



Universidad Michoacana De San Nicolás De
Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

Aplicación del operador de Dirichlet -Neumann
para la obtención de soluciones exactas de las
ondas atrapadas en el sistema de la sierra
subacuática de pequeña altura

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

PRESENTA:

Ricardo Ochoa Armenta



DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Petr Zhevandrov

Morelia, Michoacan.

Mayo del 2016

Primero deseo dedicar esta tesis a mis padres, ellos han sido una gran fuente de motivación para perseguir una carrera académica, después la dedicatoria va para mis hermanos y a mi cuñado, con deseos de que ellos también cumplan todas sus metas y aspiraciones.

AGRADECIMIENTOS

En este largo viaje emocional e intelectual que ha sido investigar para esta tesis, le quiero agradecer a mi asesor, el Dr. Petr, que ha sido sumamente paciente conmigo siempre ha hecho todo lo posible por ayudar y apoyarme, realmente siento mucho respeto y admiración por él y le agradezco eternamente que me haya permitido conocer su gran ética laboral y la manera en cómo saca adelante los proyectos, también quiero agradecerle en este sentido a mi compañero Misha Arturo que, tal vez involuntariamente, me motivo a trabajar más y a sacar adelante este proyecto.

Quiero agradecerle a las buenas amistades que he hecho en esta carrera por hacerme más verdadera la existencia, y por el crecimiento personal en el que indudablemente han estado involucrados. Son muchos y variados, pero quiero mencionar a mis favoritos: Manolo, Tzschyavithap, Iván, Sofía K, Memo, Cesar, Erick, Jorge y Santi. Finalmente quiero agradecer a muchos profesores que conocí en la carrera, no los anoto por que sé que no van a leer esto.

Morelia, Michoacán., Marzo del 2016

Índice general

Introducción	1
1. Formulación del problema	7
1.1. Teoría de Ondas de Amplitud pequeña	10
1.2. Ecuaciones Fundamentales	10
1.2.1. Ecuación de continuidad	10
1.2.2. Ecuación de Momentum	11
1.2.3. Condición de Cauchy-Poisson en la superficie libre	11
1.2.4. Condición de impermeabilidad del Fondo	12
1.3. Sierra subacuática de pequeña altura	13
2. Asintótica de las ondas atrapadas en el sistema	15
2.1. Encontrando el DNO	19
2.2. Resolviendo el problema de eigenvalores	20
3. Soluciones exactas de las ondas atrapadas en el sistema	27
3.1. Cambio de variables	30
3.2. Encontrando el DNO	31
3.2.1. Operador $\hat{T}$	34
3.2.2. Serie de Neumann	39
3.3. Resolviendo el problema de eigenvalores	40
A. Función de Green	45
B. Espacios de Sobolev	49
C. Desigualdad de Peetre	53
Referencias	54

Resumen

Utilizando el operador de Dirichlet Neumann, se encuentran las soluciones exactas para el sistema de una sierra subacuática de pequeña altura, se encuentra que existe un eigenvalor discreto que depende del tamaño de la perturbación en el fondo.

Palabras Clave— Mecánica de Fluidos, Teoría lineal de ondas de Agua, Operadores de Dirichlet-Neumann, Condiciones de frontera libre, Modos atrapados.

Abstract

Using the Dirichlet-Neumann Operator, we found exact solutions for the problem of a subacoustic perturbation of small amplitude, it is found that it exist a discrete eigenvalue that depends on the size of the perturbation at the bottom.

Key words — Fluid Mechanics, Small amplitude wave theory, Dirichlet-Neumann Operators, Free boundary conditions, Trapped modes.

Introducción

Los problemas con frontera libre surgen en una gran cantidad de aplicaciones en el dominio de las ciencias físicas e ingenierías. Desde el electromagnetismo y la acústica hasta la mecánica de fluidos y sólidos, modelados con valores en la frontera y con la frontera libre son una fuente indispensable de información cuantitativa de fenómenos que realmente acontecen en el mundo. Siendo herramientas importantes para científicos e ingenieros, el análisis (tanto teórico como numérico) de estos problemas es claramente crucial en el entendimiento de procesos físicos básicos.

Encontrar soluciones a estos problemas ha sido uno de los principales motores para impulsar el desarrollo de las ecuaciones diferenciales, y es gracias a esto que existen muchos métodos para hacerlo. Cada método tiene su propia particularidad y funcionalidad en la forma de ser aplicado, por ejemplo, analizando el problema de encontrar la solución al problema de una cuerda con los extremos fijos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1)$$

Basta con suponer la solución como un múltiplo de dos funciones que solo dependen de uno de los dos argumentos, sustituyendo y resolviendo las ecuaciones resultantes es bastante sencillo obtener la forma explícita, y además exacta, de esta solución. Evidentemente para problemas mas complicados, análisis como los anteriores son insuficientes y no ayudan en nada a abordar el problema.

Considérese el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Psi_y(x, y) = \phi(x) & y = 0 \\ \Psi_{yy}(x, y) + \Psi_{xx}(x, y) - \kappa^2 \Psi(x, y) = 0 & -h(x) < y < 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 & y = -h(x) \end{array} \right. \quad (2)$$

con $\kappa \in \mathbb{R}$.

La solución al problema anterior satisface una ecuación diferencial sencilla en el interior del dominio del problema y, en este caso, el valor de la función en las dos fronteras y la forma de la frontera son datos suficientes para dar con la solución; de estos valores es posible obtener el valor de la solución en cualquier punto del dominio utilizando una formula integral adecuada.

No obstante, el valor de las derivadas de la solución en la frontera puede ser interesante y/o necesario para poder establecer correctamente el problema físico. Es así que surge la complicación al producir las derivadas normales a la frontera ya que estas involucran, fundamentalmente, la solución a la ecuación diferencial dentro del dominio del problema. En esta tesis se abordará, de hecho, este tipo de problemas:

$$\begin{cases} \Psi_y(x, y) = \lambda \Psi(x, y) & y = 0 \\ \Psi_{yy}(x, y) + \Psi_{xx}(x, y) - \kappa^2 \Psi(x, y) = 0 & -h(x) < y < 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 & y = -h(x) \end{cases} \quad (3)$$

que representa el problema de ondas de agua encima de un fondo perturbado.

Es debido a estas complicaciones que se presenta la aplicación de un operador especial que trabaja específicamente con las condiciones de frontera. Esta clase de operadores reciben la clasificación de *operadores en la frontera*, en este caso será el Operador de Dirichlet-Neumann (DNO), también conocido como el operador de Steklov-Poincaré, que recibe este nombre debido a que produce una primera derivada normal (Datos de un problema con condiciones de Neumann) a partir de valores medidos en la frontera (condiciones de Dirichlet).

Grosso modo la forma de encontrar la solución es primero encontrar la solución del problema auxiliar (2) considerando la misma frontera que en (3) que tendrá la forma $\hat{L}\phi$ donde L es un operador integral, posteriormente se sustituye en la condición frontera de (3) y así se obtiene el operador de Dirichlet-Neumann $\hat{R}$:

$$\hat{R}[\phi(x)] = \hat{L}|_{y=0} \phi(x) \quad (4)$$

Es así que la solución se obtiene al encontrar las eigenfunciones y los eigenvalores de dicho operador. No obstante abordar un problema de funciones propias cuando se trabaja con este tipo de operadores requiere de técnicas especiales; se propone primero analizar el siguiente problema.

Considérese la ecuación de Schrödinger estacionaria en una dimensión:

$$\hat{H}[\psi(x)] = E\psi(x) \quad (5)$$

donde $\hat{H} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$ y $U(x)$ representa la función de potencial.

Se sabe que las soluciones de esta ecuación no se expresan siquiera en términos de funciones especiales salvo casos excepcionales; por ejemplo, para el oscilador armónico ($U(x) = kx^2$), las soluciones se obtienen en términos de los polinomios de Hermite.

Debido a la frecuencia con la que la ecuación (5) aparece en aplicaciones con $U(x)$ arbitrarias, surge el problema de construir soluciones aproximadas para potenciales generales. Por fortuna, solo es necesario focalizar la atención en el caso en que el potencial depende de un parámetro pequeño ϵ de la siguiente manera: $U(x) = \epsilon V(x)$. Donde $\epsilon \rightarrow 0$, $x \in \mathbb{R}$, y suponiendo que $V(x)$ es una función que está en el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ que tiene soporte compacto.

$$-\psi'' + \epsilon V(x)\psi = E\psi \quad (6)$$

La ecuación (6) no perturbada ($\epsilon = 0$) tiene por soluciones ondas planas:

$$\psi = e^{\pm i\kappa x}, \quad \kappa \in \mathbb{R} \quad (7)$$

para $E = \kappa^2$, es decir, el espectro continuo es el rayo positivo $E > 0$.

En la situación mas sencilla, cuando $V(x)$ describe un pozo rectangular,

$$V(x) = \begin{cases} -1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

aparece un punto del espectro discreto a la izquierda del extremo izquierdo del espectro continuo, es decir, para toda $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña, la perturbación da a luz a un eigenvalor.

Es de esperar que para $V(x)$ general, el comportamiento del problema será parecido al anterior (como lo demostraron Landau y Lifshitz [2]). así se intentará construir un *ansatz* para la solución.

Se supone que el nivel de energía es negativo y pequeño, $E = -\beta^2$, $\beta > 0$, $\beta \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Fuera del soporte de V , la solución de (6) tiene la forma

$$\psi = \text{Cte} e^{-\beta|x|} \quad (8)$$

es decir, ψ se aproxima a una constante cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Por lo tanto, su transformada de Fourier,

$$\tilde{\psi}(p) \equiv \mathcal{F}_{x \rightarrow p} \psi(x) = \int e^{-ipx} \psi(x) dx \quad (9)$$

se aproxima a una función tipo δ . Aplicando la transformada de Fourier a (6) resulta

$$(p^2 + \beta^2) \tilde{\psi} = -\frac{\epsilon}{2\pi} \int \tilde{V}(p - q) \tilde{\psi}(q) dq \quad (10)$$

como $\tilde{\psi}(p) \approx \text{Cte} \delta(p)$, la parte derecha en (10) es aproximadamente igual a $\text{Cte} \tilde{V}(p)$ y por consiguiente para ψ se tiene

$$\tilde{\psi} \approx \text{Cte} \frac{\tilde{V}(p)}{p^2 + \beta^2} \quad (11)$$

La estructura de (11) es el cociente de una función buena $\tilde{V}(p)$ y la expresión $p^2 + \beta^2$. Por lo tanto, es lógico buscar la solución en la forma

$$\tilde{\psi} = \frac{A(p, \epsilon)}{p^2 + \beta^2} \quad (12)$$

donde

$$\beta(\epsilon) = \epsilon\beta_0 + \epsilon^2\beta_1 + \dots, \quad A(p, \epsilon) = A_0(p) + \epsilon A_1(p) + \dots$$

Sustituyendo (12) en (10) produce

$$A(p, \epsilon) = -\frac{\epsilon}{2\pi} \int \frac{\tilde{V}(p-q)A(q, \epsilon)}{q^2 + \beta^2} dq \quad (13)$$

La integral en el lado derecho de (13) depende de β en una manera singular cuando $\beta \rightarrow 0$; sin embargo, se puede obtener el desarrollo de esta integral en potencias de β . El término principal se obtiene poniendo $q = 0$ en el numerador,

$$\begin{aligned} \int \frac{\tilde{V}(p-q)A(q, \epsilon)}{q^2 + \beta^2} dq &= \tilde{V}(p)A(0, \epsilon) \int \frac{dq}{q^2 + \beta^2} + O(1) \\ &= \frac{\pi}{\beta} \tilde{V}(p)A(0, \epsilon) + O(1) \end{aligned} \quad (14)$$

Multiplicando (13) por β y sustituyendo $p = 0$ se tiene, después de dividir entre $A(0, \epsilon)$, que

$$\beta \simeq -\frac{\epsilon}{2} \tilde{V}(0) = -\frac{\epsilon}{2} \int V(x) dx \quad (15)$$

es decir, β es proporcional al área encima de la gráfica de $V(x)$. Así se ha encontrado de manera aproximada el valor de los eigenvalores y la manera de encontrar la forma explícita de $A(p, \epsilon)$ se muestra claramente en [1].

Este procedimiento para encontrar las eigenfunciones al operador $\hat{H}$ sirve de una guía para el operador DNO del problema, y mas aún, si se supone que la forma de la frontera del fondo está dado por

$$h(x) = h_0 + \epsilon V(x)$$

se obtiene, en concordancia, que el eigenvalor discreto generado a partir de la perturbación también dependerá del tamaño de esta.

En este texto a la transformada de Fourier de una función $f(x)$ se le denota como

$$\tilde{f}(p) = \mathcal{F}[f(x)] := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ipx}dx$$

y a la transformada inversa como

$$\mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}(p)] := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(p)e^{ipx}dp$$

Se define la convolución de dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ como

$$f_1(x) * f_2(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-y)f_2(y)dy$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(x) \times f_2(x)] &= \frac{1}{2\pi}(\tilde{f}_1(p) * \tilde{f}_2(p)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1(p-q)\tilde{f}_2(q)dq \end{aligned}$$

Finalmente, si $f(x)$ es de soporte compacto, entonces

$$\mathcal{F}[f'(x)] = ip\tilde{f}(p)$$

Capítulo 1

Formulación del problema

Resumen

A continuación se hablará acerca de clasificación bajo la cual se contemplarán las ondas de agua, es decir, la teoría que se utiliza para delimitar qué tipo de ondas se analizará en esta tesis. Seguido de esto se presenta un breve resumen de cómo es que se obtienen las ecuaciones que las modelan y finalmente se presenta el modelado con el cuál se trabajó.

1.1. Teoría de Ondas de Amplitud pequeña

Existen varias clasificaciones de ondas de agua, así como acercamientos al estudio de estas. Desde el punto de vista físico hay una gran variedad según el fenómeno que las produce: movimientos hidráulicos, tsunamis, tormentas, etc. Desde el punto de vista matemático se pueden clasificar según las soluciones a sus ecuaciones, pues no existe una solución general; de hecho, el tipo de ecuaciones que se presentan basta para abarcar la mayoría de los elementos que nos ofrece la física matemática.

Debe tenerse en cuenta que cualquier intento de clasificación de las ondas de agua tiene algo de engañoso, la naturaleza de éstas es tan variada que seguro se encontrará un espécimen que quede fuera de alguna categoría. Cualquier definición corresponde a una situación idealizada que casi nunca sucede rigurosamente, pero aproximadamente sí, y la manera de sortear este obstáculo es delimitando la validez de la teoría.

En este escrito se usará la teoría de ondas de amplitud pequeña. Se suponen movimientos de velocidades muy pequeñas, los términos no lineales no juegan un papel importante ya que tienden a anularse debido a esta restricción de la velocidad. Las ecuaciones resultantes y sus soluciones son exactas.

1.2. Ecuaciones Fundamentales

El movimiento del agua estará definido respecto a un sistema de coordenadas cartesianas x, y, z ; donde se tomará a y como la coordenada vertical, es decir, la profundidad. Se asumirá que la superficie es libre, así que la única cota que existe la delimita el fondo. Sea $h(x, z)$ la función que describe la superficie del fondo, se tiene que:

$$\begin{aligned} -\infty < x < \infty \\ -h(xy) \leq y < \infty \\ -\infty < z < \infty \end{aligned}$$

Sea $\vec{v}$ la velocidad del fluido. Debido a que las velocidades son muy pequeñas, los efectos producidos por viscosidades y rotaciones son despreciables, además se considerará al fluido incompresible. Dado que el fluido es irrotacional, se tiene que $\nabla \times \vec{v} = 0$; donde $\nabla = (\partial x, \partial y, \partial z)$. Es posible asegurar la existencia de un potencial de velocidades ϕ , tal que $\nabla(\phi) = \vec{v}$. El problema consiste en encontrar esta función ϕ .

1.2.1. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad establece que la cantidad total de agua no cambia debido al movimiento; se expresa como $\nabla \cdot (\vec{v}) = 0$; en términos de ϕ , adquiere la forma de la

ecuación de Laplace: $\nabla^2 \phi$. Esto es, en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

1.2.2. Ecuación de Momentum

Sea ρ la densidad del agua; se tiene que un elemento de volumen unitario tiene una masa de $m = \rho \times vol = \rho$. La fuerza que experimenta este elemento es

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Por otra parte, las fuerzas externas que actúan sobre el agua son las producidas por la presión P y la gravedad g , consideradas ambas constantes. Por lo tanto

$$F = -\nabla(P + mgy) = -\nabla(P + \rho gy)$$

Se debe cumplir que las fuerzas externas sean iguales que las fuerzas internas, así que se obtienen las *ecuaciones de momentum*

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla(P^*) \quad \text{donde } P^* = (P + \rho gy)$$

Sean u, v, w las componentes de $\vec{v}$ en x, y, z respectivamente, entonces

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P^*}{\partial x}; \quad \rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P^*}{\partial y}; \quad \rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial P^*}{\partial z}$$

1.2.3. Condición de Cauchy-Poisson en la superficie libre

Tomando la ecuación de momentum en la coordenada x y desarrollando $\frac{du}{dt}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial P^*}{\partial x} \\ \Rightarrow \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P^*}{\partial x} \end{aligned}$$

Sustituyendo $u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$, $w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$ se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x} + \frac{\partial \phi^2}{\partial y} + \frac{\partial \phi^2}{\partial z} \right) - P^* \right] = 0$$

Lo mismo aplica para y y z , por lo tanto surge la *ecuación de Bernoulli para fluidos sin rotación*:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \phi^2}{\partial x} + \frac{\partial \phi^2}{\partial y} + \frac{\partial \phi^2}{\partial z} \right] - \frac{P}{\rho} - gy = f(t)$$

Al considerar velocidades pequeñas, el término cuadrático es despreciable. Se obtiene la ecuación

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + gy = f(t)$$

A la superficie en contacto con el aire se le denomina superficie libre; a esta superficie se le asociará la ecuación

$$y = \eta(x, z, t)$$

luego, la Ecuación de Bernoulli en la superficie libre tiene la forma

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta \Big|_{y=\eta} = 0; \quad \Rightarrow \eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=\eta}$$

esto es asumiendo que la función $f(t)$ y cualquier constante aditiva pueden incluirse al valor de $\frac{\partial \phi}{\partial t}$.

El error al suponer que en $y = 0$ esta relación se mantiene es también del orden de $\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \phi^2}{\partial x} + \frac{\partial \phi^2}{\partial y} + \frac{\partial \phi^2}{\partial z} \right]$. Consecuentemente puede establecerse

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=0}$$

Además la componente normal a la superficie libre de la velocidad es igual a la velocidad normal de la superficie. Esto da con buena aproximación

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Big|_{y=0} = 0$$

Que se conoce como la *condición de Cauchy-Poisson en la superficie libre*.

1.2.4. Condición de impermeabilidad del Fondo

Una de las condiciones que se le impondrán al problema es que el fondo no sea poroso, así que la componente normal al fondo de la velocidad del agua tiene que anularse. Es decir

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \nabla \phi \cdot \nabla h(x, z) = 0; \quad y = -h(x, z)$$

la ecuación anterior adquiere, usando la notación $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = f_\alpha$, la siguiente forma

$$\phi_y + \phi_x h_x + \phi_z h_z = 0; \quad y = -h(x, z)$$

El problema matemático es entonces

$$\begin{cases} \phi_{tt} + g\phi_y = 0 & y = 0 \\ \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 & -h < y < 0 \\ \phi_y + \phi_x h_x + \phi_z h_z = 0 & y = -h \end{cases} \quad (1.1)$$

1.3. Sierra subacuática de pequeña altura

A continuación se supondrá que el fondo es homogéneo respecto al eje z ; es decir $h(x, z) = h(x)$. La forma del fondo estará descrita como

$$h(x) = h_0 + \epsilon V(x)$$

donde ϵ es un parámetro pequeño y V es una función de soporte compacto, suave; es decir $V(x) \in S(\mathbb{R})$, donde $S(\mathbb{R})$ es el espacio de Schwartz de funciones. Se tendrá que $|\int_{\mathbb{R}} V(x) dx| > 0$. El caso cuando $\int_{\mathbb{R}} V(x) dx = 0$ escapa los objetivos de esta tesis.

Debe existir una dependencia armónica en el tiempo y en la coordenada z , la solución en consecuencia tiene forma $\phi = \exp[i(\omega t - \kappa z)]\Psi(x, y)$, con $\kappa \in \mathbb{R}$. Sustituyendo en (1.1), se obtiene para Ψ

$$\begin{cases} \Psi_y = \lambda \Psi & y = 0 \\ \Psi_{xx} + \Psi_{yy} - \kappa^2 = 0 & -h < y < 0 \\ \Psi_y + h' \Psi_x = 0 & y = -h \end{cases} \quad (1.2)$$

donde $\lambda = \frac{\omega^2}{g}$.

Es importante notar que la condición de frontera de la superficie libre ya tiene una forma bastante similar a la ecuación de Schrödinger estacionaria.

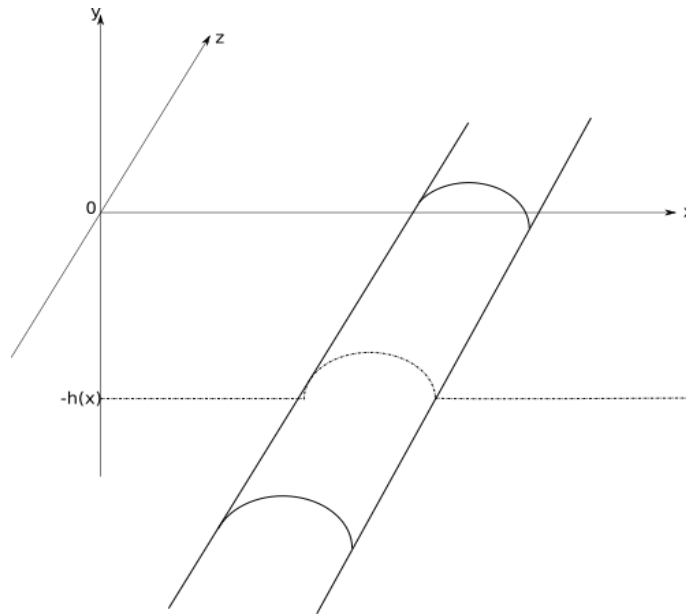


Figura 1.1: Representación grafica del problema

Capítulo 2

Asintótica de las ondas atrapadas en el sistema

Resumen

Se presenta el estudio de la asintótica al problema, Se pone especial énfasis en el método para encontrar el operador de Dirichlet-Neumann y sus correspondientes eigenvalores y eigenfunciones, finalmente se vislumbra la existencia de un modo atrapado de oscilación y se encuentra que posee una dependencia de la perturbación en el fondo.

El estudio de las asintóticas a un problema permite entender de manera cualitativa el comportamiento, tanto desde un punto de vista matemático como físico. De hecho, para aplicaciones, conocer el valor exacto de una solución es a veces tan innecesario como impráctico. Es a causa de esto que, proponiendo una forma de la solución en la cual hay términos dominantes, se puede observar y obtener la información relevante para el estudio del modelo que se está utilizando.

Del problema (1.2) explícitamente se obtiene

$$\begin{cases} \psi_y = \lambda\psi & y = 0 \\ \Delta\psi - \kappa^2\psi = 0 & -h < y < 0 \\ \psi_y + \epsilon V'(x)\psi_x = 0 & y = -h \end{cases} \quad (2.1)$$

con $\lambda = \frac{\omega^2}{g}$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Se denomina asintótica a la función que representa los términos principales del desarrollo de λ y ψ en su serie de Taylor con respecto al parámetro ϵ .

El estudio de las asintóticas a este tipo de problemas ya se ha realizado anteriormente y en esta tesis se encontrarán utilizando fuertemente como guía el proceso utilizado en [1]. De esta forma se buscará primero la forma del operador de Dirichlet-Neumann asociado, y posteriormente se encuentran tanto sus eigenfunciones y sus eigenvalores, poniendo mayor interés en el eigenvalor propio generado a partir de la perturbación en el fondo.

Considérese el siguiente problema auxiliar:

$$\begin{cases} \psi_y = \varphi & y = 0 \\ \Delta\psi - \kappa^2\psi = 0 & -h < y < 0 \\ \psi_y + \epsilon V'(x)\psi_x = 0 & y = -h \end{cases} \quad (2.2)$$

donde φ es una función tal que existen todas sus derivadas y es acotada.

Bajo esta condición se tendrá que la solución aproximada a (2.2) es de la forma

$$\psi(x, y) = \hat{R}_{\text{ap}}[\varphi(x)](x, y) \quad (2.3)$$

Donde $\hat{R}_{\text{ap}}$ es un operador integral lineal asociado.

Sustituyendo (2.3) en (2.1) y comparando la condición de frontera superior con la del problema (2.2) resulta en el operador de Dirichlet-Neumann

$$\hat{R}_{\text{ap}}[\varphi(x)]|_{y=0} = \frac{1}{\lambda}\varphi(x) \quad (2.4)$$

Esta restricción anterior define el problema de eigenvalores específico.

2.1. Encontrando el DNO

Se busca la solución aproximada de (2.2) en la forma de una serie de Taylor en epsilon.

$$\psi(x, y) = \psi_0(x, y) + \epsilon\psi_1(x, y) + O(\epsilon^2) \quad (2.5)$$

La razón de asumir la solución de esta forma es debido a que se espera una dependencia fuerte de la solución con el tamaño de la perturbación en el fondo, que depende de ϵ . De hecho el primer termino de la serie, al no depender de ϵ debe coincidir con la solución en el caso en el cual el fondo es plano, es decir, ondas planas.

Sustituyendo (2.5) en (2.2); desarrollando la condición de fondo en una serie de Taylor respecto a ϵV y considerando solamente términos del orden ϵ , se obtiene para ψ_0 y ψ_1 :

$$\begin{cases} \psi_{0y} = \varphi(x) & y = 0 \\ \psi_{0yy} + \psi_{0xx} - \kappa^2\psi_0 = 0 & -h_0 < y < 0 \\ \psi_{0y} = 0 & y = -h_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \psi_{1y} = 0 & y = 0 \\ \psi_{1yy} + \psi_{1xx} - \kappa^2\psi_0 = 0 & -h_0 < y < 0 \\ \psi_{1y} - V(x)\psi_{0yy} + V'(x)\psi_{0x} = 0 & y = -h_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Aplicando la transformada de Fourier a (2.6) con respecto a la variable x , se obtiene

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_{0y} = \tilde{\varphi}(p) & y = 0 \\ \tilde{\psi}_{0yy} - \tau^2(p)\tilde{\psi}_0 = 0 & -h < y < 0 \\ \tilde{\psi}_{0y} = 0 & y = -h \end{cases} \quad (2.8)$$

con $\tau^2(p) = \kappa^2 + p^2$.

Al solucionar (2.8) se obtiene

$$\tilde{\psi}_0(p, y) = \frac{\cosh \tau(p)(y + h_0)}{\tau(p) \sinh \tau(p)h_0} \tilde{\varphi}(p) \quad (2.9)$$

Aplicando la transformada de Fourier a (2.7) resulta

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_{1y} = 0 & y = 0 \\ \tilde{\psi}_{1yy} - \tau^2(p)\tilde{\psi}_1 = 0 & -h_0 < y < 0 \\ \tilde{\psi}_{1y} = \tilde{\theta}_1(P) & Y = -h_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

donde

$$\tilde{\theta}_1 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\kappa^2 + pq}{\tau(q) \sinh \tau(q)h_0} V(p-q)\tilde{\varphi}(q) dq$$

La solución de (2.10) nos da

$$\tilde{\psi}_1(p, y) = -\frac{\cosh \tau(p)y}{\tau(p) \sinh \tau(p)h_0} \tilde{\theta}_1 \quad (2.11)$$

Se ha encontrado, de esta manera, el operador $\hat{R}_{\text{ap}}$ de la ecuación (2.3)

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\text{ap}}[\varphi(x)] = \mathcal{F}^{-1} & \left[\frac{\cosh \tau(p)(y + h_0)}{\tau(p) \sinh \tau(p)h_0} \tilde{\varphi} \right. \\ & \left. - \frac{\epsilon}{2\pi} \frac{\cosh \tau(p)y}{\tau(p) \sinh \tau(p)h_0} \int \frac{\kappa^2 + pq}{\tau(q) \sinh \tau(q)h_0} \tilde{V}(p-q)\tilde{\varphi}(q) dq \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.2. Resolviendo el problema de eigenvalores

Sustituyendo (2.12) en (2.4), tomando la transformada de Fourier de la ecuación resultante y agrupando términos proporcionales a ϵ , se tiene que

$$L(p)\tilde{\varphi}(p) = \epsilon \hat{M}[\tilde{\varphi}(q)] \quad (2.13)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{M}[\tilde{\varphi}(q)](p) &= \frac{1}{2\pi} \int M(p, q)\tilde{\varphi}(q) dq \\ M(p, q) &= \frac{(\kappa^2 + pq)\tilde{V}(p-q)}{\tau(q) \sinh \tau(q)h_0} \tau(p) \sinh \tau(p)h_0 \\ L(p) &= \frac{1}{\tau(p) \tanh \tau(p)h_0} - \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Cuando la perturbación se anula ($\epsilon = 0$), la superficie del fondo es plana y las ondas de

agua deben ser ondas planas. al no tener perturbación en el fondo se tiene que

$$L(p)\tilde{\varphi}(p) = 0 \quad (2.14)$$

(2.14) tiene soluciones de la forma $\tilde{\varphi}(p) = \delta(p - l)$ con λ para $l \in \mathbb{R}$. Estas soluciones son transformadas de Fourier de ondas planas $\phi = \exp(ily)$, como era de esperarse, y por lo tanto el espectro continuo coincide con el rayo $\lambda \geq \kappa \tanh(\kappa h_0)$.

La perturbación dará origen a un eigenvalor a la derecha del espectro continuo por lo tanto se busca λ en la forma

$$\lambda = \kappa \tanh(\kappa h_0) - \beta^2$$

con $\beta^2 > 0$ lo suficientemente pequeño. Desarrollando $L(p)$ en su serie de Taylor con respecto a p , se sigue que

$$L(p) = a^2 p^2 + b^2 \beta^2 + O(p^4) + O(\beta^4) \quad (2.15)$$

donde

$$a^2 = -\frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{h_0}{\sinh^2 \kappa h_0} + \frac{1}{\kappa \tanh \kappa h_0} \right)$$

$$b^2 = -\frac{1}{\kappa^2 \tanh \kappa h_0}$$

tomando $l^2 = (a/b)^2$ resulta el siguiente lema:

Lema 2.2.1 *cuando $\beta \rightarrow 0$ la función $L(p)$ tiene dos ceros: $p_{\pm} = \pm i \times m(\beta)$; con $m(\beta) > 0$, $\beta > 0$ tales que $p_{\pm} \rightarrow 0$ cuando $\beta \rightarrow 0$. m es de la forma*

$$m(\beta) = \frac{\beta}{l} + O(\beta^2)$$

Demostracion: Considérese La función

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + z^2} \tanh \sqrt{\kappa^2 + z^2}} - \frac{1}{\kappa \tanh \kappa h_0}$$

cuando $z \rightarrow 0$ se tiene por (2.15) que

$$z^2 = \left(\frac{\beta^2}{l^2} \right) + O(\beta^4)$$

recordando que $z = P$ se encuentra el resultado.

Definición 2.2.1 *sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; \quad |\operatorname{Im}(z)| < a\}$ con a suficientemente pequeña. Se define $\mathcal{H}_a$ como el espacio de funciones acotadas y analíticas en la banda Ω , usando la norma del supremo.*

Se busca la solución de (2.13) en la forma

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{A(p)}{L(p)} \quad (2.16)$$

donde $A(p) \in \mathcal{H}_a$. Sustituyendo (2.16) en (2.13)

$$A(p) = \epsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{M(p, q)}{L(q)} A(q) dq \quad (2.17)$$

La función $L(p)$ posee dos ceros simples en $p = p_{\pm}$. Gracias a que $\sinh \tau(p)h_0$ no tiene ceros en una vecindad del eje real, es analítica en dicha vecindad, es as que M también lo es ahí. Por otra parte $\tau(p)$ se anula solo cuando $p = i\sqrt{k}$ as que se debe tomar a a de la definición 2.2.1 como $a < \sqrt{|\kappa|}$.

Es de esta manera que las posibles singularidades que tiene M quedan fuera de Ω y por lo tanto es analítica en este dominio.

Para calcular (2.17) cambiamos el contorno de integración a uno en el plano complejo, de manera que las singularidades estén circunscritas por este. El contorno es:

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, \quad \text{Im}(z) = 0 \wedge |z| > \frac{a}{2}\} \cup \{z \in \mathbb{C}; \quad \text{Im}(z) > 0 \wedge |z| = \frac{a}{2}\}$$

Notamos que resolver la integral de (2.17) es lo mismo que resolver la integral misma sobre el contorno Γ sumado al valor de la integral en la semicircunferencia

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C}; \quad \text{Im}(z) > 0 \wedge |z| = \frac{a}{2}\} \cup \{z \in \mathbb{C}; \quad \text{Im}(z) = 0 \wedge |z| \leq \frac{a}{2}\}$$

orientado en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

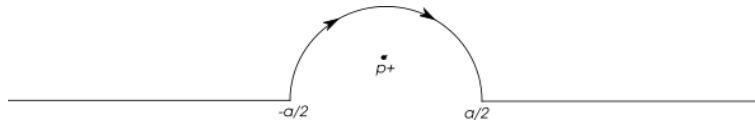


Figura 2.1: Representación gráfica del contorno Γ

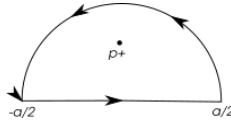


Figura 2.2: Representación gráfica del contorno γ

Se tiene entonces la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} A(p) &= \epsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{M(p, q)}{L(q)} A(q) dq \\ &= \epsilon \left(\int_{\Gamma} \frac{M(z, \zeta)}{L(\zeta)} A(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\gamma} \frac{M(z, \zeta)}{L(\zeta)} A(\zeta) d\zeta \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Aplicando el teorema del residuo de Cauchy se calcula la integral del lado derecho de la ecuación (2.18) y se obtiene

$$A(z) = \epsilon \int_{\Gamma} \frac{M(z, \zeta)}{L(\zeta)} A(\zeta) d\zeta + \frac{\epsilon}{m(\beta)} f(z) \quad (2.19)$$

Donde

$$\begin{aligned} f(z) &= A(p_+) \frac{(\kappa^2 + zp_+) \tilde{V}(z - p_+)}{\tau(z) \sinh \tau(z) h_0} \\ &\quad \times \frac{\tau^2(p_+) \sinh \tau(p_+) h_0}{\tau(p_+) h_0 + \sinh \tau(p_+) h_0 \cosh \tau(p_+) h_0} \end{aligned}$$

Sea $\tilde{V}(\zeta)$ la continuación analítica de $\tilde{V}(p)$ al plano complejo. Como las funciones propias se pueden normalizar, podemos asumir $A(p_+) = 1$.

Definición 2.2.2 definamos el operador $\hat{T}_\beta : \mathcal{H}_a \longrightarrow \mathcal{H}_a$ como

$$[\hat{T}_\beta \varphi(\zeta)](z) = \int_{\Gamma} \frac{M(z, \zeta)}{L(\zeta)} \varphi(\zeta) d\zeta$$

Hay que verificar que está bien definido el operador $\hat{T}_\beta$, es decir, falta demostrar que efectivamente $\varphi \in \mathcal{H}_a \Rightarrow \hat{T}_\beta(\varphi) \in \mathcal{H}_a$:

- el operador está acotado, i.e. $|\hat{T}_\beta(\varphi)(z)| \leq \text{cte} |\varphi(z)|$

Demostración:

Primero, se debe observar que

$$L(p) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + p^2}} - \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{p \tanh p} - \frac{1}{\lambda}$$

A causa de que $\lim_{p \rightarrow \infty} \tanh p = 1$, se tiene que $\frac{1}{L(p)} < \text{Cte} |p|$

Segundo, se tiene que para p y q grandes

$$\begin{aligned}\kappa^2 + |pq| &\leq |q|(1 + |p|) \\ \tau(q) &\leq \text{Cte} \times |q| \\ \sinh \tau(q)h_0 &\leq \text{Cte} \times e^{|q|h_0}\end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\left| \frac{M(p, q)}{L(q)} \right| &= \frac{\kappa^2 + |pq| \tilde{V}(p - q)}{|\tau(q) \sinh \tau(q)h_0 \tau(p) \sinh \tau(p)h_0|} \\ &\leq \text{Cte} \times \frac{|q|(1 + |p|) |\tilde{V}(p - q)| |q|}{|q|e^{|q|h_0} |p|e^{|p|h_0}} \\ &\leq \text{Cte} \times |\tilde{V}(p - q)|\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\left| [\hat{T}_\beta(\varphi)](z) \right| &= \int_\Gamma \left| \frac{M(p, q)}{L(q)} \varphi(q) \right| dq \\ &\leq \text{Cte} \int_\Gamma |\tilde{V}(p - q)| |\varphi(q)| dq \\ &\leq \text{Cte} |\varphi(z)| \int_\Gamma |\tilde{V}(p - q)| dq\end{aligned}$$

como $\tilde{V}(p) \in S(\mathbb{R})$, entonces la integral de la desigualdad anterior está acotada, por lo tanto

$$\left| [\hat{T}_\beta(\varphi)](z) \right| \leq \text{Cte} |\varphi(z)|$$

- Si la función $\varphi(z)$ es analítica en Ω , entonces $[\hat{T}_\beta(\varphi)](z)$.

Demostración

Es claro que M es analítica en Ω , pues se ha escogido este dominio precisamente para que esto suceda. Por otro lado, $\frac{1}{L}$ es analítica en Γ , pues dicho contorno rodea a sus singularidades, así la integral es analítica y por lo tanto $[\hat{T}_\beta(\varphi(\zeta))](z)$ también lo es.

Reescribiendo la ecuación (2.19) en términos del operador $\hat{T}_\beta$ resulta:

$$\left[1 - \epsilon \hat{T}_\beta \right] [A(\zeta)](z) = \frac{\epsilon}{m(\beta)} f(z) \quad (2.20)$$

donde 1 es el operador identidad.

Se sigue que $A(z)$ está dado por

$$A(z) = \frac{\epsilon}{m(\beta)} [1 - \epsilon \hat{T}_\beta]^{-1} f(z) \quad (2.21)$$

siendo $\hat{T}_\beta$ acotado, podemos utilizar la serie de Neumann para escribir (2.21) como

$$A(z) = \frac{\epsilon}{m(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n [\hat{T}_\beta^n f(\zeta)](z) \quad (2.22)$$

Como $A(p_+) = 1$, evaluando (2.22) en $z = p_+$, multiplicando por $m(\beta)$ se obtiene la ecuación secular para β

$$m(\beta) = \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \hat{T}_\beta^n (f(\zeta))(p_+) \quad (2.23)$$

tomando términos del orden de ϵ tenemos que

$$m(\beta) = \epsilon f(p_+) + O(\epsilon^2) \quad (2.24)$$

Se construye a continuación la función

$$F(\beta, \epsilon) = \frac{\beta}{l} + \epsilon f(p_+(\beta)) \quad (2.25)$$

Encontrar β como función de ϵ es equivalente a resolver $F(\beta, \epsilon) = 0$. Usando la expansión en serie de Taylor alrededor de $(0, 0)$ se consigue que si $F(\beta, \epsilon) = 0$, entonces

$$\beta = -\frac{F(0, 0)}{F_\beta(0, 0)} - \frac{F_\epsilon(0, 0)}{F_\beta(0, 0)} \epsilon + O(|(\beta, \epsilon)|^2) \quad (2.26)$$

se tiene que

$$F(0, 0) = 0; \quad F_\beta(0, 0) = \frac{1}{l}; \quad F_\epsilon(0, 0) = \frac{\kappa^3 \tilde{V}(0)}{\kappa h_0 + \sinh \kappa h_0 \cosh \kappa h_0}$$

por lo tanto, tenemos que

$$\beta = -\frac{\epsilon \kappa^3 \tilde{V}(0) l}{\cosh \kappa h_0 \sinh \kappa h_0 + \kappa h_0} + O(\epsilon^2) \quad (2.27)$$

Se ha obtenido, de esta manera, para ordenes de ϵ cómo depende el eigenvalor del modo atrapado del valor del área de la perturbación.

Usando (2.12), (2.16) y (2.22) se obtiene las soluciones aproximadas al problema (2.3).

Capítulo 3

Soluciones exactas de las ondas atrapadas en el sistema

Resumen

Para construir las soluciones exactas intercambia el dominio del problema a una franja a través de una transformación que nos asegura la existencia de la transformada de Fourier respecto a uno de sus nuevos argumentos, una vez hecho esto se construye el nuevo DNO sin la necesidad de suponerlo de alguna manera en específico. Se demuestra que coincide con el operador construido en el capítulo anterior y, de esta manera, que el modo atrapado de oscilación depende del área de la perturbación en el fondo.

En el capítulo anterior se encontró una buena aproximación a las soluciones del problema (1.2). Esto fue posible gracias a que las ecuaciones dependen fuertemente del parámetro ϵ y del área de la perturbación en el fondo. Ya se han encontrado soluciones exactas a este problema en [1], estas soluciones son independientes al tamaño de la perturbación; es debido a esta generalidad que el tratamiento matemático es muy laborioso. Por el contrario, al considerar el tamaño de esta, el proceso de encontrarla se puede hacer mas facilmente.

3.1. Cambio de variables

Al analizar el dominio en el cual se busca las soluciones del problema, vemos que es imposible aplicar la transformada de Fourier respecto a x debido a que no se tiene bien definida la función en ciertas regiones, para sortear este problema buscamos pasar la dependencia de la perturbación que tiene la frontera en el fondo a las ecuaciones. Al hacer esto obtendremos un problema equivalente en una franja, y en este dominio es posible aplicar la transformada de Fourier. Más aún, las ecuaciones mantienen, en general, su forma.

Es para este fin que se utilizará el cambio de variables

$$\begin{aligned} x &= x \\ \eta &= \frac{1}{h(x)}y \end{aligned} \quad (3.1)$$

Observación: El determinante del jacobiano de esta transformación es $\frac{1}{h(x)}$ que no posee ninguna singularidad y además es suave (existen todas las derivadas de $V(x)$), así que no habrá problemas al trasladar las ecuaciones a las nuevas coordenadas.

Definición 3.1.1 *Defínase $\mathcal{U}(x, \eta)$ tal que $\mathcal{U}(x(x, y), \eta(x, y)) = \psi(x, y)$*

Haciendo las sustituciones necesarias en el problema 1.2 , se obtiene el siguiente problema de Neumann

$$\begin{cases} \mathcal{U}_\eta \left(\frac{1}{h(x)} \right) = \lambda \mathcal{U} & \eta = 0 \\ \frac{1}{h_0^2} \mathcal{U}_{\eta\eta} + \mathcal{U}_{xx} - \kappa^2 \mathcal{U} = \epsilon F(x, \eta, \mathcal{U}) & -1 < \eta < 0 \\ \mathcal{U}_\eta = \epsilon G(x, \mathcal{U}) & \eta = -1 \end{cases} \quad (3.2)$$

donde

$$F(x, \eta, \mathcal{U}) := f_1(x, \eta)(\mathcal{U}_{xx} - \kappa^2 \mathcal{U}) + f_2(x, \eta)\mathcal{U}_{x\eta} + f_3(x, \eta)\mathcal{U}_\eta$$

$$f_1(x, \eta) := \frac{-\frac{2V(x)}{h_0} + \epsilon \left(V(x)'^2 \eta^2 - \frac{V(x)^2}{h_0^2} \right)}{1 + \epsilon^2 V(x)'^2 \eta^2}$$

$$f_2(x, \eta) := 2\eta \left(\frac{V(x)' + \epsilon \frac{V(x)V(x)'}{h_0}}{h_0(1 + \epsilon^2 V(x)'^2 \eta^2)} \right)$$

$$f_3(x, \eta) := \frac{h_0 V(x)'' + \epsilon(V(x)V(x)'' - 2V(x)')^2}{h_0^2(1 + \epsilon^2 V(x)'^2 \eta^2)}$$

$$G(x, \mathcal{U}) := g_1(x)\mathcal{U}(x, -1)$$

$$g_1(x) := -\frac{h_0 V(x)' + \epsilon V(x)V(x)'}{1 - \epsilon V(x)'^2 \eta}$$

3.2. Encontrando el DNO

Considerese el problema auxiliar

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{U}_\eta \left(\frac{1}{h(x)} \right) = \psi(x) & \eta = 0 \\ \frac{1}{h_0^2} \mathcal{U}_{\eta\eta} + \mathcal{U}_{xx} - \kappa^2 \mathcal{U} = \epsilon F(x, \eta) & -1 < \eta < 0 \\ \mathcal{U}_\eta = \epsilon G(x) & \eta = -1 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

De la misma manera que en el capítulo 2, resolver este problema dará una solución de la forma

$$\mathcal{U}(x, \eta) = \hat{R}[\psi(x)] \quad (3.4)$$

donde $\hat{R}$ es un operador lineal integral. sustituyendo (3.4) en (3.2) resultará en la ecuación de eigenvalores para el operador de Dirichlet-Neumann $\hat{R}|_{\eta=0}$

$$\hat{R}[\psi(x)]|_{\eta=0} = \frac{1}{\lambda} \psi(x) \quad (3.5)$$

Aplicando la transformada de Fourier a (3.3) se obtiene

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{U}}_\eta = h_0 \tilde{\psi}(p) + \epsilon(\tilde{V}(p) * \tilde{\psi}(p)) & \eta = 0 \\ \frac{1}{h_0^2} \tilde{\mathcal{U}}_{\eta\eta} - \tau(p)^2 \tilde{\mathcal{U}} = \epsilon \tilde{F} & -1 < \eta < 0 \\ \tilde{\mathcal{U}}_\eta = \epsilon \tilde{G} & \eta = -1 \end{cases} \quad (3.6)$$

donde $\tau(p)^2 := \kappa^2 + p^2$

Para resolver el problema (3.6), este se fracciona en dos problemas más sencillos:

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{U}}_\eta = h_0 \tilde{\psi}(p) + \epsilon(\tilde{V}(p) * \tilde{\psi}(p)) & \eta = 0 \\ \frac{1}{h_0^2} \tilde{\mathcal{U}}_{\eta\eta} - \tau(p)^2 \tilde{\mathcal{U}} = 0 & -1 < \eta < 0 \\ \tilde{\mathcal{U}}_\eta = \epsilon \tilde{G}(p) & \eta = -1 \end{cases} \quad (3.7)$$

su solución es

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}(p, \eta) = & -\epsilon \frac{\cosh \tau(p) h_0 \eta}{\tau(p) h_0 \sinh \tau(p) h_0} \tilde{G}(p) \\ & + \frac{\cosh \tau(p) h_0 (1 + \eta)}{\tau h_0 \sinh \tau(p) h_0} \left(h_0 \tilde{\psi}(p) + \epsilon(\tilde{V}(p) * \tilde{\psi}(p)) \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

El segundo problema es

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{U}}_\eta = 0 & \eta = 0 \\ \frac{1}{h_0^2} \tilde{\mathcal{U}}_{\eta\eta} - \tau(p)^2 \tilde{\mathcal{U}} = \epsilon \tilde{F} & -1 < \eta < 0 \\ \tilde{\mathcal{U}}_\eta = 0 & \eta = -1 \end{cases} \quad (3.9)$$

que tiene por solución

$$\tilde{\mathcal{U}}(p, \eta) = \epsilon \int_{-1}^0 \mathcal{G}(p, \xi, \eta) \tilde{F}(p, \xi) d\xi \quad (3.10)$$

donde $\mathcal{G}(p, \xi, \eta)$ es la función de Green asociada al problema (3.9), está calculada en el

apéndice A y tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{G}(p, \xi, \eta) = - \begin{cases} \frac{h_0 \cosh \tau(p) h_0 (1 + \xi) \cosh \tau(p) h_0 \eta}{\tau(p) \sinh \tau(p) h_0} & \xi < \eta < 0 \\ \frac{h_0 \cosh \tau(p) h_0 (1 + \xi) \cosh \tau(p) h_0 \eta}{\tau(p) \sinh \tau(p) h_0} & -1 < \eta < \xi \end{cases} \quad (3.11)$$

La solución a (3.6) es evidentemente la suma de (3.8) y (3.10):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}(p, \eta) = \epsilon \left[-\frac{\cosh \tau(p) h_0 \eta}{\tau h_0 \sinh \tau(p) h_0} \tilde{G}(p) + \int_{-1}^0 \mathcal{G}(p, \xi, \eta) \tilde{F}(p, \xi) d\xi \right] \\ + \frac{\cosh \tau(p) h_0 (1 + \eta)}{\tau h_0 \sinh \tau(p) h_0} (h_0 \tilde{\psi}(p) + \epsilon \tilde{V}(p) * \tilde{\psi}(p)) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Las transformadas de Fourier de las funciones F y G tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned} \tilde{F}(p, \eta) = \tilde{f}_1(p, \eta) * (\tau(p)^2 \tilde{\mathcal{U}}(p, \eta)) + \tilde{f}_2(p, \eta) * (ip \tilde{\mathcal{U}}_\eta(p, \eta)) \\ + \tilde{f}_3(p\eta) * \tilde{\mathcal{U}}_\eta(p, \eta) \end{aligned}$$

$$\tilde{G}(p) = \tilde{g}_1(p) * (ip \tilde{\mathcal{U}}(p, -1))$$

Observación : Es importante notar que tanto $\tilde{F}$ como $\tilde{G}$ son reales, esto es gracias a que las transformadas de Fourier de V^2 , V'^2 , y V'' son reales. Además $\tilde{F}$ y $\tilde{G}$ se aproximan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \tilde{F}(p, \eta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{2}{h_0} \int \tilde{V}(p - q) \tau(q)^2 \tilde{\mathcal{U}}(q, \eta) dq \right. \\ \left. - \frac{1}{h_0} \int (p^2 - q^2) \tilde{V}(p - q) \eta \tilde{\mathcal{U}}_{eta}(q, \eta) dq + O(\epsilon) \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{2\pi} \left\{ h_0 \int (p - q) q \tilde{V}(p - q) \tilde{\mathcal{U}}(q, -1) dq \right\} + O(\epsilon) \quad (3.14)$$

Para poder encontrar la solución a la ecuación (3.12), es necesario que esta se escriba de otra manera. Se muestra a continuación el proceso.

Definición 3.2.1 Sea $H^1(\Omega)$ el espacio de funciones sobre la franja

$$\Omega = \{(p, \eta); p \in \mathbb{R}, -1 \leq \eta \leq 0\}$$

Con la norma

$$\|\varphi(p, \eta)\|^2 = \iint \left((1 + p^2) \varphi(p, \eta)^2 + \varphi_\eta(p, \eta)^2 \right) dp d\eta$$

Observación : La norma anterior es la misma que en el espacio de Sobolev restringido a la franja Ω , esto es gracias a la identidad de Parseval que se encuentra en el apéndice B:

$$\begin{aligned} \|\varphi(x, \eta)\|_{H^1}^2 &= \iint \left(\varphi(x, \eta)^2 + \varphi_x(x, \eta)^2 + \varphi_\eta(x, \eta)^2 \right) dP d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint \left((1 + p^2) \tilde{\varphi}(p, \eta)^2 + \tilde{\varphi}_\eta(p, \eta)^2 \right) P d\eta \end{aligned}$$

A partir de este momento, cuando se hable de la norma de una función, estará implícito que se habla de la norma en $\hat{H}^1$, es decir

$$\|\varphi(x, \eta)\|^2 := \|\varphi(x, \eta)\|_{H^1}^2$$

3.2.1. Operador $\hat{T}$

La forma de la ecuación (3.12) muestra que U tiene la siguiente forma:

$$\tilde{\mathcal{U}}(p, \eta) = \epsilon \hat{T}[\tilde{\mathcal{U}}(p, \eta)] + \hat{L}[\psi(p)]$$

donde $\hat{L}$ y $\hat{T}$ son operadores integrales. Puesto que se desea hacer algebra con ellos es necesario definir propiamente a $\hat{T}$, para esto se introduce el siguiente lema:

Lema 3.2.1 Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y sea g tal que $g = \int K(x, y) f(y) dy$.

Si $\int |K(x, y)| dx < k$, $\int |K(x, y)| dy < k$; entonces $g \in L^2(\mathbb{R})$; i.e.

$$\int g(x)^2 dx < k^2 \|f(x)\|_{L^2}^2$$

Demostracin: Se puede asumir que $K(x, y) \geq 0$. Por un lado se tiene, por desigualdad de Cauchy Schwarz, que

$$\left| \int \sqrt{K(x, y)} \sqrt{K(x, y)} f(y) dy \right| \leq \sqrt{\int K(x, y)} \cdot \sqrt{\int K(x, y) f(y)^2 dy}$$

por otro lado, se tiene que

$$g(x)^2 = \int K(x, y) f(y) dy \cdot \int K(x, y) f(y) dy$$

Luego

$$\begin{aligned}
\|g\|^2 &= \int g^2 dx \leq \iint K(x, y) dy \cdot K(x, y) f(y)^2 dy dx \\
&= k \left(\int K(x, y) dx \right) \int f(y)^2 dy \\
&\leq k^2 \int f(y)^2 dy \\
&\leq k^2 \|f\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Definición 3.2.2 Sea $\hat{T}$ un operador lineal tal que:

$$\hat{T} : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$$

$$\hat{T}(\varphi(p, \eta)) := (\hat{K}_1 + \hat{K}_2 - \hat{K}_3)[\varphi(p, \eta)]$$

donde $\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{K}_3$ operadores lineales tales que

$$\hat{K}_1(\varphi(p, \eta)) := \int_{-1}^0 \mathcal{G}(p, \xi, \eta) \left[\tilde{f}_1(p, \xi) * \tau(p)^2 \varphi(p, \xi) \right]$$

$$\begin{aligned}
\hat{K}_2(\varphi(p, \eta)) &:= \frac{1}{2\pi} \int \int_{-1}^0 \mathcal{G}(p, \xi, \eta) \left[iq \tilde{f}_2(p - q, \xi) + \tilde{f}_3(p - q, \xi) \right] \\
&\quad \times \varphi_\eta(q, \xi) d\xi dq
\end{aligned}$$

$$\hat{K}_3(\varphi(p, \eta)) := \frac{\cosh \tau(p) h_0 \eta}{\tau(p) h_0 \sinh \tau(p) h_0} (\tilde{g}_1 * ip \varphi(p, -1))$$

Hay que demostrar que el operador $\hat{T}$ de la definición 3.2.2 está bien definido, es decir, que efectivamente $\hat{T}[\varphi] \in H^1(\Omega)$.

Sea $\varphi \in H^1(\Omega)$; por demostrar:

1. $\hat{K}_1(\varphi(p, \eta)) \in H^1(\Omega)$

Demostracion:

$$\begin{aligned}
\|\hat{K}_1(\varphi(p, \eta))\|^2 &= \iint (1 + p^2) (\hat{K}_2(\varphi(p, \eta)))^2 \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \hat{K}_2(\varphi(p, \eta)) \right)^2 dp d\eta
\end{aligned}$$

Definase I_{11} como la primera integral y a I_{12} como la segunda, se analizara que estn acotadas ambas integrales. Tomando la primera aproximación de $\hat{f}_1(t)$, es decir, sin tomar en cuenta los terminos de orden de ϵ , se tiene que

$$I_{11} \leq \text{Cte} \int (1 + p^2) \int \left(\int_{-1}^0 \mathcal{G}(p, \xi, \eta) \int \tilde{V}(p - q) \tau(q)^2 \varphi(q, \xi) dq d\xi \right)^2 d\eta dp$$

usando el lema 3.2.1 se tiene que

$$I_{11} \leq \int (1 + p^2) \left[\int_{-1}^0 \mathcal{G}(p, \xi, \eta) d\xi \right]^2 \int_{-1}^0 \left(\tilde{V}(p) * \tau(p)^2 \varphi(p, \xi) \right)^2 d\xi dp$$

nótese que $\left| \int \mathcal{G}(p, \xi, \eta) d\xi \right| \leq \text{Cte} \frac{1}{\tau(p)^2}$ entonces

$$I_{11} \leq \text{Cte} \int \frac{1 + p^2}{\tau(p)^4} \int_{-1}^0 \left(\tilde{V}(p) * \tau(p)^2 \varphi(p, \xi) \right)^2 d\xi dp$$

como $1 + p^2 \leq \text{Cte}(\kappa^2 + p^2) = \text{Cte} \times \tau(p)^2$, cambiando el orden de integración y desarrollando la convolución surge que

$$\begin{aligned} I_{11} &\leq \text{Cte} \int_{-1}^0 \int \left(\int \frac{1}{\tau(p)} \tilde{V}(p - q) \tau(q)^2 \varphi(q, \xi) dq \right)^2 dp d\xi \\ &\leq \text{Cte} \int_{-1}^0 \int \left(\int \frac{1 + |q|}{1 + |p|} \tilde{V}(p - q) (1 + |q|) \varphi(q, \xi) dq \right)^2 dp d\xi \end{aligned}$$

Usando nuevamente el lema 3.2.1

$$I_{11} \leq \text{Cte} \int_{-1}^0 \left[\int \frac{1 + |q|}{1 + |p|} \tilde{V}(p - q) dq \right]^2 \int \left[\tau(q)^2 \varphi(q, \xi) \right]^2 dq d\xi$$

utilizando la desigualdad de Peetre y que $\tilde{V}$ está en el espacio de Schwarz, resulta que

$$\int \frac{1 + |q|}{1 + |p|} \tilde{V}(p - q) \leq \int (1 + |p - q|)^{-2} dq d\xi$$

y la integral de la derecha es integrable. Por lo tanto

$$\begin{aligned} I_{11} &\leq \text{Cte} \int_{-1}^0 \int \tau(q)^2 \varphi(q, \xi)^2 d\xi dq \\ &\leq \text{Cte} \int_{-1}^0 \int (1 + |q|)^2 \varphi(q, \xi)^2 d\xi dq \\ &\leq \text{Cte} \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \hat{K}_1(\varphi(p, \eta)) = \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-1}^0 \mathcal{G}(p, \xi, \eta) \tilde{V}(p) * \tau(p)^2 \varphi(p, \xi) d\xi$$

se tiene que al aplicar la derivada al lado derecho

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \hat{K}_1(\varphi(p, \eta)) = \int_{-1}^0 \mathcal{G}_\eta(p, \xi, \eta) \tilde{V}(p) * \tau(p)^2 \varphi(p, \xi) d\xi$$

usando lema 3.2.1

$$\begin{aligned} I_{12} &\leq \text{Cte} \int \left(\int_{-1}^0 \mathcal{G}_\eta(p, \xi, \eta) d\xi \right)^2 \int_{-1}^0 \left(\tilde{V}(p) * \tau(p)^2 \varphi(p, \xi) \right)^2 d\xi dp \\ &\leq \int \frac{1}{\tau(p)^2} \int_{-1}^0 \left(\tilde{V}(p) * \tau(p)^2 \varphi(p, \xi) \right)^2 d\xi dp \end{aligned}$$

La ultima integral ya se ha demostrado es menor que $\text{Cte} \|\varphi\|^2$ Así, se tiene que

$$\|\hat{K}_1(\varphi(p, \xi))\|^2 \leq \text{Cte} \|\varphi\|^2$$

2. $\hat{K}_2(\varphi(p, \eta)) \in H^1(\Omega)$

Demostración: Tomando el segundo término de la aproximación de $\tilde{f}$, es claro que

$$\begin{aligned} \|\hat{K}_2(\varphi(p, \eta))\|^2 &\leq \left| \iint (1 + p^2) \left[\int_{-1}^0 \mathcal{G}(p, \xi, \eta) \int \frac{p^2 - q^2}{h_0} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \tilde{V}(p - q) \xi \varphi_\eta(q, \xi) dq d\xi \right]^2 d\eta dp \right. \\ &\quad \left. + \iint \left[\int_{-1}^0 \mathcal{G}(p, \xi, \eta) \int \left(\frac{p^2 - q}{h_0} \right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \tilde{V}(p - q) \xi \varphi_\eta(q, \xi) dq d\xi \right]^2 d\eta dp \right| \end{aligned}$$

Denomínese a la primera integral I_{21} y a la segunda I_{22} . por lema 3.2.1

$$\begin{aligned} I_{21} &\leq \text{Cte} \int \frac{1}{\tau(p)^4} (1 + p^2) \int \left(\int |p^2 - q^2| \tilde{V}(p - q) \xi \varphi_\eta(q, \xi) dq \right)^2 d\xi dp \\ &\leq \text{Cte} \iint \left[\int \frac{1}{\tau(p)} (|p - q|^2 + 2|q||p - q|) \right. \\ &\quad \left. \times \tilde{V}(p - q) \xi \varphi_\eta(q, \xi) dq \right]^2 d\xi dp \\ &\leq \text{Cte} \iint \left[\int (1 + |p - q|)^2 \tilde{V}(p - q) \varphi_\eta(q, \xi) dq \right]^2 dp d\xi \end{aligned}$$

usando lema 3.2.1 se tiene que

$$I_{21} \leq \text{Cte} \int \left[\int (1 + |p - q|)^2 \tilde{V}(p - q) dq \right]^2 \int \varphi_\eta(q, \xi)^2 dq d\xi$$

Como $\tilde{V}$ est en el espacio de Schwarz y utilizando la desigualdad de Peetre[C], la primera integral es acotada; y como $\iint \varphi_\eta(q, \xi)^2 d\xi dq$ es una parte de la norma de φ , entonces

$$I_{21} \leq \text{Cte} \|\varphi\|^2$$

Para verificar que la integral I_{22} es acotada, el proceso es análogo. Entonces

$$\|\hat{K}_2(\varphi(p, \eta))\|^2 \leq \text{Cte} \|\varphi\|^2$$

3. $\hat{K}_3(\varphi(p, \eta)) \in H^1(\Omega)$

Demostración: Tomando la primera aproximación de g , se tiene que

$$\begin{aligned} \|\hat{K}_3(\varphi(p, \eta))\|^2 &\leq \text{Cte} \iint (1 + p^2) \left(\frac{\cosh \eta}{\tau(p) \sinh \tau(p) h_0} \times \right. \\ &\quad \times \left. \int \tilde{V}(p - q) q(p - q) \varphi(q, -1) dq \right)^2 d\eta dp \\ &\quad + \iint \left(\frac{\sinh \tau(p) h_0 \eta}{\sinh \tau(p) h_0} \times \right. \\ &\quad \times \left. \int \tilde{V}(p - q) q(p - q) \varphi(q, -1) dq \right)^2 d\eta dp \end{aligned}$$

Se analizará sólo la primera integral, a la cual se le llamará I_{31} , pues el proceso es análogo para demostrar que la segunda es acotada.

Se tiene que

$$\int_{-1}^0 (\cosh \tau(p) h_0 \eta)^2 d\eta \leq \text{Cte} \frac{1}{\tau(p)}$$

Luego, considerando que $|\frac{1 + p^2}{\tau(p)}| \leq \text{Cte}(1 + |p|)$, resulta que

$$\begin{aligned} I_{31} &\leq \text{Cte} \int (1 + |p|) \left(\int (1 + |p - q|)^{-1} \tilde{V}(p - q) \varphi(q, -1) dq \right)^2 dp \\ &\leq \text{Cte} \int \left(\int \tilde{V}(p - q) (1 + |p - q|)^{-1} (1 + |p|)^{\frac{1}{2}} \varphi(q, -1) dq \right)^2 dp \end{aligned}$$

Por lema 3.2.1

$$I_{31} \leq \text{Cte} \left(\int \tilde{V}(p-q)(1+|p-q|)^{-1} dq \right)^2 \int (1+|p|)\varphi(q, -1)^2 dq$$

La primera integral se acota similarmente como con los operadores anteriores. Adems se tiene que la segunda integral también está acotada, como se demuestra en el apéndice B, así

$$I_{31} \leq \text{Cte} \|\varphi\|^2$$

Por lo tanto

$$\|\hat{K}_3(\varphi(p, \eta))\|^2 \leq \text{Cte} \|\varphi\|^2$$

Observación: Por conveniencia se escribirá al operador $\hat{T}$ como

$$\hat{T}[\varphi(p, \eta)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{T}_1[\varphi(p, \eta)](p, q, \eta) dq$$

Donde

$$\begin{aligned} \hat{T}_1[\varphi(p, \eta)](p, q, \eta) &= -\frac{\cosh \tau(p)h_0\eta}{\tau(p) \sinh \tau(p)h_0} \tilde{g}_1(p-q)iq\varphi(q, -1) \\ &+ \int_{-1}^0 \mathcal{G}(p, \xi, \eta) \left\{ \tilde{f}_1(p-q)\tau(q)^2\varphi(q, \xi) \right. \\ &\quad \left. (iq\tilde{f}_2(p-q, \xi) + \tilde{f}_3(p-q, \xi))\varphi_\eta(q, \xi) \right\} d\xi \end{aligned}$$

3.2.2. Serie de Neumann

Gracias a la definición 3.2.2 es posible reescribir a (3.13) como

$$\tilde{\mathcal{U}}(p, \eta) = \frac{\cosh \tau(p)h_0(1+\eta)}{\tau(p) \sinh \tau(p)h_0} (h_0 + \epsilon \tilde{V}(p)*)\tilde{\psi}(p) + \epsilon \hat{T}[\tilde{\mathcal{U}}(p, \eta)] \quad (3.15)$$

Como $\hat{T}[\varphi] \in H^1(\Omega)$, entonces $\hat{T}$ está acotado y podemos reescribir a $\tilde{\mathcal{U}}$ de la siguiente manera

$$\tilde{\mathcal{U}}(p, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \hat{T}^n \left[\frac{\cosh \tau(p)h_0(1+\eta)}{\tau(p) \sinh \tau(p)h_0} (h_0 + \epsilon \tilde{V}(p)*)\tilde{\psi}(p) \right] \quad (3.16)$$

Es claro que el operador $\hat{R}$ de la ecuación (3.4) tiene la forma

$$\hat{R}[\psi(x)](x, \eta) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \hat{T}^n \left[\frac{\cosh \tau(p)h_0(1+\eta)}{\tau(p) \sinh \tau(p)h_0} (h_0 + \epsilon \tilde{V}(p)*)\tilde{\psi}(p) \right] \right\} \quad (3.17)$$

Observación: De la ecuación (3.17) es evidente que la solución al problema (3.3) tiene la

forma

$$\mathcal{U}(x, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \hat{L}_n(x, \eta) [\psi(x)]$$

con $\hat{L}_n \leq \text{Cte}^n$, lo cual justifica la forma que se supuso la solución en (2.5)

3.3. Resolviendo el problema de eigenvalores

Sustituyendo la ecuación (3.17) en (3.5), sacando al resultado la transformada de Fourier y agrupando terminos proporcionales a ϵ , se tiene que

$$L(p)\tilde{\psi}(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \hat{M}_i[\tilde{\psi}(p)](q) \Big|_{\eta=0} \quad (3.18)$$

Donde

$$\begin{aligned} L(p) &:= \frac{1}{\tau(p) \tanh \tau(p)} - \frac{1}{\lambda} \\ \hat{M}_i[\tilde{\psi}(p)](p, \eta) &:= \int \hat{T}_1 \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{M}_{i-1}[\tilde{\psi}(p)](q) dq \right] (p, q, \eta) dq \\ \hat{M}_1[\tilde{\psi}(p)](p, \eta) &:= \int \hat{M}_0[\tilde{\psi}(p)](p, q, \eta) dq \\ \hat{M}_0[\tilde{\psi}(p)](p, q, \eta) &:= \frac{\cosh \tau(p) h_0 (1 + \eta)}{\tau(p) \sinh \tau(p) h_0} \tilde{V}(p - q) \tilde{\psi}(q) \\ &\quad + \hat{T}_1 \left[h_0 \frac{\cosh \tau(p) h_0 p (1 + \eta)}{\tau(p) \sinh \tau(p) h_0 p} \tilde{\psi}(p) \right] (p, q, \eta) \end{aligned}$$

La ecuación (3.18) tiene la misma forma que la ecuación (2.13), y de hecho $L(p)$ es exactamente el mismo en ambas ecuaciones. De tal suerte que se cumple lo siguiente:

- Cuando la perturbación se anula $\epsilon = 0$, se tienen soluciones $\tilde{\psi}(p) = \delta(p - l)$ con $\lambda = \sqrt{l^2 + \kappa^2} \tanh \sqrt{l^2 + \kappa^2} h_0$ y $l \in \mathbb{R}$. Estas soluciones son transformaciones de Fourier de ondas planas $\psi(x) = \exp ilx$ y por tanto, el espectro continuo coincide con el rayo $\lambda \geq \kappa \tanh \kappa h_0$.
- La perturbación dará origen a un eigenvalor a la izquierda; por lo tanto, se busca el eigenvalor discreto como $\lambda = \lambda_0 - \beta^2$, con $\lambda_0 = \kappa \tanh \kappa h_0$ y $\beta^2 > 0$ pequeño.
- $L(p)$ tiene aproximadamente dos ceros, p_+ y p_- , tales que

$$p_{\pm} = \pm im(\beta) + O(\beta^2)$$

$$\text{con } m(\beta) = \frac{\beta}{l} \text{ y } l^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{\cosh \kappa h_0} + \frac{1}{\kappa} \tanh \kappa h_0 \right)$$

Se busca la solución a (3.18) como

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{A(p)}{L(p)} \quad (3.19)$$

$A(p)$ es una función suave y con soporte compacto. Sustituyendo (3.19) en (3.18) se sigue que

$$A(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \hat{M}_i \left[\frac{A(p)}{L(p)} \right] \Big|_{\eta=0} \quad (3.20)$$

A continuación se encontrarán los eigenvalores y las eigenfunciones para el operador $\hat{R}$

Definición 3.3.1 Sea $H_a(\Omega_{\mathbb{C}})$ el espacio de funciones analíticas y acotadas en la banda:

$$\Omega_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im}(z)| < a\}$$

con $a < \kappa$

Se desea calcular el valor de la integral de $\int_{\mathbb{R}} \hat{M}_0 \left[\frac{A(p)}{L(p)} \right] (p, q, \eta) dq$, ya que a partir del valor obtenido, es posible calcular el resto de las integrales de (3.20).

Tomando

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Im}(z) = 0 \wedge |z| > \frac{a}{2} \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C}; \quad \operatorname{Im}(z) > 0 \wedge |z| = \frac{a}{2} \right\} \\ \gamma &= \left\{ z \in \mathbb{C}; \quad \operatorname{Im}(z) > 0 \wedge |z| = \frac{a}{2} \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C}; \quad \operatorname{Im}(z) = 0 \wedge |z| \leq \frac{a}{2} \right\} \end{aligned}$$

se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{M}_1 \left[\frac{A(z)}{L(z)} \right] (z, \zeta, \eta) d\zeta = \int_{\gamma} \hat{M}_1 \left[\frac{A(z)}{L(z)} \right] d\zeta + \int_{\Gamma} \hat{M}_1 \left[\frac{A(z)}{L(z)} \right] d\zeta \quad (3.21)$$

Se han escogido tanto γ como Γ de manera que circunscriban al polo p_+ . Esto es por que ahora, utilizando el teorema de residuo de Cauchy, es posible calcular de la ecuación (3.21) el valor de la integral sobre el contorno γ , además de que $\hat{M}_1$ es analítica también en Γ . As se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{M}_1 \left[\frac{A(z)}{L(z)} \right] (z, \zeta, \eta) d\zeta = \int_{\Gamma} \hat{M}_1 \left[\frac{A(z)}{L(z)} \right] d\zeta + \frac{1}{m(b)} S_1(z, \eta) \quad (3.22)$$

con

$$S_1((z, \eta)) := \left\{ \frac{\cosh \tau(z) h_0 (1 + \eta)}{\tau(z) \sinh \tau(z) h_0} \tilde{V}(z - p_+) + \hat{T}_1 \left[\frac{h_0 \cosh \tau(p_+) h_0 (1 + \eta)}{\tau(p_+) \sinh \tau(p_+) h_0} \right] (z, p_+, \eta) \right\} \Lambda(p_+) A(p_+)$$

donde

$$\Lambda(p_+) := \left\{ \frac{\tau(p_+)^3 \sinh \tau(p_+) h_0}{h_0 \tau(p_+) + \cosh \tau(p_+) h_0 \sinh \tau(p_+) h_0} \right\}$$

puesto que cualquier eigenfunción se puede normalizar, considérese

$$A(p_+) = 1$$

Al sustituir el valor de $\int_{\mathbb{R}} \hat{M}_1 \left[\frac{A(z)}{L(z)} \right] d\zeta$ en la ecuación (3.20) resulta

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \hat{M}_i[A(z)] \Big|_{\eta=0} \\ &= \frac{1}{m(\beta)} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i S_i(z, \eta) \Big|_{\eta=0} \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{M}_i[\varphi(z)](z, \eta) &:= \int_{\mathbb{R}} \hat{T}_1 \left[\hat{M}_{i-1}[\varphi(z)] \right] (z, \zeta, \eta) d\zeta \\ \hat{M}_1[\varphi(z)](z, \eta) &:= \int_{\Gamma} \hat{M}_0 \left[\frac{\varphi(z)}{L(z)} \right] (z, \zeta, \eta) d\zeta \\ S_i(z, \eta) &:= \int_{\mathbb{R}} \hat{T}_1[S_{i-1}(z, \eta)](z, \zeta, \eta) d\zeta \end{aligned}$$

Definición 3.3.2 Sean $\hat{M}$ un operador lineal y $S(z, \eta)$ una función tales que

$$\begin{aligned} \hat{M}[\varphi(z)](z, \eta) &:= \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \hat{M}_i(\varphi(z)) \\ S(z, \eta) &:= \frac{1}{m(\beta)} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i S_i(z, \eta) \end{aligned}$$

Usando la definición anterior es posible reescribir a (3.23) como

$$A(z) = \hat{M}(A(z)) + \frac{1}{m(\beta)} S(z, \eta) \quad (3.24)$$

esto a su turno da lugar a lo siguiente

$$(1 - \hat{M})[A(z)] = \frac{1}{m(\beta)} S(z, \eta) \quad (3.25)$$

donde 1 representa al operador identidad.

$\hat{M}$ está acotado, la demostración de esto es en esencia la misma que para probar que $\hat{T}$ lo estaba, pues en realidad $\hat{M}$ está compuesto de aplicaciones iterativas de $\hat{T}$. Además $\hat{M}$ depende de ϵ , por lo tanto podemos utilizar su serie de Neumann para despejar $A(z)$:

$$A(z) = \frac{1}{m(\beta)} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{M}^i [S(z, \eta)] \Big|_{\eta} = 0 \quad (3.26)$$

es decir

$$A(z) = \frac{1}{m(\beta)} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \hat{M}_j \right)^i \left[\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k S_k(z, \eta) \right] \Big|_{\eta=0} \quad (3.27)$$

Por conveniencia definiremos los siguientes coeficientes $C_n(z)$

$$C_n(z) := S_n(z, 0) + \sum_{i=1}^{n-1} \hat{M}_i (C_{n-i})(z) \Big|_{\eta=0}$$

$$C_1(z) := S_1(z, 0)$$

Cabe mencionar que todos los coeficientes C_n también dependen de β , esto es a causa de la dependencia que tiene S_1 con este parámetro. As, se escribirá a cada coeficiente C_n como $C_n = C_n(z, \beta)$. Utilizandolos se reescribe la ecuacion (3.27) como

$$A(z) = \frac{1}{m(\beta)} \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i C_i(z, \beta) \quad (3.28)$$

que nos define como construir las eigenfunciones.

Evalutando la ecuación (3.28) en $z = p_+$, recordando que $A(p_+) = 1$ y multiplicando toda la ecuación por β , se obtiene que

$$\beta = l \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i C_i(p_+(\beta), \beta) \quad (3.29)$$

Definición 3.3.3 Defínase la función $F(\beta, \epsilon)$ como

$$F(\beta, \epsilon) = \beta - l \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i C_i(p_+(\beta), \beta)$$

Encontrar $\beta = \beta(\epsilon)$ es equivalente a encontrar los valores (β, ϵ) tales que $F(\beta, \epsilon) = 0$.

La primera aproximación de la función es:

$$F(\beta, \epsilon) = \beta - \epsilon \frac{l(\kappa^2 + p_+(\beta)^2)}{\tau(p_+(\beta)) \sinh \tau(p_+(\beta)) h_0} \tilde{V}(0) \times \Lambda(p_+(\beta)) + \mathcal{O}(|(\beta, \epsilon)|^2) \quad (3.30)$$

Obviamente el Jacobiano no se anula cuando $(\beta, \epsilon) = (0, 0)$, as, por teorema de la función implícita, se puede despejar a β . No es extraño encontrar que la primera aproximación de β corresponde con la ya calculada en el capítulo 2:

$$\beta = -\epsilon \frac{\tilde{V}(0) \kappa^3 l}{\cosh \kappa h_0 \sinh \kappa h_0 + \kappa h_0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.31)$$

Finalmente quiero resaltar que la solución exacta estará dada por las ecuaciones (3.4), (3.17), (3.19) y (3.28).

Apéndice A

Función de Green

Un aspecto importante de la física matemática es la solución de ecuaciones diferenciales lineales no-homogéneas. En el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, se puede expresar este problema como

$$\hat{L}[u(x)] = f(x) \quad (\text{A.1})$$

donde $\hat{L}$ es un operador diferencial ordinario que involucra a la variable independiente x de manera que $f(x)$ es una función conocida y $u(x)$ es la solución deseada. Uno de los métodos utilizados para encontrar la solución consiste en encontrar la solución a la ecuación

$$\hat{L}[\mathcal{G}(x)] = \delta(x - \xi) \quad (\text{A.2})$$

donde ξ es un punto arbitrario. La solución de (A.1) será entonces simplemente la integral

$$u(x) = \int \mathcal{G}(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (\text{A.3})$$

La función $\mathcal{G}$ que satisface (A.2) se le llama *función de Green*.

encontrar la función de Green correspondiente a cada operador $\hat{L}$ es un proceso particular, y para este escrito se centrarán los esfuerzos en encontrar la función de Green correspondiente a

$$\hat{L}[u(x)] = \frac{d}{dx} \left[P(x) \frac{du}{dx} \right] + s(x)u(x) \quad (\text{A.4})$$

que es la representación de cualquier ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con las siguientes condiciones de frontera

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0; \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$$

donde al menos uno de α_1, α_2 es diferente de cero, lo mismo para β_1, β_2 (con esto se expresan las condiciones de frontera de Dirichlet, Neumann o Robin).

Para dicho operador $\hat{L}$, se tiene la siguiente ecuación para $\mathcal{G}$

$$\frac{d}{dx} \left[P(x) \frac{d\mathcal{G}(x, \xi)}{dx} \right] + s(x)\mathcal{G}(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad (\text{A.5})$$

es decir, para encontrar $\mathcal{G}$ se deben tener las siguientes consideraciones:

- $\mathcal{G}(x, \xi)$ satisfecerá la ecuación homogénea $f(x) = 0$ excepto en $x = \xi$.
- $\mathcal{G}(x, \xi)$ satisface condiciones de homogéneas de frontera.
- $\mathcal{G}(x, \xi)$ es continua en $x = \xi$

El primer y segundo punto son claros pues practicamente, el proceso para encontrar $\mathcal{G}$ es subdividir el problema en dos homogéneos con fronteras $[a, \xi]$ y $[\xi, b]$ respectivamente y el ultimo punto describe cómo debe hacerse el pegado. No obstante, es necesario conocer el valor de $\mathcal{G}'(x, \xi)$.

Debido a que $\mathcal{G}$ es una función continua en x , debe existir una discontinuidad en $\mathcal{G}'(x, \xi)$. esto se demuestra a continuación:

Integrando la ecuación (A.5) desde $\xi - \epsilon$ hasta $\xi + \epsilon$ resulta

$$P(x) = \frac{d\mathcal{G}(x, \xi)}{dx} \Big|_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} + \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} s(x)\mathcal{G}(x, \xi)dx = 1 \quad (\text{A.6})$$

A causa de que $\mathcal{G}(x, \xi)$ y $s(x)$ son ambas continuas en $x = \xi$ se tiene que el segundo término de la ecuación (A.6) se anula. Sacando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ de la ecuación (A.6) resulta que

$$P(\xi) \left[\frac{d\mathcal{G}(\xi^+, \xi)}{dx} - \frac{d\mathcal{G}(\xi^-, \xi)}{dx} \right] = 1 \quad (\text{A.7})$$

Se tiene entonces una cuarta consideración:

- $\frac{d\mathcal{G}}{dx}$ debe tener un brinco de magnitud $\frac{1}{p(\xi)}$ en $x = \xi$

La ecuación 310 induce el siguiente problema para encontrar la función de Green:

$$\begin{cases} \mathcal{G}_\eta = 0 & \eta = 0 \\ \frac{1}{h_0^2} \mathcal{G}_{\eta\eta} - \tau^2 \mathcal{G} = \delta(\xi - \eta) & -1 < \eta < 0 \\ \mathcal{G}_\eta = 0 & \eta = -1 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Tomando las consideraciones anteriores, resulta que la función de Green es

$$\mathcal{G}(x, \xi) = - \begin{cases} \frac{h_0 \cosh \tau h_0 (1 + \xi) \cosh \tau h_0 \eta}{\tau \sinh \tau h_0} & \xi < \eta < 0 \\ \frac{h_0 \cosh \tau h_0 (1 + \eta) \cosh \tau h_0 \xi}{\tau \sinh \tau h_0} & -1 < \eta < \xi \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Apéndice B

Espacios de Sobolev

A continuación se presentan algunas propiedades que poseen los espacios de Sobolev que fueron utilizadas fuertemente en el capítulo 3. Primero se establece la definición de un espacio de Sobolev.

Definición B.0.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$, sea k un entero no negativo y sea p tal que $-1 \leq p < \infty$. Se define entonces el espacio de sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como el conjunto de todas las distribuciones $u \in L^p(\Omega)$ tales que $D^a u \in L^p(\Omega)$ para $|a| \leq k$.

En $W^{k,p}$ se define la siguiente norma

$$\|u\|_{k,p}^p := \sum_{|a| \leq k} \|D^a u\|_p^p \quad p < \infty$$

$$\|u\|_{k,\infty} := \max_{|a| \leq k} \|D^a u\|_\infty$$

Para $p = 2$, es posible definir un producto interno como

$$\langle u, v \rangle_k := \sum_{|a| \leq k} \int_{\Omega} D^a \overline{u(x)} D^a v(x) dx$$

en este caso, se utiliza la notación $W^{k,2}(\Omega) := H^k(\Omega)$

Teorema 1 El espacio $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach. Si $p < \infty$, entonces es separable

Demostración: Para $u \in W^{k,p}(\Omega)$, sea $u_a = D^a u$. Entonces el mapeo $u \rightarrow (u_a)_{|a| \leq k}$ es una isometría de $W^{k,p}(\Omega)$ a un subespacio M del producto directo $\prod_{|a| \leq k} L_a^p(\Omega)$. M es cerrado, pues si $u_n \in W^{k,p}$ y $D^a u_n \rightarrow v^a$ en L^p , entonces $v^a = D^a$, pero esto es claro, pues la convergencia en L^p implica convergencia en el sentido de distribuciones, así $W^{k,p}$ también es completo.

Es evidente que $H^k(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Teorema 2 (identidad de Parseval) Sea $f(x)$ tal que existe su transformada de Fourier $\tilde{f}(k)$, entonces

$$\int f(x)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{f}(k)^2 dk$$

Demostración:

Sea $f(x)$ tal que existe su transformada de Fourier y denotemos por f^* al complejo conjugado de f , entonces

$$\int f(x)^2 dx = \int f(x) f^*(x) dx$$

Luego, como $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$, se tiene que

$$\int f(x)^2 dx = \frac{1}{4\pi^2} \iint \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \int \tilde{f}^*(\tau) e^{-i\tau x} d\tau dx$$

Reordenando la integración, se sigue que

$$\int f(x)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{f}(k) \int \tilde{f}^*(\tau) \frac{1}{2\pi} \int e^{i(k-\tau)x} dx d\tau dk$$

Como $\delta(k - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(k-\tau)x} dx$, entonces

$$\begin{aligned} \int f(x)^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{f}(k) \int \tilde{f}^*(\tau) \delta(k - \tau) d\tau dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{f}(k) \tilde{f}^*(k) dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{f}(k)^2 dk \end{aligned}$$

Teorema 3 La transformada de Fourier es un homeomorfismo de $H^k(\mathbb{R}^m)$ al espacio $L_\omega^2(\mathbb{R}^m)$, donde $\omega(\xi) = 1 + |\xi|^{2k}$

Sólo se presentará la demostración para el caso cuando $k=1=m$, generalizar a los demás casos es sencillo.

Demostración:

Se tiene que

$$\|\varphi(x)\|_{H^1}^2 = \int \varphi(x)^2 + \varphi_x(x)^2 dx$$

Usando la identidad de parseval, resulta que

$$\|\varphi(x)\|_{H^1}^2 = \frac{1}{2\pi} \int (1 + p^2) \tilde{\varphi}(p)^2 dp$$

Teorema 4 Sea $s > 1/2$, entonces existe un mapeo lineal $\hat{T} : H^s(\mathbb{R}^m) \rightarrow H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{m-1})$ llamado traza, con la propiedad de que para cualquier función prueba ϕ se tiene que

$$\hat{T}(\phi)(x_1, \dots, x_{m-1}) = \phi(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)$$

Demostración:

Sea ϕ una función de prueba y sea $g(x') = \phi(x', 0)$. Sea $\tilde{\phi}$ la transformada de Fourier de ϕ respecto a la m -ésima variable.

$$\tilde{\phi}(x', \xi_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \phi(x', x_m) e^{-ix_m \xi_m} dx_m$$

Sean $\hat{\phi}$, $\hat{g}$ las transformadas de Fourier de ϕ y de g en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^{m-1}$ respectivamente. Se tiene que

$$g(x') = \phi(x', 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}(x', \xi_m) d\xi_m$$

aplicando la transformada de Fourier se encuentra

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\xi) d\xi_m$$

luego

$$\begin{aligned} \|g\|_{s-1/2,2}^2 &\leq \text{Cte} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} |\hat{g}(\xi')|^2 (1 + |\xi|^2)^{s-1/2} d\xi' \\ &\leq \text{Cte} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\xi) d\xi_m \right|^2 (1 + |\xi|^2)^{s-1/2} d\xi' \\ &\leq \text{Cte} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} (1 + |\xi'|^2)^{s-1/2} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi_m \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi_m d\xi' \end{aligned}$$

Si $s > 1/2$ se observa que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi_m &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi'|^2 + \xi_m^2)^{-s} d\xi_m \\ &= (1 + |\xi'|^2)^{-s+1/2} \int_{\mathbb{R}} (1 + y^2)^{-s} dy \end{aligned}$$

Sustituyendo se tiene que

$$\|g\|^2 \leq \text{Cte} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} |\hat{\phi}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi_m$$

por lo tanto $\|T(\phi)\|_{s-1/2} \leq \text{Cte} \|\phi\|_s$.

y en particular $\|\phi(x', 0)\|_{H^{1/2}} \leq \text{Cte} \|\phi(x)\|_{H^1}$.

El resultado nos afirma que la traza está bien definida para $\xi_m = 0$; la demostración para $\xi_m \in \mathbb{R}$ es prácticamente la misma.

Apéndice C

Desigualdad de Peetre

A continuación se presenta una demostración de la desigualdad de Peetre

Teorema 5 sean $p, q \in \mathbb{R}$ y sea $s \in \mathbb{Z}$ entonces se cumple lo siguiente:

$$\left(\frac{1 + |p|}{1 + |q|} \right)^s \leq (1 + |p - q|)^{|s|}$$

Demostración

Supóngase que $|p| \leq |q|$, supongase que $s > 0$ es obvio entonces que

$$\frac{1 + |p|}{1 + |q|} \leq 1 + |p - q|$$

al elevar la desigualdad anterior a la s se obtiene el resultado.

Para el caso cuando $s < 0$ se observa que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + |p|}{1 + |q|} \right)^{-1} &= \frac{1 + |q|}{1 + |p|} \\ &= 1 + \frac{|q| - |p|}{1 + |p|} \\ &\leq 1 + |p - q| \end{aligned}$$

Al elevar la desigualdad anterior a la $|s|$ se obtiene el resultado.

Bibliografía

- [1] M.I.Romero Rodríguez, P. Zhevandrov, Trapped modes and resonances for water waves over a slightly perturbed bottom. Russian J. Math. Phys., 2010, vol. 17, pp. 307-327.
- [2] L.D. Landau, E.M. Lifshits, *Quantum mechanics:Non-Relativistic Theory*, Pergamon, 1965.
- [3] D.P. Nicholls, M.Taber, Joint analyticity and analytic continuation of dirichlet-neumann operators on doubly perturbed domains. J.Math. Fluid Mech., 2008, 10(2): 238-271,
- [4] R. Halmos, V. S. Sunder, *Bounded integral operators on L^2 spaces*, Springer,2012
- [5] B. LeMéhauté, *An introduction to hydrodynamics and water waves*,Springer,1976
- [6] J. Billingham, A. C. King. *Wave motion*, vol 24, CUP, 2001
- [7] D.G. Duffy, *Green's Functions with Applications*. CRC Press,2001
- [8] R.D. Richtmyer, *Principles of advanced mathematical physics*, Springer,1978
- [9] M. Renardy, R. C. Rogers, *An introduction to partial differential equations*, Springer, 2006.
- [10] V. S. Vladimirov, *Equations of mathematical physics*, Marcel Dekker, 1971.