



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

**EVOLUCIÓN DE AGUJEROS NEGROS USANDO MÉTODOS
PSEUDOESPECTRALES**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:

GUILLERMO ALBERTO ESTRADA GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JOSÉ ANTONIO GONZÁLEZ CERVERA



MORELIA, MICHOACÁN.

FEBRERO DEL 2016

A mi familia.

AGRADECIMIENTOS

Primero que nada agradezco a mi asesor José Antonio González por haberme brindado todo el apoyo el cual ha hecho posible la conclusión de esta tesis junto con el profesor Francisco S. Guzmán. Agradezco a todos mis profesores en especial a Alberto Mendoza, Petr Zhevandrov, María Pérez, Mauricio Ortíz, Grace Reyes, Arturo Martínez, Joaquín Estevez, Elmar Wagner, Gabriel Arroyo, Héctor Pérez, Victor Yopez, Jorge López y Rigoberto Vera.

No podría dejar a fuera de los agradecimientos a todos mis compañeros de la generación 2010 que me acompañaron durante estos 5 largos años de aprendizaje. En especial quisiera agradecer a mis amigos Iván Aviles, César Mata, Ricardo Ochoa, Manuel Romo, Salvador Alvarado, Estefanía González, Fanny Lemus, Santiago Medrano, Erick Ruíz, Jonathan García, Larissa Malvárez, Jorge Morales, Kim Pérez, Roberto Lara, Ricardo Chávez, Dulce Silva y Manuel Espinosa. Por último pero no menos importante agradezco a mis amigos del IFM Francisco Rivera y Miguel Gracia.

Morelia, Michoacán., Febrero del 2016

Índice general

1. Introducción	13
2. Relatividad general	15
2.1. Ecuaciones de campo de Einstein	16
2.1.1. La solución de Schwarzschild	17
2.2. Descomposición 3+1	20
2.3. Formulación KST	24
3. Métodos numéricos	27
3.1. Método de líneas	27
3.2. Integrador Runge-Kutta de 4to orden	28
3.3. Métodos espectrales	29
3.3.1. Método de colocación de Chebyshev	30
3.3.2. Método de interpolación de Lagrange	31
3.3.3. Convergencia	33
3.4. La ecuación de onda como ejemplo	35
4. Evolución	39
4.1. Ecuaciones de evolución en simetría esférica	39
4.2. Condiciones de frontera	41
4.3. Implementación	44
4.4. Datos iniciales	45
4.5. Resultados numéricos	46
5. Conclusiones	51
A. Polinomios de Chebyshev	53
B. Geometría diferencial	57
B.1. Variedades diferenciales	57
B.2. Campos vectoriales y tensoriales	58

B.3. Métrica y geodésicas	60
B.4. Derivadas y conexiones	62
B.5. Curvatura	64
C. Descomposición característica	65
Referencias	67

Resumen

Se presentan los resultados numéricos de la evolución de agujeros negros usando métodos pseuespectrales. Las ecuaciones de Einstein son presentadas en la formulación KST de la Relatividad General. Para la evolución se escogieron dos tipos de coordenadas: coordenadas de Kerr-Schild y coordenadas harmónicas. Se presentan los resultads a través del cálculo en la violación de las constricciones Hamiltoniana y de Momento.

Palabras Clave— Relatividad Numérica, Métodos Pseudoespectrales, Agujero Negro, Métodos Numéricos, Formulación KST.

Abstract

We present the numerical results of evolving a spherically symmetric black holes using pseudospectral methods. The Einstein equations are written in the KST formulation of General Relativity. For the system evolved we choose 2 types of coordinates: Kerr-Schild coordinates and harmonic coordinates. The results are presented computing the violation of the hamiltonian and momentum constraint.

Capítulo 1

Introducción

La Relatividad General formulada por Albert Einstein en 1915 [1] es la teoría más exitosa en describir la gravedad debido a su poder predictivo, como por ejemplo la precesión del perihelio de Mercurio y la deflexión de la luz al pasar por objetos masivos. La complejidad de las ecuaciones de Einstein hace que la mayoría de las predicciones que han sido corroboradas de la teoría sean sólo sobre lo que se conoce como el régimen de campo débil de la gravedad. Las predicciones de la relatividad general en el régimen de campo fuerte como la existencia de agujeros negros y la existencia de ondas gravitacionales no han sido corroboradas de forma directa aún.

En la actualidad existen varios detectores de ondas gravitacionales (LIGO, VIRGO, GEO600, TAMA 300) y se espera que durante los próximos años sean capaces de detectar señales de ondas gravitacionales. Las señales de ondas gravitacionales deben de corresponder a fuentes bien identificadas de radiación gravitacional las cuales deben ser producidas por objetos compactos*.

Debido a la complejidad de las ecuaciones de Einstein, son pocas las soluciones exactas que se conocen [2] y sólo en casos donde hay alto grado de simetría ya sea en tiempo o espacio. Si uno esta interesado en estudiar sistemas con relevancia astrofísica que involucren campos gravitacionales fuertes con alguna o ninguna simetría es imposible resolver las ecuaciones de Einstein de forma exacta. La relatividad numérica nace de la necesidad de estudiar este tipo de sistemas, en la cual uno trata de resolver las ecuaciones de Einstein usando métodos numéricos a través de códigos computacionales.

La implementación de métodos espectrales y pseudoespectrales en la solución de las ecuaciones de Einstein no es nueva [3, 4, 5] y han mostrado ser eficientes tanto en la precisión de la solución así como en el costo de tiempo computacional. Actualmente existen catálogos de señales de ondas gravitacionales las cuales son generadas por simulaciones numéricas. Uno de los códigos con los que se obtienen muestras de señales de ondas gravitacionales es el SpEC [6] el cual hace uso de los métodos pseudoespectrales, especifica-

*Un objeto compacto es un cuerpo astrofísico muy denso. Un ejemplo son los agujeros negros.

mente usa el método de colocación de Chebyshev [7].

En esta tesis se presenta la evolución de agujeros negros esféricamente simétricos usando métodos pseudoespectrales. Las simulaciones de dichas evoluciones se hicieron con un código propio el cual fue escrito desde cero en FORTRAN 90. Una de las ventajas de desarrollar un código propio es que nos permite tener un completo control sobre lo que está sucediendo lo cual no sería posible si se usasen códigos ajenos que son cajas negras e involucran muchos procesos adicionales a los métodos numéricos. Otra de las ventajas de usar un código propio es que es posible medir el tiempo de cómputo de las simulaciones.

Esta tesis está organizada como sigue. En el capítulo 2 se presentan de forma general las ecuaciones de Einstein tanto en su forma tensorial como en la formulación KST. En el capítulo 3 se describen los métodos espectrales, en particular el método de colocación de Chebyshev y el método de interpolación de Lagrange. En el capítulo 4 se presentan las ecuaciones de evolución en la formulación KST para espacios-tiempos esféricamente simétricos así como los datos iniciales para un agujero negro de Schwarzschild y los resultados de las simulaciones. En el capítulo 5 se presentan conclusiones de las simulaciones y algunas discusiones. En el apéndice A se han incluido algunas propiedades de los polinomios de Chebyshev, útiles para la solución de ecuaciones diferenciales. En el apéndice B se enlistan definiciones importantes en el contexto de la geometría diferencial y en donde se describe brevemente el espacio de Minkowski. Por último, en el apéndice C se dan los criterios para clasificar la hiperbolicidad de ecuaciones diferenciales parciales.

Capítulo 2

Relatividad general

La teoría general de la relatividad (RG) fue postulada por Albert Einstein en 1915 y es la teoría que describe una de las 4 fuerzas fundamentales de la naturaleza*, la gravedad. Aunque la teoría de gravitación formulada por Newton representó un gran avance en su época, tenía deficiencias, por ejemplo, la interacción gravitatoria era transmitida entre diferentes objetos a una velocidad infinita lo que constituye una contradicción con uno de los postulados fundamentales de la relatividad especial: ninguna interacción física puede viajar más rápido que la velocidad de la luz. Las ideas principales que guiaron a Einstein a formular la teoría general de la relatividad fueron el ”*principio de covarianza*”, el cual dice que las leyes de la física deben de tener la misma forma para todos los observadores, el ”*principio de equivalencia*”, que dice que todos los objetos caen exactamente de la misma forma en un campo gravitacional sin importar sus masas, y el ”*principio de Mach*”, que dice que la inercia local de un objeto debe ser producida por la distribución total de la materia en el Universo. El principio de covarianza llevó a Einstein a formular su teoría de forma tensorial, el principio de equivalencia condujo a Einstein a pensar que la gravedad no era un fuerza como tal si no una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, y el principio de Mach lo llevó a concluir que dicha curvatura en la geometría del espacio-tiempo era provocada por la distribución de materia y energía. Esto nos conduce a la célebre frase de John A. Wheeler, ”*la materia le dice al espacio cómo curvarse, y el espacio le dice a la materia cómo moverse*”([8]). Las unidades convencionales en el sistema internacional se dejan por un lado y se usan las llamadas ”*unidades geométricas*”, en las que la velocidad de la luz c y la constante de la gravitación universal G son ambas iguales a la unidad. En este sistema de unidades, la distancia, el tiempo, la masa y la energía tienen las mismas unidades (de longitud).

Las matemáticas con la que se trabaja en RG son parte de un área conocida como geometría diferencial. En el Apéndice B se da una breve introducción a los conceptos usados en RG. Para más detalles ver por ejemplo [9, 10]. La convención usada en esta tesis es la

*Las otras 3 fuerzas fundamentales son: la electromagnética, la fuerza débil y la fuerza fuerte.

misma que en [11]. Esto es, los índices Griegos corren de 0 a 3, donde 0 corresponde a la coordenada temporal, mientras que los índices Latinos corren de 1 a 3. La signatura de la métrica que usaremos es $(-,+,+,+)$ (ver Apéndice B). También se usa la convención de sumatoria de Einstein, es decir, índices repetidos se suman sobre todos sus posibles valores.

2.1. Ecuaciones de campo de Einstein

Las ecuaciones de Einstein son

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento. Los índices μ y ν corren de 0 a 3 por lo que resultan en 16 ecuaciones, pero como los tensores de Einstein y de energía-momento son simétricos el número de ecuaciones independientes se reducen a 10. Analicemos cada termino en la Ec.(2.1) por separado. El tensor de Einstein está definido como

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.2)$$

donde R es el escalar de curvatura, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci y $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico.

Por otra parte, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento el cual describe la densidad de energía, la densidad de momento y el flujo de momentos de un campo de materia a través del espacio:

$$T^{00} = \text{densidad de energía}, \quad (2.3)$$

$$T^{0i} = T^{i0} = \text{densidad de momento}, \quad (2.4)$$

$$T^{ij} = \text{flujo del momento } i \text{ a través de la superficie } j. \quad (2.5)$$

Estamos interesados en estudiar un agujero negro en el vacío por lo que el tensor de energía-momento es cero, $T_{\mu\nu} = 0$. Sabemos que el campo gravitacional producido por un objeto se extiende mas allá de la región que contiene a dicho cuerpo, por tanto las ecuaciones de Einstein en el vacío describen la forma en la que el campo gravitacional se propaga a través del espacio en ausencia de materia.

La Ec.(2.1) representa un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales. Estas ecuaciones tienen que ser resueltas para las 10 componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ cuando la fuente de materia es dada así como para $T_{\mu\nu}$. Las ecuaciones son altamente no lineales, pero están bien planteadas, es decir, las ecuaciones de Einstein determinan los valores futuros de $g_{\mu\nu}$ a partir de un conjunto de datos iniciales. Dado que $g_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor métrico \mathbf{g} en algún sistema coordenado, un cambio en las coordenadas inducen un cambio en las componentes. En particular hay 4 coordenadas, por tanto hay 4 grados de libertad arbitrarios entre las 10 componentes de la métrica. Esto hace imposible determinar las 10

componentes $g_{\mu\nu}$ a partir de los datos iniciales ya que las coordenadas para el futuro de los datos iniciales pueden ser cambiadas arbitrariamente. De hecho, las ecuaciones de Einstein tienen exactamente esta propiedad la cual es consecuencia de las identidades de Bianchi

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (2.6)$$

esto significa que hay 4 identidades (una por cada valor de μ) entre las 10 componentes $G_{\mu\nu}$. Entonces, estas 10 componentes no son independientes y las 10 ecuaciones de Einstein son sólo 6 ecuaciones diferenciales independientes para las 6 funciones entre las 10 componentes $g_{\mu\nu}$ que caracterizan la geometría independientemente de las coordenadas.

El tensor de Einstein es la única combinación que puede obtenerse a partir del tensor de Ricci que tiene esta propiedad. Utilizando las ecuaciones de Einstein vemos que la propiedad anterior implica que

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (2.7)$$

La Ec.(2.7) es de vital importancia pues representan las leyes locales de conservación de energía y momento tal y como lo demanda el *principio de equivalencia*.

2.1.1. La solución de Schwarzschild

La solución de Schwarzschild fue la primera solución no trivial de las ecuaciones de Einstein la cual describe el espacio-tiempo al exterior de un objeto esféricamente simétrico y estático. Un espacio-tiempo se dice estático si cumple las siguientes propiedades: (i) todas las componentes de la métrica son independientes del tiempo; y (ii) la geometría es invariante bajo reflexiones temporales, $t \rightarrow -t$.

El hecho de pedir que el espacio-tiempo sea esféricamente simétrico implica que cada punto en el espacio-tiempo está sobre una 2-esfera (\mathbb{S}^2), es decir, su elemento de línea es

$$dl^2 = f(r', t)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.8)$$

donde $f(r', t)$ es una función desconocida de las otras dos coordenadas del espacio-tiempo r' y t . El área de cada esfera es $4\pi f(r', t)$. Definimos la coordenada r de nuestra geometría tal que $f(r', t) := r^2$. Esto representa una transformación de coordenadas de $(r', t) \rightarrow (r, t)$. No hay una relación entre r y la distancia propia desde el centro de la esfera a la superficie misma. Como el "centro" de la esfera ($r = 0$ en un espacio plano) no es un punto sobre la esfera misma, el hecho de pedir que un espacio-tiempo sea esféricamente simétrico no requiere que dichos puntos ($r = 0$) existan en la variedad. Por tanto, la métrica de un espacio-tiempo esféricamente simétrico es

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2g_{0r} dr dt + g_{rr} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.9)$$

La propiedad (ii) bajo la transformación de coordenadas $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (-t, r, \theta, \phi)$ implica

que

$$\begin{aligned} g_{0'0'} &= (\Lambda_{0'}^0)^2 g_{00} = g_{00}, \\ g_{0'r'} &= \Lambda_{0'}^0 \Lambda_{r'}^r g_{0r} = -g_{0r}, \\ g_{r'r'} &= (\Lambda_{r'}^r)^2 g_{rr} = g_{rr}, \end{aligned}$$

donde $\Lambda_{\nu'}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}}$. Dado que la geometría no cambia bajo reflexiones en la coordenada temporal tenemos $g_{\mu'\nu'} = g_{\mu\nu}$ y $g_{0r} = 0$. Por tanto, la métrica de un espacio-tiempo estático esféricamente simétrico es

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2), \quad (2.10)$$

donde se han introducido $e^{2\alpha(r)}$ y $e^{2\beta(r)}$ en lugar de las dos incógnitas $g_{00}(r)$ y $g_{rr}(r)$. Esto es aceptable pues siempre se cumple $g_{00} < 0$ y $g_{rr} > 0$.

Las componentes no cero del tensor de Einstein dada una métrica de la forma de la Ec.(2.10) son

$$G_{00} = \frac{1}{r^2} e^{2\alpha} \frac{d}{dr} (r(1 - e^{-2\beta})), \quad (2.11)$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2} e^{2\beta} (1 - e^{-2\beta}) + \frac{2}{r} \alpha', \quad (2.12)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\beta} \left(\alpha'' + (\alpha')^2 + \frac{\alpha'}{r} - \alpha' \beta' - \frac{\beta'}{r} \right), \quad (2.13)$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2(\theta) G_{\theta\theta}, \quad (2.14)$$

donde las variables primadas indican derivadas respecto a r .

Definimos

$$m(r) := \frac{1}{2} r (1 - e^{-2\beta}), \quad (2.15)$$

esto implica que

$$g_{rr} = e^{2\beta} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1}. \quad (2.16)$$

Como estamos interesados en una solución en el vacío, las ecuaciones de Einstein toman la forma $G_{\mu\nu} = 0$. Usando las Ecs.(2.11), (2.12) junto con la definición de $m(r)$ nos conduce a

$$\frac{dm(r)}{dr} = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{m(r)}{r(r - 2m(r))}, \quad (2.18)$$

cuyas soluciones son:

$$m(r) = M = \text{constante.} \quad (2.19)$$

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (2.20)$$

y se ha utilizado la condición

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha = 0. \quad (2.21)$$

Finalmente, la solución de Schwarzschild queda de la siguiente forma:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2). \quad (2.22)$$

Antes de seguir es conveniente mencionar algunas cosas. Primero, para largos valores de r , la métrica es asintóticamente plana, es decir, tiende a la métrica de Minkowski. Segundo, la métrica parece ser singular en $r = 0$ y $r = 2M$. En $r = 0$, se tiene una singularidad física donde los tensores de curvatura divergen; en $r = 2M$ los tensores de curvatura están bien definidos y están acotados, pero el espacio-tiempo tiene un *horizonte* justo en $r = 2M$ en estas coordenadas. El *horizonte* es una frontera que delimita dos regiones en el espacio-tiempo de tal forma que si un cuerpo está dentro del horizonte no podrá tener acceso a ninguna región fuera de esta.

Consideremos por un instante al planeta Tierra como un objeto esféricamente simétrico y estático. Entonces la métrica de Schwarzschild nos dice cómo es la geometría del espacio-tiempo fuera de la Tierra. En unidades geométricas M representa la masa de la Tierra, pero en general $M := Gm_T/c^2$, donde m_T es la masa de la Tierra, G es la constante gravitacional y c es la velocidad de la luz. El punto $r = 0$ está fuera de discusión ya que se encuentra al interior de la Tierra y por tanto la descripción de la geometría dada por la Ec.(2.22) no es válida. Por otra parte, el punto $r = 2M \approx 9,10^{-3}m$, por tanto también es un punto interno de la Tierra y la Ec.(2.22) no es válida.

La solución de Schwarzschild presenta un comportamiento cuando se analizan los puntos $r < 2M$. Resulta que las coordenadas t y r intercambian de roles, es decir, r se vuelve una coordenada tipo tiempo ($g_{rr} < 0$) y t se convierte en tipo espacio ($g_{00} > 0$). Como toda partícula debe de seguir por trayectorias tipo tiempo (o nulas en caso de ondas electromagnéticas) dicha partícula no puede dirigirse hacia otra dirección salvo hacia $r = 0$. Por tanto, el radio de Schwarzschild representa una superficie de no retorno, esto hace que la región del espacio-tiempo contenido dentro del radio de Schwarzschild esté causalmente desconectada del resto. A esta región se le da el nombre de *agujero negro*.

2.2. Descomposición 3+1

Para estudiar la evolución de cualquier sistema físico es necesario formular el problema como un problema de valores iniciales o problema de Cauchy. Las ecuaciones de Einstein están escritas de tal forma que el espacio y el tiempo juegan papeles equivalentes. Esta covariancia de las ecuaciones es importante desde el punto de vista teórico, pero no permiten pensar claramente en la evolución en el tiempo del campo gravitacional. Consideremos una variedad Lorentziana $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, es decir, donde la métrica \mathbf{g} tiene por signatura $(-, +, +, +)$. Si dicho espacio-tiempo puede ser foliado de tal forma que cada foliación (hipersuperficie) Σ sea tipo espacialoide, entonces se dice que dicho espacio-tiempo es globalmente hiperbólico^{**}. Un espacio-tiempo hiperbólico no posee curvas cerradas tipo tiempo. No todos los espacio-tiempo tienen dicha propiedad pero en el formalismo 3+1 se asume que los espacio-tiempo físicamente aceptables son de este tipo. Una vez que hemos decidido trabajar con un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, por definición, podemos foliarlo en una serie de hipersuperficies tipo espacio. Esta foliación en general no es única. Definimos el parámetro t como aquel que identifica a las distintas hojas de la foliación (ver Fig. 2.1); t puede considerarse entonces como un "tiempo universal" pero no necesariamente t debe de coincidir con el tiempo propio de nadie.

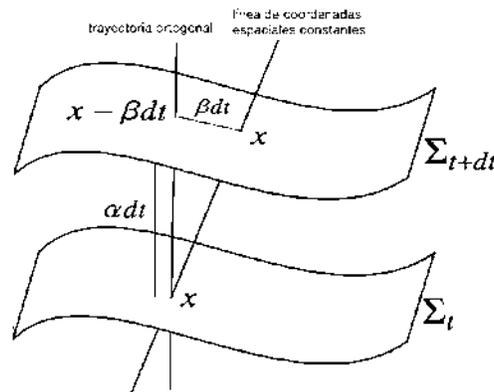


Figura 2.1: Dos hipersuperficies tipo espacio infinitesimalmente cercanas.

Sea n^μ un vector ortonormal a la hipersuperficie Σ_t . Como es ortonormal a una hipersuperficie tipo espacio, n^μ es un vector tipo tiempo. Definimos un observador de Euler como a aquellos que se mueven siguiendo líneas normales a las hipersuperficies que forman la foliación, de esta forma, el vector n^μ puede ser visto como la cuatro-velocidad de dicho observador.

^{**}Formalmente, un espacio-tiempo globalmente hiperbólico es aquel que admite superficies de Cauchy. Una superficie de Cauchy es una hipersuperficie Σ tipo espacio en \mathcal{M} tal para toda curva causal (tipo tiempo o nula) intersecta sólo en un punto a la hipersuperficie Σ .

Ahora consideremos 2 hipersuperficies adyacentes Σ_t y Σ_{t+dt} . La geometría de la región del espacio-tiempo contenida entre estas 2 hipersuperficies está determinada por los siguientes 3 ingredientes:

- La métrica tridimensional γ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) que mide las distancias dentro de la hipersuperficie misma:

$$dl^2 = \gamma_{ij}(t, x^i) dx^i dx^j. \quad (2.23)$$

- El lapso del tiempo propio $d\tau$ entre las hipersuperficies medido por los observadores de Euler:

$$d\tau = \alpha(t, x^i) dt, \quad (2.24)$$

donde α es la llamada función de lapso.

- La velocidad relativa β^i entre los observadores de Euler y las líneas con coordenadas espaciales constantes:

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i(t, x^j) dt, \quad (2.25)$$

para observadores de Euler. Al vector β^i se le conoce como el *vector de corrimiento* o *shift*.

La manera en que se hace la foliación no es única, como tampoco la manera en la que se propaga el sistema de coordenadas espaciales de una hipersuperficie a otra. Esto significa que tanto la función de lapso α como el shift β^i son funciones que pueden especificarse libremente. Estas funciones determinan nuestro sistema de coordenadas y son conocidas como *funciones de norma*.

En términos de las funciones $\{\alpha, \beta^i, \gamma_{ij}\}$, la métrica del espacio-tiempo toma la siguiente forma:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.26)$$

donde hemos definido $\beta_i := \gamma_{ij} \beta^j$. De esta forma la métrica \mathbf{g} del espacio-tiempo en término de las funciones $\{\alpha, \beta^i, \gamma_{ij}\}$ es

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^j/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

$$(2.29)$$

De la misma forma, el vector unitario n^μ normal a las hipersuperficies en términos de la funciones de lapso y shift es

$$n^\mu = \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{-\beta^i}{\alpha} \right), \quad n_\mu = (-\alpha, 0), \quad n^\mu n_\mu = -1. \quad (2.30)$$

En el contexto de hipersuperficies es conveniente diferenciar entre la curvatura *intrínseca* (ver Apéndice B.5) y la curvatura *extrínseca* de dicha hipersuperficie. La curvatura intrínseca está dada por el tensor de Ricci tridimensional definido en términos de la métrica espacial γ_{ij} . Por otro lado, la curvatura extrínseca $K_{\alpha\beta}$ se define en términos de lo que le ocurre al vector normal n^α al ser transportado paralelamente de un sitio a otro sobre la hipersuperficie. Antes de definir el tensor de curvatura extrínseca es necesario primero definir el operador de *proyección* P_β^α a las hipersuperficies espaciales

$$P_\beta^\alpha := \delta_b^a + n^\alpha n_\beta, \quad (2.31)$$

donde δ_b^a es la delta de Kronecker. Una consecuencia de esto es que para cualquier vector v^α

$$(P_\beta^\alpha v^\beta) n_\alpha = 0, \quad (2.32)$$

es decir, todo vector proyectado a la hipersuperficie es ortogonal a n^α . Podemos generalizar el operador proyección para tensores con varios índices contrayendo los índices libres con el operador proyección definido anteriormente

$$PT_{\alpha_1 \dots \alpha_n} := P_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots P_{\alpha_n}^{\beta_n} T_{\beta_1 \dots \beta_n}. \quad (2.33)$$

Usando el operador proyección, el tensor de curvatura extrínseca se define como

$$K_{\alpha\beta} := -P\nabla_\alpha n_\beta. \quad (2.34)$$

De la definición anterior es posible mostrar que el tensor de curvatura es simétrico ($K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}$) y sólo tiene componentes espaciales pues $n^\alpha K_{\alpha\beta} = 0$. Debido a esto, sólo consideraremos las componentes espaciales K_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$.

Sustituyendo la forma explícita del vector normal (Ec.(2.30)) en la definición de curvatura extrínseca (Ec.(2.34)) nos queda

$$K_{ij} = \frac{1}{2\alpha} \left(\partial_i \gamma_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i \right), \quad (2.35)$$

donde D_i es la derivada covariante con respecto a la métrica espacial γ_{ij} . La ecuación anterior puede reescribirse como

$$\partial_i \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i. \quad (2.36)$$

La Ec.(2.36) nos da información sobre la cinemática del sistema pues aún no hemos considerado las ecuaciones de Einstein y hemos trabajado sólo con conceptos geométricos. Utilizando el operador proyección podemos separar las ecuaciones de Einstein en 3 grupos

- Proyección normal:

$$n^\alpha n^\beta (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0. \quad (2.37)$$

- Proyección a la hipersuperficie:

$$P(G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0. \quad (2.38)$$

- Proyección mixta:

$$P(n^\alpha (P(G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}))) = 0. \quad (2.39)$$

Nos limitaremos a dar los resultados de las proyecciones, los detalles en las cuentas se pueden consultar [11, 12]. De la proyección normal obtenemos la siguiente ecuación

$$R + (\text{trK})^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho, \quad (2.40)$$

donde R es el escalar de curvatura de la métrica espacial, $\text{trK} := \gamma^{ij}K_{ij} = K_j^j$ es la traza de la curvatura extrínseca y $\rho := n_\alpha n_\beta T^{\alpha\beta}$ es la densidad de energía de la materia medida por los observadores de Euler. La Ec.(2.40) no involucra derivadas temporales. Debido a esto no es una ecuación de evolución si no una *constricción* o *ligadura* del sistema. Como involucra a la densidad de energía ρ , a esta constricción se le conoce como *constricción hamiltoniana*. De la proyección mixta de las ecuaciones de Einstein obtenemos

$$D_j(K^{ij} - \gamma^{ij}K_\ell^\ell) = 8\pi j^i, \quad (2.41)$$

donde j^i es el flujo de momento medido por los observadores de Euler

$$j^i := P_\beta^i(n_\alpha T^{\alpha\beta}). \quad (2.42)$$

La Ec.(2.41) tampoco tiene derivadas temporales por lo que es otra constricción y se le conoce como constricciones de momento.

Para conocer información sobre la dinámica del sistema es necesario obtener una ecuación de evolución para K_{ij} la cual proviene de proyectar las ecuaciones de Einstein a la hipersuperficie y dichas ecuaciones vienen dadas por

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} &= \beta^a D_a K_{ij} + K_{ia} D_j \beta^a + K_{ja} D_i \beta^a - D_i D_j \alpha \\ &+ \alpha (R_{ij} - 2K_{ia} K_j^a + K_{ij} \text{trK}) + 4\pi\alpha (\gamma_{ij}(\text{trS} - \rho) - 2S_{ij}), \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde S_{ij} es el *tensor de esfuerzos* de la materia definido por

$$S_{ij} := P T_{ij}. \quad (2.44)$$

Las Ecs.(2.36) y (2.43) forman un sistema cerrado de ecuaciones de evolución. A estas ecuaciones se les conoce como las ecuaciones de Arnowitt-Deser-Misner, o simplemente las ecuaciones ADM [13, 14]. Las constricciones de momento y la constricción hamiltoniana deben de satisfacerse durante toda la evolución, es decir, una solución de las Ecs.(2.36)

y (2.43) es solución de las ecuaciones de Einstein si y sólo si se satisfacen las constricciones durante toda la evolución. Debido a esto no es posible elegir de manera arbitraria las 12 cantidades dinámicas $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$ como condiciones iniciales. Los datos iniciales deben elegirse de tal modo que las constricciones se satisfagan desde el tiempo inicial. Las identidades de Bianchi garantizan que si las constricciones se satisfacen para el tiempo inicial entonces lo harán durante toda la evolución [12].

2.3. Formulación KST

La formulación KST [7, 15] nace de la necesidad de encontrar un sistema de ecuaciones fuertemente hiperbólico (ver Apéndice C) de las ecuaciones de Einstein en su forma 3+1. La formulación ADM como fue presentada en la sección 2.2 representa un sistema débilmente hiperbólico [12].

Empezamos escribiendo la métrica en la forma usual 3+1

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt), \quad (2.45)$$

donde γ_{ij} es la métrica tridimensional, β^i es el vector de corrimiento, y N es la función de lapso. En la formulación KST la función de lapso N no es libre; en vez de dejar libre la función de lapso se define una *densidad de la función de lapso* (o simplemente *densidad de lapso*) α

$$\alpha := \frac{N}{\sqrt{\gamma}}, \quad (2.46)$$

donde γ es el determinante de γ_{ij} . El uso de una densidad de lapso no limita de ninguna manera la libertad de elección de norma: en principio uno puede obtener cualquier función de lapso N a través de una apropiada elección de α^{***} .

Para escribir las ecuaciones de evolución en la formulación KST, primero definimos las nuevas variables

$$f_{kij} := \Gamma_{(ij)k} + \gamma_{ki}\gamma^{lm}\Gamma_{[lj]m} + \gamma_{kj}\gamma^{lm}\Gamma_{[li]m}, \quad (2.47)$$

donde Γ_{ij}^k es la conexión afín asociada con γ_{ij} , y $\Gamma_{ijk} := \gamma_{il}\Gamma_{jk}^l$; los parentesis y brackets simbolizan simetrización y antisimetrización respectivamente. Las variables f_{kij} junto con γ_{ij} y la curvatura extrínseca K_{ij} son las variables fundamentales en esta formulación.

*** No hay que confundir la densidad de lapso definida en esta sección con la función de lapso α definida en la formulación ADM. En este caso N toma el rol de la α como función de lapso.

De acuerdo con [15], las ecuaciones de evolución para este conjunto de variables son

$$\hat{\partial}_0 \gamma_{ij} = -2NK_{ij}, \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_0 K_{ij} + N\gamma^{kl} \partial_l f_{kij} &= N\{\gamma^{kl}(K_{kl}K_{ij} - 2K_{ki}K_{lj}) + \gamma^{kl}\gamma^{mn}(4f_{kmi}f_{[ln]j} + 4f_{km}[f_{l]ij} - f_{ikm}f_{jln}) \\ &+ 8f_{(ij)k}f_{[ln]m} + 4f_{km}(f_{j]ln} - 8f_{kli}f_{mnj} + 20f_{kl(i}f_{j)mn} - 13f_{ikl}f_{jmn} \\ &- \partial_i \partial_j \ln \alpha - (\partial_i \ln \alpha)(\partial_j \ln \alpha) + 2\gamma_{ij}\gamma^{kl}\gamma^{mn}(f_{kmn} \partial_l \ln \alpha - f_{kml} \partial_n \ln \alpha) \\ &+ \gamma^{kl}[(2f_{(ij)k} - f_{kij}) \partial_l \ln \alpha + 4f_{kl(i} \partial_j) \ln \alpha - 3(f_{ikl} \partial_j \ln \alpha + f_{jkl} \partial_i \ln \alpha)] \\ &- 8\pi S_{ij} + 4\pi\gamma_{ij}T\}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_0 f_{kij} + N \partial_k K_{ij} &= N\{\gamma^{mn}[4K_{k(i}f_{j)mn} - 4f_{mn(i}K_{j)k} + K_{ij}(2f_{mnk} - 3f_{kmn})] \\ &+ 2\gamma^{mn}\gamma^{pq}[K_{mp}(\gamma_{k(i}f_{j)qn} - 2f_{qn(i}\gamma_{j)k}) + \gamma_{k(i}K_{m)}(8f_{npq} - 6f_{pqn}) \\ &+ K_{mn}(4_{pq(i}\gamma_{j)k} - 5\gamma_{k(i}f_{j)pq})] - K_{ij} \partial_k \ln \alpha \\ &+ 2\gamma^{mn}(K_{m(i}\gamma_{j)k} \partial_n \ln \alpha - K_{mn}\gamma_{k(i} \partial_j) \ln \alpha) + 16\pi\gamma_{k(i}J_{j)}\}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

En este caso, el símbolo $\hat{\partial}_0$ es el operador derivada temporal normal a la hipersuperficie, definido por

$$\hat{\partial}_0 := \partial_t - \mathcal{L}_\beta, \quad (2.51)$$

donde \mathcal{L} es la derivada de Lie.

Una solución de las Ecs.(2.48), (2.49) y (2.50) no es solución de las ecuaciones de Einstein a menos que las 22 constricciones se satisfagan. Dichas constricciones son la constricción hamiltoniana

$$\begin{aligned} C &:= \gamma^{ij}\gamma^{kl}\{2(\partial_k f_{ijl} - \partial_i f_{jkl}) + K_{ik}K_{jl} - K_{ij}K_{kl} \\ &+ \gamma^{mn}[f_{ikm}(5f_{jln} - 6l_{jn}) + 13f_{ikl}f_{jmn} \\ &+ f_{ijk}(8f_{mln} - 20f_{lmn})]\} + 16\pi\rho = 0, \end{aligned} \quad (2.52)$$

las 3 constricciones de momento

$$\begin{aligned} C_i &:= \gamma^{kl}\{\gamma^{mn}[K_{ik}(3f_{lmn} - 2f_{mnl}) - K_{km}f_{iln}] \\ &+ \partial_i K_{kl} - \partial_k K_{il}\} + 8\pi J_i = 0, \end{aligned} \quad (2.53)$$

y las 18 constricciones adicionales

$$C_{kij} := \partial_k \gamma_{ij} - 2f_{kij} + 4\gamma^{lm}(f_{lm(i}\gamma_{j)k} - \gamma_{k(i}f_{j)lm}) = 0, \quad (2.54)$$

que relacionan a las nuevas variables f_{kij} con las derivadas espaciales de la métrica γ_{ij} .

Las Ecs.(2.48)-(2.50) forman un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales fuertemente hiperbólico [15]. Para resolver estas ecuaciones se hace uso de los métodos pseudo-

espectrales descritos en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Métodos numéricos

Como se dijo antes, las ecuaciones de Einstein representan un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden las cuales estamos interesados en resolver de forma numérica. Existen una gran variedad de métodos numéricos de los cuales hemos enfocado nuestra atención en los llamados métodos pseudoespectrales. Se le llama método pseudoespectral a aquel método que involucre una mezcla entre algún método numérico y algún método espectral. Uno de los motivos de escribir las ecuaciones de Einstein en la formulación KST es que podemos resolverlas numéricamente usando el método de líneas (ver Sección 3.1) en el cual se calculan las derivadas espaciales con alguno de los métodos espectrales descritos en la secciones 3.3.1 y 3.3.2; y se evoluciona en el tiempo con un integrador Runge-Kutta ([16]) de 4to orden (ver Sección 3.2).

3.1. Método de líneas

La idea básica detrás del método de líneas consiste en tomar una ecuación diferencial parcial dependiente del tiempo y dejarla expresada de tal forma que sólo involucre derivadas temporales de primer orden

$$\partial_t U = G(t, x^1, \dots, x^n, U, \partial_{x^1} U, \dots, \partial_{x^n} U, \partial_{x^j x^k} U, \dots, \partial_{x^1, \dots, x^n} U). \quad (3.1)$$

donde U es un vector de variables, x^i son las coordenadas del dominio donde se trabaja y $\partial_{x^i \dots x^j} U$ son las derivadas espaciales de U respectivamente. La parte derecha de la Ec.(3.1) sólo depende del tiempo t , de las coordenadas espaciales x^i , de las variables U^i y de las derivadas espaciales de U . Por tanto es posible plantear el problema como un problema de datos iniciales o de Cauchy.

Para poder plantear el problema como un problema de Cauchy es necesario conocer el valor de G para el tiempo inicial. Dado que sólo se conocen los valores iniciales para U , y que G depende también de las derivadas espaciales de U , es necesario conocer el valor de

estas derivadas al tiempo inicial. Una vez hecho esto, es posible mediante algún integrador numérico conocer el valor U en $t_1 = t_0 + \Delta t$.

3.2. Integrador Runge-Kutta de 4to orden

En general los métodos Runge-Kutta (RK) son un conjunto de métodos numéricos diseñados para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, concretamente, el problema de Cauchy. Supongamos que queremos resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$f' = G(t, f), \quad (3.2)$$

provista de los datos iniciales $f(t_0) = f_0$ y $G(t_0, f_0) = G_0$. Entonces podemos aproximar la solución en $f(t_0 + \Delta t)$ como

$$f(t_0 + \Delta t) = f_0 + \frac{\Delta t}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad (3.3)$$

donde los K_i , $i = 1, 2, 3, 4$ son

$$K_1 = G_0, \quad (3.4)$$

$$K_2 = G\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, f_0 + K_1 \frac{\Delta t}{2}\right), \quad (3.5)$$

$$K_3 = G\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, f_0 + K_2 \frac{\Delta t}{2}\right), \quad (3.6)$$

$$K_4 = G(t_0 + \Delta t, U_0 + K_3 \Delta t). \quad (3.7)$$

Dado un problema en la forma de la Ec.(3.1)

$$\partial_t U = G(t, x^1, \dots, x^n, U, \partial_{x^1} U, \dots, \partial_{x^n} U, \partial_{x^j x^k} U, \dots, \partial_{x^1 \dots x^n} U),$$

donde U es un vector de variables. Podemos evolucionar el sistema en el tiempo siempre y cuando conozcamos los valores de $\{t, x^1, \dots, x^n, U, \partial_{x^1} U, \dots, \partial_{x^n} U, \partial_{x^j x^k} U, \dots, \partial_{x^1 \dots x^n} U\}$ al tiempo inicial. De esta forma podemos ver el sistema como un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas para las variables de U y podemos usar el integrador Runge-Kutta para conocer el estado del sistema al tiempo $t = t_0 + \Delta t$. Hay que resaltar que sólo hemos evolucionado las variables U por lo que si quisieramos conocer el estado del sistema al tiempo $t = t_0 + 2\Delta t$ necesitaríamos también conocer los valores de las demás variables asociadas a G las cuales involucran derivadas espaciales de U . En la siguiente sección se describen métodos numéricos que justamente resuelven este problema, es decir, nos dan una forma de calcular las derivadas espaciales de U en cada paso de tiempo.

El método descrito anteriormente tiene un error asociado de $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ por lo que es co-

nocido en la literatura como integrador Runge-Kutta de 4to orden explícito o simplemente RK4.

3.3. Métodos espectrales

Los métodos espectrales son una clase de métodos numéricos los cuales son utilizados para resolver ecuaciones diferenciales. Supongamos que queremos calcular lo siguiente:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = f(x) \quad (3.8)$$

Existe una gran variedad de métodos espectrales (ME) pero todos se basan en la misma idea, la cual consiste en aproximar la función $u(x)$ como una expansión truncada en cierta base de funciones $\phi(x)$

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(x) \quad (3.9)$$

sustituyendo la Ec.(3.9) en la Ec.(3.8):

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} \approx \frac{\partial u_N(x)}{\partial x} = \sum_{n=0}^N a_n \frac{\partial \phi(x)}{\partial(x)} = f(x). \quad (3.10)$$

La base de funciones $\phi(x)$ es conocida, por lo que el trabajo principal es conocer los coeficientes a_n , que dependiendo del ME a elegir se calculan de diferentes formas. Por supuesto el problema planteado por la Ec.(3.8) no está bien definido en el sentido que no especifica una condición inicial para $u(x)$. Si se pide que $u(x_0) = u_0$, $x_0 \in [-1, 1]$; entonces esto nos da un sistema de $N + 1$ ecuaciones para los coeficientes a_n .

Una pregunta inmediata es ¿cuál base de funciones se debe de elegir? No hay respuesta absoluta ya que la base de funciones a elegir dependerá del problema en específico que se quiera tratar. Sin embargo existen ciertos *criterios* que nos dicen o sugieren cuál base es mejor para la solución del problema.

- Cuando haya duda, usar polinomios de Chebyshev a menos que la solución sea espacialmente periódica, en ese caso una serie ordinaria de Fourier es mejor.
- A menos que estés seguro que otro conjunto de funciones base es mejor, usar los polinomios de Chebyshev.

Existen excepciones: sobre la superficie de una esfera es mejor usar los armónicos esféricos que los polinomios de Chebyshev aunque estos funcionan también.

3.3.1. Método de colocación de Chebyshev

Considere una función suave $u(x)$ en el dominio $x \in [-1, 1]$ y sea $T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x))$ el polinomio de Chebyshev de orden n . Entonces podemos aproximar la función como

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x) \quad (3.11)$$

Los puntos de colocación Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL) son

$$x_i = \cos \frac{\pi i}{N} \quad i = 0, \dots, N, \quad (3.12)$$

y corresponden a los extremos de los polinomios de Chebyshev, es decir, donde alcanzan su máximo o mínimo. Para calcular los coeficientes a_n también llamados coeficientes espectrales se hace uso de la relación de ortogonalidad de los polinomios de Chebyshev (ver Ec.(A.12)) en los puntos de colocación

$$\delta_{ij} = \frac{2}{N c_k} \sum_{n=0}^N \frac{1}{c_n} T_j(x_n) T_k(x_n) \quad (3.13)$$

donde

$$c_k = \begin{cases} 2, & k = 0 \text{ ó } k = N, \\ 1, & 1 \leq k \leq N - 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

Usando la relación de ortogonalidad (Eq.(3.13)), los coeficientes espectrales están dados por

$$a_n = \frac{2}{N c_k} \sum_{n=0}^N \frac{1}{c_n} u_N(x_n) T_k(x_n). \quad (3.15)$$

Una vez calculados los coeficientes la derivada de la función $u(x)$ es simplemente

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{\partial u_N(x)}{\partial x} = \sum_{n=0}^N a_n \frac{\partial T_n(x)}{\partial x}. \quad (3.16)$$

Hay que notar que la solución no está dada solamente en los puntos de colocación si no en todo el dominio $x \in [-1, 1]$ a diferencia de otros métodos numéricos como en el caso de diferencias finitas donde sólo se conoce la solución para los puntos de la malla.

También es posible escribir la derivada de $u(x)$ como otra expansión sobre los polinomios de Chebyshev

$$\frac{\partial u_N(x)}{\partial x} = \sum_{n=0}^N a'_n T_n(x), \quad (3.17)$$

usando la relación de recursión

$$\bar{c}_n a'_n = a'_{n+2} + 2(n+1)a_{n+1}, \quad (3.18)$$

donde

$$\bar{c}_n = \begin{cases} 2, & k = 0, \\ 1, & k \geq 1. \end{cases} \quad (3.19)$$

3.3.2. Método de interpolación de Lagrange

El método pseudoespectral de Chebyshev nos da una manera de aproximar la función $u(x)$

$$u_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x), \quad (3.20)$$

donde los coeficientes a_n , $n = 0, \dots, N$ son determinados pidiendo que $u(x) = u_N(x)$ en los puntos de colocación $x_i = \cos(i\pi/N)$, $i = 0, \dots, N$. Por tanto, el polinomio de grado N de la Ec.(3.20) no es otra cosa mas que el polinomio de interpolación de Lagrange basado sobre los puntos de colocación. Entonces, podemos escribirlo de la siguiente forma

$$u_N(x) = \sum_{j=0}^N u(x_j) L_j(x), \quad (3.21)$$

con $u_N(x_i) = u(x_i)$, y donde $L_j(x)$ es el polinomio de grado N definido por

$$L_j(x) = \frac{(-1)^{j+1} (1-x^2) T'_N(x)}{c_j N^2 (x-x_j)}, \quad (3.22)$$

donde T'_N es la derivada de T respecto a x .

La expresión para L_j es fácilmente construida demandando que los puntos de colocación x_j sean los ceros del polinomio $(1-x^2) T'_N(x)$ (ver Apéndice A.) y observando que

$$\lim_{x \rightarrow x_j} \frac{(1-x^2) T'_N(x)}{(x-x_j)} = (-1)^{j+1} c_j N^2, \quad j = 0, \dots, N. \quad (3.23)$$

Una consecuencia inmediata es que $L_j(x_i) = \delta_{ij}$. Entonces,

$$u_N(x_i) = \sum_{j=0}^N u(x_j) L_j(x_i) = \sum_{j=0}^N u_j \delta_{ji} = u_i, \quad (3.24)$$

por lo tanto la representación (3.20) es equivalente a (3.21) y es útil en muchas circunstan-

cias pues no involucra a los coeficientes espectrales.

Para calcular la derivada de $u(x)$, lo ideal es calcular la derivada sobre los puntos de colocación x_k , $k = 0, \dots, N$ y después ver a esta nueva función como una interpolación de Lagrange para tener la solución en todo el dominio. Empecemos por calcular la derivada en los puntos de colocación

$$u'(x_k) = u'_N(x_k) = \sum_{j=0}^N u_j L'_j(x_k), \quad (3.25)$$

u_j es conocida por lo que el problema se reduce en encontrar $L'_j(x_i)$.

Definimos la *matriz de derivada de Chebyshev* D_x , como la derivada analítica de $L_j(x)$ evaluada en los puntos de colocación x_k , es decir, las componentes de $(D_x)_{k,j} = d_{kj} = L'_j(x_k)$, $j, k = 0, \dots, N$. Entonces, las entradas de la matriz son

$$d_{kj} = \frac{c_k (-1)^{j+k}}{c_j (x_k - x_j)}, \quad j \neq k, \quad (3.26)$$

$$d_{kk} = -\frac{1}{2} \frac{x_k}{(1 - x_k^2)}, \quad k \neq 0, N, \quad (3.27)$$

$$d_{00} = -d_{NN} = \frac{2N^2 + 1}{6}, \quad (3.28)$$

y la derivada de $u(x_k)$ es

$$u'_k = \sum_{j=0}^N u_j d_{kj}, \quad k = 0, \dots, N. \quad (3.29)$$

Hasta ahora, tanto el método pseudoespectral de Chebyshev como el método de interpolación de Lagrange (también llamado método pseudoespectral) han mostrado cómo calcular la derivada de una función $u(x)$, en el dominio $x \in [-1, 1]$. Sin embargo, en general estamos interesados en resolver problemas físicos donde el dominio no es generalmente el de los polinomios de Chebyshev. Lo que se hace es dar un mapeo del dominio físico al dominio de los polinomios de Chebyshev, $X : [x_{min}, x_{max}] \rightarrow [-1, 1]$. Si el mapeo es lineal (por simplicidad)

$$X(x) = \frac{2}{(x_{max} - x_{min})} (x - x_{max}) + 1, \quad (3.30)$$

sustituyendo el mapeo en el operador diferencial

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{\partial u(X)}{\partial X} \frac{\partial X(x)}{\partial x} = \frac{2}{(x_{max} - x_{min})} \frac{\partial u(X)}{\partial X}. \quad (3.31)$$

Por tanto la Ec.(3.31) nos da una manera de calcular la derivada de una función definida en cualquier dominio cerrado.

3.3.3. Convergencia

Aunque los teoremas de convergencia en métodos espectrales han sido estudiados profundamente y se pueden encontrar en muchos textos a lo largo de la literatura [17, 18, 19], nosotros nos limitaremos a enunciar algunos teoremas y aspectos importantes que sustentan el uso de los métodos espectrales.

Sea $u(x) \in C^\infty$ definida en $x \in [-1, 1]$. Podemos escribir entonces la función en su representación como serie

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), \quad (3.32)$$

como estamos interesados en una implementación numérica es imposible alcanzar el límite cuando $n \rightarrow \infty$ así que tenemos que estudiar que tan bien converge la serie truncada a la función deseada. La Ec.(3.32) la podemos escribir de la siguiente forma

$$u(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n T_n(x) = u_N(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n T_n(x), \quad (3.33)$$

esto nos lleva a la siguiente desigualdad

$$|u(x) - u_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n T_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| |T_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|, \quad (3.34)$$

nótese que para llegar a la desigualdad en la Ec.(3.34) hemos usado la desigualdad del triángulo y el hecho que $|T_n(x)| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ en el dominio $x \in [-1, 1]$. En general, la velocidad de convergencia de los coeficientes $|a_n|$ dependenden de la suavidad de la función que se quiera aproximar. Antes de proseguir con los teoremas de convergencia de la serie de Chebyshev es conveniente definir a que nos referimos cuando hablamos de ordenes de convergencia.

Definición 3.1 *El índice algebraico de convergencia k es el número más grande para el cual*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| n^k \leq \infty, \quad n \gg 1 \quad (3.35)$$

donde a_n son los coeficientes de la serie. En pocas palabras, si los coeficientes de una serie son a_n y si

$$a_n \sim O[1/n^k], \quad n \gg 1 \quad (3.36)$$

entonces k es la índice algebraico de convergencia.

Definición 3.2 *Si el índice algebraico de convergencia k no está acotado -es decir, si los coeficientes a_n decrecen más rápido que $1/n^k$ para cualquier potencia finita de k - entonces*

se dice que la serie tiene la propiedad de convergencia ".*EX*PONENCIAL", o ".*ES*PECTRAL". En otras palabras, si

$$a_n \sim O[\exp(-qn^r)], \quad n \gg 1 \quad (3.37)$$

donde q es una constante para alguna $r > 0$, entonces la serie se dice que tiene convergencia exponencial. Al término r se le conoce como el índice exponencial de convergencia.

Hay que mencionar que las definiciones anteriores son asintóticas, es decir, están basadas en el comportamiento de las series para grandes valores de n .

Teorema 3.3.1 Sea $u(x) \in C^{m+1}$ en el dominio $x \in [-1, 1]$, donde $m \in \mathbb{N}$, entonces $|u(x) - u_N(x)| = O(N^{-m})$ como $N \rightarrow \infty \forall x \in [-1, 1]$.

Teorema 3.3.2 Sea $u(x) \in C^\infty$ en el dominio $x \in [-1, 1]$, entonces $|u(x) - u_N(x)| = O(\frac{1}{N!})$ como $N \rightarrow \infty \forall x \in [-1, 1]$.

Teorema 3.3.3 Sea $z = x + iy$. Introducimos las coordenadas elípticas (μ, η) definidas por las siguientes ecuaciones

$$x = \cosh(\mu) \cos(\eta), \quad \mu \in [0, \infty] \quad (3.38)$$

$$y = -\sinh(\mu) \sin(\eta), \quad \eta \in [0, 2\pi], \quad (3.39)$$

las superficies de μ constante son elipses en el plano complejo con focos en $z = -1$ y $z = 1$. Para grandes valores de μ , las coordenadas elípticas tienden a las coordenadas polares con μ proporcional a $\log(r)$ y $\eta \rightarrow -\theta$. Supongamos que $u(z)$ tiene polos, puntos de ramificación u otro tipo de puntos singulares (en coordenadas elípticas) (μ_j, η_j) , $j = 1, 2, \dots$ en el plano complejo. Definimos

$$\mu_0 \equiv \min_j |\mu_j| \quad (3.40)$$

Entonces la serie de Chebyshev

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(z) \quad (3.41)$$

converge dentro la región delimitada por la elipse $\mu = \mu_0$,

$$\mu \leq \mu_0, \quad \forall \eta, \quad (3.42)$$

y diverge para toda (x, y) fuera de esta elipse.

Los coeficientes estan relacionados con μ_0 , la coordenada cuasi-radial de la elipse, por la ecuación

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) = \mu_0. \quad (3.43)$$

Observación: la "elipse" $\mu = 0$ es el intervalo real $[-1, 1]$. Si los coeficientes a_n decrecen algebraicamente con n o si la convergencia es exponencial pero subgeométrica, entonces la serie de Chebyshev converge solamente para $\mu = 0$, es decir, solamente sobre el intervalo real $z \in [-1, 1]$.

3.4. La ecuación de onda como ejemplo

Considere la ecuación de onda en una dimensión espacial, en el dominio $x \in [-10, 10]$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.44)$$

donde la velocidad de propagación de la onda v , se asume igual a 1. Esto es algo que siempre se puede hacer simplemente reescalando el intervalo temporal $t \rightarrow v\bar{t}$. Sujeta a las condiciones de Cauchy

$$u(x, 0) = f(x), \quad (3.45)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x). \quad (3.46)$$

Para resolver la Ec.(3.44) es conveniente reescribirla en una forma donde sólo inter vengan derivadas temporales de primer orden, para poder de esa forma usar el método de líneas. Como veremos mas adelante no sólo basta con reescribir la ecuación como primer orden en el tiempo si no que es necesario dejarla en términos de los campos característicos (ver Apéndice C) que salen de analizar una ecuación tipo hiperbólica y poder imponer de forma adecuada condiciones de frontera en el dominio numérico.

Regresando con nuestro problema, empezamos definiendo dos nuevas variables $\{\phi, \psi\}$ de la siguiente forma

$$\phi = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3.47)$$

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.48)$$

Sea $U = [\psi, \phi]^T$, usando la Ec.(3.44) tenemos

$$\partial_t U = \begin{bmatrix} \partial_t \psi \\ \partial_t \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x \phi \\ \partial_x \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \partial_x U. \quad (3.49)$$

Con esto hemos logrado escribir la Ec.(3.44) en la forma de la Ec.(C.2) donde

$$A^x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

cuyos eigenvalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ con las eigenvectores normalizados respectivos

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

finalmente los campos característicos resultantes son

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \psi \\ \phi \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \psi \\ -\phi \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Por tanto en vez de solucionar la Ec.(3.44) vamos a resolver las Ecs.(3.47) y (3.49) con los siguientes datos iniciales:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= Ae^{(-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2})}, \\ \psi(x, 0) &= -2\frac{(x-x_0)}{\sigma^2}u(x, 0), \\ \phi(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Las Ecs.(3.47) y (3.49) junto con los datos iniciales provistos por (3.55) admiten solución analítica por lo que podremos compararla con nuestra aproximación numérica. La evolución de la ecuación de onda se hizo mediante el método de líneas (Sección 3.1) en el cual usamos un integrador Runge-Kutta de 4to orden en el tiempo (Sección 3.2) y calculamos las derivadas espaciales usando los métodos espectrales (Sección 3.3). Los campos característicos w_1, w_2 se usaron para imponer condiciones de frontera apropiadas en el dominio numérico. Lo que se hace es congelar la evolución temporal de los campos característicos en las fronteras donde el campo sea entrante $\partial_t w_\lambda = 0$. En donde son salientes no se les hace nada. Para nuestro ejemplo, w_1 es el campo característico con velocidad $\lambda_1 = 1$, es decir, se mueve de izquierda a derecha por lo que es un campo saliente en la frontera derecha y un campo entrante en la izquierda. Por otro lado el campo w_2 se mueve con velocidad $\lambda_2 = -1$, por lo que es un campo entrante en la frontera derecha y un campo saliente en la

izquierda

$$\partial_t w_1(-1, t) = 0, \quad (3.56)$$

$$\partial_t w_2(1, t) = 0. \quad (3.57)$$

Como se mencionó antes, la Ec.(3.44) junto con los datos iniciales (3.55), (3.55) y (3.55) admite solución analítica y esta es de la forma

$$\zeta = \frac{1}{2} A e^{-\frac{(x-x_0-vt)^2}{\sigma^2}} + \frac{1}{2} A e^{-\frac{(x-x_0+vt)^2}{\sigma^2}}. \quad (3.58)$$

Una buena forma de medir la convergencia de nuestro código es calcular la 2-norma del error en $u(x, t)$, es decir, calculamos la diferencia entre la solución analítica y la numérica para diferentes valores de N . Se espera que el error tienda a cero mientras se incrementa el número de puntos de colocación.

$$\|\delta u\|_2 = \|\zeta(x, t) - u_N(x, t)\|_2 = \left(\int_{-10}^{10} |\zeta(x, t) - u_N(x, t)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (3.59)$$

La 2-norma del error $\|\delta u\|_2$, se calculó no sólo sobre los puntos de colocación si no para una malla uniforme y suficientemente fina donde se evaluó tanto la solución analítica como la aproximación numérica. En la Fig.3.1 se muestra la 2-norma de la desviación de u respecto a la solución analítica en función del tiempo para distintos valores de N . En todas las simulaciones se usaron los mismos parametros los cuales son: $A = 1$; $x_0 = 0$; $\sigma = 1$.

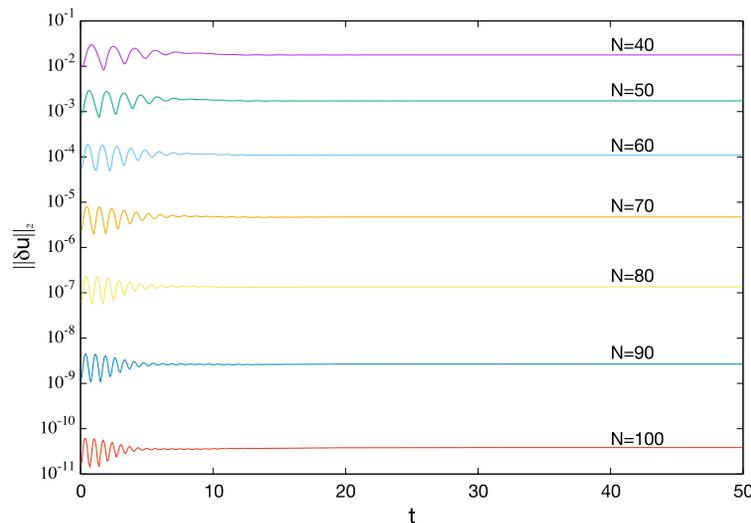


Figura 3.1: 2-norma del error en $u(x, t)$ como función del tiempo para $t \in [0, 50]$. Es claro que al aumentar N el error disminuye.

En la Fig.3.2 se muestran las gráficas de la solución analítica $\zeta(x, t)$ v.s. x superpuesta con los valores de $u_N(x, t)$ en los puntos de colocación x_i , $i = 0, \dots, N$ para distintos valores de tiempo. El número de puntos de colocación es $N = 50$.

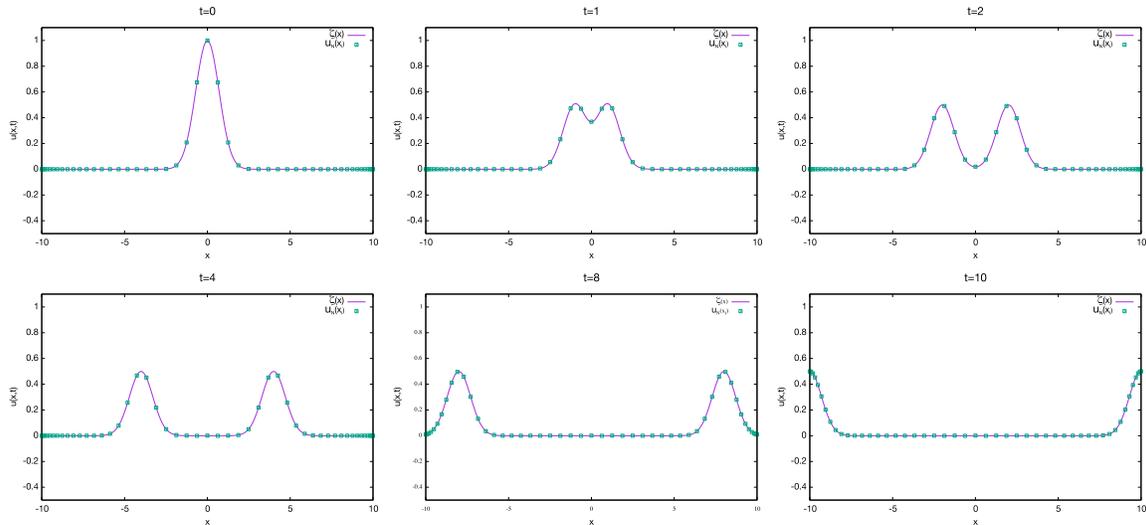


Figura 3.2: Solución exacta y numérica. La solución exacta se muestra por la línea continua mientras que la numérica solo sobre los puntos de colocación para distintos valores de tiempo. Se puede observar que para $N = 50$, $u_N(x_j)$ se encuentra sobre la línea de la solución exacta $\zeta(x)$.

Una de las razones por las que se escogió evolucionar la ecuación de onda es porque la mayoría de las ecuaciones fundamentales en las teorías de campo modernas (incluyendo las de Einstein) se pueden ver como generalizaciones de diversos tipo de la ecuación de onda. Más aún, las ecuaciones de Einstein en su formulación KST tienen las mismas propiedades de hiperbolicidad que la ecuación de onda presentada aquí, por lo que este modelo de juguete sirve como guía de lo hecho con las ecuaciones de Einstein presentadas en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Evolución

Los métodos pseudoespectrales han sido aplicados exitosamente en la solución de problemas en diversos campos, incluyendo dinámica de fluidos, meteorología, y astrofísica relativista ([17, 18, 20, 21]). Por ejemplo, los métodos pseudoespectrales han sido aplicados con éxito en el modelado de colapsos de núcleos estelares [22]. En este capítulo se evolucionan agujeros negros en simetría esférica usando los métodos pseudoespectrales en la formulación hiperbólica de las ecuaciones de Einstein, la formulación KST. Una formulación hiperbólica proporciona una prescripción bien planteada para la imposición de las condiciones de frontera. Hemos encontrado que nuestro código es capaz de evolucionar agujeros negros en simetría esférica indefinidamente. Más aún, la solución obtenida converge exponencialmente a la solución exacta al ir aumentando el número de puntos de colocación.

4.1. Ecuaciones de evolución en simetría esférica

Como se mencionó antes, la forma más general de la métrica en simetría esférica puede ser escrita como

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{rr}(dr + \beta^r dt)^2 + \gamma_T r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.1)$$

donde γ_T es la componente métrica transversal definida como

$$\gamma_T := \frac{\gamma_{\theta\theta}}{r^2} = \frac{\gamma_{\phi\phi}}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.2)$$

Las 2 componentes independientes no cero de la curvatura extrínseca son K_{rr} y K_T , donde

$$K_T := \frac{K_{\theta\theta}}{r^2} = \frac{K_{\phi\phi}}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.3)$$

Las componentes no cero de f_{kij} son f_{rrr} , la componente transversal

$$f_{rT} := \frac{f_{r\theta\theta}}{r^2} = \frac{f_{\theta\theta r}}{2r^2} = \frac{f_{r\phi\phi}}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{f_{\phi\phi r}}{2r^2 \sin^2 \theta}, \quad (4.4)$$

y las componentes adicionales

$$f_{rr\theta} = \gamma_{rr} \cot \theta, \quad (4.5)$$

$$f_{\theta\theta\theta} = 2r^2 \gamma_T \cot \theta, \quad (4.6)$$

$$f_{\theta\phi\phi} = r^2 \gamma_T \sin \theta \cos \theta, \quad (4.7)$$

$$f_{\phi\theta\phi} = r^2 \gamma_T \sin \theta \cos \theta. \quad (4.8)$$

Las ecuaciones de evolución para las componentes adicionales, Ecs.(4.5) - (4.8), se cumplen automáticamente si las ecuaciones de evolución para la métrica se satisfacen. Por tanto no tratamos estas cantidades como variables independientes, y donde quiera que aparezcan en las ecuaciones las reemplazamos con las componentes de la métrica apropiada.

Tomamos como variables fundamentales las 6 cantidades γ_{rr} , γ_T , K_{rr} , K_T , f_{rrr} , y f_{rT} . Usando las Ecs.(2.48), (2.49) y (2.50), obtenemos las siguientes ecuaciones de evolución para estas variables

$$\partial_t \gamma_{rr} = \beta^r \partial_r \gamma_{rr} - 2\alpha K_{rr} + 2\gamma_{rr} \partial_r \beta^r, \quad (4.9)$$

$$\partial_t \gamma_T = \beta^r \partial_r \gamma_T - 2\alpha K_T + 2\frac{\beta^r}{r} \gamma_T, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{rr} &= \beta^r \partial_r K_{rr} - \frac{\alpha}{\gamma_{rr}} \partial_r f_{rrr} + \alpha \left[2\frac{f_{rrr}}{\gamma_{rr}} \left(\frac{f_{rrr}}{\gamma_{rr}} + \frac{1}{r} - \frac{4f_{rT}}{\gamma_T} \right) - \frac{6}{r^2} + K_{rr} \left(2\frac{K_T}{\gamma_T} - \frac{K_{rr}}{\gamma_{rr}} \right) \right. \\ &\quad \left. - 6\left(\frac{f_{rT}}{\gamma_T}\right)^2 - \partial_r^2 \ln \tilde{\alpha} - (\partial_r \ln \tilde{\alpha})^2 + \left(\frac{4}{r} - \frac{f_{rrr}}{\gamma_{rr}}\right) \partial_r \ln \tilde{\alpha} \right] + 2K_{rr} \partial_r \beta^r, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\partial_t K_T = \beta^r \partial_r K_T - \frac{\alpha}{\gamma_{rr}} \partial_r f_{rT} + \alpha \left(K_T \frac{K_{rr}}{\gamma_{rr}} + \frac{1}{r^2} - \frac{2f_{rT}^2}{\gamma_{rr} \gamma_T} - \frac{f_{rT}}{\gamma_{rr}} \partial_r \ln \tilde{\alpha} \right) + \frac{2\beta^r}{r} K_T, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \partial_t f_{rrr} &= \beta^r \partial_r f_{rrr} - \alpha \partial_r K_{rr} + \alpha \left[4\gamma_{rr} \frac{K_T}{\gamma_T} \left(3\frac{f_{rT}}{\gamma_T} - \frac{f_{rrr}}{\gamma_{rr}} + \frac{2}{r} - \partial_r \ln \tilde{\alpha} \right) \right. \\ &\quad \left. - K_{rr} \left(10\frac{f_{rT}}{\gamma_T} + \frac{f_{rrr}}{\gamma_{rr}} - \frac{2}{r} + \partial_r \ln \tilde{\alpha} \right) \right] + 3f_{rrr} \partial_r \beta^r + \gamma_{rr} \partial_r^2 \beta^r, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\partial_t f_{rT} = \beta^r \partial_r f_{rT} - \alpha \partial_r K_T + \alpha \left[K_T \left(2\frac{f_{rT}}{\gamma_T} - \frac{f_{rrr}}{\gamma_{rr}} - \partial_r \ln \tilde{\alpha} \right) \right] + \left(\partial_r \beta^r + \frac{2\beta^r}{r} \right) f_{rT}, \quad (4.14)$$

donde

$$\tilde{\alpha} := \alpha r^2 \sin \theta = \frac{N}{\gamma_T \sqrt{\gamma_{rr}}}. \quad (4.15)$$

Las 6 variables fundamentales deben de satisfacer 4 constricciones que se obtienen a partir de las Ecs.(2.52), (2.53) y (2.52) en simetría esférica

$$C := \frac{\partial_r f_{rT}}{\gamma_{rr} \gamma_T} - \frac{1}{2r^2 \gamma_T} + \frac{f_{rT}}{\gamma_{rr} \gamma_T} \left(\frac{2}{r} + \frac{7f_{rT}}{2\gamma_T} - \frac{f_{rrr}}{\gamma_{rr}} \right) - \frac{K_T}{\gamma_T} \left(\frac{K_{rr}}{\gamma_{rr}} + \frac{K_T}{2\gamma_T} \right) = 0, \quad (4.16)$$

$$C_r := \frac{\partial_r K_T}{\gamma_T} + \frac{2K_T}{r\gamma_T} - \frac{f_{rT}}{\gamma_T} \left(\frac{K_{rr}}{\gamma_{rr}} + \frac{K_T}{\gamma_T} \right) = 0, \quad (4.17)$$

$$C_{rrr} := \partial_r \gamma_{rr} + \frac{8\gamma_{rr} f_{rT}}{\gamma_T} - 2f_{rrr} = 0, \quad (4.18)$$

$$C_{rT} := \partial_r \gamma_T + \frac{2\gamma_T}{r} - 2f_{rT} = 0. \quad (4.19)$$

Se evolucionan las Ecs.(4.9)-(4.14) y se monitorean las variables fundamentales $\{\gamma_{rr}, \gamma_T, K_{rr}, K_T, f_{rrr}, f_{rT}\}$ junto con las constricciones (4.16)-(4.19) durante toda la simulación.

4.2. Condiciones de frontera

Un problema con el que se debe de lidiar al momento de querer resolver las ecuaciones de Einstein en la computadora es que se deben de imponer condiciones de frontera debido a que nuestro dominio computacional es finito. Una de las razones de usar la formulación KST es que representan un sistema de ecuaciones fuertemente hiperbólico del cual es posible obtener un conjunto completo de eigenvectores y de esta forma obtener los campos característicos del sistema. Hemos optado por imponer condiciones de frontera a través de estos campos característicos. Estos se obtienen haciendo el análisis característico (ver Apéndice C) del sistema dado por las Ecs.(4.9)-(4.13).

Para las ecuaciones de evolución (4.9)-(4.13), los campos característicos en dirección radial son

$$U_r^0 := \gamma_{rr} \quad (v_c = -\beta^r), \quad (4.20)$$

$$U_t^0 := \gamma_T \quad (v_c = -\beta^t), \quad (4.21)$$

$$U_r^\pm := K_{rr} \pm \frac{f_{rrr}}{\sqrt{\gamma_{rr}}} \quad (v_c = -\beta^r \pm \tilde{\alpha} \gamma_T), \quad (4.22)$$

$$U_T^\pm := K_T \pm \frac{f_{rT}}{\sqrt{\gamma_{rr}}} \quad (v_c = -\beta^t \pm \tilde{\alpha} \gamma_T). \quad (4.23)$$

Las velocidades características de las variables de la métrica corresponden a la propagación a lo largo de la dirección normal (tipo tiempo) de las foliaciones y las velocidades

características de las otras cantidades corresponden a la propagación a lo largo del cono de luz. Por tanto, si la frontera interna de nuestro dominio se mueve a lo largo de una trayectoria tipo espacio, todas las velocidades características son negativas (respecto a r) ahí, entonces no es necesario imponer condiciones de frontera en el dominio interno. En la frontera exterior, las condiciones de frontera son impuestas sólo sobre los campos que tienen velocidades características negativas, que para nuestro caso son γ_{rr} , γ_T , U_r^- y U_T^- .

La condición de frontera que usamos fue la misma que para la ecuación de onda (ver sección 3.4) la cual congela la evolución temporal de los campos característicos que se propagan hacia adentro del dominio

$$\partial_t \gamma_{rr} \Big|_{r=r_{max}} = 0, \quad (4.24)$$

$$\partial_t \gamma_T \Big|_{r=r_{max}} = 0, \quad (4.25)$$

$$\partial_t U_r^- \Big|_{r=r_{max}} = 0, \quad (4.26)$$

$$\partial_t U_T^- \Big|_{r=r_{max}} = 0. \quad (4.27)$$

A esta condición de frontera se le conoce como FC por sus siglas en inglés (*freezing condition*).

También experimentamos con condiciones de frontera que preserven las constricciones (CPBC) ya que la condición FC no es suficiente para evolucionar sistemas más complejos, incluso con una elección de norma diferente o elecciones de coordenadas distintas la evolución puede llegar a presentar violaciones considerables en la constricción que finalmente hagan que se detenga la simulación.

Para imponer la condición CPBC se hace lo siguiente [23]:

- Se calculan las derivadas temporales de las constricciones (4.16)-(4.19).
- Se reemplazan las derivadas temporales de las variables fundamentales que aparecen en las constricciones con sus respectivas ecuaciones de evolución (4.9)-(4.14).
- Se expresan las variables fundamentales en terminos de las constricciones y sus derivadas espaciales.

Para nuestro problema

$$\partial_t C = \beta^r \partial_r C - \frac{N}{\gamma_{rr}} + l.o., \quad (4.28)$$

$$\partial_t C_r = -N \partial_r C + \beta^r C_r + l.o., \quad (4.29)$$

$$\partial_t C_{rrr} = \beta^r \partial_r C_{rrr} + l.o., \quad (4.30)$$

$$\partial_t C_{rT} = \beta^r \partial_r C_{rT} + l.o., \quad (4.31)$$

donde *l.o.* son términos que no involucran a las constricciones ni a sus derivadas espaciales. El siguiente paso es hacer la descomposición característica de este sistema de ecuaciones

(4.28)-(4.28), obteniendo los siguientes campos característicos de las constricciones

$$C_1 = C + \frac{C_r}{\sqrt{\gamma_{rr}}}, \quad (v_c = -\beta^r + \tilde{\alpha}\gamma_T), \quad (4.32)$$

$$C_2 = C - \frac{C_r}{\sqrt{\gamma_{rr}}}, \quad (v_c = -\beta^r - \tilde{\alpha}\gamma_T), \quad (4.33)$$

$$C_3 = C_{rrr} \quad (v_c = -\beta^r), \quad (4.34)$$

$$C_4 = C_{rT} \quad (v_c = -\beta^r). \quad (4.35)$$

Como se ha discutido anteriormente, uno sólo debe de imponer condiciones de frontera sobre los campos característicos entrantes. A dentro del horizonte, todos los campos tienen velocidades negativas por lo que son salientes y no se les hace nada. Para la frontera externa, los campos con velocidades negativas son C_2, C_3 y C_4 . Debido que el sistema esta constreñido, tenemos que especificar las variables fundamentales en la frontera externa de tal forma que satisfagan $C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Una forma de hacerlo es sustituir en las ecuaciones de evolución (4.9)-(4.14) las derivadas espaciales de las variables fundamentales en función de las demás variables que salen de imponer que los campos característicos de las constricciones se anulen.

Veamos caso por caso. Para $C_4 = 0$ esto implica que

$$C_{rT} = 0,$$

lo cual no es otra cosa que la restricción (4.19). Basta con despejar $\partial_r \gamma_T$ de (4.19) y sustituirla en la ecuación de evolución (4.10)

$$\partial_t \gamma_T = 2\beta^r f_{rT} - 2NK_T. \quad (4.36)$$

El caso $C_3 = 0$ implica

$$C_{rrr} = 0,$$

por lo que es solamente la restricción (4.18). De esta forma, basta con despejar $\partial_r \gamma_{rr}$ de (4.18) y sustituirla en la Ec.(4.9)

$$\partial_t \gamma_{rr} = 2\gamma_{rr} \partial_r \beta^r - 2NK_{rr} - 8 \frac{\gamma_{rr} f_{rT}}{\gamma_T} \beta^r + 2f_{rrr} \beta^r. \quad (4.37)$$

Finalmente, $C_2 = 0$ implica que

$$C = \frac{C_r}{\sqrt{\gamma_{rr}}}. \quad (4.38)$$

La Ec.(4.38) involucra tanto a la restricción hamiltoniana (4.16) como a la restricción de momento (4.17). Estas constricciones involucran las derivadas espaciales de dos variables fundamentales, $\partial_r f_{rT}$ y $\partial_r K_T$. En este caso hemos optado por despejar $\partial_r K_T$ de la Ec.(4.38)

dando como resultado

$$\begin{aligned} \partial_r K_T &= \frac{\partial_r f_{rT}}{\sqrt{\gamma_{rr}}} - \frac{\sqrt{\gamma_{rr}}}{2r^2} + \frac{2f_{rT}}{r\sqrt{\gamma_{rr}}} + \frac{7f_{rT}}{2\gamma_T} - \frac{f_{rrr}}{\gamma_{rr}} \\ &- \sqrt{\gamma_{rr}} K_T \left(\frac{K_r r}{\gamma_{rr}} + \frac{K_T}{2\gamma_T} - 2\frac{K_T}{r} + f_{rT} \frac{K_{rr}}{\gamma_{rr}} + \frac{K_T}{\gamma_T} \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

La Ec.(4.39) se sustituye en las ecuaciones de evolución (4.12) y (4.14) pues sólo esas involucran términos de $\partial_r K_T$, por tanto

$$\begin{aligned} \partial_t K_T &= \beta^r \left(\frac{\partial_r f_{rT}}{\sqrt{\gamma_{rr}}} - \frac{\sqrt{\gamma_{rr}}}{2r^2} + \frac{2f_{rT}}{r\sqrt{\gamma_{rr}}} + \frac{7f_{rT}}{2\gamma_T} - \frac{f_{rrr}}{\gamma_{rr}} \right. \\ &- \left. \sqrt{\gamma_{rr}} K_T \left(\frac{K_r r}{\gamma_{rr}} + \frac{K_T}{2\gamma_T} - 2\frac{K_T}{r} + f_{rT} \frac{K_{rr}}{\gamma_{rr}} + \frac{K_T}{\gamma_T} \right) \right) - \frac{\alpha}{\gamma_{rr}} \partial_r f_{rT} \\ &+ \alpha \left(K_T \frac{K_{rr}}{\gamma_{rr}} + \frac{1}{r^2} - \frac{2f_{rT}^2}{\gamma_{rr}\gamma_T} - \frac{f_{rT}}{\gamma_{rr}} \partial_r \ln \tilde{\alpha} \right) + \frac{2\beta^r}{r} K_T, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \partial_t f_{rT} &= \beta^r \partial_r f_{rT} - \alpha \left(\frac{\partial_r f_{rT}}{\sqrt{\gamma_{rr}}} - \frac{\sqrt{\gamma_{rr}}}{2r^2} + \frac{2f_{rT}}{r\sqrt{\gamma_{rr}}} + \frac{7f_{rT}}{2\gamma_T} - \frac{f_{rrr}}{\gamma_{rr}} \right. \\ &- \left. \sqrt{\gamma_{rr}} K_T \left(\frac{K_r r}{\gamma_{rr}} + \frac{K_T}{2\gamma_T} - 2\frac{K_T}{r} + f_{rT} \frac{K_{rr}}{\gamma_{rr}} + \frac{K_T}{\gamma_T} \right) \right) \\ &+ \alpha \left[K_T \left(2\frac{f_{rT}}{\gamma_T} - \frac{f_{rrr}}{\gamma_{rr}} - \partial_r \ln \tilde{\alpha} \right) \right] + \left(\partial_r \beta^r + \frac{2\beta^r}{r} \right) f_{rT}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

4.3. Implementación

Igual que en el ejemplo de la ecuación de onda hemos optado por evolucionar las Ecs.(4.9)-(4.13) usando el método de líneas en donde hemos calculado las derivadas espaciales con los métodos descritos en las secciones 3.3.1 y 3.3.2; y un integrador RK4 para evolucionar en el tiempo.

Debido a que los puntos de colocación CGL (Ec.(3.12)) no están uniformemente distribuidos, hemos elegido el paso de tiempo Δt de tal forma que garantice estabilidad en el tiempo de integración, limitados a los dos puntos de colocación más cercanos y cuya separación es $\sim \pi^2/N^2$. Por tanto hemos fijado el paso de tiempo en $\Delta t = 1/N^2$.

Como se describe en la Secc.4.2, la solución de un sistema hiperbólico puede ser escrito en términos de los campos característicos que se propagan con sus correspondientes velocidades características. Físicamente, sabemos que las condiciones de frontera se aplican sólo en los campos característicos que se propagan hacia el interior del dominio.

Por tanto, para imponer la condición de frontera FC en alguna frontera del dominio $r = r_0$, primero calculamos las derivadas temporales de los campos característicos $U_c(r_0)$ en

la frontera. Después, se aplican las condiciones de frontera a los campos característicos que se propagan hacia adentro del dominio; a los campos salientes del dominio no se les hace nada. Finalmente, se reconstruyen las derivadas temporales de las variables fundamentales en r_b y usamos los valores para el paso de tiempo siguiente.

Para imponer las condiciones de frontera CPBC, basta con sustituir las Ecs.(4.36)-(4.41) en vez de las ecuaciones de evolución (4.9), (4.9), (4.12) y (4.14) en r_{max} .

Para algoritmos de integración en el tiempo que ocupan pasos intermedios, como es el caso del RK4, las condiciones de frontera deben de imponerse en cada paso intermedio. Condiciones de frontera mal implementadas sobre los campos entrantes o condiciones de frontera impuestas sobre campos salientes llevan a evoluciones inestables.

4.4. Datos iniciales

Elegimos como dato inicial una rebanada independiente del tiempo de un agujero negro de Schwarzschild. Como nuestra frontera interna r_{min} está a dentro del horizonte, es necesario usar unas coordenadas que permitan penetrar el horizonte ya que las coordenadas de Schwarzschild tienen una singularidad en $r = 2M$ (Ec.(2.22)). Hemos elegido evolucionar nuestro agujero negro de Schwarzschild usando 2 distintos tipos de coordenadas. La primera conocida como coordenadas de Kerr-Schild para un agujero negro sin espín:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{rr} &= 1 + \frac{2M}{r}, \\
 \gamma_T &= 1, \\
 \tilde{\alpha} &= \left(1 + \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \\
 \beta^r &= \frac{2M}{r} \left(1 + \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \\
 K_{rr} &= -\frac{2M}{r} \left(1 + \frac{M}{r}\right) \left(1 + \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, \\
 K_T &= \frac{2M}{r^2} \left(1 + \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, \\
 f_{rrr} &= \frac{1}{r} \left(4 + \frac{7M}{r}\right), \\
 f_{rT} &= \frac{1}{r},
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

donde M es la masa del agujero negro y el horizonte está localizado en $r = 2M$. Estas expresiones satisfacen idénticamente las 4 constricciones (4.16)-(4.17) al tiempo inicial.

Las otras coordenadas son las llamadas coordenadas armónicas [24, 25], en las cuales

el tiempo coordinado satisface $\square t = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu t = 0$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{rr} &= \left(1 + \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{4M^2}{r^2}\right), \\
 \gamma_T &= 1, \\
 \tilde{\alpha} &= \left(1 + \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(1 + \frac{4M^2}{r^2}\right)^{-1}, \\
 \beta^r &= \frac{4\tilde{\alpha}M^2}{r^2}, \\
 K_{rr} &= -\frac{M^2}{r^3} \sqrt{\tilde{\alpha}} \left(2 + \frac{3M}{r} + \frac{4M^2}{r^2} + \frac{4M^3}{r^3}\right), \\
 K_T &= \frac{4M^2}{r^3} \sqrt{\tilde{\alpha}}, \\
 f_{rrr} &= \frac{4}{r} + \frac{7M}{r^2} + \frac{12M^2}{r^3} + \frac{20M^3}{r^4}, \\
 f_{rT} &= \frac{1}{r},
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

donde el horizonte también está localizado en $r = 2M$ y también se satisfacen las constricciones (4.16)-(4.19) al tiempo inicial.

4.5. Resultados numéricos

Para todas las evoluciones presentadas se eligieron condiciones de norma de tal forma que $\tilde{\alpha}$ y β^r permanezcan igual a sus valores iniciales durante toda la evolución. Hemos fijado la excisión cerca pero adentro del horizonte en $r_{min} = 1,9M$ [26]. Se optó también por evolucionar los datos iniciales (4.42) en dos dominios espaciales: uno pequeño $r \in [1,9, 11,9]$ y uno grande $r \in [1,9, 101,9]$; mientras que los datos iniciales (4.43) se evolucionaron en un sólo dominio espacial $r \in [1,9, 11,9]$.

Para medir la eficiencia del código optamos por calcular la violación en la constricción hamiltoniana Ec.(4.16) usando la 2-norma

$$\|H\|_2 = \left(\int_{r_{min}}^{r_{max}} |C(r)|^2 dr^2 \right)^{1/2}. \tag{4.44}$$

Debido a que la solución no está dada sólomente en los puntos de colocación si no en todo el dominio la 2-norma se calculó sobre una malla uniforme con suficiente resolución.

Empecemos por analizar la evolución en coordenadas de Kerr-Schild. La Fig.4.1 muestra la 2-norma de la constricción hamiltoniana en función del tiempo para varios valores de N en el dominio pequeño. Las oscilaciones cerca de $t = 10M$ corresponden a pequeños pul-

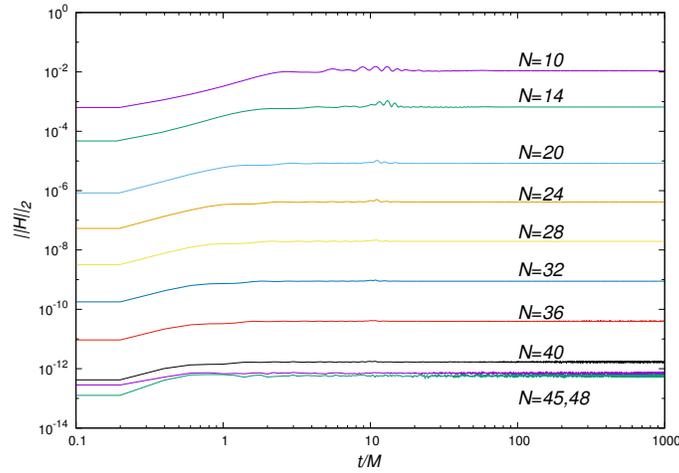


Figura 4.1: Estabilidad de la evolución de un agujero negro en coordenadas de Kerr-Schild. Se grafica la 2-norma de la constricción hamiltoniana (4.44) en unidades de M^{-2} como función del tiempo para diferentes resoluciones.

Los errores que comienzan en la frontera exterior $r = 11,9$ desde el tiempo inicial $t = 0$, crecen como r^{-2} mientras se propagan hacia el interior del dominio y eventualmente caen dentro del agujero negro. Eventualmente la evolución se estabiliza y es claro que la solución converge a la solución analítica al ir aumentando el número de puntos de colocación. Terminamos la evolución en $t = 1000M$ aunque es claro que se pudo haber dejado la evolución encendida indefinidamente. La rapidez de convergencia es exponencial hasta que los errores de redondeo de la máquina dominan y deja de converger.

De forma análoga la Fig.4.2 muestra la evolución en coordenadas de Kerr-Schild pero en el dominio grande $r \in [1,9, 101,9]$. Vemos que en $t = 100M$ aparecen también pulsos de errores que contaminan la evolución pero a diferencia del dominio pequeño no es claro en qué tiempo se estabiliza la evolución. Debido a esto, escogimos la resolución con $N = 70$ puntos de colocación y lo evolucionamos hasta $t = 100000M$.

La Fig. 4.3 muestra la 2-norma de la constricción hamiltoniana $\|H\|_2$ junto con la 2-norma de la constricción de momento $\|M\|_2$

$$\|M\|_2 = \left(\int_{r_{min}}^{r_{max}} |C_r(r)|^2 dr^2 \right)^{1/2}. \quad (4.45)$$

Es evidente que para dominios grandes, le cuesta mucho trabajo al método pseudoespectral estabilizar la solución.

Ahora analicemos el caso de un agujero negro en coordenadas armónicas. En la Fig. 4.4 se muestra la 2-norma de la constricción hamiltoniana para dos tipos de condiciones de frontera: FC y CPBC respectivamente. Para el caso donde se usa la condición FC, la 2-

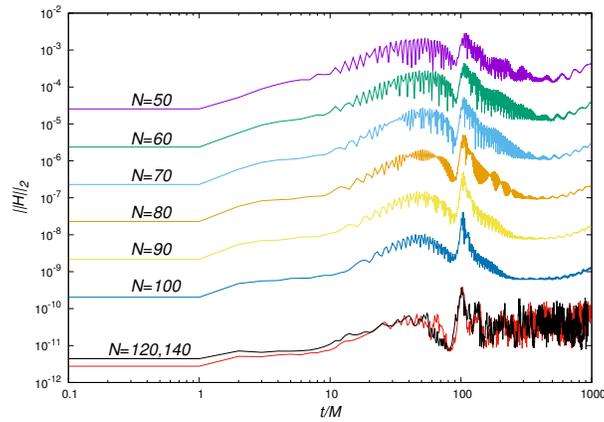


Figura 4.2: 2-norma de la constricción hamiltoniana en función del tiempo para agujeros negros en coordenadas de Kerr-Schild. Aunque hay un pulso grande en $t = 100M$ la solución converge a la analítica al aumentar N pero no está claro en qué momento se estabiliza la solución.

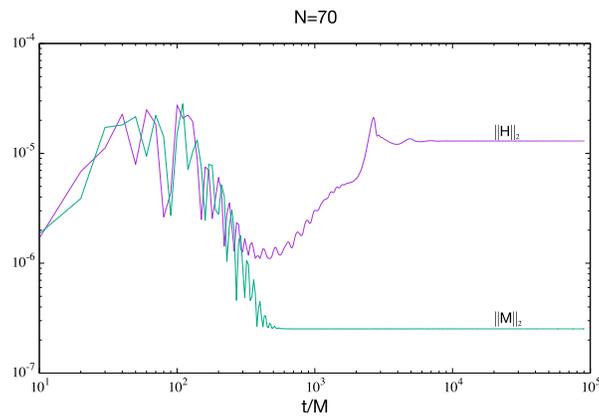


Figura 4.3: Se muestra las 2-normas de las constricciones del hamiltoniano $\|H\|_2$ y de momento $\|M\|_2$ como función del tiempo para un agujero negro en coordenadas de Kerr-Schild. Es claro que la solución se estabiliza hasta $t = 1000M$ para el caso del momento y en $t = 10000M$ para el hamiltoniano.

norma de la constricción hamiltoniana va creciendo exponencialmente con el tiempo hasta que eventualmente el código colapsa y la simulación se detiene. Esto es causado por la combinación de inestabilidades numéricas de alta frecuencia, crecimiento en los modos de norma y un rápido crecimiento en las violaciones de las constricciones. Para el caso donde se usan condiciones de frontera tipo CPBC, la 2-norma de la constricción hamiltoniana también crece pero a un ritmo logarítmico haciendo que la evolución pueda concluir.

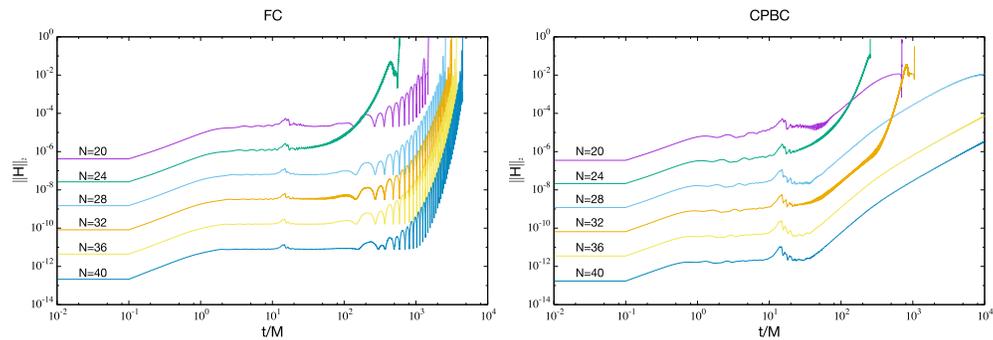


Figura 4.4: A la izquierda se muestra la 2-norma de la constricción hamiltoniana como función del tiempo usando condiciones de frontera FC. A la derecha, también se muestra la 2-norma de la constricción hamiltoniana como función del tiempo pero para cuando se usan condiciones de frontera CPBC. Claramente, el usar condiciones de frontera que preserven las constricciones ayuda a que el agujero negro pueda evolucionar por más tiempo.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se presentó el uso de los métodos pseudoespectrales para la solución de las ecuaciones de Einstein en el caso de un agujero negro esféricamente simétrico. La libertad de elección de coordenadas que uno tiene en la RG juega un papel de doble filo ya que por un lado el método ha resultado ser sumamente eficaz cuando uno trabaja en coordenadas de Kerr-Schild e imponiendo condiciones de frontera FC, mientras que en coordenadas armónicas la violación en la constricción crece de forma exponencial y fue necesario imponer condiciones de frontera que preservaran las constricciones para de esta forma lograr que el agujero negro evolucionara por más tiempo.

En dominios pequeños el método resulta ser muy poderoso pues se logró evolucionar el agujero negro en coordenadas de Kerr-Schild con tan sólo 10 puntos de colocación lo cual representa una verdadera ventaja en costo computacional. La precisión del método pseudoespectral se vuelve un problema al momento de trabajar con dominios grandes aunque para estas coordenadas la evolución puede dejarse indefinidamente. El uso de condiciones frontera CPBC lleva a resultados similares y no se resuelve el problema de trabajar en dominios grandes.

Caso contrario, al usar coordenadas armónicas con condiciones de frontera tipo FC la evolución se detiene incluso para dominios pequeños debido al crecimiento exponencial en las violaciones de las constricciones. Esto se arregló usando condiciones de frontera que preservaran las constricciones.

Otro problema con el que lidiamos fue que el código falla si uno no elige adecuadamente las funciones de norma y no basta con cambiar a condiciones de frontera que preserven las constricciones ya que también se deben de solucionar 2 ecuaciones elípticas, una para el vector de corrimiento y otra para la densidad de lapso [7].

Este trabajo coincide con los resultados publicados en [7] pero ellos no mencionan el problema al momento de trabajar en dominios grandes, aunque utilizan una técnica de dominios múltiple y un filtro para eliminar errores producidos por modos de alta frecuencia indistinguibles a modos de baja frecuencia pero no es claro cuál técnica soluciona el problema de trabajar en dominios grandes.

Apéndice A

Polinomios de Chebyshev

El polinomio de Chebyshev de primer tipo $T_n(x)$ es el polinomio de grado n definido para $x \in [-1, 1]$ por

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.1})$$

donde $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$. Por tanto $|T_n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Sea $x = \cos z$, entonces

$$T_n = \cos nz, \quad (\text{A.2})$$

de esta forma es fácil de deducir las expresiones de recurrencia para los polinomios de Chebyshev de primer tipo

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, \\ T_1 &= \cos z = x, \\ T_2 &= \cos 2z = 2 \cos^2 z - 1 = 2x^2 - 1, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}$$

Los polinomios de Chebyshev siguen la relación de recurrencia

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad (\text{A.3})$$

que nos permite, en particular, deducir expresiones para los polinomios $T_n, n \geq 2$, a partir de T_0 y T_1 . La gráfica de los primeros 6 polinomios se muestra en la Fig. A.1.

A continuación enlistamos algunas propiedades útiles de los polinomios de Chebyshev en la solución de de ecuaciones diferenciales. Los valores de T_n y su derivada T'_n en $x \pm 1$

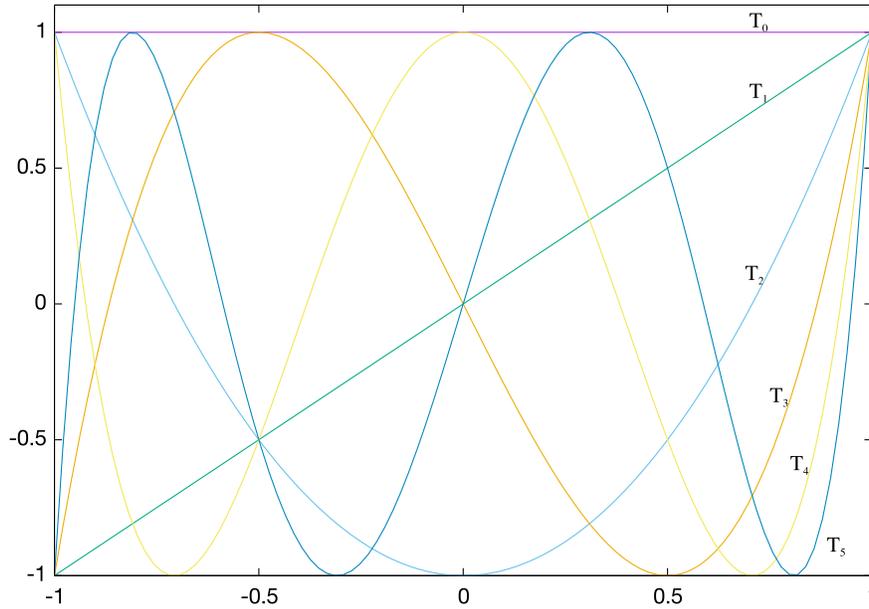


Figura A.1: Gráfica de los polinomios de Chebyshev de primer tipo, $T_n(x)$, para $n=0,1,2,3,4,5$.

son

$$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \quad T'_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n+1} n^2. \quad (\text{A.4})$$

Conocer estos valores es de gran ayuda al momento de implementar condiciones de frontera. También hay que notar que $T_n(x) = (-1)^n T_n(-x)$, por lo que la paridad del polinomio es la misma que la de su grado n . El polinomio T_n se hace cero en los puntos de Gauss x_i definidos como

$$x_i = \cos\left(i + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (\text{A.5})$$

y alcanza sus valores extremos ± 1 en los puntos Chebyshev-Gauss-Lobatto x_i definidos como

$$x_i = \cos \frac{\pi i}{n}, \quad i = 0, \dots, n, \quad (\text{A.6})$$

. los cuales son ceros del polinomio $(1-x^2)T'_n(x)$.

Una relación de recurrencia se puede obtener fácilmente para sus derivadas. Primero, la de T_n es

$$T'_n = \frac{d}{dz}(\cos nz) \frac{dz}{dx} = n \frac{\sin nz}{\sin z}, \quad (\text{A.7})$$

donde se ha usado la representación (A.2). Haciendo uso de fórmulas trigonométricas se

obtiene la relación

$$\frac{T'_{n+1}}{n+1} - \frac{T'_{n-1}}{n-1} = 2T_n, \quad (\text{A.8})$$

válida para $n > 1$.

Una característica importante de los polinomios de Chebyshev de primer tipo es que son ortogonales en $[-1,1]$, con el peso $\omega = (1 - x^2)^{1/2}$, es decir

$$(T_m, T_n)_\omega := \int_{-1}^1 T_m T_n \omega dx = \frac{\pi}{2} \bar{c}_m \delta_{mn}, \quad (\text{A.9})$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker y \bar{c}_m está definido como

$$\bar{c}_m = \begin{cases} 2 & \text{si } m = 0, \\ 1 & \text{si } m \geq 1. \end{cases}$$

La aproximación de Chebyshev hace uso de las fórmulas de cuadraturas de Gauss. Para los puntos de Chebyshev-Gauss-Lobatto $x_i = \cos \pi i/N$, $i = 0, \dots, N$, generalmente usados en los métodos de colocación, la fórmula de cuadratura aplicada a cualquier función $p(x)$ es

$$\int_{-1}^1 p \omega dx \cong \frac{\pi}{N} \sum_{i=0}^N \frac{p(x_i)}{c_i}, \quad (\text{A.10})$$

donde

$$c_i = \begin{cases} 2 & \text{si } i = 0 \text{ ó } i = N, \\ 1 & \text{si } 1 \leq i \leq N - 1. \end{cases}$$

La relación (A.10) es exacta si $p(x)$ es un polinomio de grado $2N - 1$ a lo más (ver [19] para la prueba y demás fórmulas asociadas con otro conjunto de puntos). De la Ec.(A.10) podemos derivar la relación de ortogonalidad discreta basa en los puntos de colocación de Chebyshev-Gauss-Lobatto x_i , $i = 0, \dots, N$. Para $m \neq N$ o $n \neq N$, el uso de (A.10) d la aproximación exacta de la integral (A.9) dado que $T_m T_n$ es un polinomio de grado a lo más $2N - 1$:

$$\frac{\pi}{2} \bar{c}_m \delta_{mn} = \int_{-1}^1 T_m T_n \omega dx = \frac{\pi}{N} \sum_{i=0}^N \frac{1}{c_i} T_m(x_i) T_n(x_i). \quad (\text{A.11})$$

Para $m=n=N$, esta fórmula permanece exacta provista de que \bar{c}_m al lado izquierdo es reemplazada por $c_N (= 2)$. Por tanto, la relación de ortogonalidad discreta es

$$\sum_{i=0}^N \frac{1}{c_i} T_m(x_i) T_n(x_i) = \frac{c_m}{2} N \delta_{mn}, \quad (\text{A.12})$$

válida para $0 \leq m, n \leq N$.

Apéndice B

Geometría diferencial

B.1. Variedades diferenciales

Definición B.1 Una **variedad topológica** \mathcal{M} es un espacio topológico de Hausdorff tal que $\forall p \in \mathcal{M}$, existe una vecindad abierta $U \in \mathcal{M}$, $p \in U$, un conjunto abierto $V \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) y un homeomorfismo $\varphi : U \subset \mathcal{M} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ (φ, φ^{-1} son continuas).

Definición B.2 Sea \mathcal{M} una variedad topológica. Una **carta** sobre \mathcal{M} es una pareja (U, φ) tal que $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Definición B.3 Sea \mathcal{M} una variedad topológica. Un **atlas** es una familia de cartas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ tal que $\mathcal{M} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

Definición B.4 Sea \mathcal{M} una variedad topológica. Una **estructura diferencial** para \mathcal{M} está dado por un atlas diferenciable $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tal que $\forall i, j \in I$, $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ tenemos que $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$ es diferenciable. Para que sea una estructura diferenciable se pide también que el atlas A además de ser diferenciable sea maximal, es decir, si $B = \{(V_i, \psi_i)\}$ es otro atlas diferenciable se tiene que $\{(V_i, \psi_i)\} \subset \{(U_i, \varphi_i)\}$.

Definición B.5 Una **variedad diferenciable** (\mathcal{M}, A) es una variedad topológica \mathcal{M} dotada de una estructura diferenciable A .

Definición B.6 Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable. Decimos que $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es ℓ -**veces diferenciable** en p , si $F \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es ℓ -veces diferenciable para una carta (U_i, φ_i) con $p \in U_i$. Decimos que F es de clase C^ℓ si F es ℓ -veces diferenciable $\forall p \in \mathcal{M}$.

Definición B.7 Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente. Un mapeo continuo $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ se llama **diferenciable en un punto** $p \in \mathcal{M}$ si dado una carta local (U_i, φ_i) con $p \in U_i$ y una carta local (V_j, ψ_j) con $F(p) \in V_j$, el mapeo $\psi_j \circ F \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(F^{-1}(V_j) \cap U_i) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en el punto $\varphi_i(p)$.

Definición B.8 Sea $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ una función biyectiva de clase C^∞ con la propiedad que $F^{-1} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ también es de clase C^∞ . Entonces F es un **difeomorfismo**.

A partir de ahora nos referiremos a las variedades diferenciables solamente como variedades. Sea (U_i, φ_i) una carta. Decimos que $(x_1, \dots, x_n) = \varphi_i(p)$, $p \in U_i$ son las coordenadas locales de p en (U_i, φ_i) . Abusando de la notación escribimos $F(x_1, \dots, x_n) := F \circ \varphi_i^{-1}(x_1, \dots, x_n) \forall F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$.

B.2. Campos vectoriales y tensoriales

Definición B.9 Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable. Sean $\epsilon_c, \epsilon_\gamma > 0$. Sean $c : (-\epsilon_c, \epsilon_c) \rightarrow \mathcal{M}$ y $\gamma : (-\epsilon_\gamma, \epsilon_\gamma) \rightarrow \mathcal{M}$ curvas diferenciables tal que $c(0) = \gamma(0) := p \in \mathcal{M}$. Decimos que $c \sim \gamma$ si y sólo si existe una carta (U_i, φ_i) , $p \in U_i$ tal que $(\varphi_i \circ c)'(0) = (\varphi_i \circ \gamma)'(0)$.

Definición B.10 $T_p\mathcal{M} := \{[c] \mid c : (-\epsilon_c, \epsilon_c) \rightarrow \mathcal{M}, \text{ curvas diferenciables}, c(0) = p\}$ es el **espacio tangente en el punto p** , donde $[c]$ denota la clase de equivalencia de c .

Por la definición (B.10), $T_p\mathcal{M}$ todavía no es un espacio vectorial así que debemos dotarlo de alguna forma para manejarlo como uno. Para esto hacemos uso del siguiente teorema.

Teorema B.1 Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable. Sea (U, φ) una carta del atlas, $p \in \mathcal{M}$ tal que $p \in U$. Entonces $T_p\mathcal{M} \cong \mathbb{R}^n = T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ con la biyección dada por $\theta : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\theta[c] = (\varphi \circ c)'(0) \in \mathbb{R}^n$ y su inverso $\theta^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p\mathcal{M}$, $\theta^{-1}(v) := [\varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)] := [c_v]$.

Definición B.11 La **base canónica** de $T_p\mathcal{M}$ en coordenadas dadas por una carta (U, φ) , $\varphi(p) = (x^1, \dots, x^n)$, $p \in U$ es

$$\frac{\partial}{\partial x^j} := [c_{e_j}] = \theta^{-1}(e_j) = [\varphi^{-1}(\varphi(p) + te_j)],$$

donde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ en la i -ésima coordenada.

Un caso interesante es cuando trabajamos en superficies diferenciables. Una superficie diferenciable $S \subset \mathbb{R}^{n+k}$ de dimensión n es una n -variedad diferenciable encajada en el espacio \mathbb{R}^{n+k} . Dado $p \in S$, $T_pS \cong \{c'(0) \in \mathbb{R}^{n+k} \mid c : (-\epsilon_c, \epsilon_c) \rightarrow S, c(0) = p\}$. Si $\psi : u \rightarrow \psi(u) \subset S$ es una parametrización entonces

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \in \mathbb{R}^{n+k},$$

bajo el isomorfismo

$$\begin{aligned} i_S : T_pS &\rightarrow \mathbb{R}^{n+k} \\ [c] &\mapsto c'(0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x^n} \right\}$ es una base de $T_p S$.

Por otro lado si $u \subset S$ está dado por $u = \{z \in B_\epsilon(p) \mid F(z) = 0\}$ entonces $T_p S = \text{Ker}(DF_p)$.

Sean (U, φ) y (V, ψ) dos cartas locales que contienen al punto $p \in \mathcal{M}$. Sea $q \in U \cap V$ y $\varphi(q) = \mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$, $\psi(q) = \mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)$. Sea $X_p \in T_p \mathcal{M}$. Podemos escribir los elementos de $T_p \mathcal{M}$ como $X_p = X_p^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = Y_p^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p$ cuyas componentes y bases se relacionan de la siguiente forma

$$Y_p^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Big|_p X_p^j, \quad (\text{cambio de componentes})$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p, \quad (\text{regla de la cadena}).$$

Definición B.12 Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} variedades diferenciales y sea $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ diferenciable. El **diferencial** de F es una aplicación lineal tal que

$$dF : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_{F(p)} \mathcal{N}$$

$$dF([c]) := [F \circ c].$$

En coordenadas locales $\varphi(p) = (x^1, \dots, x^n)$, $p \in \mathcal{M}$, $V_p \in T_p \mathcal{M}$, $\psi(q) = (y^1, \dots, y^n)$, $q \in \mathcal{N}$ tenemos

$$dF(V_p) = dF\left(V_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = V_p^k \frac{\partial y^\ell(F(x))}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^\ell}.$$

Definición B.13 Un **campo vectorial** sobre una variedad diferenciable \mathcal{M} es una función X que asocia a cada punto $p \in \mathcal{M}$ un vector $X_p \in T_p \mathcal{M}$.

Definición B.14 El **espacio cotangente** $T_p^* \mathcal{M}$, es el dual del espacio tangente $T_p \mathcal{M}$, es decir, $T_p^* \mathcal{M} = \{f : T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es lineal}\}$.

A los elementos de $T_p \mathcal{M}$ se le llaman formas o covectores y tienen la forma $\omega_j dx^j$, donde $\{dx^j, j = 1, \dots, n\}$ es la base de $T_p^* \mathcal{M}$. Sean $X \in T_p \mathcal{M}$ y $\omega \in T_p^* \mathcal{M}$ entonces $\omega(X) = \omega_i dx^i(X^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = \omega_i X^j dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \omega_i X^j \delta_j^i = \omega_i X^i$.

Definición B.15 Un **campo covector** sobre una variedad \mathcal{M} es una función ω tal que asocia a cada $p \in \mathcal{M}$ un covector $\omega_p \in T_p^* \mathcal{M}$.

Definición B.16 Un **tensor** T de tipo (r, s) es un mapeo multilineal definido por $T : (T_p^* \mathcal{M})^r \times (T_p \mathcal{M})^s \rightarrow \mathbb{R}$.

En general, un tensor de tipo (r, s) vive en un espacio vectorial $(T_p \mathcal{M})_s^r$ de dimensión $= n^{r+s}$, donde n es la dimensión de la variedad \mathcal{M} . Dado $p \in \mathcal{M}$ y una carta local (U, φ) podemos representar el tensor como

$$T = T^{\alpha_1, \dots, \alpha_r}_{\beta_1, \dots, \beta_s} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_r}} \otimes dx^{\beta_1} \dots dx^{\beta_s}.$$

Definición B.17 *Un campo tensorial de tipo (r, s) es una función T que asigna a cada $p \in \mathcal{M}$ un tensor $T_p \in (T_p \mathcal{M})_s^r$. El conjunto de campos tensoriales lo denotamos por $\Omega_s^r(\mathcal{M})$.*

B.3. Métrica y geodésicas

Definición B.18 *Decimos que en \mathcal{M} está definida una **métrica \mathbf{g}** si existe $g : T_p \mathcal{M} \otimes T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

1. $g(X, Y) = g(Y, X) \quad \forall X, Y \in T_p \mathcal{M}$ (simétrico).
2. $g(X + Y, Z + W) = g(X, Z + W) + g(Y, Z + W) = g(X, Z) + g(X, W) + g(Y, Z) + g(Y, W)$ (bilineal).
3. Si $g(X, Y) = 0 \in \mathbb{R} \quad \forall Y \in T_p \mathcal{M} \Rightarrow X = 0 \in T_p \mathcal{M}$ (no degenerado).

A las variedades diferenciales \mathcal{M} asociadas con cierta métrica \mathbf{g} se les denota usualmente por $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. Hay una definición de tensor métrico la cual hace distinción entre las llamadas métricas Riemannianas (con signatura positiva) y pseudo-Riemannianas (con signatura mixta).

Consideremos un espacio-tiempo de 4 dimensiones como una 4-variedad $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. Sean x^μ las coordenadas de un evento en ese espacio-tiempo, donde el índice μ toma valores $\{0, 1, 2, 3\}$: la coordenada x^0 indica en qué momento del tiempo ocurre el evento mientras que las coordenadas restantes (x^1, x^2, x^3) indican el lugar en que sucede dicho evento. Dados dos eventos infinitamente cercanos con coordenadas x^μ y $x^\mu + dx^\mu$ es posible medir la distancia invariante a través del tensor métrico:

$$\mathbf{g} = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{B.1})$$

donde $g_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor métrico o simplemente métrica, y donde por convención se omite el producto tensorial \otimes . La distancia invariante es, como su nombre lo indica, una cantidad absoluta que no depende del sistema de coordenadas elegido (no importa la elección de carta). En cada punto del espacio-tiempo, el tensor métrico es una matriz simétrica de 4 x 4 elementos, con eigenvalores de signatura $(-, +, +, +)$. La métrica del espacio-tiempo de Minkowski, llamada simplemente métrica de Minkowski es

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 := \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{B.2})$$

Las transformaciones de Lorentz garantizan que el intervalo ds^2 tiene el mismo valor para cualquier observador, lo cual es consecuencia del hecho que la velocidad de la luz es invariante. Al tener la métrica un eigenvalor negativo hace que no sea una métrica definida

positiva (Riemanniana) por lo que es posible distinguir eventos relacionados entre sí de 3 formas distintas:

$$ds^2 > 0 \quad \text{tipo espacio o espacialoide,} \quad (\text{B.3})$$

$$ds^2 < 0 \quad \text{tipo tiempo o temporaloide,} \quad (\text{B.4})$$

$$ds^2 = 0 \quad \text{nulo.} \quad (\text{B.5})$$

La interpretación de esto es lo siguiente. Dado un observador en la coordenada $x^\mu = (0, 0, 0, 0)$ (tenemos la libertad de escoger unas coordenadas en la que el observador esté situado en el origen) sólo le es posible alcanzar eventos de tipo tiempo, es decir, si hay un evento P con coordenadas x^ν con respecto al observador, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(P, P) &= \mathbf{g}\left(x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, x^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) = x^\alpha x^\beta \mathbf{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) = x^\alpha x^\beta g_{\alpha\beta} = x^\alpha x^\beta \eta_{\alpha\beta} \\ &= -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 < 0. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Que $\mathbf{g}(P, P) < 0$ implica que la componente temporal es mayor que la espacial, es decir, es un evento al cual podemos acceder a una velocidad menor a la de la luz. Si el evento fuera tipo nulo implica que slo es posible acceder a este viajando a la velocidad de la luz. Si el evento es tipo espacio, implica que deberíamos movernos más rápido que la luz para poder acceder a dicho evento lo cual es imposible. Existen partículas hipotéticas que viajan más rápido que la luz pero su estudio se deja fuera de este trabajo. Dado un observador O en el espacio-tiempo de Minkowski definimos el cono de luz como una hipersuperficie la cual tiene por fronteras los rayos de luz emitidos desde O . Los eventos dentro del cono (véase Fig. (B.1)) son llamados eventos causales, ya sea futuro causal ($x^0 > 0$) o pasado causal ($x^0 < 0$).

La trayectoria que sigue un objeto en el espacio-tiempo se le llama línea de mundo y es tipo tiempo. En el espacio de Minkowski y en ausencia de fuerzas externas, las líneas de mundo de los objetos siguen trayectorias rectas.º mejor dicho de logitud extrema de acuerdo a la métrica de Minkowski. Einstein postuló que en presencia de campo gravitacional los objetos se mueven sobre las trayectorias más rectas”posibles pero ahora en espacios-tiempo mas generales (curvos). A esta trayectoria extrema se le conoce como ”geodésica”. Dado un espacio-tiempo curvo, las partículas prueba simplemente se mueven siguiendo una geodésica.

Definimos $d\tau^2 := -ds^2$ como el ”tiempo propio”, el cual corresponde al tiempo medido por el observador mismo, es decir, el tiempo que mide un reloj ideal atado al observador. El tiempo propio $d\tau$ no tiene porqué ser igual a dt , pues t es sólo una coordenada, en otras palabras, una etiqueta arbitraria que se asignan a los eventos. La ecuación de las geodésicas está dado por

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0, \quad (\text{B.7})$$

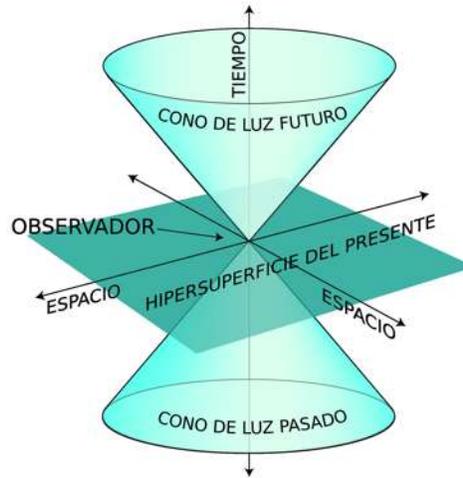


Figura B.1: El cono de luz de un observador o evento caracteriza el espacio-tiempo en tres regiones: pasado causal, futuro causal y resto.

donde $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ son los símbolos de Christoffel definidos por

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} := \frac{g^{\alpha\mu}}{2} \left[\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\mu}} \right], \quad (\text{B.8})$$

donde $g^{\alpha\beta}$ son los coeficientes de la matriz inversa de $g_{\alpha\beta}$, es decir, $g^{\alpha\mu}g_{\beta\nu} = \delta_{\beta}^{\alpha}$.

B.4. Derivadas y conexiones

Sea $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ la clase de funciones que van de $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ y son C^{∞} -diferenciables. Sea $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ la clase de campos vectoriales C^{∞} -diferenciables sobre \mathcal{M} .

Sean $f, h \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ y sean $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Entonces $X(f) := X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ es la derivada de f con respecto al campo vectorial X . Esto nos permite visualizar a los campos vectoriales como objetos que diferencian funciones con respecto a una dirección dada por el campo vectorial $X(p)$. Entonces podemos interpretar un campo vectorial como un mapeo $X : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{M})$ y satisface lo siguiente:

- $X(f + h) = X(f) + X(h)$ (linealidad),
- $X(f \cdot h) = (X(f)) \cdot h + f \cdot (X(h))$ (regla de Leibnitz).

Definición B.19 Sean $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. El **conmutador** de X, Y es $[X, Y] := X(Y) - Y(X)$.

Además el conmutador definido como $[X, Y] : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{M})$, $[X, Y]f := X(Y(f)) - Y(X(f))$ es un campo vectorial que satisface lo siguiente

- $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$ (linealidad)
- $[X, Y] = -[Y, X]$ (antisimetría)
- $[f \cdot X, Y] = f \cdot [X, Y] - Y(f) \cdot X$
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (identidad de Jacobi)

Definición B.20 Una **conexión afín** es un mapeo $\nabla : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M})$, $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ y satisface las siguientes propiedades

- $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- $\nabla_{f \cdot X + h \cdot Y} Z = f \cdot \nabla_X Z + h \cdot \nabla_Y Z$,
- $\nabla_X(f \cdot Y) = f \cdot \nabla_X Y + (Xf) \cdot Y$,

para todos $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ y todos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.

Sea (U, φ) una carta con coordenadas locales x^α correspondientes, y sean $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Entonces en U podemos expandir $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $Y = Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$. Sea ∇ una conexión afín, entonces

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}} Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = X^\mu \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ &= X^\mu \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + X^\mu Y^\nu \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ &= X^\mu \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + X^\mu Y^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \\ &= X^\mu \left[\frac{\partial Y^\alpha}{\partial x^\mu} + Y^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \right] \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \end{aligned}$$

donde hemos definido los símbolos de Christoffel $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ por $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Definición B.21 Sea ∇ una conexión afín sobre \mathcal{M} , y sea $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Definimos la **derivada covariante de Y** como el campo tensorial $\nabla Y \in \Omega_1^1(\mathcal{M})$ dado por $\nabla Y(w, X) := w(\nabla_X Y)$, $w \in \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$, $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.

Con respecto a unas coordenadas locales x^1, \dots, x^n expandimos $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $w = w_k dx^k$. Entonces la derivada covariante de Y en términos de sus componentes es

$$(\nabla Y)_i^k = dx^k(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y) = \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j.$$

Hay diferentes convenciones en cuanto a la notación de la derivada covariante. Las más usadas en la literatura son: $(\nabla Y)_i^k$, $\nabla_i Y^k$, $Y^k_{;i}$.

Definición B.22 Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ . La **torisión** de ∇ es un mapeo $T : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M})$ dada por

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

Se dice que una conexión ∇ es simétrica o libre de torisión si $T = 0$.

Teorema B.2 Sea (M, g) una variedad (pseudo-) Riemanniana. Entonces existe una única conexión afín ∇ tal que

- $\nabla g = 0$,
- $T = 0$,

a esta conexión se le conoce como conexión de Levi-Civita.

B.5. Curvatura

Definición B.23 Sea (\mathcal{M}, g) una variedad con conexión afín ∇ . La **curvatura** asociada a ∇ es un mapeo $R : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M})$ dado por

$$R(X, Y)Z := \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z$$

Definición B.24 Sean $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ y $\omega \in \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$. Definimos el **tensor de Riemann** como $\bar{R} := \omega(R(X, Y)Z)$.

El tensor de Riemann en terminos de sus componentes en algunas coordenadas locales x^i es

$$R^l{}_{kij} = \frac{\partial \Gamma^l{}_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^r{}_{jk} \Gamma^l{}_{ir} - \frac{\partial \Gamma^l{}_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma^r{}_{ik} \Gamma^l{}_{jr}.$$

Definición B.25 Definimos el **tensor de Ricci** como la contracción del tensor de Riemann de la primera y tercera componente, es decir

$$R_{kj} := R^i{}_{kij}.$$

Definición B.26 El **escalar de curvatura** R , está definido como $R := g^{ij}R_{ij} = g^{lj}R^i{}_{lij}$.

Apéndice C

Descomposición característica

Considere una ecuación diferencial parcial de segundo orden de dos variables en su forma general

$$AU_{xx} + 2BU_{xy} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + F = 0. \quad (\text{C.1})$$

La Ec.(C.1) se dice que es hiperbólica si $B^2 - AC > 0$. Un ejemplo es la ecuación de onda. La clasificación también se puede extender a sistemas de primer orden, donde la variable U es ahora un vector de variables. La ecuación diferencial parcial toma la forma

$$\partial_i U + A^i \partial_i U = R, \quad (\text{C.2})$$

donde U es el vector de variables, R es un vector y A^i es una matriz. El primer paso consiste en encontrar los eigenvalores λ_j y los eigenvectores u_j de la matriz A^i tal que

$$A^i u_j = \lambda_j u_j. \quad (\text{C.3})$$

Si la matriz A^i es Hermitiana se dice que el sistema es hiperbolicamente simétrico. Es estrictamente hiperbólica si los eigenvalores son reales y distintos; si además existe un sistema completo de eigenvectores es llamada fuertemente hiperbólica; y finalmente es llamada débilmente hiperbólica si los eigenvalores son reales. Definimos los campos característicos w_j como

$$w_j = u_j U. \quad (\text{C.4})$$

La hiperbolicidad es de fundamental importancia en el estudio de las ecuaciones de evolución asociadas con un problema de Cauchy. En un sentido físico, la hiperbolicidad implica que el sistema de ecuaciones es causal y local, es decir, la solución en un punto dado del espacio-tiempo depende sólo de la información contenida en un región compacta al pasado en ese punto, el llamado *cono característico* (o cono de luz en el caso de la relatividad). Matemáticamente, se puede mostrar que un sistema fuertemente hiperbólico está *bien planteado*, es decir, sus soluciones existen y son únicas (al menos localmente), y además las soluciones son estables en el sentido que pequeñas perturbaciones en los datos

iniciales corresponden a pequeños cambios en la solución.

Bibliografía

- [1] A. Einstein, Die feldgleichungen der gravitation. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzungsber., pages 844-847, 1915.
- [2] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers and E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, 2nd edn Cambridge University Press, 2003.
- [3] L.T. Buchman, H. P. Pfeiffer, M.A. Scheel, B. Szilgyi Phys. Rev. D **86**, 084033 (2012)
- [4] R. Gold, V. Paschalidis, Z.B. Etienne, S.L. Shapiro, H.P. Pfeiffer Phys. Rev. D **89**, 064060 (2014)
- [5] F. Foucart, L.E. Kidder, H.P. Pfeiffer, S.A. Teukolsky Phys. Rev. D **77**, 124051 (2008)
- [6] <https://www.black-holes.org/SpEC.html>
- [7] L. E. Kidder, M. A. Scheel, S. A. Teukolsky, E. D. Carlson, and G. B. Cook, Phys. Rev. D **62**, 084032 (2000).
- [8] J. A. Wheeler, *A journey into gravity and spacetime*. distributed by W. H. Freeman, (New York, U.S.A.: Scientific American Library, 1990).
- [9] R. Hermann, *Differential Geometry and the Calculus of Variations*. Academic Press, New York, 1968.
- [10] M. Spivak, (1979) *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Boston, 1979, vols. 1-5.
- [11] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [12] M. Alcubierre, *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford University Press, 2008.
- [13] J. W. York, Jr., *Kinematics and dynamics of general relativity*, in *Sources of Gravitational Radiation* L. L. Smarr, ed., (Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1979) p-83.

-
- [14] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, The dynamics of general relativity, in *Gravitation: An Introduction to Current Research* L. Witten, ed., (New York: John Wiley, 1962) p-227.
- [15] A. Anderson and J. W. York, Jr., *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4384 (1999).
- [16] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, New York, 2007.
- [17] C. Canuto, M. Y. Hussani, A. Quarteroni, and T. A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [18] John P. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover, 2nd edition, 2000.
- [19] B. Mercier, *An Introduction to the Numerical Analysis of Spectral Methods*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [20] B. Fornberg, *A practical Guide to Pseudospectral Methods*, Cambridge University Press, New York, 1996.
- [21] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon and J. Marck, *J. Comput. Appl. Math.* **109**, 892 (1999).
- [22] J. Novak and J. M. Ibañez, *Astrophys. J.* **533**, 392 (2000).
- [23] G. Calabrese, L. Lehener and M. Tiglio, arxiv:gr-qc/0111003v1.
- [24] C. Bona and J. Massó, *Phys. Rev. D* **38**, 2519 (1988).
- [25] G. B. Cook and M. A. Scheel, *Phys. Rev. D* **56**, 4775 (1997).
- [26] E. Seidel, W-M Suen, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1845 (1992).