



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

**EVOLUCIÓN DE UN AGUJERO NEGRO ESFÉRICAMENTE
SIMÉTRICO EN LAS FORMULACIONES ADM Y KST DE
LA RELATIVIDAD GENERAL**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
LIC. EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:
IVAN RIGOBERTO AVILES CALDERON



DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCISCO S. GUZMÁN MURILLO

MORELIA MICHOACÁN

FEBRERO DE 2016

*A mis padres, Rigoberto y Guadalupe
por su amor, trabajo y sacrificio.*

*A mis hermanos Carlos, Montse y Raúl
por sus abrazos, consejos y los buenos momentos.*

A Ayari.

Índice general

1. Introducción	11
1.1. Nociones preliminares	12
1.2. Solución de Schwarzschild	20
1.2.1. Solución de las ecuaciones de campo en el vacío	21
1.2.2. Coordenadas de Eddington-Finkelstein	25
2. Formalismo 3+1 de la Relatividad Numérica	29
2.1. Introducción	29
2.2. Separación 3+1 del espacio-tiempo	29
2.2.1. Formulación ADM	29
2.2.2. Formulación KST	39
3. Métodos numéricos	45
3.1. Diferencias Finitas	45
3.1.1. Aproximación de la derivada	46
3.1.2. Aproximaciones de orden de precisión superior	49
3.1.3. Derivadas de segundo orden	50
3.1.4. Convergencia	51
3.2. Algoritmo de Evolución	53
3.2.1. Método de Runge Kutta	54
4. Evolución	57
4.1. Consideraciones preliminares	57
4.2. Formulación ADM	58
4.2.1. Evolución de un agujero negro en el vacío en coordenadas EF	58
4.2.2. Evolución de la solución exacta con una norma no trivial	61
4.3. Formulación KST	64
4.3.1. Evolución de un agujero negro en el vacío en coordenadas EF	64
4.3.2. Evolución de la solución exacta con una norma no trivial	68
5. Conclusiones y comentarios finales	73

A. Variedades Diferenciables	75
B. Derivada de Lie	77
Bibliografía	79

Resumen

Esta tesis se enfoca en la implementación de un programa basado en el método de diferencias finitas para solucionar numéricamente las ecuaciones de la Relatividad General. Se estudia específicamente la evolución de un agujero negro esféricamente simétrico en el vacío. Se utiliza el formalismo 3+1 de la Relatividad General y se implementan los sistemas correspondientes a las formulaciones ADM y KST. Finalmente se analiza la validez de los resultados obtenidos sometiéndolos a las pruebas de convergencia correspondientes.

Palabras Clave — Relatividad General, Agujero negro, Métodos Numéricos, Diferencias Finitas, Relatividad Numérica.

Abstract

This thesis focuses on the implementation of a code based on the Finite Differences method in order to solve numerically the Einstein field Equations. We study specifically the evolution of a spherically symmetric black hole in vacuum. The 3+1 formalism of the General Relativity is used and the ADM and KST formulations are implemented. Finally, the validity of the obtained results is analysed through the corresponding convergence tests.

Capítulo 1

Introducción

El éxito de la Relatividad General se basa en su alto poder predictivo, que proviene de modificar radicalmente la concepción de la gravedad. En esta teoría se abandona el concepto de un espacio absoluto y de un tiempo absoluto y se introduce el concepto de espacio-tiempo, un objeto 4-dimensional que no sólo es un lugar donde ocurren procesos de un sistema físico dado, sino que debe ser pensado como un campo dinámico que participa en la evolución del propio sistema físico [1]. En este contexto, la gravedad no es más que una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo debida a una distribución dada de materia. En consecuencia, el estado dinámico de un sistema estará determinado a partir de una distribución de materia y ésta determinará el espacio-tiempo.

La Relatividad General es un ingrediente necesario para describir fenómenos astrofísicos que involucran objetos compactos [2], por ejemplo, enanas blancas, estrellas de neutrones o agujeros negros. Por tanto, se vuelve indispensable poder resolver las ecuaciones de Einstein que involucren la presencia de materia.

Las ecuaciones de Einstein son complicadas, por lo que se dificulta el tratamiento analítico de una solución general para cierta distribución de materia. El problema se simplifica un poco si se buscan soluciones especiales, por ejemplo aquellas que representan algún espacio-tiempo que posee simetrías: soluciones con simetría esférica o axial, soluciones estáticas o estacionarias, soluciones homogéneas e isotrópicas, etc. Lo que se conoce como *Relatividad Numérica* surge de la necesidad de resolver sistemas más realistas donde se tiene muy poca simetría; ésta intenta solucionar las ecuaciones de Einstein utilizando aproximaciones numéricas y códigos computacionales. Además, el desarrollo de la Relatividad Numérica ha estado mayormente motivado por modelar las fuentes de ondas gravitacionales. Se han desarrollado técnicas numéricas robustas que permiten proporcionar a detectores como LIGO o VIRGO los tipos de señales que se esperan provenientes de las fuentes más comunes[3]. La razón por la que se necesita hacer un tratamiento numérico es que éstas generalmente no poseen simetrías; por ejemplo, dos agujeros negros orbitando con espín no paralelo.

Como primer paso hacia el estudio de sistemas sin simetrías, en este trabajo se pre-

senta la evolución de un agujero negro usando las formulaciones ADM y KST (por sus autores Arnowitt-Desser-Misner y Kidder-Scheel-Teukolsky, respectivamente) de la Relatividad General y considerando que el sistema presenta simetría esférica.

Esta tesis tiene los siguientes objetivos fundamentales:

- Ilustrar el procedimiento a seguir para obtener soluciones numéricas de las ecuaciones de Einstein para el sistema en cuestión.
- Implementar el Método de Líneas, con el fin de que funcione como base para construir soluciones a otros problemas.

La estructura de este trabajo inicia dando las nociones preliminares de Relatividad General. En el capítulo 2 se expone el formalismo 3+1 de la Relatividad General, así como las formulaciones ADM y KST con sus respectivas reducciones a la simetría esférica. En el capítulo 3 se explican los métodos numéricos necesarios para resolver el sistema de interés. Finalmente se presentan resultados y comentarios finales.

Es importante tener bien claro las convenciones y la notación que se utilizará a lo largo de esta tesis. Con este objetivo en mente, así como el de ofrecer un corto pero bien definido marco teórico, se muestran a continuación conceptos preliminares de Relatividad General.

1.1. Nociones preliminares

Variedades y tensores

Un espacio-tiempo puede ser formalmente representado por un objeto matemático continuo y uniforme llamado *variedad diferenciable*, M , que a grandes rasgos modela al espacio-tiempo como un objeto que localmente tiene aspecto de $\mathbb{R}^4$, aunque globalmente es más complicado que $\mathbb{R}^4$. Una definición más rigurosa puede verse en el Apéndice A. En cada punto $p \in M$ se puede definir el *Espacio Tangente en p* , $T_p(M)$, y ese espacio es isomorfo a $\mathbb{R}^4$. Ahora, decir que M es localmente como $\mathbb{R}^4$ se puede entender como que en una región pequeña alrededor de p , el espacio $T_p(M)$ es una buena aproximación a la variedad [4]. No debe perderse de vista que los espacios tangentes son distintos en distintos puntos de M debido a que ésta no es globalmente plana.

Las curvas definidas en esa variedad pueden ser representadas paramétricamente como:

$$x^\alpha = x^\alpha(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

donde x^α son las coordenadas de un elemento de M . Nótese que un cambio de coordenadas alterará la forma funcional anterior pero no la curva en sí. Luego, las componentes de los vectores tangentes a la curva $x^\alpha(\lambda)$ están dadas por

$$v^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$$

y están definidos en un punto $p \in M$; estos elementos forman el espacio $T_p(M)$. Todo vector en $T_p(M)$ se escribe como una combinación lineal de una base $\{e_\alpha\}$ como:

$$v^\alpha = v^\alpha e_\alpha.$$

Considérense ahora funcionales de vectores en el espacio tangente. Un funcional lineal de un vector que va a los reales se conoce como *1-forma*. Dichos funcionales también forman un espacio vectorial que se conoce como *Espacio Cotangente*, $T_p^*(M)$ y éste es el dual de $T_p(M)$.

La base del espacio cotangente se compone de aquellas 1-formas que cumplan

$$\tilde{w}^\alpha(\tilde{e}_\beta) = \delta_\beta^\alpha$$

donde δ_β^α es la delta de Kronecker; de esta manera es posible escribir las componentes de la 1-forma $\tilde{q}$ como

$$\tilde{q} = q_\alpha \tilde{w}^\alpha$$

y se tiene por consiguiente:

$$\tilde{q}(\vec{v}) = q_\alpha \tilde{w}^\alpha(v^\beta \tilde{e}_\beta) = q_\alpha v^\beta \tilde{q}^\alpha(\tilde{e}_\beta) = q_\alpha v^\alpha$$

donde se usa la notación de Einstein para evitar escribir explícitamente las sumatorias. Es posible invertir la definición y ver a un vector $\vec{v}$ como la función, que dada la 1-forma $\tilde{q}$, regresa el número real $\tilde{q}(\vec{v})$. Generalizando esta idea, las aplicaciones multilineales de m 1-formas y n vectores

$$T : \underbrace{T_p(M)}_{n \text{ veces}} \times \underbrace{T_p^*(M)}_{m \text{ veces}} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (1.1)$$

definen un *Tensor* de tipo $\binom{m}{n}$. Las componentes de dicho tensor son justamente los valores de T aplicado a los elementos de la base de vectores y 1-formas. Por ejemplo, un tensor de tipo $\binom{2}{2}$ tiene componentes

$$T^{\alpha\beta}_{\mu\nu} := T(\tilde{w}^\alpha, \tilde{w}^\beta; \tilde{e}_\mu, \tilde{e}_\nu).$$

Los tensores están definidos, al igual que los vectores, en un punto. Es posible construir campos tensoriales con una regla t que asigne a cada punto $p \in M$ un tensor $t_p \in T_p(M)_s^{r*}$. A este campo tensorial se le denomina de tipo $\binom{r}{s}$ sobre M .

*Sea $T_p(M)_s^r$ el conjunto de los tensores de tipo $\binom{r}{s}$ definidos sobre $T_p(M)$.

Tensor métrico

Teniendo en mente los conceptos fundamentales recién descritos, considérese un espacio-tiempo con tres dimensiones de espacio y una de tiempo, o en lenguaje matemático, una variedad M 4-dimensional. Sean x^α las coordenadas de un elemento llamado *Evento* en este espacio-tiempo y $x^\alpha + dx^\alpha$ un evento infinitesimalmente cercano. Se define la *distancia invariante* entre ambos eventos, ds^2 , de la siguiente forma:

$$ds^2 \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

donde $g_{\alpha\beta}$ son las componentes del *Tensor Métrico*, g , un tensor simétrico y no degenerado de tipo $\binom{0}{2}$ que proporciona una noción de distancia dentro de una variedad. Este objeto ds^2 es una cantidad absoluta que no depende del sistema de coordenadas con que se describe al espacio-tiempo. En cada punto del espacio-tiempo, las componentes del tensor métrico forman una matriz simétrica no singular de 4×4 elementos, con signatura $(-, +, +, +)$, es decir un eigenvalor negativo asociado al tiempo y tres positivos asociados al espacio. Nótese que debido a la presencia de un eigenvalor negativo, la distancia invariante no es positiva definida. De hecho, a partir del tensor métrico se puede distinguir entre eventos relacionados entre sí de 3 formas distintas:

$$\begin{aligned} ds^2 &> 0 \text{ intervalo tipo espacio} \\ ds^2 &< 0 \text{ intervalo tipo tiempo} \\ ds^2 &= 0 \text{ intervalo nulo.} \end{aligned}$$

Todo objeto material se mueve siguiendo trayectorias de tipo tiempo, es decir, un evento de la trayectoria está relacionado con el siguiente mediante un intervalo tipo tiempo. La luz, por otra parte, se mueve siguiendo trayectorias nulas y éstas definen lo que se conoce como *Cono de Luz*. Se dice que dos eventos están causalmente conectados si se relacionan por medio de un intervalo de tipo tiempo; de manera que estos eventos tendrán influencia física entre sí.

También se usa el tensor métrico para definir un producto escalar entre dos vectores en cuatro dimensiones (4-vectores), por ejemplo $\vec{u}$ y $\vec{v}$; su producto escalar se define como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta,$$

donde se ha utilizado nuevamente la convención de la suma. En particular, la magnitud cuadrada de un 4-vector se define como:

$$u^2 := \vec{u} \cdot \vec{u} = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta.$$

Con lo anterior se puede clasificar a los vectores de la misma manera que al intervalo en tipo espacio, tipo tiempo y nulos. Claramente el intervalo no es otra cosa que la magnitud del vector (infinitesimal) de desplazamiento.

El tensor métrico puede ser usado para definir un mapeo *uno-a-uno* entre vectores y 1-formas [5]. Por ejemplo, si a g se le fija un vector arbitrario $\vec{u}$, se tiene un objeto $g(\vec{u}, \cdot)$ que recibirá como argumento otro vector $\vec{v}$, es decir, $g(\vec{u}, \cdot)$ es una 1-forma que se denotará por $\tilde{u}$. Sus componentes se obtienen de la definición estándar

$$u_\alpha := \tilde{u}(\vec{e}_\alpha) = g(\vec{u}, \vec{e}_\alpha) = g_{\mu\nu} u^\mu (\vec{e}_\alpha)^\nu = g_{\mu\nu} u^\mu \delta_\alpha^\nu = g_{\alpha\beta} u^\beta. \quad (1.2)$$

Además, ya que por definición g es no-degenerado, la expresión anterior se puede invertir para encontrar

$$u^\alpha = g^{\alpha\beta} u_\beta, \quad (1.3)$$

donde $g^{\alpha\beta}$ son las componentes de la matriz inversa a $g_{\alpha\beta}$: $g^{\alpha\mu} g_{\beta\mu} = \delta_\beta^\alpha$. Las operaciones dadas por (1.2) y (1.3) se conocen como *bajar* y *subir* el índice, respectivamente.

Geodésicas

La idea de Einstein con respecto al movimiento de los objetos fue pensar que, en presencia de un campo gravitacional (o sin ella), los objetos se mueven siguiendo trayectorias lo más rectas posibles (como en el caso de la Relatividad Especial con la métrica de Minkowski), las cuales corresponden a trayectorias de longitud extrema pero ahora en espacio-tiempos arbitrarios. A estas trayectorias extremas se les llama *Geodésicas*. Así la gravedad no se ve como una fuerza externa, sino como una distorsión de la geometría [6].

Se acostumbra parametrizar la trayectoria de un objeto utilizando el llamado *tiempo propio* $d\tau^2 := -ds^2$, que corresponde al tiempo medido por el objeto mismo. La ecuación de una geodésica está dada en general por

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$$

donde las cantidades $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ se conocen como *Símbolos de Christoffel* y están dados en términos de derivadas de la métrica como

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha := \frac{g^{\alpha\mu}}{2} \left[\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu} \right].$$

La ecuación de las geodésicas puede también escribirse en términos de la 4-velocidad $u^\alpha := dx^\alpha/d\tau$, que es la generalización relativista del concepto ordinario de velocidad. Nótese que

$$u^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = -1,$$

es decir, la 4-velocidad es un vector tipo tiempo.

En conclusión, dado un campo gravitacional, o en otras palabras, dada la métrica del espacio-tiempo, la ecuación de las geodésicas proporciona la trayectoria de los objetos: el espacio-tiempo determina el movimiento de las partículas de prueba.

Derivada Covariante

Al considerar el cambio de un campo tensorial al moverse en el espacio-tiempo, debe tenerse en cuenta que no sólo cambian las componentes, sino también la base en que dichas componentes se miden cambia de un punto a otro [6]. Una base común en la que se especifican dichas componentes es la "base coordenada", en la que se toman como elementos de la base a aquellos vectores que tienen una componente igual a 1 a lo largo de una coordenada dada y componentes iguales a 0 en otras direcciones. Se tiene entonces que el producto escalar entre los vectores de esta base es:

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = g_{\alpha\beta}.$$

lo que muestra que las componentes del tensor métrico son el producto escalar de los vectores base.

Considérese ahora la derivada de un vector $\vec{v}$ con respecto a las coordenadas que etiquetan los puntos de la variedad

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (v^\beta \vec{e}_\beta) = \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} \vec{e}_\beta + v^\beta \frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial x^\alpha}.$$

donde el segundo término aparece porque en un sistema de coordenadas arbitrario, los vectores de la base varían con la posición en la variedad. La derivada en el último término es también un vector y se puede expresar como combinación lineal de los vectores base. Se escribe dicha combinación lineal de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial x^\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu,$$

de manera que se puede expresar al cambio de $\vec{v}$ respecto a x^α como

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + v^\mu \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \right) \vec{e}_\beta.$$

Esta ecuación nos da directamente las componentes del vector $\partial \vec{v} / \partial x^\alpha$.

Se define la componente β de la *Derivada Covariante* del vector $\vec{v}$ con componentes v^α como:

$$v^\alpha_{;\beta} \equiv \nabla_\beta v^\alpha := \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + v^\mu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha.$$

La derivada covariante nos dice cómo cambian las componentes de un vector al mo-

vernos en un espacio general, e incluye el cambio de los elementos de la base. Para una 1-forma $\tilde{v}$ con componentes v_α , la componente β de su derivada covariante es:

$$v_{\alpha;\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\beta} - v_\mu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu.$$

Se extiende este concepto para tensores de mayor rango, la regla es agregar un símbolo de Christoffel por cada índice libre y el signo adecuado. Por ejemplo:

$$T^\mu_{\nu;\alpha} = \partial_\alpha T^\mu_\nu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu T^\beta_\nu - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta T^\mu_\beta.$$

Partiendo de este hecho es posible demostrar que la derivada covariante del tensor métrico es siempre cero:

$$g_{\mu\nu;\alpha} = 0, \quad g^{\mu\nu}_{;\alpha} = 0,$$

lo que implica que la operación de subir y bajar índices conmuta con las derivadas covariantes:

$$v^\mu_{;\alpha} = (g^{\mu\nu} v_\nu)_{;\alpha} = g^{\mu\nu} (v_{\nu;\alpha}).$$

Curvatura

Aunque el tensor métrico proporciona bastante información respecto a la geometría, no puede ser usado para deducir si un espacio-tiempo es plano o curvo. De hecho, un espacio-tiempo simple tendrá una métrica más compleja si la variedad es cubierta con coordenadas complicadas [1]. Una definición precisa proviene de considerar el transporte paralelo de un vector $\vec{v}$ con componentes v^λ alrededor de un circuito. Dicho circuito consiste en un paralelogramo infinitesimal cuyos lados son los vectores dx^μ y dx^ν (desplazamientos infinitesimales en las direcciones x^μ y x^ν , respectivamente). Específicamente, se calcula el conmutador de las derivadas covariantes $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu$ actuando sobre v^λ , es decir, se calcula la diferencia entre trasladar el vector v^λ primero a lo largo de dx^μ y luego a lo largo de dx^ν y trasladarlo primero dx^ν y luego dx^μ . Para el primer término del conmutador se tiene

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu v^\lambda &= \partial_\mu \partial_\nu v^\lambda + \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda v^\rho + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \partial_\mu v^\rho \\ &\quad - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho v^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda v^\sigma + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \partial_\nu v^\rho + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\rho v^\sigma, \end{aligned} \quad (1.4)$$

de modo que el conmutador completo viene dado por [4]

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] v^\lambda = R_{\mu\nu\rho}^\lambda v^\rho, \quad (1.5)$$

donde

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\rho}. \quad (1.6)$$

este tensor es el *Tensor de Curvatura de Riemann* y es una medida de la curvatura del espacio-tiempo. En un espacio plano, el vector no cambia al aplicarle transporte paralelo, mientras que en un espacio curvo generalmente sí lo hace. Nótese que el conmutador de dos derivadas covariantes no es cero, como sucede con las derivadas parciales. Además, se ha hecho uso de la propiedad $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$.

Las simetrías del tensor de Riemann implican que al final solamente 20 de las 256 componentes son independientes. Al bajar el índice contravariante y calcular la traza mediante contracciones sobre el primer y último pares de índices, ésta es cero. En cambio, la traza sobre el primer y tercer índices no es cero y es usada para definir el llamado *Tensor de Ricci*:

$$R_{\mu\nu} := g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = R^\beta_{\mu\beta\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\beta_{\lambda\beta} - \Gamma^\lambda_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\lambda}).$$

Es importante decir que el hecho de que el tensor de Ricci sea cero no implica que la variedad sea plana, ya que las 10 componentes restantes del tensor de Riemann pueden ser distintas de cero.

Por otra parte, la traza del tensor de Ricci se conoce como *Escalar de Ricci o de Curvatura* y se obtiene contrayendo índices como sigue:

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

ésta es una cantidad escalar definida en cada punto de la variedad.

Identidades de Bianchi y tensor de Einstein

Volviendo al tensor de curvatura de Riemann, se prueba que éste obedece a varias propiedades de simetría, entre las cuales se tiene a las *Identidades de Bianchi*:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu;\lambda} + R^\alpha_{\beta\lambda\mu;\nu} + R^\alpha_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0.$$

Si en la expresión anterior se contrae α con ν , resulta

$$R_{\beta\mu;\lambda} + R^\alpha_{\beta\alpha\lambda;\mu} + R^\alpha_{\beta\lambda\mu;\alpha} = 0.$$

Ahora, si se aplica la propiedad $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$ al segundo término, se llega a

$$R_{\beta\mu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\mu} + R^\alpha_{\beta\lambda\mu;\alpha} = 0.$$

Como paso siguiente, se sube el índice β y se contrae con λ , obteniendo

$$R^{\beta}_{\mu;\beta} - R_{;\mu} + R^{\alpha\beta}_{\beta\mu;\alpha} = 0 \quad (1.7)$$

Luego, usando las propiedades $R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}$ y $R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}$, el tercer término se puede reescribir:

$$R^{\alpha\beta}_{\beta\mu;\alpha} = R^{\beta\alpha}_{\mu\beta;\alpha} = R^{\alpha}_{\mu;\alpha} = R^{\beta}_{\mu;\beta},$$

de manera que el primer y último términos en (1.7) son idénticos y se obtiene:

$$2R^{\beta}_{\mu;\beta} - R_{;\mu} = \nabla_{\beta}(2R^{\beta}_{\mu} - \delta_{\mu}^{\beta}R) = 0.$$

Finalmente, subiendo el índice μ se obtiene el resultado que buscamos:

$$\nabla_{\beta}\left(R^{\beta\mu} - \frac{1}{2}g^{\beta\mu}R\right) = 0.$$

El término entre paréntesis es llamado *Tensor de Einstein* [7]:

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R. \quad (1.8)$$

Este tensor describe la curvatura del espacio-tiempo en las ecuaciones de campo de la Relatividad General.

Ecuaciones de campo de Einstein

Se cuenta ahora con los ingredientes necesarios para tratar sobre las ecuaciones de Einstein.

En la teoría de Newton, la ecuación que relaciona el potencial gravitacional ϕ con la densidad de masa ρ que representa la fuente del campo es la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho.$$

En el contexto de la relatividad general, dado que el campo gravitacional es una entidad geométrica, las componentes de $g_{\mu\nu}$ deben ser consideradas como las nuevas variables dinámicas del campo gravitacional. Por analogía con la ecuación anterior, se espera que las nuevas ecuaciones para el campo gravitacional, es decir, las ecuaciones de Einstein, contengan derivadas del tensor métrico de segundo orden y no mayor. Más aún, las nuevas ecuaciones deben conservar la misma forma sin importar el sistema de coordenadas empleado, por lo que deben involucrar tensores. El tensor que generaliza la densidad de masa en el lado derecho de la expresión anterior es el *Tensor de Energía-Momento*, $T^{\mu\nu}$, que describe la densidad de energía, densidad de momento y flujo de momento de un campo de materia. Estos argumentos sugieren la siguiente forma para las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

donde κ es una constante de proporcionalidad entre el tensor de Einstein y el tensor que representa la materia. Por su parte, el tensor $G_{\mu\nu}$ debería tener la siguiente dependencia

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}(g, \partial g, \partial^2 g),$$

en analogía con su correspondiente expresión Newtoniana [1]. Además, las componentes del tensor $T^{\mu\nu}$ describen las siguientes cantidades físicas:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \text{densidad de energía} \\ T^{0i} &= \text{densidad de momento} \\ T^{ij} &= \text{flujo de momento } i \text{ a través de la superficie } j. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Einstein son postuladas de tal manera que se cumpla que la fuente del campo satisfaga leyes de conservación del tipo $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, lo mismo se espera que $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ ya que están relacionados por (1.9). Como ya se mencionó, el tensor de Einstein tiene esta propiedad, pues su construcción lo dota de ella aún cuando fue obtenido en un contexto puramente geométrico.

Reuniendo todos los términos, las ecuaciones de Einstein se escriben como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

donde se han escrito explícitamente los factores G y c , que el factor 8π son necesarios para el límite de campo débil de la gravedad Newtoniana [8].

Tomando la traza de las ecuaciones de Einstein, se tiene que

$$R = -8\pi T,$$

por lo que las ecuaciones de Einstein pueden tomar la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right),$$

lo cual ayuda a poner en relieve la estrecha relación (de hecho la equivalencia estricta) entre la geometría del espacio-tiempo con su contenido de masa-energía [1]. Este es uno de los aspectos fundamentales de la relatividad general.

1.2. Solución de Schwarzschild

En 1916 Karl Schwarzschild encontró la primera solución exacta para las ecuaciones de Einstein. Ésta es la solución para un espacio-tiempo esféricamente simétrico, estático y

sin materia. La métrica $g_{\mu\nu}$ que calculó define el campo gravitacional en el espacio-tiempo vacío que rodea algún objeto esférico, por ejemplo, una estrella.

1.2.1. Solución de las ecuaciones de campo en el vacío

El primer paso es construir la forma más general de la métrica para un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico. Analizar un espacio-tiempo estático implica que las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ son independientes de x^0 (la coordenada temporal) y, en segundo lugar, que el elemento de línea ds^2 sea invariante bajo la transformación $x^0 \mapsto -x^0$. En consecuencia, no puede haber términos cruzados del tipo $g_{ti} dt dx^i$, ya que esto rompería la invarianza de la transformación. Luego, la simetría esférica implica únicamente dependencia radial en las funciones que intervienen en el elemento de línea.

Entonces, se plantea que la forma más general de la métrica estática y esféricamente simétrica es:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.9)$$

Las funciones $A(r)$ y $B(r)$ son determinadas al resolver las ecuaciones de campo de Einstein en el espacio vacío, es decir, cuando el tensor de energía momento es cero, $T_{\mu\nu} = 0$. Lo anterior implica que debe cumplirse $G_{\mu\nu} = 0$, lo cual simplemente requiere que el tensor de Ricci cumpla la siguiente relación:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (1.10)$$

lo cual es una implicación directa de la ecuación (1.9). Así pues, los elementos de la métrica no triviales son:

$$\begin{aligned} g_{00} &= A(r) & g^{00} &= 1/A(r) \\ g_{11} &= -B(r) & g^{11} &= -1/B(r) \\ g_{22} &= -r^2 & g^{22} &= -1/r^2 \\ g_{33} &= -r^2 \sin^2\theta & g^{33} &= -1/r^2 \sin^2\theta \end{aligned} \quad (1.11)$$

Además se tiene que sólo 9 símbolos de Christoffel son distintos de cero:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= 0 \\
\Gamma_{00}^i &= -\frac{1}{2}g^{i\rho}\partial_\rho g_{00} & \Rightarrow \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2B(r)}\frac{dA(r)}{dr} \\
\Gamma_{0i}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\rho}(\partial_i g_{\rho 0} + \partial_0 g_{\rho i} - \partial_\rho g_{i0}) = \frac{1}{2}g^{00}\partial_i g_{00} & \Rightarrow \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2A(r)}\frac{dA(r)}{dr} \\
\Gamma_{ij}^0 &= 0 \\
\Gamma_{ii}^i &= \frac{1}{2}g^{i\rho}(\partial_i g_{\rho i} + \partial_i g_{\rho i} - \partial_\rho g_{ii}) = \frac{1}{2}g^{ii}\partial_i g_{ii} & \Rightarrow \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2B(r)}\frac{dB(r)}{dr} \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) & \Rightarrow \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{B(r)} \\
\Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{33} & \Rightarrow \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r\sin^2\theta}{B(r)} \\
\Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}\partial_1 g_{22} & \Rightarrow \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{33} & \Rightarrow \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}\partial_1 g_{33} & \Rightarrow \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}\partial_2 g_{33} & \Rightarrow \Gamma_{32}^3 &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Al sustituir estos resultados en la expresión para el tensor de Ricci (1.10), se obtienen las siguientes componentes no cero del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rB} \\
R_{11} &= \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rB} \\
R_{22} &= \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) \\
R_{33} &= R_{22}\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{1.13}$$

donde únicamente las tres primeras expresiones son útiles pues la cuarta no aporta información que no esté contenida en la tercera. Las ecuaciones de campo del espacio vacío se obtienen igualando las expresiones anteriores a cero.

Para el sistema (1.13), sumando B/A veces la primera ecuación a la segunda, se tiene:

$$A'B + AB' = 0$$

lo que implica que $AB = \alpha$ constante. Sustituyendo $B = \alpha/A$ en la ecuación para R_{00} , se obtiene $A + rA' = \alpha$, que puede ser escrita como:

$$\frac{d(rA)}{dr} = \alpha$$

Integrando se obtiene $rA = \alpha(r + k)$, con k otra constante de integración. Por tanto, las funciones $A(r)$ y $B(r)$ están dadas por:

$$\begin{aligned} A(r) &= \alpha \left(1 + \frac{k}{r}\right), \\ B(r) &= \left(1 + \frac{k}{r}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Aunque sólo se ha utilizado la suma de las primeras dos ecuaciones en (1.13) para encontrar la forma de $A(r)$ y $B(r)$, se puede comprobar que esta forma satisface todas las ecuaciones por separado.

La constante de integración k puede representar la masa que produce el campo gravitatorio. Es posible identificar a k (y a α) considerando el límite del campo débil, en el que se requiere que

$$\frac{A(r)}{c^2} \rightarrow 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

donde Φ es el potencial gravitacional Newtoniano. Este resultado proviene de considerar un campo gravitacional débil que se puede escribir en coordenadas tales que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ (con $\|h_{\mu\nu}\| \ll 1$) y en el que la componente g_{00} de la métrica estática se escribe como $g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$. Por otra parte, en el límite del campo débil r puede identificarse como la distancia radial medida desde el origen de coordenadas. Para una masa M esféricamente simétrica se debe tener que $\Phi = -GM/r$; de esta manera se concluye que $k = -2GM/c^2$ y $\alpha = c^2$. Por tanto la métrica de Schwarzschild para el espacio vacío afuera de un cuerpo esférico de masa M es

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.14)$$

la cual escrita en unidades geométricas en donde $G = 1$ y $c = 1$ es:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.15)$$

Nótese que conforme r se acerca al valor $2M$, el coeficiente de dt^2 se acerca a cero, mientras que el coeficiente de dr^2 diverge. Inicialmente no se tuvo la certeza de que la divergencia en el punto $r = 2M$ conocido como el *Radio de Schwarzschild*, r_s , correspondiera a una singularidad física real o simplemente una singularidad en la coordenada. Al calcular el escalar de curvatura (que es una cantidad invariante), $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$, se encontró que éste no diverge en $r = r_s$. Por tanto, la curvatura en $r = r_s$ es bien comportada y se concluye que esta superficie es solamente una singularidad de la coordenada. La cuestión es encontrar una transformación de coordenadas apropiada para que ds^2 no sea singular en esa superficie.

Líneas de mundo para la luz en el plano $t - r$

Haciendo $ds^2 = 0$ en la métrica de Schwarzschild, es posible estudiar el comportamiento de un rayo de luz cerca de la región $r = 2M$ tal y como sería visto por un observador en reposo viendo lo que sucede desde el “infinito”. Para simplificar el análisis, se considera que el rayo viaja a lo largo de una geodésica nula radial, con lo cual las coordenadas θ y ϕ del rayo de luz no cambiarán, es decir, $d\phi = d\theta = 0$. La expresión resultante es:

$$0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2. \quad (1.16)$$

Para definir la estructura de los conos de luz, se tiene que para luz moviéndose radialmente se cumple:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad (1.17)$$

donde el signo positivo corresponde a luz saliente ($dr/dt > 0$ en la región $r > 2M$) y el signo negativo a luz entrante (para la cual $dr/dt < 0$ en la región $r > 2M$). Integrando se obtiene:

$$t = r + \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| + C \text{ luz saliente}, \quad (1.18)$$

$$t = -r - \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| + C \text{ luz entrante}. \quad (1.19)$$

La gráfica con estas curvas se muestra en la Fig 1.1. Como el diagrama será el mismo para cualquier valor de θ y ϕ , debe pensarse en cada punto (r, t) en el diagrama como representando una 2-esfera de área $4\pi r^2$ [7].

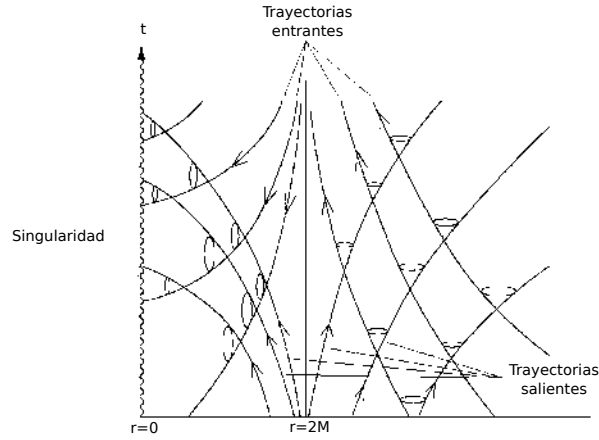


Figura 1.1: Conos de luz para luz entrante y saliente en la métrica de Schwarzschild considerando solamente movimiento radial [7].

1.2.2. Coordenadas de Eddington-Finkelstein

La Fig1.1 muestra que a un rayo de luz moviéndose radialmente le tomaría un tiempo infinito cruzar el radio de Schwarzschild, pero se debe al problema de las coordenadas. Una técnica para eludir este problema es analizar al espacio-tiempo por medio de geodésicas, que son independientes del sistema coordenado. En este caso se utilizarán las geodésicas nulas de rayos de luz moviéndose radialmente.

Un sistema coordenado basado en luz con movimiento únicamente radial se determina utilizando la constante de integración de la ecuación (1.19) como la nueva coordenada

$$p = t + r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \quad (1.20)$$

donde al sustituir su diferencial por dt en (1.15) se obtiene el siguiente elemento de línea

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dp^2 + 2dpdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.21)$$

Nótese que (1.21) es ahora regular en $r = 2M$. En cierto sentido, la transformación (1.20) ha extendido el rango de la solución. Se podría argumentar que esta transformación no se puede usar en $r = 2M$ porque es singular en esa región. Esto debe ocurrir si se quiere eliminar la singularidad allí. Esta forma del elemento de línea es regular en el rango $0 < r < \infty$, mientras que la forma estándar lo es sólo en $2M < r < \infty$. A pesar de ello, en la intersección $2M < r < \infty$, ambas soluciones están relacionadas por (1.20) y por tanto deben representar la misma solución en esta región.

Resulta más familiar trabajar con una coordenada temporal t' en lugar de geodésicas nulas; por ello se define a t' como:

$$t' = p - r = t + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|. \quad (1.22)$$

El nuevo elemento de línea toma la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt'^2 + \frac{4M}{r} dt' dr + \left(1 + \frac{2M}{r} \right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.23)$$

que también es regular en $0 < r < \infty$. Las coordenadas (t', r, θ, ϕ) son llamadas *Coordenadas de Eddington-Finkelstein*.

Líneas de mundo para luz en el plano $t - r$

La ecuación (1.23) conduce a las siguientes expresiones para las líneas de mundo de rayos de luz entrantes y salientes:

$$t' = -r + C \quad (1.24)$$

$$t' = r + 4M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| + C. \quad (1.25)$$

La primera ecuación, para luz entrante, corresponde a una línea recta y es válida en $0 < r < \infty$. Por tanto, las geodésicas nulas son rectas continuas a través de $r = 2M$ de pendiente -1 . Lo anterior se ve claramente en la Fig 1.2 que muestra el diagrama del espacio-tiempo de la geometría de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein.

Información adicional que brinda la Fig 1.2 señala que en el radio de Schwarzschild cambia la estructura de los conos de luz, dirigiendo el futuro hacia la singularidad una vez que se cruza la frontera $r = 2M$. Además, nótese que un rayo de luz en la región $r < 2M$ no puede escapar al exterior. En conclusión, el radio de Schwarzschild $r = 2M$ define un *Horizonte de Eventos*, una frontera de no retorno. Una región del espacio-tiempo que tiene un horizonte de eventos es llamado *Agujero Negro* [7].

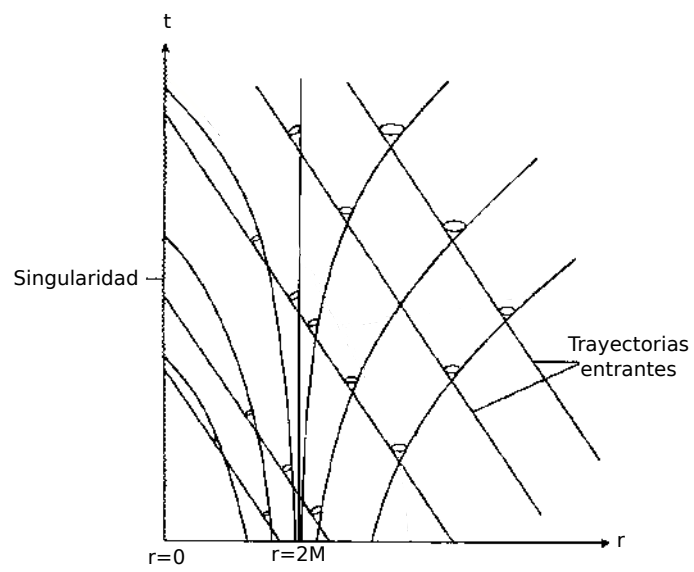


Figura 1.2: Estructura de los conos de luz en coordenadas de Eddington-Finkelstein [7].

Capítulo 2

Formalismo 3+1 de la Relatividad Numérica

2.1. Introducción

Un objetivo central de este proyecto es describir la evolución dinámica de un sistema físico gobernado por las ecuaciones de Einstein. Debido a que sólo para los sistemas más simples se tiene una solución analítica, la tarea de resolver las ecuaciones debe realizarse numéricamente en una computadora. Para construir algoritmos que realicen este proceso, se deben tomar las ecuaciones de campo 4-dimensionales y llevarlas a una forma adecuada para su integración numérica.

Las ecuaciones de Einstein están escritas en una forma totalmente covariante, donde no hay distinción entre espacio y tiempo. Existen diversos formalismos para separar estas ecuaciones y llevarlas a una forma en la que sea posible conocer la evolución del campo gravitacional a partir de ciertas condiciones iniciales dadas. Cada formalismo se distingue por la manera en que realiza esta separación.

A continuación se hace una descripción del formalismo 3+1, que es el que se usará en este proyecto.

2.2. Separación 3+1 del espacio-tiempo

2.2.1. Formulación ADM

La forma covariante de las ecuaciones de campo de Einstein es una formulación bastante elegante e importante desde un punto de vista teórico pero impide ver al campo gravitacional como algo que evoluciona en el tiempo. Entonces, el primer paso para plantear las ecuaciones como un problema de evolución, es separar claramente al espacio del tiempo. La formulación de la relatividad general que resulta de llevar a cabo este proceso es

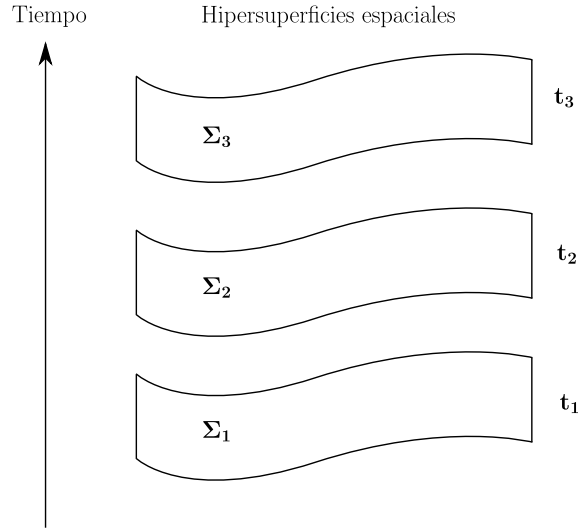


Figura 2.1: Foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies espaciales 3-dimensionales.

conocida como el *Formalismo 3+1*.

En Relatividad General se debe tener cuidado con las relaciones causales, de modo que sea posible tener una manera consistente de referirse al pasado y futuro. Este es el requisito mínimo que se puede pedir a un espacio-tiempo si se quiere hablar de estructura causal entre eventos. Si el espacio-tiempo no es orientable en el tiempo, o en otras palabras, no se tiene una noción de “flecha temporal” que indique la dirección en la que el tiempo avanza; no es posible en general, dada la trayectoria de un observador, afirmar si está retrocediendo o avanzando en el tiempo.

Adicionalmente, un espacio-tiempo que sea orientable en el tiempo puede ser foliado a través de una familia de hipersuperficies Σ_t de tipo espacio definidas como aquellas cuyo vector normal es de tipo tiempo. En otras palabras, el espacio-tiempo M^4 estará representado por la evolución de tales hipersuperficies: $M^4 = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t$, donde t es el tiempo coordenado (Fig. 2.1).

Si se consideran dos hipersuperficies adyacentes Σ_t y Σ_{t+dt} de una foliación* específica del espacio-tiempo, un punto en Σ_t estará identificado con otro punto en Σ_{t+dt} . La correspondencia entre estos se hace a través de un vector que une dichos puntos. Entonces, para determinar la geometría de la región de espacio-tiempo contenida entre las hipersuperficies se introducen los siguientes 3 elementos:

- La 3-métrica γ_{ij} (métrica inducida del espacio 4-dimensional) que permite medir la distancia entre puntos en la hipersuperficie Σ_t :

*Se refiere a la separación en cortes tridimensionales del espacio-tiempo en la que cada hoja es una hipersuperficie espacial. Si se consideran las coordenadas (t, x^i) , entonces el conjunto de las superficies $t = \text{constante}$ definen una foliación del espacio-tiempo.

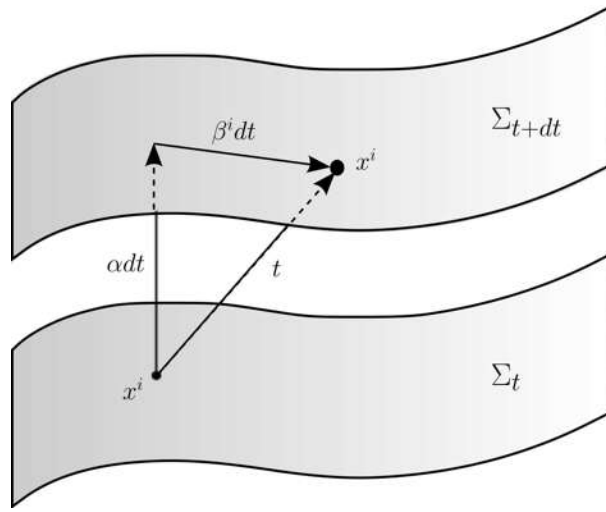


Figura 2.2: Esquema de la función lapso α y el vector de corrimiento β^i entre dos hipersuperficies adyacentes.

$$dl^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j, \quad (2.1)$$

donde los índices $i, j = 1, 2, 3$ etiquetan coordenadas espaciales.

- El lapso del tiempo propio $d\tau$ entre las dos hipersuperficies, medida por un observador que se mueve en dirección normal a las hipersuperficies (observador Euleriano):

$$d\tau = \alpha(t, x^i)dt. \quad (2.2)$$

Aquí α es conocida como *función lapso*.

- El 3-vector de corrimiento β^i que representa la velocidad relativa entre el observador Euleriano y las líneas de coordenadas espaciales constantes[3].

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i(t, x^j)dt, \quad (\text{para observadores Eulerianos}). \quad (2.3)$$

Nótese que tanto la manera en que el espacio-tiempo es foliado, como la forma en que el sistema de coordenadas espaciales se propaga de una hipersuperficie a otra no son únicas. La función lapso α y el vector desplazamiento son funciones libremente especificables que poseen información sobre el sistema de coordenadas y son conocidas como *Funciones de norma*.

En términos de las funciones $\{\alpha, \beta^i, \gamma_{ij}\}$, la métrica 3+1 del espacio-tiempo se escribe de la siguiente forma:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i)dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij}dx^i dx^j, \quad (2.4)$$

donde se define $\beta_i = \gamma_{ij}\beta^j$. En forma matricial, el tensor métrico de la descomposición 3+1 es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k\beta^k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix},$$

y su inversa

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^j/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i\beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Considérese ahora un vector unitario n^μ normal a las hipersuperficies espaciales cuyas componentes en el sistema de coordenadas que se acaba de describir son

$$n^\mu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha), \quad n_\mu = g_{\mu\nu}n^\nu = (-\alpha, 0) \quad (2.5)$$

Utilizando el vector n^μ , se puede definir formalmente el tensor γ_{ij} como la métrica inducida en cada hipersuperficie Σ_t :

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad (2.6)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico del espacio-tiempo completo. De hecho, solamente la parte espacial γ_{ij} contiene información intrínseca a Σ_t y que es independiente del vector $\vec{n}$.

Curvatura extrínseca

La *curvatura extrínseca* se define para los objetos incrustados en otro espacio de mayor dimensión y debe distinguirse de la *curvatura intrínseca* que sólo depende de la geometría interna de las hipersuperficies dada por un tensor de Riemann 3-dimensional en términos de la 3-métrica γ_{ij} .

La curvatura extrínseca está definida en términos del cambio del vector $\vec{n}$ normal a Σ_t al transportarlo de un punto a otro de la hipersuperficie. Esta cantidad es medida por el tensor K_{ij} , cuyas componentes son:

$$K_{ij} := -P_i^k \nabla_k n_j = -(\nabla_i n_j + n_i n^k \nabla_k n_j). \quad (2.7)$$

donde se ha introducido el *Operador Proyección sobre las hipersuperficies espaciales*, $P_j^i := \delta_j^i + n^i n_j$, que corresponde a la métrica espacial inducida, $P_{ij} = \gamma_{ij}$.

Este tensor tiene las propiedades de ser puramente espacial y simétrico. Sustituyendo la forma del vector normal (2.5) en (2.7) se obtiene que el tensor K_{ij} está dado en términos de γ_{ij}

$$K_{ij} = \frac{1}{2\alpha} [-\partial_t \gamma_{ij} + \nabla_i \beta_j + \nabla_j \beta_i] \quad (2.8)$$

donde ∇_i representa la derivada covariante 3-dimensional asociada a γ_{ij} , es decir, $\nabla_i = P_i^k \nabla_k$. La ecuación anterior muestra que la curvatura extrínseca está relacionada con el cambio temporal de la métrica de las hipersuperficies espaciales

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + \nabla_i \beta_j + \nabla_j \beta_i, \quad (2.9)$$

la cual es una ecuación de evolución para las componentes de γ_{ij} . Con este resultado, la tarea ahora es encontrar la ecuación de evolución de las componentes del tensor K_{ij} para escribir la relatividad general como un problema de evolución de hipersuperficies. Para ello ya no se usan conceptos puramente geométricos y se recurre a las ecuaciones de campo de Einstein. En otras palabras, la evolución de la 3-métrica γ_{ij} es puramente cinemática, mientras que la dinámica del sistema está contenida en las ecuaciones de evolución para K_{ij} .

Constricciones

El primer paso es escribir al tensor de Riemann 4-dimensional $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ en términos del tensor de Riemann intrínseco 3-dimensional ${}^{(3)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ de las hipersuperficies y el tensor de curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$. Esta proyección está determinada por las ecuaciones de Gauss-Codazzi

$$P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma R_{\delta\kappa\lambda\sigma} = {}^{(3)}R_{\alpha\beta\mu\nu} + K_{\alpha\mu} K_{\beta\nu} - K_{\alpha\nu} K_{\beta\mu}.$$

Por otra parte, la proyección sobre las hipersuperficies del tensor de Riemann contraído una vez con el vector normal resulta en las ecuaciones de Codazzi-Mainardi

$$P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda n^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu} = \nabla_\beta K_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha K_{\beta\mu},$$

donde nuevamente $\nabla_\mu = P_\mu^\alpha \nabla_\alpha$. Nótese que las ecuaciones de Gauss-Codazzi y la doble proyección del tensor de Riemann sobre las hipersuperficies espaciales se relacionan teniendo en mente el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} P^{\alpha\mu} P^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= (g^{\alpha\mu} + n^\alpha n^\mu)(g^{\beta\nu} + n^\beta n^\nu) R_{\alpha\beta\mu\nu} \\ &= R + 2n^\mu n^\nu R_{\mu\nu} \\ &= 2n^\mu n^\nu G_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

con $G_{\mu\nu}$ el tensor de Einstein. Por otro lado, las ecuaciones de Gauss-Codazzi implican que

$$P^{\alpha\mu} P^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene

$$2n^\mu n^\nu G_{\mu\nu} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Utilizando las ecuaciones de Einstein (1.9), el cálculo anterior conduce a la siguiente forma

$$R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} = 16\pi\rho_{ADM}, \quad (2.12)$$

donde se ha definido $\rho_{ADM} = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$ y corresponde a la densidad local de energía medida por un observador Euleriano. Nótese que ésta no es una ecuación de evolución, pero sí una constricción que debe satisfacerse a todo tiempo. Esta ecuación es conocida como Constricción *Hamiltoniana* o de *Energía*.

Considérese ahora la contracción mixta del tensor de Einstein en la que se efectúa una proyección de un índice a lo largo de la dirección normal:

$$P^{\alpha\mu}n^\nu G_{\mu\nu} = P^{\alpha\mu}n^\nu R_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Las ecuaciones de Codazzi-Mainardi implican:

$$\gamma^{\alpha\mu}n^\nu G_{\mu\nu} = \nabla^\alpha K - \nabla_\mu K^{\alpha\mu}, \quad (2.14)$$

luego, las ecuaciones de campo de Einstein se convierten en

$$\nabla_\mu(K^{\alpha\mu} - \gamma^{\alpha\mu}K) = 8\pi J^\alpha, \quad (2.15)$$

donde $J^\alpha := -P^{\alpha\mu}n^\nu T_{\mu\nu}$ es la densidad de momento medida por un observador Euleriano. Las ecuaciones (2.15) se conocen como *Constricciones de Momento*

Finalmente, en un sistema coordenado adaptado a la foliación, las ecuaciones (2.12) y (2.15) toman la forma:

$$\begin{aligned} R + K^2 - K_{ij}K^{ij} &= 16\pi\rho_{ADM}, \\ \nabla_j(K^{ij} - \gamma^{ij}K) &= 8\pi J^i. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Es importante notar que las expresiones (2.16) no sólo no son ecuaciones de evolución, sino que además son independientes de las funciones de norma (α, β^i) . Las constricciones son relaciones que se establecen en una hipersuperficie dada Σ_t . Lo anterior restringe la manera en que se especifican las condiciones iniciales $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$ ya que éstas deben satisfacer al sistema (2.16) en toda hipersuperficie.

Ecuaciones ADM

Con el fin de encontrar las ecuaciones de evolución para las componentes de la curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$, se comienza por considerar la proyección del tensor de Riemann sobre las hipersuperficies contraído dos veces con el vector normal, resultando:

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa n^\lambda n^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma} = \mathcal{L}_{\vec{n}} K_{\mu\nu} + K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda + \frac{1}{\alpha} \nabla_\mu \nabla_\nu \alpha. \quad (2.17)$$

donde se ha introducido la derivada de Lie (ver Apéndice B) de la curvatura extrínseca a lo largo de la dirección normal, la cual corresponde a la evolución temporal.

Luego, de las ecuaciones de Gauss-Codazzi (2.2.1) se tiene

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa (n^\lambda n^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma} + R_{\delta\kappa}) = R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda, \quad (2.18)$$

que junto con (2.17) implica

$$\mathcal{L}_{\vec{t}} K_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \nabla_\nu \alpha + \alpha (-P_\mu^\delta P_\nu^\kappa R_{\delta\kappa} + {}^{(3)}R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - 2K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda). \quad (2.19)$$

Usando las ecuaciones de campo (1.9) escritas en términos del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{t}} K_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{\mu\nu} &= -\nabla_\mu \nabla_\nu \alpha + \alpha [{}^{(3)}R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - 2K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda] \\ &\quad + 4\pi\alpha [\gamma_{\mu\nu}(S - \rho_{ADM}) - 2S_{\mu\nu}], \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde se define $S_{\mu\nu} := P_\mu^\alpha P_\nu^\beta T_{\alpha\beta}$ es la proyección completa sobre las hipersuperficies del tensor $T_{\alpha\beta}$ que corresponde al tensor de energía-momento medido por un observador Euleriano y $S := S^\mu_\mu$. Finalmente, escribiendo $\mathcal{L}_{\vec{t}} = \partial_t$, $\mathcal{L}_{\vec{\beta}} = \beta^\lambda \partial_\lambda K_{\mu\nu} + K_{\lambda\mu} \partial_\nu \beta^\lambda + K_{\lambda\nu} \partial_\mu \beta^\lambda$ y considerando las componentes espaciales, la relación (2.20) queda:

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} &= \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - \nabla_i \nabla_j \alpha \\ &\quad + \alpha [{}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k] + 4\pi\alpha [\gamma_{ij}(S - \rho_{ADM}) - 2S_{ij}]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Por tanto, la evolución temporal de las variables dinámicas γ_{ij} y K_{ij} queda determinada por las ecuaciones ADM:

$$\begin{aligned} \partial_t \gamma_{ij} &= -2\alpha K_{ij} + \nabla_i \beta_j + \nabla_j \beta_i, \\ \partial_t K_{ij} &= -\nabla_i \nabla_j \alpha + \alpha (R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{il} K_j^l) \\ &\quad + 4\pi\alpha [(S - \rho_{ADM})\gamma_{ij} - 2S_{ij}] \\ &\quad + \beta^l \nabla_l K_{ij} + K_{il} \nabla_j \beta^l + K_{jl} \nabla_i \beta^l, \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde ∇_i representa la derivada covariante con respecto a la 3- métrica, R_{ij} es el tensor de Ricci de las hipersuperficies espaciales y $K = \gamma^{ij} K_{ij}$ es la traza de la curvatura extrínseca.

Las expresiones anteriores, junto con (2.16) son las ecuaciones de campo de Einstein (1.9) representadas como un problema de Cauchy de valores iniciales. En total son un conjunto de 20 ecuaciones: 6 de ellas para las componentes de la 3-métrica γ_{ij} , 6 más para las componentes de la curvatura extrínseca K_{ij} , 4 ecuaciones de constricción y las 4 correspondientes a la elección de las coordenadas, es decir, una ecuación para la función lapso y 3 para el vector de desplazamiento.

son las ecuaciones de campo de Einstein (1.9) representadas como un problema de Cauchy de valores iniciales. En total son un conjunto de 20 ecuaciones: 6 de ellas para las componentes de la 3-métrica γ_{ij} , 6 más para las componentes de la curvatura extrínseca K_{ij} , 4 ecuaciones de constricción y las 4 correspondientes a la elección de las coordenadas, es decir, una ecuación para la función lapso y 3 para el vector de desplazamiento.

Caso particular: Simetría esférica

La reducción al caso de un espacio-tiempo esféricamente simétrico que es descrito en coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) , conduce a la siguiente forma para el elemento de línea:

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \gamma_{rr}(\beta^r)^2)dt^2 + 2\gamma_{rr}\beta^r dt dr + \gamma_{rr}dr^2 + \gamma_{\theta\theta}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.23)$$

donde t representa la coordenada temporal y (r, θ, ϕ) son las coordenadas espaciales. Nuevamente se asumen unidades geométricas donde $G = c = 1$. Cabe mencionar que, debido a la simetría del problema, el vector de desplazamiento tiene una sola componente $\beta^i = (\beta^r, 0, 0)$. Por tanto, se tiene la siguiente dependencia para las variables involucradas: $\beta^r = \beta^r(t, r)$, $\alpha = \alpha(t, r)$ y lo mismo para las funciones métricas $\gamma_{rr} = \gamma_{rr}(t, r)$ y $\gamma_{\theta\theta} = \gamma_{\theta\theta}(t, r)$.

Respecto a la curvatura extrínseca, a partir de la expresión (2.4) se obtienen las componentes K_{ij} mediante la expresión (2.8)

$$K_{ij} = \frac{1}{2\alpha}[-\partial_t \gamma_{ij} + \partial_i \beta_j + \partial_j \beta_i - 2\Gamma^k_{ij}\beta_k]. \quad (2.24)$$

donde Γ^k_{ij} son los símbolos de Christoffel definidos en términos de la métrica inducida como sigue:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\gamma^{lk}(\partial_j \gamma_{li} + \partial_i \gamma_{lj} - \partial_l \gamma_{ij}), \quad (2.25)$$

En este caso, para calcular las componentes de la curvatura extrínseca se requieren los siguientes símbolos de conexión:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} \gamma^{rr} \partial_r \gamma_{rr} \\
\Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{1}{2} \gamma^{rr} \partial_r \gamma_{\theta\theta} \\
\Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{1}{2} \gamma^{rr} \partial_r \gamma_{\phi\phi} \\
\Gamma_{r\theta}^r &= \Gamma_{r\phi}^r = \Gamma_{\theta\phi}^r = 0
\end{aligned} \tag{2.26}$$

De lo anterior, se obtiene finalmente que las componentes de la curvatura extrínseca dadas por (2.24) son:

$$\begin{aligned}
K_{rr} &= \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{2} \beta^r \partial_r \gamma_{rr} + \gamma_{rr} \partial_r \beta^r \right] \\
K_{\theta\theta} &= \frac{1}{2\alpha} [\gamma_{rr} \beta^r \gamma^{rr} \partial_r \gamma_{\theta\theta}] = \frac{1}{2\alpha} \beta^r \partial_r \gamma_{\theta\theta} \\
K_{\phi\phi} &= \frac{1}{2\alpha} [\gamma_{rr} \beta^r \gamma^{rr} \partial_r \gamma_{\phi\phi}] = \frac{1}{2\alpha} \beta^r \partial_r \gamma_{\phi\phi} = \sin^2 \theta K_{\theta\theta} \\
K_{r\theta} &= K_{r\phi} = K_{\theta\phi} = 0.
\end{aligned}$$

En resumen, la 3-métrica, la curvatura extrínseca y el vector desplazamiento tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\gamma_{ij} &= \begin{pmatrix} \gamma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{\theta\theta} \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \\
K_{ij} &= \begin{pmatrix} K_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\theta\theta} \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \\
\beta^i &= (\beta^r, 0, 0).
\end{aligned}$$

Las ecuaciones ADM (2.22) para la métrica inducida y curvatura extrínseca en el caso esféricamente simétrico utilizando el elemento de línea (2.23) y el vector desplazamiento $\beta^i = (\beta^r, 0, 0)$ quedan dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\partial_t \gamma_{rr} &= -2\alpha K_{rr} + \beta^r \partial_r \gamma_{rr} + 2\gamma_{rr} \partial_r \beta^r, \\
\partial_t \gamma_{\theta\theta} &= -2\alpha K_{\theta\theta} + \beta^r \partial_r \gamma_{\theta\theta}, \\
\partial_t K_{rr} &= -\partial_{rr} \alpha + \frac{(\partial_r \gamma_{rr})(\partial_r \alpha)}{2\gamma_{rr}} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \right)^2 \\
&\quad - \alpha \frac{\partial_{rr} \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} + \alpha \frac{(\partial_r \gamma_{rr})(\partial_r \gamma_{\theta\theta})}{2\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} + 2\alpha \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \\
&\quad - \alpha \frac{K_{rr}^2}{\gamma_{rr}} + \beta^r \partial_r K_{rr} + 2K_{rr} \partial_r \beta^r \\
&\quad + 4\pi\alpha[(S - \rho_{ADM})\gamma_{rr} - 2S_{rr}], \\
\partial_t K_{\theta\theta} &= -\frac{(\partial_r \gamma_{\theta\theta})(\partial_r \alpha)}{2\gamma_{rr}} - \alpha \frac{\partial_{rr} \gamma_{\theta\theta}}{2\gamma_{rr}} \\
&\quad + \alpha \frac{(\partial_r \gamma_{rr})(\partial_r \gamma_{\theta\theta})}{4\gamma_{rr}^2} + \alpha \left[1 + \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}} \right] + \beta^r \partial_r K_{\theta\theta} \\
&\quad + 4\pi\alpha[(S - \rho_{ADM})\gamma_{\theta\theta} - 2S_{\theta\theta}].
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Estas son las ecuaciones de evolución de la geometría. En este trabajo no se considera materia, por lo que las cantidades $S, S_{rr}, S_{\theta\theta}, \rho_{ADM}$ son todas cero.

Las constricciones (2.16) correspondientes al caso esféricamente simétrico en ausencia de materia se describen a continuación:

- *Constricción Hamiltoniana.* La expresión (2.12) se reduce a ${}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho_{ADM}$, donde cada término se escribe explícitamente como:

$$\begin{aligned}
{}^{(3)}R &= \frac{1}{2} \frac{(\partial_r \gamma_{\theta\theta})^2}{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}^2} - 2 \frac{\partial_r^2 \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} + \frac{\partial_r \gamma_{rr} \partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}^2 \gamma_{\theta\theta}} + \frac{2}{\gamma_{\theta\theta}}, \\
K &= \gamma^{ij} K_{ij} = \frac{K_{rr}}{\gamma_{rr}} + 2 \frac{K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}}, \\
K_{ij} K^{ij} &= \left(\frac{K_{rr}}{\gamma_{rr}} \right)^2 + 2 \left(\frac{K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \right)^2.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

- *Constricción de Momento.* Sólo hay una ecuación no trivial para (2.15) correspondiente al flujo radial, que en vacío se lee como $\nabla_j K^{rj} - \nabla^r K = 8\pi J^r$, donde

$$\begin{aligned}
\nabla_j K^{rr} &= \partial_r K^{rr} + 2\Gamma_{rr}^r K^{rr} + \Gamma_{\theta\theta}^r K^{\theta\theta} + \Gamma_{\theta r}^\theta K^{rr} + \Gamma_{\phi\phi}^r K^{\phi\phi} + \Gamma_{\phi r}^\phi K^{rr} \\
&= \frac{\partial_r K_{rr}}{\gamma_{rr}^2} - \frac{K_{rr} \partial_r \gamma_{rr}}{\gamma_{rr}^3} - \frac{K_{\theta\theta} \partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}^2} + \frac{K_{rr} \partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}^2 \gamma_{\theta\theta}} \\
\nabla^r K &= \gamma^{ri} \nabla_i K = \gamma^{rr} \nabla_r K = \gamma^{rr} \partial_r K = \gamma^{rr} \partial_r \left(\frac{K_{rr}}{\gamma_{rr}} + 2 \frac{K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \right) \\
&= \frac{\partial_r K_{rr}}{\gamma_{rr}^2} - \frac{K_{rr} \partial_r \gamma_{rr}}{\gamma_{rr}^3} + 2 \frac{\partial_r K_{\theta\theta}}{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} - 2 \frac{K_{\theta\theta} \partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}^2}
\end{aligned}$$

En conclusión, al reducir el sistema (2.22) y las ecuaciones (2.16) al caso particular de simetría esférica, se tiene un sistema con 4 ecuaciones para la evolución de la geometría y 2 expresiones para las constricciones. Este es el sistema que se evoluciona en el presente trabajo en lo que respecta al formalismo ADM.

2.2.2. Formulación KST

La formulación KST adopta la representación “Einstein-Christoffel” hiperbólica. En ella se escriben las ecuaciones de evolución como un sistema hiperbólico simétrico de primer orden, a diferencia de las ecuaciones ADM en donde se observa que el miembro derecho de $\partial_t K_{rr}$ presenta derivadas de segundo orden y términos no lineales de ∂_r . Adicionalmente, en el sistema KST todas las curvas características están dirigidas a lo largo de los conos de luz o en la dirección normal a la foliación espacial. Además, se encuentra que las velocidades características que son físicas; lo que hace más fácil implementar condiciones de frontera [9].

El sistema KST toma como variables fundamentales las componentes de la 3-métrica y de la curvatura extrínseca, más 18 variables adicionales de “conexión” (en tres dimensiones espaciales) y no requiere derivadas del tensor de energía-momento [10].

Se representa ahora el elemento de línea de la descomposición 3 + 1 con la siguiente notación

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt), \quad (2.29)$$

donde g_{ij} son las componentes de la 3-métrica, β^i el vector de desplazamiento y N es la función lapso. La formulación KST no toma a la función lapso como una función libremente especificable, sino a una función lapso densitizada arbitraria α , definida por

$$\alpha := \frac{N}{\sqrt{g}} \quad (2.30)$$

donde g es el determinante de la 3-métrica. El uso de la función α no condiciona la libertad

de elegir la norma temporal ya que N puede ser elegida libremente.

Para escribir las ecuaciones de Einstein se definen las nuevas variables

$$f_{ijk} := \Gamma_{(ij)k} + g_{ki}g^{lm}\Gamma_{[lj]m} + g_{kj}g^{lm}\Gamma_{[li]m}, \quad (2.31)$$

donde $\Gamma_{ijk} = g_{il}\Gamma^l_{jk}$ es el símbolo de Christoffel asociado a g_{ij} , y los paréntesis y corchetes denotan simetrización y antisimetrización, respectivamente.

El sistema de ecuaciones de evolución de la formulación KST puede ser escrito en la forma

$$\hat{\partial}_0 g_{ij} = -2NK_{ij}, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_0 K_{ij} + Ng^{kl}\partial_l f_{kij} = & N\{g^{kl}(K_{kl}K_{ij} - 2K_{ki}K_{lj}) + g^{kl}g^{mn}(4f_{kmi}f_{[ln]j} + 4f_{km[n}f_{l]ij} - f_{ikm}f_{jln}) \\ & + 8f_{(ij)k}f_{[ln]m} + 4f_{km(i}f_{j)ln} - 8f_{kli}f_{mnj} + 20f_{kl(i}f_{j)mn} - 13f_{ikl}f_{jmn}) \\ & - \partial_i\partial_j \ln \alpha - (\partial_i \ln \alpha)(\partial_j \ln \alpha) + 2g_{ij}g^{kl}g^{mn}(f_{kmn}\partial_l \ln \alpha - f_{kml}\partial_n \ln \alpha) \\ & + g^{kl}[(2f_{(ij)k} - f_{kij})\partial_l \ln \alpha + 4f_{kl(i}\partial_{j)} \ln \alpha - 3(f_{ikl}\partial_j \ln \alpha + f_{jkl}\partial_i \ln \alpha)] \\ & - 8\pi S_{ij} + 4\pi g_{ij}T\}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_0 f_{kij} + N\partial_k K_{ij} = & N\{g^{mn}[4K_{k(i}f_{j)mn} - 4f_{mn(i}K_{j)k} + K_{ij}(2f_{mnk} - 3f_{kmn})] \\ & + 2g^{mn}g^{pq}[K_{mp}(g_{k(i}f_{j)qn} - 2f_{qn(i}g_{j)k}) + g_{k(i}K_{j)m}(8f_{npq} - 6f_{pqn}) \\ & + K_{mn}(4f_{pq(i}g_{j)k} - 5g_{k(i}f_{j)pq})] - K_{ij}\partial_k \ln \alpha \\ & + 2g^{mn}(K_{m(i}g_{j)k}\partial_n \ln \alpha - K_{mn}g_{k(i}\partial_{j)} \ln \alpha) + 16\pi g_{k(i}J_{j)}\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde $\hat{\partial}_0$ es el operador de derivada temporal normal a la foliación, definido por

$$\hat{\partial}_0 := \partial_t - \xi_\beta. \quad (2.35)$$

Los términos de materia ρ , T , J_i y S_{ij} se definen de la misma manera que en la formulación ADM.

Una solución válida del sistema (2.34) debe satisfacer un conjunto de 22 constricciones, a saber, la restricción Hamiltoniana

$$\begin{aligned} C := & g^{ij}g^{kl}\{2(\partial_k f_{ijl} - \partial_i f_{jkl}) + K_{ik}K_{jl} - K_{ij}K_{kl} \\ & + g^{mn}[f_{ikm}(5f_{jln} - 6f_{ljn}) + 13f_{ikl}f_{jmn} \\ & + f_{ijk}(8f_{mln} - 20f_{lmn})]\} + 16\pi\rho = 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

las 3 constricciones de momento

$$C_i := g^{kl} \{ g^{mn} [K_{ik} (3f_{lmn} - 2f_{mnl}) - K_{km} f_{iln}] + \partial_i K_{kl} - \partial_k K_{il} \} + 8\pi J_i = 0, \quad (2.37)$$

y las 18 constricciones correspondientes a la definición de las variables extra que hacen al sistema de primer orden [11]

$$C_{ijk} := \partial_k g_{ij} - 2f_{kij} + 4g^{lm} (f_{lm(i} g_{j)k} - g_{k(i} f_{j)lm}) = 0 \quad (2.38)$$

las cuales relacionan f_{kij} con las derivadas espaciales de la 3-métrica. Si las constricciones son satisfechas por los datos iniciales, éstas son preservadas por las ecuaciones de evolución por todo el tiempo.

Caso particular: Simetría esférica

En esta formulación, la forma más general del elemento de línea esféricamente simétrico puede ser escrito de la forma

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{rr} (dr + \beta^r dt)^2 + g_T r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.39)$$

donde la componente angular de la métrica se define como

$$g_T := \frac{g_{\theta\theta}}{r^2} = \frac{g_{\phi\phi}}{r^2 \sin^2 \theta}.$$

Las dos componentes no triviales de la curvatura extrínseca son K_{rr} y la componente angular

$$K_T := \frac{K_{\theta\theta}}{r^2} = \frac{K_{\phi\phi}}{r^2 \sin^2 \theta}.$$

Por su parte, las componentes no triviales de f_{ijk} son f_{rrr} , la componente angular

$$f_{rT} := \frac{f_{r\theta\theta}}{r^2} = \frac{f_{\theta\theta r}}{2r^2} = \frac{f_{r\phi\phi}}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{f_{\phi\phi r}}{2r^2 \sin^2 \theta}$$

y las componentes adicionales

$$\begin{aligned} f_{rr\theta} &= g_{rr} \cot \theta, \\ f_{\theta\theta\theta} &= 2r^2 g_T \cot \theta, \\ f_{\theta\phi\phi} &= r^2 g_T \sin \theta \cos \theta, \\ f_{\phi\theta\phi} &= r^2 g_T \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.40)$$

La evolución para las componentes (2.40) está completamente determinada por la evolución de las componentes de la 3-métrica. Por tanto, no se hace el tratamiento de estas cantidades como variables independientes y son reemplazadas por las respectivas componentes métricas cuando aparecen en las ecuaciones de evolución.

En resumen, las variables fundamentales son las 6 cantidades g_{rr} , g_T , K_{rr} , K_T , f_{rrr} y f_{rT} ; para las cuales el sistema (2.34) toma la forma

$$\begin{aligned}
\partial_t g_{rr} &= \beta^r \partial_r g_{rr} - 2NK_{rr} + 2g_{rr} \partial_r \beta^r, \\
\partial_t g_T &= \beta^r \partial_r g_T - 2NK_T + 2\frac{\beta^r}{r} g_T, \\
\partial_t K_{rr} &= \beta^r \partial_r K_{rr} - \frac{N}{g_{rr}} \partial_r f_{rrr} + N \left[2\frac{f_{rrr}}{g_{rr}} \left(\frac{f_{rrr}}{g_{rr}} + \frac{1}{r} - \frac{4f_{rT}}{g_T} \right) - \frac{6}{r^2} + K_{rr} \left(2\frac{K_T}{g_T} - \frac{K_{rr}}{g_{rr}} \right) \right. \\
&\quad \left. - 6\left(\frac{f_{rT}}{g_T}\right)^2 - \partial_r^2 \ln \tilde{\alpha} - (\partial_r \ln \tilde{\alpha})^2 + \left(\frac{4}{r} - \frac{f_{rrr}}{g_{rr}}\right) \partial_r \ln \tilde{\alpha} \right] + 2K_{rr} \partial_r \beta^r + 4\pi N(Tg_{rr} - 2S_{rr}), \\
\partial_t K_T &= \beta^r \partial_r K_T - \frac{N}{g_{rr}} \partial_r f_{rT} + N \left(K_T \frac{K_{rr}}{g_{rr}} + \frac{1}{r^2} - \frac{2f_{rT}^2}{g_{rr}g_T} - \frac{f_{rT}}{g_{rr}} \partial_r \ln \tilde{\alpha} \right) + \frac{2\beta^r}{r} K_T, \\
\partial_t f_{rrr} &= \beta^r \partial_r f_{rrr} - N \partial_r K_{rr} + N \left[4g_{rr} \frac{K_T}{g_T} \left(3\frac{f_{rT}}{g_T} - \frac{f_{rrr}}{g_{rr}} + \frac{2}{r} - \partial_r \ln \tilde{\alpha} \right) - K_{rr} \left(10\frac{f_{rT}}{g_T} + \frac{f_{rrr}}{g_{rr}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2}{r} + \partial_r \ln \tilde{\alpha} \right) \right] + 3f_{rrr} \partial_r \beta^r + g_{rr} \partial_r^2 \beta^r + 16\pi N J_r g_{rr}, \\
\partial_t f_{rT} &= \beta^r \partial_r f_{rT} - N \partial_r K_T + N \left[K_T \left(2\frac{f_{rT}}{g_T} - \frac{f_{rrr}}{g_{rr}} - \partial_r \ln \tilde{\alpha} \right) \right] + \left(\partial_r \beta^r + \frac{2\beta^r}{r} \right) f_{rT}, \tag{2.41}
\end{aligned}$$

donde

$$\tilde{\alpha} := \alpha r^2 \sin \theta = \frac{N}{g_T \sqrt{g_{rr}}}$$

y donde se han escrito explícitamente los términos que involucran la derivada de Lie.

Las seis variables fundamentales obedecen a un sistema de cuatro constricciones que se obtienen de las ecuaciones (2.36), (2.37) y (2.38):

$$\begin{aligned}
C &:= \frac{\partial_r f_{rT}}{g_{rr}g_T} - \frac{1}{2r^2g_T} + \frac{f_{rT}}{g_{rr}g_T} \left(\frac{2}{r} + \frac{7f_{rT}}{2g_T} - \frac{f_{rrr}}{g_{rr}} \right) - \frac{K_T}{g_T} \left(\frac{K_{rr}}{g_{rr}} + \frac{K_T}{2g_T} \right) + 4\pi\rho = 0 \\
C_r &:= \frac{\partial_r K_T}{g_T} + \frac{2K_T}{rg_T} - \frac{f_{rT}}{g_T} \left(\frac{K_{rr}}{g_{rr}} + \frac{K_T}{g_T} \right) + 4\pi J_r = 0 \\
C_{rrr} &:= \partial_r g_{rr} + \frac{8g_{rr}f_{rT}}{g_T} - 2f_{rrr} = 0 \\
C_{rT} &:= \partial_r g_T + \frac{2g_T}{r} - 2f_{rT} = 0
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Estas constricciones se calculan durante toda la evolución y se verifica que se satisfagan numéricamente.

Capítulo 3

Métodos numéricos

En este capítulo se describen los métodos numéricos que se emplean en el desarrollo del presente proyecto. Se presenta una exposición breve pero concreta del método de diferencias finitas como la herramienta para aproximar derivadas de una función; así como el Método de Líneas como mecanismo de evolución en problemas de valores iniciales.

3.1. Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas permite la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales parciales y su aplicación consiste en elaborar de una versión discreta de los elementos de la EDP, a saber, se discretiza el dominio donde se busca la solución, las funciones involucradas y los operadores diferenciales.

El proceso de discretización del dominio consiste en transformar el dominio de interés originalmente continuo, por ejemplo el intervalo $[x_{min}, x_{max}]$, en una malla donde únicamente se considera un número determinado N_x de puntos. Esta partición del dominio puede ser o no uniforme, y la elección de los puntos dependerá del problema en cuestión. Nótese que a medida que el número de puntos considerados crece, el dominio discretizado se parece cada vez más al continuo. En este trabajo se considera un espaciamiento uniforme de los puntos del dominio Δx , dado por:

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{N_x},$$

de modo que cada punto de la partición puede ser etiquetado de la siguiente manera:

$$x_i = x_{min} + i\Delta x, \quad i = 0, \dots, N_x.$$

Por otra parte, discretizar las funciones involucradas significa que para una función $u(x)$ definida en el intervalo $[x_{min}, x_{max}]$, se tomarán en cuenta solamente los valores de u sobre los puntos x_i del dominio discreto. Se utilizará la notación u_i para hacer referencia al valor

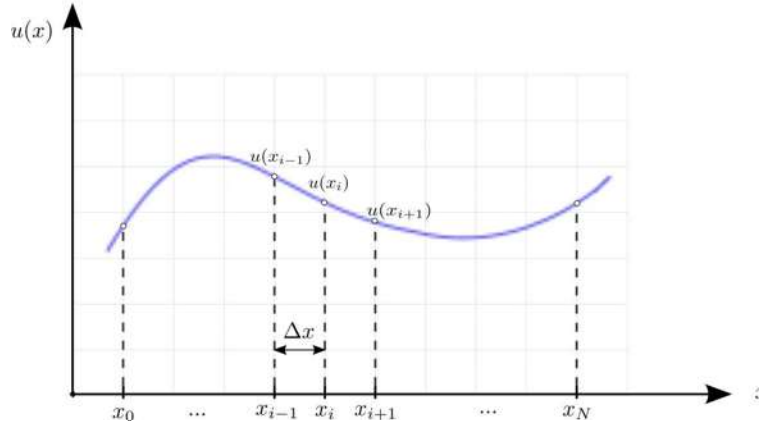


Figura 3.1: Discretización del dominio. En este caso en que $x_0 = x_{min}$ y $x_N = x_{max}$. La separación Δx es la misma entre cualesquiera dos puntos de la malla. Se representa también la discretización de $u(x)$ que está restringida a los valores x_i , donde $i = 0, \dots, N$.

de $u(x_i)$. El proceso de discretización se muestra esquemáticamente en la Fig 3.1.

Finalmente, es necesario adoptar un caso discreto de la definición estándar de la derivada en cálculo elemental

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \quad (3.1)$$

con el fin de permitir a una computadora manejar el concepto abstracto $\Delta x \rightarrow 0$. Las aproximaciones de la derivada se exponen a continuación.

3.1.1. Aproximación de la derivada

La deducción de una expresión para la derivada en el caso discreto puede obtenerse partiendo de la definición de derivada en el continuo, haciendo simplemente

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.2)$$

conocida como *Aproximación progresiva*, donde Δx es pequeña pero no necesariamente infinitesimal. Otras dos aproximaciones igualmente válidas son:

Aproximación regresiva

$$u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.3)$$

Aproximación centrada

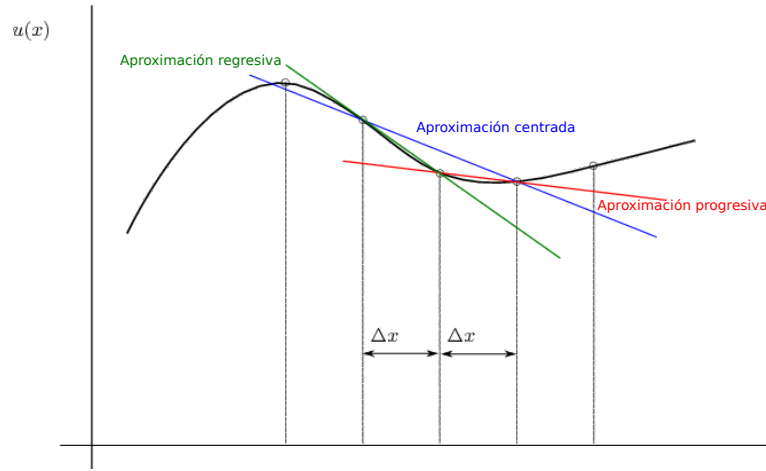


Figura 3.2: Descripción gráfica para aproximaciones de la primera derivada.

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3.4)$$

Un ejemplo esquemático de estas aproximaciones se presenta en la Fig 3.2.

Las definiciones anteriores son equivalentes en el continuo pero llevan a diferentes aproximaciones en el caso discreto. La cuestión es determinar cuál es el mejor y la forma de cuantificar el error de la aproximación reside en el análisis de la serie de Taylor de la función.

Sea u una función definida en (a, b) suficientemente diferenciable, entonces la expansión de $f(x)$ usando serie de Taylor alrededor del punto $x_i \in (a, b)$ es:

$$u(x) = u(x_i) + (x - x_i)u'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2!}u''(x_i) + \dots + \frac{(x - x_i)^n}{n!}u^{(n)}(x_i) + R_{n+1} \quad (3.5)$$

donde el residuo

$$R_{n+1} = \underbrace{\int_{x_i}^x \dots \int_{x_i}^x}_{n+1 \text{ veces}} u^{n+1}(x)(ds)^{n+1}$$

Si la $(n+1)$ -ésima derivada de la función u tiene mínimo m y máximo M en el intervalo $[x_i, x]$, entonces se tiene que:

$$\int_{x_i}^x \dots \int_{x_i}^x m(ds)^{n+1} \leq R_{n+1} \leq \int_{x_i}^x \dots \int_{x_i}^x M(ds)^{n+1}$$

$$m \frac{(x - x_i)^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_{n+1} \leq M \frac{(x - x_i)^{n+1}}{(n+1)!},$$

lo que muestra que el residuo está acotado por los valores de la derivada y la distancia del punto x al punto de expansión x_i elevado a la potencia $(n+1)$. Más aún, si se asume que $u^{(n+1)}$ es continua, entonces debe tomar todos los valores entre m y M , esto es:

$$R_{n+1} = u^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - x_i)^{n+1}}{(n+1)!}$$

para algún ξ en el intervalo $[x_i, x]$ [12].

Como se mencionó previamente, la serie de Taylor es usada para estudiar el comportamiento de las aproximaciones numéricas. Por ejemplo, consideremos la expansión en serie de Taylor para la función u en el punto x_{i+1} alrededor del punto x_i :

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{x_i} + \dots \quad (3.6)$$

la cual se puede reescribir como sigue:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} = \underbrace{\frac{\Delta x}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{x_i} + \dots}_{\text{Error de truncamiento}} \quad (3.7)$$

donde se observa que la expresión (3.7) corresponde al truncamiento de la serie de Taylor después del segundo término. El miembro izquierdo de (3.7) es el error cometido en la terminación de la serie y se conoce como *Error de Truncamiento (ET)*. Este error puede ser definido como la diferencia entre la derivada y su representación en diferencias finitas. El primer término de la serie es usado para caracterizar el orden de magnitud del error. En el caso de la expresión (3.7), el primer término en el error de truncamiento es el producto de la segunda derivada evaluada en x_i y el espaciamiento de la malla Δx , este último es un parámetro numérico sobre el cual se tiene control. Entonces, para $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ la aproximación numérica depende linealmente del parámetro Δx . Es de esperarse que, para valores de Δx_i suficientemente pequeños, el error presente un decrecimiento lineal. Utilizando la notación “O grande” para caracterizar el error de truncamiento, se tiene que $ET \sim O(\Delta x)$. Así que la ecuación (3.7) se puede escribir:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.8)$$

Un análisis similar aplicado para la expansión en serie de Taylor para la función u en el punto x_{i-1} alrededor del punto x_i , se llega al siguiente resultado para la ecuación (3.3):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.9)$$

Hasta el momento, sólo se ha usado la información provista por dos puntos. Aproximaciones de orden de precisión superior pueden ser obtenidas combinando las series de Taylor. Por ejemplo, usando las expansiones para $u(x_i \pm \Delta x)$ se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{\Delta x^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{x_i} + \dots \quad (3.10)$$

lo que indica que la aproximación centrada tiene un error cuadrático a medida que $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \quad (3.11)$$

esto implica que si el espaciamiento en la malla, digamos Δx_1 , se reduce a la mitad, es decir se define una nueva malla con separación $\Delta x_2 = \frac{1}{2}\Delta x_1$; el ET decrece en una razón de $\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)^2 = 4$. Nótese que aunque nuevamente se usó la información en solamente dos puntos, la aproximación centrada ofrece mayor precisión que las otras dos aproximaciones.

3.1.2. Aproximaciones de orden de precisión superior

La expansión en serie de Taylor es una herramienta útil para el cálculo de aproximaciones de derivadas de cualquier orden a cualquier orden de precisión. El método para construir aproximaciones en diferencias finitas de operadores diferenciales es el siguiente:

- Hacer la expansión en serie de Taylor en puntos cercanos a aquel donde se quiera evaluar la derivada de la función u .
- Encontrar una combinación lineal de tales expansiones que cumpla con la condición de que los coeficientes de las derivadas de orden superior e inferior a la derivada del orden deseado sean cero.

El número de puntos en los que se expanda la serie de Taylor de $u(x)$ alrededor de x_i y el orden de truncamiento de ésta, determinarán el orden de precisión de la aproximación. Por ejemplo, supóngase que se desea encontrar la primera derivada de u a precisión de cuarto orden, entonces, basta con encontrar la combinación correcta del tipo $Au(x - 2\Delta x) + Bu(x - \Delta x) + Cu(x) + Du(x + \Delta x) + Eu(x + 2\Delta x)$ tal que los coeficientes de $u(x)$ y de las derivadas de segundo orden y superiores sean cero[13]. En el caso centrado la expresión es la siguiente:

$$\frac{8(u_{i+1} - u_{i-1}) - (u_{i+2} - u_{i-2})}{12\Delta x} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} + O(\Delta x^4), \quad (3.12)$$

Cabe mencionar que también se pueden calcular aproximaciones con una selección de puntos cercanos no simétrica. Al conjunto de puntos usado en la aproximación de la derivada se le llama *Esténcil*. El uso de esténciles desbalanceados (con puntos únicamente a la derecha, a la izquierda o una combinación de ambos respecto del punto de interés) es útil, por ejemplo, para calcular derivadas cerca de las fronteras donde puede no haber suficientes puntos para usar aproximaciones centradas. Para encontrar las expresiones de estos casos se procede de la misma manera. Los resultados de varias elecciones de puntos vecinos para encontrar derivadas con precisión $O(\Delta x^4)$ se resumen en las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 \partial_x u_i &= C[3u_{i-4} - 16u_{i-3} + 36u_{i-2} - 48u_{i-1} + 25u_i] + O(\Delta x^4) \\
 \partial_x u_i &= C[-u_{i-3} + 6u_{i-2} - 18u_{i-1} + 10u_i + 3u_{i+1}] + O(\Delta x^4) \\
 \partial_x u_i &= C[u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}] + O(\Delta x^4) \\
 \partial_x u_i &= C[-3u_{i-1} - 10u_i + 18u_{i+1} - 6u_{i+2} + u_{i+3}] + O(\Delta x^4) \\
 \partial_x u_i &= C[-25u_i + 48u_{i+1} - 36u_{i+2} + 16u_{i+3} - 3u_{i+4}] + O(\Delta x^4)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde $C = \frac{1}{12\Delta x}$.

3.1.3. Derivadas de segundo orden

En este caso, la combinación de las expansiones en serie de Taylor de u en puntos vecinos a x_i que se requiere es tal que los coeficientes de las derivadas de orden cero, uno, tres y superiores sean cero. Así, por ejemplo, la derivada de segundo orden con error $\sim O(\Delta x^2)$ es

$$\frac{(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}))}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2), \tag{3.14}$$

En resumen, se conoce ya la manera de calcular las aproximaciones para derivadas de cualquier orden y con la precisión que se requiera. Se presentan a continuación las expresiones que aproximan la derivada de segundo orden de la función u con ET de $O(\Delta x^2)$ y $O(\Delta x^4)$ usando esténciles centrados y desbalanceados:

$$\begin{aligned}
 \partial_{xx} u_i &= C[u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}] + O(\Delta x^2) \\
 \partial_{xx} u_i &= C[-u_{i-3} + 4u_{i-2} - 5u_{i-1} + 2u_i] + O(\Delta x^2) \\
 \partial_{xx} u_i &= C[2u_i - 5u_{i+1} + 4u_{i+2} - u_{i+3}] + O(\Delta x^2)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{xx}u_i &= C[-10u_{i-5} + 61u_{i-4} - 156u_{i-3} + 214u_{i-2} - 154u_{i-1} + 45u_i] + O(\Delta x^4) \\
\partial_{xx}u_i &= C[u_{i-4} - 6u_{i-3} + 14u_{i-2} - 4u_{i-1} - 15u_i + 10u_{i+1}] + O(\Delta x^4) \\
\partial_{xx}u_i &= C[-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}] + O(\Delta x^4) \\
\partial_{xx}u_i &= C[10u_{i-1} - 15u_i - 4u_{i+1} + 14u_{i+2} - 6u_{i+3} + u_{i+4}] + O(\Delta x^4) \\
\partial_{xx}u_i &= C[45u_i - 154u_{i+1} + 214u_{i+2} - 156u_{i+3} + 61u_{i+4} - 10u_{i+5}] + O(\Delta x^4) \quad (3.16)
\end{aligned}$$

donde $C = \frac{1}{\Delta x^2}$ para el sistema (3.15) y $C = \frac{1}{12\Delta x^2}$ en las expresiones (3.16).

3.1.4. Convergencia

Debido a que se está tomando una versión discreta de operadores diferenciales, no debe perderse de vista que la solución numérica es únicamente una aproximación de la solución en el continuo. Es necesario entonces establecer un criterio que valide que la discretización está acercándose efectivamente a la solución en el continuo si se calcula para Δx cada vez más pequeños. En la medida en que la malla construida para el dominio de la EDP tenga mayor resolución, menor será el error con que se están aproximando los operadores diferenciales a sus equivalentes en el continuo, y por tanto la aproximación en diferencias finitas de una ecuación diferencial es más precisa.

Supóngase que el error obtenido al aproximar las derivadas por sus expresiones en Diferencias Finitas es $Error \sim O(\Delta x^2)$ para cierto valor de Δx . Si se define una nueva malla con espaciamiento $\Delta x_\kappa = \frac{\Delta x}{\kappa}$ con $\kappa > 1$, entonces el error correspondiente a esta nueva resolución será $Error_\kappa \sim O(\frac{\Delta x^2}{\kappa^2})$, es decir, disminuirá cuadráticamente respecto a la primer resolución. Si se usan aproximaciones más precisas, por ejemplo, con $ET \sim O(\Delta x^4)$, el error para la malla más fina se verá disminuido por un factor de $(\frac{1}{\kappa^4})$. En resumen, la razón entre los errores de dos diferentes resoluciones Δx y Δx_κ con $ET \sim O(\Delta x^n)$ es

$$\frac{Error}{Error_\kappa} = \left(\frac{\Delta x}{\frac{1}{\kappa}\Delta x} \right)^n = \kappa^n.$$

Respecto a la solución numérica de EDPs definidas en un dominio espacio-temporal, como los sistemas ADM y KST que se resuelven en este trabajo; la discretización no sólo se aplica al dominio espacial, sino también al temporal, como se muestra en la Fig 3.3. Considérese una función f que es solución numérica de la EDP a un tiempo dado con una precisión de segundo orden. Si se conociera la solución exacta f_0 de una ecuación dada, el resultado numérico para una aproximación con error $\sim O(\Delta x^2)$ puede escribirse en la forma:

$$f = f_0 + E\Delta x^2 + O(\Delta x^3),$$

donde se ha asumido que el error dominante es $\sim O(\Delta x^2)$ y E es una constante; así $Error \sim E\Delta x^2$. Dado que se conoce la solución exacta, es posible conocer el error con que se calcula la solución numérica usando distintos valores de Δx . Sean f_1 y f_2 dos soluciones numéricas calculadas usando las resoluciones Δx y $\frac{\Delta x}{2}$ respectivamente (o sea $\kappa = 2$). La razón entre los errores es la siguiente:

$$\frac{f_1 - f_0}{f_2 - f_0} = \frac{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = 4 + O(\Delta x). \quad (3.17)$$

En este caso se ha supuesto que la función f depende solamente de la variable x porque se calcula el error para un valor de t fijo. El número cuatro en (3.17) se llama *Factor de Convergencia (FC)* y debe ser evaluado en cada punto de la malla donde se ha calculado la función f [13]. Por tanto, en el caso de un cálculo numérico llevado a cabo con aproximación de segundo orden, debe obtenerse un factor de convergencia de $4 = 2^2$ para poder concluir que la solución converge a segundo orden, es decir, que cumple con lo predicho por la teoría en (3.17). De manera análoga, es posible mostrar que si la aproximación es de cuarto orden, el factor será $16 = 2^4$.

Evidentemente no siempre se conoce la solución exacta de las EDPs, aún así es posible analizar la convergencia de los resultados numéricos haciendo uso de tres resoluciones distintas (no dos como en el caso anterior). Este análisis es llamado *Estudio de Autoconvergencia*. Si además de f_1 y f_2 definidas antes se calcula la solución f_3 de la EDP con resolución $\Delta x/2^2$, es decir, considerando nuevamente $\kappa = 2$; se puede calcular la razón siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{f_1 - f_2}{f_2 - f_3} &= \frac{\Delta x^2 - \frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 - \frac{1}{16}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} \\ &= \frac{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = 4 + O(\Delta x) \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde se observa el mismo comportamiento de la ecuación (3.17). Este análisis es el que se aplica a los resultados de este trabajo para probar que los errores obtenidos se deben únicamente al método numérico y a ningún otro factor. Concretamente se estudia la convergencia de las ecuaciones de restricción para monitorear que las violaciones a éstas decrecen a medida que la malla se hace más fina. Al utilizar estenciles de cuarto orden de precisión, y un refinamiento correspondiente a un valor de $\kappa = 2$, se espera que el FC sea de 16 para en cada punto de la malla y en cada nivel de tiempo.

Es importante no perder de vista que hemos considerado al método de Diferencias Finitas únicamente como una herramienta para aproximar derivadas de una función. Esto será útil al momento de plantear las derivadas espaciales para un sistema de ecuaciones que evoluciona en el tiempo, justamente como el sistema (2.27) y (2.41). En este punto se cuenta con lo necesario para escribir numéricamente los miembros derechos de dichos

sistemas. La tarea ahora es definir un algoritmo que calcule la evolución de las variables en el tiempo.

3.2. Algoritmo de Evolución

La evolución de datos consiste en determinar el valor de una función en el punto f_i^n a partir de los datos en niveles de tiempo previos. La etiqueta de tiempo discreto es el superíndice en f , de manera que al hacer referencia a f_i^n significa la evaluación de f en el i -ésimo punto del dominio espacial y el n -ésimo punto del temporal (para todo $i = 1, \dots, N_x$ y $n = 1, \dots, N_t$). Como se ha visto, el formalismo 3+1 proporciona un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\partial_t f = rhs(f) \quad (3.19)$$

donde f es la variable a evolucionar y $rhs(f)$ (*right hand side de f*) es una función que depende tanto de variables independientes como dependientes. Es preciso entonces adoptar un método de evolución, es decir, un algoritmo que permita conocer f^{n+1} a partir de sus valores en tiempos previos. Se elige el *Método de Líneas (MoL)* para tal fin.

La idea básica del MoL es reemplazar las derivadas espaciales en una EDP con aproximaciones algebraicas de modo que se tiene una versión semidiscreta del sistema a resolver[16], esto es:

$$\partial_t f = [rhs]_i^n(f) \quad (3.20)$$

Esta es la *Versión Semidiscreta* pues únicamente la parte derecha aparece en forma discreta, denotada usualmente como $rhs(f)$ (*right hand side de f*). La expresión (3.20) representa una ecuación ordinaria en t para f para cada valor de i , es decir, se tienen N_x ecuaciones diferenciales ordinarias en t de f . La solución de cada EDO se calcula integrando en el tiempo, inicialmente de $n = 0 \rightarrow n = 1$ para todo i . Una vez determinados los valores de f_i^1 , se puede construir la solución correspondiente a $n = 2$ y con estos últimos la solución en $n = 3$, etc. En este sentido, se puede ver a la integración de cada f_i en el tiempo como una línea en el dominio espacio-temporal y es por esto que el método se denomina “de Líneas”. La tarea ahora es aplicar un algoritmo de integración para EDOs conociendo las condiciones iniciales del sistema. En otras palabras, dado el dominio de interés $[x_{min}, x_{max}]$ y los valores de f_i^0 , se requiere calcular los valores de f_i^n con $i = 1, \dots, N_x$ y $n = 1, \dots, N_t$. Cabe mencionar que para los casos en que $i = 1$ e $i = N_x$ es necesario imponer condiciones de frontera que dependerán del problema en cuestión. Una descripción gráfica de lo anterior se muestra en la Fig 3.3. Se usa en este trabajo el método de Runge-Kutta como integrador en el tiempo, el cual se describe a continuación.

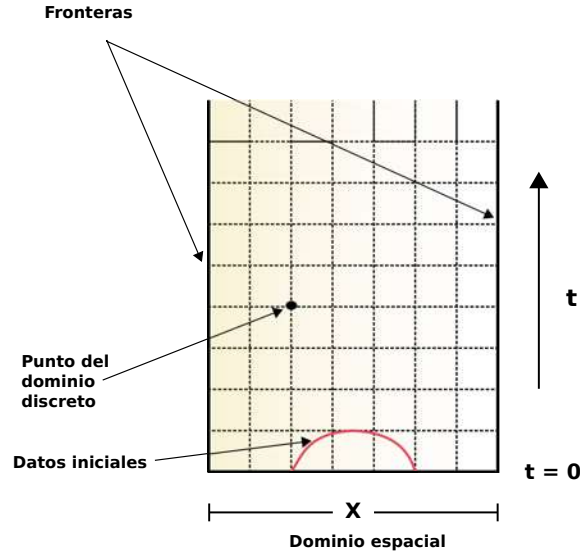


Figura 3.3: Se muestran los elementos del dominio espacio-temporal discretizado para la solución de una EDP que involucra una coordenada espacial y una temporal.

3.2.1. Método de Runge Kutta

Este método aproxima la solución de una EDO con valores iniciales. Entonces, dados los valores iniciales para la ecuación $y'(t) = f(t, y(t))$, el método de Runge Kutta (de orden s) tiene la siguiente expresión para la función y al tiempo $t + h$:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad (3.21)$$

donde h es el incremento Δt entre los sucesivos puntos t_n y t_{n+1} . Los coeficientes k_i son términos de aproximación intermedios, evaluados en f de manera local.

$$k_i = f \left(t_n + h c_i, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right) \quad i = 1, \dots, s. \quad (3.22)$$

con a_{ij} , b_i , c_i coeficientes propios del esquema numérico elegido, dependiente de la regla de cuadratura utilizada. Los esquemas Runge-Kutta pueden ser explícitos o implícitos dependiendo de las constantes a_{ij} del esquema. Si esta matriz es triangular inferior con todos los elementos de la diagonal principal iguales a cero; es decir, $a_{jj} = 0$ para $j = 1, \dots, s$, los esquemas son explícitos.

En este trabajo, se utiliza el método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4) explícito, que está dado por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\
k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 + O(h^5).
\end{aligned}$$

Finalmente, el Método de Líneas se puede ver como una herramienta que permite resolver una EDPs compuesta de dos partes: por un lado, el reemplazo de los operadores de derivación por sus expresiones en diferencias finitas y, por otro lado, un algoritmo para integrar en el tiempo como el RK4 descrito anteriormente. Este esquema numérico es el que se implementa para resolver los sistemas (2.27) y (2.41) y los resultados se muestran a continuación.

Capítulo 4

Evolución

4.1. Consideraciones preliminares

En este punto ya se ha definido el sistema de ecuaciones a resolver y se ha elegido un método numérico adecuado a las condiciones del problema, de tal manera que el problema de resolver las ecuaciones de Einstein para un agujero negro en simetría esférica en el vacío puede ser atacado. Sin embargo, se deben tener aún algunas consideraciones extra, a saber, las concernientes a las singularidades asociadas al problema. Dichas singularidades bien pueden ser físicas o bien un problema de coordenadas. Por ejemplo, si se utilizan coordenadas de Schwarzschild, se tendrá una singularidad de coordenadas en $r = 2M$, misma que se puede evitar utilizando otras coordenadas que permanezcan regulares en este punto (como las de Eddington-Finkelstein). Un ejemplo típico de una singularidad física aparece en este mismo problema en $r = 0$ pues su naturaleza misma implica que los invariantes de curvatura sean singulares en este punto. No tener cuidado al respecto podría conducir a cálculos errados.

En lo que respecta a la singularidad física en el origen, la manera de evitar la evolución en esta región consiste en remover un trozo del dominio numérico en el que esté contenida; esto en cada hipersuperficie espacial. Además, la porción removida debe encontrarse dentro del horizonte de eventos. Es importante mencionar que esto solamente es posible en sistemas de coordenadas que penetren el horizonte y en este caso se usan las coordenadas de Eddington-Finkelstein; así, lo que ocurra en la frontera tenderá a desplazarse hacia la singularidad [17]. Las coordenadas de Schwarzschild no son útiles puesto que presentan una singularidad en $r = 2M$ y los conos de luz tienden a cerrarse a medida que se aproximan a esta región. Al método descrito se le conoce como *Método de excisión*. La frontera del trozo removido se conoce como frontera de excisión y se denota r_{exc} . Como ya se dijo, la frontera debe cumplir $r_{exc} < 2M$ y en el caso especial de hoyos negros esféricamente simétricos escritos en coordenadas esféricas, dicha frontera es una esfera de radio $r = r_{exc}$. Entonces, dada la estructura de los conos de luz dentro del horizonte de eventos, en la

frontera de excisión no es necesario aplicar condiciones de frontera, lo que se hace es simplemente extrapolar los valores de las variables que se evolucionan, usando valores en los puntos vecinos [18].

4.2. Formulación ADM

4.2.1. Evolución de un agujero negro en el vacío en coordenadas EF

Las coordenadas de Eddington-Finkelstein (EF) tienen la cualidad de que penetran el horizonte de eventos con conos de luz abiertos, a diferencia de las coordenadas de Schwarzschild. Lo anterior implica que en coordenadas de Eddington-Finkelstein no se presentan singularidades asociadas al sistema de coordenadas. El elemento de línea es:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{4M}{r}dtdr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.1)$$

a partir del cual se tiene información exacta sobre condiciones iniciales y de norma.

Omitiendo los términos que involucran materia, el sistema (2.27) es:

$$\begin{aligned} \partial_t \gamma_{rr} &= -2\alpha K_{rr} + \beta^r \partial_r \gamma_{rr} + 2\gamma_{rr} \partial_r \beta^r, \\ \partial_t \gamma_{\theta\theta} &= -2\alpha K_{\theta\theta} + \beta^r \partial_r \gamma_{\theta\theta}, \\ \partial_t K_{rr} &= -\partial_{rr} \alpha + \frac{(\partial_r \gamma_{rr})(\partial_r \alpha)}{2\gamma_{rr}} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \right)^2 \\ &\quad - \alpha \frac{\partial_{rr} \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} + \alpha \frac{(\partial_r \gamma_{rr})(\partial_r \gamma_{\theta\theta})}{2\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} + 2\alpha \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \\ &\quad - \alpha \frac{K_{rr}^2}{\gamma_{rr}} + \beta^r \partial_r K_{rr} + 2K_{rr} \partial_r \beta^r, \\ \partial_t K_{\theta\theta} &= -\frac{(\partial_r \gamma_{\theta\theta})(\partial_r \alpha)}{2\gamma_{rr}} - \alpha \frac{\partial_{rr} \gamma_{\theta\theta}}{2\gamma_{rr}} \\ &\quad + \alpha \frac{(\partial_r \gamma_{rr})(\partial_r \gamma_{\theta\theta})}{4\gamma_{rr}^2} + \alpha \left[1 + \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}} \right] + \beta^r \partial_r K_{\theta\theta} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para la solución del sistema, se imponen condiciones iniciales y de frontera que serán descritas en los siguientes apartados.

Condiciones iniciales

Comparando las ecuaciones (2.23) y (4.1), las funciones de norma y las componentes de la 3-métrica toman la siguiente forma [10]:

$$\begin{aligned}\gamma_{rr} &= 1 + \frac{2M}{r}, & \gamma_{\theta\theta} &= r^2, \\ \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}}, & \beta^r &= \frac{2M}{r \left(1 + \frac{2M}{r}\right)},\end{aligned}\tag{4.3}$$

con M la masa del agujero negro.

Respecto a la curvatura extrínseca, la ecuación (2.8) conduce a las siguientes expresiones para las componentes no triviales:

$$\begin{aligned}K_{rr} &= -\frac{2M}{r^2} \frac{1 + \frac{M}{r}}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}}, \\ K_{\theta\theta} &= \frac{2M}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Estas expresiones correspondientes a la solución de Schwarzschild en las coordenadas de Eddington-Finkelstein se toman como las condiciones iniciales de las variables γ_{rr} , $\gamma_{\theta\theta}$, K_{rr} , $K_{\theta\theta}$, α y β^r .

Configuración numérica

El dominio espacial $[x_{min}, x_{max}]$ se definió para los valores de $r \in [1M, 201M]$. En adelante se usará r para hacer referencia a la coordenada espacial (pues se trata de una coordenada radial), es decir, el dominio espacial será el intervalo $[r_{min}, r_{max}]$. Se eligieron las siguientes resoluciones: $\Delta r_1 = 0.1M$, $\Delta r_2 = \Delta r_1/2$, $\Delta r_3 = \Delta r_2/2$, $\Delta r_4 = \Delta r_3/2$, $\Delta r_5 = \Delta r_4/2$ y $r_6 = \Delta r_5/2$. Una vez que se establece la resolución espacial, la resolución temporal queda definida por el *Factor de Courant* $\Delta t/\Delta x$, que en este trabajo toma un valor $\Delta t/\Delta x = 0.25$.

En el sistema (4.2) se tiene especial cuidado al implementar los términos de advección de tipo $\beta^r \partial_r f$ pues estos podrían afectar la causalidad del algoritmo de evolución. Con el fin de evitar desconexiones causales, se utilizan estenciles desbalanceados con puntos a la derecha si $\beta^r \geq 0$ y a la izquierda en caso contrario.

Las funciones de norma α y β se actualizan usando las condiciones $\alpha/\sqrt{\gamma_{rr}} + \beta = 1$ y $-2\alpha K_{\theta\theta} + \beta \partial_r \gamma_{\theta\theta} = 0$, esto garantiza que $t + r$ es una coordenada entrante nula y que

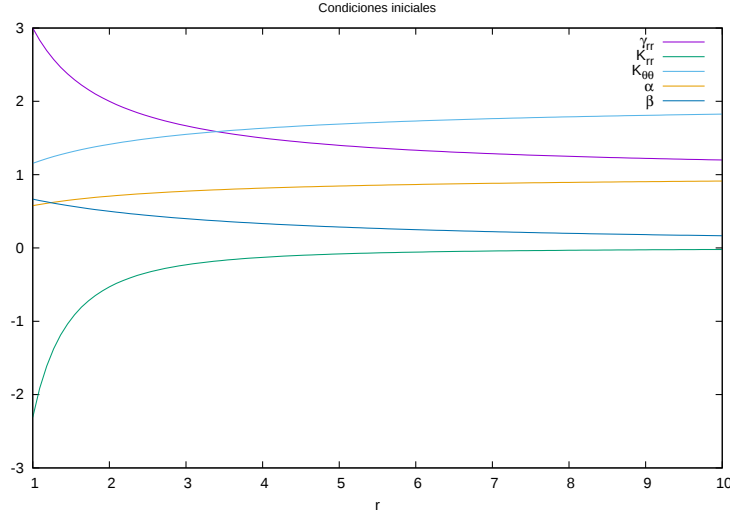


Figura 4.1: Valores iniciales para las funciones métricas y de curvatura γ_{rr} , K_{rr} y $K_{\theta\theta}$; así como las condiciones de norma α, β . No se presenta la componente $\gamma_{\theta\theta} = r^2$.

$\partial_t \gamma_{\theta\theta} = 0$ respectivamente. Este es un sistema algebraico de dos ecuaciones para α y β que se resuelve en cada paso de tiempo [18] [8].

La evolución en el tiempo se lleva a cabo con el integrador Runge-Kutta de cuarto orden descrito por la expresión (3.23) durante $t \in [0M, 100M]$.

Condiciones de frontera

Se utiliza la técnica de excisión para el radio interno del dominio y el valor de las variables de evolución en r_{min} es calculado mediante la interpolación de Lagrange de cuarto orden. Cabe mencionar que se tomó $r_{min} = r_{exc}$

En la frontera externa se imponen condiciones de frontera radiativas con la finalidad de que las posibles fluctuaciones en la geometría salgan por este punto evitando que entre información que contamine los resultados. Aquí se asume que las variables γ_{ij} y K_{ij} obedecen la siguiente ecuación en el radio externo:

$$\partial_t f + \partial_r f + (f - f_0)/r = 0 \quad (4.5)$$

donde f_0 es el valor asintótico de la función correspondiente. Como caso particular, para la componente métrica $\gamma_{\theta\theta}$ se hace una extrapolación de cuarto orden debido a que el valor asintótico diverge pues $\gamma_{\theta\theta} \sim r^2$.

Debido a que la formulación ADM no tiene los modos perfectamente caracterizados, se resuelve el problema manteniendo la frontera r_{max} causalmente desconectada pues se analizan los resultados únicamente en el dominio espacial $r \in [1M, 101M]$. De manera que las fluctuaciones que pudieran estar entrando por la frontera exterior no afectan los

resultados en el dominio de interés.

Resultados

Se logró implementar el código que soluciona el sistema (4.2). Una prueba de que el código funciona es que, debido a que el problema físico involucra un sistema estático y que además se usa la solución exacta como condiciones iniciales para las ecuaciones de campo en el vacío, los perfiles de las funciones métricas y de curvatura extrínseca tiendan a mantenerse constantes a lo largo de la evolución, excepto por el error que introduce el hecho de aproximar numéricamente las soluciones, mismo que debe decrecer a medida que la resolución de la malla es m'as fina. Sin embargo, tener dichos perfiles constantes para γ_{rr} , $\gamma_{\theta\theta}$, K_{rr} y $K_{\theta\theta}$ no es suficiente para determinar si los resultados numéricos son correctos. Las variables que describen el campo gravitacional guardan relaciones que deben cumplirse para todas las hipersuperficies; estas relaciones son específicamente las constricciones (2.28) y (2.29). En otras palabras, las constricciones representan el error en los cálculos, este error debe converger a cero con resoluciones más finas. Lo anterior se verifica mediante las pruebas de convergencia descritas en el capítulo 3. Se presentan gráficas de la evolución de la construcción Hamiltoniana para diferentes valores de t en la Fig. 4.2, en la cual se muestra la convergencia para dos resoluciones diferentes de la malla.

Otra manera en la que se prueba la convergencia de las constricciones es calculando la norma-2. Dada una función f definida en el dominio, la norma-2 se define por

$$L_2(f) = \sqrt{\sum_{i=1}^N f_i^2 \Delta r} \quad (4.6)$$

donde N es el número de puntos en la malla. Esto se realiza para cada paso de tiempo durante toda la evolución. Los resultados se muestran en la Fig. 4.3 para las resoluciones $\Delta r_1, \dots, \Delta r_5$.

4.2.2. Evolución de la solución exacta con una norma no trivial

Hasta el momento las condiciones iniciales y las funciones de norma han sido seleccionadas de tal manera que las componentes de la métrica inducida y de la curvatura extrínseca permanecen constantes a lo largo de la evolución. Por otro lado, se ha visto que las constricciones no dependen de las funciones α y β ; por lo que un cambio en estas funciones debe igualmente satisfacer las constricciones independientemente de que el perfil las coordenadas no permanezca constante.

Se estudia ahora el caso en el que la función lapso se modifica de la siguiente manera:

$$\alpha = \alpha_{EF} + \tilde{\alpha} \quad (4.7)$$

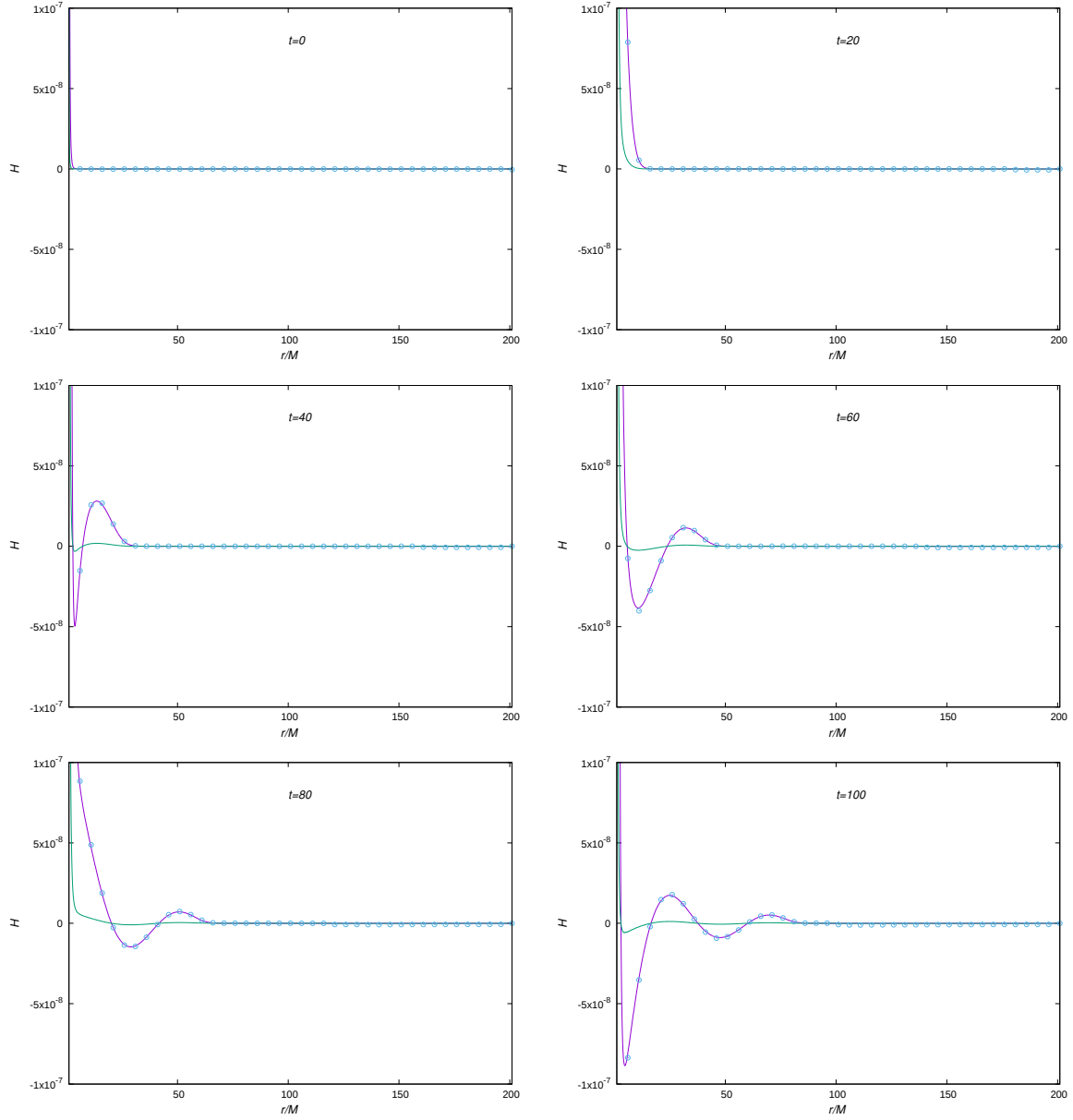


Figura 4.2: Evolución de la constricción Hamiltoniana en las resoluciones Δr_3 y Δr_4 para $t = 0, 20, 40, 60, 80, 100$. La línea verde representa la violación de la constricción debida a la resolución Δr_4 , la línea morada corresponde a la violación debida a la resolución Δr_3 . Se multiplica la resolución Δr_4 por el factor de convergencia y se grafica con círculos azules. Nótese que estos puntos quedan justamente sobre la línea morada, lo cual indica que los resultados son consistentes pues la violación de la constricción Hamiltoniana decrece en el orden esperado con mallas más finas.

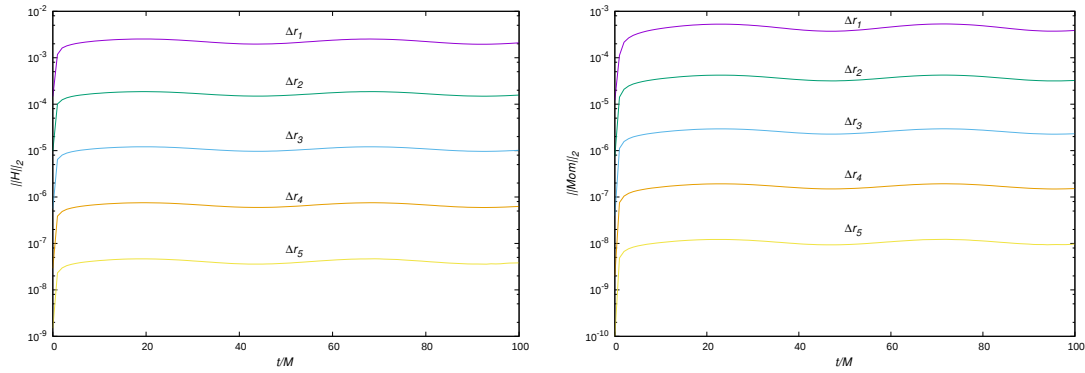


Figura 4.3: Se muestra la norma L_2 de las constricciones Hamiltoniana y de Momento usando cinco resoluciones distintas: $\Delta r_1, \dots, \Delta r_5$. Se observa que conforme se aumenta la resolución H y M convergen a cero a cuarto orden.

donde α_{EF} es el valor exacto del lapso de la solución de Schwarzschild en coordenadas Eddington-Finkelstein y $\tilde{\alpha} = Ae^{-(r-r_0)^2/\sigma^2}$ una perturbación gaussiana; explícitamente:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}} + Ae^{-(r-r_0)^2/\sigma^2}. \quad (4.8)$$

Se evoluciona el sistema manteniendo el factor de Courant y las resoluciones de la malla iguales a las usadas en la sección anterior. Se conservan también las componentes γ_{rr} , $\gamma_{\theta\theta}$, K_{rr} , $K_{\theta\theta}$ y la función β correspondientes a la solución exacta de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein. En resumen, las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} \gamma_{rr} &= 1 + \frac{2M}{r}, & \gamma_{\theta\theta} &= r^2, \\ K_{rr} &= -\frac{2M}{r^2} \frac{1 + \frac{M}{r}}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}}, & K_{\theta\theta} &= \frac{2M}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}}, \\ \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}} + Ae^{-(r-r_0)^2/\sigma^2}, & \beta^r &= \frac{2M}{r \left(1 + \frac{2M}{r}\right)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

En este caso se toma un dominio espacial $r \in [1M, 51M]$ y el pulso gaussiano recibe los parámetros: $A = 1 \times 10^{-3}$, $r_0 = 26M$ y $\sigma = 3$. El tiempo de evolución considerado es $t \in [0M, 50M]$.

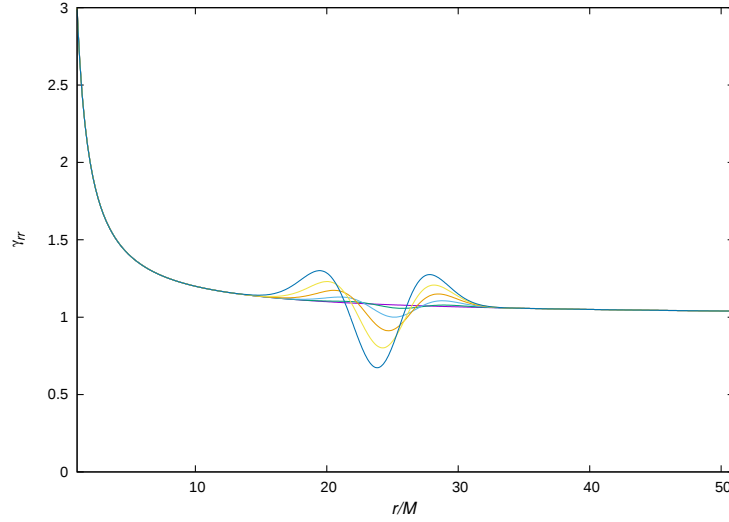


Figura 4.4: Evolución de la componente γ_{rr} de la 3-métrica utilizando una norma distinta a la exacta en el vacío.

Resultados

Como se anticipó, usar una función lapso distinta a la exacta provocará dinámica en las variables de evolución (γ_{rr} , $\gamma_{\theta\theta}$, K_{rr} , $K_{\theta\theta}$). Este efecto puede apreciarse en la Fig 4.4. La validación de los resultados obtenidos se efectúa mediante las pruebas de convergencia mencionadas en el Capítulo 3. La Fig 4.5 muestra la 2-norma de las constricciones Hamiltoniana y de Momento, en ella se observa que con la resolución Δr_1 , la violación de la restricción no converge a cero con el orden deseado. En este caso se dice que la solución numérica se encuentra fuera del régimen de convergencia.

4.3. Formulación KST

4.3.1. Evolución de un agujero negro en el vacío en coordenadas EF

El sistema de evolución correspondiente a la formulación KST que se resolverá en esta sección es el sistema (2.41) pero omitiendo los términos que involucran materia, resultando

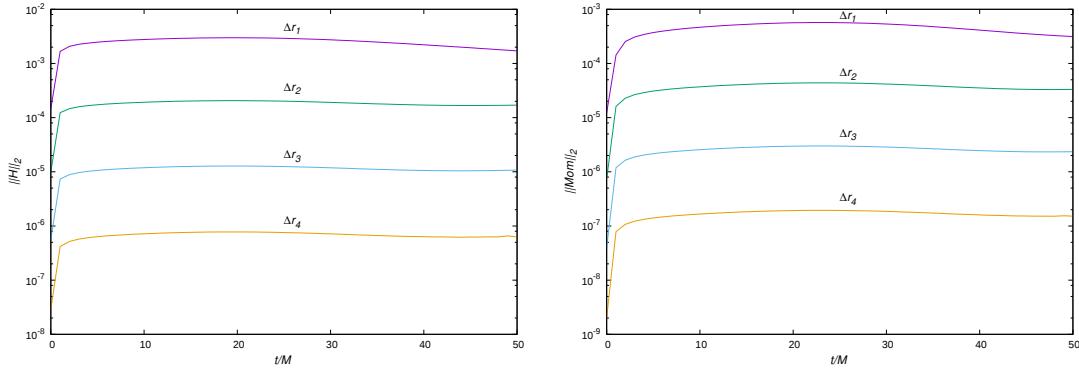


Figura 4.5: Se muestra la norma L_2 de las constricciones Hamiltoniana y de momento usando cuatro resoluciones distintas: $\Delta r_1, \dots, \Delta r_4$. Se observa que conforme se aumenta la resolución H y M convergen a cero a cuarto orden; sin embargo, la resolución Δr_1 está fuera del régimen de convergencia.

$$\begin{aligned}
 \partial_t g_{rr} &= \beta^r \partial_r g_{rr} - 2NK_{rr} + 2g_{rr} \partial_r \beta^r, \\
 \partial_t g_T &= \beta^r \partial_r g_T - 2NK_T + 2\frac{\beta^r}{r} g_T, \\
 \partial_t K_{rr} &= \beta^r \partial_r K_{rr} - \frac{N}{g_{rr}} \partial_r f_{rrr} + N \left[2\frac{f_{rrr}}{g_{rr}} \left(\frac{f_{rrr}}{g_{rr}} + \frac{1}{r} - \frac{4f_{rT}}{g_T} \right) - \frac{6}{r^2} + K_{rr} \left(2\frac{K_T}{g_T} - \frac{K_{rr}}{g_{rr}} \right) \right. \\
 &\quad \left. - 6\left(\frac{f_{rT}}{g_T} \right)^2 - \partial_r^2 \ln \tilde{\alpha} - (\partial_r \ln \tilde{\alpha})^2 + \left(\frac{4}{r} - \frac{f_{rrr}}{g_{rr}} \right) \partial_r \ln \tilde{\alpha} \right] + 2K_{rr} \partial_r \beta^r, \\
 \partial_t K_T &= \beta^r \partial_r K_T - \frac{N}{g_{rr}} \partial_r f_{rT} + N \left(K_T \frac{K_{rr}}{g_{rr}} + \frac{1}{r^2} - \frac{2f_{rT}^2}{g_{rr}g_T} - \frac{f_{rT}}{g_{rr}} \partial_r \ln \tilde{\alpha} \right) + \frac{2\beta^r}{r} K_T, \\
 \partial_t f_{rrr} &= \beta^r \partial_r f_{rrr} - N \partial_r K_{rr} + N \left[4g_{rr} \frac{K_T}{g_T} \left(3\frac{f_{rT}}{g_T} - \frac{f_{rrr}}{g_{rr}} + \frac{2}{r} - \partial_r \ln \tilde{\alpha} \right) - K_{rr} \left(10\frac{f_{rT}}{g_T} + \frac{f_{rrr}}{g_{rr}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2}{r} + \partial_r \ln \tilde{\alpha} \right) \right] + 3f_{rrr} \partial_r \beta^r + g_{rr} \partial_r^2 \beta^r, \\
 \partial_t f_{rT} &= \beta^r \partial_r f_{rT} - N \partial_r K_T + N \left[K_T \left(2\frac{f_{rT}}{g_T} - \frac{f_{rrr}}{g_{rr}} - \partial_r \ln \tilde{\alpha} \right) \right] + \left(\partial_r \beta^r + \frac{2\beta^r}{r} \right) f_{rT}, \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Este sistema está ligado a un conjunto de cuatro ecuaciones de restricción que corresponden a las típicas Hamiltoniana y de Momento, más las constricciones para las variables auxiliares usadas en esta formulación

$$\begin{aligned}
C &:= \frac{\partial_r f_{rT}}{g_{rr}g_T} - \frac{1}{2r^2g_T} + \frac{f_{rT}}{g_{rr}g_T} \left(\frac{2}{r} + \frac{7f_{rT}}{2g_T} - \frac{f_{rrr}}{g_{rr}} \right) - \frac{K_T}{g_T} \left(\frac{K_{rr}}{g_{rr}} + \frac{K_T}{2g_T} \right) = 0 \\
C_r &:= \frac{\partial_r K_T}{g_T} + \frac{2K_T}{rg_T} - \frac{f_{rT}}{g_T} \left(\frac{K_{rr}}{g_{rr}} + \frac{K_T}{g_T} \right) = 0 \\
C_{rrr} &:= \partial_r g_{rr} + \frac{8g_{rr}f_{rT}}{g_T} - 2f_{rrr} = 0 \\
C_{rT} &:= \partial_r g_T + \frac{2g_T}{r} - 2f_{rT} = 0.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Detalles sobre la solución del sistema, condiciones iniciales y de frontera serán descritos a continuación.

Condiciones iniciales

Con el fin de mantener a la geometría de Schwarzschild independiente de t , se eligen las funciones métricas en las coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes como condiciones iniciales. En este sistema de coordenadas, la solución de Schwarzschild toma la forma:

$$\begin{aligned}
g_{rr} &= 1 + \frac{2M}{r}, & g_T &= 1, \\
\tilde{\alpha} &= \left(1 + \frac{2M}{r} \right)^{-1}, & \beta^r &= \frac{2M}{r} \left(1 + \frac{2M}{r} \right)^{-1}, \\
K_{rr} &= -\frac{2M}{r} \left(1 + \frac{M}{r} \right) \left(1 + \frac{2M}{r} \right)^{-\frac{1}{2}}, & K_T &= \frac{2M}{r^2} \left(1 + \frac{2M}{r} \right)^{-\frac{1}{2}}, \\
f_{rrr} &= \frac{1}{r} \left(4 + \frac{7M}{r} \right), & f_{rT} &= \frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Estas condiciones iniciales satisfacen al sistema de constricciones (4.11). Se presenta una gráfica con los valores de estas condiciones iniciales en la Fig 4.6.

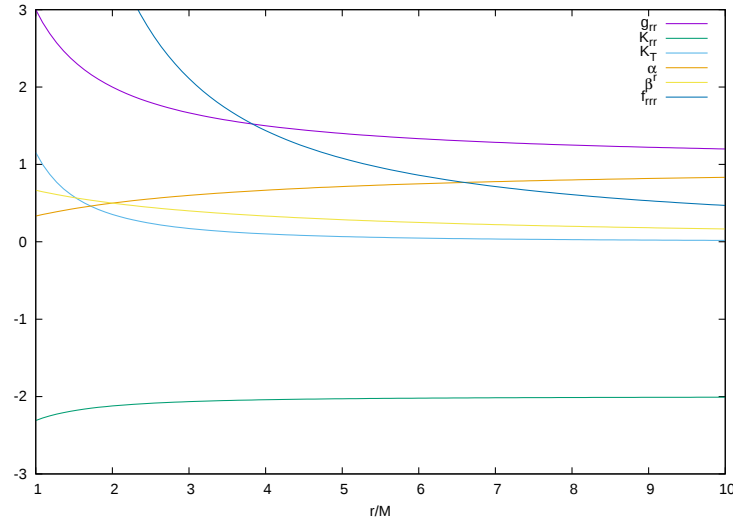


Figura 4.6: Valores iniciales para las funciones métricas y de curvatura γ_{rr} , K_{rr} , K_T , de las condiciones de norma α , β^r y de la variable adicional f_{rrr} . No se presenta la componente $\gamma_T = 1$ ni la función $f_{rT} = \frac{1}{r}$.

Configuración numérica

Se definió el dominio espacial $r \in [1M, 101M]$ y se eligieron las resoluciones $\Delta r_3, \dots, \Delta r_6$ fijadas en la sección anterior. Se mantiene el mismo Factor de Courant $FC = 0.25$.

El tratamiento de términos de advección en el sistema (4.10) es el mismo que se utiliza en el sistema (4.2), es decir, se utilizan estenciles desbalanceados con puntos a la derecha si $\beta^r \geq 0$ y a la izquierda en caso contrario.

La evolución en el tiempo se realiza también usando el método de Líneas con el integrador RK4 durante $t \in [0M, 500M]$.

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera se imponen en el sistema (4.10) usando la descomposición característica que permite la formulación KST. Se consideran únicamente los campos característicos que se propagan hacia adentro del dominio computacional. En la frontera interna r_{min} no es necesario implementar ninguna condición puesto que todos los campos característicos salen del dominio hacia la singularidad. Esto significa que los conos de luz apuntan hacia la singularidad en $r = 0$.

En la frontera exterior r_{max} , por otro lado, los campos tienen modos tangenciales y radiales entrantes y salientes. En este caso hay cuatro campos propagándose hacia adentro del dominio a través de r_{max} que eventualmente pueden contaminar la solución numérica. Estos campos y sus respectivas velocidades son

$$\begin{aligned}
U_r^0 &:= g_{rr}, & v_c &= -\beta^r, \\
U_t^0 &:= g_T, & v_c &= -\beta^r, \\
U_r^\pm &:= K_{rr} \pm \frac{f_{rrr}}{\sqrt{g_{rr}}}, & v_c &= -\beta^r \pm \tilde{\alpha} g_T \\
U_T^\pm &:= K_T \pm \frac{f_{rT}}{\sqrt{g_{rr}}}, & v_c &= -\beta^r \pm \tilde{\alpha} g_T.
\end{aligned}$$

Se imponen condiciones de frontera denominadas “freezing conditions”, que consisten en aplicar a los campos entrantes la condición

$$\partial_t U = 0.$$

Estas condiciones de frontera por tanto congelan los modos entrantes y ello permite la evolución del espacio-tiempo por tiempos prolongados.

Resultados

La implementación del código que soluciona el sistema (4.10) entró en el régimen de convergencia a partir de la malla con resolución Δr_4 , como se observa en la Fig 4.7. Nuevamente se han elegido condiciones iniciales que mantienen a la geometría independiente del tiempo, de modo que los perfiles de las variables de evolución se mantienen constantes como en el caso de la formulación ADM. De igual manera, se monitorea la violación de las constricciones como un indicador de que el error obtenido decrece cuando la malla es más fina y se someten los resultados numéricos a las pruebas de convergencia que se han aplicado anteriormente. Se evoluciona el sistema hasta $t = 500M$ para comprobar que la evolución se mantiene convergente para valores de t grandes. El error de redondeo es alcanzado en $\sim 10^{-11}$. Se presenta la 2-norma de las constricciones C y C_r en la Fig 4.7.

4.3.2. Evolución de la solución exacta con una norma no trivial

En esta formulación también se modifica la función lapso con el fin de generar dinámica en las variables de evolución. Al igual que en la formulación ADM, las constricciones deben satisfacerse puesto que son independientes de las funciones de norma.

La modificación de la función α se lleva a cabo sumando un término $\hat{\alpha}$ correspondiente a un pulso gaussiano

$$\alpha = \alpha_{KST} + \hat{\alpha} \tag{4.13}$$

donde α_{KST} es el valor exacto del lapso usado en esta formulación. Explícitamente:

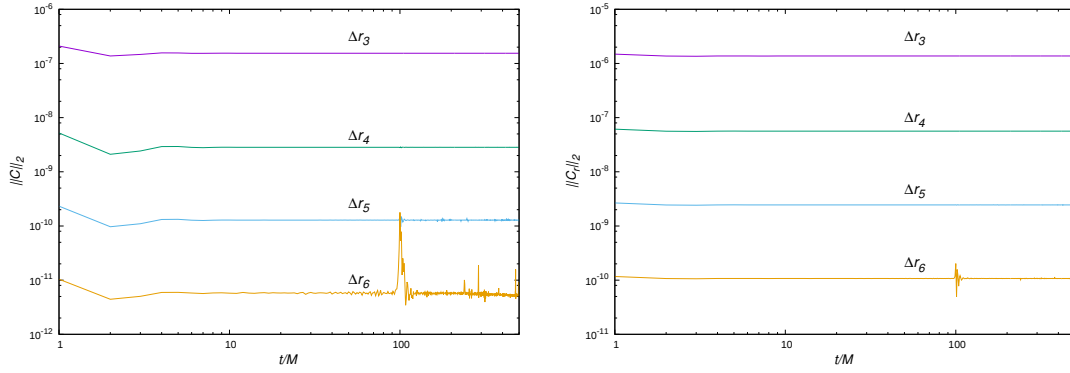


Figura 4.7: Gráfica de la norma L_2 de las constricciones Hamiltoniana y de Momento (C y C_r , respectivamente), correspondiente a las resoluciones $\Delta r_3, \dots, \Delta r_7$. Se observa que la 2-norma se estabiliza en un período corto de tiempo y se mantiene así a lo largo de la evolución. Nótese que en la norma de la resolución Δr_7 se ha alcanzado el error de redondeo de la computadora y por ello se perciben ligeras variaciones en la región donde los otros resultados se mantienen uniformes.

$$\alpha = \left(1 + \frac{2M}{r}\right)^{-1} + Ae^{-(r-r_0)^2/\sigma^2}. \quad (4.14)$$

La Fig 4.8 muestra la diferencia α y α_{KST} . Se evoluciona el sistema manteniendo el mismo factor de Courant y las mismas resoluciones de la sección anterior. Las condiciones iniciales en este caso son también las expresiones (4.12), excepto por la nueva función α recién definida.

En este caso se toma un dominio espacial $r \in [1M, 51M]$ y el pulso gaussiano recibe los parámetros: $A = 0.1$, $r_0 = 5M$ y $\sigma = 0.05$. El tiempo de evolución considerado es $t \in [0M, 500M]$.

Una diferencia importante es que ahora se implementan unas condiciones de frontera en r_{max} que preservan las constricciones “Constraint-Preserving Boundary Conditions” [11]. Estas condiciones de frontera son elegidas pues las condiciones iniciales no son las exactas, por lo que es necesario saber cómo se propagan las constricciones a lo largo de la evolución de las variables principales; esto se logra obteniendo la derivada temporal de los miembros derechos de las constricciones (4.11) y reemplazando las derivadas temporales por los rhs de las ecuaciones de evolución (4.2); finalmente se reescriben las variables principales en términos de las constricciones y sus derivadas espaciales. La información que brinda la estructura característica del sistema de evolución de las constricciones es usada para establecer condiciones de frontera que preservarán las constricciones en las fronteras.

Se encuentra que las condiciones de frontera para las componentes métricas son

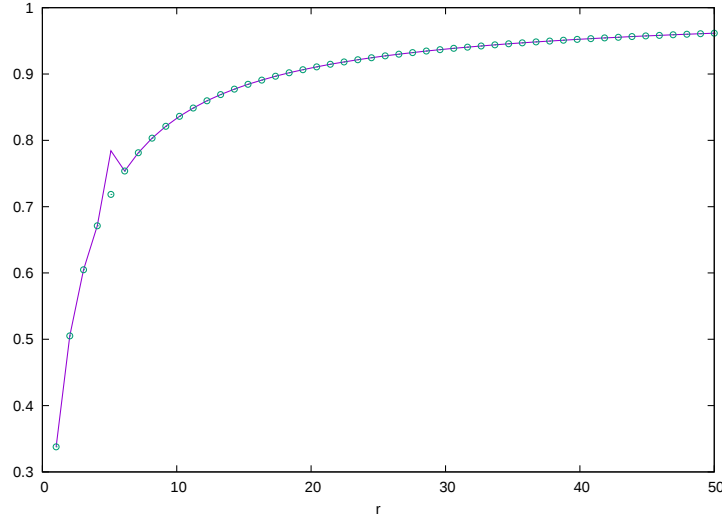


Figura 4.8: Se muestra la nueva función lapso. La línea continua corresponde a $\alpha = \alpha_{KST} + \hat{a}$ y los puntos representan a la solución exacta α_{KST} .

$$\begin{aligned}\partial_t g_{rr} &= 2g_{rr}\partial_r\beta - 2\alpha K_{rr} - 8\frac{g_{rr}f_{rT}}{g_T}\beta + 2f_{rrr}\beta, \\ \partial_t g_T &= -2\alpha K_T + 2\beta f_{rT}.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Las condiciones de frontera de las variables restantes son las mismas que en la solución exacta.

Resultados

Como era de esperarse, definir una función lapso distinta a la exacta ocasionó dinámica en las variables de evolución (g_{rr} , g_T , K_{rr} , K_T , f_{rrr} y f_{rT}) pues todo el sistema (4.10) depende de α a través de la función N . Se muestra este efecto para g_{rr} en la Fig 4.9. Las pruebas de convergencia para las constricciones C y C_r para este caso con dinámica se presentan en las Fig 4.10.

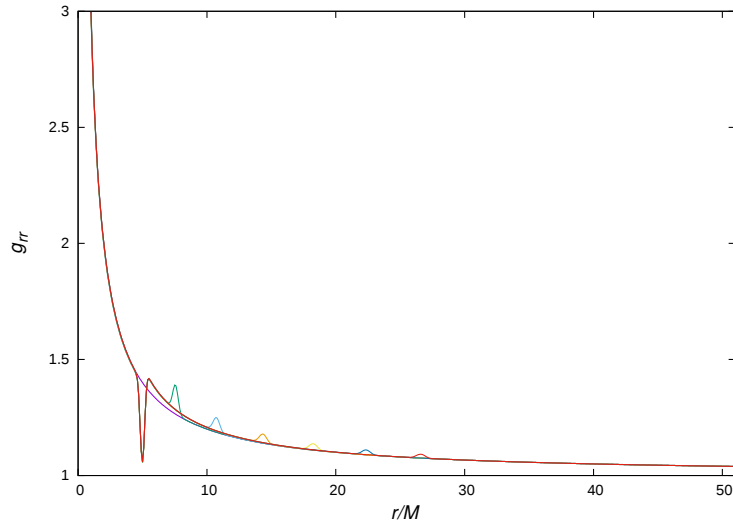


Figura 4.9: Evolución de la componente g_{rr} de la 3-métrica empleando una función lapso que genera dinámica. Se muestran los perfiles en distintos valores de t , a saber, $t = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30$.

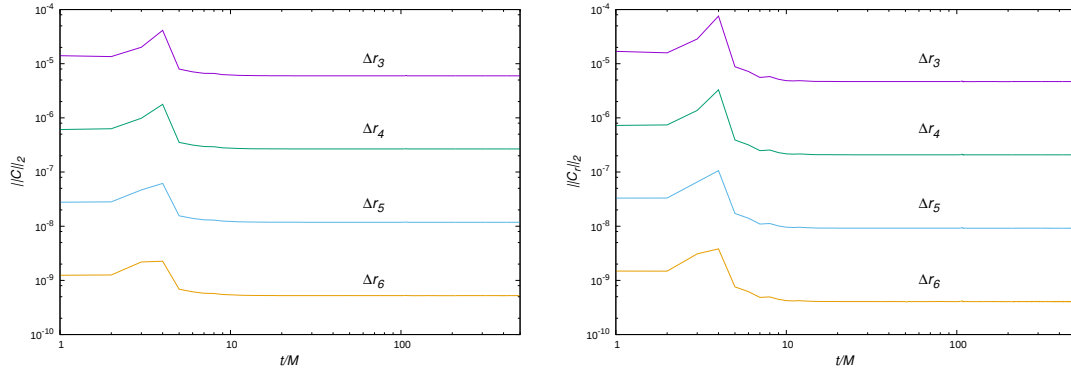


Figura 4.10: Se muestra la convergencia de la norma L_2 de las constricciones C y C_r usando cuatro resoluciones distintas: $\Delta r_3, \dots, \Delta r_6$. En este caso con dinámica se observa también que el error se estabiliza en los primeros valores de t justo como en el caso de la norma exacta.

Capítulo 5

Conclusiones y comentarios finales

El trabajo que se acaba de presentar se ha enfocado en estudiar la evolución de un agujero negro esféricamente simétrico y en el vacío a partir de dos formulaciones distintas de la Relatividad General. Para conseguirlo ha sido necesario tener un entendimiento claro de las ideas centrales de la misma Relatividad General para posteriormente comprender las propiedades del espacio-tiempo que permiten desarrollar de las formulaciones ADM y KST. Además, ha sido indispensable hacer un análisis de los métodos numéricos adecuados para problemas de valores iniciales. Al combinar el formalismo $3 + 1$ con la parte de métodos numéricos, se estuvo en condiciones de obtener la evolución del sistema de interés.

La implementación de los sistemas de evolución se inició proporcionando condiciones iniciales muy particulares que mantenían estática a la geometría del espacio-tiempo. Esto se pudo hacer debido a que un agujero negro esféricamente simétrico tiene una solución exacta en ausencia de materia. Dicho esto, cabe mencionar que también se ha presentado el procedimiento para encontrar la solución exacta. Más aún, se han incluido ejemplos para ambas formulaciones en los que la geometría evoluciona, pues en la práctica lo más común es resolver sistemas en los cuales la geometría del espacio-tiempo presenta dinámica.

Es importante decir que todos los resultados arrojados por los algoritmos numéricos fueron sujetos a las pruebas de validación correspondientes, obteniendo en todos los casos resultados que reproducen lo predicho por la teoría de los métodos numéricos.

El agujero negro tratado en este trabajo, aún siendo un problema más bien de carácter formativo, puede complementarse de diversas maneras, por ejemplo: agregar una nube de gas ideal y estudiar la acreción, considerar un agujero negro rotante con carga eléctrica, etc. El problema resuelto aquí es ciertamente el primer paso hacia la solución de problemas importantes, entre los que se encuentra la evolución de sistemas binarios de hoyos negros con estrellas de neutrones, cuyo propósito es modelar las fuentes más importantes de radiación gravitacional. Otros problemas que se pueden modelar son las fuentes de rayos gamma, jets relativistas de los discos de acreción, rotación de galaxias, etc.

Personalmente, desarrollar esta tesis me ha proporcionado bases sólidas para poder resolver problemas más complejos. He aprendido a ser observador y crítico y de los re-

sultados que se obtienen al aplicar métodos a sistemas físicos, además del conocimiento teórico.

Apéndice A

Variedades Diferenciables

Definición Sea $n \in \mathbb{N}$. Una **variedad (C^∞ -)diferenciable** de dimensión n es un conjunto M con una familia de mapeos biyectivos $\phi_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ tal que

(i) $\bigcup_{\alpha} U_\alpha = M,$

(ii) para todos α, β tales que $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, los conjuntos $\phi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ y $\phi_\beta(U_{\alpha\beta})$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$ y los mapeos

$$\phi_{\alpha\beta} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \phi_\beta(U_{\alpha\beta})$$

son C^∞ -diferenciables.

(iii) La familia $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ es máxima con respecto a las condiciones (i) y (ii), es decir, si $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ es otra familia que satisface (i) y (ii), entonces $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\} \subset \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$.

Cada par (U_α, ϕ_α) se llama una **carta local** o un **sistema local de coordenadas**. Una familia de cartas locales $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ que satisface los puntos (i) y (ii) se llama un **atlas diferenciable** de M . Un atlas diferenciable que es máximo en el sentido de punto (iii) se llama una **estructura diferenciable** sobre M [19].

En el problema tratado en este trabajo, M representa al espacio-tiempo. Por suerte, en el caso esféricamente simétrico, el espacio-tiempo puede ser cubierto con únicamente un mapeo ϕ_α , que resulta ser el mapeo identidad. Es decir, usar coordenadas de Schwarzschild o de Eddington-Finkelstein resultó suficiente para describir totalmente el problema.

Apéndice B

Derivada de Lie

La derivada de Lie provee una manera de comparar campos tensoriales en diferentes puntos de la variedad, ya que éstos viven en diferentes espacios. En otras palabras, da una noción de derivada de un tensor. Esta derivada que no depende de la existencia de una métrica se describe a continuación.

Considérese una familia de curvas C_V asociada a un campo vectorial V . A esta familia de curvas se le denomina *Congruencia* de V . Esta congruencia de curvas tiene a V como vector tangente, es decir

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

donde λ es un parámetro que varía a lo largo de la curva. La congruencia de curvas provee un mapeo ϕ_λ de la variedad en sí misma. De hecho, en un punto dado p de la variedad sólo hay una curva de la congruencia que pasa a través de él. Por consiguiente, p puede ser mapeado al punto q “arrastrando” p a lo largo de la curva de la congruencia a la que pertenece, es decir,

$$q = \phi_\lambda(p),$$

donde $p = C(\lambda_0)$, $q = C(\lambda_0 + \lambda)$, C es la curva de la congruencia a través de p y q . Este mapeo se puede usar para arrastrar tensores del punto p al punto q .

La derivada de Lie de un campo vectorial U está definida de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_V U = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{\phi_{-\lambda}^{-1}(U|_{\phi_\lambda(p)}) - U|_p}{\lambda} \right]. \quad (\text{B.1})$$

donde $\phi_{-\lambda}^{-1}$ arrastra al punto q de regreso a p . Para encontrar las componentes de la derivada de Lie, sea μ el parámetro de la congruencia C_U asociada con U . Si una curva de C_U es arrastrada una distancia infinitesimal λ a lo largo del campo vectorial V se encuentra que

$$\begin{aligned}
\phi_\lambda(x^\alpha) &= x^\alpha + V^\alpha \lambda \\
\Rightarrow \phi_\lambda U^\alpha &= U^\alpha + \lambda \left(\frac{dV^\alpha}{d\mu} \right) \\
&= U^\alpha + (U^\beta \partial_\beta V^\alpha).
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V U^\alpha &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{U^\alpha|_{\phi_\lambda(p)} - \lambda(U^\beta|_{\phi_\lambda(p)} \partial_\beta V^\alpha) - U^\alpha|_p}{\lambda} \right] \\
&= \frac{dU^\alpha}{d\lambda} - U^\beta \partial_\beta V^\alpha \\
&= V^\beta \partial_\beta U^\alpha - U^\beta \partial_\beta V^\alpha.
\end{aligned}$$

Para una uno-forma se tiene

$$\mathcal{L}_V w_\alpha = V^\beta \partial_\beta w_\alpha + w_\beta \partial_\alpha V^\beta$$

y aplicado a tensores toma la siguiente forma

$$\mathcal{L}_V T^\alpha_\beta = V^\mu \partial_\mu T^\alpha_\beta - T^\mu_\beta \partial_\mu V^\alpha + T^\alpha_\mu \partial_\beta V^\mu.$$

La derivada de Lie es una manera de escribir las derivadas parciales independientemente de las coordenadas.

El concepto de derivada de Lie resulta útil para entontrar la ecuación de evolución de las componentes de la curvatura extrínseca en las dos formulaciones que se manejan aquí.

Bibliografía

- [1] Rezzolla, L. y Zanotti, O. Relativistic Hydrodynamics Oxford University Press, 2013.
- [2] Martí, J. M. y Müller, E. Numerical Hydrodynamics in Special Relativity Living Rev. Relativity, 6, (2003), 7.
- [3] Miguel Alcubierre. Introduction to 3+1 Numerical Relativity, Oxford University Press, 2008.
- [4] Janssen, B. Teoría De La Relatividad General. 1ra edición. Granada: Creative Commons, 2013. Web. 13 de diciembre de 2015.
- [5] Schutz, B. A First Course in GENERAL RELATIVITY. 2da edición, Cambridge University Press, 2009.
- [6] Miguel Alcubierre, Rev. Mex. Fís S 53 (2) 5-30.
- [7] Hobson, M. P., Efstathiou, G. P. y Lasenby, A. N. General Relativity An Introduction for Physicists Cambridge University Press, 2006.
- [8] Misner, C. W., Thorne, K. S. y Wheeler, J. A. Gravitation W. H. Freeman and Company, 1973.
- [9] Anderson, A. y York Jr., J. W. Fixing Einstein's Equations Phys.Rev Lett. 82, 4384 (1999).
- [10] Kidder, L. E., Scheel, M. A., Teukolsky S. A., Carlson, E. D. y Cook, G. B., Black hole evolution by spectral methods Phys. Rev. D 62, 084032 (2000).
- [11] Calabrese, G., Lehner, L. y Tiglio, M. Constraint-preserving boundary conditions in numerical relativity arXiv:gr-qc/0111003.
- [12] Iskandarani, M. Finite Difference Approximation of Derivatives. Miami: N.p. Archivo PDF. 1 de noviembre de 2015.
- [13] F. S. Guzmán, Solución de la ecuación de onda como un problema de valores iniciales usando diferencias finitas, Rev. mex. de física 56 (1) 51-68.

- [14] Sadiku, M. N. O. y Obiozor, C. N., A simple introduction to the method of lines, International Journal of Electrical Engineering Education 37/3.
- [15] Burden, R. L. y Faires, J. D., Análisis Numérico. 7ma ed. Cengage Learning Latin America, 2001.
- [16] Schiesser, W. E. y Griffiths, G. W., A Compendium of Partial Differential Equation Models Method of Lines Analysis with Matlab. Cambridge University Press, 2009.
- [17] E. Seidel and W-M. Suen, Towards a singularity proof scheme in numerical relativity. Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 1845.
- [18] Thornburg J. Finding apparent horizons in numerical relativity Phys. Rev. D **54**, 4899-4918.
- [19] Sarbach, O., Relatividad General curso de maestría (2011).