UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIERREZ”

CONJUNTOS ESTACIONARIOS Y ÁLGEBRAS BOOLEANAS PROPIAS

Tesis que para obtener el título de licenciado en Ciencias Físico Matemáticas presenta:

René Rodríguez Aldama

Supervisado por:
Doctor David Meza Alcántara

Facultad de Ciencias, UNAM

Morelia, Michoacán
Enero, 2016.

Dedicado a

mi hermana que tanto me enseña, a mi madre que me crió y cultiva valores en mí día a día, para Aixa mi compañera de la vida y a mi padre que aunque ya no está con nosotros me enseñó a ser un hombre.

Agradecimientos

Quiero agradecer a la vida, que me dio la oportunidad de conocer a personas tan maravillosas y de aprender muchas cosas fascinantes a lo largo de ella. Hay muchas personas e instituciones a las que debo agradecer y trataré de mencionar a la mayor parte de ellas.

Agradezco a mi familia por todo su apoyo que ha sido vital para mí, me refiero a Alejandra Rodríguez y a Yolanda Aldama, porque me han enseñado una infinidad de cosas acerca de la vida y por siempre escucharme a pesar de que ellas no estén envueltas en el medio matemático, siempre hacen su mayor esfuerzo por entenderme, pero sobre todo, quererme.

Quiero decir gracias a todos y cada uno de mis maestros de todos mis estudios, porque gracias a ellos he aprendido las bases del estudio, la disciplina y aún más, las bases de la vida. Agradezco a todos los maestros de mi licenciatura y a la plantilla académica de la FCFM, más que mis maestros son mis amigos. Merecen especial mención: Malú, David Meza, Fernando Hernández, Karina Figueroa, Elmar Wagner, Luis Valero, y Armando Sepúlveda.

Los agradecimientos también van a todos mis compañeros de la facultad, de los cuales aprendo mucho y me han ayudado mucho. Mis amigos, de la facultad y de otras partes, gracias por su paciencia y todos los momentos divertidos. Gracias a todos mis conocidos, porque de todas las personas aprendemos algo nuevo.

Quiero agradecer al CIC por el apoyo económico. A la FCFM y a la UMSNH, porque me han brindado un hogar. A mi asesor de tesis, amigo y "canas", David Meza, por todo su apoyo incondicional, orientación, ayuda, enseñanza y amistad desde que estaba en segundo semestre. Un agradecimiento especial para Aixa por todo lo que me ha brindado, apoyado, enseñado y amado, gracias por siempre confiar en mí. A todos los que hicieron posible este día...

Resumen

Este documento se divide en seis partes: la introducción, cuatro capítulos de contenido y los apéndices. Esperemos que el lector encuentre cómoda la lectura de este documento yendo de la teoría más sencilla a la más elaborada.

En el capítulo uno del texto se muestran los preliminares y definiciones que el autor considera más importantes, así como los teoremas más relevantes, enunciados sin demostración pero con motivaciones a los mismos. Los temas que se tratan son los de ordinales, cardinales, filtros, ideales, álgebras booleanas y un poco de teoría de modelos.

En el segundo capítulo se desarrolla la teoría de conjuntos estacionarios, empezando por las definiciones importantes como la de conjunto cerrado y no acotado, luego caracterizaciones y desarrollo de teoremas importantes para después pasar al desarrollo completo de los estacionarios junto con sus teoremas, aplicaiones e implicaciones. Se muestra la caracterización del filtro de clubs con *funciones generadoras* y los clásicos teoremas de Fodor y de Solovay.

En el tercer capítulo se estudia la generalización de los clubs y estacionarios a los conjuntos $P_\kappa(\lambda)$, se desarrolla la teoría más importante, se muestran las generalizaciones de algunos de los teoremas del capítulo anterior y se introduce la importancia de la teoría cuando $\kappa = \omega_1$ con las funciones generadoras y con los submodelos elementales.

En el cuarto y último capítulo empezamos con las definiciones de juegos infinitos y completamos lo hecho sobre álgebras booleanas y modelos en el capítulo uno para abrir paso a las definiciones que nos serán de utilidad para mostrar tres equivalencias de que un álgebra booleana completa sea *propia*; hacemos uso de lo desarrollado en el tercer capítulo para considerar clubs sobre algunos modelos y sobre $[\lambda]^\omega$, así mostrar el teorema en el que se centra este documento.

En el primer apéndice mencionamos algunas aplicaciones de la teoría de conjuntos estacionarios, con ayuda de los *principios de adivinación* mencionamos algunas al análisis funcional, topología y teoría de grupos. Estudiamos una dentro de la misma teoría de conjuntos y finalizamos con algunas a la topología de conjuntos.

Esperando además que este texto sirva de referencia para algún futuro, y sobre todas las cosas, sea divertido.

Palabras clave: conjuntos estacionarios, clubs, álgebras booleanas propias, teoría de conjuntos, lógica.

Abstract

This document is organized in six parts as follows: Introduction, four main-content chapters and two appendices. We hope the reader find readable and comfortable this text going from easier theory to a little bit harder.

In chapter one of the text, we give you some background and definitions that author thinks are the most important for developing the whole work. We also give the statements of more outstanding theorems without proof but with a kindly motivation of them. Main subjects are ordinals, cardinals, filters, ideals, boolean algebras and a review of model theory.

In the second chapter, the theory of stationary sets is developed, we begin by showing the important definitions such as closed unbounded sets, after that we characterize them and demonstrate the most relevant theorems to get to the whole theory of stationary sets with their important theorems, applications and implications. We show the filter club characterization with generating functions, the well-known classic Fodor's theorem and the Solovay's one.

In the third chapter we study the generalization of clubs and stationary sets to the most important (for us in this document) $P_\kappa(\lambda)$ sets, we develop the theorems, and some of the generalizations from the previous section and we introduce the importance when $\kappa = \omega_1$ with (again) generating functions and with elementary submodels.

In the fourth and last chapter, we start with the definition of what a game is and we end up what we begin in first chapter about boolean algebras and model theory in order to lead the way to the definitions that concern us to show the equivalence of three different kind of *proper* complete boolean algebras. We make use of what has been done in previous chapters to consider clubs in some special models and in $[\lambda]^\omega$, we finally show the main theorem of this document.

In the first appendix, we give a word of some important applications of the theory of stationary sets, with help from *guessing principles* we give some to functional analysis, topology and group theory. We give one to set theory itself. At the end we study some applications to set-theoretic topology.

We hope this text works as well for future references and most importantly we hope you keep it fun.

Índice general

Capítulo 0

Introducción

0.1. Antecedentes históricos

La teoría de conjuntos se ha desarrollado velozmente en los ultimos años y desde el siglo pasado, la mayor parte de la audiencia orientada en cierta forma a la misma (incluso muchos que no) saben que desde aquél 7 de Diciembre de 1873 en el que Cantor mandó una carta a Dedekind con la demostración de que la cardinalidad de los reales era mayor que la de los naturales, se reconoce como el inicio de la teoría. Con las técnicas de forcing heredadas de Cohen, se han hecho avances muy interesante e importantes.

Los conjuntos estacionarios están implícitos en el trabajo de P. Mahlo en 1911 y en los trabajos de P. S. Aleksandrov en 1916 y junto con P. Urysohn en 1929 con su demostración de que ω_1 es metrizable está implícito el teorema de Fodor. En 1953, G. Bloch acuñó la definición de conjuntos estacionarios. Los primeros teoremas importantes fueron debidos a G. Fodor y a R. Solovay en 1956 y en 1971 respectivamente. Entre los años de 1968 y 1977 los conjuntistas, lógicos y topólogos empezaron a descubrir la importancia de estos conjuntos especiales; entre otros destacan Jech, Baumgartner, Kueker, Menas, Prikry, Jensen, Erdös, Hajnal, Milner, Silver, Friedman, Carr. La generalización se debe a Jech y a Kueker, Shelah y Baumgartner fueron los que se dieron cuenta de la importancia de ésta generalización usándola en sus trabajos sobre “Proper Forcing” y el axioma A, respectivamente.

La teoría de *proper forcing* se debe a Shelah, introdujo su definición en un trabajo anterior a su obra titulada “Proper Forcing” por ahí de los años 80’s y su motivación a la elaboración de esta definición fue increíblemente en la teoría de grupos, cuando intentaba perfeccionar la prueba de su solución sobre el problema de Whitehead.

Con trabajos de Baumgartner, Gray, Todorcevic, Velickovic, Foreman, Magidor, Abraham, Rubin, Woodin, Bartoszyński, Judah, Matsubara, Roslanowski, Bagaria, Cummings, Blass, Eisworth, Laver, Hyttinen, Rautila, Zapletal, entre otros, la teoría de proper forcing junto con la teoría de conjuntos estacionarios ha crecido en importancia y adquirido prestigio en los últimos 30 años y gracias a sus importantes e interesantes aplicaciones hoy en día son una herramienta muy útil para cualquier matemático.

0.2. Introducción

En éste trabajo empezamos con algunos preliminares, de tal forma que cualquier persona con un poco de conocimiento en el área de teoría de conjuntos pueda leer esta obra; desarrollamos la teoría de conjuntos estacionarios y estudiamos su generalización, ésta teoría es una herramienta muy útil para facilitar algunas demostraciones que sin ella serían muy largas. La importancia de una teoría matemática se basa en cuánto puede enriquecer a otras áreas y cómo se emplean las nuevas técnicas desarrolladas, por esto, esta teoría es muy importante junto con su generalización ya que son muy útiles y prácicas *per se*. Una cosa que nos gusta mucho a los matemáticos es generalizar, a veces puede resultar muy conveniente y en otros casos no, en nuestro caso, la generalización de los conceptos de conjuntos cerrados y no acotados y de conjuntos estacionarios sobre cardinales a los conjuntos $P_\kappa(A)$ es bastante útil, como teoría se desarrolla en un ambiente similar a lo desarrollado en cardinales, hay resultados muy sorprendentes y otros más intuitivos.

Un buen ejemplo de la importancia de la generalización es el caso que estudiamos en este texto, necesitamos la generalización para poder estudiar lás álgebras booleanas propias, normalmente se estudian órdenes parciales propios pero nosotros trabajaremos con un poco más de estructura. Otro punto importante a resaltar es cómo se relacionan distintas áreas y así poder trabajar con los métodos de una u otra, éste poder se ve cuando presentamos nuestro teorema más relevante que es debido en gran parte a Shelah, Gray, Jech y Baumgartner, en donde mostramos tres equivalencias de que un álgebra sea propia, esto es útil porque podemos usar cualquier forma equivalente y en algunos casos será más fácil una que la otra, además las álgebras booleanas propias cumplen propiedades muy deseadas desde el punto de vista de forcing.

Pero, ¿por qué estudiamos álgebras booleanas propias (órdenes parciales/ nociones de forcing)?, es una muy buena pregunta y hay una respuesta sencilla: Porque son muy útiles. Son útiles para definir nuevos axiomas, de los llamados “axiomas de forcing”, tales como el axioma de Martin. Uno de estos nuevos axiomas es una generalización de Martin y es muy poderoso, tan poderoso que para mostrar su consistencia es necesaria una suposición de cardinales muy muy grandes. Claro que éste axioma nos da mucha información de cómo es el universo y tiene consecuencias muy razonables. En un artículo de Roslanowski dice que Shelah desarrolló esta teoría del proper forcing, porque él sabía que había un nuevo axioma por ahí. Citamos a Leo Harrington: *“Once Shelah told me he named proper forcing that way because that’s the proper way to do forcing”* es decir que se llama proper porque es la manera apropiada de hacerlo. Aunque en nuestro texto usaremos la traducción menos precisa, propio.

Una vez dicho todo esto, nos convencemos de que es importante estudiar a los conjuntos estacionarios y sus aplicaciones, entre ellas, la propiedad de que nuestra álgebra sea propia, mejor aún, que tengamos varias formas de corroborar esta propiedad, todavía un poco mejor, que tengamos las herramientas de distintas áreas para poder estudiarla.

Capítulo 1

Preliminares

Asumimos que el lector conoce un poco de lógica de primer orden (en la sección de teoría de modelos trabajaremos un poco los conceptos), algunos conceptos de topología y la más común axiomatización de la teoría de conjuntos; así como álgebra básica de conjuntos, definiciones, construcciones usuales (uniones, órdenes, funciones, etc.) y algunos resultados sobre los mismos.

En este capítulo sólo colocaremos las definiciones y teoremas que nos serán de utilidad en un futuro para el desarrollo de este texto; omitiremos las demostraciones, se pueden encontrar en cualquier texto de teoría de conjuntos como en [4], [26] o [27].

Empezamos con la discusión de ordinales, luego de cardinales, filtros, ideales, álgebras booleanas y al final un poquito de teoría de modelos.

1.1. Ordinales

Los ordinales son, intuitivamente, los diferentes "tipos de buenos órdenes" que se le puede dar a un conjunto y es nuestra manera de generalizar el buen orden de los números naturales. En las páginas siguientes precisaremos esto.

Definición 1.1.1. Sea X un conjunto y R una relación en X. X es **bien ordenado** por R si está totalmente ordenado por R y todo subconjunto no vacío de X tiene un elemento mínimo con respecto de R.

Definición 1.1.2. Sea X un conjunto, X es **transitivo** si y sólo si para cada $x \in X$ tenemos que $x \subset X$. Un **ordinal** es un conjunto transitivo y bien ordenado por $\in$.

Clasificamos a los ordinales en ordinales **sucesores** y en ordinales **límite**:

Definición 1.1.3. Sean α, β ordinales.

(i) $\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \in \beta$;

(II) $\alpha + 1 := \{\alpha\} \cup \alpha$;

(III) α es un ordinal límite si y sólo si no es sucesor de ningún ordinal, i.e. un ordinal es límite si no puede ser alcanzado por ningún otro ordinal bajo la operación sucesor.

La teoría de conjuntos se desarrolla en el marco de la lógica de predicados, con un sólo símbolo no lógico, a saber, $\in$. Es bien sabido que no todas las fórmulas nos permiten definir conjuntos, por las llamadas paradojas (Russell, Richard, etc...) por este motivo se define una **clase** como todos los conjuntos que cumplen cierta propiedad (fórmula de la teoría de conjuntos). Desde otro enfoque las clases se pueden ver como objetos de la misma teoría como lo es en la axiomatización de Bernays-Gödel-Neumann. Al final es irrelevante el enfoque porque no perdemos poder expresivo en ninguno. Así podemos hablar de clases cuando sea claro la fórmula por la que debemos sustituir. Denotamos a la clase de todos los conjuntos por V, la de los ordinales por On y la de los ordinales límite por Lim.

Los ordinales cumplen muchas propiedades interesantes e importantes, a continuación presentamos algunas:

Proposición 1.1.1. *Sea α, β ordinales tales que $\alpha \neq \beta$.*

(I) $0 = \emptyset$ *es un ordinal.*

(II) *Si $x \in \alpha$, entonces x es un ordinal.*

(III) $\alpha \notin \alpha$.

(IV) $\beta \subset \alpha$ *si y solo si* $\beta \in \alpha$.

(V) $\alpha \subset \beta$ *o* $\beta \subset \alpha$.

(VI) $\alpha = \{\gamma : \gamma < \alpha\}$.

(VII) *Si C es una clase no vacía de ordinales, $\bigcap C$ es un ordinal, $\bigcap C \in C$ y $\bigcap C = \text{ínf}\, C$.*

(VIII) *Si C es una clase no vacía de ordinales, $\bigcup C$ es un ordinal y $\bigcup C = \sup C$.*

(IX) $\alpha + 1$ *es un ordinal y* $\alpha + 1 = \text{ínf}\{\gamma : \gamma > \alpha\}$.

Teorema 1.1.2 (Enumeración). *Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.*

Esto es lo que mencionamos al principio de que los ordinales son como representantes de los buenos órdenes. Formalmente, gracias al teorema anterior podemos definir el **tipo de orden** de un buen orden A como el único ordinal al cuál éste es isomorfo, abreviamos $t.o.(A)$. Con ayuda del teorema del buen orden tenemos un tipo de orden para todo conjunto.

Proposición 1.1.3. *Si α es un ordinal y $\Sigma \subseteq \alpha$, $t.o.(\Sigma) \leq \alpha$*

Se puede definir a ω, el conjunto de números naturales, para que en efecto sea un conjunto transitivo, bien ordenado por $\in$ y no sea sucesor de ningún otro ordinal (tal que le anteceden ordinales finitos) y así sea un ordinal límite.

Algo muy importante que nos sirve para demostrar cosas en matemáticas es la inducción sobre ω, por ejemplo. Ésta es una propiedad muy útil y se generaliza a ordinales.

Teorema 1.1.4 (**Inducción sobre ordinales versión conjuntos**). *Sea α un ordinal, ϕ una fórmula con una variable libre, supongamos que para cada $\beta \in \alpha$ si para todo $\gamma < \beta$ se cumple $\phi(\gamma)$ implica que $\phi(\beta)$. Podemos concluir que para todo $\beta \in \alpha$, $\phi(\beta)$ se cumple.*

Cuando $\alpha = \omega$ el teorema anterior se reduce al clásico principio de inducción sobre los naturales. Más aún, lo podemos generalizar a la clase de todos los ordinales:

Teorema 1.1.5 (**Inducción sobre ordinales versión clases**). *Sea ϕ una fórmula con una variable libre, supongamos que sabemos que para cada $\beta \in ON$ si para todo $\gamma < \beta$ se cumple $\phi(\gamma)$ entonces $\phi(\beta)$. Entonces para todo $\beta \in ON$, $\phi(\beta)$.*

Podemos enunciarlo equivalentemente como,

Teorema 1.1.6 (**Inducción transfinita**). *Sea C una clase de ordinales supongamos que:*

(I) *Si $\alpha \in C$, $\alpha + 1 \in C$;*

(II) *Si α es un ordinal límite y $\beta \in C$ para todo $\beta < \alpha$, $\alpha \in C$.*

Entonces $C = ON$, i.e. es la clase de todos los ordinales.

Definición 1.1.4. Una **sucesión transfinita** es una función con dominio un ordinal, solemos escribir $\langle a_\gamma : \gamma < \alpha \rangle$ si α es el dominio de alguna sucesión f donde $f(\gamma) = a_\gamma$; decimos que es una sucesión de longitud α o una α-sucesión.

Otra propiedad muy útil para hacer definiciones de nuevos conceptos y también para hacer algunas construcciones que nos ayudan a demostrar, es la llamada "recursión".

Teorema 1.1.7 (**Recursión transfinita**). *Sea G una función de clase definida para la clase de todos los conjuntos, dada. Entonces existe una única función de clase F definida en la clase de los ordinales tal que:*

$$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$$

para cada α.

La recursión es una herramienta muy poderosa a la hora de definir nuevos objetos, nos será muy útil cuando lidiemos con demostraciones para ver que algo es un conjunto no acotado.

A continuación, definiremos límites y continuidad "como"[1] en análisis.

Definición 1.1.5. Sea $\alpha > 0$ un ordinal límites y sea $\langle \zeta_\gamma : \gamma < \alpha \rangle$ una sucesión de ordinales.

(I) Decimos que $\langle \zeta_\gamma : \gamma < \alpha \rangle$ es una sucesión **no decreciente** si $\gamma < \delta$ implica que $\zeta_\gamma \leq \zeta_\delta$, es **creciente** si se da la desigualdad estricta.

(II) Definimos el **límite** de la sucesión (creciente) por

$$\lim_{\gamma \to \alpha} \zeta_\gamma = \sup\{\zeta_\gamma : \gamma < \alpha\}.$$

(III) Decimos que es **continua** si $\zeta_\gamma = \lim_{\xi \to \gamma} \zeta_\xi$ para todo $\gamma < \alpha$ límite.

(IV) $\langle \zeta_\alpha : \alpha \in ON \rangle$ es **normal** si es creciente y continua.

Definición 1.1.6. Diremos que F es una **función de clase de ordinales** si y sólo si F es una función de clase cuyo dominio es un ordinal u On, y cuyo rango está contenido en un ordinal u On.

(I) F se dice **creciente** si y sólo si para todos los ordinales $\alpha, \beta \in dom(F)$, el que $\alpha < \beta$ implica que $F(\alpha) < F(\beta)$;

(II) F se dice **no decreciente** si y sólo si para todos los ordinales $\alpha, \beta \in dom(F)$, el que $\alpha < \beta$ implica que $F(\alpha) \leq F(\beta)$;

(III) F es **continua** si y sólo si para todo ordinal límite α no cero en $dom(F)$,

$$F(\alpha) = \lim_{\xi \to \alpha} F(\xi);$$

(IV) F es **normal** si y sólo si es continua y creciente.

Teorema 1.1.8 (Teorema de puntos fijos para funciones normales). *Sea $F : On \to On$ una función de clase de ordinales, entonces F tiene puntos fijos arbitrariamente grandes.*

1.2. Cardinales

En esta sección veremos las definiciones importantes de los números cardinales. Intuitivamente los cardinales nos ayudan a "contar". La **cardinalidad** de un conjunto bien ordenado será el mínimo ordinal al cual éste es biyectable, gracias a 1.1.2 y al teorema del buen orden la cardinalidad está definida para todo conjunto. Denotemos la cardinalidad de un conjunto W por $|W|$.

[1] Más adelante precisaremos el "como".

Definición 1.2.1. Sea κ un ordinal.

(I) Se dice que κ es un **cardinal** si no se puede biyectar con ningún ordinal menor, es decir, κ=$|\kappa|$;

(II) Siempre hay un cardinal mayor (a saber $|P(\kappa)|$), por lo tanto hay un mínimo ordinal que es mayor que κ, lo denotaremos κ^+ y se llama el **sucesor** de κ;

(III) Decimos que κ es un **cardinal sucesor** si y sólo si es el sucesor de algún otro cardinal, de otra manera se llama **cardinal límite**; se llama **cardinal límite fuerte** si $\alpha < \kappa$ implica que $2^\alpha < \kappa$.

Observación 1. Los cardinales infinitos son siempre ordinales límite.

Lema 1.2.1. *Sea X un conjunto de cardinales, entonces $\bigcup X$ es un cardinal. Lo denotamos por* $\sup X$.

Gracias al lema anterior, existen cardinales límite arbitrariamente grandes. Usando el teorema de recursión sobre ordinales y el hecho anterior definimos la función aleph:

$$\begin{aligned}&\aleph_0 = \omega;\\&\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+;\\&\aleph_\alpha = \omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta : \beta < \alpha\} \text{ con } \alpha \text{ ordinal límite.}\end{aligned}$$

La función $\aleph$ tiene como conjunto de llegada a los cardinales infinitos, de hecho, $\aleph$ es una función suprayectiva, es decir, para cada cardinal κ infinito existe un ordinal α tal que $\kappa = \aleph_\alpha$, por ésta razón a los cardinales infinitos también les llamamos **alephs**. Por construcción, los alephs que están indexados por ordinales sucesor, son cardinales sucesores y los que tienen por índice un ordinal límite; además se demuestra que la función aleph es normal por lo que tiene puntos fijos arbitrariamente grandes.

Definición 1.2.2. Sean κ y λ cardinales cualesquiera. Definimos la suma, multiplicación y exponenciación, respectivamente, de κ con λ de la siguiente manera:

(I) $\kappa + \lambda = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|$;

(II) $\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$;

(III) $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa| = |\{f : \lambda \to \kappa\}|$.

Lema 1.2.2. *Sean $\kappa, \kappa', \lambda, \lambda'$ cardinales tales que $\kappa \leq \kappa'$ y $\lambda \leq \lambda'$, se cumple que $\kappa + \lambda \leq \kappa' + \lambda'$, $\kappa \cdot \lambda \leq \kappa' \cdot \lambda'$ y si $\lambda \neq 0$ tenemos que $\kappa^\lambda \leq \kappa'^{\lambda'}$*

La adición y multiplicación de alephs(cardinales infinitos) es una cuestión trivial debido a lo siguiente:

Teorema 1.2.3. $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ *para todo α.*

Este teorema no es nada trivial de demostrar se necesita establecer el orden canónico de $\alpha \times \alpha$ y luego definir una funcion de apareamiento en los ordinales (Gödel). La demostración de este hecho se puede consultar en [15] o en [27].

Corolario 1.2.4. $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\text{máx}\{\alpha,\beta\}}$ *para todo* α, β.

Lema 1.2.5. *Sean* λ *cardinal infinito y* κ *cardinal tales que* $2 \leq \kappa \leq 2^\lambda$, *entonces* $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.

Corolario 1.2.6. $\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$

La hipótesis del continuo (HC) es el enunciado $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. La hipótesis generalizada del continuo(HGC) es el enunciado $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Definición 1.2.3. Sean κ y λ cardinales. Definimos $\kappa^{<\lambda} = |{}^{<\lambda}\kappa|$, donde ${}^{<\lambda}\kappa = \{f : \alpha \to \kappa : \alpha < \lambda\}$, además $[\kappa]^\lambda = \{A \subseteq \kappa : |A| = \lambda\}$, se definen de manera análoga $[\kappa]^{<\lambda}, [\kappa]^{\leq\lambda}$.

La exponenciación cardinal es una cuestión muy diferente y más complicada, para estudiarla con detalle se introduce el concepto de cofinalidad que además nos será de utilidad más adelante, intuitivamente la cofinalidad es "el número de pasos"que se deben dar para ascender por un ordinal.

Definición 1.2.4. Sean α, β ordinales tal que α es límite. Decimos que $f : \beta \to \alpha$ es **cofinal** en α si $\sup f[\beta] = \alpha$. La **cofinalidad** de α, denotado $cf(\alpha)$ es el mínimo ordinal $\beta \leq \alpha$ tal que hay una función cofinal con dominio β.

La primera observación de esta definición es que la cofinalidad siempre está definida para cualquier ordinal límite (la identidad es cofinal), se puede generalizar la definición para cualquier conjunto totalmente ordenado, es decir, también para ordinales sucesor pero para nuestros fines nuestra definición es suficiente.

De hecho la cofinalidad se puede expresar en términos de sucesiones transfinitas crecientes, como muestra el siguiente teorema.

Proposición 1.2.7. *Sea* α *un ordinal límite mayor que cero. La cofinalidad de* α *es el mínimo ordinal* $\beta \leq \alpha$ *tal que hay una* β*-sucesión cofinal en* α*, donde una sucesión transfinita creciente es* ***cofinal*** *en* α *si converge a* α.

La cofinalidad tiene propiedades muy interesantes y deseadas, enunciamos algunas a continuación:

Lema 1.2.8. *Dado un ordinal límite* α*:*

(I) $\omega \leq cf(\alpha) \leq \alpha$.

(II) $cf(\alpha)$ *es un cardinal.*

(III) $cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$.

Lema 1.2.9. *Sea α un ordinal límite, si $A \subset \alpha$ y $\sup A = \alpha$, entonces el tipo de orden de A es al menos $cf(\alpha)$.*

Ejemplo 1. $cf(\omega) = cf(\omega + \omega) = cf(\aleph_\omega) = cf(\aleph_{\aleph_\omega}) = \omega$

Veremos en seguida la principal partición de los números cardinales infinitos, que es en dos ramas, la de los cardinales regulares y los singulares:

Definición 1.2.5. Dado un ordinal límite α, α se dice que es **regular**, si y sólo si, $cf(\alpha) = \alpha$. α se dice que es **singular** si y sólo si $cf(\alpha) < \alpha$.

Proposición 1.2.10. *Sea α un ordinal infinito, se cumple que:*

(I) *Si α es regular, $cf(\aleph_\alpha) = \alpha$.*

(II) *$cf(\alpha)$ es regular.*

(III) *Si α es un ordinal sucesor o 0, $\aleph_\alpha$ es regular.*

(IV) *Si α es un ordinal límite, $\aleph_\alpha$ es singular.*

(V) *Si α es límite y no es cardinal, α es singular.*

Hay resultados muy importantes en la exponenciación cardinal, por ejemplo:

Teorema 1.2.11 (König). *Si $\kappa \geq 2$ y λ infinito, $cf(\kappa^\lambda) > \lambda$.*

Algunas de las propiedades más importantes acerca de cardinales son fáciles de enunciar pero no tan fácil de demostrar, tenemos lo siguiente.

Teorema 1.2.12. *Sea κ un cardinal infinito,*

(I) *Se cumple que $\kappa^+ \leq \kappa^{cf(\kappa)} \leq 2^\kappa$.*

(II) *κ^+ es regular.*

Usando esto es fácil observar que todo cardinal singular infinito debe de ser un cardinal límite. El siguiente tipo de cardinales es más exótico.

Definición 1.2.6. Decimos que un cardinal $\kappa > \omega$ es **inaccesible**(débil) si y solo si κ es regular y es un cardinal límite. Decimos que es **inaccesible** si y sólo si es límite fuerte y es regular.

La nomenclatura de inaccesible se debe a que si ZFC fuera consistente entonces no se puede probar que existen. Ya sabemos que la función aleph tiene puntos fijos, pero los tiene arbitrariamente grandes:

Proposición 1.2.13. *Todo cardinal inaccesible $\aleph_\alpha$ es punto fijo de la función alef, i.e. $\aleph(\alpha) = \alpha$.*

1.3. Filtros, ideales y álgebras booleanas

En esta sección estudiaremos las definiciones de filtro e ideal sobre un conjunto, intuitivamente en un filtro se quedan los elementos más “gruesos” y en un ideal los más “delgados”.

Definición 1.3.1. Sea X un conjunto, decimos que $\mathscr{F} \subseteq P(X)$ es un **filtro** si:

(I) $X \in \mathscr{F}$ y $\emptyset \notin \mathscr{F}$.

(II) Si $Y \in \mathscr{F}$ y $Y \subseteq Z$, $Z \in \mathscr{F}$.

(III) Si $Y, Z \in \mathscr{F}$, entonces $Y \cap Z \in \mathscr{F}$.

Definición 1.3.2. Sea X un conjunto, decimos que $\mathscr{I} \subseteq P(X)$ es un **ideal** si:

(I) $\emptyset \in \mathscr{I}$ y $X \notin \mathscr{I}$.

(II) Si $Y \in \mathscr{I}$ y $Y \supseteq Z$, $Z \in \mathscr{I}$.

(III) Si $Y, Z \in \mathscr{I}$, entonces $Y \cup Z \in \mathscr{I}$.

Definición 1.3.3. Sean X un conjunto y $A \subset P(X)$, llamamos al conjunto $A^* = \{X \setminus R : R \in A\}$ la familia **dual de** A.

Ejemplo 2. (I) El filtro trivial, $\mathscr{F} = \{X\}$.

(II) El filtro de Fréchet, $\mathscr{F} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ es finito}\}$, lo denotamos por $\mathscr{F}_{cof}$.

(III) Si $\mathcal{F}$ es una familia no vacía de filtros, $\bigcap \mathcal{F}$ es un filtro.

(IV) Si $\mathcal{F}$ es una cadena no vacía de filtros, $\bigcup \mathcal{F}$ es un filtro.

Definición 1.3.4. Le llamamos a un filtro **ultrafiltro** si es filtro maximal con respecto de la contención.

Y como esperamos que sea, el dual de un filtro es un ideal y viceversa:

Lema 1.3.1. *Si A es filtro sobre X entonces A^* es ideal sobre X. Además si A es ideal en X, A^* es filtro en X.*

Decimos que una famila F de subconjuntos de X tiene la **propiedad de intersección finita o p.i.f**[2] si para cualquier subconjunto finito A de F se tiene que $\bigcap A \neq \emptyset$.

Cualquier familia de subconjuntos F de X con la propiedad de intersección finita se puede extender a un filtro, tome $\langle F \rangle := \{x \in X : \exists f \in [F]^{<\omega}(\bigcap f \subseteq x)\}$, lo llamamos el filtro **generado por F** y recíprocamente todo subconjunto finito de un filtro tiene intersección no vacía.

[2]Tal vez simplemente pif.

Es fácil ver que, dado $x \in X$ la familia $\{Y \subseteq X : x \in Y\}$ es un ultrafiltro sobre X, le llamamos el **ultrafiltro principal generado por x**, si no existe un tal X el ultrafiltro es un **ultrafiltro no principal o libre**.

En el caso de ideales, dualizamos las nociones y tenemos un **ideal maximal o ideal primo**.

Proposición 1.3.2. *$\mathscr{I}$ es ideal primo si y sólo si $\mathscr{I}^*$ es ultrafiltro.*

Lema 1.3.3. *Sea $\mathscr{F}$ un filtro sobre el conjunto X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$\mathscr{F}$ es ultrafiltro.*

(ii) $\forall Y, Z \in P(X)(Y \cup Z \in \mathscr{F} \Rightarrow Y \in \mathscr{F} \vee Z \in \mathscr{F})$.

(iii) $\forall Z \in P(X)(Z \notin \mathscr{F} \Rightarrow X \setminus Z \in \mathscr{F})$.

Teorema 1.3.4 (Tarski). *Todo filtro puede extenderse a un ultrafiltro.*

Hay una pequeña variación del teorema de Tarski, llamado el teorema del ideal primo y es la afiramación de que todo conjunto con la p.i.f está contenido en un ultrafiltro.

Si X es un conjunto infinito, tome el conjunto $\{X \setminus A : |A| < |X|\}$ es fácil ver que es un filtro y por el teorema de Tarski se puede extender a un ultrafiltro; un ultrafiltro con estas características es llamado **ultrafiltro uniforme**. Cualquier filtro principal es ultrafiltro.

Teorema 1.3.5 (Pospíšil). *Para cada cardinal infinito κ hay 2^{2^κ} ultrafiltros uniformes en κ.*

Teorema 1.3.6. *Sea X un conjunto infinito y sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$\mathscr{U}$ es libre.*

(ii) $\mathscr{F}_{cof} \subseteq \mathscr{U}$.

(iii) *Si $A \in \mathscr{U}$, A no es finito.*

Definición 1.3.5. Sean κ un cardinal y $\beta < \kappa$. Un filtro se llama **κ-completo** si, y sólo si, para cada familia $\{F_\xi \in \mathscr{F} : \xi < \beta\}$, $\bigcap\{F_\xi : \xi < \beta\} \in \mathscr{F}$. De otra manera es **$\kappa$-incompleto**. Dualmente se define un ideal **κ-completo**.

Observe que todo filtro es $\aleph_0$-completo. Un filtro $\aleph_1$-completo se llama **σ-completo**. Además si X es infinito, cualquier ultrafiltro no principal es $|X|^+$-incompleto. Todo ultrafiltro $|X|$-completo, es un ultrafiltro uniforme.

Lema 1.3.7. *Si $\mathscr{F}$ es un filtro κ-completo entonces el ideal $\mathscr{F}^*$ es ideal κ-completo.*

Ejemplo 3. Sea κ un cardinal regular, Tenemos que $\mathscr{I} = \{A \subset X : |A| < \kappa\}$ es un ideal κ-completo si $|X| \geq \kappa$, si X es no numerable, $\{A \subset X : |A| \leq \aleph_0\}$ es un ideal σ-completo. Más general, si $\kappa > \omega$ y $|X| \geq \kappa$ tenemos que $\{A \subset X : |A| < \kappa\}$ es un ideal κ-completo. No hay filtros σ-completos libres en un conjunto numerable.

Es natural preguntarse hasta que tipo de conjuntos se puede interpretar la idea de un filtro y resulta ser que una manera adecuada es considerar el estudio de álgebras booleanas; además las álgebras booleanas son de utilidad en las ramas de la lógica y topología, estudiaremos resultados importantes brevemente.

Definición 1.3.6. Sea B un conjunto con $|B| \geq 2$, y distingamos dos elementos de B por 0 y 1. El conjunto B se dice que es un **álgebra booleana** si B está enriquecido con tres operaciones, llamadas **booleanas**: $+, \cdot$ (binarias) y $-$ (unaria). Tales que,

(I) $\forall a \forall b(a + b = b + a)$

(II) $\forall a \forall b(a \cdot b = b \cdot a)$

(III) $\forall a \forall b \forall c(a + (b + c) = (a + b) + c)$

(IV) $\forall a \forall b \forall c(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c)$

(V) $\forall a \forall b \forall c(a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c)$

(VI) $\forall a \forall b \forall c(a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

(VII) $\forall a \forall b(a \cdot (a + b) = a)$

(VIII) $\forall a \forall b(a + (a \cdot b) = a)$

(IX) $\forall a(a + (-a) = 1)$

(X) $\forall a(a \cdot (-a) = 0)$

Más precisamente, un álgebra booleana es una estructura $\mathbb{B} = \langle B, 0, 1, +, -\cdot \rangle$, llamamos a B el dominio del álgebra booleana, en la mayoría de ocasiones, cuando hablemos del álgebra $\mathbb{B}$ escribiremos B. La primera observación es que dado un conjunto X, $P(X)$ es un álgebra booleana con las operaciones conjuntistas. De hecho las propiedades que cumplen las operaciones booleanas son las que cumplen las operaciones conjuntistas.

Decimos que dos elementos a y b son **disjuntos o incompatibles** si $a \cdot b = 0$. Defina $a - b := a \cdot (-b)$, además, $a \leq b$ si y solo si $a - b = 0$. Esto define un orden parcial sobre B, y no es difícil ver que 1 es el elemento máximo y 0 el mínimo, también $\sup\{a, b\} = a + b$ e $\text{ínf}\{a, b\} = a \cdot b$.

Las nociones de ideales y filtros se extienden fácilmente a álgebras booleanas, se generalizan las ideas de ultrafiltro y de ideal primo. Una función f entre dos álgebras booleanas B y C es un **homomorfismo** de álgebras si f respeta al 0,1 y las operaciones booleanas.

Dado un ideal $\mathscr{I}$ en B, considere la relación de equivalencia sobre B por $a \sim b$ si y solo si u y v se parecen "mucho", i.e. $a \backsim b$ si y solo si $(u-v)+(v-u) \in \mathscr{I}$, al cociente $B/\sim$ le podemos dar estructura de álgebra booleana con las operaciones inducidas por B. Denotamos a $B/\sim$ por $B/\mathscr{I}$.

Como en cualquier otra estructura algebraica, trabajamos de manera similar con subálgebras, isomorfismos, núcleos, etc.

El siguiente resultado nos dice que a final de cuentas todas las álgebras son las que ya conocemos:

Teorema 1.3.8 (**Teorema de representación de Stone**). *Toda álgebra booleana es isomorfa a un álgebra de conjuntos.*

Queremos generalizar las operaciones booleanas binarias a una cantidad infinita de elementos, para eso hacemos la siguiente definición:

Definición 1.3.7. Dado B un álgebra booleana, definimos (haciendo uso del orden parcial inducido en B) para $S = \{s_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq B$:

$$\sum_{\alpha\in I} s_\alpha := \sup S \text{ e } \prod_{\alpha\in I} s_\alpha := \text{ínf}\, S$$

siempre que existan el supremo o el ínfimo.

Para nosotros es muy importante que siempre existan, por eso hacemos la siguiente definición: Decimos que B es **completa** si existen $\sum$ y $\prod$ para todo $S \subset B$, más general, si κ es un cardinal infinito decimos que B es **κ-completa** si para cada $S \subseteq B$ tal que $|S| < \kappa$ tenemos que $\sup S \in B$. Análogamente a las definiciones de ideal κ-completo tenemos que sobre un álgebra booleana B un ideal $\mathscr{I}$ es κ-completo, si cada que $S \subset \mathscr{I}$ y $|S| < \kappa$ tenemos que $\sum_{\alpha\in I} s_\alpha \in \mathscr{I}$ y dualmente para la noción de filtro.

Lema 1.3.9. *Si B es álgebra booleana κ-completa e $\mathscr{I}$ ideal κ-completo sobre B, tenemos que el cociente $B/\mathscr{I}$ es álgebra booleana κ-completa.*

Para cualquier B álgebra booleana, permítanos escribir B^+ en lugar de $B\setminus\{0\}$. La siguiente definición es muy importante y útil, por eso le pedimos al lector la tenga en mente:

Definición 1.3.8. Decimos que una subálgebra(o subconjunto de B^+) A de B es **densa**(**o un subconjunto denso**) en B si para cada $b \in B^+$, existe $a \in A^+$ tal que $a \leq b$. Un **completamiento** de un álgebra booleana B es un álgebra booleana completa C tal que B es subálgebra densa en C.

Y como es de esperarse, tenemos:

Teorema 1.3.10. *Toda álgebra booleana tiene un único completamiento, salvo isomorfismo.*

1.4. Modelos y submodelos elementales

Un lenguaje a *grosso modo* es un conjunto con un montón de símbolos, con los que vamos a construir nuestras oraciones, claro éstas tendrán un significado adecuado cuando interpretemos los símbolos en un cierto *modelo*.

Definición 1.4.1. Llamamos **símbolos lógicos** a los conectivos lógicos($\vee, \wedge \ldots$), los cuantificadores($\forall, \exists$), una cantidad numerable de variables, los paréntesis y el símbolo de igualdad. Un **tipo de lenguaje** ρ es una 3-tupla $\mathscr{L} = \langle R, F, C \rangle$, donde los elementos de R son símbolos relacionales a los cuales se les ha asignado un número natural, los elementos de F son símbolos funcionales y también a cada elemento se le asocia un número natural llamado **aridad** y los elementos de C son símbolos de constantes. Si el número natural de un símbolo es m decimos que es un símbolo m-ario. Un **lenguaje de predicados de primer orden** $\mathscr{L}$ está formado por un tipo ρ y los símbolos lógicos. Una **estructura o modelo para** $\mathscr{L}$ es un par $\mathfrak{M} = (M, I_\rho)$, donde M es un conjunto no vacío que es el **dominio de interpretación del lenguaje** e I_ρ es la **función de interpretación**, I_ρ asocia a cada símbolo relacional m-ario una relación sobre M^m, a cada símbolo funcional k-ario una función $f : M^k \to M$ y a cada símbolo de constante le asocia un elemento distinguido de M.

Como con las álgebras booleanas, cuando hablemos de la estructura $\mathfrak{A}$, sobreentenderemos que A es el dominio de interpretación.

Definición 1.4.2. Sean $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dos estructuras y $h : A \to B$ una función, decimos que h es **homomorfismo** si para cada $a_1, \ldots, a_n \in A$:

$h(c)$ es una constante en B;
$h(f(a_1, \ldots, a_n)) = f(h(a_1), \ldots, h(a_n))$ para cada símbolo funcional f;
$R(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow R(h(a_1), \ldots, h(a_n))$ para cada símbolo relacional R.

Denotaremos el homomorfismo por $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. Si además h es inyectiva y se cumple el recíproco en la última parte en la definición anterior, es decir, $R(a_1, \ldots, a_n) \iff R(h(a_1), \ldots, h(a_n))$, diremos que h es un encaje. Un **isomorfismo** es un encaje suprayectivo, en el caso de que exista un isomorfismo $j : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ diremos que $\mathfrak{A}$ es isomorfo a $\mathfrak{B}$ y lo denotamos por $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Una **subestructura o submodelo de** $\mathfrak{B}$ es una estructura $\mathfrak{A}$ con $A \subseteq B$ tal que la inclusión es un encaje.

A continuación necesitamos definir más individuos de los que podamos hablar con nuestro lenguaje, los *términos*:

Definición 1.4.3. Un **término** se define recursivamente como sigue:

(I) Las variables son términos.

(II) Las constantes son términos.

(III) Si F es una letra funcional y $t_1, \ldots, t_r$ son términos tenemos que $F(t_1 \ldots t_r)$ es un término.

(IV) Todo lo que podamos construir a partir de los tres incisos anteriores en una cantidad finita de aplicaciones es un término.

Denotamos al conjunto de todos los términos con $Term$.

Ahora tenemos que saber como interpretar estos nuevos individuos en la estructura $\mathfrak{A}$. Primero, una función s que vaya del conjunto VAR a A diremos que es una **sucesión o una asignación de valor a las variables**, abreviado a.v.v.

Definición 1.4.4. Dada s una a.v.v y t un término del lenguaje definimos la función interpretación de t por la función $I_s : Term \to A$ dada por

$$I_s(t) = I_\rho(t) \text{ si t es constante;}$$
$$I_s(t) = s(t) \text{ si t es variable;}$$
$$I_s(f(t_1, \ldots, t_n)) = I_\rho(f)(I_s(t_1), \ldots, I_s(t_n)) \text{ si } t = f(t_1, \ldots, t_n).$$

Por fin, definimos todo de lo que podemos hablar con nuestro lenguaje: las fórmulas. Empezaremos con los bloques de éstas.

Definición 1.4.5. Las **fórmulas atómicas** son:

(I) Si t_1 y t_2 son términos, entonces $t_1 = t_2$ es atómica.

(II) Si R es una letra relacional y $t_1, \ldots, t_r$ son términos tenemos que $R(t_1 \ldots t_r)$ es una fórmula atómica.

Las **fórmulas** se definen recursivamente como:

(I) Las fórmulas atómicas son fórmulas.

(II) Si ψ es una fórmula, $\neg\psi$ es una fórmula.

(III) Si ψ y ϕ son fórmulas, las siguientes son fórmulas $\psi \vee \phi, \psi \wedge \phi, \psi \implies \phi$.

(IV) Si x es una variable y ψ una fórmula, $\exists x\phi$ y $\forall x\psi$ son fórmulas.

(V) La aplicación finita de alguno de los pasos anteriores es una fórmula.

Sea ϕ una fórmula, decimos que x **aparece libre** si no está al alcance de ningún cuantificador. Supongamos que $x_0, \ldots, x_n$ aparecen libres en ϕ y que $a_0, \ldots, a_n \in A$, denotamos por $\phi(a_0, \ldots, a_n)$ a la fórmula que resulta de cambiar x_i por a_i. Diremos que una fórmula ϕ es un **enunciado** si no tiene variables libres.

Definición 1.4.6. Sean $\mathfrak{A}$ una estructura, ϕ una fórmula y s una $\mathfrak{A}$-sucesión diremos que $\mathfrak{A}$ **satiface** a ϕ bajo s y lo denotamos $\mathfrak{A} \models \phi[s]$:

(I) Si ϕ es $t_1 = t_2$ y $I_s(t_1) = I_s(t_2)$;

(II) Si ϕ es $R(t_1, \ldots, t_n)$ y $(I_s(t_1), \ldots, I_s(t_n)) \in I_\rho(R)$;

(III) Si ϕ es $\neg\psi$ para alguna fórmula ψ y $\mathfrak{A} \not\models \psi[s]$;

(IV) Si ϕ es $\psi \wedge \chi$ y $\mathfrak{A} \models \psi[s]$ y $\mathfrak{A} \models \chi[s]$;

(V) Si ϕ es $\psi \vee \chi$ y $\mathfrak{A} \models \psi[s]$ o $\mathfrak{A} \models \chi[s]$;

(VI) Si ϕ es $\psi \implies \chi$ y $\mathfrak{A} \models \psi[s]$ o $\mathfrak{A} \not\models \chi[s]$;

(VII) Si si ϕ es $\exists x\phi$ y existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi[s(x/a)]$, .

Si $\mathfrak{A} \models \phi[s]$ para toda sucesión, diremos que $\mathfrak{A}$ **hace verdadera a** ϕ.

Definición 1.4.7. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dos estructuras,

(I) Decimos que $h : A \to B$ es un **encaje elemental** si es un encaje y para cualquier fórmula ϕ con variables libres $x_1, \ldots, x_n$, y si s es una a.v.v en A, entonces
$$\mathfrak{A} \models \phi[s] \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \phi[h(s)].$$

(II) Decimos que $\mathfrak{A}$ **es un submodelo elemental de** $\mathfrak{B}$, lo denotamos por $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, si $A \subseteq B$ y si la inclusión es un encaje elemental, es decir, si para toda fórmula ϕ con variables libres $x_1, \ldots, x_n$ y cada s a.v.v. en B, si $s(x_1), \ldots, s(x_n) \in A$ entonces
$$\mathfrak{A} \models \phi[s] \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \phi[s].$$

Lema 1.4.1 (Criterio de Tarski). *Sea $\mathfrak{B}$ una estructura y $A \subseteq B$. A es el universo de alguna subestructura elemental de $\mathfrak{B}$ si y sólo si para cada fórmula $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ y para $a_1, \ldots, a_n \in A$ si $\mathfrak{B} \models \exists x\phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ entonces existe $a_0 \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \phi(a_0, \ldots, a_n)$.*

El siguiente resultado será fundamental en el desarrollo de la cuarta parte del texto:

Teorema 1.4.2. (I) *Suponga que $X \subseteq A$ con A infinito. Existe B tal que $X \subseteq B \subseteq A$, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ y $|B| = |X| + \aleph_0$.*

(II) *Si $\langle \mathfrak{B}_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ una sucesión creciente de submodelos elementales de $\mathfrak{A}$ tenemos que $\bigcup\{\mathfrak{B}_\alpha : \alpha < \lambda\} \prec \mathfrak{A}$.*

Estos son los teoremas, lemas y definiciones que nos ayudarán a llevar este texto a cabo, cualquier demostración se puede ver en las referencias. Estamos listos para entrar en materia y empezar a divertirnos con los conjuntos.

Capítulo 2

Conjuntos estacionarios

En todo este capítulo veremos dos tipos de subconjuntos "grandes" en un cardinal, primero daremos la importante noción de conjuntos cerrados y no acotados, algunos resultados clásicos para después desarrollar los conceptos más importantes de los llamados conjuntos estacionarios, estudiaremos el problema de partir un cardinal regular en conjuntos estacionarios y en los siguientes capítulos daremos una generalización de la definición de estacionario para proceder con el teorema principal.

Hay muchísimas aplicaciones de los estacionarios a la teoría de conjuntos, estudiaremos algunas en los apéndices.

2.1. Conjuntos cerrados y no acotados

En toda esta sección, sea α un ordinal límite.

Definición 2.1.1. Sea $C \subseteq \alpha$, decimos que C es **acotado en** α si y sólo si $\sup C \in \alpha$. De lo contrario C es **no acotado en** α. Equivalentemente C es no acotado si y sólo si para todo $\gamma \in \alpha$ existe $\beta \in C$ de tal forma que $\gamma \leq \beta$.

Definición 2.1.2. Sean A un conjunto de ordinales y β un ordinal límite, decimos que β es un **punto de acumulación** de A, si y sólo si $\sup(A \cap \beta) = \beta$.

Definición 2.1.3. Decimos que $C \subseteq \alpha$ es **cerrado** en α si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación menores que α. Denotemos al conjunto de puntos de acumulación menores que α por $Acum_\alpha(C)$.

Nota. La definición anterior la podemos formular así: C es cerrado en α si y sólo si $\beta < \alpha$ es un ordinal límite y $\beta \cap C$ es no acotado en β (i.e. $\sup(C \cap \beta) = \beta$), implica $\beta \in C$.

Observación 2. El conjunto de todos los ordinales límite menores que α es cerrado en α, denotémoslo $Lim(\alpha) := Lim \cap \alpha$.

Para la siguiente caracterización de cerrado necesitaremos un pequeño lema,

Lema 2.1.1. *Hay una función creciente $f : cf(\alpha) \to \alpha$ tal que $ran(f)$ es cofinal en α.*

Demostración: Sea $g : cf(\alpha) \to \alpha$ la función cofinal que testifica que $cf(\alpha)$ es cofinal en α, así $\sup ran(g) = \alpha$. Defina recursivamente $f : cf(\alpha) \to \alpha$ por

$$f(\eta) = \text{máx}\{g(\eta), \sup\{f(\xi) + 1 : \xi < \eta\}\}$$

La función existe gracias al teorema de recursión, y $f(\eta) \in \alpha$ pues $g(\eta) \in \alpha$ y $\sup\{f(\xi) + 1 : \xi < \eta\} \in \alpha$ para todo $\eta < cf(\alpha)$, porque si fuera el caso de que existiera $\eta < \alpha$ tal que $\sup\{f(\xi)+1 : \xi < \eta\}$ defina $h : \eta \to \alpha$ por $h(\xi) := f(\xi)+1$ y h sería cofinal en α, lo cual es imposible. Sea $\beta \in \alpha$, como g es cofinal, existe ϵ tal que $g(\epsilon) \geq \beta$ y por construcción $f(\epsilon) \geq g(\epsilon)$ y así f es cofinal en α. Sean $\beta < \gamma \in cf(\alpha)$ así tenemos $f(\gamma) \geq \sup\{f(\xi) + 1 : \xi < \gamma\} \geq f(\beta) + 1 > f(\beta)$. ∎

En otras palabras $cf(\alpha)$ es el mínimo ordinal límite γ tal que existe una γ-sucesión creciente que converge a α.

Proposición 2.1.2. *Sea $C \subseteq \alpha$, C es cerrado en α si y sólo si para todo ordinal límite $\gamma < cf(\alpha)$, toda γ-sucesión creciente de elementos de C tiene límite en C.*

Demostración: Supongamos que C es cerrado en α, sean $\gamma < cf(\alpha)$ un ordinal limite y $\langle \beta_\xi : \xi < \gamma \rangle$ una γ-sucesion creciente de elementos de C; definamos $\beta := \text{lím}_{\xi \to \gamma} \beta_\xi$, tenemos que $\beta < \alpha$ es límite (γ lo es) y no cero (sucesión creciente), además $\beta \cap C$ es no acotado en α por definición de supremo. Por lo tanto, β es un punto límite de C y como C es cerrado, $\beta \in C$. Supongamos que $\langle \beta_\xi : \xi < \gamma \rangle \subseteq C$ converge en C para todo $\gamma < \alpha$ límite. Sea $\epsilon < \alpha$ un punto de acumulación de C, existe una sucesión creciente que testifica que $cf(\epsilon)$ es en efecto la cofinalidad de ϵ, digamos $\langle \beta_\xi : \xi < cf(\epsilon) \rangle$; defina recursivamente una sucesión sobre $cf(\epsilon)$: Como $\beta_\xi < \epsilon$ y como $C \cap \epsilon$ es no acotado en ϵ, existe un $c_\xi \in C \cap \epsilon, \beta_\xi < c_\xi$; tome $\langle c_\xi : \xi < cf(\epsilon) \rangle$, así tenemos una sucesión de elementos de C que converge a ϵ y por hipótesis $\epsilon \in C$. ∎

La caracterización siguiente se asemeja a la completitud de los reales:

Teorema 2.1.3. *Sea $C \subset \alpha$, C es cerrado si y sólo si para todo $X \subset C$ no vacío y acotado en α, $\sup X \in C$.*

Demostración: Sea $X \subset C$ no vacío y acotado en α, denotemos $\xi = \sup X < \alpha$ (X es acotado). Si $\xi \in X$, $\xi \in C$. Si $\xi \notin X$, es fácil ver que ξ es límite no cero y que $\xi \cap C$ es no acotado en ξ. Como C es cerrado, $\xi \in C$. Recíprocamente, veamos que C es cerrado, sea $\lambda < \alpha$ un ordinal límite tal que $\lambda \cap C$ es no acotado en λ, así $\sup(\lambda \cap C) = \lambda < \alpha$, por lo que $\lambda \cap C$ es no vacío y acotado en α, concluimos que $\lambda \in C$. ∎

Lema 2.1.4. *Si A y B son dos subconjuntos cerrados de α, entonces $A \cap B$ es cerrado en α.*

Demostración: Sea $X \subset A \cap B$ no vacío y acotado en α, $X \subset A$ y $X \subset B$ por ser no vacío y acotado, como son cerrados, tenemos $\sup X \in A$ y $\sup X \in B$.

■

Este resultado se puede generalizar a más de dos subconjuntos cerrados, como veremos más adelante.

Definición 2.1.4. Diremos que $C \subseteq \alpha$ es **club**[1] en α, si y solo si C es cerrado y no acotado en α.

La definición anterior es más general que la que se da en [15] es más bien como la de [13], pero no tardaremos en usar la definición sobre cardinales regulares, por cuestiones de cofinalidades y los resultados centrales se basan en éstos. La definición se podría generalizar aún más a cualquier tipo de ordinales pero no es muy interesante este caso, nuestro interés(por ahora) será pues en los subconjuntos club de ordinales límite.

A cualquier ordinal α lo podemos enriquecer con una topología de manera natural, como lo hacemos a continuación. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in On$ y $\alpha < \beta$ definimos $(\alpha, \beta) := \{\gamma \in On : \alpha < \gamma < \beta\}$, también definimos $[\alpha, \beta) := \{\gamma \in On : \alpha \leq \gamma < \beta\}$. Declaramos a los siguientes subconjuntos como elementos básicos:

(I) $\{[0, \gamma) : \gamma < \alpha\}$;

(II) $\{(\beta, \gamma) : \beta < \gamma < \alpha\}$;

(III) $\{(\beta, \alpha) : \beta < \alpha\}$.

La topología generada por éstos básicos es llamada la **topología del orden sobre** α.

Proposición 2.1.5. *Los cerrados de α coinciden con los cerrados de la topología del orden sobre α.*

Demostración: Sea $C \subset \alpha$, por ésta ocasión denotaremos el conjunto de puntos de acumulación topológicos de C por C', basta demostrar que $Acum_\alpha(C) = C'$ ya que tendríamos $Acum(C) \subset C$ si y sólo si $C' \subset C$, por lo tanto C es cerrado si y sólo si C es cerrado en la topología del orden.

$\subseteq$] Sea $\gamma \in Acum_\alpha(C)$, cualquier vecindad que contenga a γ va a contener puntos de $C \cap \gamma$ que es no acotado en γ.

$\supseteq$] Sea $\lambda \in C'$, λ es necesariamente un ordinal límite mayor que 0, sea $\gamma \in \lambda$, la vecindad $(\gamma, \lambda + 1)$ contiene a λ por lo que intersecta a C, digamos en β, así $\gamma < \beta < \lambda$ y $\beta \in C \cap \lambda$, por lo tanto $\lambda \in Acum_\alpha(C)$. ■

En vista de la proposición anterior podemos concluir que en ω los club son los subconjuntos infinitos. $Lim(\alpha)$ es club si y sólo si α es límite de ordinales límite ($\omega^2, \omega^\omega, \omega_1, etc.$), Si C es club en α y $cf(\alpha) > \omega$ entonces el conjunto $Lim \cap C$ es club en α, además $Acum_\alpha(C)$ también es club en α y es claro que $Acum_\alpha(C) \subseteq C$.

[1]Por su nombre en inglés *closed unbounded*.

Corolario 2.1.6. *Sea $\{C_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos cerrados de α. Entonces $\bigcap_{i\in I} C_i$ es cerrado.*

Como hicimos anteriormente daremos algunas caracterizaciones de los cerrados y no acotados, más adelante nos enfocaremos en el estudio de estos subconjuntos para un cardinal regular de cofinalidad no numerable.

Empezaremos con esta forma de ver a los clubs, como rango de funciones normales:

Teorema 2.1.7. *Sea $C \subset \alpha$ no acotado. C es un subconjunto club de α, si y sólo si existe un ordinal γ y una función normal $f : \gamma \to \alpha$ tal que rango$(f) = C$.*

Demostración: Supongamos que C es club, C es bien ordenado ($C \subset \alpha$), sea $\gamma = t.o.(C)$ y $f^* : \gamma \to C$ el isomorfismo, la función f que buscamos es la extensión del codominio a todo α; claramente $ran(f) = C$, f es creciente por definición de isomorfismo. Veamos que es continua, sea $\beta < \gamma$ un ordinal límite, $\phi := \lim_{\xi\to\beta} f(\xi) \in C$ pues C es cerrado y es fácil ver que $\phi \leq f(\beta)$, así pues existe $\epsilon \in \gamma$ tal que $f(\epsilon) = \phi$, por definición de isomorfismo tenemos $\epsilon \leq \beta$, la desigualdad estricta no se puede porque nos lleva a $\phi \in \phi$. Por lo tanto, $\phi = f(\beta)$.
Recíprocamente supongamos la hipótesis, sólo hace falta ver que $ran(f)$ es cerrado en α. Para este fin, sea β un ordinal límite, $\langle \delta_\xi : \xi < \beta\rangle$ una β-sucesión creciente de elementos de C.

$$\lim_{\xi\to\beta} \delta_\xi = \underbrace{\lim_{\xi\to\beta} f(\phi_\xi) = f(\lim_{\xi\to\beta} \phi_\xi)}_{continuidad},$$

como $\lim_{\xi\to\beta} \phi_\xi \in \gamma$, $f(\lim_{\xi\to\beta} \phi_\xi) \in f[\gamma] = C$. ■

Corolario 2.1.8. *Sean κ un cardinal regular y $C \subset \kappa$, C es club en κ si y sólo si existe una función normal $f : \kappa \to \kappa$ con $ran(f) = C$.*

Demostración: Si C es club, por el teorema anterior existe β(el tipo de orden de C) y $f : \beta \to \kappa$ con $ran(f) = C$, veamos que $\beta = \kappa$. Por la proposición 1.1.3, $\beta \leq \kappa$, por 1.2.9 $\kappa = cf(\kappa) \leq \beta$. Así $\beta = \kappa$.
Supongamos que existe tal función, sea $\gamma \in \kappa$, por ser una función creciente entre buenos órdenes, $\gamma \leq f(\gamma) \in C$, así C es no acotado en κ y por el teorema anterior es club. ■

Teorema 2.1.9. *Existe un club $C \subseteq \alpha$ tal que $t.o.(C) = cf(\alpha)$.*

Demostración: Sea $f : cf(\alpha) \to \alpha$ una funcion creciente tal que $\bigcup ran(f) = \alpha$, buscamos definir una función normal g tal que $\bigcup ran(g) = \alpha$, luego aplicar el teorema 2.1.7 y como una función normal es isomorfismo de órdenes, tenemos el resultado. Defina recursivamente $g : cf(\alpha) \to \alpha$ de la siguiente manera: $g(0) = 0$, para $\xi \in Lim \cap cf(\alpha)$, $g(\xi) = \sup_{\eta<\xi} g(\eta)$ y para $\xi = \beta + 1$ defina $g(\xi) = \max\{f(\beta), g(\beta) + 1\}$, es claro que g es normal. ■

De hecho en el lema 2.1.1 podemos pedir un poco más, que exista una función normal h con $ran(h)$ cofinal en α.

Lema 2.1.10. *Existe una función $h : cf(\alpha) \to \alpha$ que es normal y $ran(h)$ es cofinal en α.*

Demostración: Sea g como en el lema 2.1.1, defina recursivamente $h : cf(\alpha) \to \alpha$ por

$$h(0) = g(0);$$
$$h(\xi + 1) = g(\xi + 1);$$
$$h(\xi) = \sup\{g(\eta) : \eta < \xi\} \text{ para } \xi \in Lim.$$

Es fácil ver, con inducción transfinita, que la g acota puntualmente a la h así h es creciente, es obvio que es continua (así se definió) y si $\beta \in \alpha$ como $ran(g)$ es cofinal, existe $\eta \in cf(\alpha)$ tal que $\beta < g(\eta) < g(\eta + 1) = h(\eta + 1)$, tenemos pues $\sup ran(h) = \alpha$. ∎

Lema 2.1.11. *La cofinalidad de α es el mínimo cardinal κ tal que existe A no acotado y $|A| = \kappa$.*

Demostración: Veamos que $cf(\alpha) \geq \kappa$, esto es fácil porque gracias al lema anterior existe $h : cf(\alpha) \to \alpha$ cofinal(=no acotado) en α, así pues es inyectiva y $|ran(h)| = cf(\alpha)$ y como κ era mínimo tenemos lo que queremos. Ahora veamos que $cf(\alpha) \leq \kappa$, por hipótesis existe A no acotado y $|A| = \kappa$, tome $f : \kappa \to A$ la biyección que testifica que κ es la cardianlidad de A, extienda el codominio a todo α y tenemos una función cofinal en α por lo que debe ser $cf(\alpha) \leq \kappa$. ∎

Teorema 2.1.12. *Si κ cardinal regular y A es no acotado, tenemos que $|A| = \kappa$.*

Demostración: Como $A \subseteq \kappa$ tenemos que $|A| \leq \kappa$ y por el lema anterior tenemos que $\kappa = cf(\kappa) \leq |A|$ pues A es no acotado. Así $|A| = \kappa$ ∎

Si cf(α)=ω, para cualquier ω-sucesión cofinal en α su rango es club. En el caso de que $cf(\alpha) > \omega$ los club son de tamaño grande (generan un filtro), esto es por lo que nuestro interés se basará en ordinales con cofinalidad no numerable.

Proposición 2.1.13. *Supongamos que $cf(\alpha) > \omega$. La intersección de menos de cf(α) clubs es un club.*

Demostración: Sean $\gamma < cf(\alpha)$ y $\langle C_\xi : \xi < \gamma \rangle$ una familia de clubs de α. Ya vimos que $\bigcap_{\xi<\gamma} C_\xi$ es cerrada, pues cada intersectando es cerrado; veamos que es no acotada, sea pues $\delta \in \lambda$, definamos recursivamente: $\beta_0 = \delta$; supongamos que está definido el $\beta_n < \alpha$ término, como C_ξ es no acotado en α existe un $\rho_\xi^n \in C_\xi$ de tal manera que $\rho_\xi^n \geq \beta_n$, defina $\beta_{n+1} := \sup_{\xi<\gamma} \rho_\xi^n$, observemos que $\beta_{n+1} < \alpha$, porque $\gamma < cf(\alpha)$ y por tanto la sucesión no converge a α. Sea $\beta = \bigcup_{n\in\omega} \beta_n$, así $\beta < \alpha$ pues $cf(\alpha) > \omega$, además $C_\xi \cap \beta$ es no acotado en β ya que si $\theta < \beta$ existe un n_0 tal que $\theta < \beta_{n_0} < \beta$ y $\theta < \rho_\xi^{n_0} < \beta$, por lo tanto $\beta \in C_\xi$ para todo $\xi < \gamma$.

∎

Ejemplo 4. Defina sobre ω_1, $C_\alpha := \{\gamma \in \omega_1 : \alpha \leq \gamma\}$ para cada $\alpha < \kappa$, es fácil ver que son clubs y $\bigcap_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$ es vacía.

Lema 2.1.14. *Supongamos que α tiene cofinalidad no numerable y $f \in {}^{\alpha}\alpha$ normal, entonces el conjunto $Fix(f) := \{\gamma \in \alpha : f(\gamma) = \gamma\}$ es club en α.*

Demostración: Sea $\beta \in Acum_{\alpha}(Fix(f))$. $\beta = \sup(\beta \cap \mathrm{Fix(f)}) = \sup\{\gamma : f(\gamma) = \gamma \wedge \gamma < \beta\} = \sup\{f(\gamma) : f(\gamma) = \gamma \wedge \gamma < \beta\} = f(\sup\{\gamma : f(\gamma) = \gamma \wedge \gamma < \beta\}) = f(\sup(\beta \cap \mathrm{Fix(f)})) = f(\beta)$. Veamos que Fix(f) es no acotado en α, sea $\beta < \alpha$ ($\mathrm{Fix(f)} \neq \emptyset$, por 1.1.8); construyamos una sucesión recursivamente: $\delta_0 = \beta$; definido δ_n, tomamos $\delta_{n+1} > f(\delta_n)$; tenemos que $\delta = \sup\{\delta_i : i \in \omega\} = \sup\{f(\delta_i) : i \in \omega\} = f(\delta)$ y $\beta < \delta < \alpha$ pues la cofinalidad de α es no numerable. ∎

Ya vimos que para preservar clubs bajo intersección es suficiente que sean menos que la cofinalidad del ordinal en cuestión y que no siempre se puede con "muchos" club, por eso introducimos la siguiente noción que sí preserva clubs bajo interecciones "grandes".

Definición 2.1.5. Sea $\langle C_\xi : \xi < \alpha \rangle$ una familia de subconjuntos de α. Definimos la **intersección diagonal** por

$$\mathop{\Delta}_{\xi<\alpha} C_\xi = \{\gamma < \alpha : \gamma \in \bigcap_{\beta<\gamma} C_\beta\}$$

También definimos la **unión diagonal** por

$$\mathop{\nabla}_{\xi<\alpha} C_\xi = \{\gamma < \alpha : \gamma \in \bigcup_{\beta<\gamma} C_\beta\}.$$

Teorema 2.1.15. *Supongamos que $cf(\alpha)$ es no numerable y sea $\langle C_\xi : \xi < \alpha \rangle$ una familia de clubs en α. Si $\bigcap_{\xi<\beta} C_\xi$ es no acotado en α para todo $\beta < \alpha$, entonces $\Delta_{\xi<\alpha} C_\xi$ es club en α.*

Demostración: Definamos $C := \Delta_{\xi<\alpha} C_\xi$, veamos que es cerrado. Sea $\tau < \alpha$ límite tal que $C \cap \tau$ es no acotado en τ, queremos ver que $\tau \in C_\sigma$ para todo $\sigma < \tau$. Sea $\sigma < \tau$, definamos $A_\sigma := \{c \in C : \sigma < c < \tau\}$ y como $C \cap \tau$ es no acotado en τ el conjunto A_σ es no vacío, además, tenemos que $\tau = \sup\{c \in C : \sigma < c < \tau\}$, ya que la desigualdad $\tau \geq \sup\{c \in C : \sigma < c < \tau\}$ es clara y la otra desigualdad se da porque para cualquier $\beta < \tau$ tenemos que $\beta + 1 < \tau$. Afirmamos que $A_\sigma \subseteq C_\sigma$: sea $\gamma \in A_\sigma$, así $\sigma < \gamma < \tau$ y $\gamma \in C$, como $\gamma \in C$ entonces $\gamma \in \bigcap_{\xi<\gamma} C_\xi$, en particular $\gamma \in C_\sigma$. Concluimos que $\tau \in C_\sigma$ ya que C_σ es club en α y τ es el supremo de un subconjunto no vacío y acotado de C_σ.

Veamos ahora que C es no acotado en α, sea $\beta < \alpha$, definamos recursivamente sobre ω, podemos escojer $\sigma_0 \in C_0 \setminus \sigma$ ya que C_0 es no acotado; $\sigma_{n+1} \in \bigcap_{\xi<\sigma_n} C_\xi \setminus (\sigma_n + 1)$, en cada paso podemos escojer gracias a la hipótesis. Tómese $\beta = \sup\{\sigma_n : n \in \omega\}$, $\beta < \alpha$ pues $cf(\alpha) > \omega$. Si $i < \beta$, existe $n_0 < \omega$ tal que $i < \sigma_{n_0}$ y $\beta = \sup\{\sigma_n : n > n_0\}$, cada σ_n con $n > n_0$ está en C_i; así por 2.1.3, $\beta \in C_i$, como i es arbitrario, $\beta \in C$ y además $\beta > \sigma$. ∎

Corolario 2.1.16. *Si κ es un cardinal regular no numerable y $\langle C_\xi : \xi < \kappa \rangle$ una familia de clubs en κ , $\Delta_{\xi<\kappa} C_\xi$ es club en κ.*

Demostración: Sabemos que para todo $\beta < \kappa$, $\bigcap_{\xi<\beta} C_\xi$ es club en κ, en particular es no acotado y por el teorema anterior tenemos que $\underset{\xi<\kappa}{\Delta} C_\xi$ es club en κ. ∎

A veces es útil tener clubs a partir de funciones; como vimos con funciones normales, he aquí otra forma de encontrar clubs:

Definición 2.1.6. Una **operación parcial finita** sobre un conjunto A, es una función parcial $f; {}^nA \to A$ para algún $n \in \omega$. Un subconjunto Γ de A es **cerrado bajo** f si y sólo si para todo $c \in {}^n\Gamma \cap dom(f)$, $f(c) \in \Gamma$.

Teorema 2.1.17. *Sea κ un cardinal regular no numerable, $X \in [\kappa]^{<\kappa}$ y $\mathscr{F}$ una familia de operaciones parciales finitas sobre κ tal que $|\mathscr{F}| < \kappa$. Entonces $C := \{\alpha < \kappa : X \subseteq \alpha$ y es cerrado bajo cada $f \in \mathscr{F}\}$ es club en κ.*

Demostración: Sea $\gamma < \kappa$ límite tal que $\gamma \cap C$ es no acotado en γ, veamos que $\gamma \in C$. Primero demostremos que $X \subseteq \gamma$, fijemos $\delta < \gamma$; existe $\epsilon \in C \cap \gamma$ tal que $\delta < \epsilon < \gamma$ pues $X \subseteq \epsilon$, tenemos que $x < \epsilon < \gamma$ para todo $x \in X$ así $X \subseteq \gamma$. Veamos que γ es cerrado bajo cada $f \in \mathscr{F}$, sean $f \in \mathscr{F}$ y $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \gamma^n \cap dom(f)$, tómese β_i tal que $a_i < \beta_i < \gamma$ y sea $\beta = \sup\{\beta_i : i < n\}$, obsérvese que $\beta < \gamma$ así podemos tomar un $\epsilon \in C \cap \gamma$, tenemos que $a \in \epsilon^n$ y $f(a) \in \epsilon < \gamma$, tenemos pues que $\gamma \in C$. Mostremos que C es no acotado en κ, sea $\alpha \in \kappa$, defina recursivamente $\beta_0 = \alpha$ y supongamos que $\beta_i < \kappa$ está definido, considere $A = \{f(t) : f \in \mathscr{F}, t \in dom(f)$ y $a_j \in \beta_i\}$ y sea $\beta_{i+1} = \sup A$, sea $\delta = \bigcup_{n\in\omega} \beta_n$, así $\delta \in C$ por construcción. ∎

En seguida justificaremos lo que mencionamos al principio de que los cerrados y no acotados son conjuntos "muy grandes" ya que estos generan un filtro, el **filtro club**.

Definición 2.1.7. Supongamos que $cf(\alpha) > \omega$. Definimos el filtro club como el conjunto,

$$Club(\alpha) = \{X \subseteq \alpha : \exists C \subseteq X \text{ cerrado y no acotado}\}$$

En efecto $Club(\alpha)$ es un filtro, ya que la familia de todos los clubs es no vacía y tiene la p.i.f (gracias a 2.1.13), tenemos además automáticamente que es un filtro $cf(\alpha)$-completo.

Observación 3. No todo elemento de $Club(\alpha)$ es un club ya que por ejemplo, $\alpha = \omega_1$ y $A = \omega \cup \{\beta < \omega_1 : \omega < \beta \in Lim\}$, así $A \in Club(\omega_1)$ pero A no es club ya que $\omega \subset A$ y $\sup \omega = \omega \notin A$.

2.2. Conjuntos estacionarios

Los conjuntos estacionarios son subconjuntos "no tan pequeños", veremos un resultado elemental que nos proporciona conjuntos estacionarios conocido como el teorema de Fodor, además algunas de sus consecuencias y trataremos de explicar porque los estacionarios son importantes en la teoría de conjuntos.

Definición 2.2.1. Sea α un ordinal límite y $E \subseteq \alpha$, E es **estacionario** si y sólo si $E \cap C \neq \emptyset$ para todo C club en α.

En un ordinal de cofinalidad numerable los estacionarios son exactamente los que su complemento es acotado, así , ya los tenemos caracterizados por lo que no son interesantes, a partir de aquí fijemos α ordinal límite tal que $cf(\alpha) > \omega$.

Proposición 2.2.1. (I) *Todo club es estacionario.*

(II) *La intersección de un conjunto estacionario con un club es estacionario.*

(III) *Cualquier superconjunto de un estacionario es estacionario.*

(IV) *La unión de menos de $cf(\alpha)$ no estacionarios es un conjunto no estacionario.*

(V) *Todo estacionario es no acotado en α.*

Demostración: (I), (II) y (III) son fáciles.
(IV) Sean $\gamma < cf(\alpha)$ y $\langle N_\xi : \xi < \beta \rangle$ una familia de no estacionarios, para cada $\xi < \beta$ existe C_ξ club tal que $C_\xi \cap N_\xi = \emptyset$, así $\bigcap_{\xi<\beta} C_\xi$ es club concluimos que

$$\left(\bigcup_{\xi<\beta} N_\xi\right) \bigcap \left(\bigcap_{\xi<\beta} C_\xi\right) = \emptyset.$$

(V) Dado $\gamma \in \alpha$, el conjunto $\{\eta \in \alpha : \eta \geq \gamma\}$ es club en α. ∎

Corolario 2.2.2. *Los subconjuntos no estacionarios de α forman un $cf(\alpha)$-ideal, el ideal de los no estacionarios, $\mathscr{I}_{NS}$.*

De hecho, es el dual del filtro club:

Lema 2.2.3. $\mathscr{I}_{NS} = Club(\alpha)^* = \{X \subset \alpha : \forall C(C \text{ es club } \wedge C \nsubseteq X)\}$.

Demostración: Sea $X \in \mathscr{I}$, tenemos que existe C club tal que $C \cap X = \emptyset$, así ningún club está contenido en X ya que C intersectaría a X. Tenemos pues $\mathscr{I}_{NS} \subseteq Club(\alpha)^*$. Sea $X \in Club(\alpha)^*$, entonces $\alpha \setminus X \in Club(\alpha)$ por lo que existe C club que está contenido en $\alpha \setminus X$ por lo que $X \cap C = \emptyset$. ∎

Todo estacionario es cofinal en α pero no necesariamente es cerrado, como veremos a continuación.

Proposición 2.2.4. *Sea α un ordinal límite y $\kappa \geq \omega$ un cardinal regular menor que $cf(\alpha)$, entonces $S := \{\beta < \alpha : cf(\beta) = \kappa\}$ es estacionario en α.*

Demostración: Sea C club y gracias a 2.1.1 podemos tomar $f : cf(\alpha) \to \alpha$ función creciente y cofinal en α, se puede extender a una función normal por 2.1.10; defina recursivamente $g : cf(\alpha) \to C$ por $g(0) \in C$, $g(\gamma) = \bigcap\limits_{\beta<\gamma} g(\beta)$ para $\gamma \in cf(\alpha) \cap Lim$ y para $g(\beta+1) = \gamma$ donde $\gamma > g(\beta)$ y $\gamma > f(\beta)$. Es claro que es normal y $\bigcap g[cf(\alpha)] = \alpha$, así por 2.1.7 $ran(g)$ es club en α, además $cf(g(\kappa)) = cf(\kappa) = \kappa$ y tenemos que $g(\kappa) \in C \cap S$. ∎

Ejemplo 5. Sea $S = \{\beta < \omega_2 : cf(\beta) = \omega\}$, es estacionario en ω_2. Pero si tomamos una enumeración creciente de S, digamos $\langle s_\alpha : \alpha < \omega_2\rangle$, tenemos que $\langle s_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ es una sucesión creciente de elementos de S pero, si $s := \sup\langle s_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ tenemos $cf(s) = \omega_1$ y así $s \notin S$ por lo que S no es cerrado.

Definición 2.2.2. Un filtro $\mathscr{F} \subset \mathcal{P}(\alpha)$ es un **filtro normal** si y sólo si es cerrado bajo intersección diagonal. Análogamente un ideal es **normal** si y sólo si es cerrado bajo unión diagonal.

Entonces, según esta definición de filtro normal, tenemos que sobre κ regular no numerable el filtro club es un filtro normal κ-completo.

Observación 4. Si κ es un cardinal regular no numerable, $\mathscr{I}_{NS}$ es un ideal normal κ-completo.

La definición siguiente no la usaremos, pero es importante y por eso la mencionamos:

Definición 2.2.3. Para cualquier conjunto no vacío de ordinales A con $\sup A \notin A$, llamamos al conjunto $\mathscr{I}_a(A) := \{X \subseteq A : \exists\beta \in A, X \subseteq \beta\}$ el **ideal de conjuntos acotados**. Llamamos a un ultrafiltro $\mathscr{U}$ **no acotado** syss $\mathscr{U} \cap \mathscr{I}_a(A) = \emptyset$.

Observación 5. Si $\kappa > \omega$ es regular y no numerable entonces $\mathscr{I}_a(\kappa) \subseteq \mathscr{I}_{NS}$.

Definición 2.2.4. Sea α un ordinal y $S \subseteq \alpha$ decimos que $f : S \to \alpha$ es **regresiva** si para todo $\gamma \in S$ tenemos que $f(\gamma) < \gamma$. Observe que si f es regresiva, $0 \notin S$.

Se sospecha que los conjuntos estacionarios comenzaron a ser una teoría consolidada después del siguiente teorema, debido a Géza Fodor, pero investigando más a fondo se sabe que los trabajos de Gérard Bloch, Pavel Alexandroff y Pavel Uryshon, contienen información sobre funciones regresivas y estacionarios en alguna forma.

Teorema 2.2.5 (Fodor, 1956). *Supóngase que α es un ordinal límite tal que $cf(\alpha) > \omega$ y $S \subseteq \alpha$ es estacionario en α. Sea $f : S \to \alpha$ una función regresiva, entonces para algún $\eta < \alpha$ el conjunto $f^{-1}[\eta]$ es estacionario en α.*

Demostración: Supongamos que para todo $\eta < \alpha$, $f^{-1}[\eta]$ no es estacionario, es decir, existe D_η club tal que $D_\eta \cap f^{-1}[\eta] = \emptyset$. Elijamos por el lema 2.1.9 $E \subseteq \alpha$ club del tipo de orden de $cf(\alpha)$ y sea $\tau_\eta = \min\{\xi \in E : \xi \geq \eta\}$, definamos $C_\eta := \bigcap_{\xi \in E \cap (\tau_\eta + 1)} D_\xi$. Tenemos que

$$C_\eta \cap f^{-1}[\eta] = \emptyset$$

porque

$$C_\eta \cap f^{-1}[\eta] \subseteq D_{\tau_\eta} \cap f^{-1}[\tau_\eta] = \emptyset$$

pues $C_\eta \subseteq D_{\tau_\eta}$ $(\tau_\eta \in E \cap \tau_{\eta+1})$ y $\tau_\eta \geq \eta$. Observe que $\langle C_\eta : \eta < \alpha\rangle$ es una sucesión decreciente de clubs, así por 2.1.15, $C := \Delta\langle C_\eta : \eta < \alpha\rangle$ es club y sabemos que

$Lim(\alpha)$ es club, tenemos pues que $C \cap Lim(\alpha)$ es club y como S es estacionario existe $\beta \in C \cap Lim(\alpha) \cap S$, como $\beta \in C$, $\beta \in \bigcap_{\xi<\beta} C_\xi$ y así $\beta \notin f^{-1}[\xi]$ para cada $\xi < \beta$, es decir, $f(\beta) \geq \beta$, una contradicción a que f es regresiva. ∎

El teorema de Fodor es a veces referido en la literatura como "the pressing down lemma"; este teorema funciona de igual manera en las generalizaciones de los estacionarios y también tiene su versión con arboles, es una herramienta muy útil. Su versión original es la siguiente:

Corolario 2.2.6. *Si κ es regular y no numerable y S estacionario en κ, para cada $f : S \to \kappa$ existe $\sigma < \kappa$ tal que $f^{-1}(\{\sigma\})$ es estacionario en κ.*

Demostración: Usando el teorema anterior tenemos que existe $\eta < \kappa$ tal que $f^{-1}[\eta]$ es estacionario en κ. Además $f^{-1}[\eta] = \{f^{-1}[\{\sigma\}] : \sigma < \eta\}$, así, como κ es regular, $f^{-1}[\eta]$ es estacionario y la unión de una cantidad menor que κ de no estacionarios es no estacionario, debe existir $\sigma < \eta$ tal que $f^{-1}[\{\sigma\}]$ es estacionario.

∎

Lema 2.2.7. *Suponga que κ es un cardinal regular e $\mathscr{I}$ un ideal sobre κ. $\mathscr{I}$ es normal si y solo si para cada $A \notin \mathscr{I}$ y cada función regresiva $f : A \to \kappa$, existe $\sigma < \kappa$ tal que $f^{-1}[\{\sigma\}] \notin \mathscr{I}$.*

Demostración: Veamos que $\mathscr{I}$ es normal, sea $\{X_\xi : \xi < \kappa\} \subseteq \mathscr{I}$ queremos mostrar que $D := \nabla_{\xi<\kappa} X_\xi \in \mathscr{I}$. Supongamos que $D \notin \mathscr{I}$ y defina $f : D \to \kappa$ por $f(\delta) = \text{mín}\{\gamma < \delta : \delta \in X_\gamma\}$. Es regresiva, ciertamente. Aplicamos la hipótesis a D y a f, tenemos que existe $\sigma < \kappa$ con $f^{-1}[\{\sigma\}] \notin \mathscr{I}$; es fácil ver que $f^{-1}[\{\sigma\}] \subseteq X_\sigma$ y así tenemos una contradicción ya que $\mathscr{I}$ es ideal.
Recíprocamente suponga que $\mathscr{I}$ es un ideal normal sobre κ, sean $A \subseteq \kappa$ de tal forma que $A \notin \mathscr{I}$ y $f : A \to \kappa$ regresiva. Como f es regresiva $0 \notin A$. Defina $X_\xi = f^{-1}[\{\xi\}]$ para todo $\xi < \kappa$. Suponga que para todo $\xi < \kappa$, $X_\xi \in \mathscr{I}$, tenemos pues que $\nabla_{\xi<\kappa} X_\xi \in \mathscr{I}$, además es claro que $\nabla_{\xi<\kappa} X_\xi \subseteq A$ y si $\alpha \in A$, $\alpha < \kappa$ y $\alpha \in X_{f(\alpha)} \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$ pues f es regresiva por lo que $A \subseteq \nabla_{\xi<\kappa} X_\xi$; tenemos que $A = \nabla_{\xi<\kappa} X_\xi$, así $A \in \mathscr{I}$ y $A \notin \mathscr{I}$, contradicción. Por lo tanto existe $\sigma < \kappa$ de tal forma que $f^{-1}[\{\sigma\}] = X_\sigma \notin \mathscr{I}$. ∎

En otras palabras, el teorema de Fodor dice que $\mathscr{I}_{NS}$[2] es normal en κ cada que $\kappa > \omega$ es regular.

Gracias al teorema 2.1.12 tenemos que todo conjunto estacionario sobre $\kappa > \omega$ (regular) tiene cardinalidad igual a κ. Por lo que todo subconjunto de κ de tamaño menor que κ pertenece a $\mathscr{I}_{NS}$. El siguiente teorema debido a Neumer es una forma más débil del teorema de Fodor, nos da una caracterización de los estacionarios de κ.

Teorema 2.2.8 (Neumer, 1951). *Sean $\kappa > \omega$ un cardinal regular y $A \subseteq \kappa$, A es estacionario en κ si y sólo si para cada función regresiva $f : A \to \kappa$ hay un $\alpha < \kappa$ tal que $|f^{-1}[\{\alpha\}]| = \kappa$.*

[2] El tratamiento de conjuntos estacionarios con ideales normales fue iniciado por D. Scott.

Demostración: Suponga que A es estacionario, por el teorema de Fodor, tenemos que para cada función regresiva $f : A \to \kappa$ existe σ, tal que $f^{-1}[\{\sigma\}]$ es estacionario en κ y así $|f^{-1}[\{\sigma\}]| = \kappa$. El regreso lo haremos por contrapuesta, suponga que A no es estacionario, así existe C club tal que $A \cap C = \emptyset$; defina $f : A \to \kappa$ por $f(\gamma) = \sup(\gamma \cap C)$, demostremos que esta función es la deseada. Veamos primero que es regresiva, sea $\gamma \in A$ es claro que $f(\gamma) \leq \gamma$, mostremos la desigualdad estricta, si $\gamma \cap C = \emptyset$ tenemos trivialmente $f(\gamma) = 0 < \gamma$, ahora si $\gamma \cap C \neq \emptyset$ y $\beta = \sup(\gamma \cap C)$ tenemos que $\beta \in C$ pues C es cerrado, $\beta \notin A$, así el caso $\beta = \gamma$ es imposible, por lo tanto $f(\gamma) < \gamma$. Para cada $\alpha < \kappa$, como C es no acotado en κ existe $\epsilon \in C$ tal que $\alpha < \epsilon$, $f(\epsilon+1) \geq \epsilon$ tenemos que $f^{-1}[\{\alpha\}] \subseteq \epsilon+1$ por lo que $|f^{-1}[\{\alpha\}]| \leq |\epsilon + 1| < |\kappa| = \kappa$ pues κ es cardinal. ∎

De hecho, Pavel Alexandroff y Pavel Urysohn usaron la "ida" del teorema anterior para demostrar que ω_1 con la topología del orden no es metrizable, desde aquí ya tenemos un resultado importante en topología.

Teorema 2.2.9. *Sea κ regular y no numerable, sea $\mathscr{I}$ un ideal normal sobre κ, si $[\kappa]^{<\kappa} \subseteq \mathscr{I}$ entonces podemos concluir que $\mathscr{I}$ es κ-completo.*

Demostración: Sea $\lambda < \kappa$ y $\langle A_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ una familia de elementos de $\mathscr{I}$, llamemos $A = \bigcup\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Supóngase que $A \notin \mathscr{I}$, como $\lambda \subset \kappa$ y $\lambda < \kappa$ tenemos que $\lambda \in \mathscr{I}$ y como $A \notin \mathscr{I}$ concluimos que $A \setminus \lambda \notin \mathscr{I}$. Defina a continuación una función f tal que para cada $\eta \in A \setminus \lambda$, $f(\eta) = \min\{\alpha < \lambda : \eta \in A_\alpha\}$, así f es regresiva y por el lema anterior, existe $\sigma < \lambda$ de tal forma que $f^{-1}[\{\sigma\}] \notin \mathscr{I}$, tenemos pues $A_\sigma \setminus \lambda \notin \mathscr{I}$ que contradice el hecho de que $A_\sigma \in \mathscr{I}$.

∎

Corolario 2.2.10. *Si $\kappa > \omega$ es un cardinal regular, $\mathscr{I} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ es un ideal normal sobre κ tal que $[\kappa]^{<\kappa} \subset \mathscr{I}$, entonces $\mathscr{I}_{NS} \subset \mathscr{I}$.*

Demostración: Tenemos que $\mathscr{I}$ es κ-completo gracias al teorema anterior. Sea $E \in \mathscr{I}_{NS}$ por el teorema de Neumer tenemos que existe $f : E \to \kappa$ regresiva tal que para cada $\alpha < \kappa$, $f^{-1}[\{\alpha\}] \in [\kappa]^{<\kappa}$, así $f^{-1}[\{\alpha\}] \in \mathscr{I}$ y por la equivalencia de normalidad en ideales tenemos que $E \in \mathscr{I}$. ∎

El corolario anterior nos da mucha información ya que nos dice que el ideal $\mathscr{I}_{NS}$ es el ideal más pequeño sobre κ que es normal, κ-completo y contiene a todos los conjuntos "pequeños" en cardinalidad.

Corolario 2.2.11. *Si $\mathscr{I} \supseteq \mathscr{I}_{NS}$ es un ideal normal κ-completo sobre κ. Entonces $\mathscr{I}^* \supseteq Club(\kappa)$.*

Después de todo esto podemos observar que el álgebra cociente de $\mathcal{P}(\kappa)/\mathscr{I}_{NS}$, es un álgebra booleana κ-completa, con las operaciones $\sum_{\alpha<\gamma}$ y $\prod_{\alpha<\gamma}$ para $\gamma < \kappa$ inducidas por la unión e intersección. De hecho gracias al teorema 2.1.15, tenemos que es κ^+-completa. Además si cambiamos el orden en la interesccion diagonal solo cambia el resultado salvo por un no estacionario.

Tenemos una última caracterización del filtro club, su generalización nos será muy útil después, pero antes necesitamos un par de definiciones.

Definición 2.2.5. Decimos que F es una **función generadora** si $F : [\kappa]^{<\omega} \to \kappa$, denotamos el conjunto de todas las funciones generadoras por $\mathcal{F}_G$. Sean $F \in \mathcal{F}_G$ y $\gamma < \kappa$ un ordinal cualquiera. Decimos que γ es un **punto de cerradura**, si $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y $\alpha_i < \gamma$ para cada i implica $F(A) < \gamma$. Denotamos por Cl_F el conjunto de los puntos de cerradura de F y $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_G} = \{Cl_F : F \in \mathcal{F}_G\}$.

De hecho estos Cl_F son suficientes para describir a todo el filtro club:

Lema 2.2.12. *Sea κ cardinal regular y no numerable, se cumple:*

(I) *Para cada $F \in \mathcal{F}_G$, tenemos que Cl_F es club en κ.*

(II) *Para todo club C existe una función generadora tal que $Cl_F \subseteq C$.*

Demostración: (I) Sea $F \in \mathcal{F}_G$, veamos que Cl_F es cerrado, sea $\alpha < \kappa$ límite y tome una sucesión creciente de longitud α, digamos $\langle a_\xi : \xi < \alpha \rangle$, tenemos que para cada subconjunto finito $A := \{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$ con $\alpha_i < \sup_{\xi<\alpha} a_\xi$, existe a_ξ^i con $\alpha_i \leq a_\xi^i$, así $F(A) < a_\xi^i < \sup_{\xi<\alpha} a_\xi$ para i con la más grande a_ξ^i. Por lo tanto Cl_F es cerrado. Veamos que es no acotado, considere $\beta < \kappa$, tomemos el conjunto $C_0 := \{F(e) < \kappa : e \in [\beta]^{<\omega} \wedge F(e) > \beta\}$, definamos $\beta_1 := \sup C_0$, $\beta_1 < \kappa$ pues si no sería un subconjunto no acotado de tamaño λ. Ahora considere $C_1 := \{F(e) < \kappa : e \in [\beta_1]^{<\omega} \wedge F(e) > \beta_1\}$, sigamos así por inducción y al final definamos $\alpha := \bigcup_{n\in\omega} C_n$, es claro que $\alpha > \beta$ afirmamos que $\alpha \in Cl_F$ pero esto se sigue ya que si $e \in [\alpha]^{<\omega}$ y $e = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_m\}$ entonces $\alpha > F(e)$ ya que si $\alpha_i \in C_{n_i}$ entonces $F(e) \in C_{n_i}$ para la máxima i.

(II) Sea C club, definamos $F(e)$ como el mínimo elemento de C más grande que $\text{máx}(e)$, tenemos que $Cl_F = Acum_\kappa(C)$ por lo tanto $Cl_F \subseteq C$. ∎

Teorema 2.2.13. $\langle \mathcal{C}_{\mathcal{F}_G} \rangle = Club(\kappa)$. *Donde $\langle \mathcal{C}_{\mathcal{F}_G} \rangle$ denota el filtro generado por los elementos de $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_G}$.*

Demostración: Se sigue directamente del lema pues $\langle \mathcal{C}_{\mathcal{F}_G} \rangle \subseteq Club(\kappa)$ ya que todos los elementos del conjunto generador de la izquierda son elementos del de la derecha. Además si $D \in Club(\kappa)$ existe C tal que $C \subseteq D$ y por el lema existe $F \in \mathcal{F}_G$ tal que $Cl_F \subseteq C \subseteq D$ así $D \in \langle \mathcal{C}_{\mathcal{F}_G} \rangle$ por ser filtro. ∎

Corolario 2.2.14. *Sea $\kappa > \omega$ regular. E es estacionario en κ si y sólo si para cada $F \in \mathcal{F}_G$, $Cl_F \cap E \neq \emptyset$*

Demostración: Si E es estacionario en κ, tenemos que intersecta a cada club en particular a cada Cl_F. Si C es club y $E \cap Cl_F \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathcal{F}_G$, por el lema tenemos que existe $F_0 \in \mathcal{F}_G$ tal que $Cl_{F_0} \subseteq C$, así $C \cap E \neq \emptyset$. ∎

Harvey Friedman mostró en [8], que para cualquier conjunto estacionario S de ω_1 y $\alpha < \omega_1$ existe un $C \subseteq S$ cerrado con el tipo de orden de α; éste resultado no se generaliza a cardinalidades mayores.

2.3. Partiendo κ en conjuntos estacionarios

Aquí mostraremos uno de los primeros[3] resultados importantes de la teoría de conjuntos estacionarios; es un resultado debido a Solovay ([30]), el cual nos permite partir nuestro cardinal regular no numerable en muchos conjuntos estacionarios.

Hay muchas maneras de presentar este teorema por ejemplo como Solovay lo hizo originalmente enfocándose en forcing y cardinales grandes, se puede enfocar desde un punto de vista con juegos infinitos o puramente conjuntista (combinatorio como se conoce en el bajo mundo de la teoría de conjuntos). Preferimos éste último enfoque que es quizá el que requiera menos teoría (después de todo lo que hemos desarrollado) y además porque es muy bonito, hay otras pruebas combinatorias pero seguimos lo hecho en [12].

Si la cofinalidad de nuestro cardinal fuera numerable. Entonces S es estacionario si y sólo si $\kappa \setminus S$ es acotado en κ. En particular, cualesquiera dos estacionarios tienen intersección estacionaria. El caso en el que la cofinalidad es no numerable es más interesante:

Lema 2.3.1. *Sea κ un cardinal regular no numerable y $E \subsetneq \kappa$ un subconjunto estacionario. Entonces el siguiente conjunto es estacionario en κ:*

$$X = \{\alpha \in E : cf(\alpha) = \omega \vee (cf(\alpha) > \omega \wedge E \cap \alpha \textit{ no es estacionario en } \alpha)\}$$

Demostración: Sea C un club en κ, tenemos que $Acum_\kappa(C) \subseteq C$ es club en κ, sea $\alpha := \text{mín}(Acum_\kappa(C) \cap E)$; veamos que $\alpha \in C \cap X$. Solo hace falta ver que $\alpha \in X$. Si $cf(\alpha) = \omega$ ya terminamos. Supongamos pues que $cf(\alpha) > \omega$, tenemos que $Acum_\kappa(C) \cap \alpha$ es club en α porque $\alpha \in Acum_\kappa(C)$. Así, $(Acum_\kappa(C) \cap \alpha) \cap (\alpha \cap E) = \emptyset$ porque α era mínimo. Entonces $\alpha \cap E$ no es estacionario en α. ∎

Lema 2.3.2. *Si $\kappa > \omega$ es un cardinal regular, y $f : \kappa \to \kappa$ una función. Entonces el conjunto $C := \{\beta < \kappa : f[\beta] \subseteq \beta\}$ es club.*

Demostración: Sean $\gamma < \kappa$ un ordinal límite y $\langle \beta_\xi : \xi < \gamma \rangle$ una sucesión creciente de elementos de C, definamos $\beta := \sup\{\beta_\xi : \xi < \gamma\}$, es cierto que $\beta < \kappa$, además

$$f[\beta] = f[\bigcup\{\beta_\xi : \xi < \gamma\}] = \bigcup\{f[\beta_\xi] : \xi < \gamma\} \subseteq \bigcup\{\beta_\xi : \xi < \gamma\} \subseteq \beta$$

donde la última contención es cierta ya que $f(\beta_\xi) \subseteq \beta_\xi \subseteq \beta$. Por lo tanto $\beta \in C$ y así C es cerrado.
Sea $\sigma < \kappa$, defina inductivamente sobre ω: $\beta_0 := \text{máx}\{\sigma + 1, \sup(f[\sigma]) + 1\}$; es claro que $\beta_0 < \kappa$, suponga que se han construido los primeros $\beta_n's < \kappa$, defina $\beta_{n+1} := \text{máx}\{\beta_n + 1, \sup(f[\beta_n] + 1)\}$, como $\kappa > \omega$, $\beta := \sup\{\beta_n : n \in \omega\} < \kappa$, además $f[\beta] = \bigcup\{f[\beta_n] : n \in \omega\} \subseteq \bigcup\{\beta_{n+1} : n \in \omega\} = \beta$. Concluimos que $\beta \in C$ y $\sigma < \beta$, es decir, C es no acotado. ∎

[3]Cronológicamente.

Lema 2.3.3. *Sean κ un cardinal regular no numerable y $S \subseteq Lim(\kappa)$ un estacionario en κ. Si para cada $\alpha \in S$, $f_\alpha : \theta_\alpha \to \alpha$ es una función normal cofinal en α, de tal manera que si $cf(\alpha) = \omega$ entonces $\theta_\alpha = \omega$ y si $cf(\alpha) > \omega$ entonces $\theta_\alpha = \alpha$, entonces podemos concluir que exactamente una de las siguientes afirmaciones es cierta:*

(I) $\exists \xi < \kappa \forall \eta < \kappa (S_\eta := \{\alpha \in S : \xi \in \theta_\alpha \wedge f_\alpha(\xi) \geq \eta\}$ *es estacionario en* $\kappa)$.

(II) $\exists D \subseteq \kappa (D$ *es un club en* $\kappa \wedge \forall \gamma, \alpha \in D \cap S(\gamma < \alpha \to \gamma = f_\alpha(\gamma))$.

Demostración: Supóngase que (I) es falsa, es decir, para cada $\xi < \kappa$, existe $\eta(\xi) < \kappa$ tal que $S_{\eta(\xi)}$ no es estacionario, así pues existe C_ξ club tal que $S_{\eta(\xi)} \cap C_\xi = \emptyset$, en otras palabras para cada $\xi < \kappa$ asignamos un club C_ξ y además tenemos una función $\eta : \kappa \to \kappa$ que manda a ξ en $\eta(\xi)$. Por el lema anterior $M := \{\alpha < \kappa : \eta[\alpha] \subseteq \alpha\}$ es club en κ. Considere $C = \Delta_{\xi<\kappa} C_\xi$, C es club en κ.
Defina a continuación $D := C \cap M \cap Lim(\kappa)$, D es club en κ por ser la intersección de tres clubs. Veamos que D sirve, es decir, para cualesquiera $\gamma, \alpha \in D \cap S$ con $\gamma < \alpha$ tenemos $f_\alpha(\gamma) = \gamma$. Sean pues $\gamma, \alpha \in D \cap S$ tales que $\gamma < \alpha$, deseamos ver que $\gamma = f_\alpha(\gamma)$.
Como $\alpha \in C$, $\alpha \in C_\xi$ para todo $\xi < \alpha$ y por construcción de C_ξ, $\alpha \notin S_{\eta(\xi)}$ para todo $\xi < \alpha$. Como $\alpha \notin S_{\eta(\xi)}$ para todo $\xi < \alpha$, y como $\gamma < \alpha$ tiene sentido preguntarnos que pasa con ξ tal que $\xi \in \gamma \cap \theta_\alpha$, así pues, para $\xi \in \gamma \cap \theta_\alpha$ debe ser que $f_\alpha(\xi) < \eta(\xi)$ y como $\gamma \in M$, tenemos que $\eta(\xi) < \gamma$, así $f_\alpha(\xi) < \gamma$.
Si fuera el caso de que $\theta_\alpha \leq \gamma$ tendríamos que $\chi \in \theta_\alpha$ implicaría $\chi \in \gamma$ y lo anterior nos dice que $f_\alpha(\xi) < \gamma$ y así $ran(f_\alpha) \subseteq \gamma < \alpha$, contradiciendo que f_α es cofinal en α.
Bien pues, tenemos que $\gamma \leq f_\alpha(\gamma)$ por que f_α es creciente. Sólo hace falta ver la otra desigualdad, para esto, observe que $\gamma \in \theta_\alpha$ por el párrafo anterior, así $\gamma \cap \theta_\alpha = \gamma$, además, para todo $\xi \in \gamma \cap \theta_\alpha (= \gamma)$ tenemos $f_\alpha(\xi) < \gamma$ y por continuidad de f_α tenemos $f_\alpha(\gamma) = \sup\{f_\alpha(\xi) : \xi < \gamma\} \leq \gamma$, concluimos que $f_\alpha(\gamma) = \gamma$. Por lo tanto (II) es cierto. ∎

Teorema 2.3.4 (Solovay, 1971). *Sea κ un cardinal regular no numerable y $S \subseteq \kappa$ es estacionario en κ, entonces existe una partición de S en κ subconjuntos estacionarios de κ.*

Demostración: Basta demostrar el teorema para $T \subseteq S$ estacionario, ya que si fuera cierto que $T = \bigcup\{T_\xi : \xi < \kappa\}$ con T_ξ estacionario para todo $\xi < \kappa$, $S_0 = S \setminus \bigcup\{T_\xi : 0 < \xi < \kappa\}$ es estacionario pues contiene a T_0 y $S_1 = S \setminus T_0$ también lo es, así, $S_0 \bigcup S_1$ es la partición deseada.
Sabemos que $Lim(\kappa)$ es club, así, $E := S \cap Lim(\kappa)$ es estacionario. Defina $T := \{\alpha \in E : cf(\alpha) = \omega \vee (cf(\alpha) > \omega \wedge E \cap \alpha$ no es estacionario en $\alpha)\}$, es estacionario gracias a 2.3.1.
Queremos aplicar el lema anterior, para esto, defínase una sucesión $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de funciones normales cofinales en α, y adicionalmente tal que $ran(f_\alpha) \cap T = \emptyset$ para cada $\alpha \in T$, de la siguiente manera: si $\alpha \in T$ tenemos dos opciones, que

$cf(\alpha) = \omega$, o bien, $cf(\alpha) > \omega$, en el primer caso tome una sucesión creciente $g_\alpha : \omega \to \alpha$ de tal manera que $\bigcup ran(g_\alpha) = \alpha$ y defina $f_\alpha(n) := g_\alpha(n) + 1$, ya es claro que no intersecta a T pues $T \subseteq Lim(\kappa)$; para el otro caso tenemos por definición que $E \cap \alpha$ es no estacionario en α tenemos que hay un C_α club tal que $C_\alpha \cap E \cap \alpha \neq \emptyset$ y sabemos que es rango de una función normal f_α, como $C_\alpha \cap T \subset \alpha \cap E \subseteq \alpha \cap S$ tenemos que $C_\alpha \cap T = \emptyset$.
Observe que no puede existir un club D como en (II) del lema anterior, debido a que si tomaramos $\alpha, \gamma \in T \cap D$ con $\gamma < \alpha$ y $f_\alpha(\gamma) = \gamma$ tendríamos $\gamma \in T \cap ran(f_\alpha)$ lo cual es absurdo, aplicamos el lema anterior y por lo tanto, debe existir $\xi < \kappa$ de tal forma que S_η(como el del lema anterior) es estacionario en κ para cada $\eta < \xi$. Defina a continuación, para este ξ y $\alpha \in T$:

$$f(\alpha) := \begin{cases} f_\alpha(\xi) & \text{si } \xi \in dom(f_\alpha); \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $\eta > 0$ tenemos que S_η es claramente $\{\alpha \in T : f(\alpha) \geq \eta\}$ y si $\eta = 0$ entonces $\{\alpha \in T : f(\alpha) \geq \eta\}$ es igual a T, tenemos pues, que $T_\eta := \{\alpha \in T : f(\alpha) \geq \eta\}$ es estacionario para cada $\eta < \kappa$. Es fácil observar que $f : T \to \kappa$ es regresiva, ya que si $\alpha \in T$ entonces $f(\alpha) = f_\alpha(\xi) \in \sup ran(f_\alpha) = \alpha$; aplíquese el teorema de Fodor a cada T_η con $f \restriction T_\eta$, así pues, existe $\sigma_\eta < \kappa$ de tal suerte que $f^{-1}[\{\sigma_\eta\}] \cap T_\eta$ es estacionario en κ para cada $\eta < \kappa$.
Para cada $\eta < \kappa$ tenemos que $\sigma_\eta \geq \eta$, pues $f^{-1}[\{\sigma_\eta\}] \cap T_\eta$ es no vacío, por ser estacionario. Afirmamos que la familia $\{f^{-1}[\{\sigma_\eta\}] \cap T_\eta : \eta < \kappa\}$ es la partición deseada: Es claro que son disjuntos por pares, pues f es función; si $\alpha \in T$ entonces $\alpha \in T_{f(\alpha)}$ y como $f(\alpha) \in \kappa$, $\sigma_{f(\alpha)} \geq f(\alpha)$ así $\alpha \in f^{-1}[\{\sigma_{f(\alpha)}\}] \cap T_{f(\alpha)}$. ∎

Otro resultado interesante, que demostró Solovay, es que bajo el axioma de determinación el filtro de clubs en ω_1 sí es un ultrafiltro. Para más información de éste teorema, del axioma de determinación y de sus consecuencias se recomienda al lector echar un vistazo a [18].

Capítulo 3

Estacionarios sobre $P_\kappa(\lambda)$

En este capítulo estudiaremos la generalización de los clubs y estacionarios a los conjuntos $[\lambda]^\kappa$. Veremos la importancia de esta generalización, la potencia y limitaciones de la misma.

3.1. Conjuntos estacionarios en $P_\kappa(A)$

En esta sección veremos las definiciones y como se generalizan algunos teoremas, un aspecto importante es que el teorema 2.1.13 se sigue cumpliendo, permitiéndonos hablar del filtro de los cerrados y no acotados. Jech y Kueker fueron los primeros en darse cuenta de la importancia de esta generalización, seguiremos parte de la notación usada de su capítulo en [7].

Sean $\kappa \geq \omega$ un cardinal regular y A un conjunto, tales que $|A| \geq \kappa$. Denotamos al conjunto $\{Y \subseteq A : |Y| < \kappa\}$ por $P_\kappa(A)$[1].

Definición 3.1.1. Sean $\kappa \geq \omega$ un cardinal regular y $A \neq \emptyset$. Diremos que un subconjunto $C \subseteq P_\kappa(A)$ es un subconjunto **no acotado** si para cada $Y \in P_\kappa(A)$ tenemos que existe $D \in C$ tal que $Y \subseteq D$.

Nótese la similaridad con la definición de no acotado sobre cardinales, esta analogía se mantendrá a lo largo de este capítulo, con sus debidas excepciones.

Definición 3.1.2. Sea $\kappa > \omega$ un cardinal regular. $C \subseteq P_\kappa(A)$ es un subconjunto **cerrado** si y sólo si, para cada $\alpha < \kappa$ y cada cadena $e_0 \subseteq e_1 \subseteq \ldots \subseteq e_\xi \subseteq \ldots$, $\xi < \alpha$ de conjuntos de C tenemos que $\bigcup_{\xi<\alpha} e_\xi \in C$.

Como antes, llamaremos **club** a cualquier subconjunto cerrado y no acotado de $P_\kappa(A)$. Es facil ver que si $|A| < \kappa$ entonces $C \subseteq P_\kappa(A)$ es no acotado si y sólo si $A \in C$.

[1] Algunos autores usan la notación $[A]^{<\kappa}$, para referirse a éste conjunto.

Veamos algunos ejemplos de clubs y luego algunas propiedades para después caracterizarlos.

Proposición 3.1.1. *Sean $\kappa > \omega$ regular, A tal que $|A| \geq \kappa$ y $a \in P_\kappa(A)$, entonces el conjunto $\breve{a}$:=$\{x \in P_\kappa(A) : a \subseteq x\}$ es club en $P_\kappa(A)$. Es el club* ***generado por a*** *o el* ***cono de a****.*

Demostración: Es fácil ver que si tomamos cualquier $\alpha < \kappa$ y cualquier cadena en $\breve{a}$, la unión debe de estar en $\breve{a}$ y si $y \in P_\kappa(A)$, tome $z = a \cup y$ y así $z \in \breve{a}$ y ya estamos. ∎

Proposición 3.1.2. *Sea κ un cardinal regular no numerable, entonces κ es club en $P_\kappa(\kappa)$. Más aún si C es club en κ también lo es en $P_\kappa(\kappa)$.*

Demostración: Observe que $\kappa \subseteq P_\kappa(\kappa)$ pues si $y \in \kappa$ entonces $y \subset \kappa$ y $|y| < \kappa$ porque κ es cardinal, así $y \in P_\kappa(\kappa)$. Se tiene que Y es cerrado ya que, si $\alpha < \kappa$ y tomamos una cadena creciente de elementos de κ, digamos, $\langle a_\xi : \xi < \alpha \rangle$, tenemos que $\bigcup_{\xi<\alpha} a_\xi \in \kappa$ pues κ es regular. Sea $x \in P_\kappa(\kappa)$, tome $y = \sup x < \kappa$ y así $x \subseteq y$ y $y \in P_\kappa(\kappa)$, por lo que κ es no acotado. Sea C club en κ, es claro que es subconjunto de $P_\kappa(\kappa)$; además es cerrado en $P_\kappa(\kappa)$ porque si nos tomamos una cadena creciente de elementos de C, ésta tiene supremo en C ya que era cerrado en κ, y si $x \in P_\kappa(\kappa)$, entonces $|x| < \kappa$ por lo que $\sup x < \kappa$ y así podemos encontrar $y \in C$ tal que $\sup x < y$ por ser C no acotado en κ, con lo que $x \subseteq \sup x \subseteq y$. Tenemos que C es club en $P_\kappa(\kappa)$. ∎

Teorema 3.1.3. *Supóngase que κ es un cardinal regular no numerable y λ es un cardinal tal que $\lambda > \kappa$. Entonces $C := \{x \in P_\kappa(\lambda) : x \cap \kappa \in \kappa\}$ es club en $P_\kappa(\lambda)$.*

Demostración: Cerrado: Sea $\langle c_\xi : \xi < \alpha \rangle$ una cadena creciente de C, entonces $\left(\bigcup_{\xi<\alpha} c_\xi\right) \cap \kappa = \bigcup_{\xi<\alpha}(c_\xi \cap \kappa)$ así, como $\alpha < \kappa$, κ es regular y $c_\xi \cap \kappa \in \kappa$ tenemos el resultado. No acotado: Sea $x \in P_\kappa(\lambda)$, si $x \cap \kappa = \emptyset$ entonces $x \in C$ y ya acabamos. Si no, considere $y = (x \setminus \kappa) \cup (\sup(x \cap \kappa) + 1)$, tenemos que $y \subseteq \lambda$ y $|y| = |x \setminus \kappa| + |\sup(x \cap \kappa) + 1| < |x| + |\sup x \cap \kappa| < \kappa + \kappa = \kappa$ por lo que $y \in P_\kappa(\lambda)$, ahora $y \cap \kappa = \sup(x \cap \kappa) + 1 \in \kappa$ esto implica $y \in C$ y es claro que $x \subseteq y$, de aquí se sigue que es no acotado. ∎

Como es de esperarse, las cosas funcionan bien, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1.4. *La intersección de dos clubs en $P_\kappa(A)$ es club en $P_\kappa(A)$.*

Demostración: Sean C y D clubs en $P_\kappa(A)$ y $E := C \cap D$, es muy fácil ver que E es cerrado. Veamos que es no acotado: Sea $x \in P_\kappa(A)$, defina por recursión sobre ω una sucesión $\langle \beta_n : n \in \omega \rangle$ de la siguiente manera: $\beta_0 = x$; si n es par escoja un elemento $a_{n+1} \in D$ de tal forma que $\beta_n \subseteq a_{n+1}$; si n es impar, escójalo en C, $\beta_{n+1} = a_{n+1}$. Así tenemos que $\beta = \sup\langle \beta_n : n \in \omega \rangle \in E$ y $x \subseteq \beta$. ∎

Con lo anterior, tenemos que los clubs generan un filtro que además es κ completo:

Teorema 3.1.5 (Jech, 1971). *La intersección de menos que κ clubs en $P_\kappa(A)$ es club en $P_\kappa(A)$.*

Demostración: Sean $\alpha < \kappa$ y $\langle C_\xi : \xi < \alpha\rangle$ una familia de clubs y $C = \bigcap_{\xi<\alpha} C_\xi$. Hagamos inducción sobre α.

Si $\alpha = \beta + 1$ para algún β entonces $(\bigcap_{\xi<\beta} C_\xi) \cap C_\alpha$ es club por el teorema anterior.

Supongamos que α es límite. Sea $\beta < \alpha$ y tomemos una β-cadena creciente de C digamos $\{c_\xi : \xi < \beta\}$, $c_\xi \in C_\alpha$ para cada $\xi < \beta$ y $\alpha < \kappa$ así $\bigcup_{\xi<\beta} c_\xi \in C_\alpha$ para todo α, pues son cerrados; concluimos que $\bigcup_{\xi<\beta} c_\xi \in C$.
Para ver que C es no acotado podemos cambiar nuestros clubs originales por $C'_\gamma := \bigcap_{\xi\leq\gamma} C_\xi$ que por hipótesis de inducción son clubs y $C = \bigcap_{\gamma<\alpha} C'_\gamma$, sea $Y \in P_\kappa(A)$, defina inductivamente $\beta_0 \in C'_0$ tal que $Y \subseteq \beta_0$ y en el paso sucesor encuentre $\beta_{\alpha+1} \in C_{\alpha+1}$ con $\beta_\alpha \subseteq \beta_{\alpha+1}$ y en el límite encuentre $\beta_\alpha \in C_\alpha$ con $\beta_\alpha \supseteq \bigcup_{\xi<\alpha} C_\xi$. El límite de ésta sucesión es un elemento de la intersección, más grande que Y. ■

Introducimos a continuación la noción de intersección diagonal, note que no hay temor a confusión con la notación, así que será claro a qué intersección nos refiramos.

Definición 3.1.3. Sea $\langle C_a : a \in A\rangle$ una familia de subconjuntos club en $P_\kappa(A)$. Se define la **intersección diagonal** como el conjunto $\Delta_{a\in A} C_a := \{x \in P_\kappa(A) : x \in \bigcap_{a\in x} C_a\} = \{x \in P_\kappa(A) : \forall a \in A(a \in x \to x \in C_a)\}$.

Tenemos el análogo a 2.1.15,

Lema 3.1.6. *Suponga que κ es un cardinal regular no numerable. Si $\langle C_\alpha : \alpha \in A\rangle$ es una familia de conjuntos clubs en $P_\kappa(A)$ entonces $\Delta_{a\in A} C_a$ es club en $P_\kappa(A)$.*

Demostración: Es fácil ver que es cerrado, sean $\alpha < \kappa$ y $\langle c_\xi : \xi < \alpha\rangle \subseteq \Delta_{a\in A} C_a$, defina $x := \sup_\xi c_\xi$, si $a \in x$ entonces $a \in c_\xi$ para algún ξ, esto implica que $c_\xi \in C_a$ pues $c_\xi \in \Delta_{a\in A} C_a$, que es lo que deseábamos. Veamos que $\Delta_{a\in A} C_a$ es no acotado. Sea $b \in P_\kappa(A)$, definamos recursivamente sobre ω una sucesión creciente $\langle x_n : n \in \omega\rangle \subseteq P_\kappa(A)$ como sigue: $x_0 := b$ y supongamos que ha sido definido x_n. Como C_α es no acotado, para cada $\alpha \in x_n$ podemos escojer un elemento x_n^α de tal forma que $x_n \subseteq x_n^\alpha$ y definimos $x_{n+1} := \bigcup\{x_n^\alpha : \alpha \in x_n\}$. Sea $y = \bigcup\{x_n : n \in \omega\}$, veamos que $y \in \Delta_{a\in A} C_a$ pues es claro que $b \subseteq y$; para todo $\alpha \in x_n$ tenemos que $y = \bigcup\{x_n^\alpha : n \in \omega\}$ pues si $\alpha \in x_n$ tenemos que $x_n \subseteq x_n^\alpha \subseteq x_{n+1}$. Ahora como cada C_α es cerrado y y es la unión de elementos de C_α tenemos que $y \in C_\alpha$ por lo tanto $y \in \Delta_{a\in A} C_a$. ■

Definición 3.1.4. Se dice que un conjunto $S \subseteq P_\kappa(A)$ es **estacionario en** $P_\kappa(A)$ si y sólo si para cada subconjunto club C se tiene que $S \cap C \neq \emptyset$.

Definición 3.1.5. Sea $S \subseteq P_\kappa(A)$ un conjunto estacionario. Decimos que $f : S \to P_\kappa(A)$ es **regresiva** si para cada $x \in S$ tenemos que $f(x) \in x$.

Tenemos nuestro propio teorema de Fodor, debido a Jech:

Teorema 3.1.7 (Jech, 1971). *Sea S un conjunto estacionario y f una función regresiva, tenemos que existe $a \in A$ de tal forma que $f^{-1}[\{a\}]$ es estacionario.*

Demostración: Supongamos que no, entonces para cada $a \in P_\kappa(A)$ tenemos que $f^{-1}[\{a\}]$ no es estacionario, sea C_a club que testifica esto, i.e $C_a \cap f^{-1}[\{a\}] = \emptyset$. Sea además $C := \Delta_{a\in A} C_a$. Tomemos un elemento $x \in C$, $f(x) \in P_\kappa(A)$ y como f es regresiva $f(x) \in x$ y $x \in C_{f(x)}$ pues $x \in C$, esto implica que $x \in C_{f(x)} \cap f^{-1}[\{f(x)\}]$, una contradicción. ■

Antes de seguir con los teoremas importantes, veremos algunas formas de pasar de los clubs sobre un cardinal y los clubs sobre los $P_\kappa(\kappa)$.

Teorema 3.1.8. *Sea κ un cardinal regular y no numerable. Suponga que C es club en $P_\kappa(\kappa)$. Tenemos que $C \cap \kappa$ es club en κ.*

Demostración: Observe que esto tiene sentido gracias a 3.1.2, ahora suponga que $\alpha < \kappa$ es un punto límite de $C \cap \kappa$. Sea $\langle \beta_\xi : \xi < cf(\alpha)\rangle$ una cadena de elementos de $C \cap \kappa$ que converja a α, así $\alpha \in C$ y $\alpha \in \kappa$ porque κ es regular. Sea $\alpha < \kappa$, como C es no acotado, existe $y_0 \in C$ tal que $\alpha \subseteq y_0$, además $y_0 \in P_\kappa(\kappa)$ y definamos $\beta_0 = \bigcup y_0 < \kappa$, continúe así para formar una sucesión $y_0 \subseteq \beta_0 \subseteq y_1 \subseteq \ldots$, tome la unión de esta sucesión y éste es un elemento de C menor que κ por la regularidad de κ así C es no acotado. ■

Teorema 3.1.9. *Sea κ un cardinal regular y no numerable. Suponga que C es club en κ. Tenemos que $C^* := \{X \in P_\kappa(\kappa) : \bigcup X \in C\}$ es club en $P_\kappa(\kappa)$.*

Demostración: Sea $\alpha < \kappa$, tomemos una α-cadena de elementos de C^*, digamos, $\langle C_\xi : \xi < \alpha\rangle$. Tenemos que $\langle \bigcup C_\xi : \xi < \alpha\rangle$ es una sucesión de elementos de C por lo que $\bigcup \bigcup C_\xi \in C$ esto implica que $\bigcup C_\xi \in C^*$ como deseábamos.

Ahora suponga que $Y \in P_\kappa(\kappa)$, tenemos que $\bigcup Y < \kappa$ por lo que podemos encontrar un elemento $\alpha \in C \cap Lim(\kappa)$ con $\bigcup Y < \alpha$ ya que ambos son clubs en κ, $\alpha \in C^*$ ya que $\bigcup \alpha = \alpha \in C$. Por lo tanto $Y \subseteq \bigcup Y \subseteq \alpha$ con lo que C^* es no acotado. ■

Teorema 3.1.10. *Sean κ un cardinal regular y no numerable y $S \subseteq P_\kappa(\kappa)$ un estacionario. Entonces $S' := \{\bigcup X : X \in S\}$ es estacionario en κ.*

Demostración: Sea C club en κ, por lo anterior $C^* \cap S \neq \emptyset$ entonces existe $X \in C^* \cap S$ es decir, $\bigcup X \in C \cap S'$. ■

Podemos mejorar la segunda parte del teorema 3.1.2 y extenderla a todos los estacionarios:

Teorema 3.1.11. *Sea $S \subseteq \kappa$ estacionario, entonces $S \subseteq P_\kappa(\kappa)$ es estacionario.*

Demostración: Sea $C \subseteq P_\kappa(\kappa)$ club, por lo anterior $C \cap \kappa \subseteq C$ es club y así $C \cap S$ es no vacío. ■

Una vez que ya vimos las maneras de pasar entre clubs nuevos y viejos procedemos a seguir con nuestro estudio de las propiedad importantes, una de ellas es aquélla de ser dirigido:

Definición 3.1.6. Decimos que D es **$\subseteq$-dirigido** si para cualquesquiera $x, y \in D$ existe $z \in D$ de tal forma que $x \cup y \subseteq z$.

Lema 3.1.12. *C es cerrado en $P_\kappa(A)$ si y sólo si para cualquier subconjunto D de C que sea $\subseteq$-dirigido y $|D| < \kappa$ tenemos que $\bigcup D \in C$.*

Demostración: Suponga que C es cerrado bajo uniones dirigidas, tenemos que cualquier cadena creciente de C es $\subseteq$-dirigida y así su unión está en C. Suponga ahora que C es cerrado, veamos que es cerrado bajo uniones dirigidas. Sea D un dirigido en C con $|D| = \lambda < \kappa$ y enumeremos D, digamos, $D = \{d_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Construyamos recursivamente una cadena $\{e_\alpha : \alpha < \lambda\}$ en D como sigue: $e_0 = d_0$, $e_{\alpha+1}$ cualquier cota superior en D del conjunto $\{e_\alpha, d_\alpha\}$ y si α es límite, sea $e_\alpha = \bigcup\{e_\alpha : \beta < \alpha\}$ el cual está en C, porque C es cerrado. Tenemos que $\bigcup\{d_\alpha : \alpha < \lambda\} = \bigcup\{e_\alpha : \alpha < \lambda\} \in C$. ■

Definición 3.1.7. Decimos que una función f es **generadora** si es de la forma $f : [A]^{<\omega} \to P_\kappa(A)$. Una **operación sobre A** es una función f, de la forma $f : [A]^{<\omega} \to A$. Si $f : [A]^{<\omega} \to P_\kappa(A)$ es una función generadora decimos que un conjunto $x \in P_\kappa(A)$ es un **punto de cerradura de f** si $f(e) \subseteq x$ siempre que $e \subseteq x$. Dada una operación f, decimos que un elemento de $x \in [A]^{<\omega}$ es un **punto de cerradura** si $f(e) \in x$ siempre que $e \in [x]^{<\omega}$. Denotamos al conjunto de puntos de cerradura de f por Cl_f.

Lema 3.1.13. *Cl_f es club para cualquier f generadora.*

Demostración: Sean f una función generadora y $\alpha < \kappa$, veamos que Cl_f es cerrado, tome $D = \{d_\xi : \xi < \alpha\}$ una cadena creciente de Cl_f, sea $e \subseteq \bigcup D$ finito, tenemos que $e \subseteq d_\xi$ para algún $\xi < \alpha$, entonces $f(e) \subseteq d_\xi \subseteq \bigcup D$. Por lo tanto Cl_f es cerrado. Sea $z \in P_\kappa(A)$, definamos recursivamente $y_0 := z$, suponga que y_{n-1} ha sido definido y sea $y_n := \{e \in P(z) \cap [A]^{<\omega} : f(e) \subseteq y_{n-1}\}$; es fácil ver que la sucesión es creciente y que $y := \bigcup_{n\in\omega} y_n$ es un elemento de Cl_f y así concluimos que Cl_f es no acotado. ■

Teorema 3.1.14 (**Menas, 1974**). *Para cualquier club C en $P_\kappa(A)$ existe una función generadora f tal que $Cl_f \subseteq C$.*

Demostración: Para cada $e \in [A]^{<\omega}$, defina Y_e por inducción sobre $|e|$, $Y_\emptyset := c_0$ con c_0 cualquier elemento de C infinito; $Y_e := \left(\bigcup_{h \subsetneq e} Y_h\right) \cup e$, donde $Y_h \in C$ y Y_h es infinito. Es claro que si $e \subseteq d$ entonces $Y_e \subseteq Y_d$. Sea $f : [A]^{<\omega} \to P_\kappa(A)$ la generadora dada por $f(e) = Y_e$. Veamos que $Cl_f \subseteq C$, sea $x \in Cl_f$, tenemos que $x = \bigcup\{f(e) : e \in [x]^{<\omega}\}$ es una unión dirigida de elementos de C, por 3.1.12 tenemos que $x \in C$. ■

Definición 3.1.8. Un filtro F sobre $P_\kappa(A)$ κ-completo se llama **normal** si y sólo si es cerrado bajo intersecciones diagonales y para cada $a \in A$ tenemos $\{x \in P_\kappa(A) : a \in x\} \in F$.

Corolario 3.1.15 (**Carr, 1982**). *El filtro club es el filtro normal κ-completo más pequeño sobre $P_\kappa(A)$.*

Demostración: Sea F un filtro normal κ-completo en $P_\kappa(A)$, denotemos por F^+ el conjunto de los conjuntos cuyo complemento no está en F(el complemento del ideal dual). Como F es normal, si tomamos $X \in F^+$ y $g : X \to [X]^{<\omega}$ tal que $g(x) \in [x]^{<\omega}$ entonces existe $e \in [X]^{<\omega}$ tal que $g^{-1}[\{e\}] \in F^+$. Suponga que existe $C \subseteq P_\kappa(A)$ club que no está en F. Entonces por el teorema anterior, existe una función generadora f tal que $Cl_f \subseteq C$ y por lo tanto $Cl_f \notin F$, así, su complemento X está en F^+. Para cada $x \in X$, defina $e_x := g(x) \in [x]^{<\omega}$. Tenemos que $f(e_x) \not\subseteq x$, considere $g : X \to [X]^{<\omega}$ y por lo anterior existe $a \in [X]^{<\omega}$ tal que $B := g^{-1}[\{a\}] = \{x \in X : f(a) \not\subseteq x\} \in F^+$ pero esto contradice el hecho de que $B^c := P_\kappa(A) \setminus B = (\{x \in X : f(a) \subseteq x\}) \bigcup (P_\kappa(A) \setminus X) \in F$ pues $B^c \supseteq \{x \in X : f(a) \subseteq x\} = \bigcap_{a \in f(a)} \{x \in X : a \in x\} \in F$. ■

Definición 3.1.9. Considere $X \in P_\kappa(B)$, $A \subseteq B$ con $|A| \geq \kappa$, llamamos **proyección** de X y denotamos por $X \upharpoonright A$ al siguiente conjunto:

$$X \upharpoonright A := \{x \cap A : x \in X\}.$$

Definición 3.1.10. Considere $X \in P_\kappa(A)$, $A \subseteq B$ y $|A| \geq \kappa$, llamamos **levantamiento** de X y denotamos por X^B al siguiente conjunto:

$$X^B := \{x \in P_\kappa(B) : x \cap A \in X\}.$$

El siguiente lema es fácil pero muy útil, dice que el levantamiento de un cerrado y no acotado es cerrado y no acotado.

Lema 3.1.16. *Sean $A \subseteq B$ y $C \in P_\kappa(A)$ un club, tenemos que C^B es club.*

Demostración: Sea $\mathscr{C}$ una cadena creciente de C^B. Entonces $A \cap (\bigcup \mathscr{C}) = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} (A \cap C) \in C$, por ser una cadena creciente de elementos de C. Sea $z \in P_\kappa(B)$, tenemos que $A \cap z \in P_\kappa(A)$ así existe $y \in C$ tal que $(A \cap z) \subseteq y$, tome $y' = y \cup (z \setminus A)$, $y' \cap A = (y \cap A) = y \in C$. Por lo tanto $y' \in C^B$ y $z \subseteq y'$ por lo que C^B es no acotado en $P_\kappa(B)$. ■

La siguiente proposición debida a Menas nos dice que los conjuntos estacionarios se preservan bajo proyecciones y levantamientos.

Proposición 3.1.17 (**Menas, 1975**). *Sea $A \subseteq B$.*

(I) *Si E es un conjunto estacionario en $P_\kappa(B)$ tenemos que $E \upharpoonright A$ es estacionario en $P_\kappa(A)$.*

(II) *Si E es un conjunto estacionario en $P_\kappa(A)$ tenemos que E^B es estacionario en $P_\kappa(B)$.*

Demostración: (I) Si C es cualquier club en $P_\kappa(A)$, tenemos que la extensión C^B es club en $P_\kappa(B)$ así $E \cap C^B \neq \emptyset$. Sea $x \in E \cap C^B$, así, $x \cap A \in (E \restriction A) \cap C$ por lo tanto $(E \cap C^B) = C \cap E \restriction A \neq \emptyset$.

(II) Basta con demostrar que la proyección de cualquier club C en $P_\kappa(B)$ contiene un club de $P_\kappa(A)$, dado que si $C \restriction A$ contiene un club entonces su intersección con E es no vacía y así $C \cap E^B = ((C \restriction A) \cap E)^B \neq \emptyset$. Sea C un club en $P_\kappa(B)$, sabemos que existe una función $f : [B]^{<\omega} \to P_\kappa(B)$ con $Cl_f \subseteq C$. Defina $g : [A]^{<\omega} \to P_\kappa(A)$ de la siguiente manera: $g(e) = Cl_f^e \cap A$, en donde $Cl_f^e = \bigcap_{e \in Cl_f} Cl_f$, así $Cl_f \restriction A = Cl_g$ y $Cl_g \subseteq C \restriction A$. ■

De hecho el teorema de Menas (3.1.14) se puede mejorar en el caso de que $\kappa = \aleph_1$, y es útil en la teoría de modelos y para lo que veremos más adelante. Note que podemos concentrar nuestra atención a los clubs de $[A]^\omega$, ya que deben ser infinitos.

Teorema 3.1.18 (Kueker, 1972). *El filtro de cerrados y no acotados sobre $P_{\omega_1}(A)$ está generado por Cl_F donde F es una operación sobre A.*

Demostración: Sin perder la generalidad podemos suponer que $A = \lambda$ con λ un cardinal infinito (lo cambiamos por su cardinalidad y la enumeración es una función normal por lo que respeta clubs), sea $C \subseteq [\lambda]^\omega$ club.

La demostración la haremos en dos pasos, primero encontraremos una función generadora que vaya de $f : [\lambda]^{<\omega} \to C$ y que $Cl_f \subseteq C$, después encontraremos una $F : [\lambda]^{<\omega} \to \lambda$ tal que $Cl_F \subseteq Cl_f$ y con esto habremos acabado.

Sea $f : [\lambda]^{<\omega} \to C$ definida de la siguiente manera, sea $e \in [\lambda]^{<\omega}$ y suponga que para todo $a \in [\lambda]^{<\omega}$ con $|a| = n$ y $n < m = |e|$ ha sido encontrado un conjunto $f(a) \in C$ infinito con la propiedad de que si $a_1 \subseteq a_2$ tenemos $f(a_1) \subseteq f(a_2)$; defina $f(e) = f(e \setminus \alpha_m) \bigcup \alpha_m$ con α_m el máximo elemento de e. Considere Cl_f es fácil ver que $Cl_f \subseteq C$ usando la técnica que usamos en 3.1.14. Como $f(e) \in C$, entonces $|f(e)| = \aleph_0$, sea $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ una enumeración del conjunto y sean $f_i(e) = \alpha_i$ "las proyecciones", considere cualquier función suprayectiva $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $g(n) = (k_n, m_n)$ y $m_n \leq n$.

Definamos la siguiente operación $F : [\lambda]^{<\omega} \to \lambda$, $F[\{\alpha\}] = \alpha + 1$ y si $|e| > 1$ definimos $F[\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}] = f_{k_n}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_n}\})$. Veamos que $Cl_F \subseteq Cl_f$, sea $x \in Cl_F$ y sea $e \in [x]^{<\omega}$ queremos ver que $f(e) \subseteq x$, es decir, $f_k(e) \in x$ para cada $k \in \omega$. Supongamos que $e = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ y que están ordenados de menor a mayor, elija $n \geq m$ tal que $k_n = k$ y $m_n = m$. Ahora podemos completar e hasta tener m elementos de manera creciente ya que x no tiene elemento más grande porque los unitarios van creciendo y ahora $f_k(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}) = F(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) \in x$. ■

Nota. Si $\kappa > \omega_1$ el resultado anterior no se generaliza, ya que el conjunto $\{x \in P_\kappa(A) : |x| \geq \aleph_1\}$ es club y no puede contener ningún conjunto Cl_f ya que contiene un elemento numerable. De hecho si agregamos el club creado en el teorema 3.1.3 sí que podemos generar el filtro de clubs. Hay otra generalización interesante con respecto a esto, se llaman los *clubs fuertes*, pero no discutiremos esto.

Nuestro estudio de modelos con clubs se verá a tráves del siguiente teorema que nos servirá más adelante para definir la noción de propiedad con modelos.

Proposición 3.1.19. *Sea $\mathscr{M}$ un modelo con $|M| \geq \aleph_0$, $E := \{N \in P_{\omega_1}(M) : N \prec M\}$ es club en $P_{\omega_1}(M)$.*

Demostración: Nos basaremos en el teorema 1.4.2. Sabemos que, dada una sucesión creciente de longitud $n \in \omega$ de E, su unión es elemental en M y no puede tener cardinalidad más grande que $\aleph_0$, por lo tanto E es cerrado.
Para demostrar que es no acotado, tome $X \subseteq P_{\omega_1}(M)$, como M es infinito, existe B tal que $X \subseteq B \subseteq M$, $B \prec M$ y $|B| = |X| + \aleph_0$, es decir, $B \in E$. ∎

Nota. El teorema de Solovay no se puede generalizar para nuestra noción de clubs en $P_\kappa(\lambda)$, resulta que $P_\kappa(\lambda)$ sí puede ser partido en κ conjuntos estacionarios pero esto es lo mejor posible como lo mostró Gitik.

Capítulo 4

Equivalencias de que $\mathbb{B}$ sea propia

4.1. Juegos infinitos y más sobre álgebras booleanas

En está sección daremos las definiciones que nos ayudaran al teorema de nuestro interés, empezando por la noción de juego infinito sobre un álgebra booleana. Cuando hablemos del álgebra booleana $\mathbb{B}$ se sobreentederá que el conjunto dominio es B.

Definición 4.1.1. Un **juego infinito sobre B** es una tupla $\langle B, \Gamma, \Phi, W\rangle$ donde B es el dominio de un álgebra booleana, Γ, Φ, son sucesiones infinitas de conjuntos: $\Gamma = \langle \Gamma_0 := B, \Gamma_1, \ldots\rangle$, $\Phi = \langle \Phi_0, \Phi_1, \ldots\rangle$, donde $\Phi_0 \subseteq B$ y depende de algún $a_0 \in B$, $\Gamma_1 \subseteq B$ y depende de algún $b_0 \in \Phi_0$ y así sucesivamente; W es un conjunto con las condiciones de victoria.

La esencia de los juegos infinitos sobre algún álgebra $\mathbb{B}$ es, escoger un elemento p no cero en el álgebra, luego jugar algún subconjunto o elemento que tenga relación con p, el siguiente jugador responde con algún subconjunto o elemento que tenga que ver con lo que el jugador anterior jugó y así se siguen hasta el infinito donde se determina quién gana.

Definición 4.1.2. Definimos una **jugada** como la sucesión $z = \langle \gamma_0, \phi_0, \gamma_1, \phi_1, \ldots\rangle$ con $\gamma_n \in \Gamma_n$ y $\phi_n \in \Phi_n$. El **juego parcial al movimiento n** es $z \restriction n+1$.

Usualmente se les llama juegos infinitos de dos jugadores. Llamémosle I y II a los jugadores, intuitivamente una jugada en las entradas pares nos dice lo que juega el jugador I y en las impares lo que juega el jugador II. Si $G = \langle B, \Gamma, \Phi, W\rangle$ es un juego infinito lo abreviamos por G ya que en nuestros juegos el conjunto B será el dominio del álgebra booleana en cuestión y los Γ_n y Φ_n serán ciertos subconjuntos del álgebra. También denotamos $z_I := (z(i))_{i\equiv 0(mod2)}$ y $z_{II} = (z(i))_{i\equiv 1(mod2)}$.

Obviamente lo más importante en un juego es que alguien gane, las condiciones de victoria dependerán del juego en cuestión. Por ahora nos conformaremos con la siguiente definición:

Definición 4.1.3. Sea G un juego, decimos que **el jugador I gana la partida** si la jugada final satisface las condiciones de victoria.

Definición 4.1.4. Sea G un juego. Una **estrategia para I en** G es una función σ del conjunto de todas las posibles jugadas y nos da una jugada para I, decimos que **I juega de acuerdo a** σ si en el turno $2n$, I juega $\sigma(2n)$ y la sucesión resultante de jugar el juego se denota $\sigma * z_I$. Una **estrategia ganadora** es una estrategia σ tal que I gana con la jugada final $\sigma * z$ donde z es cualquier jugada. Análogamente, decimos que τ es una estrategia para II si nos dice que jugar en el turno $2n+1$ y si II juega $\tau(2n+1)$ decimos que II juega según τ, también denotamos $\tau * z_{II}$ a la sucesión que resulta de jugar con τ. Similarmente al caso para I, definimos que τ es una estrategia ganadora para II.

De igual manera la estrategia dependerá totalmente del juego en cuestión así que la definición anterior nos basta. Veamos algunas definiciones importantes que necesitaremos para álgebras booleanas, recuerde que sobre cualquier álgebra booleana tenemos asociado un orden parcial natural.

Definición 4.1.5. Sea $\mathbb{B}$ un álgebra booleana, recordemos que dos elementos $u, v \in B$ son **compatibles** si y sólo si $u \cdot v \neq 0$. Y son **incompatibles** en otro caso, es decir, si la única cota inferior común es el cero.

Denotamos la incompatibilidad con $\perp$ y la compatibilidad con $\|$. Observe que si dos elementos no cero son comparables entonces son compatibles. La siguiente definición es muy importante nos habla de un subconjunto muy especial del álgebra booleana en el cual los elementos "aparecen casi en todas partes" y nuestro interés principal será en este tipo de subconjuntos pero "maximales".

Definición 4.1.6. Sea $\mathbb{B}$ un álgebra booleana, decimos que $A \subseteq B^+$ es una **anticadena** si para cada u,$v \in A$ y $u \neq v$ tenemos que $u \cdot v = 0$ ($u \perp v$). Además decimos que A es **anticadena maximal bajo p o partición de p**, si es anticadena y además $\sum A = p$.

Con esta definición una anticadena maximal o partición es simplemente una partición del 1. Una anticadena es un subconjunto más que incomparable, algunos autores llaman *anticadenas fuertes* a lo que nosotros llamamos solo anticadenas y usan el término anticadena para referise a la más natural definición: un subconjunto totalmente incomparable; en este sentido nuestras anticadenas sí son más fuertes.

Proposición 4.1.1. *Sea $A \subseteq B$ una anticadena entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *A es partición.*

(II) *$\forall b \in B^+ \exists a \in A (b \| a)$.*

(III) *A es $\subseteq$-maximal con respecto a ser anticadena.*

Demostración: $\neg III) \implies \neg I)$ Sea J anticadena tal que $A \subsetneq J$, sea $j \in J \setminus A$ tenemos que $A \cup \{j\}$ es anticadena, así $j \cdot a = 0$ para todo $a \in A$ pero esto pasa si y sólo si $a \leq -j$ para cada $a \in A$, como $j \neq 0$ entonces $-j \neq 1$. Por lo tanto $\sum A < 1$.

$\neg II) \implies \neg III)$ Sea $b \in B^+$ tal que para cada $a \in A$ $a \perp b$, tenemos que $b \notin A$ pues $b||b$ y por lo tanto $A \cup \{b\}$ es anticadena.

$\neg I) \implies \neg II)$ Supongamos que $\sum A \neq 1$, esto significa que, o bien $\sum A < 1$ o $\sum A$ no existe. En cualquier caso, 1 no es la mínima cota superior de A, pero siempre es cota superior, así pues, existe $b < 1$, cota superior de A. Tenemos que $-b \neq 0$ y $-b$ es incompatible con todo elemento a de A pues $a \cdot -b \leq b \cdot -b = 0$.

■

No es cierto que toda anticadena maximal en un subálgebra es anticadena maximal en el álgebra. Es fácil dar un ejemplo sencillo de esto:

Ejemplo 6. Sea $B = P(\omega)$ y $S = \{X \subseteq \omega : X \text{ es finito y } 0 \notin X\} \cup \{X \subseteq \omega : X \text{ es infinito y } 0 \in X\}$. Es fácil ver que es un subálgebra además tenemos que $A = \{\{n\} : n > 0\}$ es una anticadena en A, como la suma es la unión pero sin salirnos de S tenemos que $\sum_S W = \omega$ pero $\sum_{P(\omega)} W = \omega \setminus \{0\}$.

El ejemplo anterior nos muestra que hay álgebras un poco raras que no respetan las anticadenas maximales y esta es una propiedad deseada, esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.1.7. Un subálgebra A de un álgebra B es un subálgebra **regular** si toda anticadena maximal en A resulta que ser anticadena maximal en B.

Es más útil para nuestros fines, que existan siempre los supremos e ínfimos, será esto por lo que consideraremos álgebras booleanas completas. Fijemos a partir de aquí un álgebra booleana $\mathbb{B}$ completa.

Definición 4.1.8. $D \subseteq B^+$ se dice que es un **predenso** si para cada $b \in B$ existe un $d \in D^+$ tal que $b \parallel d$. Y decimos que D es **predenso bajo b** si para cada $x \leq b$ existe $y \in D$ tal que $x \parallel y$.

Observación 6. Todo denso es predenso, de hecho, toda anticadena maximal es predensa[1]. Si D es predenso bajo p entonces D es predenso bajo q para cada $q \leq p$.

Definición 4.1.9. Sean λ un cardinal y $b \in B \setminus \{0\}$. Decimos que $A = \{a_{\alpha\beta} : \alpha, \beta < \lambda\}$ es una **matriz de particiones de** b si al fijar α, $\{a_{\alpha\beta} : \beta < \lambda\}$ es una partición de b.

Las matrices de particiones nos serán de utilidad más adelante. Primero que nada juguemos sobre $\mathbb{B}$, para poder presentar el juego propio y sea más natural; presentaremos algunos juegos preliminares para que el lector se vaya familiarizando con ellos.

[1]Más es cierto, gracias a 4.1.1, se cumple el regreso.

Definición 4.1.10. Llamaremos **el juego descendente de cadena** o simplemente $\mathfrak{G}_0$ al juego jugado por dos jugadores I y II de tal forma que eligen sucesivamente elementos no cero de B y forman una cadena descendente, digamos $a_0 \geq b_0 \geq a_1 \geq b_1 \dots a_n \geq b_n \dots$. El jugador I gana si y solo si $\prod a_n = 0$ y II gana en otro caso.

Queremos encontrar condiciones bajo las cuales, en los juegos que vamos a estudiar, existan estrategias ganadoras para uno u otro jugador.

Para este juego, será la única ocasión que definiremos formalmente los siguientos conceptos, en los demás juegos usaremos nuestra imaginación, sólo hay que aclarar que siempre podemos definirlas bien. En el juego $\mathfrak{G}_0$ una estrategia para I es una función $\phi : \bigcup_{n\in\omega} B^{2n} \to B$ tal que $\phi(\langle a_0, b_0, \dots, a_n, b_n\rangle) \leq b_n$ y $\phi(\langle\rangle) =: a_0$, decimos que I juega de acuerdo a ϕ si en cada movimiento $a_n = \phi(\langle a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\rangle)$. Una estrategia ganadora para I en $\mathfrak{G}_0$ es una estrategia ϕ tal que para cualquier jugada z_{II} de II si I juega de acuerdo a ϕ entonces gana, i.e, $\prod_{n\in\omega} \phi(\langle a_0, z_{II}(0), a_1, z_{II}(1) \dots, a_{n-1}, z_{II}(n-1)\rangle) = 0$ con $a_i = \phi(\langle a_0, z_{II}(0), a_1, z_{II}(1) \dots, a_{i-1}, z_{II}(i-1)\rangle$ para cada $i < n$. Análogamente una estrategia para II es una función $\psi : \bigcup_{n\in\omega} B^{2n+1} \to B$, definimos de manera análoga el que II juegue según ψ y las estrategias ganadoras para II.

Definición 4.1.11. $\mathbb{B}$ es **ω-distributiva** si para cada cardinal λ y cualquier colección $\{a_{\alpha\beta} : \alpha < \omega, \beta < \lambda\}$ de elementos de B, se tiene que:[2]

$$\prod_{\alpha<\omega} \sum_{\beta<\lambda} a_{\alpha\beta} = \sum_{f:\omega\to\lambda} \prod_{\alpha<\omega} a_{\alpha\, f(\alpha)}$$

como el álgebra booleana es completa las sumas y productos existen siempre.

Solo utilizaremos las siguientes definiciones en el siguiente lema y proposición, por lo que las juntaremos:

Definición 4.1.12. Sean U y V dos particiones en el álgebrea $\mathbb{B}$ decimos que U **refina a V o que U es refinamiento de V** si para cada $u \in U$ existe $v \in V$ tal que $u \leq v$. Decimos que un subconjunto $D \subseteq B$ es **denso abierto** si es denso y si $0 \neq d \in D$ y $b \leq d$ entonces $b \in D$.

Con un proceso de ajenización usual, se pueden construir anticadenas numerables de cualquier subconjunto infinito y más aún se puede hacer de tal manera que sea menor (elemento a elemento) que algún subconjunto numerable del conjunto en cuestión. También se podría construir una anticadena maximal de B contenida en un denso.

Lema 4.1.2. *Para un álgebra booleana completa $\mathbb{B}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) $\mathbb{B}$ *es ω-distributiva.*

[2] Note que la desigualdad $\geq$ siempre es cierta.

(II) *Toda familia de densos abiertos con tamaño a lo más ω tiene intersección densa abierta.*

(III) *Toda familia de particiones $\{W_\alpha : \alpha < \omega\}$ tiene un refinamiento común.*

Demostración: $(I) \Rightarrow (II)$ Sean $D_n, n \in \omega$ densos abiertos y $D = \bigcap_{n\in\omega} D_n$, es trivial ver que es abierto. Ahora sea $b \in B^+$, fijémonos en la familia $A_n := \{b \cdot d : d \in D_n\}$ y $A_n = \{a_{n\beta} : \beta < \lambda\}$ una enumeración de la misma, observamos que $\sum A_n = b$ para cada n. Para este λ tenemos que

$$\prod_{n\in\omega} \sum_{\beta<\lambda} a_{n\beta} = b$$

definamos para cada $f : \omega \to \lambda$, $b_f = \prod_n a_{n\ f(n)}$, claramente cada b_f que sea distinto de cero estará en D, por ω-distributividad tenemos $b = \sum_f b_f$; podemos concluir que algún b_f es no cero y por lo tanto está en D, así D es denso.

$(II) \Rightarrow (III)$ Sean $\{W_n : n \in \omega\}$ una familia de particiones de $\mathbb{B}$, defina $D_n := \{x \in B : \exists w \in W_n (x \leq w)\}$ es fácil ver que D_n es denso abierto para cada n. Tome $D = \bigcap_n D_n$, podemos construir W una anticadena maximal de elementos de D, esta partición es el refinamiento buscado.

$(III) \Rightarrow (I)$ Sea λ un cardinal y $\{a_{n\beta} : \beta < \lambda\} \subseteq B$, es claro que

$$\sum_f \prod_n a_{n\ f(n)} \leq \prod_n \sum_\beta a_{n\beta}.$$

Por lo que basta demostrar

$$\prod_n \sum_\beta a_{n\beta} \leq \sum_f \prod_n a_{n\ f(n)}.$$

Fijemos $n \in \omega$, sea $W_n = \{b_{n\beta} : \beta < \lambda\}$ una anticadena que satisface que para todo $\beta < \lambda$ existe γ tal que $b_{n\beta} \leq \alpha_{n\gamma}$ y además que sea maximal respecto a ésta propiedad. Así $\sum_{\beta<\lambda} a_{n\beta} = \sum_{\beta<\lambda} b_{n\beta}$.
Sea W refinamiento común de las W_n, maximal con esa propiedad también. Como W refina a W_n, $\sum W \leq \sum W_n$ para toda n, y por maximalidad, tenemos que $\prod_n \sum W_n \leq \sum W$. Por lo tanto $\sum W = \prod_n \sum_\beta a_{n\beta}$.
Por otro lado, si $w \in W$, sea $f : \omega \to \lambda$ tal que para cada n, $w \leq a_{n\ f(n)}$. Así $w \leq \prod_n a_{n\ f(n)}$, concluimos que $\sum W \leq \sum_f \prod_n a_{n\ f(n)}$. ∎

Proposición 4.1.3. *I tiene estrategia ganadora en $\mathfrak{G}_0$ si y sólo si $\mathbb{B}$ no es ω-distributiva.*

Demostración: Suponga que I tiene estrategia ganadora digamos ϕ, sea $a_0 := \phi(\langle\rangle)$, crearemos particiones W_n de a_0 sin un refinamiento común. Las construiremos recursivamente, sea $W_0 = \{a_0\}$, suponga que se han construido $W_0, \ldots, W_{n-1}$, crearemos W_n de tal manera que sea una anticadena maximal bajo a_0, considere el conjunto

$$S_n := \{f \in B^{2n} : \forall i < n(f(i+1) \leq f(i)) \wedge \forall 0 \leq k < n(f(2k) \in W_k)\}$$

ahora tome W_n una anticadena maximal bajo a_0 contenida en $\phi[S_n]$, es fácil ver que W_{n+1} refina a W_n para cada n y que si tuviéramos un refinamiento común este deberá contener al 0 pues ϕ es ganadora, por lo tanto $\mathbb{B}$ no es ω-distributiva.

Suponga que $\mathbb{B}$ no es ω-distributiva, entonces existe a_0 y D_n densos abiertos bajo a_0 tales que $\bigcap_{n\in\omega} D_n = \emptyset$. Definimos la estrategia ganadora para I como sigue: $\sigma(\langle\rangle) = a_0$, para $n \in \omega$ y $f \in B^{2n}$ sea $\phi(f) \in D_n$ con $\phi(f) \leq f(2n)$. Esta es una estrategia ganadora para I pues siempre jugamos elementos de los densos que por ser abiertos, si hubiera una cota inferior distinta de cero debe de estar en la intersección, por lo que el ínfimo debe ser el 0. ■

Es cierto que si B es ω-*cerrada*, i.e., para $\alpha \leq \omega$ toda sucesión decreciente de tamaño α tiene una cota inferior no cero, entonces II tiene estrategia ganadora. Foreman demostró que el recíproco es cierto para álgebras pequeña, cuando $|B| \leq \aleph_1$. Si el recíproco es cierto en general es un tema de muy gran interés.

Ahora entraremos en algunos juegos más interesantes que el juego de cadena descendente, el llamdado juego de *cortar y elegir*:

Definición 4.1.13. Llamaremos **el juego de cortar y elegir** o simplemente $\mathfrak{G}_1$ al juego jugado por dos jugadores I y II de tal manera que el jugador I escoge un elemento $p \in B^+$ y una anticadena maximal T_0 de p, el jugador dos elige $t_0 \in T_0$ y luego I escoge T_1 partición de p. Así formamos una cadena: $T_0, t_0, T_1, t_1 \ldots T_n, t_n \ldots$. II gana el juego si y solo si $\{t_n\}$ tiene una cota inferior no cero.

Decimos que un juego G_1 es más fácil de jugar para $I(II)$ que el juego G_2 si el que $I(II)$ tenga estrategia ganadora en G_2 implica que la tenga en G_1 y si $II(I)$ no tiene estrategia ganadora en G_1 implica que no la tenga en G_2. Decimos que G_1 y G_2 son **equivalentes** si y sólo si G_1 es más fácil de jugar para $I(II)$ que G_2 y G_2 es más fácil de jugar para $I(II)$ que G_1, denotamos equivalencia por $\equiv$.

Observación 7. $\equiv$ es relación de equivalencia. Es claro que $G_1 \equiv G_1$ y que si $G_1 \equiv G_2$ entonces $G_2 \equiv G_1$. Ahora si G_1, G_2, G_3 son juegos tales que $G_1 \equiv G_2$ y $G_2 \equiv G_3$ entonces G_1 es más fácil de jugar para $I(II)$ que G_2 y viceversa, también G_2 es más fácil de jugar para $I(II)$ que G_3 y viceversa. Si $I(II)$ tiene estrategia ganadora en G_3 entonces $I(II)$ tiene estrategia ganadora en G_2 y por lo tanto en G_1; si $II(I)$ no tiene estrategia ganadora en G_1 entonces no la tiene en G_2 y por lo tanto no la tiene en G_3. Esto muestra que G_1 es más fácil de jugar para $I(II)$ que G_3. Un razonamiento análogo muestra que G_3 es más fácil de jugar para $I(II)$ que G_1. Concluimos que $G_1 \equiv G_3$.

Tenemos el siguiente resultado sobre los juegos $\mathfrak{G}_1$ y $\mathfrak{G}_0$:

Teorema 4.1.4 (Jech, 1978; Veličković, 1986). $\mathfrak{G}_1 \equiv \mathfrak{G}_0$.

Demostración: No mostraremos que I tiene estrategia ganadora en $\mathfrak{G}_1$ si y sólo si $\mathbb{B}$ es ω-distributiva. Ya que es muy parecido a lo que hicimos con $\mathfrak{G}_0$.[3]

[3]Esto es parte de un teorema más general de Jech en el cual podemos "cortar en más pedazos",

Suponga que II tiene estrategia ganadora σ en $\mathfrak{G}_0$, construiremos una estrategia Σ para II en $\mathfrak{G}_1$. Sea $p \in B^+$, el jugador I juega W_0 una anticadena maximal de p y sea $b_0 := \sigma(\langle p \rangle)$, como W_0 es maximal, existe $w_0 \in W_0$ con $b_0 \cdot w_0 \neq 0$, definimos $\Sigma(\langle W_0 \rangle) = w_0$, en general cuando I juega W_n, II escoge $w_n \in W_n$ tal que $b_n \cdot w_n \neq 0$ y $b_n := \sigma(\langle p, b_0, b_0 \cdot w_0, b_1, b_1 \cdot w_1, , b_2, \ldots, b_{n-1} \cdot w_{n-1})$ y dejamos que $\Sigma(\langle p, W_0, w_0, W_1, \ldots, W_n \rangle) = w_n$; no es difícil convencerse de que Σ es una estrategia ganadora para II en $\mathfrak{G}_1$, ya que σ lo es para $\mathfrak{G}_0$.

Ahora suponga que II tiene estrategia Σ en $\mathfrak{G}_1$, I escoge $p \in B^+$, notemos que existe $b_0 \leq p$ tal que: para cualquier $m \leq b_0$ existe una partición W de p con $m = \Sigma(\langle p, W \rangle)$; esto es cierto ya que si no fuera cierto, el conjunto

$$D = \{b \in B : b \leq a_0 \land \forall W \text{ partición de p } (u \neq \Sigma(\langle p, W \rangle))\}$$

sería claramente denso bajo p y por lo tanto sería predenso y podemos encontrar una anticadena y extender para obtener una partición Z, este Z sería tal que $\Sigma(\langle p, Z \rangle) \in Z$ pero $\Sigma(\langle p, Z \rangle) \notin Z$ una contradicción. Ahora defina $\sigma(\langle p \rangle) = b_0$, cuando I juega $a_1 \leq b_0$, por lo anterior, existe W_0 partición de a_1 tal que $a_1 = \Sigma(\langle p, W_0 \rangle)$ y con un argumento similar al anterior existe $b_1 \leq a_1$ con la propiedad de que para cada $m \leq b_1$ existe una partición W de a_1 con $m = \Sigma(\langle p, W_0, a_1, W \rangle)$ y definimos $\sigma(\langle p, b_0, a_1 \rangle) := b_1$ y seguimos inductivamente. Es fácil ver que es una estrategia ganadora para II en $\mathfrak{G}_0$. ∎

Definición 4.1.14. Llamaremos **el juego de elecciones numerables** o $\mathfrak{G}_\omega$, al juego jugado de tal manera que I selecciona $p \in B^+$ y en su turno elije una anticadena maximal T_n de p, el jugador II responde con un subconjunto numerable C_n de T_n. II gana si y solo si $\prod_{n=0}^{\infty} \sum\{u : u \in C_n\} \neq 0$.

Es fácil demostrar que el juego $\mathfrak{G}_\omega$ es más fácil de que jugar para II que $\mathfrak{G}_1$.

Observación 8. En el juego $\mathfrak{G}_\omega$ podemos reformular la conclusión de gane para II de la siguiente manera:

$$\exists q \leq p \forall n (q \neq 0 \land T_n \text{ es predenso bajo q})$$

esto es fácil de establecer ya que si suponemos esta, es obvio que se satisafce la primera. Si suponemos la primera basta con observar que si $q \leq \delta$ y A es predenso bajo δ entonces lo es bajo q.

Variando un poco el juego de elecciones numerables enunciaremos nuestro juego favorito, el propio:

---

sea κ un cardinal, llamamos el juego de *κ-cortar y elegir ó* $\mathfrak{G}_{\kappa,0}$ al juego jugado por dos jugadores en el que I escoge $p \in B^+$ y una anticadena maximal de cardinalidad menor o igual que κ y II un elemento en ella y se sigue como en el usual; además podemos generalizar nuestra propiedad de ω-distributividad a, digamos, (ω, κ)-distributividad: I tiene estrategia ganadora en $\mathfrak{G}_{\kappa,0}$ si y sólo si $\mathbb{B}$ no es (ω, κ)-distributiva.

Definición 4.1.15 (Gray, 1980; Shelah, 1980). El juego **propio** o $\mathfrak{G}$ es el siguiente juego: I elije $p \in B^+$, y en el turno n juega una partición[4] W_n de p y II responde con un subconjunto numerable $C_i^n \subseteq W_i$ para cada $i \leq n$. II gana si y solamente si:

$$\exists q \leq p \forall n \in \omega (q \neq 0 \wedge \bigcup_{k=n}^{\infty} C_n^k \text{ es predenso bajo q}).$$

Proposición 4.1.5. *$\mathfrak{G}$ es más fácil de jugar para II que $\mathfrak{G}_\omega$.*

Demostración: Suponga que II tiene estrategia ganadora σ en $\mathfrak{G}_\omega$, es fácil crear una estrategia ganadora Σ en $\mathfrak{G}$ simplemente jugando $C_i^n = C_n$ para cada i. Ahora suponga que I tiene estrategia ganadora σ en $\mathfrak{G}$. Para construir una en $\mathfrak{G}_\omega$ basta con jugar B_n^n si $\sigma(\langle p, W_0, W_1, \ldots, W_n) = (B_0^n, \ldots, B_n^n)$, ésta es una estrategia ganadora en $\mathfrak{G}_\omega$ para I. ■

Abreviamos en esta ocasión II tiene estrategia ganadora en el juego G por II^*G, en resumen tenemos:

$$II^*\mathfrak{G}_0 \iff II^*\mathfrak{G}_1 \implies II^*\mathfrak{G}_\omega \implies II^*\mathfrak{G}.$$

Esto será todo nuestro desarrollo de juegos infinitos sobre álgebras booleanas, para más detalles y más teoría puede consultar, por ejemplo, [32].

Retomaremos a los submodelos elementales pero ahora de una manera más específica. Recuerde que un conjunto x es transitivo si $y \in x$ implica $y \subset x$, denotaremos por $\mathcal{H}_\lambda$ al conjunto de todos los conjuntos λ-hereditarios, es decir, $\mathcal{H}_\lambda = \{x : |ctr(x)| < \lambda\}$, donde $ctr(x) := \bigcap\{T : x \subseteq T \wedge T \text{ es transitivo}\}$ es la *cerradura transitiva*[5] de x. Nos enfocaremos en los submodelos elementales de $(\mathcal{H}_\lambda, \in)$ cuando λ es regular y no numerable, este es casi un modelo de ZFC salvo por el axioma del conjunto potencia en el caso de que λ es inaccesible este sí que es modelo de ZFC. Pero en esencia sí lo es así que sus submodelos elementales son casi modelos y nos dicen cosas verdaderas de un buen fragmento de ZFC. Nos interesarán los modelos del lenguaje de la teoría de conjuntos (las fórmulas atómicas son $x \in y$ y $x = y$), los de la forma $\mathfrak{A} = (A, \in)$ así que omitiremos el $\in$.

Definición 4.1.16. Sea $\phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ una fórmula con $a_1, \ldots, a_n \in A$. Decimos que a **es definible con** $a_1, \ldots, a_n$ **por la fórmula** $\phi(x, a_1 \ldots, a_n)$ si a es el único elemento en A tal que $\mathfrak{A} \models \phi(a, a_1, \ldots, a_n)$.

Si $B \prec A$ y $a \in A$ está definido por la fórmula $\phi(x)$ entonces $a \in B$ pues el enunciado $\exists x \phi(x)$ es verdadero en A por lo tanto en B así que existe $b \in B$ tal que $\phi(b)$ es verdadera en B como B es elemental $\phi(b)$ es verdadera en A por lo que $b = a$. De esta discusión se sigue que si λ es no numerable y $N \prec \mathcal{H}_\lambda$, entonces $\omega \in N$.

[4] Se podría jugar con predensos o densos.

[5] Equivalentemente, la cerradura transitiva de un conjunto x es el conjunto que tiene a x, a los elementos de x, a los elementos de los elementos de x, etc.

Teorema 4.1.6. *Sean λ un cardinal regular y no numerable, y $N \prec \mathcal{H}_\lambda$, con N numerable. Entonces para cada conjunto x numerable, si $x \in N$ entonces $x \subseteq N$.*

Demostración: De lo anterior tenemos que $\omega \in N$ como x es numerable existe f tal que lo testifica. Además es fácil ver que cada $n \in \omega$ es definible por lo que $n \in N$. Tenemos que $\exists f(f : \omega \to x$ es función suprayectiva) es verdadero en $\mathcal{H}_\lambda$ y como $x, \omega \in N$ este enunciado también es verdadero en N por lo que $f \in N$, pero $f, n \in N$ así que $f(n) \in N$ pues f está definida a partir de f y n. Por lo tanto $x \subseteq N$. ■

Definición 4.1.17. Diremos que λ es **un cardinal suficientemente grande** si λ es un cardinal regular y se cumple

$$\lambda > |\{D \subseteq B : D \text{ es una anticadena maximal}\}|.$$

Lo que esconde esta definición es que tendremos todo lo que necesitamos en $\mathcal{H}_\lambda$ para poder desarrollar nuestra teoría.

Observación 9. Sea λ un cardinal regular no numerable y considere el modelo $\mathbb{H}_\lambda = \langle \mathcal{H}_\lambda, \in, \mathbb{B}\rangle$. Entonces el conjunto $\{M \in [\mathcal{H}_\lambda]^\omega : M \prec \mathcal{H}_\lambda\}$ es club en $[\mathcal{H}_\lambda]^\omega$, gracias al teorema 3.1.19.

La última definición que necesitaremos para echar a andar la maquinaria construida es la siguiente.

Definición 4.1.18. Sean λ un cardinal regular y no numerable, y $M \prec \mathcal{H}_\lambda$ numerable con $\mathbb{B} \in M$. Decimos que $q \in B^+$ es (B, M)**-genérico** si y sólo si para toda partición[6] $W \subseteq B$ si $W \in M$ entonces $W \cap M$ es predenso bajo q.

4.2. Equivalencias de que $\mathbb{B}$ sea propia

Fijemos un álgebra booleana completa $\mathbb{B}$. Daremos tres definiciones de lo que es que el álgebra $\mathbb{B}$ sea propia, al principio parecerá que no tienen ninguna conexión y aquí es donde los clubs y estacionarios juegan un papel importante, nuestro objetivo es mostrar cómo se relacionan estas definiciones. Permítanos restringirnos a subconjuntos infinitos de $P_{\omega_1}(\lambda)$ con $\lambda > \omega$ y consideremos los clubs de $[\lambda]^\omega$.

Empezaremos con la siguiente definición, está es más relacionada con las propiedades algebraicas de la misma, nos dice que existe cierto club que nos dirá algo como una propiedad distributiva de las matrices de particiones variando los índices sobre este club.

Definición 4.2.1. Decimos que $\mathbb{B}$ es **booleana-propia** si para todo $p > 0$, para todo cardinal $\lambda > \omega$ y para cada matriz de partición, hay un club $C \subseteq [\lambda]^\omega$ tal que para cada $x \in C$ tenemos $\prod\limits_{\alpha \in x} \sum\limits_{\beta \in x} a_{\alpha\beta} \neq 0$.

[6] Al igual que antes podríamos decir predensos o densos.

La definición que sigue es quizá la más simple de formular entre estas tres, habla de un poco de juegos infinitos sobre el álgebra y sólo nos dice que el álgebra es propia si al jugar el juego propio sobre ésta álgebra resulta que el jugador II tiene estrategia ganadora.

Definición 4.2.2. Decimos que un álgebra booleana $\mathbb{B}$ es **jugable-propia** si el jugador II tiene estrategia ganadora en el juego propio.

La siguiente y última nos habla sobre la existencia de un club en $P_{\omega_1}(\mathcal{H}_\lambda)$ que serán submodelos elementales en realidad y nos da otra vez, siguiendo el espíritu de la definición anterior, la existencia de cierto q que tiene que cumplir la genericidad.

Definición 4.2.3. Decimos que $\mathbb{B}$ es **modelo-propia** si para algún[7] λ suficientemente grande hay un $C \subseteq P_{\omega_1}(\mathcal{H}_\lambda)$ club de submodelos elementales numerables $M \prec \mathcal{H}_\lambda$ con $\mathbb{B} \in M$ con la propiedad de que para cada $p \in M \cap B$ existe $q \leq p$ de tal forma que q es (B, M)-genérico.

Nuestro objetivo en esta sección es mostrar la conexión de éstas tres definiciones en el siguiente teorema, resulta que son equivalentes.

Teorema 4.2.1 (**Shelah, 1982; Gray, 1982; Taylor; Jech**). *Sea $\mathbb{B}$ un álgebra booleana completa, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) $\mathbb{B}$ *es booleana-propia.*

(II) $\mathbb{B}$ *es jugable-propia.*

(III) $\mathbb{B}$ *es modelo-propia.*

Demostración: $(III) \implies (II)$. Veamos que el jugador II tiene estrategia ganadora en $\mathcal{G}(\mathbb{B})$. Sea λ un cardinal suficientemente grande y $C := \{M : M \prec P_{\omega_1}(\mathcal{H}_\lambda)\}$ una familia de submodelos elementales que forman un club en $P_{\omega_1}(\mathcal{H}_\lambda)$ tal que cumplen la condición que hace a $\mathbb{B}$ modelo-propia. Crearemos una estrategia ganadora para II de la siguiente manera: si el jugador I escoge $p \in \mathbb{B}$ y juega W_0, entonces la estrategia es que II escoja $M_0 \in C$ tal que $W_0 \in M_0$ y $p \in M_0$, así juegue $B_0 := W_0 \cap M_0$; luego si I juega W_n II escoje $M_n \in C$ tal que $M_n \succ M_{n-1}$ entonces II debe jugar $B_0^n = W_0 \cap M_n$, $B_1^n = W_1 \cap M_n$, $\ldots$, como muestra el siguiente esquema:

I	p, W_0	$\ldots$	W_n	$\ldots$
II	$B_0 = W_0 \cap M_0$	$\ldots$	$B_0^n = W_0 \cap M_n, B_1^n = W_1 \cap M_n \ldots$	$\ldots$

Tenemos que $M_0 \subseteq M_1 \ldots$ es una cadena creciente de C que por ser cerrado tenemos $M := \bigcup M_n \in C$. Sabemos que existe $q \leq p$ que es $(\mathbb{B}, M)$-genérico; así para cada n, $W_n \in M$ y $W_n \cap M$ es predenso bajo q. Además $W_n \cap M = \bigcup_{k\in\omega}(W_n \cap M_k) = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k^n$ es predenso bajo q y el jugador II gana si sigue la estrategia.

[7] Se puede cambiar la palabra algún por todos.

$(II) \implies (I)$ Veamos que $\mathbb{B}$ es booleana-propia, supóngase que el jugador II tiene estrategia ganadora en el juego $\mathbb{B}$, digamos σ; sean $p > 0$, $\lambda > \omega$ y $W = \{a_{\alpha\beta} : \alpha, \beta > \lambda\}$ una matriz de particiones de p. Queremos encontrar un club $C \subseteq [\lambda]^\omega$ tal que

$$\forall x \in C(\prod_{\alpha\in x}\sum_{\beta\in x} a_{\alpha\beta} \neq 0).$$

Para cada α, sea $W_\alpha := \{a_{\alpha\beta} : \beta < \lambda\}$. Defina $F : \lambda^{<\omega} \to [\lambda]^\omega$ de la siguiente manera, si $e \subseteq \lambda$ y $|e| < \aleph_0$ defina $F(e)$ un conjunto numerable tal que si $e = \{\alpha_0, \dots, \alpha_k\}$ y $\{B_i^j : j \leq k, i \leq j\}$ son los movimientos del jugador II en la jugada k jugando según σ cuando el jugador I juega $W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_k}$, $F(e) = \{\beta < \lambda : \forall j \leq k \forall i \leq j(a_{\alpha_i\beta} \in B_i^j)\}$. Tenemos que F es una función generadora. Así pues $C := Cl_F$ es club en $[\lambda]^\omega$. Veamos que C cumple lo requerido. Sean $x \in C$, enumeremos a x, digamos, $x = \{x_n : n \in \omega\}$. Considere $\mathfrak{G}(\mathbb{B})$ con I jugando p y W_{x_n} y II jugando según σ juega $\{B_n^k\}$ así por definición de F se sigue que para cada n:

$$\sum\{y : y \in \bigcup_{n=k}^{\infty} B_n^k\} \leq \sum_{\beta\in x} a_{x_n\beta}.$$

Como σ era estrategia ganadora, hay un $q \leq p$ que testifica que la unión es predensa bajo q por lo tanto

$$\prod_{\alpha\in x}\sum_{\beta\in x} a_{\alpha\beta} \neq 0.$$

$(I) \implies (II)$ Crearemos una estrategia ganadora para II en el juego propio. Sea $\lambda = 2^{|B|} > \omega$, sea $p \in B^+$. Considere la matriz de particiones dada por todas las particiones de p junto con una enumeración de todos sus elementos, digamos, $a_{\alpha\beta}$ y $\beta < \lambda$ agregando ceros si es necesario. Suponga que I empieza jugando $p \in B^+$ y juega $W_{\alpha_0}, W_{\alpha_1}, \dots, W_{\alpha_n}$; como existe $C \subseteq [\lambda]^\omega$ club tal que,

$$\forall x \in C(\prod_{\alpha\in x}\sum_{\beta\in x} a_{\alpha\beta} \neq 0)$$

tome $x_0 \in C$ y defina inductivamente $x_n \in C$ tal que $x_{n-1} \subseteq x_n$, esta es una cadena de elementos de C por lo que $x^\infty := \bigcup_{n\in\omega} x_n \in C$, cada x_i es numerable por lo que la estrategia que seguirá II es jugar en la jugada n, $B_k^n := \{a_{\alpha_k x} : x \in x_n\}$. Veamos que es ganadora. Defina a continuación,

$$B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} B_n^k$$

y

$$q := \prod_{\alpha\in x^\infty}\sum_{\beta\in x^\infty} a_{\alpha\beta}$$

tenemos que $q \leq \sum_{\beta<\lambda} a_{\alpha\beta} = p$. Defínase

$$\delta_n := \sum\{a_{\alpha_n\beta} : x \in x^\infty\} = \sum B_n$$

como B_i es predenso en su supremo por ser subconjunto de anticadena, tenemos que B_n es predenso en δ_n, además $q \leq \delta_n$ para cada n, así $\bigcup_{n=k}^{\infty} B_n^k$ es predenso bajo q, para todo $n \in \omega$. Por lo tanto la estrategia es ganadora para II.

$(II) \implies (III)$ Sea σ una estrategia ganadora para II en $\mathfrak{G}(\mathbb{B})$, es decir si $(p, A_0, \ldots, A_n)$ es lo que juega I entonces $\sigma(p, A_0, \ldots, A_n)$ es lo que jugará II y siempre ganará si sigue esta estrategia. Sea λ un cardinal suficientemente grande, note que $\sigma \in P_{\omega_1}(\mathcal{H}_\lambda)$; queremos encontrar un club de $P_{\omega_1}(\mathcal{H}_\lambda)$ que sea subconjunto de

$$M := \{N \subset P_{\omega_1}(\mathcal{H}_\lambda) : N \prec H_\lambda \wedge |N| \leq \aleph_0 \wedge \mathbb{B} \in N \wedge \forall p \in \mathbb{B} \cap N$$

$$\exists q \leq p(q \text{ es } (\mathbb{B}, N)\text{-genérico})\}.$$

Definamos el siguiente conjunto

$$C := \{N \subset P_{\omega_1}(\mathcal{H}_\lambda) : N \prec H_\lambda \wedge \mathbb{B} \in N \wedge \sigma \in N\}.$$

Es fácil ver que C es club en $P_{\omega_1}(\mathcal{H}_\lambda)$. Afirmamos que $C \subseteq M$. Sea $N \in M$ y $p \in \mathbb{B} \cap N$, nos fijamos en todas las anticadenas maximales que están en N; como N es numerable podemos enumerarlas digamos $\langle A_n : n \in \omega \rangle$. Considere la jugada n de I en el juego propio, digamos, $(p, A_0, \ldots, A_n)$, como $\sigma, p, A_0, \ldots, A_n \in N$ tenemos que $\sigma(p, A_0, \ldots, A_n) = (B_0^n, \ldots, B_n^n) \in N$ y como B_i^n es numerable tenemos que $B_i^n \subseteq N$ también. Al final del juego como $B_i = \bigcup\{B_i \geq i\} \subseteq A_i \cap N$ pero como σ es ganadora existe $q \leq p$ tal que B_i es predenso bajo q para toda $i \in \omega$, por lo tanto $A_i \cap N$ es predenso bajo q y así q es $(\mathbb{B}, N)$-genérico. ■

En ésta última parte del capítulo, mencionaremos brevemente el por qué de todo lo que hemos hecho. No entraremos en detalles sólo lo haremos como un comentario superficial para poder entender las razones principales del desarrollo de éste trabajo para una investigación futura.

Éste último teorema es la clave para determinar cuándo un álgebra booleana es propia. Hay una cuarta versión que es quizá un la más fácil de establecer con palabras y es la versión de teoría de forcing. La noción de propio fue introducida por Shelah y su objetivo principal era que quería un forcing que preservara ω_1 y para esto basta con lo siguiente: decimos que un álgebra booleana es *propia* si para todo $\lambda > \omega$ regular, todo subconjunto estacionario de $[\lambda]^\omega$ permanece estacionario en la extensión genérica. Algo importante de remarcar es que ser propio se preserva bajo iteraciones de soporte numerable. Un teorema sencillo de establecer es el siguiente:

Ejemplo 7. Toda álgebra booleana $\mathbb{B}$ que cumple la c.c.c[8] es propia.

Demostración: Considere la versión jugable-propia y juguemos sobre $\mathbb{B}$, es fácil dar una estrategia ganadora para II, sólo deje que escoja toda la anticadena que juega I. ■

En este ejemplo de teorema vimos que es muy fácil decidir si el álgebra era propia por medio de nuestras equivalencias. Todo lo que hicimos en álgebras booleanas

[8]Recuerde que un álgebra booleana es c.c.c si toda anticadena es a lo más numerable.

en realidad es válido para órdenes parciales: Para cualquier álgebra booleana completa, ya vimos que le podemos asociar un orden parcial de manera natural, y se demuestra que cualquier orden parcial encajado densamente en el álgebra tiene las mismas extensiones genéricas que el orden parcial asociado. Dado un orden parcial arbitrario, no siempre lo podemos encajar densamente en un álgebra booleana completa, pero de cierta manera sí podemos, el truco está en considerar un cociente del orden parcial que se llama el *cociente separativo* y éste sí se puede encajar densamente en un álgebra booleana completa, lo que importa es que las extensiones son las mismas. La clase de órdenes parciales propios es muy amplia, todos los órdenes parciales usuales[9] son propios.

Considere el axioma de Martin:

Definición 4.2.4 (Axioma de Martin). $MA(\kappa)$ es el siguiente enunciado: Sea κ un cardinal infinito y sean $\mathbb{P}$ un orden parcial que cumple c.c.c y $\mathscr{D}$ una familia de a lo más κ densos de $\mathbb{P}$. Entonces existe un filtro $\mathscr{D}$-genérico[10] en $\mathbb{P}$.

MA es que $MA(\kappa)$ es cierto para todo $\kappa < \mathfrak{c}$.

El axioma de Martin junto con los principios combinatorios (que estudiamos en el apéndice) son las herramientas clásicas (y básicas) de un topólogo o conjuntista que quiere demostrar la consistencia de algún enunciado bajo la formalización de, digamos, ZFC.

Definición 4.2.5 (Proper forcing axiom(PFA)). PFA es el siguiente enunciado: Sea $\mathbb{P}$ un órden parcial propio y $\langle D_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ una sucesión de densos de $\mathbb{P}$. Entonces existe un filtro $\mathscr{D}$-genérico en $\mathbb{P}$.

Por nuestro teorema de ejemplo 7 sabemos que PFA implica $MA(\omega_1)$; no es nuestra tarea desarrollar con certeza la teoría del forcing propio ni estudiar PFA, sólo queremos motivar lo hecho en éste trabajo. Hay una gran variedad de resultados interesantes, como ejemplo de la fuerza de PFA es que puede predecir la cardinalidad del continuo, nos dice que si $ZFC+$ "existe un cardinal supercompacto" es consistente también $ZFC + 2^{\aleph_0} = \aleph_2 + PFA$ es consistente, he aquí parte de la fuente de su fuerza. Mencionaremos un par de teoremas sorprendentes:

Teorema 4.2.2. *Suponga PFA.*

(I) *Existe un álgebra booleana de cardinalidad $2^{\aleph_0}$ que no se puede encajar en $P(\omega)/Fin$.*

(II) *Existe un espacio compacto y Hausdorff de peso $2^{\aleph_0}$ que no es la imagen continua de $\beta(\omega) \setminus \omega$.*

Teorema 4.2.3. *PFA implica que toda familia no numerable de subconjuntos de ω continene una cadena o una anticadena no numerable.*

[9]Usuales en el sentido de forcing.

[10]Un filtro es $\mathscr{D}$-genérico si intersecta a cada miembro $D \in \mathscr{D}$.

Teorema 4.2.4. *PFA implica que,*

(i) *Toda función de un conjunto no numerable de reales en los reales es monótona en un subconjunto no numerable.*

(ii) *Toda álgebra booleana no numerable tiene una anticadena débil no numerable.*

Jugando un poco con el enunciado, obtenemos unas cuantas variaciones de PFA que también son de interés, por ejemplo, el *principio máximo de Martin* que es una generalización de PFA y entre otras cosas resuelve la hipótesis del cardinal singular.

Todo esto relacionado con el forcing propio va más allá de este texto, queríamos solamente hacer un comentario; es esencial para una investigación futura y obtener resultados de consistencia, saber como atacar otros problemas abiertos incluso de otras áreas, o saber que tan complicados son.

Apéndice A

Aplicaciones

Hay una gran variedad de aplicaciones de la teoría de conjuntos estacionarios. Los estacionarios sobre un cardinal tienen aplicaciones en la misma teoría de conjuntos: tenemos los llamados cardinales de Mahlo, los teoremas de Silver, las propiedades de reflexión, saturación, precipitación, y los principios combinatorios; también tenemos algunas aplicaciones en topología (de conjuntos). Presentaremos algunas de éstas en este texto.

Ya vimos que la generalización de los estacionarios sirve para definir las álgebras booleanas propias y junto con ellas toda la poderosa teoría del forcing propio, pero además nos sirve para definir las llamadas álgebras proyectivas y las de Cohen; también tenemos propiedades de reflexión y saturación. Hay además una generalización del principio $\Diamond$ llamado $\clubsuit$ que resulta muy poderoso. No tendremos la oportunidad de desarrollar éstas aquí, pero esperamos que podamos sembrar la curiosidad en el lector y tenga el placer de investigar un poco más a fondo.

A.1. Principios combinatorios

En ésta sección veremos algunos enunciados que son muy útiles y se basan en los estacionarios, se llamana principios combinatorios o de adivinación. Nos ayudan mucho a dar pruebas de consistencia. En general, nos pueden ayudar a dar pruebas de consistencia de enunciados de topología, análisis, álgebra, etc.

El primer principio combinatorio, es el clásico principio diamante, trabajaremos solo con ω_1 aunque se puede generalizar a cualquier cardinal:

Definición A.1.1 (Jensen). Llamamos $\Diamond$ al principio: Hay una sucesión $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ tal que $A_\alpha \subseteq \alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$ y para cada $A \subseteq \omega_1$ el conjunto $\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario en ω_1.

Una sucesión como en la definición anterior se llamará una $\Diamond$-sucesión. De cierta manera en una $\Diamond$-sucesión capturamos a todos los subconjuntos de ω_1.

Un resultado interesante es el siguiente.

Teorema A.1.1. $\diamondsuit$ *implica la hipótesis del continuo.*

Demostración: Sea $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ una $\diamondsuit$-sucesión. Tenemos que el conjunto $\mathscr{A} := \{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario en ω_1 pues $A \subseteq \omega_1$. Note que $|\mathscr{A}| = \aleph_1$ por ser estacionario. Así debe existir $\alpha_0 \in \mathscr{A}$ tal que $A = A_{\alpha_0}$. Ahora defina la función $f : P(\omega) \to \omega_1$, con $f(A) = \beta$ donde $\beta := \text{mín}\{\alpha < \omega_1 : A_\beta = A\}$. Es fácil ver que es una función inyectiva. Por lo tanto $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ ∎

Así como este resultado hay muchos otros, $\diamondsuit$ es muy útil, por ejemplo se puede demostrar que implica la negación de la hipótesis de Suslin[1] También es cierto que $HC \not\Rightarrow \diamondsuit$.

Si fortalecemos un poco $\diamondsuit$ tenemos el siguiente principio:

Definición A.1.2. Llamaremos $\diamondsuit^+$ al siguiente enunciado, existe una sucesión $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que $A_\alpha \in [P(\alpha)]^{\leq \omega}$ para cada $\alpha < \omega_1$, y para cada $A \subseteq \omega_1$ existe un club C de ω_1 tal que se cumple:

$$\forall \alpha \in C(A \cap \alpha \in A_\alpha \wedge C \cap \alpha \in A_\alpha).$$

Se puede demostrar que $\diamondsuit^+ \implies \diamondsuit$ y que $\diamondsuit^+ \implies HK$, donde HK es la hipótesis de Kurepa[2]

Ahora si debilitamos un poco a $\diamondsuit$ tenemos:

Definición A.1.3 (Ostasziewski). Llamaremos el principio $\clubsuit$ al siguiente enunciado: Existe una sucesión $\langle s_\alpha : \alpha \in \omega_1 \cap Lim \setminus \{0\} \rangle$ tal que para cada α:

(I) $s_\alpha \subseteq \alpha$;

(II) $t.o.(s_\alpha) = \omega$;

(III) $\sup s_\alpha = \alpha$;

(IV) Cada subconjunto no numerable de ω_1 contiene algún s_α.

Es fácil demostrar que $\diamondsuit \implies \clubsuit$, bajo HC estos principios son equivalentes sin embargo Shelah probó que $\clubsuit \not\Rightarrow HC$.

Podemos debilitar aún más la hipótesis, para obtener el principio $\flat$:

Definición A.1.4. Llamamos $\flat$ al siguiente enunciado: Existe una sucesón $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ con $A_\alpha \subseteq \omega_1$ tal que para cada $A \in [\omega_1]^{\aleph_1}$ existe α con $A_\alpha \subseteq A$.

Se puede probar que $\clubsuit \implies \flat$ y que $CH \implies \flat$, es decir, $\flat$ es bastante débil. Sin embargo se puede demostrar:

Teorema A.1.2. $MA(\aleph_1) \implies \neg\flat$

[1]Hipótesis de Suslin: Todo árbol de altura ω_1 tiene una rama de longitud ω_1 o una anticadena de cardinalidad $\aleph_1$.

[2]Existen árboles de altura ω_1 con al menos ω_2 ramas cofinales.

Hay muchas maneras de generalizar $\diamondsuit$ y la mayoría son muy útiles, tenemos algunos ejemplos de usos de ellos en distintas áreas.

(Análisis funcional) Akemann y Weaver en 2004 usaron $\diamondsuit$ para construir una C^*-álgebra[3] que sirve de contraejemplo al problema de Naimark[4].

(Álgebra/ teoría de modelos) Shelah usó diamante para demostrar que todo grupo de Whitehead[5] es libre.

(Topología) Ostasziewski usó $\clubsuit + HC$ para consturir un espacio primero numerable, perfectamente normal, hereditariamente separable, localmente numerable, localmente compacto, numerablemente compacto y Hausdorff que no es Lindelöf.

A.2. Cardinales de Mahlo

Los cardinales de Mahlo, son un tipo especial de cardinales grandes y tienen propiedades muy interesantes, fue la primera aparición de los conjuntos estacionarios, en 1911.

Lema A.2.1. *Sea κ un ordinal. Si $f : \alpha \to \kappa$ es una función normal y cofinal en κ entonces $Fix(f) \neq \emptyset$ si y sólo si κ es regular y no numerable.*

Demostración: Suponga que κ es singular o $\kappa \leq \omega$, si κ es singular construya $f : cf(\kappa) \to \kappa$ de tal forma que sea normal y cofinal tal que $f(\xi) > cf(\kappa)$ y $\xi < cf(\kappa)$, ésta no tiene puntos fijos; si $\kappa = \omega$ cualquier función creciente y no acotada de ω en ω nos sirve.

Suponga que $\kappa > \omega$ es regular y $f : \alpha \to \kappa$ normal y no acotada en κ, como κ es regular y la función es cofinal debe ser $\alpha = \kappa$. Ya sabemos que el conjunto $Fix(f)$ es club en κ y por lo tanto es no vacío. ∎

Definición A.2.1. Un cardinal κ se llama **cardinal de Mahlo** si el conjunto de cardinales inaccesibles bajo κ es estacionario en κ. κ se llama **Mahlo débil** si el conjunto de cardinales regulares bajo κ es estacionario en κ.

Observación 10. Equivalentemente, los cardinales de Mahlo (débil) son los cardinales tales que para cada función normal y no acotada existe un punto fijo inaccesible (regular); esto es fácil de establecer usando el lema y el hecho de que si κ no es regular entonces existe un conjunto $X \subseteq \kappa$ no acotado tal que $|X| < \kappa$ y si tomamos el conjunto $Acum_\kappa(X - |X|) \setminus \{\kappa\}$ es club y no contiene ningún cardinal inaccesible.

Teorema A.2.2. *Si κ es Mahlo entonces es inaccesible.*

[3] Un C^*-álgebra es un álgebra de Banach compleja con una operación * llamada involución.

[4] En pocas palabras el problema de Naimark es un problema de clasificación de C^*-álgebras "simples".

[5] Un grupo es de Whitehead si es abeliano y, siempre que B es un grupo abeliano y $f : B \to A$ un epimorfismo cuyo núcleo es isomorfo a $\mathbb{Z}$ entonces existe un homomorfismo de regreso $g : A \to B$ con $fg = id_A$.

Demostración: Por lo anterior, κ es regular veamos que es límite fuerte. Suponga que no y sea $\gamma < \kappa$ tal que $2^\gamma \geq \kappa$ y tome la función $f : \kappa \to \kappa$ dada por $f(\alpha) = \alpha + \gamma$, es claramente una función normal y no acotada. $Fix(f)$ no puede contener cardinales límites fuerte ya que sus elementos varían entre γ y 2^γ, por lo que no pueden ser inaccesibles, por lo tanto κ no puede ser Mahlo. ∎

De hecho, todo cardinal κ de Mahlo es *hiperinaccesible*, es decir, debajo de él hay κ cardinales inaccesibles (el conjunto es estacionario y κ regular).

Con ayuda de los cnjuntos estacionarios, podemos construir la que es llamada la *operación de Mahlo* que es muy comín en la teoría moderna; fue usada por Mahlo para dar ese brinco entre los cardinales inaccesibles y los cardinales de Mahlo. Con ayuda de esta operación podemos formar una jerarquía de conjuntos estacionarios.

Definición A.2.2. Sea X una clase de ordinales entonces $H(X) := \{\alpha \in X : \alpha \cap X \text{ es estacionario en } \alpha\}$.

Así si X es la clase de cardinales regulares, $H(X)$ es la clase de Mahlo débiles. Si X es la clase de los inaccesibles, $H(X)$ son los cardinales de Mahlo. Si iteramos tenemos que:

$$\begin{aligned}
&H^0(X) = X;\\
&H^{\alpha+1}(X) = H(H^\alpha(X);\\
&H^\beta(X) = \bigcap_{\alpha<\beta} H^\alpha(X) \text{ si } \beta \in Lim.
\end{aligned}$$

Con esta operación podemos crear más y más cardinales de Mahlo. Los cardinales de Mahlo son de importancia, como cualquier otro cardinal grande, ya que nos proveen de métodos para decir "cuán complicado" es algo. Con los Mahlo, tenemos los llamados principios de reflexión, que no desarrollaremos, pero son muy importantes. El estudio de estos principios se debe principalmente a Lévy y a Bernays.

Ahora variaremos un poco la operación de Mahlo para trabajar en nuestros conjuntos favoritos:

Definición A.2.3. Sean κ un cardinal regular y no numerable, y $S \subseteq \kappa$ estacionario, definimos **la traza de S** como el conjunto $Tr(S) := \{\alpha < \kappa : cf(\alpha) > \omega \wedge S \cap \alpha \text{ es estacionario en } \alpha\}$.

Considere el álgebra cociente $P(\kappa)/\mathscr{I}_{NS}$[6], si $S \equiv T$ entonces $Tr(S) \equiv Tr(T)$; entonces podemos pensar $Tr : P(\kappa) \to P(\kappa)$ como una operación en $P(\kappa)/\mathscr{I}_{NS}$. Decimos que una propiedad se cumple *para casi todo* $\alpha \in A$ si y sólo si se cumple para todos salvo un conjunto no estacionario.

[6]Recuerde que $S \sim T (S \equiv T mod \mathscr{I}_{NS}) \iff S \vartriangle T \in \mathscr{I}_{NS}$, es decir, si difieren por muy poco.

Definición A.2.4. Sean S y T estacionarios en κ, decimos que $S < T$ si y sólo si para casi todo $\alpha \in T$, $S \cap \alpha$ es estacionario en α.

El siguiente lema es fácil de establecer, nos da las propiedades que necesitamos.

Lema A.2.3. (I) *$A < Tr(A)$;*

(II) *$A < B$ y $B < C$ entonces $A < C$;*

(III) *Si $A < B$, $A \equiv A'$ $mod\mathscr{I}_{NS}$ y $B \equiv B'$ $mod\mathscr{I}_{NS}$, entonces $A' < B'$.*

Así pues tenemos que es una relación transitiva, más aún, Jech demostró que es bien fundada:

Teorema A.2.4. *Para cada subconjunto X no vacío de $P(\kappa)/\mathscr{I}_{NS}$ existe un elemento $<$-minimal.*

Siempre es muy importante poder clasificar jerárquicamente y con ésta construcción podemos dar una cierta jerarquía a los estacionarios.

A.3. Algunas aplicaciones a la topología de conjuntos

En esta sección discutiremos brevemente unas pequeñas apariciones de los conjuntos estacionarios en la topología de conjuntos, asumiremos que el lector conoce un poco de topología (lo visto en un primer curso).

Primero que nada veremos brevemente algunos resultados en espacios linealmente ordenados que tienen que ver con conjuntos estacionarios y un resultado interesante con los llamados espacios de Baire, luego pasaremos al estudio rápido de grupos topológicos. Para más información en el tema referimos el lector a [3] y [2].

Recuerde que a un conjunto linealmente ordenado se le puede dotar con una topología, llamada la topología del orden y es la generada por intervalos y rayos. En particular nosotros podemos dotar a nuestros ordinales con esta topología.

Como primer ejemplo, tenemos el siguiente resultado que es una simple aplicación del teorema de Fodor:

Teorema A.3.1. *Si $S \subseteq \kappa$, κ regular y no numerable, es estacionario, entonces S no es paracompacto.*

Demostración:[Bosquejo] Considere la cubierta $\{[0, \alpha] : \alpha < \omega_1\}$ y luego suponga que existe refinamiento localmente finito y tome las vecindades que lo testifican. Luego aplique el teorema de Fodor para encontrar que en realidad nuestra cubierta es numerable, lo cual es una contradicción. ∎

Con ayuda del teorema y otros resultados adicionales se puede demostrar el siguiente,

Corolario A.3.2. *Un subespacio S de κ es metrizable si y sólo si es paracomacto si y sólo si no es estacionario.*

El teorema más grande con relación a éstos espacios es el siguiente:

Teorema A.3.3 (Engelking, Lutzer; 1977). *Sea X un espacio linealmente ordenado, X es paracompacto si y sólo si no contiene un subespacio cerrado homeomorfo a un conjunto estacionario de un cardinal regular.*

De hecho los autores del teorema lo hicieron para una clase más grande de espacios llamados espacios ordenados generalizados.

Un enfoque diferente de los estacionarios, como lo muestra [3], es con la propiedad de Baire. Recuerde que un espacio X tiene la propiedad de Baire o es de Baire si y sólo si cualquier intersección numerable de densos abiertos es densa abierta.

Con un poco de trabajo y con ayuda de los estacionarios en ω_1, se puede demostrar:

Teorema A.3.4. *Existen espacios metrizables X y Y con la propiedad de Baire tales que $X \times Y$ no es de Baire.*

Pasaremos brevemente al estudio de grupos *paratopológicos*, un grupo paratopológico es un grupo G que también es un espacio topológico y que la operación del grupo es continua[7].

Una familia de subconjuntos $A = \{A_i : i \in I\}$ de un espacio X es discreta si para cada $x \in X$ existe una vecindad U_x de x tal que intersecta a lo más a un A_i. Decimos que un espacio es normal colección por colección o por colecciones[8] si para cualquier familia discreta de conjuntos cerrados, existe una colección de abiertos $U = \{U_i : i \in I\}$ tal que $A_i \subseteq U_i$ y U es ajeno por pares. Si la familia A está formada por singuletes decimos que es Hausdorff colección por colección.

En el magnífico artículo de Buzyakova y Vural([2]), se estudia la relación de estos espacios con los conjuntos estacionarios de cardinales regulares y no numerables. Citaremos sus resultados principales:

Teorema A.3.5. *Sea G un grupo paratopológico. Si G contiene un subespacio estacionario de un cardinal regular no numerable, entonces se cumple:*

(i) *G no es hereditariamente normal o no es hereditariamente Hausdorff por colecciones.*

(ii) *G no es hereditariamente normal por colleciones.*

Teorema A.3.6. *Suponga HGC. Sea G un grupo paratopológico. Si G contiene un subespacio estacionario de un cardinal regular no numerable entonces G no es hereditariamente normal.*

[7] Un grupo topológico es un grupo paratpológico con la función que manda a inversos, continua.

[8] *Collectionwise*, en inglés.

Un espacio T_1 X se llama normal monótono si para cada $x \in X$ y $x \in U$ abierto, existe una vecindad $V_{x,U}$ tal que:

(I) $x \in V_{x,U} \subseteq U$

(II) Si $V_{x,U} \bigcap V_{x',U'} \neq \emptyset$ para algún $x' \in U' \subseteq X$, entonces $x \in U'$ o $y \in U'$.

Teorema A.3.7. *Sea G un grupo paratopologócio, si G es normal monótono entonces G es hereditariamente paracompacto.*

Corolario A.3.8. *Sea G un grupo paratopológico, si G es subespacio de un espacio linealmente ordenado entonces G es paracompacto.*

Se pueden hacer muchísimas cosas con los clubs y estacionarios dada su naturtaleza simple, son muy volátiles y útiles cuando de herramientas se tratan. Aquí sólo echamos un pequeño vistazo para convencerles de que son excelentes compañeros en la vida de un matemático.

Apéndice B

Bibliografía

[1] Baumgartner, J. *Applications of the Proper Forcing Axiom.* Capítulo 21, en handbook of Set-Theoretic Topology.

[2] Buzyakova, R. Z., and Vural, C. *Stationary sets in topological and paratopological groups.* 2012.

[3] Clontz, S. *Applications of Stationary Sets in Set Theoretic Topology.* 2010.

[4] Devlin, K. *The Joy of sets.* Undergraduate texts in Mathematics. Springer, 1994.

[5] Drake, F., and Singh, D. *Intermediate set theory.* 1996.

[6] Drake, F. R. *Set theory, an introduction to large cardinals.* North-Holland publishing company, 1974.

[7] Foreman, M., and Kanamori, A. *Handbook of set theory.* 2010.

[8] Friedman, H. *On Closed Sets of Ordinals.* 1974.

[9] Geschke, S. *Stationary Sets notes.*

[10] Hajnal, A., Hamburger, P., and Mate, A. *Set theory.* Cambridge University Press, 1999.

[11] Hernández Hernández, F. *Teoría de conjuntos: una introducción.* 2011.

[12] Holz, M., Steffens, K., and Weitz, E. *Introduction to cardinal arithmetic.* Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Birkhäuser Verlag, 1999.

[13] Ivorra, C. *Teoría de conjuntos.*

[14] Jech, T. *Multiple Forcing.* Cambridge. Cambridge, 1986.

[15] Jech, T. *Set Theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2003.

[16] Just, W., and Weese, M. *Discovering Modern Set Theory I.* American Mathematical Society, 1997.

[17] Just, W., and Weese, M. *Discovering Modern Set Theory II.* American Mathematical Society, 1997.

[18] Kanamori, A. *The Higher Infinite.* 1994.

[19] Komjath, P., and Totik, V. *Problems and Theorems in Classical Set Theory.* Problem book in mathematics. Springer, 2006.

[20] Kunen, K. *Set Theory: An introduction to independence proofs.* North Holland, 1980.

[21] Lévy, A. *Basic Set Theory.* Dover, 2002.

[22] Monk, D. *Handbook of Boolean Algeberas.* Cambridge. Cambridge, 1986.

[23] Monk, D. *Lectures on set theory.* 2015.

[24] P.Erdös, A.Hajnal, A.Máté, and R.Rado. *Combinatorial set theory: Partition relations for cardinals.* North Holland, 1984.

[25] Prisco, C. D., and Marek, W. *Some properties of stationary sets.* 1983.

[26] Roitman, J. *Introduction to Modern Set Theory.* Pure and applied mathematics. John Wiley and Sons, 1990.

[27] Schindler, R. *Set theory: Exploring Independence and Truth.* Springer International Publisher, 2014.

[28] Shelah, S. *Proper Forcing.* Cambridge. Cambridge, 1982.

[29] Shelah, S. *Proper and Improper Forcing.* Cambridge. Cambridge, 1998.

[30] Solovay, R. M. *Real-valued measurable cardinals.* 1971.

[31] Velickovic, B. *Playful Boolean Algebras.* 1986.

[32] Šobot, B. *Games on boolean algebras.* Ph.D. thesis, 2009.

Índice alfabético