



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO.
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO.



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS.

BILLARES Y SUPERFICIES PLANAS.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

MIGUEL ANGEL MÉNDEZ GONZÁLEZ.

DIRECTOR DE TESIS:

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS JOSÉ FERRÁN VALDEZ LORENZO.

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM, UNIDAD MORELIA.

MORELIA, MICH.
JUNIO, 2014

AGRADECEMOS EL APOYO DEL PROYECTO CONACYT CB-2009-01
127991 Y LOS PROYECTOS PAPIIT IN103411 Y IB100212 RECIBIDOS
DURANTE LA REALIZACIÓN DE ESTA TESIS.

ÍNDICE GENERAL

Abstract	v
Resumen	vi
Introducción.	vii
I. Capítulo I. Billares y estructuras planas.	1
I. Billares en polígonos y el problema de las órbitas cerradas.	1
II. Billares sobre polígonos y estructuras planas	8
III. Relaciones geométrico - topológicas	13
IV. Relaciones dinámicas: flujo geodésico y trayectorias de billar. . .	20
II. Capítulo II. Transformaciones de intercambio de intervalos y estructuras planas.	26
I. Nociones básicas sobre transformaciones de intercambio de in- tervalos.	26
II. Transformaciones de intercambio de intervalos generadas por el flujo geodésico asociado a una estructura plana.	34
III. Capítulo III. Estructuras planas y la dicotomía de Veech.	38
I. Estructuras planas y el grupo de Veech.	38
I.1. Algunas propiedades de estructuras planas.	38
I.2. El conjunto de vectores de holonomía.	42
I.3. El grupo de Veech.	46
II. La alternativa de Veech.	50
III. Ejemplos de estructuras planas de Veech.	55

ABSTRACT

In this work we study the dynamics of polygonal billiards. This leads to the study of geodesic flows in *surfaces having planar structures* (planar surfaces, for short). We focus our study on a classical result of *William A. Veech*, and present an alternative proof of it due to *Ya. B. Vorobets* [16]. Veech's theorem describes, under certain conditions, the behaviour of the geodesic flow associated to compact planar surfaces. Finally, we show some examples of polygons for which the associated surface satisfies the hypotheses of Veech's theorem.

Billiards - Planar structures - Veech's dichotomy.

RESUMEN

En el presente trabajo, se estudia primeramente la dinámica de los billares sobre polígonos. Se muestra que el estudio de ésta dinámica conduce al estudio de los flujos geodésicos asociados a *superficies con estructuras planas* (o estructuras planas, simplemente). Enfocamos nuestro estudio en un resultado clásico de *William A. Veech*; presentamos una demostración alternativa a éste (esta demostración fue dada por *Ya. B. Vorobets* en [16]). El teorema de la dicotomía de Veech describe como se comporta, bajo ciertas condiciones, el flujo geodésico asociado a una estructura plana compacta. Finalmente, son dados algunos ejemplos de billares sobre polígonos cuya dinámica puede ser descrita por el teorema de la dicotomía de Veech.

Billares - Estructuras planas - Dicotomía de Veech.

INTRODUCCIÓN.

El concepto de *billar* es simple e intuitivo, consta de 3 elementos: una mesa (una región del plano), una bola y una ley de reflexión (la cual nos dice cómo es que la bola “rebota” en los lados de la mesa). Por sí mismo, el estudio de los billares es de gran interés. El concepto de billar aparece en diversas áreas y aún hay muchas preguntas sobre éste que no han sido completamente respondidas. Por ejemplo, *el problema de las órbitas periódicas*, el cual plantea la siguiente pregunta:

“¿cualquier triángulo posee una trayectoria de billar cerrada?”

En física los billares aparecen en áreas como óptica o mecánica. Como ejemplo, consideremos un sistema físico de dos partículas puntuales de masas m_1, m_2 cuyo movimiento está restringido a un intervalo cerrado y tal que cualquier colisión (entre ellas o con alguno de los extremos) es elástica, *i.e.* no hay disipación de energía. Se puede mostrar que el espacio fase de este sistema es un billar en un triángulo rectángulo. Las trayectorias de billar sobre éste describen como evoluciona el sistema físico. Por ejemplo, órbitas periódicas del billar corresponden a estados estacionarios del sistema.

Como se observa del ejemplo anterior, el aspecto quizá más interesante de un billar es su dinámica. Para el caso de billares en los que la mesa es un polígono, la “construcción de Katok-Zemlyakov” nos permite asociar una superficie (con estructura plana) a cada billar y así, estudiar la dinámica del billar por medio del estudio de la dinámica sobre su superficie asociada.

Para el toro plano (el cual es la superficie compacta con estructura plana más simple), el flujo geodésico es bien conocido y es descrito por el *teorema de Weil*¹. Éste afirma que el flujo geodésico del toro plano $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ en

¹Este teorema suele ser llamado *el teorema de Weil* por las ideas que aparecen en [17]. Sin embargo, Weil no llegó a publicar un artículo donde se enuncie el teorema como tal. Igor Nikolaev y Evgeny Zhuzhoma en su libro: *Flows on 2 dimensional manifolds*([4]), explican que el teorema puede ser deducido de un teorema más general de Kolmogorov (Teorema 6.2.1 del mismo libro).

una dirección dada es periódico si la dirección es múltiplo racional de π , ó es únicamente ergódico si la dirección es múltiplo irracional de π .

El *teorema de la dicotomía de Veech* [15] es un resultado de clasificación de flujos y es una generalización del teorema de Weil. Éste da condiciones suficientes para que una superficie compacta (con estructura plana) sea “elemental”, esto es, que su flujo geodésico en cualquier dirección posee sólo componentes periódicas ó es únicamente ergódico.

El objetivo principal de esta tesis es presentar una demostración alternativa del teorema de la dicotomía de Veech (1992) la cual fué dada por Vorobets en [16] (1996). La idea de esta demostración alterna es que el teorema proviene de ideas geométricas “sencillas” y que por tanto puede ser demostrado con herramientas simples.

Presentamos en detalle los resultados de [16] modificando las demostraciones cuando nos parezca que ésto aclara la razón del resultado. Exponemos también material preliminar que nos permita comprender mejor las ideas que se usan en la demostración del teorema de la dicotomía de Veech. Además de hacer explícita la conexión entre el estudio de los billares sobre polígonos y las superficies (con estructuras planas).

La estructura de la presente tesis es descrita a continuación.

El primer capítulo es dedicado a describir formalmente lo que es un billar y su dinámica. Así como la relación (topológica y dinámica) que un billar tiene con su superficie asociada mediante la construcción de Katok-Zemlyakov.

En el segundo capítulo presentamos el concepto de transformaciones de intercambio de intervalos. Este concepto es el que usaremos como herramienta para el estudio y descripción del comportamiento del flujo geodésico asociado a una superficie con estructura plana.

Por último, en el tercer capítulo tratamos cuestiones sobre la relación topológica de una superficie y su estructura plana. Se define el concepto de equivalencia de estructuras planas y de grupo de Veech asociado a una. El final de éste capítulo es reservado para presentar ejemplos de billares poligonales cuya superficie asociada satisface el teorema de Veech.

CAPÍTULO I

BILLARES Y ESTRUCTURAS PLANAS.

En este primer capítulo presentamos los conceptos básicos asociados a los billares sobre polígonos Euclidianos y la relación que estos poseen con las estructuras planas sobre superficies. En la primera sección presentamos el concepto de billar y el problema de las órbitas periódicas en triángulos, el cual presenta una motivación para el estudio de los billares. En la segunda sección presentamos la construcción de Katok-Zemlyakov la cual asocia una estructura plana a cada billar (sobre un polígono) y sirve de puente entre el estudio de los billares y la geometría diferencial. Por último, las secciones III y IV establecen relaciones geométricas y dinámicas entre el billar y su estructura plana asociada mediante la construcción de Katok-Zemlyakov .

I. Billares en polígonos y el problema de las órbitas cerradas.

Comencemos definiendo lo que entenderemos por un billar:

Definición 1. *Un billar en el plano (o simplemente un billar) es un par (D, ϕ) , donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región del plano tal que ∂D es lisa por pedazos y ϕ es una “ley de reflexión”, esto es, una función*

$$\phi : \partial D \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

que se anula sobre la parte no lisa de ∂D y si p está sobre la parte lisa de ∂D entonces cumple que $\langle N_p, \phi(p, v) \rangle_{\mathbb{R}^2} \geq 0$, con N_p la normal interior a ∂D en p .

En nuestro caso trabajaremos con billares (D, ϕ) donde $D = P$ es un polígono de lados l_1, l_2, \dots, l_n y

$$\phi(p, v) = \begin{cases} r_i(v) & \text{si } p \in l_i \cap l_j \text{ sólo si } i = j \\ \vec{0} & \text{si } p \in l_i \cap l_j \text{ con } i \neq j, \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

con r_i la parte lineal de la reflexión con respecto al lado l_i .

Observación 1. (a) En este caso r_i es una isometría para cada i y ϕ puede ser vista como una aplicación de $\partial D \times (\mathbb{S}^1 \cup \{\vec{0}\})$ en sí mismo.

(b) Estrictamente hablando, la ecuación (I.1) no es una “ley de reflexión”, sin embargo ésta define una. Así, para fines prácticos consideraremos (I.1) como si lo fuera.

A cada billar se le puede asociar un sistema dinámico de la siguiente manera:

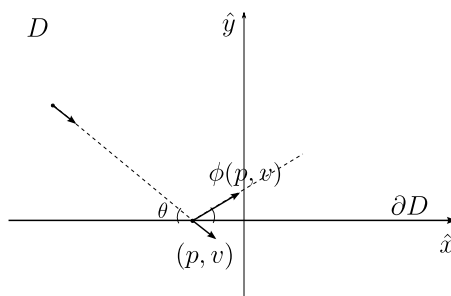
Consideremos una partícula puntual p en el interior de una “mesa” D y supongamos que la partícula es impulsada inicialmente con velocidad v , de modo que ésta comienza a moverse libremente dentro de D y de forma que cada vez que p golpea la parte lisa de la frontera de D con velocidad v' la velocidad con la que rebota es $\phi(p, v')$ y continúa moviéndose dentro de D . Si dejamos mover a la partícula dentro de D con estas condiciones esto nos produce una “dinámica sobre un billar”.

Observemos que por definición si la partícula golpea una de las partes no lisas de la frontera de la mesa, el movimiento se detiene.

Ejemplo 1. Si $\phi(p, v) = 2Av$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y

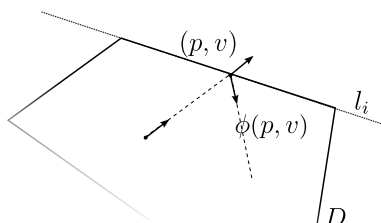
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}, \quad \partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$$

Entonces la dinámica sobre el billar es:



ϕ refleja con respecto al eje x y aumenta el doble de la velocidad de la partícula, pero preserva el ángulo de incidencia. De hecho es fácil ver que la partícula golpea a lo más una vez la frontera de D y no regresa.

Ejemplo 2. Si D es un polígono y ϕ como en (I.1) entonces en este caso la magnitud del vector velocidad no es alterada, sólo cambia su dirección y al igual que antes el ángulo de incidencia se conserva.



El espacio fase del sistema dinámico asociado a un billar sobre un polígono es descrito formalmente de la siguiente manera: sea (D, ϕ) un billar con D polígono de lados l_1, \dots, l_n y $V_D := \{p \in D \mid p \in l_i \cap l_j, i \neq j\}$. Definimos

$$\widehat{D} := (D \setminus V_D) \times \mathbb{S}^1 / \sim_\phi,$$

con \sim_ϕ la relación de equivalencia:

- i) $(p, s) \sim_\phi (p, s) \quad \forall p \in D, s \in \mathbb{S}^1$
- ii) $(p, s) \sim_\phi (q, s')$ si $p = q \in \partial D \setminus V_D$ y $\phi(p, s) = s'$.

Llamaremos a \widehat{D} el espacio fase del billar y sus elementos los denotaremos por $[p, s]_\phi$.

Un concepto íntimamente relacionado a la dinámica de un billar es el de trayectoria de billar.

Definición 2. Sea $\hat{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \widehat{D}$, $\hat{\gamma}(t) = [\gamma(t), s(t)]_\phi$ una curva continua, diremos que $\hat{\gamma}$ es una trayectoria de billar si la curva inducida

$$\begin{aligned} \gamma : I' \subset I &\rightarrow \text{int } D \\ t &\mapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

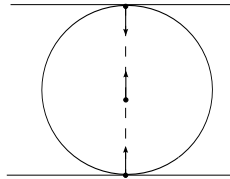
es una curva lisa y se cumple que

$$i) \frac{d\gamma}{dt}(t) = s(t), \quad ii) \frac{ds}{dt}(t) = 0, \quad (\text{I.2})$$

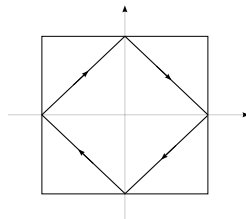
para todo $t \in I'$, con $I' = I \setminus \hat{\gamma}^{-1}(\widehat{\pi}^{-1}(\partial D))$ y $\widehat{\pi}$ la proyección natural de \widehat{D} sobre D .

Definición 3. Decimos que una trayectoria de billar $\hat{\gamma}$ es periódica si existen tiempos $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$ tales que $\hat{\gamma}(t_1) = \hat{\gamma}(t_2)$.

Ejemplo 3. Consideremos $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ y ϕ la reflexión con respecto a la línea tangente en cada punto. En este caso los diámetros forman órbitas periódicas.



Ejemplo 4. Si D es el cuadrado unitario en \mathbb{R}^2 y ϕ como en (I.1). Entonces la trayectoria formada por las diagonales de las intersecciones de sus lados con los ejes forman una trayectoria periódica.



I.I. El Problema de las órbitas periódicas en triángulos

Consideremos ahora el billar (D, ϕ) , con D un triángulo y ϕ como en (I.1). Surge la pregunta al estudiar este tipo de billares:

“Dado un triángulo de ángulos internos θ y φ ¿existen trayectorias de billar periódicas en este triángulo?”

Se conjetura que la respuesta es positiva. Presentamos algunos ejemplos que sirven de evidencia para mostrar por que se establece la conjetura:

- a) Si D es un triángulo recto entonces una trayectoria que parte del lado opuesto al ángulo recto de manera perpendicular, define una trayectoria de billar periódica.



Figura I.1: Órbitas periódicas en un triángulo rectángulo.

Demostración. Lo único que tenemos que mostrar para ver que la trayectoria descrita es realmente una trayectoria de billar es que tenemos la igualdad de ángulos $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$ (Figura I.1) o se puede proponer la trayectoria tal que $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$ (ver Figura I.2) y mostrar que $\epsilon = \pi/2$, lo cual da una trayectoria de billar periódica.

En este caso optamos por la segunda opción y consideramos la figura de abajo

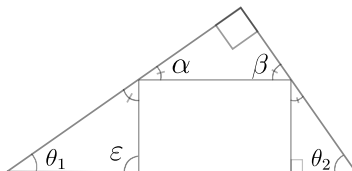


Figura I.2: Trayectoria de billar en un triángulo rectángulo.

Tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\theta_1 + \alpha + \epsilon &= \pi, \\ \alpha + \beta &= \pi/2, \\ \beta + \theta_2 &= \pi/2, \\ \theta_1 + \theta_2 &= \pi/2.\end{aligned}$$

Mediante sustituciones se va obteniendo que

$$\begin{aligned}\theta_1 + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \epsilon &= \pi, \\ \theta_1 + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) + \epsilon &= \pi\end{aligned}$$

y entonces

$$\epsilon = \pi - (\theta_1 + \theta_2) = \frac{\pi}{2}$$

como queríamos. Así la trayectoria de billar descrita es periódica.

- b) Si D es un triángulo agudo *i.e.* todos sus ángulos son menores a $\pi/2$, entonces D posee trayectorias periódicas.

En este caso la demostración no es tan inmediata como antes pero se sigue usando geometría Euclidiana básica y ésta se basa en propiedades geométricas del triángulo órtico.

Demostración. Consideremos la trayectoria formada por el triángulo órtico, el cual sabemos permanece dentro de D cuando D es un triángulo acutángulo. Queremos mostrar que dicha trayectoria es una trayectoria de billar, para lo cual consideramos la Figura I.3 (b).

Basta mostrar que α es igual a β pues los demás casos son análogos. Ahora, $\beta = \angle AHR$ pues ambos ángulos describen el mismo arco sobre un círculo y por el mismo argumento $\alpha = \angle CHT$. Pero $\angle AHR = \angle CHT$ pues son opuestos por el vértice, así $\alpha = \beta$ y entonces el triángulo órtico define una trayectoria de billar como afirmábamos.

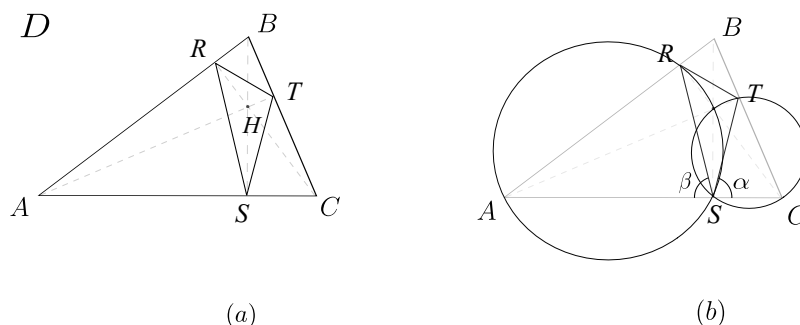


Figura I.3: Propiedades geométricas del triángulo órtico en un triángulo acutángulo.

c) Para el caso en el que D es un triángulo obtuso las ideas anteriores fallan y de hecho aún no se posee una respuesta completa.

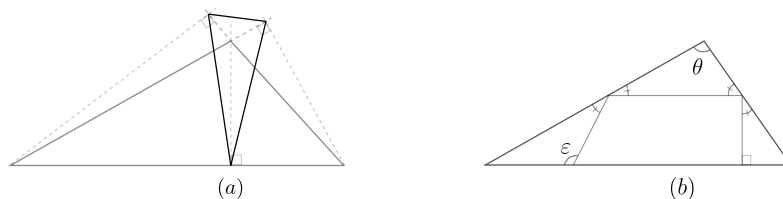


Figura I.4: (a) En un triángulo obtuso, el triángulo órtico escapa de D . (b) Para $\theta > \pi/2$ podemos tener que $\epsilon \neq \pi/2$

Se han obtenido resultados parciales al respecto, entre los más importantes *Howard Masur* demostró usando la teoría de superficies planas que: para polígonos (en particular triángulos) con ángulos internos

conmensurables con π , el conjunto de direcciones que poseen órbitas periódicas es denso en \mathbb{S}^1 .

Teorema 1. [11] *Para cualquier billar racional existe un conjunto denso de direcciones, cada uno de ellos con una órbita periódica.*

Por otra parte, *Richard Evan Schwartz* mostró recientemente que todos los triángulos obtusos con ángulos menores a 100° poseen una trayectoria periódica:

Teorema 2 (100 Degree Theorem). [14] *Sea T un triángulo cuyo ángulo mayor es menor ó igual a 100° . Entonces T posee una trayectoria de billar periódica.*

La demostración de éste teorema fue obtenida con ayuda del programa computacional *McBilliards* creado por *R. Schwatz* y *Pat Hooper*.

En general si consideramos el “espacio de todos los triángulos” (salvo semejanza), el cual es una porción del plano, como se muestra en la figura de abajo:

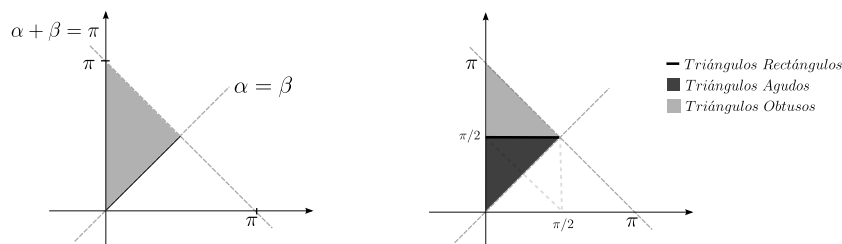


Figura I.5: En este espacio, cada par (α, β) representa los ángulos mayores de un triángulo en el espacio de triángulos.

Podemos ver que la mitad del espacio la ocupan los triángulos obtusos, de los cuales se conoce la respuesta de un conjunto denso pero de medida 0. Así, para la mitad de los triángulos (desde el punto de vista analítico) no se posee respuesta aún.

El problema anterior muestra una buena motivación para el estudio de los billares y su dinámica. En la siguiente sección se muestra otro método del estudio de los billares, el cual es el principal método de estudio actual de los billares y será el usado a lo largo de este trabajo.

II. Billares sobre polígonos y estructuras planas (construcción de Katok-Zemlyakov)

La construcción de Katok-Zemlyakov (la cual denotaremos por K-Z) consiste en asociar una superficie (con estructura plana) a un billar sobre un polígono mediante el proceso de “desdoblamiento” del polígono en el plano y relaciona las trayectorias de billar con el flujo geodésico sobre la superficie asociada (ver Sección IV). Esta idea fué inicialmente abordada por *Ralph H. Fox* y *Richard B. Kershner* [3] en los años 30. Más tarde fueron *Katok* y *Zemlyakov* [8] quienes retomaron la idea que es a quienes habitualmente se les atribuye.

Como ejemplo de la idea de la construcción K-Z consideremos un billar (D, ϕ) con D un cuadrado unitario encajado en \mathbb{R}^2 de manera que podamos orientar su frontera.



Ahora consideremos una trayectoria de billar en D . Cada vez que la trayectoria “choca” con uno de los lados, ésta se refleja con respecto a este lado y continúa. Supongamos entonces que en lugar de reflejar la trayectoria lo que es reflejado es D con respecto a dicho lado. Como los ángulos se preservan entonces la trayectoria sigue en esta nueva copia reflejada en línea recta (Figura I.6).

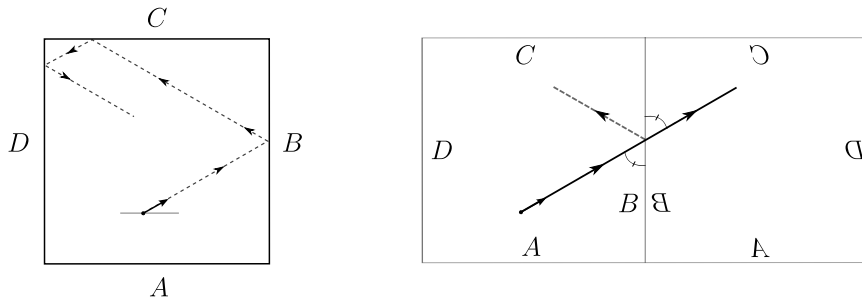
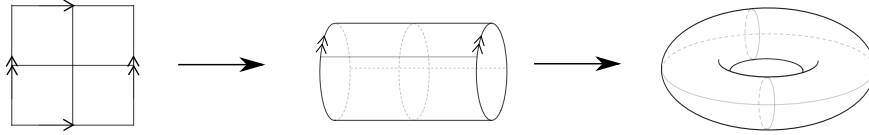


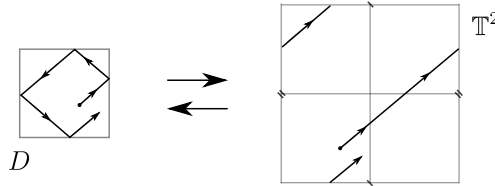
Figura I.6: La trayectoria de billar es reflejada y continúa en línea recta.

Supongamos entonces que seguimos este proceso de manera indefinida reflejando a D a lo largo de sus lados. En este caso no es difícil ver que obtenemos una teselación del plano por copias orientadas de D y que la trayectoria de billar inicial se “desdobla” en una línea recta en este plano. Más aún, hay una región formada por 4 cuadrados que se repite por traslación, teselando el plano. Es entonces natural considerar el espacio cociente de \mathbb{R}^2 por esta región, esto es, un toro teselado por 4 cuadrados unitarios

$$\mathbb{T}_{2(e_1, e_2)}^2 = \mathbb{R}^2 / 2(e_1\mathbb{Z} \oplus e_2\mathbb{Z}).$$



De esta forma, mediante la proyección canónica de \mathbb{R}^2 en $\mathbb{T}_{2(e_1, e_2)}^2$ trayectorias de billar se transforman en geodésicas sobre $\mathbb{T}_{2(e_1, e_2)}^2$ (con respecto a la métrica que $\mathbb{T}_{2(e_1, e_2)}^2$ hereda del plano) y cada geodésica sobre $\mathbb{T}_{2(e_1, e_2)}^2$ se “proyecta” en una trayectoria de billar en D .



Esta idea de asociar una superficie a un billar y pasar el estudio de trayectorias de billar a flujos geodésicos sobre superficies (con estructuras planas) es la idea principal del presente estudio de los billares.

Describimos ahora de manera formal el proceso anterior y la construcción de la superficie.

Definición 4. Sea P un polígono en \mathbb{R}^2 de lados l_1, \dots, l_n y consideremos $\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_n$ las reflexiones asociadas por las rectas $\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_n$ generadas por los lados de P . Definimos

$$R_P := \langle r_1, \dots, r_n \rangle$$

el subgrupo de $Isom(\mathbb{R}^2)$ como **el grupo adjunto a P** generado por r_1, \dots, r_n , donde r_i es la parte lineal de la reflexión \hat{r}_i .

Consideremos entonces el espacio

$$\tilde{M}_P := P \times R_P / \sim,$$

donde

- 1) $(x, r) \sim (x, r) \quad \forall x \in P, r \in R,$
- 2) $(p, r) \sim (q, r') \Leftrightarrow p = q \in l_i \cap l_j \text{ y } r^{-1}r' \in \langle r_i, r_j \rangle.$

Observación 2. *La relación \sim anterior es una relación de equivalencia.*

A los elementos de \tilde{M}_P los denotaremos por $[x, r]$. Tenemos además una proyección natural de \tilde{M}_P sobre P :

$$\begin{aligned} \pi : \tilde{M}_P &\rightarrow P \\ [x, r] &\mapsto x. \end{aligned} \tag{I.3}$$

Tomemos ahora

$$V_P := \{p \in P \mid p \in l_i \cap l_j, i \neq j\}$$

el conjunto de vértices de P . Obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 1. *El conjunto $M_P := \tilde{M}_P \setminus \pi^{-1}(V_P)$ posee una estructura de superficie diferenciable.*

Demostración. Para demostrar la proposición demos un atlas diferenciable para M_P . Tomamos a P con la topología de subespacio heredada de \mathbb{R}^2 y R con la topología discreta. Observemos además que las clases de equivalencia de M_P poseen a los más dos elementos.

- 1) Para $[p, r] \in M_P$ tal que $p \in \text{int } P$ definamos la carta (U_r, φ_r) , con

$$U_r := \{[x, r] \in M_P \mid x \in \text{int}_{\mathbb{R}^2} P\},$$

$$\begin{aligned} \varphi_r : U_r &\rightarrow \hat{r}(\text{int}_{\mathbb{R}^2} P) \subset \mathbb{R}^2 \\ [x, r] &\mapsto \hat{r}(x). \end{aligned}$$

- 2) Tomemos ahora $[p, r] \in M_P$ tal que $p \in l_i$, a este elemento le definimos la carta $(U_{[p,r]}, \varphi_{[p,r]})$, donde

$$U_{[p,r]} := \{[x, s] \in M_P \mid (x, s) \in Q_P \times \{r, rr_i\}\},$$

con Q_P vecindad de p en P tal que $Q_P \cap l_j = \emptyset$, $\forall j \neq i$; y

$$\varphi_{[p,r]} : U_{[p,r]} \rightarrow \hat{r}(Q_P \cup \hat{r}_i(Q_P))$$

$$\varphi_{[p,r]}([x, s]) = \begin{cases} \hat{r}(x) & \text{si } s = r \\ \hat{r}\hat{r}_i(x) & \text{si } s = rr_i. \end{cases}$$

Es claro que las funciones $\varphi_r, \varphi_{[p,r]}$ son biyecciones y $\varphi_{[p,r]}$ está bien definida pues

$$\varphi_{[p,r]}([x, r]) = \hat{r}(x) = \hat{r}\hat{r}_i(x) = \varphi_{[p,r]}([x, rr_i])$$

siempre que $x \in l_i$. Además

$$\left(\varphi_{[p,r]} \circ \varphi_{[q,r]}^{-1}\right)(y) = y, \quad \text{si } U_{[p,r]} \cap U_{[q,r]} \neq \emptyset,$$

y

$$\left(\varphi_{[p,r]} \circ \varphi_{r'}^{-1}\right)(y) = y, \quad \text{si } U_{[p,r]} \cap U_{r'} \neq \emptyset.$$

Por lo tanto el conjunto

$$\mathfrak{A} = \{(U_r, \varphi_r)\}_{r \in R} \cup \{(U_{[p,r]}, \varphi_{[p,r]})\}_{(p,r) \in (\partial P \setminus V_P) \times R}$$

forma un atlas diferenciable para M_P como queríamos probar ■

Hay que observar que la estructura de variedad se hizo sobre M_P y no sobre \tilde{M}_P , sin embargo esta estructura se puede extender a todos los puntos de \tilde{M}_P que bajo π en (I,3) son proyectados a vértices de P con ángulos interiores de la forma π/n . El resto de los puntos de $\tilde{M}_P \setminus M_P$ poseen vecindades que definen cubrientes cíclicos de una vecindad del origen en el plano, dicho cubriente es finito si el ángulo interno al vértice es conmensurable con π .

Observación 3. *En el caso en el que P es un cuadrado, M_P es \mathbb{T}^2 menos cuatro puntos correspondientes a los vértices de P . Sin embargo, en este caso es posible extender la estructura de variedad a todo $\tilde{M}_P = \mathbb{T}^2$.*

Las estructuras anteriormente descritas pertenecen a una familia de estructuras más amplia conocidas como *estructuras planas* y son definidas a continuación.

Definición 5 (Estructuras planas). *Sea M una variedad topológica y ω una colección de cartas para M . Decimos que ω define una estructura plana sobre M o que el par (M, ω) es una estructura plana si*

- (i) El conjunto ω define un atlas diferenciable sobre M menos un conjunto discreto de puntos, cuyos cambios de coordenadas son traslaciones. Dicho conjunto discreto es llamado el conjunto de singularidades de ω y lo denotamos por $Sing(\omega)$.
- (ii) Cada $x \in Sing(\omega) \subseteq M$ posee una vecindad U_x y una función diferenciable en $U_x \setminus \{x\}$ llamada la proyección de x

$$f : U_x \rightarrow V_0 \subseteq \mathbb{R}^2,$$

con V_0 vecindad de $\hat{0} \in \mathbb{R}^2$. La función f es tal que $f(x) = \hat{0}$ y cada punto $y \in V_0 \setminus \{\hat{0}\}$ posee exactamente m_x preimágenes en $U_x \setminus \{x\}$. El número m_x es llamado la multiplicidad de x .

Si $m_x = 1$ para algún $x \in Sing(\omega)$ decimos que x es una singularidad removible pues en este caso la estructura plana puede ser extendida a x . En lo siguiente, cuando hablemos de estructuras planas supondremos que éstas no poseen singularidades removibles a menos que se indique lo contrario.

Observación 4. Lo que hemos obtenido es que a cada billar le podemos asociar una estructura plana mediante K-Z. Sin embargo, no es cierto que toda estructura plana provenga de la construcción de un billar. Por ejemplo, no es cierto que la estructura plana obtenida de hacer las identificaciones que se muestra en la figura de abajo provenga de un billar.

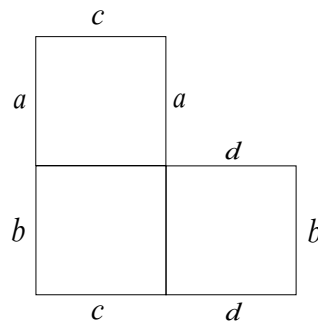


Figura I.7: Estructura plana con una singularidad de ángulo 6π , homeomorfa a un 2-toro.

III. Relaciones geométrico - topológicas

En la sección anterior describimos la construcción de K-Z, ahora nos preguntamos acerca del papel que juegan las propiedades geométricas del polígono P en la topología de su espacio asociado \tilde{M}_P . Por ejemplo, el Lema 1 muestra que el grupo adjunto de un polígono P está únicamente determinado hasta isomorfismo por conjugación y como consecuencia obtenemos la topología de su espacio asociado \tilde{M}_P no depende del encaje específico de P (como cabría esperar). Por otra parte, la Proposición 3 caracteriza el espacio \tilde{M}_P (hasta equivalencia topológica) cuando el grupo adjunto a P es finito.

Definición 6. Sea $P \subseteq \mathbb{R}^2$ polígono de lados l_1, \dots, l_n y α_{ij} el ángulo que forma la recta \hat{l}_i con respecto a \hat{l}_j . Llamamos a $\{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^n$ el conjunto de ángulos relativos de P .

Tenemos la siguiente proposición la cual demostraremos posteriormente:

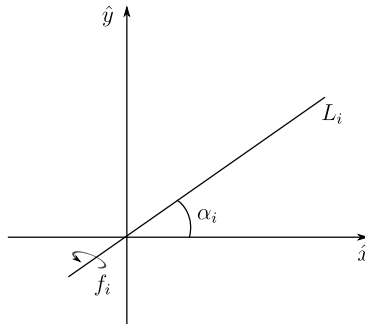
Proposición 2. El espacio topológico \tilde{M} dotado con la topología cociente es compacto si y sólo si $\alpha_{ij} \in \pi\mathbb{Q}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$.

La proposición anterior se reduce a la siguiente pregunta:

“Dadas L_1, \dots, L_n n rectas por el origen en \mathbb{R}^2 y f_1, \dots, f_n las reflexiones con respecto a éstas ¿cuándo es finito el subgrupo de isometrías generado por f_1, \dots, f_n ?”

Consideremos α_i el ángulo que forma la recta L_i con el eje \hat{x} y supongamos (sin pérdida de generalidad) que L_1 coincide con dicho eje. Tenemos que

$f_i = R_{\alpha_i} A R_{\alpha_i}^{-1}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, donde en general $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.



Lema 1. *El subgrupo F es finito si y sólo si $\alpha_i \in \pi \mathbb{Q}$, $i = 1, \dots, n$. Además, si $\alpha_i = \frac{p_i}{q_i} \pi \in \mathbb{Q} \pi$ (p_i, q_i primos relativos), entonces $F \cong D_{2q}$, con $q = \text{mcm}(q_1, \dots, q_n)$ y D_{2q} el grupo diédrico de orden $2q$.*

Demostración. Primero hay que observar que tenemos las relaciones

$$f_i = R_{\alpha_i} A R_{\alpha_i}^{-1} = A R_{2\alpha_i}^{-1} = R_{2\alpha_i} A.$$

Ahora, como supusimos que L_1 coincide con el eje \hat{x} de modo que $f_1 = A$. Entonces

$$\begin{aligned} F &= \langle A, R_{2\alpha_2} A, \dots, R_{2\alpha_n} A \rangle \\ &= \langle A, R_{2\alpha_2}, \dots, R_{2\alpha_n} \rangle \end{aligned}$$

ya que $A^2 = I$. Y por lo tanto

(\Rightarrow) Si suponemos que $\alpha_{i_0} \notin \pi \mathbb{Q}$ para algún $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$$|\langle R_{\alpha_{i_0}} \rangle| > m, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

y por lo tanto F no puede ser finito pues $\langle R_{\alpha_{i_0}} \rangle \leq F$.

(\Leftarrow) Ahora, si $\alpha_i = \frac{p_i}{q_i} \pi$; $p_i, q_i \in \mathbb{N}$ para cada $i = 1, \dots, n$. Tomamos $q = \text{mcm}\{q_1, \dots, q_n\}$ y entonces

$$\forall q_i \exists k_i \in \mathbb{N} \text{ tal que } q = k_i q_i.$$

Definimos a continuación $p = \text{MCD}(k_1 p_1, \dots, k_n p_n)$. Así obtenemos que

$$F = \langle A, R_{2\alpha} \rangle, \text{ con } \alpha = \frac{p}{q} \pi.$$

Primero, es claro que $R_{2\alpha} \in F$ y por lo tanto $\langle A, R_{2\alpha} \rangle \leq F$ pues como $p = \text{MCD}(k_1 p_1, \dots, k_n p_n)$ entonces existen $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$p = \sum_{i=1}^n s_i (k_i p_i)$$

tenemos que

$$\frac{p}{q} = \sum_{i=1}^n \frac{s_i k_i p_i}{q} = \sum_{i=1}^n s_i \left(\frac{p_i}{q_i} \right).$$

Por otro lado, para ver que $F \leq \langle A, R_{2\alpha} \rangle$ basta ver que $R_{2\alpha_i} \in \langle A, R_{2\alpha} \rangle$ para cada i y esto pasa ya que $p \mid k_i p_i$ y entonces existe $m_i \in \mathbb{Z}$ tal que $m_i p = k_i p_i$.

Así

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{k_i p_i}{q} = m_i \frac{p}{q}.$$

Por lo tanto $F = \langle A, R_{2\alpha} \rangle$. Además tenemos las relaciones

$$A^2 = 1, R_{2\alpha}^q = 1, \text{ y } AR_{2\alpha}A^{-1} = R_{2\alpha}^{-1},$$

lo cual nos dice que F es isomorfo al diédrico de orden $2q$, D_{2q} i.e

$$F \cong D_{2q} \text{ y } |F| = 2q < +\infty \blacksquare$$

Observación 5. Si el conjunto $\{L_i\}$ anterior fuera tal que L_1 no coincidiera con el eje \hat{x} y su ángulo con respecto a éste es β , entonces podemos tomar la rotación de todas las rectas por un ángulo $-\beta$. De forma que obtengamos $\{L'_i\}$ otro conjunto de rectas con L'_1 coincidiendo con el eje \hat{x} y entonces

$$F = R_\beta \tilde{F} R_\beta^{-1}.$$

Con \tilde{F} el grupo generado por las reflexiones asociadas al conjunto $\{L'_i\}$. De esta forma el enunciado del lema anterior se conserva para cualesquiera rectas $\{L_i\}$.

Demos ahora la demostración de la Proposición 2.

Demostración. (Proposición 2) Como el grupo adjunto a P , R_P , no cambia (salvo isomorfismo por conjugación) por una rotación de P ; podemos suponer que uno de los lados de P está sobre el eje \hat{x} .

Para demostrar la proposición, basta considerar las traslaciones al origen de las rectas generadas por lados de P , llamémoslas L_1, \dots, L_n . Después observar que si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son los ángulos que hacen estas rectas con el eje \hat{x} entonces

$$\{\alpha_i\}_{i=1}^n \in \pi \mathbb{Q} \Leftrightarrow \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^n \in \pi \mathbb{Q},$$

ya que cada α_{ij} se puede escribir como combinación lineal de los α_i sobre \mathbb{Z} y viceversa. Debido a esto los grupos generados por los α_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ y los α_i , $i = 1, \dots, n$ coinciden, i.e.

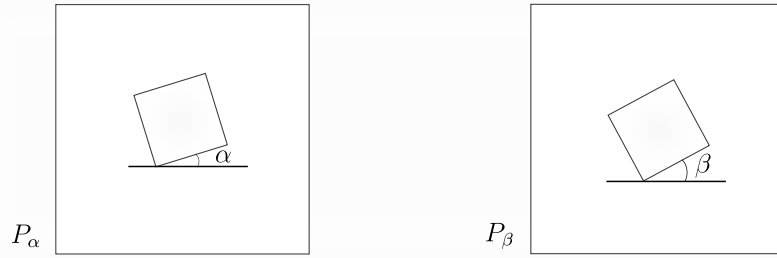
$$\langle \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^n \rangle = \langle \{\alpha_k\}_{k=1}^n \rangle = R_P,$$

y entonces la proposición es inmediata a partir del Lema 1 y la Observación 5 ■

Observamos de la demostración y el lema anteriores que como anunciamos la topología de \tilde{M}_P no depende del encaje específico de P en el plano y que su grupo adjunto R_P está únicamente determinado hasta isomorfismo por conjugación.

La proposición anterior ilustra la relación que hay entre la geometría del polígono y la topología de su espacio asociado \tilde{M}_P mediante K-Z y muestra cuán sensible puede ser ésta a la geometría del polígono (ver Ejemplo 5).

Ejemplo 5. Consideremos los octágonos P_α , P_β que se muestran abajo



y tomemos α y β tan cercanos como se quiera, pero de manera que $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$ y $\beta \notin \pi\mathbb{Q}$. Entonces

$$\begin{aligned}\tilde{M}_\alpha &= P_\alpha \times R_\alpha / \sim; \quad \tilde{M}_\alpha \text{ es compacta,} \\ \tilde{M}_\beta &= P_\beta \times R_\beta / \sim; \quad \tilde{M}_\beta \text{ no es compacta.}\end{aligned}$$

Esto muestra que aún cuando los polígonos son muy “cercanos” podemos tener que las topologías cambian de forma drástica.

Hay cierto tipo de polígonos los cuales reciben un nombre especial.

Definición 7. Decimos que un polígono P es racional si sus ángulos interiores son múltiplos racionales de π .

Observación 6. Si P polígono es simplemente conexo entonces su grupo adjunto R_P es finito si y sólo si P es racional. En general R_P finito implica P racional pero la implicación inversa no es cierta en general como se ilustró en el ejemplo anterior.

La proposición siguiente muestra que para el caso de polígonos racionales P , sus ángulos interiores determinan completamente la topología de su espacio asociado \tilde{M}_P .

Proposición 3. Sea P un polígono con ángulos interiores $\alpha_i = \frac{p_i}{q_i}\pi$ (p_i, q_i primos relativos), $i = 1, \dots, n$ cuyo grupo adjunto R_P es finito. Entonces el género de su espacio asociado $\tilde{M}_P = P \times R_P / \sim$ está dado por

$$g_{\tilde{M}_P} = (1 - q) + \frac{q}{2} \left(n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{q_i} \right),$$

con $q = \text{mcm}(q_1, \dots, q_n)$.

Demostración. Consideremos la triangulación natural por polígonos sobre \tilde{M} generada por P y recordemos que la característica de Euler está dada por

$$\chi_{\tilde{M}_P} = C - A + V,$$

con C, V, A el número de caras, vértices y aristas de la triangulación respectivamente. Ahora, aunque χ está definida para una triangulación, ésta se conserva para la división de \tilde{M}_P en polígonos pues P posee una triangulación natural. Sabemos que

$$\begin{aligned} C &= |R| = 2q, \\ A &= \frac{n|R|}{2} = nq, \\ V &= \sum_{i=1}^n \frac{q}{q_i} = q \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} \end{aligned}$$

(ver Lema 1 y Proposición 2) y entonces

$$\chi_{\tilde{M}_P} = q \left(2 - n + \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} \right). \quad (\text{I.4})$$

Además

$$g_{\tilde{M}_P} = \frac{1}{2} \left(2 - \chi_{\tilde{M}_P} \right). \quad (\text{I.5})$$

Así, sustituyendo (I.4) en (I.5) y reagrupando tenemos que

$$g_{\tilde{M}_P} = (1 - q) + \frac{q}{2} \left(n - \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} \right),$$

como deseábamos mostrar ■

Para terminar esta sección demos un par de ejemplos en los que utilizamos la proposición anterior para calcular el espacio \tilde{M}_P asociado a un polígono P .

Ejemplo 6. (1) Supongamos P es un cuadrado entonces $\alpha_i = \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2, 3, 4$ y

$$g_{\tilde{M}_P} = (1 - 2) + \left(4 - \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} \right) = 1$$

i.e. \tilde{M}_P es homeomorfa a un toro, lo cual ya sabíamos antes.

(2) Ahora calculemos el género de \tilde{M}_P con P un triángulo de ángulos $(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8})$. Aquí

$$g_{\tilde{M}_P} = (1 - 8) + 4 \left(3 - \frac{3}{4} \right) = 2$$

el cual no es el mismo que para el triángulo de ángulos $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8})$ para el cual $g = 3$, a pesar de que este último se compone de dos copias del primero pegadas por un arista (la diferencia radica en la orientación, ver Figura 6).

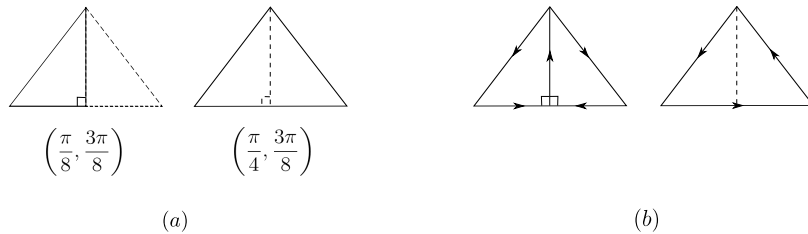
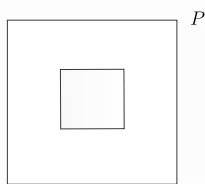


Figura I.8: (a) El triángulo $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8})$ compuesto de dos copias del triángulo $(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8})$. (b) Orientación de dos copias del triángulo $(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8})$ pegados por una arista y del triángulo $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8})$.

(3) Por último, si P es un cuadrado al cual se le ha extraído un cuadrado de su interior, $\alpha_i = \frac{\pi}{2}$, $i = 1, \dots, 4$ y $\alpha_j = \frac{3\pi}{2}$, $j = 5, \dots, 8$ y entonces

$$g_{\tilde{M}_P} = (1 - 2) + \left(8 - \sum_{i=1}^8 \frac{1}{2} \right) = 3$$



el cual no es equivalente al del toro como cabría esperar pues la dinámica dentro es muy distinta a la de éste.

IV. Relaciones dinámicas: flujo geodésico y trayectorias de billar.

En la Sección I hablamos del sistema dinámico asociado a un billar. En esta sección nuestro objetivo principal será profundizar en la relación que guarda el sistema dinámico de un billar y el flujo geodésico sobre su superficie asociada mediante K-Z.

Tomemos P un polígono y M_P su superficie asociada mediante la construcción K-Z. Como los cambios de coordenadas para una estructura plana son traslaciones entonces su haz tangente es trivial. Así

$$T^1M_P := \{v \in TM_P \mid g(v, v) = 1\} \cong M_P \times \mathbb{S}^1,$$

con g la métrica plana inducida por \mathbb{R}^2 sobre M_P . Ahora, el grupo R asociado a M_P define una acción sobre M_P por

$$\begin{aligned} R \times M_P &\rightarrow M_P \\ (r, [p, r']) &\mapsto [p, rr'] \end{aligned}$$

y actúa también sobre \mathbb{S}^1 por

$$\begin{aligned} R \times \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ (r, s) &\mapsto r(s). \end{aligned}$$

Por lo que R puede ser visto como una acción sobre el haz tangente unitario a M_P

$$\begin{aligned} R \times T^1M_P &\rightarrow T^1M_P \\ (r, (m, s)) &\mapsto (r \cdot m, r(s)). \end{aligned}$$

Definimos entonces

$$\widehat{M}_P := T^1M_P/R$$

el espacio de órbitas de T^1M_P bajo esta acción cuyos elementos denotaremos por $[m, s]_R$. Tenemos además la proyección

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} : T^1M_P &\rightarrow \widehat{M}_P \\ (m, s) &\mapsto [m, s]_R. \end{aligned}$$

Ya que hemos definido los espacios adecuados para trabajar podemos entonces establecer algunos resultados.

Lema 2. *Existe una biyección entre el espacio fase del billar (P, ϕ) , \widehat{D}_P y \widehat{M}_P .*

Demostración. Definamos

$$\varphi : \widehat{D}_P \rightarrow \widehat{M}_P, \quad \varphi \left([p, s]_\phi \right) = [[p, 1], s]_R$$

y

$$\psi : \widehat{M}_P \rightarrow \widehat{D}_P, \quad \psi \left([[p, r], s]_R \right) = [p, r^{-1}(s)]_\phi.$$

Tenemos que $\psi = \varphi^{-1}$ ■

Lema 3. *La biyección $\widehat{D}_P \simeq \widehat{M}_P$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Consideremos ψ, φ como en el lema anterior y recordemos que los espacios \widehat{D}_P y \widehat{M}_P poseen la topología cociente.

1) ψ es continua. Tomemos $U \subseteq \widehat{D}_P$ abierto, entonces el conjunto

$$\tilde{U} := \left\{ (p, \eta) \in P \times \mathbb{S}^1 \mid [p, \eta]_\phi \in U \right\} \quad (\text{I.6})$$

es abierto. Por otra parte

$$\psi^{-1}(U) = \left\{ [[p, r], \nu]_R \in \widehat{M}_P \mid [p, r^{-1}(\nu)]_\phi \in U \right\}$$

es abierto si

$$U_1 := \left\{ ([p, r], \nu) \in M \times \mathbb{S}^1 \mid [p, r^{-1}(\nu)]_\phi \in U \right\}$$

es abierto y éste es abierto si el conjunto

$$U_2 := \left\{ (p, r, \nu) \in P \times R_P \times \mathbb{S}^1 \mid [p, r^{-1}(\nu)]_\phi \in U \right\}$$

es abierto. Pero R_P posee la topología discreta y

$$U_2 = \bigcup_{r \in J \subseteq R_P} \left(\left\{ (p, \nu) \in P \times \mathbb{S}^1 \mid [p, r^{-1}(\nu)]_\phi \in U \right\} \times \{r\} \right)$$

para algún $J \subseteq R_P$. Por lo tanto por (I.6), U_2 y entonces $\psi^{-1}(U)$ son abiertos pues la acción de un $r \in R_P$ sobre \mathbb{S}^1 es continua. Por lo que ψ es continua.

2) φ es continua. Tomemos ahora $V \subseteq \widehat{M}_P$ abierto, entonces

$$\tilde{V} := \bigcup_{r \in I \subseteq R_P} (\{(p, \nu) \in P \times \mathbb{S}^1 \mid [[p, r], \nu]_R \in V\} \times \{r\}) \quad (\text{I.7})$$

es abierto. Ahora,

$$\varphi^{-1}(V) = \{[p, \nu]_\phi \in \widehat{D}_P \mid [[p, 1], \nu]_R \in V\}$$

es abierto si

$$V_1 := \{(p, \nu) \in P \times \mathbb{S}^1 \mid [[p, 1], \nu]_R \in V\}$$

es abierto. Pero V_1 puede ser visto como

$$V_1 = \bigcup_{r \in I \subseteq R_P} \{(p, r^{-1}(\nu)) \in P \times \mathbb{S}^1 \mid [[p, r], \nu]_R \in V\}$$

el cual es abierto por (I.7) y de nuevo por la continuidad de la acción de cada $r \in R_P$ sobre \mathbb{S}^1 . Por lo tanto φ es continua. ■

Ahora mostramos que las curvas geodésicas de M_P se proyectan en trayectorias de billar sobre P .

Lema 4. *Sea $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow T^1 M_P$ una geodésica. Entonces la curva*

$$\psi \circ \mathbf{p} \circ g : I \rightarrow \widehat{D}_P$$

es una trayectoria de billar.

Demostración. Sea $\hat{g} := \mathbf{p} \circ g$ y tomemos

$$g : I \rightarrow T^1 M_P \cong M_P \times \mathbb{S}^1, \quad g(t) = ([p(t), r(t)], s(t)) = (m(t), s(t))$$

geodésica, entonces

$$\frac{dm}{dt}(t) = s(t), \quad \frac{ds}{dt}(t) = 0 \quad (\text{I.8})$$

para todo $t \in I$.

Observemos que si $m(t_0) = [p(t_0), r(t_0)] = [p_0, r_0]$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt}(t_0) &= r_0 \left(\frac{dp}{dt}(t_0) \right) && \text{si } p_0 \in \text{int } P, \\ \frac{dm}{dt}(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0^+} r_0 \left(\frac{dp}{dt}(t) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0^-} r_0 r_i \left(\frac{dp}{dt}(t) \right) && \text{si } p_0 \in l_i \subseteq \partial P. \end{aligned} \tag{I.9}$$

De esta forma $\hat{g} = [[p(t), r(t)], s(t)]_R$ y

$$\psi(\hat{g})(t) = [p(t), r^{-1}(t)(s(t))]_{\phi}.$$

Para ver que $\psi(\hat{g})$ es una trayectoria de billar solo hay que ver que la curva $p : I' \subseteq I \rightarrow P$ cumple que para todo $t \in I'$

- 1) $\frac{dp}{dt}(t) = r^{-1}(t)(s(t))$,
- 2) $\frac{d}{dt}r^{-1}(t)(s(t)) = 0$.

Pero esto es claro a partir de las ecuaciones (I.8) y (I.9). Por lo tanto $\psi(\hat{g})$ es una trayectoria de billar ■

Por último probemos que toda trayectoria de billar sobre P se puede “levantar” a una geodésica sobre M_P .

Proposición 4. *Sea $\hat{\gamma} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \widehat{D}_P$ una trayectoria de billar. Entonces existe $g : I \rightarrow T^1M_P$ geodésica tal que*

$$\psi(\hat{\gamma}) = \hat{\gamma},$$

con $\hat{g} = \mathbf{p} \circ g$, como antes.

Demostración. Sea $\hat{\gamma}(t) = [\gamma(t), s(t)]_{\phi}$ una trayectoria de billar, queremos ver que existe g geodésica de M tal que

$$\varphi(\hat{\gamma}) = \mathbf{p} \circ g,$$

con

$$\varphi(\hat{\gamma})(t) = [[\gamma(t), 1], s(t)]_R. \tag{I.10}$$

Una primera propuesta es la función

$$\tilde{g}(t) = ([\gamma(t), 1], s(t)) = (m(t), s(t))$$

ya que

$$\frac{dm}{dt}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = s(t), \quad \frac{ds}{dt}(t) = 0, \quad \forall t \in I'$$

por hipótesis. Sin embargo no podemos asegurar siquiera continuidad para \tilde{g} en los puntos $t \in I \setminus I'$ y por lo tanto $\frac{d\gamma}{dt}$ y $\frac{ds}{dt}$ pueden no existir en dichos puntos. Para construir la curva que necesitamos tomemos

$$\Delta_I := \{t_i\}_{i \in J} = \hat{\gamma}^{-1}(\hat{\pi}^{-1}(\partial P)), \quad J \subseteq \mathbb{N},$$

tal que $t_i < t_j$ si $i < j$ y $t_0 = 0$. Definimos entonces

$$g : I \rightarrow T^1 M_P, \\ g(t) = ([\gamma(t), r(t)], r(t)(s(t))) =: (m(t), \tau(t)),$$

con $r(t) = r_{i_0} r_{i_1} \cdots r_{i_m}$ siempre que $t \in [t_m, t_{m+1})$. Aquí $r_{i_0} = 1$ y r_{i_k} corresponde a la reflexión asociada al lado de P , l_{i_k} , tal que $\gamma(t_k) \in l_{i_k}$.

Mostremos que g es una geodésica:

- a) *g es continua*: como $r(t)$, $s(t)$ son localmente constantes para todo $t \in I$ tal que $\gamma(t) \in \text{int } P$, g es continua por hipótesis en estos puntos. Así que sólo basta mostrar continuidad en los puntos $t \in \Delta_I$. Sea $t_k \in \Delta_I$, $\gamma(t_k) \in l_{i_k}$, tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow t_k^+} g(t) = ([\gamma(t_k), r_{i_0} r_{i_1} \cdots r_{i_k}], r_{i_0} r_{i_1} \cdots r_{i_k}(s(t'_1))), \\ \text{con } t'_1 \in (t_k, t_k + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0 \text{ adecuado;} \\ \lim_{t \rightarrow t_k^-} g(t) = ([\gamma(t_k), r_{i_0} r_{i_1} \cdots r_{i_{k-1}}], r_{i_0} r_{i_1} \cdots r_{i_{k-1}}(s(t'_2))), \\ \text{con } t'_2 \in (t_k - \varepsilon, t_k).$$

Pero como $\gamma(t_k) \in l_{i_k}$ entonces $r_{i_k}(s(t'_1)) = s(t'_2)$ y entonces $g(t)$ es continua.

- b) *g es diferenciable*: al igual que antes, para todo $t \in I$ tal que $\gamma(t) \in \text{int } P$ g es diferenciable y más aún, cumple con las condiciones de geodésica. Sea $t_k \in \Delta_I$, $\gamma(t_k) \in l_{i_k}$, por hipótesis y las ecuaciones (I.9)

$$\lim_{t \rightarrow t_k^+} \frac{dm}{dt}(t) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} r(t) \left(\frac{d\gamma}{dt}(t) \right) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} r(t)(s(t))$$

y

$$\lim_{t \rightarrow t_k^+} \frac{dm}{dt}(t) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} r(t) \left(\frac{d\gamma}{dt}(t) \right) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} r(t) (s(t)) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} \tau(t).$$

Así por continuidad estos límites coinciden y $m(t)$ es diferenciable. Por último, para ver que $\tau(t)$ es diferenciable basta notar que de hecho es constante.

Los incisos $a)$ y $b)$ muestran no sólo que g es una curva lisa sino que es una geodésica como se deseaba.

Falta mostrar que $\varphi(\hat{\gamma}) = \mathfrak{p} \circ g$, pero esto es claro a partir de la ecuación (I.10) y la definición de g ■

Observemos que la geodésica de la proposición anterior no es única, sin embargo la curva $\varphi(\hat{\gamma})$ sobre \widehat{M}_P si es única. Así, podemos ver al espacio \widehat{M}_P como el espacio que “empaqueta” todas estas curvas geodésicas en una sola. En este sentido decimos que \widehat{M}_P y \widehat{D}_P son sistemas dinámicos equivalentes y que el flujo geodésico sobre M_P contiene toda la información de la dinámica sobre el billar (P, ϕ) .

CAPÍTULO II

TRANSFORMACIONES DE INTERCAMBIO DE INTERVALOS Y ESTRUCTURAS PLANAS.

En el presente capítulo abordamos el concepto de transformación de intercambio de intervalos el cual nos será de suma utilidad para el estudio del flujo geodésico sobre una superficie compacta con estructura plana (por ejemplo, ver [7], sec. 14). En lo que sigue del texto, cuando hablemos de una estructura plana asumiremos que ésta es compacta pues es en estas condiciones que el teorema de la dicotomía de Veech es enunciado.

En la primera sección presentamos el concepto de transformación de intercambio de intervalos y algunos resultados correspondientes al comportamiento de estas transformaciones. Después, en la segunda sección nos enfocamos a cómo dichas transformaciones aparecen de manera natural al estudiar el flujo geodésico asociado a una estructura plana.

I. Nociones básicas sobre transformaciones de intercambio de intervalos.

Comencemos definiendo lo que entenderemos por una transformación de intercambio de intervalos, lo cual abreviaremos como *III*.

Definición 8. *Una transformación de intercambio de n -intervalos es una terna (I, E, T) , donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, $E = \{a_i\}_{i=0}^n \subseteq I$ es un subconjunto finito tal que $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ y*

$$T : I \setminus E \rightarrow I$$

es una función inyectiva tal que T restringida a (a_{i-1}, a_i) es una traslación para cada $i = 1, \dots, n$.

Algunas veces cuando hablemos de una transformación de intercambio de intervalos (I, E, T) nos referiremos a ella por T asumiendo que I y E están implícitos en la definición de T . También asumimos que los puntos de E son puntos de discontinuidad de T en el sentido de que T no puede ser extendida a un punto de E sin perder continuidad, y decimos que T no está definida en estos puntos.

Lema 5. Si T es una *TII* entonces T^k es una *TII* para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Basta demostrar que T^k es una *TII* para todo $k > 0$ y para $k = -1$.

- i) Para $k > 0$ actuamos por inducción: el caso $k = 1$ es por hipótesis, así que asumamos que T^k es una *TII* y probemos que T^{k+1} lo es. Pero si (I, E_k, T^k) es una *TII* basta definir

$$E_{k+1} := E_k \cup (I \setminus T^k(I \setminus E_k)).$$

Entonces tenemos que (I, E_{k+1}, T^{k+1}) es una *TII*.

- ii) Para el caso $k = -1$ tomamos $E_{-1} := I \setminus T(I \setminus E)$ de forma que $T : I \setminus E \rightarrow I \setminus E_{-1}$ es una biyección, con lo cual T^{-1} está definida y (I, E_{-1}, T^{-1}) es una *TII* ■

Observación 7. Hay que notar que

- (1) para cada $k \in \mathbb{Z}, x \in I \setminus E$ existe $\varepsilon > 0$ tal que T^k restringido a $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ es una traslación,
(2) T^k está definida para todo $k \in \mathbb{Z}$ en todo I salvo en un conjunto a lo más numerable.

Como mencionamos antes, los puntos de E son puntos de discontinuidad de T y por lo tanto no son considerados dentro de su dominio. Sin embargo, a cada $a_i \in E$ se le pueden asociar el par de puntos α_i^+, α_i^- definidos por

$$\alpha_i^\pm := \lim_{x \rightarrow a_i^\pm} T(x).$$

Podemos pensar a a_i como teniendo dos “colas” y α_i^\pm la imagen de dichas “colas”.

Definición 9. Decimos que una TII, (I, E, T) , posee conexiones de silla si para algún $a_i \in E$ existen $a_j \in E$, y $k > 0$ tal que

$$T^k \alpha_i^+ = a_j \quad (\text{o } T^k \alpha_i^- = a_j)$$

pero $T^l \alpha_i^+ \in I \setminus E$ (correspondientemente $T^l \alpha_i^- \in I \setminus E$) para todo $0 < l < k$. En tal caso decimos que el conjunto $\{a_i, \alpha_i^+, T\alpha_i^+, \dots, T^k \alpha_i^+ = a_j\}$ es un segmento conectante de T . Así, el conjunto

$$C(T) := \{x \in I \mid \exists n_1 < 0, n_2 > 0, \text{ con } T^{n_1}x, T^{n_2}x \in E\}$$

es la colección de todos los elementos de los segmentos conectantes de T .

Lema 6. Sea (I, E, T) una TII, entonces el número de segmentos conectantes de T es finito y menor o igual a $2(|E| - 1)$.

Demostración. La demostración es inmediata a partir del hecho de que para cada $a_j \in E$ hay a lo más dos segmentos conectantes que parten de él, excepto para a_0 y a_n para los cuales hay a lo más uno. Así el número de segmentos conectantes no es mayor a $2|E| - 2$ como queríamos probar ■

El lema anterior aunque simple es muy importante y nos servirá para estudiar el comportamiento dinámico de una TII.

Definición 10. Sea T una TII, decimos que un subintervalo $\Delta \subseteq I$ es rígido si $T^k x$ está definido para todo $x \in \Delta$ y toda $k > 0$. Decimos que un intervalo rígido Δ es maximal si cualquier otro intervalo rígido que lo interseca está contenido en Δ . Llamamos a un punto $x \in I$ genérico si $T^k x$ está definido para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Usando la terminología definida podemos entonces reformular la observación 7 como:

Observación 8. Todo punto salvo un conjunto a lo más numerable de una TII es genérico.

El siguiente lema muestra que todo intervalo rígido está formado por puntos periódicos.

Lema 7. Sea $T : I \setminus E \rightarrow I$ una TII y $\Delta \subseteq I$ un subintervalo rígido. Entonces para cada $x \in \Delta$ existe $k_x \in \mathbb{Z}$ tal que $T^{k_x} x = x$. Si además Δ es maximal entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $T^k x = x$ para todo $x \in \Delta$ y sus puntos extremos pertenecen a $C(T)$.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que Δ es maximal. Como Δ es rígido entonces podemos considerar $T^k\Delta$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Ahora, si

$$T^k\Delta \cap \Delta = \emptyset \quad \forall k \geq 0$$

entonces

$$T^k\Delta \cap T^m\Delta = \emptyset \quad \forall k, m \geq 0.$$

Pero esto no puede ser pues la medida de Lebesgue μ de Δ es positiva y T^k es una isometría sobre Δ para cada $k \geq 0$. Entonces

$$\mu(I) \geq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T^k\Delta\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Delta)$$

lo cual no puede pasar ya que $\mu(I) < \infty$. Así que para algún $k > 0$

$$T^k\Delta = \Delta$$

y por lo tanto $T^k = id$ en Δ pues T^k es una traslación. Ahora, sean a y b los puntos extremos de Δ y supongamos que $T^l a$ está definido para todo $0 < l \leq k$, entonces (por observación 7) existe $\varepsilon > 0$ tal que $T^k = id$ sobre $(a - \varepsilon, b)$ por continuidad. Esto contradice la maximalidad de Δ y por lo tanto $T^l a$ no está definido para algún $0 < l \leq k$ y lo mismo para b por simetría.

Para ver que lo mismo pasa para algún $-k \leq l < 0$ sólo hay que notar que T^m está bien definido sobre Δ para todo $m < 0$ por ser periódica y utilizar el argumento anterior. Por lo tanto Δ debe ser abierto y $a, b \in C(T)$ ■

Corolario 1. *Si $\Delta \subseteq I$ es un intervalo rígido entonces $T^k x$ está definido para todo $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \Delta$.*

De la demostración del lema anterior y el lema 6 podemos ver que el número de subintervalos rígidos para una *TII* no excede a $2(|E| - 1)$.

Recordemos ahora el teorema de recurrencia de Poincaré ([7], pag. 143):

Teorema 3 (Recurrencia de Poincaré). *Sea (X, μ) un espacio de probabilidad, $T : X \rightarrow X$ una transformación que preserva la medida μ y $A \subseteq X$ un conjunto medible de medida positiva. Entonces para todo $N \in \mathbb{N}$*

$$\mu\left(\left\{x \in A \mid \{T^k x\}_{k \geq N} \subseteq X \setminus A\right\}\right) = 0.$$

El teorema anterior nos dice que para una transformación que preserva μ , el conjunto de puntos $x \in A$ que regresa eventualmente a A tiene medida total en A , *i.e.*

$$\mu(\{x \in A \mid T^k x \in A \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}) = \mu(A).$$

Con ayuda de este teorema podemos estudiar la función de primer retorno de una *TII*. Ésta nos ayudará en el estudio de la dinámica de una *TII*.

Definición 11 (Función del Primer Retorno). *Sea (I, E, T) una TII y $\Delta \subseteq I$ un subintervalo. T induce la función*

$$T_\Delta : D_0 \subseteq \Delta \rightarrow \Delta$$

con D_0 el dominio de T_Δ . Dicha función está definida por $T_\Delta x = y$ si existe $m > 0$ (ó $m < 0$) tal que $T^m x \in \Delta$ y en tal caso tomamos $y = T_\Delta x = T^k x$ con k el mínimo (máximo) con esta propiedad.

Por el teorema anterior T_Δ está definida casi dondequiera y es llamada la *función del primer retorno*. El siguiente lema muestra que la estructura de *TII* es heredada por la función del primer retorno.

Lema 8. *Sea T una TII y $\Delta \subseteq I$ un subintervalo. Entonces la función del primer retorno T_Δ es una TII.*

Demostración. Por el teorema de recurrencia de Poincaré T_Δ está definida sobre un conjunto de medida total en Δ y entonces denso. Tomemos $x \in \text{int } \Delta$ tal que $T_\Delta x = y = T^k x \in \text{int } \Delta$ (todo punto en el dominio de T_Δ cumple esto salvo a lo más 4 puntos). Tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $T^k \big|_{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}$ es una traslación. Elijamos

$$\delta = \frac{1}{2} \min \{ \varepsilon, d(y, I \setminus \Delta) \}.$$

Entonces $T^k \big|_{(x-\delta, x+\delta)}$ es una traslación y $T^k(x - \delta, x + \delta) \subseteq \Delta$. Esto prueba que T_Δ está definido sobre un conjunto abierto y es localmente una traslación pues localmente coincide con T^l para algún l . Con lo cual basta mostrar que el conjunto de puntos de discontinuidad de T_Δ es finito.

Consideremos Λ subintervalo maximal tal que T_Δ está definida en él y es continua, tomemos z su extremo izquierdo. Esto implica que $T_\Delta = T^k$ en $(z, z + \sigma)$ para algún $\sigma > 0$. Si $T^l z$ estuviera definida para todo $0 \leq l \leq k$ y $T^l z \in \Lambda$ entonces existiría $\varepsilon > 0$ tal que $T_\Delta = T^k$ sobre $(z - \varepsilon, z + \sigma)$, lo cual

contradice la maximalidad de Λ . Por lo tanto $T_\Delta z$ debe ser un punto de E .

Además si $x, y \in \Delta$ son puntos tales que T_Δ está definida y $T^i x, T^j y \in E$ y $T^i x = T^j y$ entonces $x = y$. Así a cada punto de Δ donde T_Δ no está definido le corresponde a lo más un punto de discontinuidad de T o un extremo de Δ . Por lo tanto el conjunto de puntos donde T_Δ no está definido es finito y T_Δ es una *TII* ■

Corolario 2. *Todo punto genérico de una TII es recurrente i.e. es punto de acumulación de su órbita.*

Demostración. Sea $x \in I$ un punto genérico y $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta \leq \varepsilon/2$ tal que $\Delta := (x - \delta, x + \delta) \subseteq I \setminus E$ y consideremos T_Δ . Por la prueba del lema anterior $T_\Delta x$ está definido, por que de no estarlo sería un punto de discontinuidad de T (lo cual no se puede ya que x es genérico) ó $T_\Delta x$ es un punto extremo de Δ en cuyo caso $d(x, T_\Delta x) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Por lo tanto x es recurrente ■

El hecho de que la estructura de *TII* se herede a la función del primer retorno trae importantes consecuencias, por ejemplo:

Lema 9. *El complemento de la cerradura de la órbita de un punto genérico no periódico es un número finito de intervalos abiertos ajenos cuyos puntos extremos pertenecen a segmentos conectantes.*

Demostración. Sea $x \in I$ punto genérico no periódico y definamos

$$\Gamma = \overline{\{T^m x\}_{m \in \mathbb{Z}}}$$

tenemos que

$$I \setminus \Gamma = \bigsqcup_{\alpha \in A} \Delta_\alpha,$$

con cada Δ_α un subintervalo abierto. Deseamos mostrar que $|A| < +\infty$. Tomemos $\Delta_\alpha = (a, b)$ y consideremos T_{Δ_α} . Sabemos que $T_{\Delta_\alpha} = T^k$ sobre $(a, a + \varepsilon) \subseteq \Delta_\alpha$ para algunos $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $T^l a$ no está definida para algún $0 < l \leq k$. En efecto, si suponemos lo contrario tenemos dos casos:

- 1) Si $T^k a = \lim_{x \rightarrow a^+} T_{\Delta_\alpha}(x) \in \Delta_\alpha$ entonces T_{Δ_α} se puede extender a una vecindad $(a - \delta, a + \delta)$ de a tal que $T_{\Delta_\alpha}(a - \delta, a + \delta) \subseteq \Delta_\alpha$. Por otro lado existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $T^N x \in (a - \delta, a + \delta)$ y de esta forma

$$T_{\Delta_\alpha}(T^N x) = T^{k+N} x \in \Delta_\alpha$$

lo cual es una contradicción.

- 2) Si $T^k a = \lim_{x \rightarrow a^+} T_{\Delta_\alpha}(x) \in \partial\Delta_\alpha$ entonces $T^k x = a$ y $T_{\Delta_\alpha} = T^k = id$ en una vecindad de a , $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, pero

$$\{T^m x\}_{m \in \mathbb{Z}} \cap (a - \delta, a + \delta) \neq \emptyset.$$

Esto contradice el hecho de que x no es periódica y tampoco lo puede ser una de sus potencias.

Por lo tanto $T^l a$ no puede estar definida para todo $0 < l \leq k$ y lo mismo sucede con b por simetría. Para ver que $T^r a$, $T^s b$ no están definidos para todo $r, s < 0$ basta considerar T^{-1} en lugar de T y usar el mismo argumento que antes. Así tenemos que $a, b \in C(T)$ y entonces A debe de ser finito pues los extremos de cada Δ_α pertenecen a $C(T)$ y $C(T)$ es finito ■

Corolario 3. *Todo punto genérico es periódico ó la cerradura de su órbita es una unión finita de intervalos cerrados ajenos.*

Corolario 4. *Si $C(T) = \emptyset$ entonces T es la identidad ó la órbita de todo punto genérico es densa en I .*

Hemos obtenido entonces que casi todo punto (*i.e.* todos salvo un conjunto numerable) pertenece a un intervalo rígido de T ó la cerradura de su órbita es una unión finita de intervalos. Presentamos entonces el resultado principal de esta sección el cual resume el comportamiento de una *TII*.

Teorema 4. *Sea (I, E, T) una *TII*. De los intervalos en los cuales I es particionado por $C(T)$ podemos formar de manera única conjuntos K_1, \dots, K_s T -invariantes, ajenos, tales que su unión es $I \setminus C(T)$ y*

- (i) *cada K_i consiste de una unión finita de intervalos ajenos de la misma longitud los cuales son permutados por T , ó*
- (ii) *la órbita de casi todo punto de K_i es densa en K_i .*

Además $s \leq 2(|E| - 1)$.

Al conjunto K_i del primer tipo le llamamos una componente periódica de T y a los conjuntos K_j del segundo tipo les llamamos componentes minimales de T (esto pues es lo más parecido a minimalidad para una *TII*). Si T sólo posee componentes periódicas decimos que T es periódica mientras que si T posee sólo una componente minimal decimos que T es minimal.

Antes de presentar la prueba del teorema establezcamos el siguiente lema:

Lema 10. Sea (I, E, T) una TH y $x \in I$ punto genérico no periódico, si z es otro punto genérico tal que $z \in \overline{\{T^m x\}}_{m \in \mathbb{Z}}$ entonces

$$\overline{\{T^m x\}}_{m \in \mathbb{Z}} = \overline{\{T^m z\}}_{m \in \mathbb{Z}}.$$

Demostración. Mostremos primero que $T^k z \in \overline{\{T^m x\}}_{m \in \mathbb{Z}}$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. Sea $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{Z}$ y tomemos $0 < \delta < \varepsilon$ tal que T^k es una isometría sobre $(z - \delta, z + \delta)$. Como $z \in \overline{\{T^m x\}}_{m \in \mathbb{Z}}$ entonces existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $T^N x \in (z - \delta, z + \delta)$ y por lo tanto $T^{k+N} x \in (T^k z - \varepsilon, T^k z + \varepsilon)$. Así $T^k z \in \overline{\{T^m x\}}_{m \in \mathbb{Z}}$.

Mostremos ahora que $x \in \overline{\{T^m z\}}_{m \in \mathbb{Z}}$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $T^N x \in (z - \varepsilon/2, z + \varepsilon/2)$. Tomemos $0 < \delta < \varepsilon/2$ tal que $T^N(x - \delta, x + \delta) \subseteq (z - \varepsilon/2, z + \varepsilon/2)$ y en donde T es una isometría e invertible. Elegimos $z + \sigma \in T^N(x - \delta, x + \delta)$ con $|\sigma| < \varepsilon/2$ de forma que

$$z + \sigma = T^N(x + \sigma') \text{ para algún } |\sigma'| < \delta$$

así

$$T^{-N} z + \sigma = T^{-N}(z + \sigma) = x + \sigma'$$

y entonces

$$|T^{-N} z - x| = |\sigma' - \sigma| < \varepsilon.$$

Por lo tanto $x \in \overline{\{T^m z\}}_{m \in \mathbb{Z}}$. Así el lema queda probado pues

$$x \in \overline{\{T^m z\}}_{m \in \mathbb{Z}} \Rightarrow \{T^m x\}_{m \in \mathbb{Z}} \subseteq \overline{\{T^m z\}}_{m \in \mathbb{Z}} \subseteq \overline{\{T^m x\}}_{m \in \mathbb{Z}}$$

y entonces

$$\overline{\{T^m x\}}_{m \in \mathbb{Z}} = \overline{\{T^m z\}}_{m \in \mathbb{Z}}$$

como queríamos ■

Demostración (Teorema 4). Consideremos I y tomemos $x \in I$ un punto genérico, entonces hay dos casos: x es periódico y pertenece a un intervalo rígido maximal Δ_x ó no lo es y entonces la cerradura de su órbita Γ_x es una unión finita de intervalos. En el primer caso tomamos Δ'_x la órbita bajo T de Δ_x y en el segundo caso tomamos $\Gamma_x^o = \text{int } \Gamma_x$.

Enseguida consideramos $I \setminus \Delta'_x$ ($I \setminus \Gamma_x^o$ respectivamente) y repetimos el proceso. Dicho proceso no puede seguir de manera indefinida ya que en cualquiera de los dos casos la frontera de los conjuntos Δ'_x , Γ_x^o está formada por puntos de $C(T)$ el cual es finito. Así, tenemos a lo más $2(|E| - 1)$ conjuntos de este tipo y el teorema queda demostrado ■

II. Transformaciones de intercambio de intervalos generadas por el flujo geodésico asociado a una estructura plana.

En esta sección usaremos las transformaciones de intercambio de intervalos para estudiar el comportamiento del flujo geodésico asociado a una estructura plana (M, ω) . Estrictamente hablando no hay un flujo geodésico bien definido sobre M sino sobre $M \setminus \text{Sing}(\omega)$, pero éste induce un flujo sobre M (tal vez no único). Esto es a lo que nos referiremos cuando hablemos de flujo o flujo geodésico, a menos que digamos lo contrario.

Primero recordemos algunas propiedades básicas: dada una estructura plana (M, ω) , $\mathring{M} := M \setminus \text{Sing}(\omega)$ hereda del plano tanto una métrica Riemanniana plana como una medida de Lebesgue (las cuales son compatibles). Dicha métrica induce una distancia sobre \mathring{M} y entonces sobre M por completación métrica, la cual en nuestro caso convierte a M en un espacio métrico completo.

Recordemos también que el haz tangente unitario de \mathring{M} es trivial, *i.e.* $T^1\mathring{M} \cong \mathring{M} \times \mathbb{S}^1$ y entonces cada vector $\nu \in \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ puede ser identificado con el campo vectorial constante $X_\nu \in \Gamma(T\mathring{M})$,

$$X_\nu(m) := (m, \nu), \quad \forall m \in \mathring{M}.$$

Definición 12. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva continua, diremos que esta curva es un intervalo geodésico perpendicular a $\nu \in \mathbb{S}^1$ y escribiremos $I = \gamma([a, b])$ si γ restringida a \mathring{M} es una geodésica por pedazos perpendicular al campo X_ν .

Tomemos $\nu \in \mathbb{S}^1$ y $I \subseteq M$ un intervalo geodésico perpendicular a ν y consideremos el flujo de I en la dirección de ν . La función del primer retorno del flujo, T , está definida en $x \in I \setminus \text{Sing}(\omega)$ si la trayectoria emitida de x en la dirección de ν regresa a $I \setminus \text{Sing}(\omega)$ después de un tiempo finito.

Proposición 5. La función del primer retorno $T : I \setminus E \rightarrow I$ es una TH. Además cada punto $x \in I$ regresa a I en un tiempo acotado por una constante independiente de x ó golpea un punto singular.

[16]. Primero consideremos x_1, \dots, x_m los puntos de $I \setminus \text{Sing}(\omega)$ cuya trayectoria golpea un punto singular, tenemos que m es menor o igual a la suma de

las multiplicidades de los puntos singulares de ω . Esto pues dada una singularidad de multiplicidad k , hay a lo más k trayectorias geodésicas golpeando la singularidad con dirección ν . Tomemos entonces E formado por los puntos x_1, \dots, x_m , los puntos singulares de ω que permanecen dentro de I y a lo más dos puntos y_1, y_2 que corresponden a los puntos cuyas trayectorias golpean los extremos de I .

Tomemos ahora $J \subseteq I \setminus E$ un subintervalo. El flujo geodésico está bien definido sobre J y la medida heredada por \dot{M} garantiza que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño el área recorrida por J mediante el flujo durante un tiempo ε es $\varepsilon |J|$. Ahora, el teorema de recurrencia de Poincaré asegura que el conjunto de puntos de J que regresan a I es denso y por la continuidad del flujo entonces es igual a J . Además el tiempo que tardan en regresar no excede a $Area(M)/|J|$. Dado un punto $x \in J$, las propiedades del flujo nos permite asegurar que localmente T es una traslación y entonces T es una TII como deseabamos probar ■

Análogamente a las transformaciones de intercambio de intervalos, en el flujo geodésico se tiene el concepto de conexiones silla.

Definición 13. *Una conexión silla de una estructura plana es un intervalo geodésico cuyos extremos son puntos singulares y sin otros puntos singulares en su interior.*

Observación 9. *Como consecuencia de la proposición anterior podemos ver que una estructura plana posee solo un número finito de conexiones silla en una dirección dada.*

Como se puede observar, dado un intervalo geodésico I , el número de segmentos conectantes que posee la TII asociada coincide con el número de conexiones silla perpendiculares a I que lo intersectan. Los puntos de intersección son precisamente los elementos del segmento conectante de la TII . De esta forma el papel que juegan las conexiones silla en el flujo geodésico es el análogo al jugado por los segmentos conectantes en una TII y la dinámica geodésica sobre la estructura plana es descrita por medio de las TII 's asociadas.

Teorema 5. *Sea (M, ω) una estructura plana y $\nu \in \mathbb{S}^1$ una dirección. Entonces M se descompone como una unión de conexiones silla paralelas a ν y*

dominios ajenos D_1, \dots, D_n tales que para cada $i = 1, \dots, n$

- a) D_i es un “cilindro” de trayectorias periódicas ó
- b) D_i es minimal

con respecto al flujo geodésico en la dirección ν y por lo tanto invariantes ante éste. Además el número de componentes D_i está acotado por una constante que no depende de la dirección.

Demostración. Sea I_0 un intervalo geodésico de M perpendicular a ν y consideremos la TII , T asociada a I_0 mediante el flujo geodésico de M en la dirección ν , g_ν^t . Por el Teorema 4, $I_0 \setminus C(T)$ se descompone como una unión de conjuntos $K_1^0, \dots, K_{r_0}^0$ tales que cada K_i^0 es una unión de intervalos los cuales son permutados por T ó K_i^0 es minimal con respecto a T .

Tomemos entonces

$$D_i^0 := \{g_\nu^t(x) \mid x \in K_i^0, t \in \mathbb{R}\}.$$

Si K_i^0 es una componente periódica de T entonces D_i^0 es un “cilindro” de trayectorias periódicas ya que el flujo es continuo: si $x \in K_i^0$ entonces existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^\alpha(x) = x, \quad i.e. \quad g_\nu^{\alpha t_0}(x) = x$$

para algún $t_0 \in \mathbb{R}$. Ahora, si K_i^0 es una componente minimal de T entonces D_i^0 es minimal con respecto a g_ν^t . Para ver esto, tomemos $x \in D_i^0$ y probemos que $\{g_\nu^t(x)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es denso en D_i^0 : sean $U \subseteq D_i^0$ abierto y $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$x' = g_\nu^{t_1}(x) \in K_i^0 \quad y \quad U' := g_\nu^{t_2}(U) \cap K_i^0 \neq \emptyset$$

de forma que U' es un abierto en K_i^0 . Entonces existe $\beta \in \mathbb{Z}$ tal que

$$T^\beta(x') \in U'$$

y por lo tanto

$$g_\nu^{-t_2}(T^\beta(x')) \in U \quad i.e. \quad g_\nu^{\beta t_0}(x) \in U$$

para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ como queríamos.

El hecho de que cada D_i^0 es conexo por caminos es obvio de la parte anterior y es abierto pues basta tomar para $x \in D_i^0$, $x' := g_\nu^{t_0}(x) \in K_i^0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ y $V' \subseteq K_i^0$ vecindad de x' y entonces tomar

$$V := \{g_\nu^t(V') \mid t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\} \subseteq D_i^0$$

vecindad de x , con un $\varepsilon > 0$ apropiado. Esto muestra que D_i^0 es un dominio.

Hay que observar que cada K_i^0 está acotado por segmentos conectantes y entonces la frontera de cada D_i^0 está formada por conexiones silla.

Si se tiene que $D_1^0, \dots, D_{r_0}^0$ cubren a M salvo conexiones silla entonces terminamos. Si no, tomamos I_1 intervalo geodésico perpendicular a ν que no interseque a la unión de los D_i^0 , $i = 1, \dots, r_0$ y repetimos el proceso para obtener dominios $D_1^1, \dots, D_{r_1}^1$ como antes. Este proceso no puede continuar indefinidamente ya que cada D_i^k está acotado por conexiones silla paralelas a ν , las cuales sabemos solo hay un número finito. Por lo tanto siempre podemos obtener un conjunto finito de dominios D_1, \dots, D_m con las propiedades deseadas y m no excediendo el número de conexiones de silla que posee M en la dirección dada el cual está acotado por la suma de las multiplicidades de los puntos singulares de ω ■

Al igual que en una *III* a un dominio de tipo *a*) en el teorema anterior le llamamos una componente periódica del flujo de M en la dirección ν , mientras que a un dominio de tipo *b*) le llamamos una componente minimal. Si el flujo geodésico en una dirección ν posee una sola componente periódica, decimos que el flujo es únicamente periódico en esta dirección; y si sólo posee una componente minimal entonces decimos que el flujo es minimal en dicha dirección.

Como un corolario de la demostración del teorema anterior tenemos la siguiente afirmación con la cual concluimos el capítulo.

Corolario 5. *Si una estructura plana no posee conexiones silla paralelas a cierta dirección entonces el flujo geodésico en dicha dirección es únicamente periódico ó minimal.*

Demostración. La demostración es inmediata a partir del hecho de que dada una dirección, las componentes del flujo están acotadas por conexiones silla paralelas a dicha dirección. Así si hubiera mas de una componente, estas deberían de estar separadas por una conexión silla, lo cual por hipótesis no es posible y por lo tanto el flujo geodésico en esta dirección debe poseer una sola componente ■

CAPÍTULO III

ESTRUCTURAS PLANAS Y LA DICOTOMÍA DE VEECH.

El objetivo principal de este capítulo final es presentar y dar ejemplos del teorema de Veech. En la primera sección estudiamos algunas propiedades de las estructuras planas (por ejemplo, mostramos que el conjunto de singularidades de una estructura plana la clasifica topológicamente) y de ciertos objetos matemáticos asociados a estas. Es al final de esta sección donde presentamos el concepto de grupo de Veech asociado a una estructura plana. La segunda sección es dedicada a presentar y demostrar el teorema de la dicotomía de Veech. Por último, en la tercera sección damos ejemplos de estructuras planas que satisfacen el teorema de Veech.

I. Estructuras planas y el grupo de Veech.

Las siguientes subsecciones tratan cuestiones generales concernientes a estructuras planas. La primera subsección es sobre algunos aspectos de éstas y su flujo geodésico asociado. En la segunda subsección es presentado el concepto de “conjunto de vectores de holonomía” asociado a una estructura plana; este concepto nos será de utilidad para estudiar propiedades de la estructura plana y su grupo de Veech, el cual es tratado en la tercera subsección y será fundamental para plantear el teorema de la dicotomía de Veech.

I.1. Algunas propiedades de estructuras planas.

Comencemos esta subsección obteniendo el análogo de la Proposición 3 para una estructura plana, esto es, un teorema de clasificación topológica para superficies compactas con estructuras planas.

Lema 11 ([10]). *Dada una estructura plana (M, ω) y un conjunto de conexiones silla ajenos por pares, podemos encontrar una triangulación de M cuyos vértices corresponden a los puntos singulares de ω , las aristas son conexiones silla conteniendo a nuestro conjunto y sus caras son triángulos no conteniendo puntos singulares en su interior.*

El lema anterior es importante pues nos permite establecer una triangulación adecuada sobre nuestra superficie M . Dicha triangulación es el equivalente a la triangulación que utilizamos para la estructura plana asociada a un polígono racional en el capítulo I.

Teorema 6. *Sea (M, ω) una estructura plana con m_1, \dots, m_k las multiplicidades de los puntos singulares de ω . Tenemos que la característica de Euler de M está dada por*

$$-\chi_M = \sum_{i=1}^k (m_i - 1).$$

Demostración ([16]): Consideremos una triangulación de M como en el Lema 11 y denotemos por V, A, C el número de vértices, aristas y caras de la triangulación, respectivamente. Primero, es claro que $V = k$ pues los vertices son precisamente los puntos singulares de ω . Después, si hay n caras entonces hay $3n/2$ aristas en la triangulación pues cada cara tiene 3 aristas y cada arista pertenece a 2 caras. Así, tenemos que

$$V = k, \quad A = \frac{3n}{2}, \quad C = n$$

y entonces

$$\chi_M = V - A + C = k - \frac{n}{2}. \quad (\text{III.1})$$

Ahora, cada cara es un triángulo por lo que la suma de los ángulos interiores de todas las caras es $n\pi$. Por otro lado, debido a que los vertices de las caras son los puntos singulares de ω entonces dicha suma corresponde a la suma de los ángulos totales de las singularidades, la cual sabemos es $\sum 2\pi m_i$. Por lo tanto

$$n = 2 \sum_{i=1}^k m_i$$

y así obtenemos que

$$\chi_M = k - \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k (1 - m_i) \quad \blacksquare$$

Observación 10. *Para cualquier estructura plana (M, ω) tenemos que $\chi_M \leq 0$.*

De manera particular, el teorema anterior nos dice que no hay estructuras planas sobre la esfera ($\chi = 2$) y que cualquier estructura plana sobre el toro ($\chi = 0$) posee sólo singularidades removibles y esta es la única superficie topológica con dicha propiedad ya que cualquier estructura plana sobre una superficie de género mayor a uno debe poseer al menos una singularidad no removible.

La manera usual de poner una estructura plana sobre un toro es tomar $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ vectores linealmente independientes y entonces considerar el toro

$$\mathbb{T}_{(v_1, v_2)}^2 := \mathbb{R}^2 / v_1\mathbb{Z} \oplus v_2\mathbb{Z}.$$

La proyección canónica $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}_{(v_1, v_2)}^2$ es continua (con la topología cociente) y dado un $[x] \in \mathbb{T}_{(v_1, v_2)}^2$, π es un homeomorfismo local en una vecindad de $[x]$ mediante la elección de un representante de dicha clase. De esta forma son tomadas la cartas. Como la diferencia de elección entre una carta y otra es simplemente la diferencia de los representantes entonces los cambios de coordenadas son traslaciones. Esta estructura es llamada un *toro plano*. El siguiente teorema muestra que toda estructura plana sobre un toro es “equivalente” a un toro plano.

Definición 14. *Sean (M_1, ω_1) y (M_2, ω_2) dos estructuras planas. Un homeomorfismo $f : M_1 \rightarrow M_2$ es llamado un isomorfismo de estructuras planas si manda singularidades en singularidades y es una traslación en coordenadas locales.*

Teorema 7. *Toda estructura plana sobre un toro es isomorfa a un toro plano.*

Demostración. Sea (M, ω) un toro con estructura plana. Por el Teorema 6 podemos suponer que ω no posee singularidades. Tomemos $v_1 \in \mathbb{S}^1$ y $I \subseteq M$ intervalo geodésico perpendicular a v_1 ; y denotemos por v_2 la dirección de I . Elijamos después $x \in I$ su extremo izquierdo. Por el teorema de recurrencia de Poincaré, la trayectoria geodésica emitida de x en la dirección v_1 intersecta a I en un punto x' . Tomemos l_1, l_2 las distancias de x a x' en las direcciones v_1 y v_2 respectivamente. Después consideramos e_1 el vector unitario colineal a $l_1v_1 - l_2v_2$ (el signo depende de la elección de v_2). Afirmamos que la trayectoria emitida de x en la dirección e_1 es periódica. Ésto, debido a que podemos encajar isométricamente un rectángulo en M con x en esquinas opuestas.

Basta considerar

$$\begin{aligned} D_M &:= \{g_{-v_1}^t(g_{-v_2}^s(x')) \in M \mid t \in (0, l_1), s \in (0, l_2)\}, \\ D &:= \{-tv_1 - sv_2 \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (0, l_1), s \in (0, l_2)\} \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

y $f : D \rightarrow D_M$, $f(-tv_1 - sv_2) = g_{-v_1}^t(g_{-v_2}^s(x'))$. Como M es localmente isométrica al plano entonces f viene a ser una traslación en coordenadas locales, tomando en \mathbb{R}^2 las coordenadas (v_1, v_2) . De ésta manera podemos asegurar que la trayectoria geodésica en la dirección e_1 que parte de x es una “diagonal” de D_M y entonces periódica. Por lo tanto, por la Proposición 5 el flujo geodésico de M en la dirección e_1 es una única banda de trayectorias periódicas de período h_1 .

Tomemos después J un intervalo geodésico en la dirección $u_2 \in \mathbb{S}^1$ perpendicular a e_1 y tal que su longitud, w_2 , es igual al ancho de la banda de trayectorias periódicas en la dirección e_1 . Así, si y y y' son los extremos de J entonces existe un tiempo w_1 tal que $g_{e_1}^{w_1}(y) = y'$. Entonces la dirección $e_2 \in \mathbb{S}^1$ colineal a $w_1e_1 - w_2u_2$ es una dirección de trayectorias periódicas, de período h_2 (aquí de nuevo, el signo depende de la elección de u_2). El argumento para mostrar este hecho es el mismo que antes: el encaje isométrico de un rectángulo con y en extremos opuestos. De esta forma el isomorfismo de estructuras planas se establece tomando $x_0 \in M$ y \mathbb{R}^2 con la base (e_1, e_2) . Entonces definimos

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_{(e_1, e_2)}^2 &\rightarrow M \\ \lambda e_1 + \mu e_2 &\mapsto g_{e_1}^\lambda(g_{e_2}^\mu(x_0)), \end{aligned}$$

que induce una función bien definida

$$\widehat{F} : \mathbb{T}_{(h_1e_1, h_2e_2)}^2 \rightarrow M,$$

la cual es un isomorfismo pues los abiertos son tomados como en (III,2) salvo una traslación y por el mismo argumento que antes los cambios de coordenadas son traslaciones ■

La dinámica del flujo geodésico sobre un toro plano y por lo tanto (por teorema anterior) sobre cualquier toro con estructura plana es bien conocida por el teorema de *Weyl*.

Teorema 8 (Weyl). *Sea $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ un toro plano y $\theta \in \mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ una dirección. Entonces el flujo geodésico sobre \mathbb{T}^2*

(i) *es únicamente periódico si y solo si θ es un múltiplo racional de π ;*

(ii) es únicamente ergódico si y solo si θ es múltiplo irracional de π .

El comportamiento genérico del flujo asociado a una estructura plana es descrito por *Kerckhoff*, *Masur* y *Smillie* en el siguiente teorema:

Teorema 9. [10] *Sea (M, ω) una estructura plana. Entonces para casi todo $\theta \in \mathbb{S}^1$ el flujo geodésico en la dirección θ es únicamente ergódico.*

Por lo tanto, del teorema anterior y el Teorema 5 podemos ver que el comportamiento más simple para un flujo geodésico sobre una superficie con estructura plana es el del flujo en el toro.

Definición 15. *Decimos que una estructura plana ω sobre una superficie M es elemental si el flujo geodésico de M en una dirección arbitraria posee sólo componentes periódicas ó es únicamente ergódico.*

En la definición anterior, distintos cilindros de trayectorias periódicas pueden tener períodos inconmesurables. Consecuentemente el flujo en dicha dirección no necesariamente es periódico aún cuando sólo posea componentes periódicas.

Por último, observemos que sobre una superficie M con una estructura plana elemental toda trayectoria geodésica golpea un punto singular, es periódica ó se distribuye de manera densa sobre M . En particular, si la estructura plana asociada a un polígono P es elemental entonces toda trayectoria de billar es periódica, golpea un vertice ó se distribuye densamente en P .

I.2. El conjunto de vectores de holonomía.

Introducimos ahora un concepto que nos será de gran ayuda para estudiar las propiedades de las estructuras planas y su dinámica asociada, el de *vectores de holonomía*.

Sea (M, ω) una estructura plana. A cada conexión silla L le asociamos el par $-v_L, v_L$ de direcciones paralelas a L tales que $\|v_L\| = |L|$. Los vectores $-v_L, v_L$ son llamados los vectores de holonomía asociados a L . Como los cambios de coordenadas de ω son traslaciones, la asociación está bien definida y denotamos por $Hol(\omega) \subseteq \mathbb{R}^2$ el conjunto de vectores de holonomía asociados a las conexiones silla de (M, ω) .

Proposición 6. *Sea (M, ω) una estructura plana y supongamos que $Sing(\omega)$ es no vacío. Entonces el conjunto de direcciones de vectores de holonomía es denso en el círculo unitario y $Hol(\omega)$ no posee puntos de acumulación.*

Demostración. Primero mostramos que el conjunto de direcciones de vectores de holonomía es denso en \mathbb{S}^1 y después que $Hol(\omega)$ no posee puntos de acumulación.

i) Sean $v \in \mathbb{S}^1$ y $\varepsilon > 0$, deseamos probar que $Hol(\omega)$ posee un vector que forma un ángulo menor a ε con v . Supongamos por contradicción que no es así. Tomemos $x \in Sing(\omega)$ y I intervalo geodésico en la dirección $w \in \mathbb{S}^1$ perpendicular a v tal que x es uno de sus extremos y $|I| = s > 0$ suficientemente pequeño. Consideramos el flujo de I en la dirección v . Como supusimos que (M, ω) no posee conexiones silla en dicha dirección entonces la trayectoria emitida de x interseca a I un número infinito de veces. Denotemos por x_n el punto de la n -ésima intersección y definamos l_n, s_n las distancias de x a x_n a lo largo de las direcciones v, w respectivamente. Tenemos que $l_n \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$ y $s_n \leq s$ para todo n . Sea entonces N tal que $\alpha_0 := \tan^{-1} \left(\frac{sN}{l_N} \right) < \varepsilon$. Queremos mostrar que podemos encontrar una conexión silla en la dirección α_0 ; para esto definimos

$$\begin{aligned} \Delta_M^k &:= \{g_w^{s \tan(\alpha)}(g_v^s(x)) \in M \mid s \in (l_{k-1}, l_k), \alpha \in [0, \alpha_0]\}, \\ \Delta_{\mathbb{R}^2}^k &:= \{s \tan(\alpha) w \oplus s v \in \mathbb{R}^2 \mid s \in (l_{k-1}, l_k), \alpha \in [0, \alpha_0]\}, \end{aligned}$$

con $k = 1, \dots, N$ y $l_0 = 0$. Definimos entonces

$$\begin{aligned} \Delta_{M^N} &:= \prod_{k=1}^N \Delta_M^k \subseteq \prod_{k=1}^N M_k, \quad M_k = M, \\ \Delta_{\mathbb{R}^2} &:= \bigcup_{k=1}^N \Delta_{\mathbb{R}^2}^k \subseteq \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Podemos encajar de manera isométrica a $\Delta_{\mathbb{R}^2}$ en Δ_{M^N} con la función

$$\begin{aligned} f : \Delta_{\mathbb{R}^2} \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \Delta_{M^N}, \\ f(s \tan(\alpha) w + s v) &= (x, \dots, x, g_w^{s \tan(\alpha)}(g_v^s(x)), x, \dots, x), \end{aligned}$$

donde la entrada distinta de x está en el lugar k -ésimo si $s \in (l_{k-1}, l_k)$. Localmente f se ve como la inclusión de un abierto de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^{2N} .

Cualquier trayectoria sobre $\overline{\Delta_{\mathbb{R}^2}}$ induce una trayectoria sobre Δ_{M^N} de la misma longitud. La proyección

$$\pi : \prod_{k=1}^N M \rightarrow M$$

induce una función $\hat{f} := \pi \circ f$

$$\hat{f} : \Delta_{\mathbb{R}^2} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$$

que se extiende de manera continua a $\overline{\Delta_{\mathbb{R}^2}}$ y entonces la trayectoria que sale del origen con ángulo α_0 va a dar bajo \hat{f} en una conexión silla de x en x como queríamos.

ii) Para mostrar que $Hol(\omega)$ no posee puntos de acumulación tomemos $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\hat{0}\}$ y consideremos todos los intervalos geodésicos saliendo de los puntos singulares ω con dirección v y longitud $\|v\|$. Dicho número de intervalos depende de v pero es finito. Como el conjunto $Sing(\omega)$ es finito entonces cada singularidad posee una vecindad que no contiene a ningún otro punto singular y por lo tanto la longitud de cualquier conexión silla es al menos $\varepsilon > 0$ para un ε suficientemente pequeño. Ahora, podemos encontrar $\delta_1 > 0$ tal que el flujo en las direcciones $-w, w \in \mathbb{S}^1$ perpendiculares a v de los intervalos geodésicos descritos no intersectan a $Sing(\omega)$ en un tiempo t tal que $0 < |t| \leq |\delta_1|$ (aquí, cuando hablamos del flujo geodésico de un intervalo geodésico I nos referimos al flujo de $I \setminus Sing(\omega)$ más los puntos extremos).

Por otro lado, como se comentó antes, podemos encontrar $\delta_2 > 0$ tal que $B_{\delta_2}(x) \cap (Sing(\omega) \setminus \{x\}) = \emptyset$ para cada $x \in Sing(\omega)$. Elegimos entonces $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y definimos U el abierto unión de las bolas de radio δ con centro en los extremos de los intervalos geodésicos y del flujo por un tiempo δ de dichos intervalos en las direcciones $-w, w$.

Formalmente U se ve como una unión finita de paralelogramos encajados en M y unión finita de bolas menos un rayo (esto último se hace tomando una de las copias de la imagen inversa de la proyección de cada punto singular).

De esta forma podemos asegurar que no existen conexiones silla dentro de U en una dirección distinta a la de v . Como v es arbitrario entonces $Hol(\omega)$ no puede tener puntos de acumulación ■

Observación 11. *La demostración de la proposición anterior asegura la existencia de una conexión silla de longitud mínima. Esto pues $Hol(\omega)$ es un conjunto cerrado acotado inferiormente en longitud. Denotaremos por $\mu(\omega)$ la longitud de dicha conexión silla.*

Ahora, si $\omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ define una estructura plana sobre M y a es un operador lineal invertible de \mathbb{R}^2 , el conjunto $a\omega = \{(U_\alpha, a \circ \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ define también una estructura plana sobre M . Las estructuras $a\omega$ y ω poseen los mismos puntos singulares con las mismas multiplicidades (para la proyección de $x_0 \in \text{Sing}(a\omega) = \text{Sing}(\omega)$ basta postcomponer con a a la proyección de x_0 con respecto a ω). Además, toda conexión silla de (M, ω) lo es también de $(M, a\omega)$ aunque las direcciones son cambiadas por a ; esto es claro si consideramos la función identidad

$$id : (M, \omega) \rightarrow (M, a\omega).$$

En coordenadas locales, $(a \circ \varphi_\alpha) \circ id \circ \varphi_\beta^{-1} = a \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})$ y entonces

$$\begin{aligned} d(id) : (TM, \omega) &\rightarrow (TM, a\omega) \\ v_x &\mapsto a(v_x). \end{aligned} \tag{III.3}$$

Así, si v_L es un vector de holonomía con respecto a ω , $a(v_L)$ es un vector de holonomía con respecto a $a\omega$. Por lo tanto $Hol(a\omega) = a(Hol(\omega))$.

Proposición 7. *Dada una estructura plana (M, ω) , la función $d : GL_2^+(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $d(a) := \mu(a\omega)$ es continua y su restricción a $SL_2(\mathbb{R})$ es acotada.*

Demostración. La demostración siguiente es *verbatim* de [16]. Probemos que

- i) d es continua:* sean $a, b \in GL_2^+(\mathbb{R})$ y v vector de holonomía asociado a la conexión silla más corta de $a\omega$. Entonces $(ba^{-1})v \in Hol(b\omega)$. Tenemos que

$$\mu(b\omega) \leq \| (ba^{-1})v \| \leq |ba^{-1}| \cdot \|v\| = |ba^{-1}| \mu(a\omega),$$

con $|\cdot|$ la norma sobre $GL_2^+(\mathbb{R})$ definida por $|a| = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^2$, con $a = \{a_{ij}\} \in GL_2^+$. De la misma manera obtenemos que

$$\mu(a\omega) \leq |ab^{-1}| \mu(b\omega)$$

y entonces

$$|ba^{-1}|^{-1} \mu(b\omega) \leq \mu(a\omega) \leq |ab^{-1}| \mu(b\omega).$$

Por lo tanto, cuando $a \rightarrow b$, $ab^{-1} \rightarrow 1$ y entonces $\mu(a\omega) \rightarrow \mu(b\omega)$.

- ii) $d|_{SL_2(\mathbb{R})}$ es acotada: como se puede ver de (III,3), para los elementos $a \in SL_2(\mathbb{R})$ las estructuras ω y $a\omega$ poseen el mismo elemento de área. Así, si probamos que $\mu(\omega') \leq \sqrt{2S}$, con S el área de M para cualquier $\omega' = c\omega$, $c \in SL_2(\mathbb{R})$ habremos terminado.

Tomemos $x \in \text{Sing}(\omega')$, $v \in \mathbb{S}^1$ y I intervalo geodésico paralelo a v con extremo x y tal que $|I| = \sqrt{S}$. Si I contiene otros puntos singulares además de x entonces terminamos pues hemos conseguido una conexión silla de longitud menor a $\sqrt{2S}$ y entonces $\mu(\omega') \leq \sqrt{2S}$. Si no, consideremos el flujo de I en la dirección w perpendicular a v . El teorema de recurrencia de Poincaré garantiza que dicho flujo intersecta a I en un tiempo $t_1 > 0$ no mayor a $S/|I| = \sqrt{S}$. Entonces el flujo de algún punto de I golpea una singularidad de ω' o la trayectoria emitida de x intersecta a I en un tiempo menor ó igual a t_1 .

Usamos el mismo argumento ahora en la dirección $-w$ para obtener una trayectoria emitida de I que golpee una singularidad de ω' a un tiempo $t_2 > 0$ no mayor a \sqrt{S} . De esta forma, al igual que antes podemos encajar isométricamente un paralelogramo cuya diagonal une puntos singulares y su longitud es menor o igual a $\sqrt{2S}$ y por lo tanto $\mu(\omega') \leq \sqrt{2S}$ como queríamos mostrar ■

I.3. El grupo de Veech.

En esta subsección definiremos el grupo de Veech de una estructura plana y mostraremos que éste es un subgrupo discreto nunca cocompacto de $SL_2(\mathbb{R})$.

Definición 16. Decimos que un homeomorfismo $f : M \rightarrow M$ es un automorfismo afín de la estructura plana (M, ω) , escrito $f \in \text{Aff}^+(\omega)$, si f manda puntos singulares en puntos singulares y es una transformación afín en coordenadas locales que preserva la orientación.

El concepto de automorfismo afín está bien definido ya que los cambios de coordenadas de una estructura plana son traslaciones. Por esta misma razón, la matriz que representa la diferencial de un automorfismo afín f , $[df]$ es constante sobre la superficie, esto pues no depende de las cartas.

Definición 17. Sea (M, ω) estructura plana, definimos

$$V(\omega) := \{a \in GL_2^+(\mathbb{R}) \mid a = [df], f \in \text{Aff}^+(\omega)\}.$$

$V(\omega)$ es llamado el grupo de Veech de ω .

Enseguida definimos el estabilizador de una estructura plana y después mostramos que éste coincide con el grupo de Veech de la estructura plana.

Definición 18. *Tomemos (M, ω) una estructura plana. El estabilizador de ω , denotado por $\Gamma(\omega)$, es definido como el conjunto de operadores $a \in GL_2^+(\mathbb{R})$ tales que $a\omega$ y ω son isomorfas.*

El término “estabilizador” para $\Gamma(\omega)$ es natural del siguiente hecho: consideremos \mathfrak{X} el espacio de todas las estructuras planas sobre una superficie M y \sim la relación de equivalencia de isomorfismo entre estructuras planas. El grupo $GL_2^+(\mathbb{R})$ actúa sobre \mathfrak{X}/\sim .

$$\begin{aligned} GL_2^+(\mathbb{R}) \times \mathfrak{X}/\sim &\rightarrow \mathfrak{X}/\sim \\ (a, [\omega]) &\mapsto [a\omega]. \end{aligned} \tag{III.4}$$

No es difícil ver que esta acción está bien definida. En este contexto, dada una estructura plana ω sobre M , el estabilizador de $[\omega]$ por la acción (III,4) es $\Gamma(\omega)$, el cual en consecuencia es un subgrupo de $GL_2^+(\mathbb{R})$.

Mostremos ahora que el grupo de Veech de una estructura plana coincide con el estabilizador de la misma.

Proposición 8. *Dada una estructura plana (M, ω) , tenemos que $\Gamma(\omega) = V(\omega)$.*

Demostración. Probemos las dos contenciones como conjuntos.

(\supset) Sea $a \in V(\omega)$ y $f \in Aff(\omega)$ tal que $[df] = a$. Entonces $a^{-1} \in \Gamma(\omega)$ ya que podemos tomar el homeomorfismo

$$f : (M, \omega) \rightarrow (M, a^{-1}\omega)$$

y obtenemos que

$$\begin{aligned} (a^{-1}\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) &= a^{-1}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) \\ &= a^{-1}(ax + \lambda) = x + \bar{\lambda}, \end{aligned}$$

con $\bar{\lambda} = a(\lambda)$ y $(U, \varphi), (V, \psi)$ cartas de ω y $a^{-1}\omega$ respectivamente. Así $a^{-1} \in \Gamma(\omega)$ y por lo tanto $a \in \Gamma(\omega)$.

(\subset) Tomemos ahora $a \in \Gamma(\omega)$, entonces existe un homeomorfismo

$$F : (M, \omega) \rightarrow (M, a^{-1}\omega)$$

tal que si (U, φ) y (V, ψ) son cartas de ω entonces

$$a^{-1}(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x) = (a^{-1}\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x) = x + \lambda$$

y entonces

$$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x) = a(x) + \hat{\lambda},$$

con $\hat{\lambda} = a(\lambda)$. Ésto implica que $F \in \text{Aff}(\omega)$ y por lo tanto $a \in V(\omega)$ como queríamos probar ■

De esta forma, el grupo de Veech de una estructura plana puede ser visto como el grupo de automorfismos que dejan invariante dicha estructura preservando orientación.

Dado que estructuras planas isomorfas sobre una superficie compacta poseen la misma medida de área y como se puede ver de la demostración de la proposición anterior: para estructuras isomorfas $\omega, a\omega$ el cambio de coordenadas de dicho isomorfismo es a . Entonces $|\det a| = 1$ y por lo tanto $\Gamma(\omega) \subseteq SL_2(\mathbb{R}) \subsetneq GL_2^+(\mathbb{R})$.

Por último mostremos que el grupo de Veech de una estructura plana es un subgrupo discreto nunca cocompacto de $SL_2(\mathbb{R})$.

Proposición 9. *El grupo de Veech de una estructura plana (M, ω) es un subgrupo discreto, nunca cocompacto de $SL_2(\mathbb{R})$.*

Demostración. Demostremos por separado las propiedades.

- a) $\Gamma(\omega)$ es discreto: mostremos primero que si $a \in \Gamma(\omega)$ entonces $\text{Hol}(a\omega) = \overline{\text{Hol}(\omega)}$. Para esto, basta mostrar que $a(\text{Hol}(\omega)) = \text{Hol}(\omega)$. Si $a \in \Gamma(\omega)$ entonces existe $f : (M, \omega) \rightarrow (M, \omega)$ automorfismo afín tal que

$$\begin{aligned} df : (TM, \omega) &\rightarrow (TM, \omega) \\ v_x &\mapsto a(v_x). \end{aligned}$$

Así, si L es una conexión silla de (M, ω) también lo es $f(L)$ y si v_L es vector de holonomía asociado a L entonces $a(v_L)$ es vector de holonomía asociado a $f(L)$ y entonces $a(\text{Hol}(\omega)) = \text{Hol}(\omega)$ (pues a es invertible) como queríamos.

Por otro lado, si $\Gamma(\omega)$ poseyera una sucesión de puntos distintos $\{a_n\} \subseteq \Gamma(\omega)$ tal que $a_n \rightarrow a_0 \in \Gamma(\omega)$ cuando $n \rightarrow +\infty$ y $v \in \text{Hol}(\omega)$. Entonces la sucesión $\{a_n(v)\} \subseteq \text{Hol}(\omega)$ cumple que $a_n(v) \rightarrow a_0(v)$ cuando $n \rightarrow +\infty$ lo cual contradice el hecho de que $\text{Hol}(\omega)$ no posee puntos de acumulación y por lo tanto $\Gamma(\omega)$ es discreto.

b) $\Gamma(\omega) \leq SL_2(\mathbb{R})$ es nunca cocompacto, esto es, $SL_2(\mathbb{R})/\Gamma(\omega)$ nunca es compacto: sean $v \in Hol(\omega)$ y $a \in SL_2(\mathbb{R})$ tal que $a(v) = \frac{1}{2}v$. Tenemos que $\mu(a^n\omega) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Como $\Gamma(\omega)$ es discreto entonces el conjunto $\{a^n\Gamma(\omega)\} \subseteq SL_2(\mathbb{R})/\Gamma(\omega)$ es una sucesión de puntos distintos. Así, si $SL_2(\mathbb{R})/\Gamma(\omega)$ fuera compacto entonces $\{a^n\Gamma(\omega)\}$ poseería un punto de acumulación, esto es, una subsucesión $\{a^{n_k}\Gamma(\omega)\} \rightarrow b\Gamma(\omega)$ cuando $k \rightarrow +\infty$. Esto implica que existiría $\{\gamma_k\} \subseteq \Gamma(\omega)$ sucesión tal que $\{a^{n_k}\gamma_k\} \rightarrow b \in SL_2(\mathbb{R})$ y entonces por continuidad de la función d (ver Proposición 7) $\mu((a^{n_k}\gamma_k)\omega) \rightarrow \mu(b\omega)$. Pero esto no puede ser ya que $\mu((a^{n_k}\gamma_k)\omega) = \mu(a^{n_k}(\gamma_k\omega)) = \mu(a^{n_k}\omega)$ y $\mu(a^{n_k}\omega) \rightarrow 0 \neq \mu(b\omega)$. Por lo tanto $SL_2(\mathbb{R})/\Gamma(\omega)$ no puede ser compacto. ■

II. La alternativa de Veech.

En esta sección presentamos la prueba del teorema de la dicotomía de Veech el cual es el resultado principal de esta tesis. Dicho teorema da condiciones suficientes para que una estructura plana sea elemental. El teorema se muestra como una consecuencia natural del teorema de comportamiento de un flujo geodésico sobre una superficie con estructura plana y de los lemas que son presentados a continuación.

Comenzamos definiendo ergodicidad única para después enunciar el *Lema de Masur*.

Definición 19 (Ergodicidad única). *Sea (X, \mathfrak{B}, μ) un espacio de medida finita. Una transformación $T : X \rightarrow X$ que preserva la medida μ es ergódica si los únicos conjuntos invariantes bajo T son triviales. Esto es, si $A \in \mathfrak{B}$ es tal que $T^{-1}(A) = A$ entonces $\mu(A) = 0$ ó $\mu(A) = 1$. Decimos que T es únicamente ergódica si sólo hay una medida (salvo multiplicación por escalares) sobre X tal que T es ergódica.*

Lema 12 (Masur [11]). *Sea (M, ω) una estructura plana con puntos singulares y supongamos que $\mu(g^t\omega) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, donde*

$$g^t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}), \quad t \geq 0.$$

Entonces el flujo geodésico asociado a ω en la dirección vertical es únicamente ergódico.

Lema 13. *Sea (M, ω) una estructura plana y supongamos que $\mu(g^t\omega) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Entonces el conjunto $\{g^t\Gamma(\omega)\}_{t \geq 0} \subseteq SL_2(\mathbb{R})/\Gamma(\omega)$ no posee puntos de acumulación.*

Demostración. Supongamos por contradicción que el conjunto $\{g^t\Gamma(\omega)\}_{t \geq 0}$ posee un punto de acumulación. Entonces existe $\{t_i\} \subseteq \mathbb{R}$ sucesión y $h \in SL_2(\mathbb{R})$ tales que $g^{t_i}\Gamma(\omega) \rightarrow h\Gamma(\omega)$ cuando $i \rightarrow \infty$. Entonces es posible encontrar $\{\gamma_i\} \subseteq \Gamma(\omega)$ tal que $g^{t_i}\gamma_i \rightarrow h$ cuando $i \rightarrow \infty$. Ahora, por continuidad tenemos que $\mu(g^{t_i}\gamma_i\omega) \rightarrow \mu(h\omega)$ y $\mu(g^{t_i}\gamma_i\omega) = \mu(g^{t_i}\omega) \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$ por hipótesis, pero $\mu(h\omega) \neq 0$. Por lo tanto, $\{g^t\Gamma(\omega)\}_{t \geq 0}$ no puede poseer puntos de acumulación. ■

Es conocido que el grupo $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R}) / \{\pm 1\}$ actúa sobre el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 por isometrías mediante transformaciones de Möbius

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \mapsto f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

De esta forma, el estabilizador de una estructura plana $\Gamma(\omega) \subseteq SL_2(\mathbb{R})$, el cual sabemos es discreto (ver Proposición 9), es visto como un grupo Fuchsiano.

Definición 20. Sea $\Gamma \leq PSL_2(\mathbb{R})$ subgrupo Fuchsiano. Decimos que Γ es una retícula si

$$Area(\mathbb{H}^2/\Gamma) < +\infty.$$

Aquí, el término anterior viene del hecho de que si $\Gamma \leq PSL_2(\mathbb{R})$ es una retícula entonces Γ posee un dominio fundamental sobre \mathbb{H}^2 el cual es un polígono hiperbólico con un número finito de lados (ver [6]). Presentemos el siguiente lema el cual no probaremos aquí, para su demostración se puede consultar [16].

Lema 14. Si (M, ω) es una estructura plana tal que su estabilizador, $\Gamma(\omega)$ es una retícula y el conjunto $\{g^t \Gamma(\omega)\}_{t \geq 0}$ no posee puntos de acumulación. Entonces $\Gamma(\omega)$ posee un elemento a de la forma

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(\omega), \quad \alpha \neq 0. \quad (\text{III.5})$$

El siguiente lema muestra que en presencia de un elemento de la forma (III.5) en el grupo de Veech de una estructura plana, su flujo geodésico en la dirección vertical posee solo componentes periódicas. Aquí dirección vertical es la dirección del vector e_2 con (e_1, e_2) la base canónica de \mathbb{R}^2 .

A cada componente periódica del flujo geodésico podemos asociarle una cantidad que llamaremos el módulo de la componente.

Definición 21. Sea C una componente periódica del flujo geodésico asociado a una estructura plana y denotemos por l y w la longitud y el ancho de C respectivamente. Definimos m_c el módulo de C por

$$m_c = \frac{l}{w}.$$

Aquí, l es entendido como el tiempo mínimo necesario para que un punto en C regrese en sí mediante el flujo y w la longitud de C en la dirección perpendicular a la dirección periódica.

Lema 15. *Sea (M, ω) estructura plana y supongamos que $\Gamma(\omega)$ posee un elemento de la forma (III.5). Entonces el flujo geodésico asociado a ω en la dirección vertical posee solo componentes periódicas de módulos conmensurables.*

Demostración. Sea $f \in \text{Aff}^+(\omega)$ tal que $[df] = a$ con a como en (III,5) y tomemos (e_1, e_2) la base canónica de \mathbb{R}^2 . Como el flujo geodésico en la dirección de e_2 es invariante bajo f entonces f actúa como una permutación sobre el conjunto $\{L_1, \dots, L_k\}$ de trayectorias emitidas de los puntos singulares de ω en las direcciones $-e_2, e_2$. Por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(L_i) = L_i, i = 1, \dots, k$. Mas aún, por la unicidad del flujo geodésico y el hecho de que $df(e_2) = e_2$ tenemos que f^n actúa como la identidad sobre cada L_i y por lo tanto sobre \bar{L}_i . Así \bar{L}_i no puede poseer puntos interiores, de lo contrario f^n sería la identidad sobre un abierto y entonces $a = 1 \in SL_2(\mathbb{R})$. Entonces por el Teorema 5 L_i tiene que ser una conexión silla. Tomemos ahora $p \notin \cup_{i=1}^k L_i$, podemos encontrar U_p vecindad de p tal que ésta no intersecta a $\cup L_i$ y entonces el flujo en la dirección vertical está bien definido en todo tiempo para U_p pues $\cup L_i$ es invariante bajo éste. Por lo tanto, por el Teorema 5, U_p debe pertenecer a una componente periódica del flujo geodésico en la dirección e_2 .

Para ver que el módulo de cada cilindro es conmensurable con α , definamos para una curva lisa $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow (M, \omega)$

$$l_i(\gamma) = \int_I \dot{\gamma}_i(t) dt,$$

con $\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t))$. Decimos que $l_i(\gamma)$ es la longitud de γ en la dirección e_i sobre M . Tomemos entonces $x_0 \in L_i$ y

$$\begin{aligned} \gamma : (0, \xi] &\rightarrow M, \\ \gamma(t) &= g_{e_2}^t(x_0), \end{aligned}$$

con $\xi \in (0, w]$ y w el ancho del cilindro que acota lateralmente L_i . Tenemos que para $f^n \circ \gamma$,

$$\begin{aligned} l_1(f^n \circ \gamma)(\xi) &= \xi, \\ l_2(f^n \circ \gamma)(\xi) &= \alpha n \xi. \end{aligned}$$

Así, cuando $\xi = w$ entonces $\gamma(\xi) \in L_j$. Además f^n fija L_j y entonces $l_2(f^n \circ \gamma)(w)$ debe ser un múltiplo de l , la longitud del cilindro. Por lo tanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$l_2(f^n \circ \gamma)(w) = \alpha n w = ml,$$

es decir, $m\left(\frac{l}{w}\right) = n\alpha$ como queríamos mostrar ■

Observación 12. *Si en el lema anterior $a = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$. Entonces el enunciado sigue siendo cierto, solo que esta vez es la dirección horizontal la dirección en la cual el flujo se descompone en cilindros de módulos conmensurables.*

Presentamos ahora el teorema de la dicotomía de Veech.

Teorema 10 (La alternativa de Veech). *Sea (M, ω) una estructura plana tal que su grupo de Veech es una retícula. Entonces el flujo geodésico asociado a ω en una dirección dada es únicamente ergódico ó se descompone como unión de cilindros de módulos conmensurables; en particular, ω es elemental.*

Demostración. Primero, por el Teorema 6, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $Sing(\omega) \neq \emptyset$. Tomemos $v \in \mathbb{S}^1$ una dirección y a la rotación que manda v en la dirección vertical. Como $\Gamma(a\omega) = a\Gamma(\omega)a^{-1}$ entonces $\Gamma(\omega)$ es una retícula si y sólo si $\Gamma(a\omega)$ lo es. Ahora, $a \in SO_2(\mathbb{R})$ no modifica distancias y el flujo geodésico asociado a ω en la dirección v coincide con el flujo geodésico asociado a $a\omega$ en la dirección vertical. Además $Hol(a\omega) = aHol(\omega)$. Por lo tanto, podemos suponer que la dirección escogida es la vertical.

(i) Si $Hol(\omega)$ posee un vector vertical: en este caso $\mu(g^t\omega) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Ésto ya que como mencionamos antes $Hol(g^t\omega) = g^tHol(\omega)$, por lo que si $Hol(\omega)$ posee un vector vertical de longitud c entonces $Hol(g^t\omega)$ posee un vector vertical de longitud $e^{-t/2}c$. Entonces por el Lema 13, $\{g^t\Gamma(\omega)\}_{t \geq 0}$ no posee puntos de acumulación. Además por el Lema 14, Lema 15 y la hipótesis, el flujo geodésico en la dirección vertical se descompone en cilindros de módulos conmensurables y conexiones silla. En particular, el flujo geodésico es periódico en esta dirección. Además, si el flujo geodésico en la dirección vertical posee una componente periódica entonces $Hol(\omega)$ posee un vector vertical proveniente de la conexión silla que acota la componente periódica.

(ii) Si $Hol(\omega)$ no posee vectores verticales: por el argumento anterior, esto equivale a decir que el flujo geodésico en la dirección vertical no posee componentes periódicas. Entonces por el Lema 15, $\Gamma(\omega)$ no puede poseer elementos de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ y como por hipótesis $\Gamma(\omega)$ es una retícula entonces por Lema 14 el conjunto $\{g^t\Gamma(\omega)\}_{t \geq 0}$ debe poseer al menos un punto de acumulación. Así, por el Lema 13, $\mu(g^t\omega)$ no puede

tender a 0 cuando $t \rightarrow +\infty$ y entonces por el *Lema de Masur*, el flujo geodésico en la dirección vertical es únicamente ergódico.

Con lo cual el teorema queda demostrado ■

Observación 13. *De la demostración anterior podemos notar que como $\Gamma(r\omega) = r\Gamma(\omega)r^{-1}$ para cualquier $r \in SO_2(\mathbb{R})$, entonces el flujo de ω se descompone en cilindros de módulos conmensurables si y sólo si existen $v \in \mathbb{S}^1$ y $a \in \Gamma(\omega)$, $a \neq 1$ tales que $a(v) = v$.*

Por último mostramos un lema el cual en cierta forma es el inverso del Lema 15.

Definición 22. *Dados k números positivos conmensurables r_1, \dots, r_k definimos su mínimo común múltiplo como el mínimo positivo que es múltiplo entero de cada r_i .*

Lema 16. *Supongamos que el flujo geodésico asociado a una estructura plana ω en la dirección vertical posee solo componentes periódicas de módulos conmensurables. Entonces $\Gamma(\omega)$ posee un elemento de la forma*

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0,$$

con α el mínimo común múltiplo de los módulos.

Demostración. La demostración se hace de manera constructiva y la idea es ir en dirección opuesta a la demostración del Lema 15.

Supongamos que el flujo geodésico en la dirección vertical se descompone en cilindros C_1, \dots, C_k y conexiones silla. Denotemos por m_1, \dots, m_k sus módulos, con $m_i = l_i/w_i$. Para hacer mas clara la idea de la demostración actuamos de la siguiente manera: tomamos un C_i . Éste es isométrico a \hat{C}_i con la métrica inducida de su estructura plana natural ω_i , donde

$$\hat{C}_i := (0, w_i) \times \mathbb{R}/l_i\mathbb{Z}.$$

Consideremos la función

$$f : (\hat{C}_i, \omega_i) \rightarrow (\hat{C}_i, \omega_i),$$

$$f([x, y]) = \left[A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right], \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que f está bien definida y que en coordenadas locales (U_i, φ_i) , (U_j, φ_j) se ve como

$$(\varphi_i \circ f \circ \varphi_j^{-1})(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v_{ij}, \quad v_{ij} \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{III.6})$$

Además, f puede ser extendida por continuidad a la frontera de \hat{C}_i y actúa como la identidad en ésta si $\alpha = km_i$, $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, el hecho de tomar α igual al mínimo común múltiplo de los m_1, \dots, m_k nos permite extender f a los demás \hat{C}_k sin perder continuidad y como f sobre cada \hat{C}_k posee localmente la forma (III,6) entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(\omega) \blacksquare$$

III. Ejemplos de estructuras planas de Veech.

A aquellos polígonos cuya estructura plana asociada poseen grupo de Veech siendo una retícula los llamaremos *polígonos de Veech*. En esta sección final presentamos algunos ejemplos de polígonos de Veech. Dichos polígonos son precisamente aquellos que satisfacen el teorema de la dicotomía de Veech.

Hemos basado gran parte de esta sección en una recopilación hecha por *S. Lelièvre* (ver [13]). Dado que la mayoría de los ejemplos que presentamos involucran grupos triangulares, recordamos un poco sobre éstos. Para más detalles precisos se puede consultar el libro de *Alan Beardon* [1].

Definición 23. *Un subgrupo G de isometrías del plano hiperbólico se dice de tipo (α, β, γ) si y sólo si G está generado por las reflexiones de \mathbb{H}^2 con respecto a los lados de un triángulo de los ángulos interiores α , β y γ .*

De la definición es claro que necesariamente α , β y γ deben ser no negativos y $0 \leq \alpha + \beta + \gamma < \pi$. Además, sabemos que cualesquiera dos grupos del mismo tipo son conjugados dentro del grupo de isometrías de \mathbb{H}^2 . Todo grupo G de tipo (α, β, γ) tiene un subgrupo distinguido G_0 , que es el formado por los elementos de G que son conformes. A G_0 lo llamamos *el grupo conforme de tipo (α, β, γ)* .

Definición 24. *Sean $p, q, r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Un grupo G de isometrías de \mathbb{H}^2 se dice un grupo (p, q, r) -triangular si y sólo si G es un grupo conforme de tipo*

$$\left(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}\right).$$

Convenimos que $\frac{\pi}{\infty} = 0$. De manera abstracta, un grupo triangular tiene tres generadores a, b y c , con las relaciones:

$$a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^p = (bc)^q = (ca)^r = 1.$$

Además, es sabido que todo grupo triangular es Fuchsiano y que si un grupo Fuchsiano H contiene un grupo triangular, entonces necesariamente H también es triangular. Para mas detalles se puede consultar el libro [1].

Ahora estamos listos para presentar los ejemplos. En lo sucesivo, denotaremos por $\Delta(p, q, r)$ a la clase de conjugación dentro de $PSL_2(\mathbb{R})$ de un grupo (p, q, r) -triangular. Notemos que, por ejemplo, la clase del grupo modular $PSL_2(\mathbb{Z})$ es $\Delta(2, 3, \infty)$.

El caso aritmético.

Decimos que un grupo Fuchsiano es *aritmético* si es conjugado a un subgrupo de índice finito de $PSL_2(\mathbb{Z})$. En este caso se sabe que la superficie de translación asociada al billar en un rectángulo, en un triángulo recto isósceles, en un triángulo equilátero o en el triángulo de ángulos interiores $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, tiene como grupo de Veech a $PSL_2(\mathbb{Z})$. Por otro lado, tenemos que los grupos aritméticos caracterizan la geometría de la superficie:

Teorema 11. [5] *El grupo de Veech de una estructura plana (M, ω) , $V(\omega)$ es aritmético si y sólo si M define un cubriente, ramificado en a lo más en un punto, de un toro plano.*

Las superficies con estructura plana que define un cubriente ramificado en a lo más en un punto de un toro plano son llamadas *Origamis*.

Polígonos regulares.

Todas las estructuras planas asociadas a polígonos regulares tienen grupo de Veech que es una retícula. Sin embargo, podemos ser más precisos. Sea $n \geq 5$ (el resto de los casos ya se trató en el caso anterior). Entonces el grupo de Veech del n -ágono regular es un subgrupo de $\Delta(2, n, \infty)$. Además,

el índice de éste fué calculado por Veech en [15] y está dado de la manera siguiente: sea $\epsilon(n) = MCD(2, n)$, $N = \frac{n}{\epsilon(n)}$ y $\sigma(n) = MCD(4, n)$. Definamos

$$\omega(n) = n \prod_{p|n, \text{ primo}} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Entonces el índice del grupo de Veech de la estructura plana asociada al n -ágono regular tiene índice $\frac{\omega(N)}{\omega(\sigma(N))}\epsilon(n)$ en $\Delta(2, n, \infty)$.

Triángulos rectos.

En este caso se sabe con precisión cuáles polígonos dentro de esta familia son de Veech:

Teorema 12. *El grupo de Veech de un triángulo rectángulo es una retícula si y sólo si el ángulo menor de dicho triángulo es de la forma $\frac{\pi}{n}$ para algún $n \geq 4$. Si $n \geq 5$. El grupo de Veech correspondiente es $\Delta(2, n, \infty)$ si n es impar y $\Delta(m, \infty, \infty)$ si n es par.*

La prueba de la suficiencia de este enunciado y el cálculo del grupo de Veech se le debe a Vorobets. Posteriormente Kenyon y Smillie probaron que la condición es necesaria como se puede ver en [9].

Triángulos agudos.

Comenzaremos con los triángulos agudos isósceles. En este caso tenemos el siguiente teorema:

Teorema 13. *Un triángulo agudo isósceles es de Veech si y sólo si el ángulo que es diferente de los otros dos es de la forma $\frac{\pi}{n}$ para algún $n \geq 3$. Si $n \geq 4$ el grupo de Veech correspondiente es $\Delta(n, \infty, \infty)$.*

Mostrar la suficiencia de la condición se reduce al caso rectángulo dada la naturaleza de la construcción que asocia la superficie plana al triángulo isósceles (basta tirar una altura desde el ángulo de la forma π/n). Por otro lado la necesidad de la condición fue probada también por Kenyon y Smillie [9]. Finalmente, el grupo de Veech fue calculado por Hubert y Schmidt en [12].

En el universo de los triángulos agudos escalenos casi no hay triángulos de Veech, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 14. *Un triángulo agudo escaleno es de Veech si y sólo si sus ángulos interiores son de la forma:*

$$\left(\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}\right), \quad \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}\right), \quad \left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{15}\right),$$

en cuyo caso los grupos de Veech correspondientes son:

$$\Delta(9, \infty, \infty), \quad \Delta(6, \infty, \infty), \quad \Delta(15, \infty, \infty).$$

Estos triángulos aparecieron en los trabajos de Vorobets, Veech y Kenyon & Smillie citados anteriormente. Los responsables de calcular los grupos de Veech correspondientes fueron Hubert y Schmidt.

Triángulos obtusos.

Diremos que un triángulo obtuso es puntiagudo si sus ángulos interiores son de la forma

$$\left(\frac{\pi}{m}, \frac{p\pi}{m}, \frac{q\pi}{m}\right)$$

para $p < q$ y $4p \leq m$. Para éste tipo de triángulos tenemos el siguiente resultado:

Teorema 15. *[18] Sea Δ un triángulo puntiagudo con p o m impares. Entonces Δ es de Veech si y sólo si $p = 1$, en cuyo caso éste es isósceles.*

Para triángulos obtusos isósceles el siguiente resultado es debido a Veech.

Teorema 16. *Un triángulo obtuso isósceles tal que sus dos ángulos iguales son de la forma $\frac{\pi}{n}$ con $n \geq 5$ es de Veech. Su grupo de Veech es $\Delta(2, n, \infty)$ si n es impar y $\Delta(m, \infty, \infty)$ si no lo es.*

Finalmente tenemos el caso escaleno:

Teorema 17. *Para toda $n \geq 4$ el triángulo de ángulos interiores*

$$\left(\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}, \frac{(2n-3)\pi}{2n}\right)$$

tiene un grupo de Veech que es una retícula. Además, éste es $\Delta(3, n, \infty)$.

Vorobets demostró que dichos triángulos tienen grupo de Veech siendo una retícula. Ward en [18] calculó su grupo de Veech.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] BEARDON, ALAN F. *The geometry of discrete subgroups*. Graduate Texts in Mathematics Vol. 91 (Corrected reprint of the 1983 original), Springer-Verlag, New York (1995) .

- [2] CHAMANARA, R. *Affine automorphism groups of surfaces of infinite type*. In the tradition of Ahlfors and Bers, III, Contemp. Math., 355, Amer. Math. Soc. (2004), pp. 123-145.

- [3] FOX, RALPH H.; KERSHNER, RICHARD B. *Concerning the transitive properties of geodesics on a rational polyhedron*. Duke Mathematical Journal 2 (1936), no. 1, pp. 147-150.

- [4] IGOR NIKOLAEV; EVGENY ZHUZHOMA. *Flows on 2-dimensional Manifolds*. Lecture Notes in Mathematics, 1705, Springer Verlag (1999), pp. 103.

- [5] GUTKIN, EUGENE; JUDGE, CHRIS. *Affine mappings of translation surfaces: geometry and arithmetic*. Duke Math. Journal, vol. 103 (2), pp. 191-213.

- [6] KATOK, SVETLANA. *Fuchsian Groups*. Chicago lectures on mathematics series, The University of Chicago Press, First Edition (1992), pp. 80.

- [7] KATOK, ANATOLE; HASSELBLATT, BORIS. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, Reprinted (1999).

- [8] A. B. KATOK, A. N. ZEMLYAKOV. *Topological transitivity of billiards in polygons*. Mat. Zametki, 18:2 (1975), pp. 291–300.
- [9] KENYON, RICHARD; SMILLIE, JOHN. *Billiards on rational-angled triangles*. Comment. Math. Helv. vol. 75, no. 1 (2000), pp. 61-108.
- [10] S. KERCKHOFF, H. MASUR AND J. SMILLIE. *Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials*. Ann. Math. (2) 124 (1986), pp. 293-311.
- [11] HOWARD MASUR. *Closed trajectories for quadratic differentials with an application to billiards*. Duke Math. J. 53 (1986), no. 2, pp. 307-314.
- [12] HUMBER, PASCAL; SCHMIDT, TOMAS A. *Veech groups and polygonal coverings*. J. Geom. Phys. vol. 35, no. 1 (2000), pp. 75-91.
- [13] LELIÈVRE, SAMUEL. *Veech Surfaces associated to rational billiards* (2002), www.arxiv.org/abs/math/0205249.
- [14] RICHARD EVAN SCHWARTZ. *Obtuse triangular billiards II. One hundred degrees worth of periodic trajectories*. Experiment Math. 18 (2009), No. 2, pp. 137-171.
- [15] VEECH, WILLIAMS A. *The billiard in a regular polygon*. Geom. Funct. Anal. vol. 2, no. 3 (1992), pp. 341-379.
- [16] YA. B. VOROBETS. *Plane structures and billiards in rational polygons: the Veech alternative*. Uspekhi Mat. Nauk 51 (1996), no. 5(311), pp. 3-42.
- [17] A. WEIL. *Les familles de courbes sur le tore*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 1(43):5 (1936), pp. 799-782
- [18] WARD, CLAYTON C. *Calculation of Fuchsian groups associated to billiards in a rational triangle*. Ergodic Theory Dynamical Systems, vol. 18, no. 4 (1998), pp. 1019-1042.