que une al $(0, 1)$ con $(k, 0)$, para algún $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ (ver figura 3.2).

Gracias al lugar estratégico donde se encuentra el perro, es decir, el punto de intersección de todos los arcos, puede "ver" fácilmente al conejo en el arco K . Ahora, el perro tratará de alcanzar al conejo en K . Veamos al arco K como el intervalo $[0, 1]$ y démosle el mismo orden. Supongamos que el perro no alcanza nunca al conejo, es decir, $f(x) \neq x$ para todo $x \in K$. Sea $A = \{x \in I \mid f(x) < x\}$. Como $0 \in A$ entonces $A \neq \emptyset$. Veamos que A es abierto. Sea $x \in A$. Tomamos U abierto con $f(x) \in U$ tal que $x \notin U$. Como f es continua, existe V abierto con $x \in V$ tal que $f(V) \subset U$. Para todo $y \in V$, $f(y) < y$ y por lo tanto $y \in A$. Sea $B = \{x \in I \mid f(x) > x\}$. Como $1 \in B$ entonces $B \neq \emptyset$. Como B también es abierto, la pareja (A, B) forma una separación de abiertos para K , lo que contradice su conexidad. Por lo tanto existe $p \in K$ tal que $f(p) = p$. Lamentablemente, el conejo fue atrapado antes de que el perro llegara al punto $(k, 0)$.

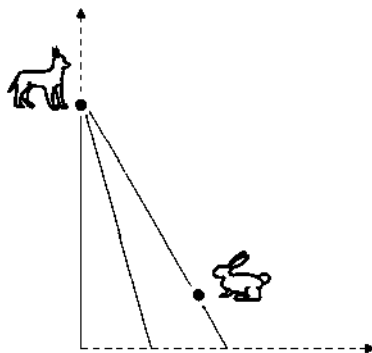


Figura 3.2: Triodo simple

El círculo de Varsovia

3.5 Definición. *El círculo de Varsovia es el continuo homeomorfo a $Y \cup Z$ donde Y es el continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$ y Z es la unión de tres arcos en $\mathbb{R}^2$, uno de $(0, -1)$ a $(0, -2)$, otro de $(0, -2)$ a $(1, -2)$ y el último de $(1, -2)$ a $\text{sen}(1)$.*

El círculo de Varsovia se puede ver como imagen del $[0, 1)$ mediante una función continua, de manera que $0 \mapsto (0, 1) = e$. Llamemos V al círculo de Varsovia. Diremos que $p < f(p)$ en V , si eso ocurre en las preimágenes.

Supongamos que V no tiene la p.p.f. El perro comienza el recorrido en el punto e y el conejo siempre está adelante de él. Sea $A = \{p \in V \mid p < f(p)\}$. Como $0 \in A$ entonces $A \neq \emptyset$.

Afirmación: A es abierto.

Sea $p \in A$. Tomamos U vecindad de $f(p)$ tal que $p \notin U$. Como f es continua, existe V vecindad de p tal que $f(V) \subset U$. Luego, para toda $q \in V$, $q < f(q)$ y por lo tanto $q \in A$. Sea $X \setminus A = \{p \in V \mid p > f(p)\}$. Análogamente se demuestra que $X \setminus A$ es abierto. Por ser V conexo, los únicos conjuntos abiertos y cerrados son el vacío y el total, por lo que $A = V$. Luego, tomamos sucesión $(q_1, q_2, \dots)$ en V (ver figura 3.3) tal que $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto q , donde $f(q_n)$ me indica la posición del conejo cuando el perro está en el punto q_n , notemos que el conejo siempre está por delante del perro, es decir $f(q_n) > q_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por ser V compacto, la sucesión $(f(q_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge a algún punto $p \in V$. Notemos que en el segmento $[e, q]$, $p < q$, lo cual contradice el hecho de que $f(q_n) > q_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto el perro y el conejo se encontraron en algún punto del segmento $[e, q]$ y así V tiene punto fijo.

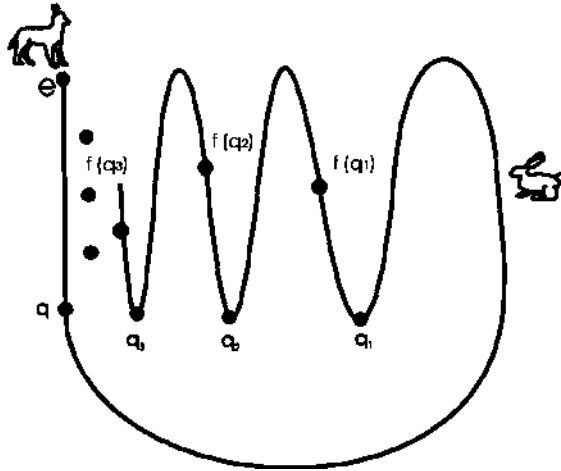


Figura 3.3: Círculo de Varsovia

Formalizando las ideas dadas anteriormente sobre el perro y el conejo, veremos algunas propiedades que nos ayudarán a determinar si un continuo tiene la propiedad del punto fijo. Comenzaremos probando que el arco tiene la p.p.f. y para esto, recurriremos al teorema del valor intermedio.

3.6 Proposición. *Si un espacio X tiene la p.p.f entonces es conexo.*

Demostración. Supongamos X desconexo, es decir, existe (U, V) una separación de abiertos para X . Sea $u_0 \in U$ y $v_0 \in V$ y sea $f : X \rightarrow X$ una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} v_0, & \text{si } x \in U \\ u_0, & \text{si } x \in V \end{cases}$$

Mostraremos que f es continua. Como U y V son complementarios, también son cerrados, así que f está definida de manera continuo en dos cerrados y, por 1.39, concluimos que f es continua. $\square$

3.7 Proposición. *La p.p.f. es un invariante topológico, es decir, si X tiene la p.p.f. y Y es homeomorfo a X entonces Y tiene la p.p.f.*

Demostración. Dada $f : Y \rightarrow Y$ continua, encontremos alguna $y \in Y$ tal que $f(y) = y$.

Sea $h : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. La función $h^{-1} \circ f \circ h$ es una función continua cuyo dominio y codominio es X . Tomemos $x \in X$ tal que $(h^{-1} \circ f \circ h)(x) = x$ (por hipótesis X tiene la p.p.f.). Luego, $(f \circ h)(x) = h(x)$ y $y = h(x)$ es el punto fijo buscado. $\square$

En 3.1 ya probamos que todo arco tiene la p.p.f. Se da aquí otra prueba usando el Teorema del Valor Intermedio.

3.8 Lema. *Todo arco tiene la p.p.f.*

Demostración. Basta demostrar que el intervalo $[0, 1]$ tiene la p.p.f.

Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua. Supongamos que $f(0) \neq 0$ y $f(1) \neq 1$, de lo contrario, 1 ó 0 serían puntos fijos. Sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - x$ (g está midiendo qué tan lejos estamos de la función identidad). La función g es continua y tenemos que $g(0) > 0$ y $g(1) < 0$. Por el Teorema del valor intermedio, sabemos que existe $y \in [0, 1]$ tal que $g(y) = 0$, esto es $f(y) - y = 0$ por lo que $f(y) = y$ y así, y es un punto fijo para $[0, 1]$. $\square$

Los intervalos no compactos, no tienen la p.p.f.

3.9 Ejemplo. *Sea $X = (0, 1]$ y sea $f : X \rightarrow X$ dada por $x \mapsto \frac{x^2}{2}$. Claramente f es continua y no tiene la p.p.f.*

3.2. Árboles

3.10 Definición. *Sea X un continuo. Un punto $p \in X$ es un punto extremo de X si para cualquier abierto U de X con $p \in U$, existe V abierto de X tal que $p \in V \subset U$ y ∂V^U consiste de un solo punto.*

Para dar la definición de árbol, tenemos que dar la noción de grafica finita.

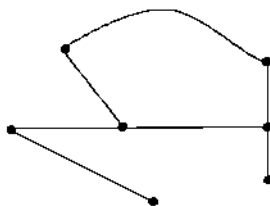
Figura 3.4: Continuo con puntos extremos p_1 y p_2 

Figura 3.5: Ejemplo gráfica finita

3.11 Definición. Una gráfica finita es un continuo que puede escribirse como la unión finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos.

3.12 Definición. Un árbol es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples.

3.13 Teorema. Si A y B son dos continuos con la p.p.f. tales que $A \cap B = \{a\}$ y $X = A \cup B$ entonces X tiene la p.p.f.

Demostración. Sea $f : A \cup B \rightarrow A \cup B$ una función continua. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(a) \in A$. Definamos la función $r : A \cup B \rightarrow A$ de la forma

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in A \\ a, & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Notemos que r es continua por ser $r|_A$ y $r|_B$ funciones continuas definidas en conjuntos cerrados. Consideramos la función $r \circ f|_A : A \rightarrow A$. Por ser $r \circ f|_A$ continua existe $q \in A$ tal que $(r \circ f|_A)(q) = q$. Si $f(q) \in A$ entonces $r(f(q)) = f(q)$ y luego $f(q) = q$.

Si $f(q) \in B$ entonces $r(f(q)) = a$, luego $a = q$ y así $f(a) = f(q) \in A \cup B$. Por lo tanto $f(q) = q$ y X tiene la p.p.f. $\square$

3.14 Teorema. Todo árbol tiene la p.p.f.

Demostración. Sea X un árbol con n arcos. La demostración la haremos por inducción sobre el número de arcos de X .

Ya sabemos que todo arco tiene la p.p.f. Supongamos que si X es un árbol con $n - 1$ arcos entonces tiene la p.p.f. Sea $A = [x_1, x_2]$ un arco de X , donde x_1 es un punto extremo del árbol. Luego, $X \setminus A = Y$ sigue siendo un árbol con $n - 1$ arcos, por lo que Y tiene la propiedad del punto fijo. Agreguemos a Y el arco A , estos se unen en el punto x_2 y por 3.13, X tiene la p.p.f. $\square$

3.3. Aproximación mediante funciones

3.15 Teorema. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Si para cada $\varepsilon > 0$ existe una función continua $f_\varepsilon : X \rightarrow X_\varepsilon$, donde X_ε es un subcontinuo de X con la p.p.f. y $d(f_\varepsilon(x), x) < \varepsilon$ para todo $x \in X$, entonces X tiene la p.p.f.

Demostración. Sea $g : X \rightarrow X$ una función continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$, nos fijamos en $f_{\frac{1}{n}} : X \rightarrow X_{\frac{1}{n}}$. Consideremos la función $f_{\frac{1}{n}} \circ g|_{X_{\frac{1}{n}}} : X_{\frac{1}{n}} \rightarrow X_{\frac{1}{n}}$. Ésta es continua por ser composición de funciones continuas. Como $X_{\frac{1}{n}}$ tiene la p.p.f. tomamos $x_n \in X_{\frac{1}{n}}$ tal que $(f_{\frac{1}{n}} \circ g)(x_n) = x_n$. Por ser X compacto, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a p para algún $p \in X$, es decir, existe $K_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq K_1$,

$$d(x_{n_k}, p) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por la continuidad de g , tenemos que $g(x_{n_k}) \rightarrow g(p)$, es decir, existe $K_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq K_2$,

$$d(g(x_{n_k}), g(p)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in X$,

$$d(f_{\frac{1}{n}}(x), x) < \frac{1}{n}, \text{ en particular, } d(f_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}), x_{n_k}) < \frac{1}{n_k}.$$

Por la propiedad arquimediana, existe $K_3 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{K_3} < \frac{\varepsilon}{3}$ luego, si $k \geq K_3$ entonces $\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{3}$. Demostraremos que $g(p) = p$.

Sea $K > \max\{K_1, K_2, K_3\}$. Así,

$$\begin{aligned} d(g(p), p) &\leq d(g(p), g(x_{n_K})) + d(g(x_{n_K}), f_{\frac{1}{n_K}}(g(x_{n_K}))) + d(f_{\frac{1}{n_K}}(g(x_{n_K})), p) = \\ &= d(g(p), g(x_{n_K})) + d(g(x_{n_K}), x_{n_K}) + d(x_{n_K}, p) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, $g(p) = p$ y X tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Lo que muestra el teorema anterior es que un continuo X tiene la p.p.f. si podemos aproximarnos a él (tanto como queramos) mediante subcontinuos que sí la tienen.

3.16 Corolario. *El continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$ tiene la p.p.f.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existen puntos $x_1, x_2 \in [0, \varepsilon]$ tales que $\text{sen}(\frac{1}{x_1}) = 1$ y $\text{sen}(\frac{1}{x_2}) = -1$ y para todo $x \in (x_1, x_2)$, $\text{sen}(\frac{1}{x}) \in (-1, 1)$, ver figura 3.6. Sea

$$X_\varepsilon = \{(x, y) \in X \mid x \in [x_1, 1]\}.$$

Sean $\pi : X \rightarrow [-1, 1]$ la función proyección en la segunda coordenada y $g : [-1, 1] \rightarrow X_\varepsilon$ dada por $x \mapsto \arcsen(x)$. La función $f = g \circ \pi : X \rightarrow X_\varepsilon$ es continua. Luego, por ser X_ε homeomorfo al intervalo $[0, 1]$ y por 3.9 concluimos que X_ε tiene la p.p.f. Para terminar

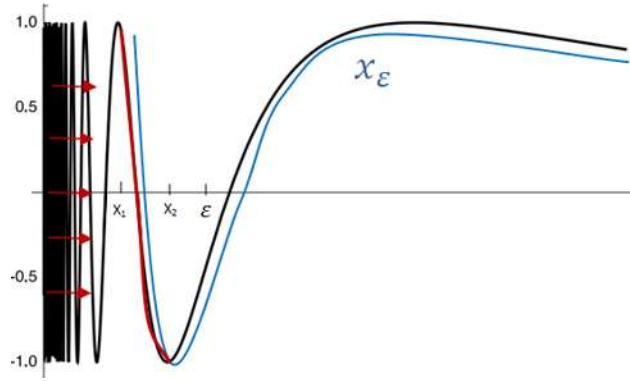


Figura 3.6: $x_1, x_2 \in [0, \varepsilon]$

demostraremos que $d(f(x, y), (x, y)) < \varepsilon$. para todo $x \in X$.

Sea $(x, y) \in X$

$$d(f(x, y), (x, y)) = d(g(\pi(x, y)), (x, y)) = d(g(y), (x, y)) = d((x, y), (x, y)) = 0 < \varepsilon.$$

Como $\text{sen}(\frac{1}{x})$ cumple las condiciones de 3.15, concluimos que la curva del topólogo tiene la p.p.f. □

El siguiente teorema sobre aproximación de funciones, también nos permite determinar si un continuo tiene o no la p.p.f. En particular, lo utilizaremos más adelante para demostrar esta propiedad en los continuos llamados *dendritas*.

3.17 Teorema. *Si X es un continuo y existe una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^\infty$ de X en X que converge uniformemente a id_X y es tal que $f_n(X)$ tiene la p.p.f. para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X tiene la p.p.f.*

Demostración. Sea $h : X \rightarrow X$ una función continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la función

$$g_n = f_n \circ h|_{f_n(X)} : f_n(X) \rightarrow f_n(X).$$

Ésta es continua por ser composición de funciones continuas. Como cada $f_n(X)$ tiene la p.p.f., existe $x_n \in f_n(X)$ tal que $g_n(x_n) = x_n$. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y una subsucesión convergente $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(x_{n_k})_k = (x_n)_k$ y sea p el punto de convergencia de la subsucesión. Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ entonces

$$\sup \{d(f_n(x), x) \mid x \in X\} < \varepsilon/2.$$

en particular,

$$d(f_n(h(x_n)), h(x_n)) < \varepsilon/2;$$

Por otro lado, por ser h continua, la sucesión $(h(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a $h(p)$, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$ entonces

$$d(h(x_n), h(p)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $n \geq \max\{N_1, N_2\}$. Entonces

$$d(f_n(h(x_n)), h(p)) \leq d(f_n(h(x_n)), h(x_n)) + d(h(x_n), h(p)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$g_n(x_n) = f_n(h(x_n)) \rightarrow h(p).$$

Por otro lado,

$$g_n(x_n) = x_n \rightarrow p.$$

Luego, $p = h(p)$ y por lo tanto X tiene la p.p.f. □

3.18 Definición. Sean X un espacio topológico y $Y \subset X$. Decimos que Y es un retracto de X si existe una función continua $r : X \rightarrow Y$ tal que para cada $y \in Y$, $r(y) = y$. A la función r se le llama retracción.

3.19 Ejemplo. Sean X un espacio topológico y $x_0 \in X$ y sea $f : X \rightarrow \{x_0\}$ tal que $x \mapsto \{x_0\}$ para toda $x \in X$. El conjunto $\{x_0\}$ es un retracto de X y f es retracción.

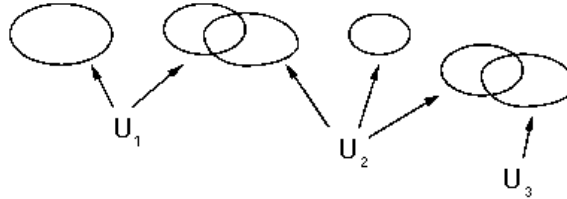
3.20 Teorema. Sea X un espacio topológico y $Y \subset X$. Si X tiene la propiedad del punto fijo y Y es un retracto de X , entonces Y tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración. Sea $f : Y \rightarrow Y$ una función continua y sea $r : X \rightarrow Y$ una retracción. Por ser f y r continuas, la función $f \circ r : X \rightarrow Y$ es continua. Como X tiene la p.p.f. entonces existe un $p \in X$ tal que $(f \circ r)(p) = p$. Notemos que $f(r(X)) \subset Y$, por lo que $p \in Y$ y $r(p) = p$. Así, $f(r(p)) = f(p) = p$ y Y tiene un punto fijo. $\square$

3.4. Continuos encadenables

3.21 Definición. Una familia $\mathcal{C} = \{U_1, U_2, \dots\}$ de subconjuntos abiertos de un espacio métrico (X, d) es una cadena simple en X si se tiene que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si, y sólo si, $|i - j| \leq 1$. A cada U_k se le llama eslabón de $\mathcal{C}$. Se dice que una cadena simple $\mathcal{C} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ conecta a los puntos a y b en X si $a \in U_1$ y $b \in U_n$.

En algunos textos se consideran sólo cadenas simples en lo que los eslabones son conexos. Nosotros no pedimos eso aquí. La siguiente figura muestra cómo puede lucir una cadena simple $\mathcal{C}$. Construiremos cadenas simples escogiendo los eslabones dentro de cubiertas abiertas.



3.22 Teorema. Sea (X, d) espacio métrico conexo y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$ una cubierta abierta de X . Entonces para todo $a, b \in X$ existe una cadena simple que conecta a a con b cuyos eslabones son elementos de $\mathcal{U}$.

Demostración. Sea P el conjunto de puntos x de X tales que existe una cadena simple cuyos eslabones son elementos de $\mathcal{U}$ y que conectan con a con x . Tenemos que $P \neq \emptyset$ ya que $a \in P$. Queremos probar que P es abierto y cerrado en X para concluir, por la conexidad de X , que $X = P$. Para $x \in P$ sea U_x un elemento de la cubierta tal que $x \in U_x$ entonces $U_x \subset P$ y por lo tanto P es abierto.

Para ver que P es cerrado, probaremos que $P = \overline{P}$. Sea $x \in \overline{P} = P \cup \partial P$. Si $x \in P$, no hay nada que probar. Supongamos que $x \in \partial P$ y sea U_x el elemento de la cubierta que contiene a x . Entonces $U_x \cap P \neq \emptyset$. Tomamos un $z \in U_x \cap P \neq \emptyset$, en particular, $z \in P$ y

existe una cadena $\{U_a, \dots, U_z\}$ de a a z , así, la cadena que une a a con x es precisamente $\{U_a, \dots, U_z, U_x\}$ y por lo tanto $x \in P$. $\square$

3.23 Definición. Una cadena simple $\mathcal{C}$ de conjuntos abiertos en un espacio métrico (X, d) se llama ε – cadena si el diámetro de cada eslabón de $\mathcal{C}$ es menor a ε .

3.24 Definición. Un espacio métrico (X, d) es encadenable si para toda $\varepsilon > 0$, existe una ε – cadena que cubre a X . Decimos que X es encadenable de a a b si existe una ε – cadena $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ que cubre a X y tal que $a \in C_1$ y $b \in C_m$.

3.25 Ejemplo. El intervalo $[0, 1]$ es encadenable de 0 a 1

3.26 Ejemplo. El intervalo abierto $(0, 1)$ es encadenable, pero no es encadenable de a a b para cualesquiera $a, b \in (0, 1)$.

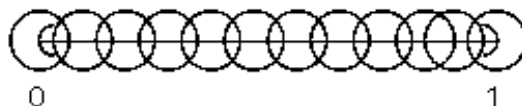


Figura 3.7: Intervalo $(0, 1)$ encadenable

3.27 Ejemplo. El continuo $\sin(\frac{1}{x})$ es encadenable, figura 3.8.

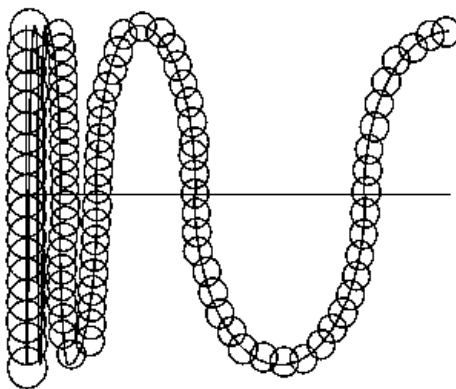


Figura 3.8: Continuo $\sin(1/x)$

3.28 Lema. Si X es un continuo encadenable y $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ es una ε -cadena para X entonces existe una ε -cadena $\mathcal{C}' = \{C'_1, C'_2, \dots, C'_n\}$ que cubre a X tal que para toda $k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$, $\overline{C'_k} \cap \overline{C'_{k+2}} = \emptyset$.

Demostración. El conjunto $A = X \setminus \bigcup_{k=2}^n C_k$ es compacto por ser un cerrado en X . Por ser A un subconjunto de C_1 , la regularidad de X nos dice que existe un abierto C'_1 de X tal que $A \subset C'_1 \subset \overline{C'_1} \subset C_1$ (1.24). Notemos que $\{C'_1, C_2, \dots, C_n\}$ es una ε -cadena que cubre a X . Ahora, $B = X \setminus (C'_1 \cup \bigcup_{k=3}^n C_k)$ es un cerrado contenido en C_2 . Luego, existe un C'_2 abierto en X tal que $B \subset C'_2 \subset \overline{C'_2} \subset C_2$. Observemos que $\{C'_1, C'_2, \dots, C_n\}$ es una ε -cadena que cubre a X . Continuando de esta manera construimos la ε -cadena $\mathcal{C}'$ que cubre a X . $\square$

3.29 Teorema. Sea X un continuo encadenable y sea Y un subcontinuo de X . Entonces Y es encadenable.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como X es encadenable, existe una ε -cadena $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_n)$ que cubre a X . Sea j el primer número natural tal que $Y \cap C_j \neq \emptyset$ y sea k el número natural más grande tal que $Y \cap C_k \neq \emptyset$. Demostraremos que $\mathcal{C}' = \{C_r \cap Y, C_{r+1} \cap Y, \dots, C_k \cap Y\}$ es una ε -cadena que cubre a Y .

El único caso en el que esto no se cumpliría es que, para algún s donde $r \leq s \leq k$, $(C_s \cap Y) \cap (C_{s+1} \cap Y) = \emptyset$, pero esto implicaría que $\bigcup_{r \leq t \leq s} (Y \cap C_t) \cap \bigcup_{s+1 \leq t \leq k} (Y \cap C_t) = \emptyset$ y por lo tanto existiría una separación de abiertos para Y , lo que contradiría su conexidad. $\square$

Ahora veremos cómo se relacionan los continuos encadenables con la propiedad del punto fijo.

3.30 Lema. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $f : X \rightarrow X$ una función continua. Si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $x_\varepsilon \in X$ tal que $d(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)) < \varepsilon$ entonces f tiene un punto fijo.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in X$ tal que $d(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n}$. Por compacidad existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a cierto punto $p \in X$. Tomamos $K_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq K_1$,

$$d(x_{n_k}, p) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por ser f continua, la sucesión $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $f(p)$. Tomamos $K_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq K_2$:

$$d(f(x_{n_k}), f(p)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otro lado, sabemos que $d(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n}$. Por propiedad arquimediana, tomemos $K_3 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\varepsilon}{3} \geq \frac{1}{K_3}$

Ahora demostraremos que $f(p) = p$. Sea $K > \max\{K_1, K_2, K_3\}$.

$$d(p, f(p)) \leq d(p, x_{n_K}) + d(x_{n_K}, f(x_{n_K})) + d(f(x_{n_K}), f(p)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Así, $d(p, f(p)) = 0$ y por lo tanto $p = f(p)$. $\square$

3.31 Definición. Si X es un continuo encadenable, entonces una sucesión $(\mathcal{C}_n)_{n=1}^{\infty}$ de cadenas simples, cada una de las cuales cubre a X , se llama sucesión definitoria de cadenas para X si para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

- i) $\mathcal{C}_n$ es una $\frac{1}{2^n}$ - cadena con la propiedad de que, eslabones disjuntos tienen cerradura disjunta, y
- ii) $\mathcal{C}_{n+1}$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}_n$, esto es, la cerradura de cada eslabón de $\mathcal{C}_{n+1}$ está contenido en algún eslabón de $\mathcal{C}_n$.

3.32 Lema. Todo continuo encadenable tiene una sucesión definitoria de cadenas.

Demostración. Como X es encadenable, podemos encontrar una 1 - cadena $\mathcal{C}'_1$ que cubra a X . Por 3.28, existe una 1 - cadena $\mathcal{C}_1 = \{C_1, \dots, C_{n_1}\}$ que cubre a X con la propiedad de que eslabones disjuntos tienen cerradura disjunta.

Por 1.62, tomemos $\delta_1 > 0$ tal que si $Y \subset X$ y $\text{diám}(Y) < \delta_1$ entonces existe $\lambda \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ tal que $Y \subset C_{1_\lambda}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\delta_1 < \frac{1}{2}$. Por ser X encadenable existe una δ_1 - cadena $\mathcal{C}'_2$ que cubre a X tomemos ahora la cadena $\mathcal{C}_\varepsilon = \{C_1, \dots, C_{n_2}\}$ que también cubre a X . Además, como para toda $k \in \{1, \dots, n_2\}$

$$\text{diám}(C_k) = \text{diám}(\overline{C_k}) < \delta_1,$$

se tiene que $\overline{C_k} \subset C_\lambda$ para alguna $\lambda \in \{1, \dots, n_1\}$. Así, las cadenas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen las propiedades i) y ii). De la misma manera construimos el resto de la sucesión definitoria de cadenas para X que buscamos. $\square$

3.33 Teorema. Todo continuo encadenable X tiene la p.p.f.

Demostración. Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua y sea $(\mathcal{C}_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión definitoria de cadenas para X . Por 3.30 basta que para toda $\varepsilon > 0$ exista $x_\varepsilon \in X$ tal que $d(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)) < \varepsilon$. Dada $\varepsilon > 0$, tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Sean

- i) $\mathcal{C}_k = \{C_1, \dots, C_{n_k}\}$,
- ii) $A = \{x \in X \mid \text{si } x \in C_i \text{ y } f(x) \in C_j \text{ entonces } j > i\}$,

- iii) $B = \{x \in X \mid \text{exite } i \text{ tal que } x \in C_i \text{ y } f(x) \in C_i\},$
- iv) $C = \{x \in X \mid \text{si } x \in C_i \text{ y } f(x) \in C_j \text{ entonces } j < i\}.$

Afirmación: A y C son conjuntos cerrados en X .

Supongamos que $x \in X \setminus A$. Como $\mathcal{C}_k$ es una cadena para X que lo cubre, entonces $x \in C_i$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, n_k\}$ y $f(x) \in C_j$ para algún $j \leq i$. Como f es continua y C_i es abierto entonces existe $V_x \subset C_i$ con $x \in V_x$, tal que $f(V_x) \subset C_j$. Luego, $V_x \subset (X \setminus A)$ y por lo tanto $(X \setminus A)$ es abierto. Análogamente para ver que C es cerrado.

Si B fuera vacío entonces A y C serían una separación de cerrados ajenos de X , cuya unión sería X , lo cual contradice la conexidad de X . Luego, B es distinto del vacío y cualquier elemento $x_\varepsilon \in B$ cumple que $d(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)) < \varepsilon$, por lo tanto X tiene la p.p.f. $\square$

3.5. Dendritas

Es evidente que la intersección de conexos no necesariamente es conexo. Espacios en los que esto ocurre son de especial interés para nosotros. Continuaremos estudiando un tipo muy especial de continuos llamados *dendritas*. Anteriormente probamos que los árboles tienen la propiedad del punto fijo y, para poder probar que las dendritas tienen la propiedad del punto fijo, veremos la manera de aproximarnos a ellas mediante árboles contenidos en ellas.

3.34 Definición. *Un continuo es unicoherente si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X tales que $A \cup B = X$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

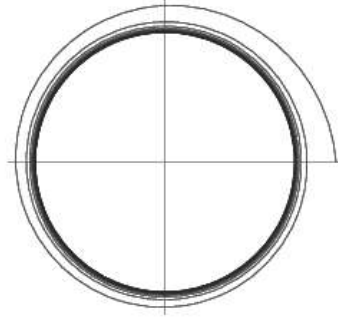
3.35 Definición. *Un continuo es hereditariamente unicoherente si todos sus subcontinuos son unicoherentes, es decir, si la intersección no trivial de cualesquiera dos subcontinuos es un subcontinuo.*

Todo continuo hereditariamente unicoherente es unicoherente, pero el recíproco no se cumple. Por ejemplo, el intervalo $[0, 1]$ es hereditariamente unicoherente pero el continuo $X = S \cup S^1$ (ver figura 3.9), donde S está definido en coordenadas polares como sigue

$$S = \{(1 + \frac{1}{1+\theta}, \theta) \mid \theta \geq 0\},$$

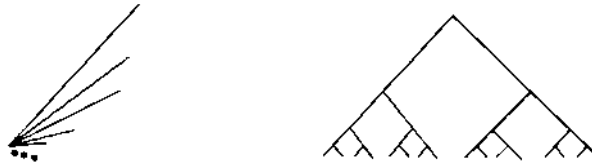
no es hereditariamente unicoherente ya que S^1 no es unicoherente, pero X sí es unicoherente.

3.36 Definición. *Una dendrita es un continuo c.p.t., hereditariamente unicoherente y localmente conexo.*

Figura 3.9: $X = S \cup S^1$

3.37 Observación. *Notemos que las dendritas por ser c.p.t. y localmente conexas, son también localmente c.p.t.*

Los ejemplos más sencillos que conocemos son el arco y los árboles. En la figura siguiente, se muestran dendritas más complicadas, llamadas F_w (a la izquierda) y *dendrita de Gehmann* (a la derecha). A continuación se dan las herramientas necesarias para demostrar que las

Figura 3.10: Dendrita F_w y dendrita de Gehmann

dendritas tienen la propiedad del punto fijo.

3.38 Lema. *Sean X una dendrita y Y un subcontinuo de X . Entonces existe $r : X \rightarrow Y$ retracción.*

Demostración. Sea $x \in X \setminus Y$ y sea $y \in Y$. Por ser X arcoconexo, existe un arco A en X que une a x con y . Consideremos un homeomorfismo entre A y el intervalo $[0, 1]$, de manera que 0 corresponda a x y 1 corresponda a y . se define $h(x)$ como el primer punto de A en Y (de acuerdo al orden usual de $[0, 1]$). Sea $r : X \rightarrow Y$ la función

$$r(x) = \begin{cases} h(x), & \text{si } x \in X \setminus Y, \\ x, & \text{si } x \in Y \end{cases}$$

Veamos que r es una función continua y que está bien definida:

Si $x \in Y$, la función r es la identidad en Y . Si $x \in X \setminus Y$, r es localmente constante, es decir, existe una vecindad alrededor de x tal que $r|_U$ es constante; para todo $u \in U$, $r(u) = h(u)$. Luego, sea W un abierto conexo de X tal que $W \cap Y \neq \emptyset$; entonces $r(W) \subset W$. Por lo tanto r es una retracción. $\square$

A la función r definida anteriormente se le llama: *función primer punto para Y* .

3.39 Definición. Un espacio topológico X es uniformemente localmente arcoconexo si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si x y y son dos puntos de X con $d(x, y) < \delta$ entonces x y y están unidos por un arco de diámetro menor a ε .

3.40 Proposición. Si X es un espacio métrico, compacto y localmente arcoconexo. entonces es uniformemente localmente arcoconexo.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, por 1.65 podemos cubrir a X con abiertos arcoconexos de diámetro ε . Tomamos una subcubierta finita $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ y sea δ un número de Lebesgue para esta cubierta. Sean $x, y \in X$ dos puntos tales que $d(x, y) < \delta$, luego $x, y \in U_i$ para alguna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Así, el diámetro del arco que une a x con y es menor a ε . $\square$

3.41 Teorema. Sea X una dendrita no degenerada que no es un árbol. Entonces existe una sucesión $(Y_i)_{i=1}^\infty$ que satisface lo siguiente:

- i) cada Y_i es un árbol,
- ii) $Y_i \subset Y_{i+1}$,
- iii) $\lim(Y_i) = X$ para toda $i \in \mathbb{N}$,
- iv) existe una sucesión $(p_i)_{i=1}^\infty$ de puntos en X tal que $Y_1 = \{p_1\}$ y para cada i , $(\overline{Y_{i+1}} - \overline{Y_i})$ es un arco con punto extremo p_i tal que $(\overline{Y_{i+1}} - \overline{Y_i}) \cap Y_i = \{p_i\}$,
- v) para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $r_i : X \rightarrow Y_i$ la función primer punto para Y_i . La sucesión $(r_i)_{i=1}^\infty$ converge uniformemente a la identidad en X .

Demostración. Sea $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ un conjunto denso numerable en X . Construyamos la sucesión $(p_i)_{i=1}^\infty$ de la siguiente manera:

Sea $Y_1 = \{x_1\}$ y sea $p_1 = x_1$. Supongamos que existe un árbol Y_k en X para alguna $k \in \{1, 2, \dots\}$. Como $Y_k \neq X$ entonces existe

$$m = \min\{j \mid x_j \notin Y_k\}.$$

Tomemos la retracción $r : X \rightarrow Y_k$ definida en 3.37 y sea $p_k = r(x_m)$. Luego, existe un arco A_k con puntos extremos x_m y p_k y definamos $Y_{k+1} = Y_k \cup A_k$. Notemos que $A_k \cap Y_k = \{p_k\}$. Por inducción hemos definido las sucesiones $(p_i)_{i=1}^\infty$ y $(Y_i)_{i=1}^\infty$ y probado los incisos *i*), *ii*) y *iv*). Para ver que $\lim Y_i = X$ para toda $i \in \mathbb{N}$ recurriremos a las definiciones de límite inferior y límite superior. Sea $B_i = \{x_1, \dots, x_i\}$. Afirmación: $\lim B_i = X$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Acudiendo a 2.9 tenemos que $\lim inf (B_n) = X = \lim sup(B_n)$ por ser $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ un conjunto denso en X . Luego, por 2.15, el límite de B_n sí existe y es precisamente X . Notemos que para cada $i \in \{1, 2, \dots\}$ se cumple que $Y_i \supset B_i$ y por lo tanto $\lim B_i = X = \lim (Y_i)$.

Ahora probaremos que la sucesión $(r_i)_{i=1}^\infty$ converge uniformemente a la identidad en X . Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos δ como se definió en 3.38. Por *iii*) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si d es la métrica de X y H_d es la métrica de Hausdorff, entonces

$$H_d(X, Y_i) < \delta \text{ para toda } i > N,$$

y por la definición de r_i se sigue que para todo $x \in X$

$$d(r_i(x), x) < \varepsilon \text{ para todo } i > N.$$

Por lo tanto $(r_i)_{i=1}^\infty$ converge uniformemente a id_X .

□

3.42 Teorema. *Si X es una dendrita, entonces tiene la p.p.f.*

Demostración. La demostración es inmediata por 3.40, 3.17 y sabiendo que todo árbol tiene la p.p.f. Así, X tiene la p.p.f.

□

Capítulo 4

Teorema del punto fijo de Brouwer

Supongamos por un instante que un montañero decide salir a pasear hasta el pico más alto de la sierra durante 24 horas. Si imponemos que el montañero tarda el mismo tiempo en subir que en bajar, entonces podemos asegurar que hubo un lugar donde estuvo a la misma hora en días distintos, independientemente de la velocidad de paseo. La veracidad de este curioso ejemplo, nos la da el *teorema del punto fijo de Brouwer*. Éste tiene ramificaciones en varias áreas de las matemáticas como lo son la teoría de juegos, ecuaciones diferenciales y hasta economía.

Antes de enunciar y demostrar el teorema de Brouwer, se dan algunos resultados de topología algebraica necesarios para la demostración.

4.1. Grupo fundamental

Uno de los propósitos de la topología algebraica es estudiar los espacios topológicos mediante invariantes algebraicos. A cada espacio X se le asocia un grupo, el cual es una estructura algebraica. Los elementos de este grupo, llamado *grupo fundamental de X* , son clases de equivalencia de *lazos* (curvas cerradas) atados al punto x . La idea es que la topología del espacio se vea reflejada en las propiedades de su grupo fundamental. Sea X un espacio topológico y sea $x \in X$ un punto base. Lo que se quiere es conocer la topología del espacio lanzando un lazo desde x que viaje por el espacio para luego jalarlo. Si el espacio no tiene “hoyos” podremos regresar el lazo a x ; si, por el contrario, X tiene algún “hoyo” entonces el lazo puede atorarse y ya no regresar.

4.1 Definición. Sean X y Y espacios topológicos y sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas. Decimos que f es homotópica a g si existe $H : X \times I \rightarrow Y$ función continua tal que para todo $x \in X$

$$H(x, 0) = f(x) \quad y \quad H(x, 1) = g(x).$$

La aplicación H es una homotopía entre f y g , y lo denotaremos como $f \simeq_H g$.

Podemos pensar al parámetro $t \in I$ como el tiempo, esto es, en el tiempo $t = 0$ tenemos la aplicación f y en el tiempo $t = 1$, tenemos la aplicación g . Así, podemos ver la homotopía como una “deformación” continua de f a g .

Usaremos la homotopía para definir una relación de equivalencia entre espacios topológicos, que es más débil que la relación de equivalencia dada por homeomorfismos.

4.2 Proposición. La relación $\simeq$ definida en el conjunto de funciones continuas de X en Y es una relación de equivalencia.

Demostración. i) $f \simeq_H f$, dando la homotopía $H(x, t) = f(x)$.

ii) Si $f \simeq_{H_1} g$ entonces $g \simeq_{H_2} f$ donde $H_2 : X \times I \rightarrow Y$ está definida por

$$H_2(x, t) = H_1(x, 1 - t).$$

iii) Si $f \simeq_{H_1} g$ y $g \simeq_{H_2} h$, entonces $f \simeq_{H_3} h$ donde $H_3 : X \times I \rightarrow Y$ es la homotopía dada por

$$H_3(x, t) = \begin{cases} H_1(x, 2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(x, 2t - 1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

□

4.3 Definición. Decimos que X y Y son homotópicamente equivalentes (o simplemente homotópicos) si existen funciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ continuas tales que

$$g \circ f \simeq id_X \quad y \quad f \circ g \simeq id_Y.$$

En este caso escribimos $X \simeq Y$.

Intuitivamente, dos espacios topológicos son homotópicamente equivalentes si se puede deformar uno en el otro, contrayendo o encogiéndolo continuamente.

4.4 Ejemplo. $\mathbb{R}^2 \simeq \{x_0\}$, para $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{x_0\}$ la función constante y $g : \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $x_0 \mapsto x_0$. Luego,

$$g \circ f = cte_{x_0} \simeq id_{\mathbb{R}^2} \quad y \quad f \circ g \simeq id_{\{x_0\}}.$$

Se dice que un espacio X es *contráctil* si es homotópicamente equivalente a un punto. Intuitivamente, un espacio es contráctil si puede deformarse en un punto.

4.5 Proposición. Sean $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ y $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$ funciones continuas tales que $f_1 \simeq f_2$ y $g_1 \simeq g_2$. Entonces $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$.

Demostración. Para demostrar la equivalencia homotópica, encontremos una homotopía entre $g_1 \circ f_1$ y $g_2 \circ f_2$. Como $f_1 \underset{F}{\simeq} f_2$ y $g_1 \underset{G}{\simeq} g_2$, definamos una función $H : X \times I \rightarrow Z$ tal que $(x, t) \mapsto G(F(x, t))$. Notemos que

$$H(x, 0) = G(f_1(x), 0) = g_1(f_1(x)) \quad \text{y} \quad H(x, 1) = G(f_2(x), 1) = g_2(f_2(x)),$$

por lo que la función H es precisamente la homotopía buscada. $\square$

Recordemos que una *trayectoria* de a a b es una aplicación continua $\alpha : I \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$. Decimos que α es un *lazo atado a x_0* si $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. El ejemplo más sencillo de trayectoria es la *trayectoria constante* $e_a : I \rightarrow X$ definida por $e_a(t) = a$ para todo $t \in I$.

El siguiente resultado nos da una forma de obtener nuevas trayectorias a partir de trayectorias dadas.

4.6 Proposición. Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ trayectorias. Entonces:

- i) la aplicación $\bar{\alpha}$ definida por $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$, es también una trayectoria. Esencialmente $\bar{\alpha}$ recorre a α en sentido contrario.
- b) Si $\alpha(1) = \beta(0)$, entonces también es trayectoria $\alpha * \beta : I \rightarrow X$, definida por

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s - 1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

4.7 Definición. Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ trayectorias tales que $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ y $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$. Decimos que α y β son trayectorias homotópicas si existe $H : I \times I \rightarrow X$ continua, tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= x_0, \quad H(s, 1) = x_1, \quad \text{para todo } s \in I \\ H(0, t) &= \alpha(t), \quad H(1, t) = \beta(t), \quad \text{para todo } t \in I. \end{aligned}$$

En este caso escribimos $\alpha \underset{H}{\simeq} \beta$.

En 4.2 vimos que $\simeq$ es relación de equivalencia. Es fácil ver que la demostración que dimos también funciona para homotopía de trayectorias, dejando los extremos fijos durante toda la homotopía. Denotemos por $[\alpha]$ la clase de equivalencia de la trayectoria α .

Se define un producto de clases de equivalencia de trayectorias por

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta].$$

4.8 Proposición. *El producto de clases de equivalencia está bien definido, es decir, si $\alpha_0 \simeq_A \alpha_1$ y $\beta_0 \simeq_B \beta_1$ tales que $\alpha_0(1) = \beta_0(0)$ y $\alpha_1(1) = \beta_1(0)$, entonces*

$$\alpha_0 * \beta_0 \simeq \alpha_1 * \beta_1.$$

Demostración. Sean

$$A(s, t) = A_t(s) \text{ por lo que } A_t : I \rightarrow X.$$

$$B(s, t) = B_t(s) \text{ por lo que } B_t : I \rightarrow X.$$

Sea $C : I \times I \rightarrow X$ y sea $C_t = A_t * B_t$. Luego,

$$C(s, t) = C_t(s) = (A_t * B_t)(s) = \begin{cases} A_t(2s) = A(2s, t), & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ B_t(2s - 1) = B(2s - 1, t), & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Así, $\alpha_0 * \beta_0 \simeq_C \alpha_1 * \beta_1$. □

4.9 Proposición. *i) El producto de las clases de equivalencia es asociativo, es decir, si $\alpha, \beta, \gamma : I \rightarrow X$ son trayectorias entonces $([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$, siempre que $\alpha(1) = \beta(0)$ y $\beta(1) = \gamma(0)$.*

*ii) Las clases de equivalencia de las trayectorias constantes actúan como elementos neutros, es decir, si $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$, entonces $[e_{x_0}] * [\alpha] = [\alpha] = [\alpha] * [e_{x_1}]$.*

*iii) La clase de $\bar{\alpha}$ definida en 4.6 actúa como inverso de la clase de equivalencia $[\alpha]$, es decir, $e_{x_0} \simeq_H \alpha * \bar{\alpha}$ y $\bar{\alpha} * \alpha \simeq_G e_{x_1}$.*

Demostración. En este trabajo, nos limitaremos a dar sólo las homotopías explícitas, ya que el cálculo de éstas no es el objetivo principal del capítulo.

i) Basta probar que $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq_H \alpha * (\beta * \gamma)$. La homotopía propuesta es:

$$H(s, t) = \begin{cases} \alpha(\frac{4s}{t+1}), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{t+1}{4} \\ \beta(4s - t - 1), & \text{si } \frac{t+1}{4} \leq s \leq \frac{t+2}{4} \\ \gamma(\frac{4s - 2 - t}{2 - t}), & \text{si } \frac{t+2}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

[ii)] Sean

$e_{x_0} : I \rightarrow X$ tal que $t \mapsto x_0$ y $\alpha : I \rightarrow X$ tal que $0 \mapsto x_0$ y $1 \mapsto x_1$.

Para ver que e_x es neutro por la izquierda, basta probar que $e_{x_0} * \alpha \underset{H}{\simeq} \alpha$. La homotopía propuesta es

$$H(s, t) = \begin{cases} x_0, & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{t}{2} \\ \alpha(\frac{2s-t}{2-t}), & \text{si } \frac{t+2}{1} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Análogamente, si $\alpha(1) = x_1$, el neutro por la derecha de α es e_{x_1} .

iii) Sean $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$ y $\bar{\alpha}(0) = x_1$, $\bar{\alpha}(1) = x_0$. Para ver la existencia de inversos, basta probar que

$$e_{x_0} \underset{H}{\simeq} \alpha * \bar{\alpha} \text{ y } \bar{\alpha} * \alpha \underset{G}{\simeq} e_{x_1}$$

Es importante notar que x_0 debe estar fijo durante la homotopía H y x_1 durante G . Sea α_t la trayectoria que recorre α desde x_0 hasta $\alpha(t)$. Entonces

$$\alpha_t(s) = \alpha(ts) \text{ y } \alpha_t(1-s) = \alpha((1-s)t) = \bar{\alpha}_t(s).$$

Sea $H : I \times I \rightarrow X$ la homotopía dada por

$$H(s, t) = \alpha_t * \bar{\alpha}(s) = \begin{cases} \alpha(2st), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \alpha((2s-2)t), & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Para la segunda homotopía, es claro que la inversa de $\bar{\alpha}$ es α , por lo que ya no es necesaria la demostración. $\square$

4.10 Definición-Proposición. El conjunto $\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] \mid \alpha \text{ es lazo basado en } x_0\}$ es un grupo. A $\pi_1(X, x_0)$ se le llama el grupo fundamental de X con punto base x_0 .

El siguiente teorema relaciona los grupos fundamentales de un espacio con diferentes puntos base.

4.11 Proposición. Sean $x_0, x_1 \in X$ tal que existe una trayectoria γ de x_0 a x_1 . Entonces los grupos $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$ son isomorfos.

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} \phi : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_1) \quad \text{tal que} \quad [\alpha] \mapsto [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma] \quad \text{y} \\ \phi^{-1} : \pi_1(X, x_1) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \quad \text{tal que} \quad [\beta] \mapsto [\gamma * \beta * \bar{\gamma}]. \end{aligned}$$

ϕ es un homomorfismo de grupos ya que

$$\begin{aligned}
 \phi([\alpha] * [\beta]) &= \phi([\alpha * \beta]) \\
 &= [\bar{\gamma} * \alpha * \beta * \gamma] \\
 &= [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma * \bar{\gamma} * \beta * \gamma] \\
 &= [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma] * [\bar{\gamma} * \beta * \gamma] \\
 &= \phi[\alpha] * \phi[\beta].
 \end{aligned}$$

Es fácil ver que ϕ y ϕ^{-1} son inverso una de otra. Así, ϕ es un isomorfismo. $\square$

Nota. El isomorfismo ϕ depende de la trayectoria γ escogida.

4.12 Corolario. Si X es c.p.t. entonces $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$ son isomorfos para todo $x, y \in X$.

4.13 Definición. Un espacio topológico X es simplemente conexo si es conexo por trayectorias y tiene grupo fundamental trivial, es decir, $\pi_1(X) = \{1\}$.

4.14 Proposición. Un espacio X es simplemente conexo si, y sólo si, cualesquiera dos trayectorias son homotópicas.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $\pi_1(X) = \{1\}$. Sean α y β dos trayectorias que conectan a los puntos x_0 con x_1 . Entonces

$$\alpha = \alpha * e_{x_1} = \alpha * \bar{\beta} * \beta = e_{x_0} * \beta = \beta.$$

Por lo tanto, $\alpha \simeq \beta$.

$\Leftarrow$) Si cualesquiera dos trayectorias con punto base x_0 son homotópicas entonces $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$. $\square$

4.15 Ejemplo. $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.

Basta ver que si α un lazo basado en x_0 entonces $e_{x_0} \simeq \alpha$. Sea $H : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $H(s, t) = t(\alpha(s))$. Notemos que la homotopía propuesta cumple que

$$\begin{aligned}
 H(0, t) &= t(\alpha(0)) = 0, \quad H(1, t) = t(\alpha(0)) = 0 \quad y \\
 H(s, 0) &= 0 = e_{x_0}(s), \quad H(s, 1) = \alpha(s).
 \end{aligned}$$

De ahora en adelante trabajaremos sólo con espacios c.p.t. Por el corolario anterior, escribiremos al grupo fundamental de X como $\pi_1(X)$ en lugar de $\pi_1(X, x)$.

En teoría de categorías, una *categoría* consta de una clase de objetos y una clase de morfismos. Un *functor* es una función de una categoría a otra que lleva objetos en objetos y morfismos en morfismos, de manera que la composición de morfismos y las identidades se preserven. A nosotros nos interesan principalmente dos categorías

- i) la *categoría Top_* de espacios topológicos con punto base*, donde los objetos son espacios topológicos con un punto base, y los morfismos son funciones continuas que preservan el punto base y,
- ii) la *categoría de grupos*, donde los objetos son grupos, y los morfismos son homomorfismos de grupos.

4.16 Proposición. $\pi_1 : Top_* \rightarrow Grupos$, es un functor.

Demostración. Las características de ser functor son

- i) Para cada espacio topológico con punto base, obtenemos su grupo fundamental, es decir,
$$(X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0).$$

ii) Para cada función continua entre espacios topológicos obtenemos un homomorfismo entre los grupos fundamentales correspondientes. Sea $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ continua. Entonces $\pi_1(f)$ se define como

$$\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), \text{ donde } [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$$

iii) Veamos que π_1 está bien definida. Demostremos que si $\alpha \simeq_H \beta$ entonces $f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$. Ya sabemos que $f \circ \alpha$ y $f \circ \beta$ son homotópicas como funciones, basta ver que preservan el punto base. Sea $H' : I \rightarrow Y$ tal que $H'(s, t) = f \circ H(s, t)$. Observemos que

$$H'(0, t) = f \circ H(0, t) = f(x_0) = y_0 \quad \text{y} \quad H'(1, t) = f \circ H(1, t) = f(x_0) = y_0.$$

Luego, $f \circ \alpha \simeq_{H'} f \circ \beta$, por lo que π_1 está bien definida.

iv) Veamos que $\pi_1(f)$ es homomorfismo, es decir,

$$\pi_1(f)([\alpha] * [\beta]) = \pi_1(f)[\alpha] * \pi_1(f)[\beta].$$

Demostremos que $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$. Sea $s \in I$.

$$f \circ (\alpha * \beta)(s) = f((\alpha * \beta)(s)) = \begin{cases} f(\alpha(2s)), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f(\beta(2s - 1)), & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Luego, $= f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$.

iii) La composición de dos funciones continuas induce la composición de homomorfismos, es decir, si $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ y $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ son morfismos en Top_* entonces

$$\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f).$$

Tomemos un elemento $[\alpha]$ de $\pi_1(X, x_0)$ y veamos que su imagen bajo $\pi_1(g \circ f)$ y $\pi_1(g) \circ \pi_1(f)$ son la misma.

$$\pi_1(g \circ f)[\alpha] = [g \circ f \circ \alpha] = \pi_1(g)[f \circ \alpha] = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)[\alpha].$$

iv) La función identidad induce el homomorfismo identidad, es decir, si (X, x_0) es un objeto de Top_* entonces $\pi_1(id_{(X, x_0)}) = id_{\pi_1(X, x_0)}$. Para esto, tomemos $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Luego,

$$\pi_1(id_{(X, x_0)})[\alpha] = [id_{(X, x_0)} \circ \alpha] = [\alpha] = id_{\pi_1(X, x_0)}[\alpha].$$

□

4.17 Corolario. Si $\phi : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo entonces $\pi_1(\phi) : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \pi_1(X))$ es un isomorfismo.

4.2. Espacios cubrientes

4.18 Definición. Un espacio cubriente es una tupa $(X, \tilde{X}, p)$ donde $X, \tilde{X}$ son espacio topológicos y $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es una función continua y suprayectiva tal que para cada $x \in X$ existe $U \subset X$ abierto con $x \in U$, que satisface las siguientes propiedades

- i) $p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ donde cada U_λ es un abierto de $\tilde{X}$.
- ii) $p|_{U_\lambda} : U_\lambda \rightarrow U$ es un homeomorfismo para toda $\lambda \in \Lambda$.

Decimos que U está cubierto uniformemente por la proyección cubriente p y a los abiertos U_λ se le llaman hojas sobre U . En la figura 4.1 se muestra un ejemplo clásico sobre cubrientes es $X = S^1$, $\tilde{X} = \mathbb{R}$ y $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ tal que $x \mapsto e^{2\pi i x}$.

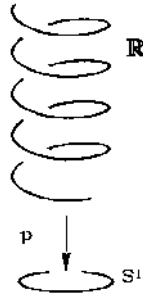


Figura 4.1: Cubriente para S^1

4.19 Observación. Si $p : X \rightarrow Y$ es una proyección cubriente entonces p es homeomorfismo local, es decir, para cada $\tilde{x} \in \tilde{X}$ existe abierto $V \in \tilde{X}$ con $\tilde{x} \in V$ tal que $p(V)$ es abierto y $p|_V : V \rightarrow p(V)$ es homeomorfismo.

4.20 Proposición. Sea X un espacio topológico conexo y sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una proyección cubriente. Entonces para todo $x \in X$ los conjuntos $p^{-1}(x)$ tienen la misma cardinalidad.

Demostración. Sean $x_0 \in X$ y $\kappa = |p^{-1}(x_0)|$. Demostremos que si $A = \{x \in X \mid |p^{-1}(x)| = \kappa\}$ entonces A es abierto y cerrado en X , para concluir, por la conexidad de X que $A = X$. Como $x_0 \in A$ entonces $A \neq \emptyset$. Sea $x \in X$ y sea U un abierto en X cubierto uniformemente por p con $x \in U$. Luego,

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda.$$

Para todo $y \in U$, $|p^{-1}(y)| = \kappa$, por lo que, si $x \in A$ entonces $U \subset A$, y si $x \notin A$ entonces $U \subset X \setminus A$. Por lo tanto, A es abierto y cerrado en X . $\square$

4.21 Lema. Toda proyección cubriente es abierta.

Demostración. Sea V abierto en $\tilde{X}$ y sea $x \in p(V)$. Entonces existe $U \subset X$ abierto cubierto uniformemente por p con $x \in U$. Sea $\tilde{x} \in p^{-1}(x) \cap V$ y $\tilde{U}$ la hoja que contiene a $\tilde{x}$. Entonces $\tilde{U} \cap V$ es un abierto en $\tilde{U}$ que contiene a $\tilde{x}$. Como $p|_{\tilde{U}}$ es homeomorfismo entonces $p(\tilde{U} \cap V)$ es un abierto en U y por tanto, abierto en X . $\square$

Enseguida mostramos algunas propiedades importantes de los espacios cubrientes, las cuales nos dicen que podemos “levantar” trayectorias y homotopías de X a $\tilde{X}$.

4.22 Definición. Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una proyección cubriente. Si $f : Y \rightarrow X$ es una función continua, un levantamiento de f es una función continua $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$, ver figura 4.2. En el caso de trayectorias, $Y = I$ y en el caso de homotopías, $Y = I \times I$.

4.23 Teorema (Levantamiento de trayectorias). Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una proyección cubriente y sea $\alpha : I \rightarrow X$ una trayectoria que empieza en x_0 y sea $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Entonces existe un único levantamiento de α a una trayectoria $\tilde{\alpha}$ en $\tilde{X}$ que comienza en $\tilde{x}_0$. Ver figura 4.3.

Demostración. Para cada $x \in \text{Im } \alpha$ tomemos $U_x \subset X$ abierto cubierto uniformemente por p con $x \in U_x$. Sean

$$\mathcal{U} = \{U_x \mid x \in \text{Im } \alpha\} \quad \text{y} \quad \mathcal{V} = \{\bar{\alpha}(U_x) \mid x \in \text{Im } \alpha\}$$

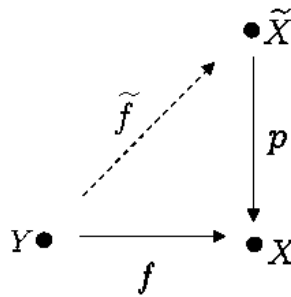
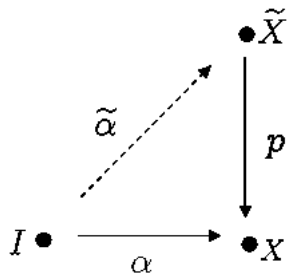
Figura 4.2: Levantamiento de f 

Figura 4.3: Levantamiento de trayectorias

Entonces $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de I , por ser I compacto y por 1.62 existe δ número de Lebesgue para $\mathcal{V}$. Sea $0 = s_0, s_1, \dots, s_n = 1$ una partición para I tal que $|s_i - s_{i-1}| < \delta$. Entonces para toda $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ tenemos que $\alpha[s_{i-1}, s_i] \subset U_x$ para algún $x \in \text{Im } \alpha$. Construyamos el levantamiento de α por recursión sobre la partición. Como $\alpha[s_0, s_1] \subset U_{x_0}$ y U_{x_0} esta cubierto uniformemente por p , entonces $p^{-1}(U_{x_0}) = \bigcup U_\lambda$ y $\tilde{x}_0 \in U_{\lambda_0}$ para algún $\lambda_0 \in \Lambda$. se define $\tilde{\alpha} = p|_{U_{\lambda_0}}^{-1} \circ \alpha : [s_0, s_1] \rightarrow \tilde{X}$. Repetimos el procedimiento tomando $\tilde{x}_1 = \tilde{\alpha}(s_1)$, y en general, vamos tomando $\tilde{x}_i = \tilde{\alpha}(s_i)$ hasta levantar toda la trayectoria. Observemos que $\tilde{\alpha}$ es el único levantamiento de α que empieza en $\tilde{x}_0$. $\square$

4.24 Teorema (Levantamiento de homotopías). *Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una proyección cubriente. Si $H : I \times I \rightarrow X$ es una función continua tal que $H(0, 0) = x_0$ y $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ entonces existe un único levantamiento $\tilde{H} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ de H (ver figura 4.4) tal que*

$$p \circ \tilde{H} = H \text{ y } \tilde{H}(0, 0) = \tilde{x}_0.$$

Demostración. Para cada $x \in \text{Im } H$ tomemos U_x abierto en X cubierto uniformemente por p con $x \in U_x$.

$$\mathcal{U} = \{U_x \mid x \in \text{Im } \alpha\} \text{ y } \mathcal{V} = \{\tilde{\alpha}(U_x) \mid x \in \text{Im } \alpha\}$$

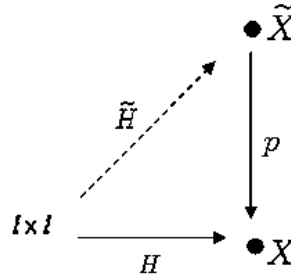


Figura 4.4: Levantamiento de homotopías

Entonces $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de $I \times I$, por ser $I \times I$ compacto y por 1.62 existe δ número de Lebesgue para $\mathcal{V}$. Dividimos al cuadrado $I \times I$ en rectángulos $r_1, r_2, \dots, r_n$ tales que $(0, 0) \in r_1$ y $\text{diám}(r_i) < \delta$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Luego, $H(r_i) \subset U_x$ para algún $x \in X$. Tomamos la primera fila de rectángulos y comenzamos levantando cada rectángulo de izquierda a derecha, después tomamos la segunda fila y levantamos en el mismo orden, continuando con este procedimiento levantamos a $I \times I$. Notemos que $\tilde{H}$ es el único levantamiento de H que cumple $p \circ \tilde{H} = H$ y $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{x}_0$. $\square$

Uno de los objetivos principales del capítulo es calcular formalmente el grupo fundamental de S^1 . Intuitivamente el grupo fundamental del círculo es el grupo cíclico infinito $\mathbb{Z}$, ya que podemos asociar a cada lazo en el círculo un elemento de $\mathbb{Z}$, mientras que dos trayectorias serán homotópicas si, y sólo si, les asociamos el mismo entero.

4.25 Teorema. *El grupo fundamental del círculo es el grupo cíclico infinito, es decir, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea x_0 el punto base de S^1 . Construiremos un isomorfismo de $\pi_1(S^1, x_0)$ a $\mathbb{Z}$. Consideremos la proyección cubriente

$$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \quad \text{tal que} \quad x \mapsto e^{2\pi i x}.$$

Sea $[\alpha] \in \pi_1(S^1)$. Sea $\tilde{\alpha}$ el único levantamiento de α a $\mathbb{R}$ que empieza en $\tilde{x}_0 = 0$. Definamos

$$\phi : \pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{tal que} \quad [\alpha] \mapsto \tilde{\alpha}(1).$$

Afirmación: ϕ es un isomorfismo de grupos.

La función ϕ está bien definida, $\tilde{\alpha}(1) \in \mathbb{Z}$ y, si $\alpha \simeq \beta$ por 4.24 $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.

• ϕ es inyectiva. Sean $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(S^1, x_0)$ tales que $\phi[\alpha] = n = \phi[\beta]$. Demostremos que $\alpha \simeq \beta$. Sean $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ los levantamientos de α y β respectivamente que comienzan en 0, por

hipótesis $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. Como $\mathbb{R}$ es simplemente conexo, por 4.14, $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}$. Luego, $p \circ \tilde{\alpha} \simeq p \circ \tilde{\beta}$ y por 4.5, $\alpha \simeq \beta$.

- ϕ es suprayectiva. Sea $n \in p^{-1}(x_0)$. Como $\mathbb{R}$ es c.p.t., tomemos $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que empiece en 0 y termine en n . se define $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. Entonces γ es un lazo en S^1 basado en x_0 y $\tilde{\gamma}$ es un levantamiento a $\mathbb{R}$ que comienza en 0. Por lo tanto $n = \phi([\gamma])$.

- ϕ es homomorfismo. Sean $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(S^1, x_0)$ y sean $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ los levantamiento de α y β empieza en $\tilde{x}_0$ respectivamente. Sean $n = \tilde{\alpha}(1)$ y $m = \tilde{\beta}(1)$. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\gamma = \tilde{\alpha} * (\tilde{\beta} + n)$, donde $\tilde{\beta} + n$ es la trayectoria $\tilde{\beta}$ trasladada a n , es decir, $(\tilde{\beta} + n)(s) = \tilde{\beta}(s) + n$. Claramente γ es una trayectoria en $\mathbb{R}$ que empieza en $\tilde{x}_0$, termina en $n + m$ y es tal que $p \circ \gamma = \alpha * \beta$. Por lo tanto, $\phi[\alpha * \beta] = \phi[\alpha] * \phi[\beta]$. $\square$

4.26 Lema. S^1 no es retracto de D^2 , es decir, no existe función continua $f : D^2 \rightarrow S^1$ tal que $f|_{S^1}$ sea la identidad.

Demostración. Sea $i : S^1 \rightarrow D^2$ la inclusión y sea $f : D^2 \rightarrow S^1$ una función continua tal que $f \circ i = id_{S^1}$. Por ser π_1 funtor,

$$\pi_1(id_{S^1}) = \pi_1(f \circ i) : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^1).$$

Sin embargo, $\pi_1(f \circ i) = \pi_1(f) \circ \pi_1(i) = id_{\pi_1(S^1)}$ es inyectiva, por lo que $\pi_1(i) : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(D^2)$ es inyectiva, lo cual es una contradicción, ya que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ pero $\pi_1(D^2) = \{1\}$. $\square$

Finalmente, demostraremos el teorema de Brouwer.

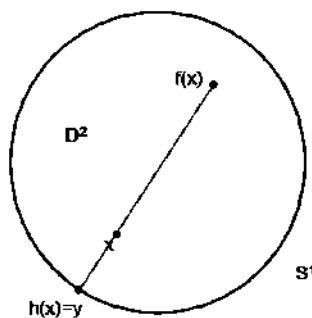
4.27 Teorema (Del punto fijo de Brouwer). *Sea $f : D^2 \rightarrow D^2$ una función continua.*

Entonces f tiene un punto fijo, es decir, existe $x_0 \in D^2$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Demostración. Supongamos que para todo $x \in D^2$, pasa que $f(x) \neq x$. Definamos $h : D^2 \rightarrow S^1$ como sigue, tomemos el rayo que una a $f(x)$ con x . Dicha recta intersecta a S^1 en un punto y . Sea $h(x) = y$. Luego, h es continua. Si $x \in S^1$ entonces $h(x) = x$ y concluimos que S^1 es un retracto de D^2 , lo cual es una contradicción a 4.26. $\square$

4.3. Una aplicación sobre el teorema de Brouwer

Como mencionamos anteriormente, el teorema de Brouwer tiene aplicaciones en diversas áreas. Los problemas sobre existencia de soluciones para sistemas de ecuaciones se pueden formular como problemas de puntos fijos, como lo es el teorema de Frobenius. Para esto, recordaremos brevemente algunos conceptos del álgebra lineal.

Figura 4.5: Función $h : D^2 \rightarrow S^1$

Los problemas de eigenvalores, eigenvectores de matrices y de transformaciones lineales son de importancia fundamental en las matemáticas aplicadas. Una de las razones es que esos conceptos básicos surgen en una gran variedad de modelos matemáticos de fenómenos económicos, biológicos, físicos.

Sean A una matriz de $n \times n$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Considérese la ecuación vectorial

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

en donde λ es un número, real o complejo. Es evidente que el vector $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ es una solución de la ecuación para cualquier valor de λ . Un número λ para el cual la ecuación tiene solución no trivial se le llama *eigenvalor* de la matriz A . Las soluciones $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ se llaman *eigenvectores* de A correspondientes al eigenvalor λ . Sea $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ una transformación lineal con matriz asociada A . Queremos encontrar vectores $\mathbf{v}$ tales que $A\mathbf{v}$ tengan la misma dirección y sentido que los de $\mathbf{v}$, es decir, queremos encontrar vectores $\mathbf{v}$ tales que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Estos vectores existen si, y solo si, A tiene eigenvectores reales positivos. Los vectores $\mathbf{v}$ son eigenvectores correspondientes al eigenvalor λ .

4.28 Teorema (Teorema de Perron-Frobenius). *Sea A una matriz de 3×3 con entradas enteras positivas. Entonces A tiene un eigenvalor real positivo.*

Demostración. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal con matriz asociada A . Sea B la intersección de S^2 con el primer octante

$$\{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

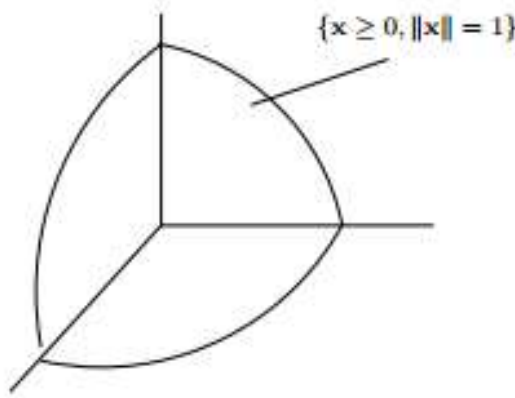
Sea $\mathbf{v} = (x, y, z)$ en B . Todas las entradas de $\mathbf{v}$ son no negativas y al menos una es positiva, por lo que $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ es un vector cuyas entradas son positivas, en términos geométricos, la matriz A manda al octante positivo en sí mismo. Consideremos la función α definida por

$$\alpha(\mathbf{v}) = \frac{T(\mathbf{v})}{\|T(\mathbf{v})\|}$$

Observemos que $\alpha(\mathbf{v})$ es un vector unitario, por lo que α envía al conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, \|x\| = 1\}$$

en sí mismo, es decir, $\alpha : B \rightarrow B$. Luego, como B y D^2 son homeomorfos podemos aplicar el



teorema del punto fijo de Brouwer. Entonces existe $\mathbf{x} \in B$ tal que $\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, esto es

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{T(\mathbf{x})}{\|T(\mathbf{x})\|} = \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad T(\mathbf{x}) = \|T(\mathbf{x})\|\mathbf{x},$$

por lo que $\|T(\mathbf{x})\|$ es un eigenvalor real positivo para T y por consiguiente, para la matriz A . □

Bibliografía

- [1] María Luisa Pérez Seguí, *Notas de clase*, Topología 1, Facultad de Cs. Físico Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, (2014).
- [2] James Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon (1996).
- [3] James R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, Incorporated (2000).
- [4] Sam B. Nadler, Jr. *Continuum Theory: an Introduction*, Marcel Dekker, Inc (1992).
- [5] Patricia Andrade Espinoza, *Elementos de Teoría de continuos e Hiperespacios*, Tesis de Licenciatura dirigida por Carlos A. Robles Corbala, División de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, Sonora (2005).
- [6] Alejandro Illanes, Sam B. Nadler, Jr. *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, Inc. (1999).
- [7] Sam B. Nadler, Jr. *The Fixed Point Property for Continua*, Aportaciones Matemáticas, Textos, nivel avanzado, volumen 30 (2005).
- [8] Alejandro Illanes, *La veleidosa propiedad del punto fijo*, Miscelánea Matemática 51 (2010).
- [9] Pupert Henry Bing, *The elusive fixed point property*, Amer. Math Monthly, 76 (1969).
- [10] María Luisa Pérez Seguí, *Notas de clase*, Topología 2, FCFM, UMSNH, (2014).
- [11] Pablo Fernández, *El secreto de Google y el Álgebra Lineal*, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid (2004).