UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICO-MATEMÁTICAS

"Mat. Luis Manuel Rivera Guitiérrez"

TORSIÓN DE WHITEHEAD

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS
FÍSICO - MATEMÁTICAS

PRESENTA:

RICARDO ESTEBAN CHÁVEZ CÁLIZ

ASESOR:

DR. NOÉ BÁRCENAS TORRES

MORELIA, MICHOACÁN MAYO DE 2016

Que nuestra voz no desmaye
y que cante sin cesar
que el corazón nunca calle,
nunca deje de cantar.

Celso Chávez Mendoza (fragmento).

Agradecimientos

Viendo la tesis no sólo como el trabajo aquí presentado sino como la culminación de mi licenciatura, no puedo agradecer a nadie antes que a mis padres. No sólo me han apoyado y motivado a lo largo de este proceso académico sino que me han brindado el ambiente necesario para prosperar. Agradezco su apoyo constante e ininterrumpido en lo emocional, moral, formativo, educativo, económico, etc. Por guiarme en cada momento. Por hacer más que sólo su trabajo. Sin ellos soy nada.

Mi primer y mejor maestra de matemáticas, mi hermana Cristy, de quien he aprendido mucho más de lo que podría pedir. Mi asesora académica particular de todos los niveles, no puede pasar desapercibida en la sección de agradecimientos.

Agradezco a Noé por haber confiado en mí, en mis capacidades y mi criterio para realizar el trabajo aquí presentado. En general por siempre respetar y tomar en cuenta mis ideas y comentarios. Por haber supervisado el desarrollo del tema y por sus bien atinados comentarios, correcciones, regaños y observaciones. Gracias por hacer la convivencia siempre amena llevando una estrategia efectiva que logró que se realizara el trabajo en la calidad buscada.

Agradezco a Malú y Jorge por haber sido mi primer contacto con la matemática que ahora conozco. A Fernando por recordarme con sus clases la belleza de la misma. A mi profesor de álgebras Luis Valero. A todos ellos junto con Gloria Andablo agradezco por ser parte de mi mesa sinodal.

Algunas partes de este trabajo fueron extraídas de notas del curso de licenciatura topología algebraica impartido por Daniel Juan Pineda en la FCCM en la UMSNH, y de las notas de Moritz Groth del curso en Teoría de Homotopía en la Universidad de Radboud en Nijmegen.

Gracias a mi hermano Bosco por su extraordinaria asesoría de manejo en programas de diseño y por quién los gráficos de este trabajo pudieron realizarse. Además por el fabuloso diseño de la portada que se realizó en tiempo record. Haciéndolo como todas las cosas que hace por mí desde siempre, de manera desinteresada cuya única motivación es la de apoyarme y ver por mí. Gracias.

Gracias a Alex por hacer uso de sus habilidades lectoras para detectar errores ortográficos que hicieron una modificación de suma importancia en el trabajo final. Gracias a Karen por ser la madrina de empastado y asesora de titulación personal.

Quiero agradecer al proyecto "Aplicación de ensamble de Baum-Connes: topología algebraica y geometría no conmutativa" con clave del proyecto: IA100315 por el apoyo económico prestado.

Índice general

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Resumen

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Torsión de Whitehead

por Ricardo Esteban Chávez Cáliz

La homotopía como una herramienta generadora de invariantes topológicos empieza definiendo una relación de equivalencia sobre funciones que se extiende a espacios. Así permite definir una relación de equivalencia más débil que la de homeomorfismo. Sin embargo es difícil determinar cuando dos espacios topológicos tienen el mismo tipo de homotopía. Un enfoque para resolver esto es el trabajar en términos discretos; definiendo una nueva relación de equivalencia sobre espacios (complejos CW) llamada tipo de homotopía simple. A partir de esta se define una equivalencia de homotopía simple. Para comparar la teoría clásica con la recién introducida se dará la construcción de un funtor en términos geométricos, que asocia un grupo a cada espacio. Se enriquece con la construcción algebraica y posteriormente se demuestra que ambas construcciones son equivalentes. Sobre los grupos de Whitehead construiremos un invariante muy importante (torsión de Whitehead) el cual arroja información que en la teoría de homotopía clásica no se tendría.

Palabras clave: Homotopía, Whitehead, Topología, Álgebra, torsión.

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Abstract

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Torsión de Whitehead

por Ricardo Esteban Chávez Cáliz

Homotopy as a tool which generates topological invariants, it begins defining an equivalence relationship over functions which extends to spaces. So it allows us to define an equivalence relationship weaker than homeomophism. But it's very hard to determine when two topological spaces have the same homotopy type. A new perspective to solve this is to work in discrete terms; defining a new equivalence relationship called simple homotopy type. Starting with this we define what is a simple homotopy equivalence. To compare the classic theory with the one just presented, we give the construction of a functor in geometric terms, which assigned a group to each space. Then it becomes more rich with the algebraic construction, finally we prove that both are equivalent. We construct a very important invariant over the Whitehead groups (Whitehead's torsion) which gives us information that in the classic homotopy we wouldn't have.

Símbolos

$K \rightsquigarrow L$	Retracto por deformación fuerte.
J^n	$Cl(\partial I^{n+1} - I^n)$ (Caja sin tapa inferior).
$L < K$	L es un subcomplejo de K.
$K \overset{e}{\searrow} L$	K colapsa elementalmente a L.
$K \overset{e}{\nearrow} L$	K se expande elementalmente a L.
$K \searrow L$	Existe una sucesión finita de colapsos elementales de K a L.
$K \nearrow L$	Existe una sucesión finita de expansiones elementales de K a L.
$K \diagup\!\!\searrow L$	Existe una sucesión finita de colapsos y expansiones elementales de K a L.

A mis abuelos, fuente constante de inspiración. Ellos son mi más grande ejemplo de que la dedicación y la constancia hacen cosas grandes. A mis padres a quienes les debo todo.

Introducción

En matemáticas se tiene una definición formal para lo que significa que dos objetos sean equivalentes, escribimos $A \sim B$ donde " $\sim$ " es una *relación de equivalencia*. Esta relación genera una *clasificación*, es decir un agrupamiento de objetos equivalentes. Es claro lo que ganamos al clasificar un conjunto de objetos; la mayoría de las veces dado un elemento del conjunto basta ver a qué clase de equivalencia pertenece para poder hacer afirmaciones sobre dicho elemento.

Algunos ejemplos de este tipo de clasificaciones son:

- La clasificación de triángulos en el plano por congruencia. O bien por una relación de equivalencia más débil como la de semejanza.
- Los números enteros con la relación de *congruencia "módulo n"*.
- En topología decimos que X y Y son equivalentes (*homeomorfos*) si existe una función $f : X \to Y$ biyectiva, continua y con inversa continua.

El trabajo de la topología es clasificar los espacios topológicos según homeomorfismo. Resulta que es esto muy difícil de hacer; tiene que darse explícitamente el homemorfismo entre ellos, o bien demostrar que no existe alguno.

La teoría de homotopía permite definir una relación de equivalencia más débil que la de homeomorfismo. Pensemos en el ejemplo de clasificaciones de triángulos según congruencia y semejanza. Note que basta verificar que dos triángulos no son semejantes para poder decir que no son congruentes. La homotopía nos dirá que efectivamente dos espacios no pueden ser homeomorfos, si estos no son homotópicos. Por lo tanto el tipo de homotopía de un espacio es invariante en la misma clase de espacios homeomorfos.

La homotopía como una herramienta generadora de invariantes topológicos empieza definiendo una relación de equivalencia sobre funciones que extendemos a espacios topológicos. Otra manera que tiene de construir invariantes es construir grupos tomando las diferentes clases de mapeos de I^n a un espacio X con ciertas restricciones para la imagen de la frontera, variando la n tomada tenemos una familia de estructuras algebraicas invariantes bajo homeomorfismo: los grupos de homotopía.

El problema con estos invariantes es que por un lado los grupos de homotopía no siempre clasifican bien los espacios. Los adentrados en el tema saben que existen ciertos tipos de espacios topológicos, como los espacios lente, donde los grupos de homotopía coinciden sin ser estos homeomorfos.

Tampoco es fácil ver cuando dos espacios tienen el mismo tipo de homotopía. Considere los siguientes ejemplos

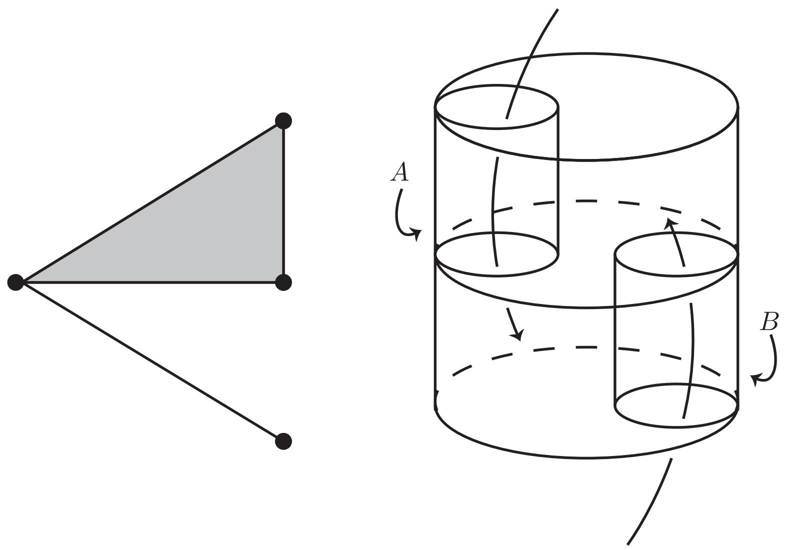


FIGURA 1: Dos espacios con el mismo tipo de homotopía.

Un triángulo con su interior junto con una arista pegada en un vértice del triángulo y el espacio bidimensional H llamado la casa con dos cuartos. Este se construye empezando con una pared $S^1 \times I$ añadiendo el techo y suelo (cada uno como un 2-disco al que fue removido un 2-disco tangente), un piso intermedio (un 2-disco con dos 2-discos interiores removidos) y finalmente pegando paredes cilíndricas A y B. Como se indica con flechas, se puede entrar al cuarto inferior entrando desde el techo y al cuarto superior entrando desde abajo. Resulta que ambos espacios tienen el mismo tipo de homotopía, de hecho ambos se pueden contraer al espacio de un sólo punto. Sin embargo, no parece fácil describir la contracción en ambas situaciones. Más aún el segundo espacio no parece ser contráctil.

Para el primer espacio que es un complejo simplicial pensemos en la idea combinatórica que establece una equivalencia de espacios por medio de movidas discretas. Si K y L son complejos simpliciales finitos decimos que hay un *colapso simplicial elemental* de K a L, denotado $K \overset{s}{\searrow} L$ si L es un subsimplejo de K y $K = L \cup \tau \cup \sigma$ donde σ es una cara libre de τ, es decir que σ no es cara de algún otro simplejo.

Decimos que K *colapsa simplicialmente* a L (o que L se *expande simplicialemente* a K) si hay un sucesión finita de colapsos simpliciales elementales que empiezan en K y terminan en L. En nuestro espacio ejemplo esto se vería así:

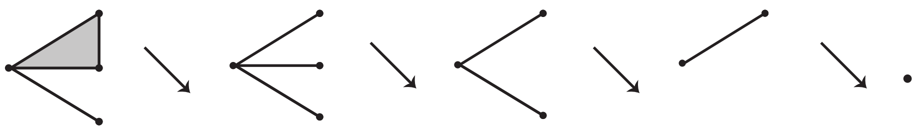


Figura 2: Sucesión de colapsos simpliciales elementales.

Para el segundo espacio convendrá pensar H como el subcomplejo de el cilindro sólido $D^2 \times I$ donde $D^2 \times I$ está triangulado para que $D^2 \times I \overset{s}{\searrow} D^2 \times 0 \overset{s}{\searrow} *$. Ahora, si el cilindro estuviera hecho de una masilla ideal suave, es claro que podríamos empujar la masilla a traves del cilindro A entrar a la parte sólida del cuarto inferior de $D^2 \times I$ y empujando la masilla hacía las paredes, el techo y el suelo podríamos despejar el cuarto inferior. Simétricamente podríamos despejar el cuarto superior empujando el cilindro sólido B hacia el interior del cuarto. Habiendo hecho esto sólo el cascaron H quedará. Así informalmente podríamos ver que $* \overset{s}{\nearrow} D^2 \times I \overset{s}{\searrow} H$.

Lo anterior nos sugiere que una buena idea para atacar el problema es descomponer el espacio en pedazos discretos con los que podamos trabajar mejor. Con esta idea presentaremos en el capítulo 2 la *teoría de homotopía simple* desarrollada por J. H. C. Whitehead y presentada por Marshal M. Cohen en su libro *A Course in Simple-Homotopy Theory* [1], en la que partiendo de una estructura combinatórica sobre espacios que a su vez será flexible (complejos CW), permitirá dar una relación de equivalencia sobre estos. Obtendremos la definición para una equivalencia de homotopía en este nuevo contexto (*equivalencia de homotopía simple*). Resultará que si dos espacios tienen el mismo tipo de homotopía simple, esto implica que ambos tienen el mismo tipo de homotopía. Para veficar si el enunciado converso es válido daremos la construcción del *grupo de Whitehead de L*, el cual estará en términos de las características geométricas de L y la relación de equivalencia definida. El problema es que no tenemos mucha información de este grupo partiendo de esta definición. En el capítulo 3 daremos una construcción algebraica alternativa en la cual tenemos más información. En el capítulo 4 veremos que ambas construcciones son equivalentes.

El elemento que permitirá dar la equivalencia entre la construcción geométrica y la algebraica es un elemento en el grupo llamado *torsión de Whitehead*. Lo podremos pensar como el análogo al residuo en el ejemplo de las clases de equivalencia de números dados al principio. Entenderemos por tanto primero lo que significa "*el residuo de una matriz*"(la torsión de una matriz), para luego definir la torsión de un isomorfismo de módulos, de un complejo de cadenas, de una pareja de complejos CW y de una equivalencia de homotopía. Estudiaremos las propiedades de la torsión para cada uno de estos elementos en su momento.

El resultado será una teoría rica y poderosa que proveerá de invariantes y alternativas para clasificar espacios, que en la homotopía clásica no hubiéramos tenido.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos un repaso sobre conceptos y resultados de topología algebraica que usaremos para el desarrollo de la teoría de homotopía simple. Recordaremos definiciones de la teoría de homotopía clásica, relativa y libre, incluyendo resultados sobre los grupos de homotopía. Daremos un repaso sobre espacios cubrientes y el grupo de transformaciones de cubierta. Incluiremos la estructura discreta que usaremos para los espacios llamados complejos CW. Incluimos un resumen sobre las teorías de homología desde el punto de vista topológico que nos servirán para nuestros propósitos.

Se asume familiaridad con nociones de topología, álgebra y teoría de categorías.

Por mapeos nos referiremos a funciones continuas entre espacios topológicos.

Denotaremos por I al intervalo $[0,1]$ y a I^n como el producto de n-copias de este.

Una pareja de espacios (X,A) consiste de un espacio X y de un subespacio $A \subset X$. Un mapeo entre parejas de espacios $f:(X,A) \to (Y,B)$ es un mapeo $f: X \to Y$ de manera que $f(A) \subseteq B$.

1.1. Teoría de Homotopía

Equivalencia de homotopía y retracciones por deformación

Definición 1.1.0.1. *Sean $f,g : X \to Y$ mapeos, diremos que f es homotópica a g ($f \simeq g$) si existe un mapeo $F : X \times I \to Y$ de manera que:*

$$\begin{aligned} F(x,0) &= f(x) \\ F(x,1) &= g(x) \end{aligned}$$

Esta relación de equivalencia sobre mapeos permite definir una equivalencia entre espacios topológicos.

Definición 1.1.0.2. *$f : X \to Y$ es una equivalencia de homotopía de X a Y si existe $g : Y \to X$ de manera que $gf \simeq Id_X$ y $fg \simeq Id_Y$. Escribimos $X \simeq Y$ y diremos que X y Y son equivalentes por homotopía.*

Un tipo de equivalencia para espacios muy particular que estaremos usando es el *retracto por deformación fuerte.*

Definición 1.1.0.3. *Si $X \subset Y$ entonces $D : Y \to X$ es un retracto por deformación fuerte si existe un mapeo $F : Y \times I \to Y$ de manera que*

1. $F(x, 0) = Id_Y$
2. $F(x, t) = x, \forall (x, t) \in X \times I$
3. $F(x, 1) = D(y), \forall y \in Y$

D es una equivalencia homotópica tomando $i : X \to Y$ la inclusión, como el mapeo que hace satisfacer la definición de equivalencia homotópica. Escribiremos $Y \searrow X$ si existe un retracto por deformación fuerte de Y a X.

El cilindro de un mapeo f es un ejemplo de un espacio que se retrae por deformación fuertemente a un subespacio. Será de mucha importancia posteriormente.

Definición 1.1.0.4. *Si $f : X \to Y$ es un mapeo, el cilindro de mapeo M_f es la unión disjunta de $X \times I$ y Y (denotado $(X \times I) \oplus Y$) identificando (x, 1) con $f(x)$. Así*

$$M_f = \frac{(X \times I) \oplus Y}{(x, 1) = f(x)}$$

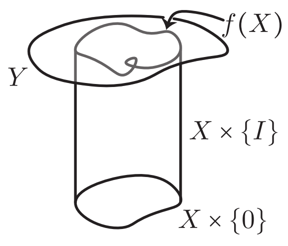


Figura 1.1: Cilindro de mapeo.

El mapeo de identificación $(X \times I) \oplus Y \to M_f$ lo denotaremos por q. Como $q|X \times [0, 1)$ y $q|Y$ son encajes, escribiremos $q(X \times 0) = X$ y $q(Y) = Y$ cuando no haya confusión. También escribiremos $q(z) = [z]$ si $z \in (X \times I) \oplus Y$.

Proposición 1.1.0.1. *Si $f : X \to Y$ entonces el mapeo $p : M_f \to Y$, dado por :*

$$p[x,t] = [x,1] = [f(x)] \qquad t < 1$$
$$p[y] = [y] \qquad y \in Y$$

Es un retracto por deformación fuerte.

Demostración. La idea de la prueba consiste en "deslizar a lo largo de los rayos de M_f"

Sea $F : M_f \times I \to M_f$ definida por

$$F([x,t],s) = [x, t + (1-t)\cdot s] \qquad t < 1$$
$$F[y] = [y] \qquad y \in Y$$

Donde

$F_0 = F([x,t],0) = [x, t + (1-t)\cdot 0] = [x, t+0][x,t] = Id_{M_f}$ cuando $t < 1$

$F_s(y) = F([y,1],s) = [y]$, $\forall y \in Y$ y $\forall s \in I$

$F([x,t],1) = [x, t + (1-t)\cdot 1] = [x, t + (1-t)] = [x,1] = p[x,t]$ cuando $t = 1$

Que F sea un mapeo se deduce de la definición de topología cociente.

□

Proposición 1.1.0.2. *Suponga que $f : X \to Y$ es un mapeo. Sea $i : X \to M_f$ la inclusión. Entonces*

(a) *El siguiente es un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M_f \arrow[dl, "p"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

(b) *i es una equivalencia homotópica si y sólo si f es un equivalencia homotópica.*

Demostración. Inciso a) es claro y b) se deduce de 1.1.0.1. □

Grupos de homotopía relativa

Queremos usar la relación de equivalencia recién dada para definir estructuras algebraicas asociadas a un espacio. Tomaremos caminos sobre X que empiezan y terminan en un mismo punto, digamos x_0, es decir, mapeos $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = x_0 = \alpha(1)$ o bien $\alpha : (I, \partial I) \to (X, x_0)$.

Una propiedad fundamental de los lazos es que se pueden "componer" poniendo uno a continuación de otro. Más precisamente:

Definición 1.1.0.5. *Dados dos lazos α, β con base en x_0, se define su composición como*

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha(2t), t \in [0,1/2] \\ \beta(2t-1), t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Llamaremos grupo fundamental de X relativo al punto base x_0 y se denota con $\pi_1(X,x_0)$ al conjunto de clases de equivalencia de lazos con base en x_0 bajo la relación de homotopía, dotado con la operación composición.

Proposición 1.1.0.3. *El grupo fundamental $\pi_1(X,x_0)$ es realmente un grupo.*

Demostración. La prueba consiste en demostrar que la operación está bien definida y cumple las propiedades requeridas para considerar a $\pi_1(X,x_0)$ como un grupo. Los detalles pueden ser encontrados en [2, Massey p. 58]. □

La importancia del grupo fundamental de un espacio reside en el hecho de que π_1 nos habla de la exitencia de agujeros 1-dimensionales en el espacio. Para tener información acerca de los agujeros n-dimensionales deberemos definir un análogo al grupo fundamental para dimensión mayor.

Proposición 1.1.0.4. *Dado un espacio X y un punto base $x_0 \in X$ denotaremos a $\pi_n(X,x_0)$ de X como el conjunto de clases de homotopía de funciones*

$$\alpha : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0); \text{ con } n \geq 1$$

Dotado con la operación

$$\alpha * \beta(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \ldots, t_n), t_1 \in [0,1/2] \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), t_1 \in [1/2,1] \end{cases}$$

Entonces:

1. *Entonces $\pi_n(X,x_0)$ es un grupo con la operación recién descrita*
2. *Un mapeo $f : (X,x_0) \to (Y,y_0)$, induce un homomorfismo $f_* : \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(Y,y_0)$ de grupos.*

Demostración. (1) Note que para dos elementos $[\alpha]$ y $[\beta]$ en $\pi_n(X,x_0)$ la operación coincide con la definida para el grupo fundamental. La prueba de que la operación está bien definida, es asociativa, el mapeo constante $K_{x_0} : I^n \to X$ representa el elemento neutro y que cada elemento $[\alpha]$ tiene un inverso representado por

$$\alpha^{-1}(t_1, \ldots t_n) = \alpha(1 - t_1, t_2 \ldots t_n)$$

es exactamente la misma que para π_1.

(2) Definiendo $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ por $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$, la demostración de que f_* es un homomorfismo de grupos es la misma que para π_1.

$\square$

A $\pi_n(X, x_0)$ lo llamaremos el *enésimo grupo de homotopía de* (X, x_0).

Observe que la definición de la operación definida en $\pi_n(X, x_0)$ la elección de t_1 como coordenada con un rol distinguido no parece afectar la definición. Podríamos también definir el producto como:

$$\beta *_i \alpha(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} \alpha(t_1, \ldots, 2t_i, \ldots, t_n), t_1 \in [0, 1/2] \\ \beta(t_1), \ldots 2t_i - 1, \ldots, t_n), t_1 \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

La justificación es que ambas operaciones inducen la misma operación en las clases de homotopía. La prueba de este hecho está dado por la siguiente proposición junto con el llamado *truco de Eckmann-Hilton.*

Sea S un conjunto con dos operaciones $\circ, \bullet : S \times S \to S$ con una unidad en común $e \in S$ Suponga que $\circ, \bullet$ son distributivas una sobre la otra, en el sentido de que

$$(a \circ b) \bullet (c \circ d) = (a \bullet b) \circ (c \bullet d)$$

Entonces $\circ$ y $\bullet$ definen una operación conmutativa en S.

Demostración. Tomando $b = e = c$ la ley distributiva implica que $a \circ d = a * d$ mientras que al tomar $a = e = d$ tenemos que $b \circ c = c \bullet b$. $\square$

Aplicando esta proposición a las operaciones $*$ y $*_i$ se muestra que definen la misma operación en $\pi_n(X, x_0)$ para $n \geq 2$. La proposición también muestra que $\pi_n(X, x_0)$ es abeliano para $n \geq 2$.

Por esta razón usaremos notación aditiva para la estructura de grupo en $\pi_n(X, x_0)$ en $n \geq 2$ escribiendo

$$\begin{array}{rcl} [\beta] + [\alpha] & = & [\beta * \alpha] \\ 0 & = & [K_{x_0}] \\ -[\alpha] & = & [\alpha^{-1}] \end{array}$$

Sea $A \subset X$ un subespacio de X que contiene al punto base x_0. Tenemos una inclusión de espacios punteados $i : (A, x_0) \to (X, x_0)$ y nos referiremos a (X, A, x_0) como una pareja punteada de espacios. La inclusión induce un mapeo a nivel de grupos de homotopía

$$i_* : \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0), \quad n \geq 0$$

El cual en general no es inyectivo. Una clase de homotopía $\alpha \in \pi_n(A, x_0)$ cae en el kernel de i_* si para cualquier mapeo $f : (I^n, \partial I^n) \to (A, x_0)$ al componerlo con la inclusión induce un mapeo $i \circ f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ es homotópico a una constante K_{x_0}. Tal homotopía es un mapeo $H : I^n \times I \to X$ que satisface las siguientes igualdades:

$$H(-, 0) = f, \quad H(-, 1) = K_{x_0}, \quad H|_{\partial I^n \times I} = K_{x_0}$$

dicha homotopía es un mapeo para una tripleta de espacios (en el sentido obvio)

$$H : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (X, A, x_0)$$

donde J^n es el espacio obtenido de ∂I^{n+1} removiendo la tapa inferior, es decir $J^n = Cl(\partial I^{n+1} - I^n)$. Desde otra perspectiva J^n es obtenido de $I^n = I^n \times \{1\}$ al pegar una copia de I^n en cada cara de $\partial I^n \times \{1\}$.

Entonces hay una nueva noción de homotopía para mapeos de tripletas que introduciremos con toda generalidad. Sean $X_2 \subseteq X_1 \subseteq X_0$ y $Y_2 \subseteq Y_1 \subseteq Y_0$ tripletas de espacios y sean $f, g : (X_0, X_1, X_2) \to (Y_0, Y_1, Y_2)$ mapeos de tripletas. Entonces una homotopía H es un mapeo de tripletas $H : (X_0, X_1, X_2) \times I = (X_0 \times I, X_1 \times I, X_2 \times I) \to (Y_0, Y_1, Y_2)$ que satisface $H(-, 0) = f$ y $H(-, 1) = g$. Buscamos una homotopía $H : X_0 \times I \to Y_0$ que tenga la propiedad de que cada mapeo $H(-, t)$ respete inclusiones de subespacios, es decir que $H(-, t) : (X_0, X_1, X_2) \to (Y_0, Y_1, Y_2)$ es un mapeo de tripletas. En el caso especial en que X_2 y Y_2 sean sólo puntos base, esto da la noción de homotopía de mapeos para espacios punteados. No es díficl ver que esta relación de homotopía es una relación de equivalencia que se comporta bien respecto a los mapeos de tripletas.

Definición 1.1.0.6. *Sea (X, A, x_0) un pareja de espacios punteados. Definimos*

$$\pi_n(X, A, x_0) \;=\; [(I^n, \partial I^n, J^{n-1}), (X, A, x_0)]$$

como el n-ésimo grupo de homotopía relativa con la operación dada por concatenación.

Proposición 1.1.0.5. *Para $\pi_n(X, A, x_0)$ de la definición anterior tenemos:*

1. *$\pi_n(X, A, x_0)$ es un grupo para $n \geq 2$.*
2. *$\pi_n(X, A, x_0)$ es abeliano para $n \geq 3$.*

Demostración. (1) La demostración es análoga a las discusiones anteriores, hay que verificar que la concatenación esta bien definida sobre clases de homotopía y define la estructura de grupo en $\pi_n(X, A, x_0)$ con el elemento neutro dado por la clase de homotopía del mapeo constante K_{x_0}.

(2) Nuevamente se verifica usando el truco de Eckmann-Hilton y definiendo una concatenación que da un rol distinguido a la iésima entrada. Se induce la misma estructura de grupo, excepto que en este caso la coordenada enésima ahora juega un papel especial y no está disponible para la operación. Así $\pi_n(X, A, x_0)$ es abeliano para $n \geq 3$. □

Definición 1.1.0.7. *Llamamos enésimo grupo de homotopía relativa de* (X, A, x_0) *al grupo de la proposición anterior. Al cual, cuando no haya riesgo de confusión, denotaremos simplemente por* $\pi_n(X, A)$*.*

La motivación para las definiciones anteriores fue que la inclusión $i : (A, x_0) \to (X, x_0)$ induce un morfismo en grupos de homotopía que no es necesariamente inyectivo. Los grupos de homotopía relativa están diseñados para medir que tanto falla en ser inyectivo. De hecho, si j denota la inclusión $j : (X, x_0) \to (X, A)$ entonces tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.1.0.6. *Dada una pareja de espacios punteados, existen homomorfismos de conexión* $\partial : \pi_n(X, A) \to \pi_{n-1}(A, x_0), n \geq 1$*, tal que la siguiente sucesión es exacta:*

$$\cdots \to \pi_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0)$$

Esta es la ***sucesión exacta larga de homotopía relativa*** *para una tripleta de espacios topológicos* (X, A, x_0)*.*

Lema 1.1.0.1. *EL mapeo* $i : J^{n-1} \to I^n$ *es la inclusión de un retracto por deformación fuerte. Es decir que existe un mapeo* $r : I^n \to J^{n-1}$ *la cual satisface que* $r \circ i = id_{J^{n-1}}$ *y que* $i \circ r \simeq id_{I^n}$ *(rel* J^{n-1}*).*

Demostración. Consideremos el espacio $I^n \subseteq \mathbb{R}^n$ como el cubo unitario de dimensión uno, y el punto $s = (1/2, \ldots, 1/2, -2)$ ubicado por debajo del centro del cubo. Para cada punto $x \in I^n$ sea $l(x)$ la única línea que pasa por x y por s. Esta línea $l(x)$ intersecta en un único punto a J^{n-1} al cual tomaremos como $r(x)$. Es fácil creer que el mapeo resultante $r : I^n \to J^{n-1}$ es continuo y que tenemos que $r \circ i = id$. La homotopía $i \circ r \simeq id_{I^n}$ (rel J^{n-1}) es obtenida al colapsar segmentos de línea entre x y $r(x)'$ a $r(x)$.

□

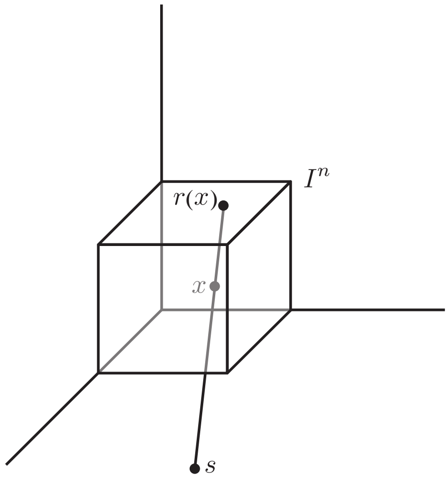


FIGURA 1.2: Construcción del retracto por deformación fuerte de I^n a J^{n-1}.

Demostración. (de 1.1.0.6). Empecemos definiendo el homomorfismo de conexión. Dada una clase ω en $\pi_n(X,A)$ este puede ser representado por un mapeo de tripletas H : $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$. Este mapeo restringido a la tapa inferior $I^{n-1} \times \{0\}$ da un mapeo $h = H|_{I^{n-1}} : (I^{n-1}, \partial I^n) \to (A, x_0)$. Definimos

$$\partial : \pi_n(X,A) \to \pi_{n-1}(A,x_0) : [H] \to [h] = [H|_{I^{n-1}}]$$

Para probar que esta secuencia es exacta hay que verificarla en 3 posiciones diferentes.

Para $\pi_n(A,x_0)$:

(1) $im(\partial) \subseteq ker(i_*)$: Esta inclusión es inmediata; dada la clase de homotopía de un mapeo

$$H : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$$

tenemos que mostrar que el mapeo $i \circ h : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (X, x_0)$ es homotópico al mapeo constante(relativo a la frontera). Pero esta homotopía está dada por H misma.

(2) $ker(i_*) \subseteq im(\partial)$: Esto se sigue de la definición de grupos de homotopía relativa y de los morfismos de conexión.

En $\pi_n(X,A)$:

(3) $im(j_*) \subseteq ker(\partial)$: Dado un elemento arbitrario $\alpha \in \pi_n(X,x_0)$ es fácil ver que $\partial \circ j_*$ por definición es representado por el mapeo constante $K_{x_0} : I^{n-1} \to X$.

(4) $ker(\partial) \subseteq im(j_*)$: Consideremos el mapeo $H : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ que está en el $ker(\partial)$. Por definición esto significa que la restricción

$$h = H| : (I^{n-1} \times \{1\}, \partial I^{n-1} \times \{1\}) \to (A, x_0)$$

es homotópica al mapeo constante K_{x_0} relativo a la frontera. Escogiendo una homotopía arbitraria $H' : h \simeq K_{x_0}$ (rel x_0). Entonces obtenemos el mapeo

$$H'' : J^n = I^n \times \{1\} \cup \partial I^n \times I \to X$$

que es H en $I^n \times \{1\}$ y la homotopía H' en $I^{n-1} \times \{0\} \times I$. Este mapeo manda el valor constante x_0 al resto de $\partial I^n \times I$. Aplicando el lema anterior esto nos da un mapeo $K : I^{n+1} \to X$ el cual restringe a H'' a lo largo de $J^n \subseteq I^{n+1}$. Por construcción K es una homotopía de tripletas de mapeos $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ de H a $K(-,1) : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$. Entonces tenemos que $[H] = j_*([K(-,1)]$ como queríamos.

En $\pi_n(X, x_0)$:

(5) $im(i_*) \subseteq ker(j_*)$: Al tomar un elemento $\alpha : (I^n, \partial I^n) \to (A, x_0)$ y aplicar i_* y j_* tendremos un mapeo $ji\alpha : (I^n, \partial I^n) \to (A, A)$ por tanto es claramente homotópico (relativo a la frontera) al mapeo constante.

(6) $ker(j_*) \subseteq im(i_*)$: Es trivial.

□

Observación: La construcción anterior es natural en el sentido que teniendo una mapeo entre tripletas $f : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ entonces tenemos homomorfismos de conexión para cada par punteado. La naturalidad significa que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_n(A,x_0) \arrow[d, "f_*"'] \\
\pi_{n+1}(Y,B) \arrow[r, "\partial"'] & \pi_n(B,y_0)
\end{tikzcd}$$

Homotopía libre y la acción del grupo fundamental en los grupos de homotopía de orden superior

Empecemos con algunos hechos de homotopía libre. Dado un espacio X y una homotopía H: $S^n \times I \to X$ obtenemos un camino en X tomando

$$u = H(x_0, t) : I \to X$$

Donde $*$ es el punto base de S^n. Si H es una homotopía de f a g y u es el camino del punto base, diremos $f \simeq_u g$. Derivado del hecho de que la relación de homotopía es una relación de equivalencia, tenemos la siguiente proposición si llevamos registro en los caminos del punto base.

Proposición 1.1.0.7. *1. Para cada mapeo $f : S^n \to X$ tenemos $f \simeq_{K_{f_*}} f$.*

2. Si dados dos mapeos $f, g : S^n \to X$ hay una homotopía $f \simeq_u g$, entonces hay una homotopía $g \simeq_{u^{-1}} f$.

3. Sean $f, g, h : S^n \to X$ donde $f \simeq_u g$, $g \simeq_v h$ entonces $f \simeq_{v*u} h$.

Proposición 1.1.0.8. *Para cada mapeo $f : S^n \to X$ y cada camino $u : I \to X$ tal que $u(0) = f(*)$, hay un mapeo $g : S^n \to X$ de manera que $f \simeq_u g$.*

Demostración. Sea $q : I^n \to I^n/\partial I^n \cong S^n$ el mapeo cociente. Los mapeos $f \circ q : I^n \times \{1\} \to X$ y $u \circ pr : \partial I^n \times I \to I \to X$ juntos definen un mapeo como sigue:

$$\begin{tikzcd} (f \circ q, u \circ pr) : J^n = I^n \times \{1\} \cup \partial I^n \times I \arrow[r] \arrow[d] & X \\ I^{n+1} \arrow[ur, dashed, "\exists H"'] & \end{tikzcd}$$

Sigue del 1.1.0.1 que podemos encontrar una extensión $H : I^{n+1} \to X$ como indica el diagrama. Por construcción, $H(-, t) : I^n \to X$ toma el valor constante $u(t)$ en la frontera de ∂I^n y por tanto se ve como $I^n \times I \to S^n \times I \to X$. El mapeo inducido $S^n \times I \to X$ define una homotopía $f \simeq_u g$. □

Así g es obtenida de f al pegar en una copia del camino en cada punto de la frontera ∂I^n y luego escoger cierta reparametrización. En el caso especial de que $n = 1$ es fácil ver que en este sentido se obtiene $g = u * f * u^{-1}$. El siguiente lema dirá que la asignación $([u], [f]) \to [g]$ está bien definida.

Lema 1.1.0.2. *Sean $f, f_0, f_1, g, g_0, g_1 : S^n \to X$ mapeos y $u, v : I \to X$ caminos en X.*

1. Si $f \simeq_u g$ y $u \simeq v$ (rel ∂I) entonces también $f \simeq_v g$.

2. *Asumamos que* $f_0(*) = f_1(*) = x_0$ *y* $g_0(*) = g_1(*) = x_1$. *Si* $f_0 \simeq f_1$ *(rel* x_0*),* $g_0 \simeq g_1$ *(rel* x_1*) y* $f_0 \simeq_u g_0$ *entonces también* $f_1 \simeq_u g_1$.

Demostración. (1) Sea $H : I^n \times I \to X$ una homotopía $f \simeq_u g$ y similarmente $G : I \times I \to X$ una homotopía $u \simeq v$ (rel ∂I) que ambas existen por suposición. De esto construimos un nuevo mapeo $K : J^{n+1} \to X$ como sigue. Note que $J^{n+1} \subset \partial I^{n+2}$ puede ser escrito como la unión de 3 subespacios (Regla de Leibniz)

$$J^{n+1} = I^n \times I \times \{1\} \cup \partial I^n \times I \times I \cup I^n \times \partial I \times I$$

En el primer subespacio tomamos la homotopía H, y en el segundo subespacio $\partial I^n \times I \times I \xrightarrow{pr} I \times I \xrightarrow{G} X$, y en el restante las homotopías constantes de f y g, es decir tomamos $I^n \times \partial I \times \xrightarrow{pr} I^n \times \partial I \cong I^n \cup I^n \xrightarrow{(f,g)} X$. Estos mapeos encajan juntos en el sentido que definen un mapeo $K : J^{n+1} \to X$ debido a las hipótesis de restricción en frontera. Ahora por una aplicación del 1.1.0.1 mostraremos que K puede ser extendido a un mapeo $L = K \circ r : I^{n+2} \to J^{n+1} \to X$. Por construcción se sigue que la restricción de L a $I^n \times I \times \{1\}$ nos da la homotopía deseada $f \simeq_v g$. La segunda afirmación ahora es fácil. Por suposición tenemos la siguiente de cadena de homotopías

$$f_1 \simeq_{K_{x_0}} f_0 \simeq_u g_0 \simeq_{K_{x_1}} \simeq g_1,$$

pero como $K_{x_1} * u * K_{x_0} \simeq u$ (rel ∂I) podemos concluir que $f_1 \simeq_u g_1$ por la primer parte del lema. □

Corolario 1.1.0.1. *Sea* $f : (S^n, *) \to (X, x_0)$, *sea* $u : I \to X$ *un lazo con base en* x_0 *y tome* $f \simeq_u g$ *para alguna* $g : (S^n, *) \to (X, x_0)$. *Entonces la clase de homotopía* $[g] \in \pi_n(X, x_0)$ *sólo depende de las clases* $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ *y* $[u] \in \pi(X, x_0)$.

Demostración. Asumamos que también tenemos que $f \simeq_{K_0} f'$, $u \simeq v$ (rel ∂I), y si $f' \simeq_v g'$. Entonces para mostrar que $g \simeq_{K_{x_1}} g'$ observemos que $g \simeq_{u^{-1}} f \simeq_{K_{x_0}} f' \simeq_v g'$ pero dado que $v * K_{x_0} * u^{-1} \simeq K_{x_1}$ (rel ∂I) queda demostrado por 1.1.0.7 y 1.1.0.2. □

Corolario 1.1.0.2. *Dado un espacio punteado* (X, x_0) *hay una acción por conjugación de* $\pi_1(X, x0)$ *en* $\pi_n(X, x0)$.

Demostración. Usando 1.1.0.8 hemos observado que la construcción $(u, f) \to u * f * u^{-1}$ está bien definida. □

Cubrientes, grupo fundamental y grupo de transformaciones de cubierta

Definición 1.1.0.8. *Un espacio cubriente de* X *es un par* $(\widetilde{X}, p)$ *donde* $\widetilde{X}$ *es un espacio topológico y* $p : \widetilde{X} \to X$ *es un mapeo donde cada punto* $x \in X$ *tiene una vecindad abierta arco-conexa* U *tal que* $p^{-1}(U) = \bigcup_j \widetilde{U}_j$ *donde los* $\widetilde{U}_j$ *son disjuntos y para cada* $\widetilde{U}_j$ *la aplicación* $p|_{\widetilde{U}_j} : \widetilde{U}_j \to U$ *es un homeomorfismo.*

Llamaremos *vecindad elemental* a cualquier vecindad U que satisfaga las condiciones de la definición anterior.

Definición 1.1.0.9. *Dado un punto* $x \in X$ *y* $(\widetilde{X}, p)$ *un cubriente de* X*, llamaremos la fibra de* x *al conjunto* $p^{-1}(x) \subset \widetilde{X}$*.*

Diremos que $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ es un levantamiento de α si $p\widetilde{\alpha} = \alpha$.

Para relacionar $\pi_1(\widetilde{X}, x_0)$ con $\pi_1(X, p(x_0))$ debemos hacer una relación entre los levantamientos de caminos en X y los caminos en $\widetilde{X}$, para esto será útil la siguiente proposición:

Proposición 1.1.0.9. *Sea* $(\widetilde{X}, p)$ *un cubriente de* X *y* $x_0 \in X$*,* $\alpha : I \to X$ *con* $\alpha(0) = x_0$*. Entonces* $\exists \widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ *tal que* $p\widetilde{\alpha} = \alpha$*. Si además existen* $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2$ *levantamientos de* α *tal que* $\widetilde{\alpha}_1(0) = \widetilde{\alpha}_2(0) = \widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$*. Entonces* $\widetilde{\alpha}_1(t) = \widetilde{\alpha}_2(t), \forall t \in I$*.*

Demostración. Recuerde que $\lambda > 0$ es un número de Lebesgue de $(X, \mathcal{U})$ donde X es un espacio métrico y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X si para cada $x \in X, \exists U \in \mathcal{U}\ B_\lambda(x) \subset U$. Recuerde que si X es un espacio métrico compacto entonces toda cubierta abierta de X tiene un número de Lebesgue.

Supongamos que el camino α no está contenido en una vecindad elemental U, de lo contrario no habría nada que hacer. Sea $\{U_i\}$ una cubierta de X formada por vecindades elementales; entonces $\{\alpha^{-1}(U_i)\}$ es una cubierta abierta del espacio métrico compacto I. Escoja $n \in \mathcal{N} - \{0\}$ suficientemente grande de manera que $1/n$ es más pequeño que el número de Lebesgue de esta cubierta. Divida el intervalo I en subintervalos cerrados $[0, 1/n], [1/n], [1/n, 2/n], \ldots, [(n-1)/n - 1, 1]$. Note que α mapea cada subintervalo en una vecindad elemental de X. Definamos $\widetilde{\alpha}$ sucesivamente sobre estos subintervalos empezando desde $[0, 1/n]$ y tomando en $\widetilde{X}$ la única vecindad que contiene a $\widetilde{x}_0$. Claramente tenemos unicidad por definición de vecindad elemental.

□

Si queremos relacionar los homomorfismos entre los grupos fundamentales de espacios con las funciones que van a los cubrientes debemos generalizar lo anterior a funciones que necesariamente sean caminos, para esto diremos que $\widetilde{f} : (Y, y) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ es un levantamiento de $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ si $p\widetilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (x, x_0) \end{tikzcd}$$

El siguiente teorema da condiciones para que dicho levantamiento exista.

Teorema 1.1.1. *Sea $f : X \to Y$ un mapeo y $(\widetilde{X}, p)$ un cubriente de X, entonces $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ con $f(y_0) = \widetilde{x}_0$ y $p\widetilde{f} = f \Leftrightarrow Im(f_*) \subset Im(p_*)$ es decir $(f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ donde X, Y y $\widetilde{X}$ son conexos por trayectorias y localmente conexo por trayectorias.*

La idea de la demostración consiste en construir $\widetilde{f}$ tomando $\alpha : I \to Y, y \in Y, \alpha(0) = y_0, \alpha(1) = y$. Entonces $f\alpha$ es una trayectoria en X. Levantamos $f\alpha$ a $\widetilde{f\alpha}$ que es un trayectoria en $\widetilde{X}$ con inicio en $\widetilde{x}_0$ y definimos $\widetilde{f(y)} = \widetilde{f\alpha}(y)$. Debemos probar que $\widetilde{f}$ está bien definida, es decir que no depende del camino y que $\widetilde{f}$ es continua. Claramente tendremos $p\widetilde{f} = f$. Consultar [3, Massey, p 128] para la demostración completa

Observación. Si $\pi_1(Y, y_0) = 1$ toda función continua se levanta.

Con esta idea en mente definimos el **grupo de transformaciones de cubierta** $Cov(\widetilde{X}) = \{f : \widetilde{X} \to \widetilde{X} | pf = p\}$. La demostración de que $Cov(\widetilde{X})$ es un grupo se deduce de la proposición anterior. Para un análisis completo, consulte [3, Massey, p 130].

Si escojemos puntos base $x \in K$ y $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ entonces hay una identficación del grupo de transformaciones de cubierta G con $\pi_1 K = \pi_1(K, x)$.

Para cada $\alpha : (I, \partial I) \to (K, x)$ sea $\widetilde{\alpha}$ el levantamiento de α con $\widetilde{\alpha}(0) = x$. Sea $g_{[\alpha]} : \widetilde{K} \to \widetilde{K}$ el único homomorfismo de cubierta tal que $g_{[\alpha]}(\widetilde{x}) = \widetilde{\alpha}(1)$. Afirmamos que si $y \in \widetilde{K}$ y si $\omega : (I, 0, 1,) \to (\widetilde{K}, \widetilde{x}, y)$ es cualquier camino, entonces

$$g_{[\alpha]}(y) = \widetilde{\alpha * p\omega}(1)$$

donde $p\omega$ es la composición de ω y p, y $*$ representa concatenación de lazos. Para ver esto, note que $\widetilde{\alpha * p\omega}(1) = \widetilde{p\omega}(1)$ donde $\widetilde{p\omega}$ es el único levantamiento de $p\omega$ con $\widetilde{p\omega}(0) = \widetilde{\alpha}(1)$. Pero $g_{[\alpha]}(\widetilde{p\omega}(0)) = g_{[\alpha]}(\widetilde{x}) = \widetilde{\alpha}(1)$. Afirmamos que si $y \in \widetilde{K}$ y si $\omega : (I, 0, 1) \to (\widetilde{K}, \widetilde{x}, y)$ es cualquier camino, entonces

$$\widetilde{\alpha * p\omega}(1) = g_{[\alpha]}(\widetilde{p\omega}(1)) = g_{[\alpha]}(y)$$

La función $\theta = \theta(x, \widetilde{x}) : \pi_1(K) \to G$, dada por $[\alpha] \to g_{[\alpha]}$ es un isomorfismo. Es un homomorfismo porque, para arbitrarios $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(K)$, obtenemos por el párrafo anterior

$$\begin{aligned} g_{[\alpha]}(g_{[\beta]}(\widetilde{x})) &= g_{[\alpha]}(\widetilde{\beta}(1)) \\ &= \widetilde{\alpha * p\beta}(1) \\ &= \widetilde{\alpha * \beta}(1) \\ &= g_{[\alpha][\beta]}(\widetilde{x}) \end{aligned}$$

Por lo tanto $g_{[\alpha]} \circ g_{[\beta]} = g_{[\alpha][\beta]}$, dado que coinciden en un punto.

Suponga que $p : \widetilde{K} \to K$ y $p' : \widetilde{L} \to L$ son cubrientes universales con $p(\widetilde{x}) = x$ y $p'(\widetilde{y}) = y$, y que G_K y G_L son los grupos de transformaciones de cubierta. Entonces cualquier mapeo $f : (K, x) \to (L, y)$ induce un único mapeo $f_\# : G_K \to G_L$ de manera que el diagrama

$$\begin{tikzcd} G_K \arrow[r, "f_\#"] & G_L \\ \pi_1(K,x) \arrow[u, "\theta(x,\widetilde{x})"] \arrow[r, "f_\#"] & \pi_1(L,y) \arrow[u, "\theta(y,\widetilde{y})"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. (Llamamos a ambos mapeos $f_\#$ con el ánimo de hacer comprensible la notación). Este mapeo satisface la siguiente proposición.

Proposición 1.1.1.1. *Si $g \in G_K$ y $\widetilde{f} : (\widetilde{K}, \widetilde{x}) \to (\widetilde{L}, \widetilde{y})$ levantamiento de f entonces $f_\#(g) \circ \widetilde{f} = \widetilde{f} \circ g$.*

Demostración. Como ambos mapeos cubren a f, es suficiente probar que coinciden en un punto, digamos $\widetilde{x}$. Por lo tanto debemos mostrar que $(f_\#(g))(\widetilde{y}) = \widetilde{f}g(\widetilde{x})$. Tomando α un lazo tal que $[\alpha]$ corresponde a g bajo $\theta(x, \widetilde{x})$, tenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{f}g(\widetilde{x}) &= \widetilde{f}\widetilde{\alpha}(1) \\ &= (\widetilde{f \circ \alpha})(1), \text{ como } \widetilde{f}\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{y} = \widetilde{f\alpha}(0) \\ &= ((\theta(y, \widetilde{y})(f_\#[\alpha])(\widetilde{y}) \text{ donde } f_\# : \pi_1(K, x) \to \pi_1(L, y) \\ &= ((\theta(y, \widetilde{y})f_\#\theta(x, \widetilde{x})^{-1})(g))(\widetilde{y}) \\ &= (f_\#(g))(\widetilde{y}). \end{aligned}$$

□

1.2. Complejos CW

Definición 1.2.0.1. *Un complejo CW K es un espacio topológico con una familia de bolas topológicas abiertas de varias dimensiones, llamadas celdas. De manera que denotando K^j a $\bigcup\{e_\alpha | dim\ e_\alpha \leq j\}$, se cumplen las siguientes condiciones.*

1. *$K = \bigcup_\alpha e_\alpha$ y $e_\alpha \cap e_\beta = \varnothing$ siempre que $\alpha \neq \beta$.*
2. *Para cada celda e_α existe un mapeo $\varphi_\alpha : I^n \to K$, diremos que la dimensión de e_α es n, y se tiene que:*
   (a) $\varphi_\alpha | int(I^n)$ es un homomorfismo suprayectivo para e_α.
   (b) $\varphi_\alpha(\partial I^n) \subset K^{n-1}$
3. *Cada $\overline{e_{\alpha_0}}$ está contenido en la unión de un número finito de e_α.*
4. *Un conjunto $A \subset K$ es cerrado en K syss $A \cap \overline{e_\alpha}$ es cerrado en $\overline{e_\alpha}$ para toda e_α.*

Note que cuando K tiene solo una cantidad finita de celdas, *3* y *4* se satisfacen automáticamente.

Si $\varphi : I^n \to K$ es un mapeo característico para la celda e entonces $\varphi | \partial I^n$ es llamada función de pegado de e.

Un subcomplejo de un complejo CW K es un subconjunto L junto con una subfamilia $\{e_\beta\}$ de celdas de K de tal suerte que $L = \bigcup e_\beta$ y cada $\overline{e_\beta}$ está contenida en L. Resulta de esto que L es un subconjunto cerrado de K y que con la topología relativa de subespacio resulta que vuelve a ser un complejo CW. Si L es un subcomplejo de K escribimos que $L < K$ y decimos que (K, L) es una pareja CW. Si tenemos una celda e de K que no cae en L escribimos $e \in K - L$.

Dos complejos CW K y L son isomorfos (denotado $K \cong L$) si existe un homeomorfismo h de K a L de tal suerte que la imagen de cada celda de K es una celda en L, en estas circunstancias h es llamado isomorfismo CW.

Una importante propiedad que tienen los complejos CW es la **propiedad de extensión homotópica**:

Teorema 1.2.1. *Suponga $L < K$. Dado un mapeo $f : K \to X$ (X cualquier espacio) y una homotopía $f_t : L \to X$ tal que $f_0 = f | L$ entonces existe una homotopía $F_t : K \to X$ de manera que $F_0 = f$ y $F_t | L = f_t | L, 0 \leq t \leq 1$.*

Lema 1.2.1.1. *En general una pareja (K, L) (no necesariamente complejos CW) cumple la propiedad de extensión homotópica si y solamente si $L \times I \cup K \times 0$ es un retracto de $K \times I$.*

Demostración. (del Lema)

$\Rightarrow$ Suponga que $r : K \times I \to L \times I \cup K \times 0$ es un retracto, f_t una homotopía y un mapeo F como se ocupa. Combinados dan lugar a un mapeo $k : L \times I \cup K \times 0 \to X$. Y la homotopía deseada es $F_t(x) = k(r(x,t))$.

$\Leftarrow$ Tomemos $X = L \times I \cup K \times 0$, $f_t(a) = (a,t)$, y $g_0(x) = (x,0)$. Si (K,L) tiene la propiedad de extensión homotópica la homotopía resultante $g_t : K \to X$ puede ser re-escrita como una retracción $K \times I \to X$. □

Demostración. (de 1.2.1) La prueba consiste en en usar el Lema anterior y bastará con probar que $L \times I \cup K \times 0$ es un retracto de $K \times I$, los detalles pueden ser encontrados en [4, Schubert p. 197] □

Proposición 1.2.1.1. *Si $L < K$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $K \searrow L$.
2. *El mapeo inclusión $i : L \subset K$ es una equivalencia homotópica.*
3. $\pi_n(K,L) = 0$ *para toda* $n \leq dim(K - L)$.

Demostración. (1)$\Rightarrow$ (2) y (2)$\Rightarrow$ (3) son claros.

(3)$\Rightarrow$ (1) se prueba inductivamente, usando (3) y la propiedad de extensión homotópica para construir primero una homotopía (rel L) de Id_K a un mapeo $f_0 : K \to K$ que manda K^0 en L, entonces construimos una homotopía (rel L) de f_0 a $f_1 : K \to K$ de manera que $f_1(K^1) \subset L$, y así inductivamente.

Si K_0 y K_1 son complejos CW, un mapeo $f : K_0 \to K_1$ es celular si $f(K_0^n) \subset (K_1^n)$ para toda n. De manera más general, si (K_0, L_0) y (K_1, L_1) son parejas CW, un mapeo $f : (K_0, L_0) \to (K_1, L_1)$ es celular si $f(K_0^n \cup L_0) \subset (K_1^n \cup L_1)$ para toda n. Note que esto no implica que $f|L_0 : L_0 \to L_1$ es celular. □

Definición 1.2.1.1. *Si $f \simeq g$ y g celular, g es llamada aproximación celular de f.*

Teorema 1.2.2. *Cualquier mapeo $f : (K_0, L_0) \to (K_1, L_1)$ entre parejas CW es homotópico (rel L_0) a un mapeo celular.*

Demostración. Antes de probar la existencia de la aproximación para una pareja probemos que cualquier mapeo continuo $f : X \to Y$ entre complejos CW es homotópico a un mapeo celular.

Procediendo por inducción sobre n, estableciendo que f es celular sobre el n-esqueleto de X. Para el caso base $n = 0$, note que cada componente por caminos de Y debe contener una 0-celda. La imagen bajo f de una 0-celda de X puede entonces ser conectada con una 0-ceda de Y por un camino, lo que da una homotopía de f al mapeo el cual es celular en el 0-esqueleto de X.

Asuma inductivamente que f es celular en el $(n-1)$-esqueleto de X, y sea e^n una n-celda de X. La clausura de e^n es compacta en X, y su imagen bajo f es compacta en Y. Tomemos $e^k \subset Y$ una celda que intersecta a $f(e^n)$. Si $k \leq n$, el mapeo f ya es celular en e^n, entonces asumamos que $k > n$. Es un resultado técnico no trivial que la restricción de f a $X^{n-1} \cup e^n$ puede ser llevada por una homotopía relativa a X^{n-1} a un mapeo de tal suerte que $f(e^n)$ pierda un punto $p \in e^k$ (consulte [5, Hatcher p.358]). Entonces podemos deformar $f|X^{n-1} \cup e^n$ rel X^{n-1} de manera que $f(e^n)$ pierda toda la celda e^k al componer por un retracto por deformación de $Y^k - \{p\}$ en $Y^k - e^k$. Usando que cualquier subespacio compacto de un complejo CW coincide (es decir intersecta de manera no trivial), $f(e^n)$ coincide en un numero finito de celdas en Y. Podemos repetir este proceso un número finito de veces para hacer que $f(e^n)$ pierda todas las celdas de dimensión mayor que n. Haciendo esto para cada n-celda de X y fijando celdas del subcomplejo A en el cual ya está definido celular, obtenemos una homotopía de $f|X^n$ rel $X^{n-1} \cup A^n$ a un mapeo celular. El paso de inducción es completado usando 1.2.1 para extender esta homotopía sobre todo X.

Finalmente para poder aplicarlo a parejas, restringimos f a L_0 y usando la aproximación celular recién dada, por 1.2.1 extendemos el mapeo celular sobre todo K_0 y aplicamos nuevamente la aproximación celular para obtener un mapeo celular en K_0, sin violar la propiedad celular en L_0.

□

Definición 1.2.2.1. *Si A es un subconjunto cerrado de X y $f : A \to Y$ es un mapeo entonces $X \underset{f}{\cup} Y$ es el espacio identificación $X \oplus Y / x = f(x)$ si $x \in A$.*

Nota 1.2.3. *Note que si $K_0 < K$ y $f : K_0 \to L$ es un mapeo tal que, dada cualquier celda $e \in K - K_0, f(\bar{e} \cap K_0) \subset L^{n-1}$ donde $\dim e = n$. Entonces $K \underset{f}{\cup} L$ es un complejo CW cuyas celdas son aquellas de $K - K_0$ y de L. Más precisamente las celdas de $K \underset{f}{\cup} L$ son de la forma $q(e)$, donde e es una celda arbitraria de $K - K_0$ o de L y $q : K \oplus L \to K \cup L$ es el mapeo identificación.*

Nota 1.2.4. *Si $f : K \to L$ es un mapeo celular entonces el cilindro de mapeo M_f es un complejo CW. Sus celdas son las celdas de L y celas de la forma $e \times 0$ o $e \times (0,1)$, donde e es una celda arbitraria de K.*

Combinando 1.1.0.2, 1.2.1.1 y 1.2.4 tenemos

Proposición 1.2.4.1. *Un mapeo celular $f : K \to L$ es una equivalencia homotópica si y solamente si $M_f \searrow K$.*

Cubrientes para complejos CW

Proposición 1.2.4.2. *Si K es un complejo CW entonces K es localmente contraíble. Por lo tanto para cualquier subgrupo G de $\pi_1(K)$ existe un espacio cubriente $p : E \to K$ de manera que $p_\#(\pi_1 E) = G$. En particular K tiene un cubriente universal.*

Podemos encontrar la demostración en [6, J. Rotman p. 299].

Queremos que los espacios cubrientes que consideraremos los podamos suponer sin pérdida de generalidad de manera que si E es un cubriente de K entonces la imagen de cada celda de E es una celda de K. Más precisamente tenemos la siguiente proposición cuya demostración se encuentra en [4, Schubert p. 295].

Proposición 1.2.4.3. *Suponga que K es un complejo CW y $p : E \to K$ es un cubriente de K. Entonces*

$$\{\widetilde{e_\alpha} | e_\alpha \in K, e_\alpha \text{ es un levantamiento de } e_\alpha \text{ a } E\}$$

Es una estructura celular en E con respecto a la cual E se convierte en un complejo CW. Si $\varphi_\alpha : In \to K$ es el mapeo característico para la celda e_α. Si $\widetilde{e_\alpha}$ es un levantamiento de e_α y si $\widetilde{\varphi_\alpha} : I^n \to E$ es un levantamiento de φ_α tal que $\widetilde{\varphi_\alpha}(x) \in \widetilde{e_\alpha}$ para alguna $x \in (I^n)^\circ$, entonces $\widetilde{\varphi_\alpha}$ es un mapeo característico de $\widetilde{e_\alpha}$.

Corolario 1.2.4.1. *Si $p : E \to K$ es un cubriente y $f : K' \to K$ es un mapeo celular que se levanta a $\widetilde{f} : K' \to E$ entonces $\widetilde{f}$ también es celular. Además si f es cubriente también lo es $\widetilde{f}$.*

Proposición 1.2.4.4. *Suponga que (K, L) es una pareja de complejos CW conexos y que $p : \widetilde{K} \to K$ es un cubriente universal. Sea $\widetilde{L} = p^{-1}(L)$. Si $i_\# : \pi_1 L \to \pi_1 K$ es un isomorfismo entonces $p|\widetilde{L} : \widetilde{L} \to L$ es la cubierta universal de L. Además si $K \searrow L$ entonces $\widetilde{K} \searrow \widetilde{L}$.*

Demostración. Por proposiciones anteriores es claro que $\widetilde{L}$ es un subcomplejo de $\widetilde{K}$ y $p|\widetilde{L}$ es un cubriente de L. Falta mostrar que si $i_\#$ es un isomorfismo, $\widetilde{L}$ es conexo y simplemente conexo. Note que por la propiedad de homotopía de cubierta, $p_\# : \pi_i(\widetilde{K}, \widetilde{L}) \cong \pi_i(K, L)$ para toda $i \geq 1$. Para ver que $\widetilde{L}$ es conexo, note que $\pi_1(K, L) = 0$ por la exactitud de la secuencia

$$\pi_1(L) \xrightarrow{\cong} \pi_1(K) \to \pi_1(K, L) \to \pi_0(L) \xrightarrow{\cong} \pi_0(K)$$

Así $\pi_1(\widetilde{K},\widetilde{L}) = 0$. Por lo tanto por la conexidad de $\widetilde{K}$ y la exactitud de la secuencia

$$0 = \pi_1(\widetilde{K},\widetilde{L}) \to \pi_0(\widetilde{L}) \to \pi_0(\widetilde{K})$$

Se sigue que $\widetilde{L}$ es conexo.

$\widetilde{L}$ es 1-conexo debido a la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\widetilde{L}) \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "i-1"'] & \pi_1(\widetilde{K}) \arrow[d, "0"] \\
\pi_1(L) \arrow[r, "\cong"] & \pi_1(K)
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $p : \widetilde{L} \to L$ es el cubriente universal.

Finalmente $K \searrow L$ implica que $\pi_i(K,L) = 0$ y por lo tanto $\pi_1(\widetilde{K},\widetilde{L}) = 0$ para toda $i \geq 1$. Así $\widetilde{K} \searrow \widetilde{L}$. □

1.3. Homología

Definición 1.3.0.1. *Un conjunto $\{C_i,\, \delta_i\}$ consistente de módulos C_i y δ_i homomorfismos de módulos, se llama complejo de cadenas (de módulos) si la construcción*

$$\ldots \to C_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} C_n \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1} \to \ldots$$

satisface $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$. Esta última condición implica $Im(\delta_{n+1}) \subseteq Ker(\delta_n)$ para toda n

Decimos que un complejo de cadena es exacto o acíclico cuando además tenemos $Ker(\delta_n) \subseteq Im(\delta_{n+1})$.

Se dice que la homología mide la falta de exactitud de un complejo de cadenas en cada uno de sus eslabones.

Definición 1.3.0.2. *Se define el n-ésimo grupo de homología asociado a un complejo de cadenas como el grupo abeliano*

$$H(C_n) = \frac{\ker(\delta_n)}{\mathrm{im}(\delta_{\mathrm{n+1}})}.$$

Se llama ciclos en C_n a los elementos de $Ker(\delta_n)$ y se llama fronteras de C_n a los elementos de $Im(\delta_{n+1})$.

Queremos usar la homología para el estudio de espacios topológicos. Para esto, a partir de un espacio construiremos un complejo de cadenas y analizaremos las propiedades topológicas que trascienden a la teoría de homología.

Homología singular

Definición 1.3.0.3. *Consideremos los simplejos estándar*

$$\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_i t_1 = 1, t_i \geq 0\}$$

Definición 1.3.0.4. *Un n-simplejo singular en X es una función continua $\sigma : \Delta^n \to X$*

Sea $S_n(X)$ el grupo abeliano libre generado por los n-simplejos singulares de X. Los elementos de $S_n(X)$ son, por lo tanto, sumas finitas $\Sigma m_\sigma \sigma$ con m_σ enteros y $\sigma : \Delta^n \to X$ continuas.

Dado un n-simplejo singular $\sigma : \Delta^n \to X$, su iésima cara $\sigma^{(i)} : \Delta^{n-1} \to X$ es el $(n-1)$-simplejo singular definido por $\sigma^{(i)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = \sigma(t_0, \ldots, 0, \ldots, t_{n-1})$, donde el 0 se encuentra en la iésima posición.

Definición 1.3.0.5. *El complejo singular de X es el complejo de cadenas $(S(X), d)$ formado por los $S_n(X)$ grupos abelianos recién definidos y $d_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ el morfismo lineal definido en los elementos de la base como*

$$d(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma^{(i)}$$

Para comprobar que $S(X)$ es efectivamente un complejo, es decir $d^2 = 0$, consulte en [5, A. Hatcher p. 106].

Definición 1.3.0.6. *Sea X un espacio topológico. Definimos la homología singular de X como la homología de su complejo singular y denotamos $H_n(X)$ a su enésimo grupo de homología.*

Si $f : X \to Y$ es una función continua y σ es un n-simplejo singular de X, entonces $f\sigma : \Delta^n \to Y$ es un n-simplejo singular de Y. Por lo tanto, extendiendo linealmente, se tiene un morfismo $f_n : S_n(X) \to S_n(Y)$ inducido por $f_n(\sigma) = f\sigma$. Claramente la familia de morfismos $\{f_n\}$ conmuta con los diferenciales, ya que $(f\sigma)^{(i)} = f\sigma^{(i)}$ y por lo tanto la función $f : X \to Y$ induce un morfismo de complejos singulares $f_* : S(X) \to S(Y)$ por simple composición y éste induce un morfismo a nivel homologias $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ para todo n.

Observación. La asignación $f \to f_*$ es funtorial, es decir, $Id_* = Id$ y $(fg)_* = f_*g_*$ por lo tanto un homeomorfismo de espacios topológicos induce un isomorfismo a nivel de complejos singulares y por lo tanto también a nivel homología.

Homología relativa y Homología reducida

Si $A \subset X$ es un subespacio, queremos relacionar los grupos de homología de A y X. Obsérvese que el morfismo $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ inducido por la inclusión $i : A \to X$ en general no es inyectiva.

La forma de relacionar los grupos de homología de subespacios con los del espacio total es mediante los grupos relativos de homología.

Si $A \subset X$, el complejo singular de A puede verse como un subcomplejo del complejo singular de X. De hecho, $S(A)$ está generado por los n-simplejos singulares de X cuyas imágenes caen en A. Notar además que el morfismo de borde en el complejo de A es la restricción del morfismo de borde de X. Por lo tanto podemos considerar el complejo cociente $S(X)/S(A)$ y se obtiene

$$0 \to S(A) \xrightarrow{i} S(X) \xrightarrow{q} S(X)/S(A) \to 0$$

donde i es la inclusión y q es el morfismo cociente.

Definición 1.3.0.7. *Dado $A \subset X$, definimos los grupos relativos de homología*

$$H_n(X, A) = H_n(S(X)/S(A))$$

Estudiemos ahora cómo se relacionan los grupos $H_n(X), H_n(A)$ y $H_n(X, A)$.

Proposición 1.3.0.1. *Una secuencia de complejos de cadenas $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ induce una sucesión exacta larga de las homologías*

$$\cdots \to H_n(A) \xrightarrow{f_*} H_n(B) \xrightarrow{g_*} H_n(C) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A) \to \dots$$

El morfismo $\partial : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ se llama morfismo de conexión.

Demostración. Para probar este resultado utilizamos el lema de la serpiente (ver [7, Serge Lang]) aplicado al diagrama. Los núcleos de los morfismos verticales resultan los grupos de homología en grado n y los conúcleos son los grupos de homología de grado $n-1$. Luego solamente resta pegar todas las sucesiones resultantes para todos los n.

En el caso particular de la secuencia $0 \to S(A) \xrightarrow{i} S(X) \xrightarrow{q} S(X)/S(A) \to 0$ la sucesión exacta larga de homología relativa es:

$$\cdots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X,A) \to H_{n-1}(A) \to \ldots$$

$\square$

Homología celular

Si (K,L) es una pareja CW, el *complejo de cadenas celular* $C(K,L)$ es definido tomando $C_n(K,L) = H_n(K^n \cup L, K^{n-1} \cup L)$ y tomando $d_n : C_n(K,L) \to C_{n-1}(K,L)$ el operador frontera en la sucesión exacta de homología singular para la tripleta $(K^n \cup L, K^{n-1} \cup L, K^{n-2} \cup L)$.

$C_n(K,L)$ es usualmente pensado como el módulo libre generado por las n-celdas de $K - L$. Para hacer esto preciso, adoptemos ahora y para siempre, orientaciones estándar ω_n de I^n $(n = 0,1,2\ldots)$ al escoger un generador ω_0 de $H_0(I^0)$ y estipulando que la secuencia de isomorfismos

$$H_{n-1}(I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \xrightarrow{\text{excisión}} H_{n-1}(\partial I^n, J^{n-1}) \xleftarrow{\subset} H_{n-1}(\partial I^n) \xleftarrow{\partial} H_n(I^n, \partial I^n)$$

manda ω_{n-1} a $-\omega_n$ (Aquí $I^{n-1} = I^{n-1} \times 0$). Si $\varphi_\alpha : I^n \to K$ es un mapeo característico para $e_\alpha \in K - L$ denotamos $< \varphi_\alpha >= (\varphi_\alpha)_*(\omega_n)$, donde $(\varphi_\alpha)_* : H_n(I^n, \partial I^n) \to H_n(K^n \cup L, K^{n-1} \cup L)$ es el mapeo inducido. Entonces la situación es resume en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.0.2. *Suponga que φ_α es un mapeo característico para cada e_α de $K - L$. denote $K_j = K^j \cup L$. Entonces*

1. $H_j(K_n, K_{n-1}) = 0$ *si* $j \neq n$.
2. $H_n(K_n, K_{n-1})$ *es libre con base* $\{< \varphi_\alpha > | e^n_\alpha \in K - L\}$.
3. *Si c es un n-cíclo singular de K mod L representado por $\gamma \in H_n(K_n, K_{n-1})$ y si $|c|$ no incluye la n-celda e_{α_0} entonces $n_{\alpha_0} = 0$ en la expresión $\gamma = \sum_\alpha n_\alpha < \varphi_\alpha >$.*

Vea [8, G.W. Whithead p. 58] y [4, Schubert p. 300] para la demostración.

Un mapeo celular $f : (K,L) \to (K', L')$ claramente induce un mapeo de cadenas $f_* : C(K,L) \to C(K',L')$ y así un homomorfismo, también llamado f_* de $H(C(K,L))$ a $H(C(K',L'))$. La siguiente proposición muestra que el complejo de cadenas celular juega un rol en la categoría de complejos CW análogo al que juega el complejo de cadenas simplicial en la categoría de simplejos.

Proposición 1.3.0.3. *Hay una equivalencia natural T entre el funtor de "homología celular" y el funtor de "homología singular". En otra palabras, para cada pareja de complejos CW (K, L) hay un isomorfismo $T_{K,L} : H(C(K, L)) \to H(|K|, |L|)$, y para cada mapeo celular $f(K, L) \to (K', L')$ el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} H(C(K,L)) \arrow[r, "T_{K,L}"] \arrow[d, "f_*"'] & H(|K|,|L|) \arrow[d, "f_*"] \\ H(C(K',L')) \arrow[r, "T_{K',L'}"] & H(|K'|,|L'|) \end{tikzcd}$$

El isomorfismo $T_{K,L}$ toma clase de homología de un ciclo $\sum_i n_i < \varphi_{\alpha_i} > \in C_n(K, L)$ a la clase de homología del ciclo $\sum_i n_i < \widetilde{\varphi_{\alpha_i}} > \in S_n(K, L)$ donde $\widetilde{\varphi_{\alpha_i}}$ es una cadena singular representando $< \varphi_{\alpha_i} >$.

Vea [8, G.W. Whithead p. 65] y [4, Schubert p. 305].

1.4. Teorema de Hurewicz

El teorema de Hurewicz da una conexión entre los grupos de homotopía y los grupos de homología. Se muestra la existencia del homomorfismo de Hurewicz del enésimo grupo de homotopía al enésimo grupo de homología para cada n. Además nos da información acerca de ese homomorfismo bajo ciertas condiciones del espacio y para valores específicos de n.

Teorema 1.4.1. *Para cualquier espacio X y k un entero positivo, existe un homomorfismo de grupos*

$$h_*: \pi_k(X) \to H_k(X)$$

llamado el homomorfismo de Hurewicz que va del k-ésimo grupo de homotopía al k-ésimo grupo de homología (con coeficienes enteros). En $k = 1$ y X conexo por trayectorias es equivalente al mapeo de abelización

$$h_*: \pi_1(X) \to \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)].$$

Además si X es $(n-1)$-conexo, el mapeo de Hurewicz es un isomorfismo para toda $k \leq n$ cuando $n \geq 2$.

La idea para construir el homomorfismo es escoger generadores canónicos $u_n \in H_n(S^n)$. Entonces las clase de homotpía de mapeo $f \in \pi_n(X)$ son mandados a $f_*(u_n) \in H_n(X)$. Para detalles de la demostración consulte [9, Spannier p. 387].

Versión relativa

Teorema 1.4.2. *Para cualquier par de espacios*(X, A) *y un entero* $k > 1$ *existe un homomorfismo*

$$h_*\colon \pi_k(X, A) \to H_k(X, A)$$

de los grupos de homotopía relativa a los grupos de homología relativa. Además si para cada X, A *que son conexos y el par* (X, A) *es* $(n-1)$*-conexo entonces* H_n *es obtenido de* $\pi_n(X, A)$ *quitando la acción de* $\pi_1(A)$*.*

Vea [9, Spannier p. 393] para una demostración completa.

Capítulo 2

Grupo de Whitehead geométrico

En este capítulo definimos una relación de equivalencia de espacios topológicos por medio de movimientos discretos usando la estructura de espacios CW. Daremos la construcción geométrica del grupo de Whitehead de un complejo CW L al que denotaremos $Wh(L)$, para esto tomaremos clases de equivalencia de espacios que contienen a L y se retraen por deformación fuerte a L. Demostraremos que todo elemento en $Wh(L)$ tiene un representante en forma simplificada con la cual asociaremos una matriz a una clase de parejas CW. Veremos que hay una correspondencia entre clases de parejas CW equivalentes por movimientos discretos y clases de matrices equivalentes por medio de operaciones elementales. La correspondencia con matrices nos permite dar información sobre $Wh(L)$.

Los espacios CW mencionados son finitos a menos que se especifique lo contrario.

2.1. Deformaciones formales

Definición 2.1.0.1. *Suponga que (K, L) es un una pareja CW finita. Entonces diremos que $K \overset{e}{\searrow} L$ es decir K colapsa en L por un colapso elemental si:*

1. *$K = L \cup e^{n-1} \cup e^{n}$ donde e^{n}, e^{n-1} están en $K - L$*
2. *Existe un mapeo $\varphi : I^{n} \to K$ de tal suerte que:*
   a) φ es el mapeo característico de e^{n},
   b) $\varphi|I^{n-1}$ es un mapeo característico para e^{n-1},
   c) $\varphi(J^{n-1}) \subset L^{n-1}$, donde $J^{n-1} = Cl(\partial I^{n} - I^{n-1})$ puede ser pensada como una caja n-dimensional sin una tapa.

En este caso también decimos que L se expande elementalmente a K denotado por $L \overset{e}{\nearrow} K$. Una manera de entender geométricamente las expansiones elementales de L es verlo como el pegado de una bola a L a lo largo de una cara de dicha bola. En la notación de antes, si denotamos $\varphi_0 = \varphi|J^{n-1}$, entonces $\varphi_0 : (J^{n-1}, \partial J^{n-1}) \to (L^{n-1}, L^{n-2})$ y $(K, L) \cong (L \underset{\varphi_0}{\cup} I^n, L)$.

Análogamente, dado L, cualquier mapeo $\varphi_0(J^{n-1}, \partial J^{n-1}) \to (L^{n-1}, L^{n-2})$ determina una expansión elemental. Para ver esto, denotamos $K = L \underset{\varphi_0}{\cup} I^n$. Sea $\varphi : L \oplus I^n \to K$ el mapeo cociente y defina $\varphi((I^{n-1})^\circ) = e^{n-1}, \varphi((I^n)^\circ) = e^n$. Entonces $K = L \cup e^{n-1} \cup e^n$ es un complejo CW y $L \overset{e}{\nearrow} K$.

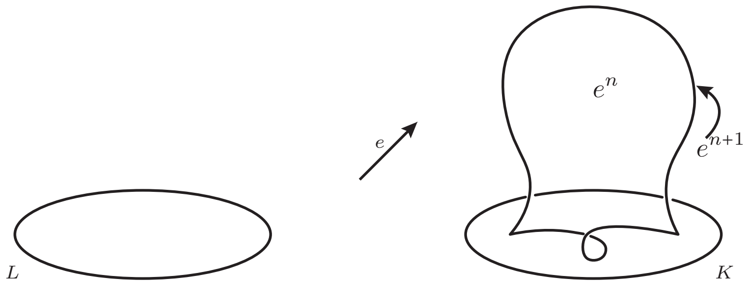


FIGURA 2.1: Expansión elemental de L a K.

Proposición 2.1.0.1. *Si* $K \overset{e}{\searrow} L$ *entonces:*

1. *Existe un retracto celular fuerte por deformación* $D : K \to L$.

2. *Cualesquiera dos retractos por deformación de* K *a* L *son homotópicos relativos a* L.

Demostración. Sea $K = L \cup e^{n-1} \cup e^n$ Por hipótesis hay un mapeo $\varphi_0 : I^{n-1} \to L^{n-1}$ de manera que $(K, L) \approx (L \underset{\varphi_0}{\cup} I^n, L)$. Pero $L \underset{\varphi_0}{\cup} I^n$ es sólo el cilindro de mapeo de φ_0. Entonces por 1.1.0.1 hay un retracto fuerte por deformación $D : K \to L$ de manera que $D(\overline{e^n}) = \varphi_0(I^{n-1}) \subset L^{n-1}$. Claramente D es celular.

Si D_1 y $D_2 : K \to L$ son dos retractos fuertes por deformación y $i : L \subset K$ entonces $iD_1 \simeq 1_K \simeq iD_2$ rel L. Entonces $D_1 = D_1 i D_1 \simeq D_1 i D_2 = D_2$. □

Definición 2.1.0.2. *Escribimos que* $K \searrow L$ *(*K *colapsa en* L*) o bien que* $L \nearrow K$ *(*L *se expande a* K*) si existe una sucesión finita (posiblemente vacía) de colapsos elementales*

$$K = K_0 \overset{e}{\searrow} K_1 \overset{e}{\searrow} \cdots \overset{e}{\searrow} K_q = L.$$

Una sucesión finita de colapsos y expansiones elementales es llamada *deformación formal*. Si hay una deformación formal de K a L escribimos $K \nearrow\!\!\searrow L$ y diremos que tiene el mismo tipo de homotopía simple. Si K y L tienen un subcomplejo común K_0 en el cual ninguna celda fue removida durante la deformación formal, entonces diremos que $K \nearrow\!\!\searrow L$ rel K_0.

Suponga que $K = K_0 \to K_1 \to \cdots \to K_q = L$ es una deformación formal. Defina $f_i : K_i \to K_{i+1}$ tomando f_i el mapeo inclusión si $K_i \overset{e}{\nearrow} K_{i+1}$ y por 2.1.0.1, tomando f_i como un retracto celular fuerte por deformación de K_i a K_{i+1} cuando $K_i \overset{e}{\searrow} K_{i+1}$. Entonces $f = f_{q-1} \cdots f_1 f_0$ es llamada deformación y es una equivalencia de homotopía celular únicamente determinada, salvo homotopía, por una deformación formal. Si $K' < K$ y $f = f_{q-1} \cdots f_0 : K \to L$ es una deformación donde en cada $f_i|K' = 1$ entonces $K \nearrow\!\!\searrow L$ rel K'.

Finalmente definimos una equivalencia de homotopía simple $f : K \to L$ como un mapeo que es homotópico a una deformación. f es una equivalencia de homotopía simple rel K' si es homotópica, rel K' a una deformación rel K'.

Es natural ahora preguntarse por la relación entre la equivalencia homotópica clásica y la recién definida. Si $f : K \to L$ es una equivalencia homotópica, ¿es entonces $f : K \to L$ una equivalencia de homotopia simple?

2.2. Cilindros de mapeo y deformaciones

Con la motivación de definir un grupo $Wh(L)$ usando los complejos CW y las clases de equivalencia dadas por homotopía simple presentaremos algunos lemas técnicos que nos permitirán definir la estructura algebraica.

Proposición 2.2.0.1 (Reordenamientos de colapsos elementales)**.** *Si $K \searrow L$ entonces cualquier secuencia dada de colapsos elementales puede ser reordenada para dar lugar a una nueva secuencia donde $K = K_0 \overset{e}{\searrow} K_1 \overset{e}{\searrow} \ldots \overset{e}{\searrow} K_q = L$ con $K_i = K_{i+1} \cup e^{n_i} \cup e^{n_i - 1}$ donde $n_0 \geq n_1 \geq \ldots \geq n_{q-1}$.*

Demostración. Si $K \searrow L$ entonces $K = L \cup e^{n_0} \cup e^{n_0 - 1} \cup \cdots \cup e^{n_q} \cup e^{n_q - 1}$ donde φ_{n_i} es el mapeo característico de e^{n_1} y $\varphi_{n_i}|I^{n_i - 1}$ es el mapeo característico de $e^{n_i - 1}$.

Sea $M = \{n_0, \ldots, n_q\}$. Tome $m_0 \in M$ maximal, defina $M_0 = M - \{m_0\}$. Sea $K_1 = L \cup \bigcup_{n_i \in M_0} e^{n_i} \cup \bigcup_{n_i \in M_0} e^{n_i - 1}$

Construya inductivamente $K_{j+1} = L \cup \bigcup_{n_i \in M_j} e^{n_i} \cup \bigcup_{n_i \in M_j} e^{n_i - 1}$ donde $M_j = M_{j-1} - \{m_j\}$ para $m_j \in M_j$ un elemento maximal.

Por la construcción es claro que $K_i \overset{e}{\searrow} K_{i+1}$, dado que $\varphi(J^{n_i-1}) \subset K_{i+1}^{n_i-1}$.

Además $n_0 \geq n_1 \geq ... \geq n_{q-1}$. $\square$

Proposición 2.2.0.2 (Homotopía simple en cilindros de mapeo)**.** *Si $f : K \to L$ es un mapeo celular y $K_0 < K$ entonces $M_f \searrow M_{f|K_0}$.*

Demostración. Sea $K = K_0 \cup e_1 \cup ... \cup e_r$ donde e_i son las celdas de $K - K_0$ ordenadas en dimensión creciente. Entonces $K_i = K_0 \cup e_1 \cup ... \cup e_i$ es un subcomplejo de K. Consideremos $M_i = M_{f|K_i}$, veamos que $M_i \searrow M_{i-1}$ para toda i. Sea φ_i el mapeo característico de e_i y sea $q : (K_i \times I) \oplus L \to M_i$ el mapeo cociente. Entonces $M_i = M_{i-1} \cup e_i \cup (e_i \times (0,1))$ y $q \circ (\varphi_i \times 1) : I^{n_i} \times I \to M_i$ es un mapeo característico para $(e_i \times (0,1))$ el cual restringe a $I^{n_i} \times 0$ al mapeo característico de e_i. Claramente el complemento de $I^{n_i} \times 0$ restringido a $\partial(I^{n_i} \times I)$ es mapeado a $M_{i-1}^{n_i}$. Entonces $M_i \overset{e}{\searrow} M_{i-1}$ y de ahí que $M_f \searrow M_{f|K_0}$. $\square$

Corolario 2.2.0.1. *Si $f : K \to L$ es celular entonces $M_f \searrow L$.*

Corolario 2.2.0.2. *Si $K_0 < K$ entonces $(K \times I) \searrow (K_0 \times I) \cup (K \times i), i = 0$ o $i = 1$.*

Proposición 2.2.0.3 (Invariancia bajo CW-isomorfismos)**.** ***(a)*** *Si (K, K_1, K_2) es una tripleta que es CW-isomorfa a (J, J_1, J_2) con $K \nearrow\!\!\!\searrow K_1$ rel K_2, entonces $J \nearrow\!\!\!\searrow J_1$ rel J_2*
(b) *Si K_1, K_2 y L son complejos CW con $L < K_1$ y $L < K_2$ y tenemos $h : K_1 \to K_2$ un CW-isomorfismo de tal suerte que $h|L = 1$ entonces $K_1 \nearrow\!\!\!\searrow K_2$ rel L.*

Demostración. **(a)** Es trivial. **(b)** Es suficiente considerar los casos especiales donde $(K_1 - L) \cap (K_2 - L) = \varnothing$. De lo contrario podemos (renombrando algunos puntos) construir un par (K, L) e isomorfismos $h_i : K \to K_i$, $i = 1, 2$, de tal suerte $(K - L) \cap (K_i - L) = \varnothing$ y de tal que $h_i|L = 1$. Entonces tendremos el caso especial $K_1 \nearrow\!\!\!\searrow K \nearrow\!\!\!\searrow K_2$, rel L.

Considere el cilindro de mapeo M_h. Por lema anterior tenemos

$$M_h \searrow M_{h|L} = (L \times I) \underset{h}{\cup} (K_2 \times 1),$$

y al ser h un CW-isomorfismo la misma prueba puede ser usada para colapsar del otro extremo y obtener $M_h \searrow (L \times I) \cup (K_1 \times 0)$. Ahora sea $\overline{M_h}$ obtenido de M_h al identificar $(x, t) = x$ si $x \in L$, $0 \leq t \leq 1$, como $(K_1 - L) \cap (K_2 - L) = \varnothing$, podemos (al tomar una copia apropiada de $\overline{M_h}$) asumir a K_1 y K_2 como a ellos mismos y no como meras copias de estos contenidos en los extremos de $\overline{M_h}$. Entonces los colapsos de M_h del $(L \times I)$ pueden ser realizados en este nuevo contexto dado que $M_h - (L \times I)$ es isomorfo a $\overline{M_h} - L$ (argumento que probaremos a continuación), resultando así que $K_1 \nearrow \overline{M_h} \searrow K_2$ rel L. $\square$

Si tomamos a $f : L \times I \to L$ como la proyección natural, el argumento de la última oración es un caso especial del siguiente enunciado.

Proposición 2.2.0.4 (Principio de relatividad (simplicial)). *Suponga que $L_1 < K$ y $f : L_1 \to L_2$ es una mapeo celular. Si $K \diagup\!\!\!\searrow J$ rel L_1, entonces $K \underset{f}{\cup} L_2 \diagup\!\!\!\searrow J \underset{f}{\cup} L_2$ rel L_2.*

Demostración. Suponga que $K = K_0 \to K_1 \to \cdots \to K_p = J$ es una secuencia de deformaciones elementales rel L_1 . Sean $q_i : K_i \oplus L_2 \to K_i \underset{f}{\cup} L_2$ los mapeos cocientes $(0 \leq i \leq p)$. Si $K_{i\pm 1} \nearrow K_i = K_{i\pm 1} \cup e^{n-1} \cup e^n$ y $\varphi : I^n \to K_i$ el mapeo característico para e^n restringido al mapeo característico $\varphi|I^{n-1}$ para e^{n-1}entonces $q_i\varphi$ y $q_i(\varphi|I^{n-1})$ son mapeos característicos por $q_i(e^n)$ y $q_i(e^{n-1})$, como $q_i|K_i - L_1$ es un homomorfismo y f es celular. Así

$$(K_{i\pm 1} \underset{f}{\cup} L_2) \nearrow (K_i \underset{f}{\cup} L_2) = (K_{i\pm 1} \underset{f}{\cup} L_2) \cup q_i(e^{n-1}) \cup q_i(e^n)$$

El resultado se sigue por inducción sobre el número de deformaciones elementales. □

Corolario 2.2.0.3. *Suponga que $K \cup L_2$ y $J \cup L_2$ son complejos CW con subcomplejos K, L_2 y J, L_2 respectivamente, y suponga que $K \cap L_2 = J \cap L_2 = L_1$ Si $K \diagup\!\!\!\searrow J$ rel L_1 entonces $K \cup L_2 \diagup\!\!\!\searrow J \cup L_2$ rel L_2.*

Demostración. Al formar $K \underset{f}{\cup} L_2$ y $J \underset{f}{\cup} L_2$ usamos una copia de L_2 disjunta de K y J, por proposición anterior no importa que copia, tomando f es el mapeo inclusión. □

Proposición 2.2.0.5 (Extensión cilíndrica). *Si $f : K \to L$ es un mapeo celular y $K \searrow K_0$ entonces $M_f \searrow K \cup M_{f|K_0}$.*

Demostración. Suponga que $K = K_p \overset{e}{\searrow} K_{p-1} \searrow \cdots \overset{e}{\searrow} K_0$. Para una i fija sea $K_{i+1} = K_i \cup (e^{n-1} \cup e^n)$ y sea $\varphi : (I^n, I^{n-1}) \to \overline{(e^n, e^{n-1})}$ un mapeo característico apropiado. Entonces

$$K \cup M_{f|K_{i+1}} = K \cup M_{f|K_i} \cup [e^{n-1} \times (0,1) \cup e^n \times (0,1)]$$

Siendo q el mapeo cociente, $q \circ (\varphi \times 1) : (I^n \times I, I^{n-1} \times I) \to K \cup M_{f|K_{i+1}}$ esto da lugar a un mapeo característico para estas celdas y coincide con las especificaciones para un colapso elemental. Entonces $K \cup M_f|K_{i+1} \overset{e}{\searrow} K \cup M_{f|K_i}$ el resultado se sigue por inducción. □

Proposición 2.2.0.6 (Equivalencia de cilindros por mapeos homotópicos). *Si $f, g : K \to L$ son mapeos celulares homotópicos, entonces $M_f \diagup\!\!\!\searrow M_g$ rel $K \cup L$.*

Demostración. Sea $F : K \times I \to L$ de tal suerte que $F_0 = f$ y que $F_1 = g$ que por el teorema de aproximación celular podemos suponer que F es celular. Entonces por lema anterior (2.2.0.5),

$$M_{F_0} \cup (K \times I) \nearrow M_F \searrow M_{F_1} \cup (K \times I)$$

Como $K \times I \searrow K \times i, (i = 0, 1)$. Ahora sea $\pi : K \times I \to K$ la proyección natural y sea $M = M_F \underset{\pi}{\cup} K$. Por el principio de relatividad simplicial (2.2.0.4) la deformación antes descrita da lugar a

$$M_f \nearrow M \searrow M_g \text{ rel } K \cup L$$

□

Proposición 2.2.0.7 (Cilindros por mapeos de composición). *Sean $f : K_1 \to K_2$ y $g : K_2 \to K_3$ mapeos celulares, entonces $M_{gf} \nearrow\!\!\searrow M_f \cup M_g$ rel $(K_1 \cup K_3)$ donde $M_f \cup M_g$ es la unión disjunta de M_f y M_g pegados por el mapeo identidad en K_2.*

Demostración. Sea $F = gp : M_f \to K_3$ donde $p : M_f \to K_2$ es la retracción natural. Entonces F es un mapeo celular, $F|K_1 = gf$ y $F|K_2 = g$. Como $M_f \searrow K_2$ por corolario 2.2.0.1 se sigue de 2.2.0.5 que $M_F \searrow M_f \cup M_g$. Por otro lado como $K_1 < M_f$ 2.2.0.2 implica que $M_F \searrow M_{gf}$. Así $M_{gf} \nearrow M_F \searrow M_f \cup M_g$, donde todos los complejos involucrados contienen a $K_1 \cup K_3$. □

Más general aún tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.0.8 (Generalización de cilindros de mapeos). *Si $K_1 \xrightarrow{f_1} K_2 \cdots \xrightarrow{f_{q-1}} K_q$ es una sucesión de mapeos celulares y $f = f_{q-1} \cdots f_1$ entonces $M_f \nearrow\!\!\searrow M_{f_1} \cup M_{f_2} \cup \cdots \cup M_{f_{q-1}}$ rel $K_1 \cup K_q$, donde esta representa la unión disjunta de los M_{f_i} con el rango de uno pegado trivialmente identificado con el dominio del siguiente.*

Demostración. Si $q = 2$ esto es trivial. Procediendo inductivamente, definamos $g = f_{q-1} \cdots f_3 f_2$ y asumamos que $M_g \nearrow\!\!\searrow M_{f_2} \cup \cdots \cup M_{f_{q-1}}$ rel $(K_2 \cup K_q)$ entonces por lema anterior y por (2.2.0.4)

$$\begin{aligned} M_f = M_{gf_1} \nearrow\!\!\searrow &\quad M_{f_1} \cup M_g, \text{ rel } K_1 \cup K_q \\ \nearrow\!\!\searrow &\quad M_{f_1} \cup (M_{f_2} \cup \cdots \cup M_{f_{q-1}}), \text{ rel } M_{f_1} \cup K_q \end{aligned}$$

□

Proposición 2.2.0.9. *Dado un mapeo $f : K \to L$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es una equivalencia de homotopía simple.*
2. *Existe una aproximación celular de g a f de tal manera que $M_g \nearrow\!\!\searrow K$, rel K.*
3. *Para cualquier aproximación celular g a f, $M_g \nearrow\!\!\searrow K$ rel K.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Por definición de equivalencia de homotopía simple existe una deformación formal $K = K_0 \to K_1 \to \cdots \to K_q = L$ tal que f es homotópica a cualquier deformación asociada con esta deformación formal. Sea $g = g_{q-1} \cdots g_1 g_0$ una de estas deformaciones, donde $g_i : K_i \to K_{i+1}$. Note que para toda i, $M_{g_i} \searrow \operatorname{dom} g_i = K_i$

Si $K_i \overset{e}{\nearrow} K_{i+1}$, entonces

$$M_{g_i} = (K_i \times I) \underset{G}{\cup} K_{i+1} \searrow (K_i \times I) \searrow (K_i \times 0) \equiv K_i$$

Y si tenemos que $K_i \overset{e}{\searrow} K_{i+1}$ aplicando (2.2.0.5)

$$M_{g_i} \searrow M_{g_i|K_{i+1}} \cup K_i = (K_{i+1} \times I) \cup (K_i \times 0) \searrow K_i \times 0 \equiv K_i$$

Entonces

$$M_g \nearrow\!\!\!\searrow M_{g_0} \cup \cdots \cup M_{g_{q-1}} \text{ rel } K_0 \qquad \text{Usando (2.2.0.8)}$$

$$\searrow (M_{g_0} \cup \cdots \cup M_{g_{q-2}}) \searrow \cdots \searrow M_{g_0} \searrow K_0 = K$$

2) $\Rightarrow$ 3) Suponga que g es una aproximación celular para f de manera que $M_g \nearrow\!\!\!\searrow K$ rel K donde g' es cualquier aproximación celular de f. Entonces por (2.2.0.6), $M_{g'} \nearrow\!\!\!\searrow M_g \nearrow\!\!\!\searrow K$ rel K.

3) $\Rightarrow$ 1) Sea g cualquier aproximación celular de f. Por hipótesis $M_g \nearrow\!\!\!\searrow K$, rel K. Así el mapeo de inclusión $i : K \subset M_g$ es una deformación. Además el colapso $M_g \searrow L$ determina una deformación $P : M_g \to L$. Dado que cualesquiera dos retractos por deformación fuerte son homotópicos, P es homotópico a la proyección natural $p : M_g \to L$. Entonces $f \simeq g = pi \simeq Pi = def$. Así f es una equivalencia de homotopía simple. □

Proposición 2.2.0.10 (Teorema de extensión de homotopía simple)**.** *Suponga que $X < K_0 < K$ es una tripleta de complejos CW y $f : K_0 \to L_0$ es una equivalencia de homotopía simple celular tal que $f|X = 1$. Sea $L = K \underset{f}{\cup} L_0$. Entonces existe una equivalencia de homotopía simple $F : K \to L$ de manera que $F|K_0 = f$. Además $K \nearrow\!\!\!\searrow L$ rel X.*

Demostración. Sea $F : K \to L$ la restricción a K del mapeo cociente $K \oplus L_0 \to L$. Entonces $M_F = (K \times I) \underset{q}{\cup} M_f$ donde $q : K_0 \times I \to M_f$ es también la restricción del mapeo cociente. Pero $K \times I \searrow (K_0 \times I) \cup (K \times 0)$, entonces por (2.2.0.4)

$$M_F \searrow M_f \cup (K \times 0) \equiv M_f \cup K,$$

$$\nearrow\!\!\!\searrow K \text{ rel } K \text{ por (2.2.0.9) y (2.2.0.3)}$$

Claramente $F|K_0 = f$ y por 2.2.0.9 de nuevo, F es una equivalencia de homotopía simple. La última afirmación del teorema es cierta debido a que

$$K \nearrow\!\!\!\searrow M_f \searrow M_{f|x} = (X \times I \cup L) \nearrow L \times I \searrow L \times 0 \equiv L$$

Todo esto rel $X = X \times 0$. □

Aún no hemos podido resolver la pregunta hecha al incio sobre la relación entre una equivalencia de homotopía simple y una equivalencia de homotopía. La siguiente proposición nos permite reformular dicho cuestionamiento.

Proposición 2.2.0.11. *Las siguientes conjeturas son equivalentes:*

(1) Si $f : K \to L$ es una equivalencia homotópica, entonces $f : K \to L$ una equivalencia de homotopía simple

(2) Si (X, Y) es una pareja CW y $X \searrow Y$ entonces $X \wedge\!\!\!\searrow Y$ rel Y

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Suponga que $X \searrow Y$ i.e. $i : Y \subset X$ es una equivalencia homotópica. Entonces por (1) i es una equivalencia de homotopía simple (celular) entonces (2.2.0.9) implica que $M_i \wedge\!\!\!\searrow Y$ rel Y. Entonces

$$X = X \times 0 \nearrow X \times I = M_{1_X} \searrow M_i \wedge\!\!\!\searrow Y \text{ rel } Y$$

(2)$\Rightarrow$(1). Suponga que $f : K \to L$ es una equivalencia de homotopía celular por (1.1.0.2) $M_f \searrow K$ Entonces (2) establece que $M_f \wedge\!\!\!\searrow K$ rel K; y por (2.2.0.9) f es una equivalencia de homotopía simple. □

Por tanto deberemos prestar particular atención a las clases de equivalencia de espacios que X que se retraen por deformación fuerte a Y para dar respuesta a la relación entre ambas teorías.

2.3. Grupo de Whitehead

Dado un complejo CW finito L, queremos poner algo de estructura en la clase de parejas CW (K, L) de manera que $K \searrow L$.

Si (K, L) y (K', L) son parejas CW homotópicamente triviales , definimos $(K, L) \sim (K', L)$ si y sólo si $K \wedge\!\!\!\searrow K'$ rel L. Esto es claramente una relación de equivalencia y denotamos $[K, L]$ a la clase de equivalencia de (K, L). Una suma de clases de equivalencia está definida por

$$[K, L] + [K', L] = [K \underset{L}{\cup} K', L]$$

Donde $K \underset{L}{\cup} K'$ es la unión disjunta de K y K' identificados por el mapeo identidad en L (por 2.2.0.3 no importa cual unión disjunta de K y K' identificada tomemos. Además por (2.2.0.3) las clases de equivalencia forman un conjunto, dado que es fácil ver que las clases de isomorfismo de complejos CW finitos tienen cardinalidad $\leq 2^c$). El *grupo de*

Whitehead de L es definido como el conjunto de clases de equivalencia con la suma dada y es denotado $Wh(L)$.

Proposición 2.3.0.1. $Wh(L)$ *es un grupo abeliano bien definido.*

Demostración. Un retracto fuerte por deformación de K a L y uno de K' a L combinados dan lugar fácilmente a uno de $K \underset{L}{\cup} K'$ a L. Así $[K \underset{L}{\cup} K', L]$ es un elemento de $Wh(L)$ si $[K, L]$ y $[K', L]$ lo son. Más aún, no depende del representante, si $[K, L] = [J, L]$, entonces $K \underset{L}{\cup} K' \mathrel{\nearrow\!\!\searrow} J \underset{L}{\cup} K'$ rel L por (2.2.0.3), entonces $[J \underset{L}{\cup} K', L] = [J \underset{L}{\cup} J', L]$. Por lo tanto la suma está bien definida. Que la suma sea asociativa y conmutativa se sigue del hecho de que la unión de conjuntos lo es.

El elemento $[L, L]$ es la identidad, denotado por 0.

Si $[K, L] \in Wh(L)$, sea $D : K \to L$ un retracto fuerte por deformación. Construyamos $2M_D$ al tomar dos copias del cilindro de mapeo M_D, identificadas por la identidad en K. De manera precisa, sea $2M_D = K \times [-1, 1]$ con identificaciones $(x, -1) = (D(x), -1)$ y $(x, 1) = D(x)$ para toda $x \in K$. Afirmamos que $[2M_D, L] = -[K, L]$.

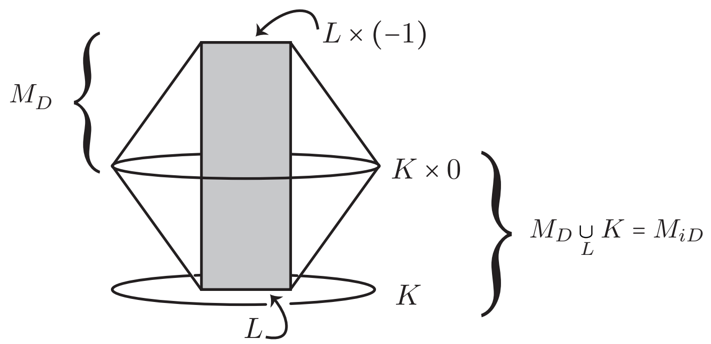


Figura 2.2: Representación de $2M_D \underset{L}{\cup} K$.

Veamos: $[2M_D, L] + [K, L] = [2M_D \underset{L}{\cup} K, L]$

$$= [(M_D \underset{L}{\cup} K) \cup M'_D, L]$$

$$= [M_{iD} \cup M'_D, L] \text{ donde } i : L \underset{\to}{\subset} K$$

Pero $iD \simeq 1_K$, entonces por (2.2.0.6), $M_{iD} \mathrel{\nearrow\!\!\searrow} K \times I$ rel $(K \times 0) \cup K$. Por (2.2.0.3) tenemos

$$\begin{aligned}
&= [K \times I \cup M'_D, L] \\
&= [L \times I \cup M'_D, L] && \text{como } K \times I \searrow (L \times I \cup K \times 0) \\
&= [L \times [-1, 1], L] && \text{como } M'_D \searrow L \times [-1, 0] \\
&= [L, L] = 0 && \text{como } L \times [-1, 1] \searrow L \equiv L \times 1
\end{aligned}$$

En figuras, estas ecuaciones se representan como

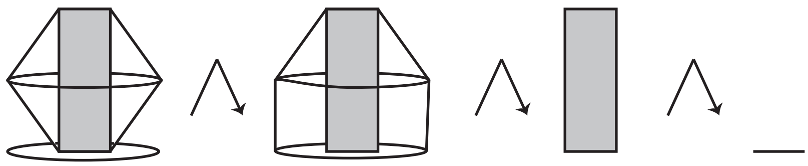


FIGURA 2.3: Colapsos y expansiones en $2M_D \underset{L}{\cup} K$.

□

Si $f : L_1 \to L_2$ es un mapeo celular, definimos $f_* : Wh(L_1) \to Wh(L_2)$ por

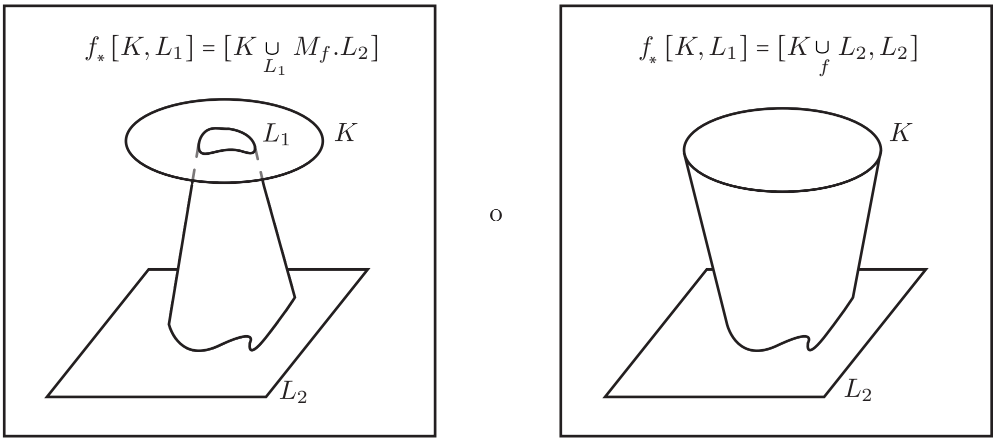


FIGURA 2.4: Morfismo inducido.

Estas definiciones son equivalentes porque la proyección natural $p : M_f \to L_2$ es un equivalencia de homotopía simple con $p|L_2 = 1$ con la deformación determinada por (2.2.0.10).

$$(M_f \underset{L_1}{\cup} K) \curlywedge (M_f \underset{L_1}{\cup} K) \underset{p}{\cup} L_2 = K \underset{f}{\cup} L_2, \text{ rel } L_2.$$

Se sigue directamente de la segunda definición que f_* es un homomorfismo de grupos. De la primera definición y por (2.2.0.7) se sigue que $g_* f_* = (gf)_*$. Veamos:

Proposición 2.3.0.2 (Funtor geométrico de Whitehead)**.** *Existe un funtor covariante de la categoría de complejos CW finitos y mapeos celulares a la categoría de grupos abelianos y homomorfismos de grupo dado por*

$$(L) \mapsto Wh(L)$$

$$(f : L_1 \to L_2) \mapsto (f_* : Wh(L_1 \to Wh(L_2)).$$

Más aún si $f \simeq g$ entonces $f_* = g_*$

Podemos ahora definir la torsión $\tau(f)$ de una equivalencia homotópica celular $f : L_1 \to L_2$ por

$$\tau(f) = f_*[M_f, L_1] = [M_f \underset{L_1}{\cup} M_f, L_2] \in Wh(L_2)$$

Podremos sacar información formal muy importante acerca del grupo de Whitehead y de la torsión considerando los siguientes hechos:

Proposición 2.3.0.3. *Si K, L y M son complejos CW, entonces*

1. *Si K, L y M son subcomplejos del complejo $K \cup L$ con $M = K \cap L$ y si $K \searrow M$ entonces $[K \cup L, L] = j_*[K, M]$ donde $j : M \to L$ es la inclusión.*

2. *Si $K \searrow L \searrow M$ e $i : M \to L$ es la inclusión, entonces $[K, M] = [L, M] + (i_*)^{-1}[K, L]$*

Sin embargo parece absurdo obtener más información acerca de $Wh(L)$ dado que este parece ser siempre trivial, por lo tanto pospondremos las consecuencias de lo enunciado anteriormente hasta más adelante, para antes mostrar que el funtor recién descrito es naturalmente equivalente a uno altamente no trivial.

2.4. Simplificando un par CW homotópicamente trivial

En esta sección tomaremos un par CW (K, L) de manera que $K \searrow L$ y lo *simplificaremos* al hacer expansiones y colapsos rel L. Empezaremos con un lema el cual relaciona el tipo de homotopía simple de un complejo con los mapeos de pegado con los cuales fue construido, estableciendo que el pegado por frontera de n-celdas que no difiere bajo homotopía genera el mismo par CW a ojos de homotopía simple.

Proposición 2.4.0.1. *Si $K_0 = L \cup e_0$ y $K_1 = L \cup e_1$ son complejos CW donde $e_i (i = 0, 1)$ son n-celdas con mapeos característicos $\varphi_i : I^n \to K_i$, de manera que $\varphi_0 | \partial I^n$ y $\varphi_1 | \partial I^n$ son mapeos homotópicos de ∂I^n en L entonces $K_0 \diagup\!\!\diagdown K_1$ rel L.*

Demostración. Primero consideremos el caso en que $e_0 \cap e_1 = \varnothing$ y, bajo esta suposición, damos al conjunto $L \cup e_0 \cup e_1$ la topología y la estructura CW que hacen que K_0 y K_1 sean subcomplejos.

Sea $F : \partial I^n \times I \to L$ con $F_i = \varphi_i | \partial I^n (i = 0, 1)$. Considere ∂I^n con la estructura CW natural y $\partial I^n \times I$ la estructura producto. Entonces por el teorema de aproximación celular (1.2.2) el mapeo $F : (\partial I^n \times I, \partial I^n \times 0, 1) \to (L, L^{n-1})$ es homotópico al mapeo G tal que $G | \partial I^n \times 0, 1 = F | \partial I^n \times 0, 1$ y $G(\partial I^n \times I) \subset L^n$. Definimos $\varphi : \partial(I^n \times I) \to (L \cup e_0 \cup e_1)^n$ al tomar

$$\varphi | \partial I^n \times I = G; \quad \varphi | I^n \times i = \varphi_i, \quad i = 0, 1$$

Ahora pegamos una (n+1)-celda a $L \cup e_0 \cup e_1$ por φ para obtener el complejo CW

$$K = (L \cup e_0 \cup e_1) \underset{\varphi}{\cup} (I^n \times I)$$

Como $\varphi | I^n \times i$ es un mapeo característico para e_i, tenemos

$$K_0 = L \cup e_0 \overset{e}{\nearrow} K \overset{e}{\searrow} L \cup e_1 = K_1, rel L$$

Si $e_0 \cap e_1 \neq \varnothing$, construyamos un complejo CW $K' = L \cup e_0'$ de manera que $e_0' \cap (e_0 \cup e_1) = \varnothing$ y de manera que e_0' tenga el mismo mapeo de pegado que e_0. Entonces, por el caso especial de arriba $K_0 \wedge\!\!\searrow K_0' \wedge\!\!\searrow K_1$, rel L.

□

Sería bueno tener para cada elemento en $[(K, L)] \in Wh(L)$ un representante *simplificado* que permita maniobrar con $Wh(L)$, con ese propósito ahora introduciremos un nuevo concepto llamado *intercambio de celdas*.

Proposición 2.4.0.2. *Si* (K, L) *es una pareja conectada de complejos CW y* r *es un entero de manera que*

1. $\pi_r(K, L) = 0$
2. $K = L \cup \bigcup_{i=1}^{k_r} e_i^r \cup \bigcup_{i=1}^{k_{r+1}} e_i^{r+1} \cup \cdots \cup \bigcup_{i=1}^{k_n} e_i^n$

   Entonces $K \wedge\!\!\searrow M$ *rel* L *donde* M *es un complejo CW de la forma*

$$M = L \cup \bigcup_{i=1}^{k_{r+1}} f_i^{r+1} \cup \bigcup_{i=1}^{k_r + k_{r+2}} f_i^{r+2} \cup (\bigcup_{i=1}^{k_{r+3}} f_i^{r+3} \cup \cdots \cup \bigcup_{i=1}^{k_n} e_i^n)$$

Donde e_i^j f_i^j *denotan* $j-$*celdas.*

Demostración. Sea $\varphi_i^r : I^r \to K$ un mapeo característico para $e_i^r (i = 1, 2, ..., k_r)$. Entonces $\varphi_i^r(\partial I^r) \subset K^{r-1} = L^{r-1}$ y $\varphi_i^r : (I^r, \partial I^r) \to (K, L)$. Como $\pi_r(K, L) = 0$ hay un mapeo $F_i : I^{r+1} \to K$ de manera que

$$\begin{aligned} &F_i | I^r \times 0 = \varphi_i \\ &F_i | \partial I^r \times t = \varphi_i | \partial I^r, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ &F_i(I^r \times 1) \subset L \end{aligned}$$

Podremos asumir además:

$$F_i(\partial I^{r+1}) \subset K^r \text{ y } F_i(I^{r+1}) \subset K^{r+1}$$

Esto porque si cada F_i no tuviera estas propiedades, podríamos usar el teorema de aproximación celular como sigue. Primero llevamos por una homotopía $F_i | \partial I^{r+1}$ relativa a $(I^r \times 0) \cup (\partial I^r \times I)$ a un mapeo G_i con $G_i(I^r \times 1) \subset L^r$. Por la propiedad de extensión homotópica G_i se puede extender a un mapeo, que también llamaremos G_i, de I^{r+1} a K. Entonces $H_i : I^{r+1} \to K^{r+1}$ es homotópico a $G_i : I^{r+1} \to K$, relativo a ∂I^{r+1} donde H_i tendrá las propiedades deseadas.

Sea $P = K \underset{F_1}{\cup} I^{r+2} \underset{F_2}{\cup} I^{r+2} \cup \cdots \underset{F_{k_r}}{\cup} I^{r+2}$ y sea $\psi_i : I^{r+2} \to P$ el mapeo de identificación determinado por la condición que $\psi_i | I^{r+1} \times 0 = F_i$. Recordando que $J^m \equiv Cl(\partial I^{m+1} - I^m)$, establecemos que

$$E_i^{r+2} = \psi_i(I^{r+2}) \text{ y } E_i^{r+1} = \psi_i(J^{r+1}), 1 \le i \le k_r$$

Entonces, por definición de la expansión,

$$K \nearrow P = K \cup \bigcup E_i^{r+2}$$

Considere $P_0 = L \cup \bigcup e_i^r \cup \bigcup E_i^{r+1}$.

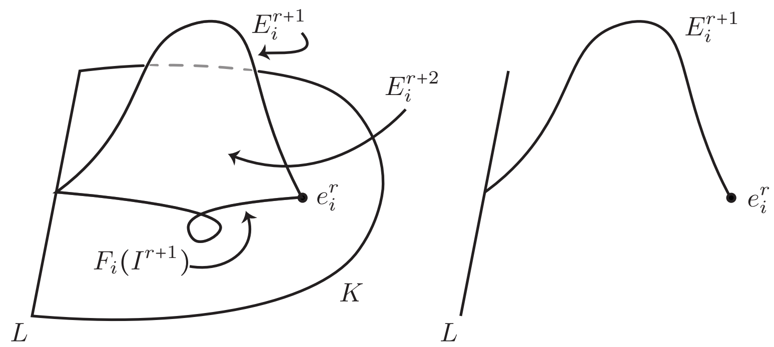


Figura 2.5: Caso cuando hay una sola r-celda y $r = 0$.

Como $\psi_i(\partial J^{r+1}) = F_i(\partial I^{r+1}) \subset K^r, P_0$ es un subcomplejo de P bien definido. Además I^r es una cara de J^{r+1} de tal suerte que $\psi_i | I^r = \varphi_i$ un mapeo característico para e_i^r. Entonces tenemos

$$P_0 \searrow L \;\; P - P_0 = \bigcup e_i^{r+1} \cup (\bigcup e_i^{r+2} \cup \bigcup E_i^{r+2}) \cup \bigcup e_i^{r+3} \cup \cdots \cup \bigcup e_i^n.$$

Sea $g : P_0 \to L$ una deformación celular correspondiente a este colapso. Aplicando 2.2.0.10 y tomando $G : P \to P \underset{g}{\cup} L$ el mapeo inducido por g, tenemos

$$K \nearrow P \bigwedge P \underset{g}{\cup} L, \text{ rel } L$$

donde

$$P \underset{g}{\cup} L = L \cup \bigcup G(e_i^{r+1}) \cup [\bigcup G(e_i^{r+2}) \cup \bigcup G(E_i^{r+2})] \cup \cdots \cup \bigcup G(e_i^n)$$

La prueba es completada al tomar $M = P \underset{g}{\cup} L$. □

Proposición 2.4.0.3. *Suponga que (K, L) es una pareja de complejos CW conectados de manera que $K \searrow L$. Sea $n = dim(K - L)$ y sea $r \geq n - 1$ un entero. Sea e^0 una 0-celda de L. Entonces $K \wedge\!\!\searrow M$, rel L, donde*

$$M = L \cup \bigcup_j^a e_j^r \cup \bigcup_i^a e_i^{r+1}$$

y donde e_j^r y e_i^{r+1} tienen mapeos característicos $\psi_j : I^r \to M$ y $\varphi_i : I^{r+1} \to M$ de manera que $\psi_j(\partial I^r) = e^0 = \varphi_i(J^r)$.

Definición 2.4.0.1. *Si L es conexo, $M \searrow L$, y (M, L) satisfacen la conclusión del enunciado anterior con $r \geq 2$, diremos que (M, L) está en forma simplificada.*

Demostración. Como $K \searrow L$, $\pi_i(K, L) = 0$ para toda i. Así por (2.4.0.2) podremos cambiar la 0-celdas relativas de K por 2-celdas, luego las 1-celdas del nuevo complejo por 3-celdas, y así sucesivamente hasta que lleguemos a un complejo $\widetilde{K}$ en el cual la celdas de menor dimensión de $\widetilde{K} - L$ sean de dimensión r. Como $r \geq n - 1$ no habrá ninguna celda de dimensión mayor que $r + 1$. Así podremos escribir $\widetilde{K} = L \cup \bigcup_{j=1}^a \widetilde{e}_j^r \cup \bigcup_i^a \widetilde{e}_i^{r+1}$. Tomemos $\widetilde{e}_j^r$ con mapeos característicos ψ_j.

Afirmemos que, para cada j, $\widetilde{\psi}_j|\partial I^r$ es homotópico al mapeo constante $\partial I^r \to e^0$. Como, $\widetilde{K} \searrow L$ hay un retracto $R : \widetilde{K} \to L$, entonces $R\widetilde{\psi}_j : I^r \to L$ y $R\widetilde{\psi}_j|\partial I^r = \widetilde{\psi}_j|\partial I^r$. Como $\widetilde{\psi}_j(\partial I^r) \subset \widetilde{K^{r-1}} \subset L$. Así $\widetilde{\psi}_j|\partial I^r$ es homotópicamente nula en L, L siendo arco-conexo, es homotópico al mapeo constante en e^0. Usando (2.4.0.1) tenemos,

$$L \cup \bigcup \widetilde{e}_j^r \wedge\!\!\searrow L \cup \bigcup e_j^r, \text{ rel } L$$

Donde las e_j^r están trivialmente pegadas en e^0. Por (2.2.0.10):

$$L \cup \bigcup \widetilde{e}_j^r \cup \bigcup \widetilde{e}_i^{r+1} \wedge\!\!\searrow L \cup \bigcup e_j^r \cup \bigcup f_i^{r+1}$$

Ahora tome las celdas f_i^{r+1} con mapeos característicos $\widetilde{\varphi}_i$. Como J^r es contraíble a un punto con una homotopía de ∂I^{r+1} el mapeo de pegado $\widetilde{\varphi}_i|\partial I^{r+1}$ es homotópico al mapeo $\varphi_i : \partial I^{r+1} \to L \cup \bigcup e_j^r$ de manera que $\varphi_i(J^r) = e^0$. Entonces por (2.4.0.1) de nuevo

$$L \cup \bigcup e_j^r \cup \bigcup f_i^{r+1} \wedge\!\!\searrow L \cup \bigcup e_j^r \cup \bigcup e_i^{r+1}, \text{ rel } L$$

donde e_i^{r+1} tienen mapeos característicos φ_i tales que $\varphi_i(J^r) = e^0$. Llamemos a este último complejo M.

Finalmente para ver que el número de r-celdas de $M - L$ es igual al número de $(r+1)$-celdas de $M - L$. Note que por (1.3.0.2) estos números son precisamente iguales a los rangos de los módulos libres de homología $H_r(M^r \cup L, L)$ y $H_{r+1}(M, M^r \cup L)$. Pero como $M \searrow L$, la sucesión exacta de la tripleta $(M, M^r \cup L, L)$ contiene

$$\to H_{r+1}(M,L) \to H_{r+1}(M, M^r \cup L) \xrightarrow{d} H_r(M^r \cup L, L) \to H_r(M,L) \to$$

Donde $H_{r+1}(M,L) = H_r(M,L) = 0$. Así d es un isomorfismo y estos rangos son iguales. □

2.5. Matrices y deformaciones formales

Dada una pareja CW homotópicamente trivial, hemos mostrado que puede ser transformada en una pareja en forma simplificada. Entonces consideraremos al par (K, L) como $K = L \cup \bigcup e_j^r \cup \bigcup e_i^{r+1}$ donde las celdas e_j^r están trivialmente pegadas a e_0. Si dado r y L queremos distinguir una pareja de otra, entonces claramente la información crucial yace en la manera en cómo pegamos las celdas e_i^{r+1}, es decir en los mapeos $\varphi_i|\partial I^{r+1} : \partial I^{r+1} \to L \cup \bigcup e_j^r$, donde φ_i es el mapeo característico correspondiente a e_i^{r+1}. Denotando $K_r = L \cup \bigcup e_j^r$, estudiamos estos mapeos de pegado en términos del operador frontera $\partial : \pi_{r+1}(K, K_r; e^0) \to \pi_r(K_r, L; e^0)$ en la sucesión exacta larga de homotopía relativa para la tripleta (K, K_r, L). Como pegar por mapeos homotópicos no altera el tipo de homotopía simple, no queremos pegar dejando fijo un punto base. Para capturar el grado extra de libertad, pensaremos en los grupos de homotopía no sólo como grupos abelianos, si no como módulos sobre $\mathbb{Z}(\pi_1(L, e^0))$. Esto de la siguiente manera:

Dado un par de complejos conectados (P, P_0) y un punto $x \in P_0$, como sabemos $\pi_1 = \pi_1(P_0, x)$ actúa en $\pi_n(P, P_0; x)$ con la condición de que $[\alpha] \cdot [\varphi] = [\varphi']$, donde α y φ representan los elementos $[\alpha]$ y $[\varphi]$ de π_1 y de $\pi_n(P, P_0; x)$ respectivamente y $\varphi' : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (P, P_0, x)$ es homotópico a φ por una homotopía que arrastra $\varphi(J^{n-1})$ a lo largo de una vuelta de α^{-1}.

Esta acción tiene las propiedades:

(0) $[*] \cdot [\varphi] = [\varphi]$, donde $[*]$ es la identidad en π_1,

(1) $[\alpha] \cdot ([\varphi_1] + [\varphi_2]) = [\alpha] \cdot [\varphi_1] + [\alpha] \cdot [\varphi_2]$,

(2) $([\alpha][\beta]) \cdot [\varphi] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\varphi])$,

(3) Esta conmuta con todos los homomorfismos en la sucesión exacta de homotopía de la pareja (P, P_0),

Se sigue ahora que $\pi_n(P, P_0; x)$ se convierte en un $\mathbb{Z}\pi_1$-módulo si definimos la multiplicación por

$$(\sum n_j[\alpha_j])[\varphi] = \sum n_j([\alpha_j]\cdot[\varphi]), [\alpha_j] \in \pi_1, [\varphi] \in \pi_n(P, P_0; x)$$

y la sucesión exacta de homotopía de $(P, P_0 : x)$ se convierte en un sucesión exacta de $\mathbb{Z}\pi_1$-módulos. En caso de tomar una pareja en forma simplificada (K, L), el siguiente lema no permite darle estructura a $\pi_{r+1}(K, K_r; e^0)$ y a $\pi_r(K_r, L, e^0)$.

Proposición 2.5.0.1 (Bases para los $\mathbb{Z}\pi_1$ módulos). *Suponga que (P, P_0) es una pareja CW con $P = P_0 \cup \bigcup e_i^n$, donde P_0 es conexo. Suponga que $\varphi_i : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (P, P_0; e^0)$ son mapeos característicos para las celdas e_i^n y ya sea que (a) $n \geq 3$, o bien (b) $n = 2$ y se tiene que $\varphi(\partial I^n) = e^0$ para toda i. Entonces $\pi_n(P, P_0; e^0)$ es un $\mathbb{Z}\pi_1$-módulo libre cuya base es $[\varphi_1], [\varphi_2], \cdots [\varphi_a]$.*

Demostración. Afirmamos primero que el mapeo inclusión induce un isomorfismo $i_\# : \pi_1(P_0, e^0) \to \pi_1(P, e^0)$, Para toda $n \geq 2$, $i_\#$ es suprayectiva por el teorema de aproximación celular, cualquier mapeo de $(I^1, \partial I^1)$ en (P, e^0) es homotópico rel ∂I^1 a P_0. Similarmente para toda $n \geq 3$, $i_\#$: es inyectiva, porque cualquier homotopía $F : (I^2, \partial I^2) \to (P, P_0)$ entre mapeos F_0 y F_1 puede ser reemplazado por un mapeo $G : I^2 \to P_0$ de manera que $G|\partial I^2 = F|\partial I^2$. Finalmente si $n = 2$, $\varphi_i(\partial I^2) = e^0$, por suposición. Sea $R : P \to P_0$ el retracto tal que $R(\bigcup e_i^2) = e^0$. Entonces si dos mapeos $f, g : (I, \partial I) \to (P_0, e^0)$ son homotópicos en P por una homotopía F_t, estos son homotópicos en P_0 con la homotopía $R \circ F_t$. Por lo tanto $i_\#$ es también inyectiva en este caso.

Sea $p : \widetilde{P} \to P$ la cubierta universal de P y $\widetilde{P_0} = p^{-1}P_0$. Entonces $\widetilde{P_0}$ es la cubierta universal de P_0 cuyo mapeo de cubierta es $p|\widetilde{P_0}$ por (1.2.4.4). Sea G el grupo de homomorfismos de cubierta de $\widetilde{P}$. Escoja un punto base $\widetilde{e^0} \in p^{-1}(e^0)$ Para cada $i (1 \leq i \leq a)$, sea $\widetilde{\varphi}_i : (I^n, J^{n-1}) \to (\widetilde{P}, e^0)$ el levantamiento de φ_i. Entonces (4.1.0.2) dice que $H_*(\widetilde{P}, \widetilde{P_0})$ es un $\mathbb{Z}\pi_1$-módulo libre con base $\{< \widetilde{\varphi}_i >\}$ donde $< \widetilde{\varphi}_i > \equiv (\widetilde{\varphi}_i)_*(\omega_n)$, siendo ω_n un generador de $H_n(I^n, \partial I^n)$. Podemos primero identificar G con $\pi_1(P, e^0)$ (ver (1.1)), luego usar el isomorfismo $i_\#$ para identificar G con $\pi_1(P_0, e^0) = \pi_1$. Si $[\alpha] \in \pi_1$, tome $g_{[\alpha]}$ el correspondiente homomorfismo de cubierta. Entonces $H_*(\widetilde{P}, \widetilde{P_0})$ es un $\mathbb{Z}\pi_1$-módulo con base $\{< \widetilde{\varphi}_i >\}$. Completamos la prueba demostrando que $H_n(\widetilde{P}, \widetilde{P_0})$ es isomorfo a $\pi_n(P, P_0; e^0)$ como $\mathbb{Z}\pi_1$-módulo, con un isomorfismo que manda $< \widetilde{\varphi}_i >$ en $[\varphi_i]$ para cada i.

Para demostrar esto, considere el isomorfismo T de $\mathbb{Z}$-módulos dado por

$$H_n(\widetilde{P}, \widetilde{P_0}) \xrightarrow{h^{-1}} \pi_n(\widetilde{P}, \widetilde{P_0}; e^0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(P, P_0; e^0)$$

Con $T = p_* \circ h^{-1}$, donde h es el homomorfismo de Hurewicz el cual manda cada $[\psi] \in \pi_n(\widetilde{P}, \widetilde{P_0}, \widetilde{e^0})$ en $\psi_*(\omega_n)$. De hecho podemos aplicar el teorema de Hurewicz (ver (1.4)), h es un isomorfismo porque $\widetilde{P_0}$ y $\widetilde{P}$ son conexos y simplemente conexos, y por el teorema de aproximación celular, $\pi_1(\widetilde{P}, \widetilde{P_0}) = 0$ para $i \leq n-1$. También $p_\#$ es un isomorfismo para toda $n \geq 1$, por la propiedad de levantamiento homotópico. Así T es un isomorfismo y, claramente $T(<\widetilde{\varphi}_i>) = p_\#[\widetilde{\varphi}_i] = [p\widetilde{\varphi}_i] = [\varphi_i]$. Finalmente para ver que T es un homomorfismo de $(\mathbb{Z}\pi_1)$-módulos, basta con mostrar que $T(\Sigma a_i <\widetilde{\varphi}_i>) = \Sigma a_i[\varphi_i]$ para cada $a_i = \sum_j n_{ij}[\alpha_j] \in \mathbb{Z}(\pi_1)$. Pero por definición de multiplicación escalar y de nuestra identificación de $\mathbb{Z}\pi_1$ con $\mathbb{Z}(G)$,

$$\sum_i a_i <\widetilde{\varphi}_i> = \sum_i (\sum_j n_{ij}[\alpha_j])(\widetilde{\varphi_{i*}}(\omega_n)) = \sum_{i,j} n_{ij}((g_{[\alpha_j]}\widetilde{\varphi}_i)_*(\omega_n))$$

Pero $g_{[\alpha_j]}\widetilde{\varphi}_i$ es libremente homotópico al mapeo $\widetilde{\alpha}_j \cdot g_{[\alpha_j]}\widetilde{\varphi}_i$, el cual es obtenido de arrastrar la imagen de J^{n-1} (o bien $g_{[\alpha_j]}(e^0)$) a lo largo del camino $\widetilde{\alpha}_j^{-1}$. Así, por la propiedad de homotopía en homología

$$\begin{aligned}
\sum_i a_i <\widetilde{\varphi}_i> &= \sum_{i,j} n_{i,j}((\widetilde{\alpha}_j \cdot g_{[\alpha_j]}\widetilde{\varphi}_i)_*(\omega_n)) \\
&\xrightarrow{h^{-1}} \sum_{i,j} n_{i,j}[\widetilde{\alpha}_j \cdot g_{[\alpha_j]}\widetilde{\varphi_j})_*] \\
&\xrightarrow{p_\#} \sum_{i,j} n_{i,j}[p \circ (\widetilde{\alpha}_j \cdot g_{[\alpha_j]}\widetilde{\varphi}_i)] \\
&= \sum_{i,j} n_{i,j}([\alpha_j] \cdot [\varphi_j]) \\
&= \sum_i (\sum_j n_{i,j}[\alpha_j])[\varphi_i] \\
&= \sum_i a_i[\varphi_i]
\end{aligned}$$

□

Suponga ahora que (K, L) está en forma simplificada, donde

$$K = L \cup \bigcup_{j=1}^{a} e_j^r \cup \bigcup_{i=1}^{a} e_i^{r+1}$$

Sean $\{\varphi_i\}$ y $\{\psi_j\}$ los mapeos característicos para las respectivas e_i^{r+1} y e_j^r respectivamente. Entonces por el lema anterior $\{[\varphi_i]\}$ y $\{[\psi_j]\}$ son las bases de los $\mathbb{Z}\pi_1$-módulos $\pi_{r+1}(K, K_r)$ y $\pi_r(K_r, L)$. Definimos la matriz asociada a(K, L) con respecto a los mapeos característicos $\{\varphi_i\}$ y $\{\psi_j\}$ la $\mathbb{Z}(\pi_1)$ matriz cuadrada de tamaño a, dada por $\partial[\varphi_i] = \sum a_{ij}[\psi_j]$ donde $\partial : \pi_{r+1}(K, K_r) \to \pi_r(K_r, L)$ es el operador frontera usual.

Note que esta matriz debe de ser no singular (i.e. debe tener inverso por los dos lados). Para $\pi_{r+1}(K,L) = \pi_r(K,L) = 0$, como $K \searrow L$; y por la exactitud de la sucesión de homotopía, ∂ es un isomorfismo.

Note que el caso más simple ocurre al tomar una pareja simplificada en donde los mapeos característicos φ_i, ψ_j satisfacen que $\varphi_i(J^r) = e^0$ y $\varphi_i|I^r = \psi_i$. En este caso tenemos que algebraicamente la matriz asociada a (K,L) es la matriz identidad y geométricamente tenemos que $K \searrow L$ (claro pues $K - L$ es una unión de bolas por un punto). Más general tenemos que cuando la matriz es adecuada podemos cancelar celdas como sigue:

Proposición 2.5.0.2. *Si (K,L) es una pareja en forma simplificada y si la matriz asociada de (K,L) con respecto a alguna elección de mapeos característicos $\{\varphi_i\}, \{\psi_j\}$ resulta ser la identidad, entonces $K \curlywedge L$, rel L.*

Demostración. Considere los mapeos característicos $\varphi_1 : (I^{r+1}, I^r, J^r) \to (K, K_r, e^0)$ y $\psi_1 : (I^r, \partial I^r) \to (K_r, e^0)$. Por hipótesis $[\psi_1] = \partial[\varphi_1] \equiv [\varphi_1|I^r] \in \pi_r(K_r, L, e^0)$. Así existe una homotopía $h_t : (I^r, I^{r-1}, J^{r-1}) \to (K_r, L, e^0)$ de manera que $h_0 = \varphi_1|I^r$ y $h_1 = \psi_1$. Por el teorema de extensión homotópica (1.2.1) podemos extender $h_t|\partial I^r$ a una homotopía $g_t : J^r \to L$ de manera que $g_0|J^r = \varphi_1|J^r$. Combinando h_t y g_t tenemos una homotopía $H_t : (\partial I^{r+1}, I^r, J^r) \to (K_r, K_r, L)$ con $H_0 = \varphi_1|\partial I^{r+1}$ y $H_1|I^r = \psi_1$. Por el teorema de aproximación celular H_1 es homotópico rel a I^r, a $\widetilde{\varphi_1}$, donde $\widetilde{\varphi_1}(J^r \subset L^r$. Si pegamos una $(r+1)$-celda $\widetilde{e}_1^{r+1}$ a K_r por $\widetilde{\varphi_1} : I^{r+1} \to K_r$, entonces por (2.4.0.1) tenemos que

$$K = L \cup \bigcup_j e_j^r \cup \bigcup_i e_i^{r+1} \curlywedge (L \cup \bigcup_j e_j^r \cup \bigcup_{i>1} e_i^{r+1}) \cup \widetilde{e_1^{r+1}}, \text{ rel } L$$

$$\searrow L \cup \bigcup_{j>1} e_j^r \cup \bigcup_{i>1} e_i^{r+1} \equiv K'$$

El último colapso tiene lugar porque $\widetilde{\varphi_1}|I^r = \psi_1$

Finalmente, la matriz de (K', L) con respecto a los mapeos característicos restantes es la matriz identidad con una dimensión menor. Para esto suponga que ∂' : $\pi_{r+1}(K', K'_r) \to \pi_r(K'_r, L)$, $i' : K' \subset K$ y que $\varphi_i = i'\varphi'_i|\psi_j = i'\psi'_j$ Si $\partial'[\varphi'_i] = \sum a_{ij}[\psi'_j]$ entonces $[\psi_i] = \partial[\varphi_i] = i'_{\#}\partial'[\varphi'_i] = i'_{\#}\sum a'_{ij}[\psi'_j] = \sum a'_{ij}[\psi_j]$. Así $a_{ij} = \delta_{ij}$. Así procedemos por inducción sobre el número de celdas de $K - L$. □

En el siguiente lema daremos una interpretación geométrica al hacer manipulaciones algebraicas en la matriz asociada a una pareja de complejos CW.

Proposición 2.5.0.3. *Considere la pareja (K,L) en forma simplificada con una matriz (a_{ij}) con respecto a un conjunto de mapeos característicos. Suponga ahora que la matriz (a_{ij}) puede ser transformada a la matriz (b_{ij}) por alguna de las siguientes operaciones*

I. $R_i \to \pm\alpha R_i$ *con* $(\alpha \in \pi_1 \subset \mathbb{Z}\pi_1)$

(Multiplicar el iésimo renglón por la izquierda por un más o menos elemento del grupo)

II. $R_k \to R_k + \rho R_i$ *con* $(\rho \in \mathbb{Z}\pi_1)$

(Añadir un múltiplo izquierdo del anillo de un renglón a otro)

III. $(a_{ij}) \to \begin{pmatrix} a_{ij} & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$

(Expandir al añadir en una esquina la matriz identidad)

Entonces hay una pareja en forma simplificada (M, L) *de manera que* $K \diagup\!\!\searrow M$ *rel* L *y un conjunto de mapeos característicos con respecto a los cuales* (M, L) *tiene la matriz* (b_{ij}).

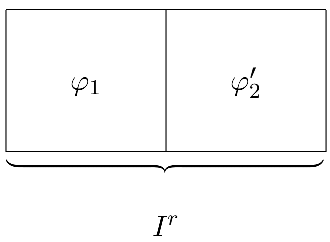
Demostración. Suponga, como siempre, $K = L \cup \bigcup e_j^r \cup \bigcup e_i^{r+1}$, y denotaremos a los mapeos característicos de las r y $(r+1)$ celdas por $\{\psi_i\}$ y $\{\varphi_j\}$ respectivamente. Para simplificar la notación consideremos en I cuando $R_1 \to \pm\alpha R_1$ y en II cuando $R_1 \to R_1 + \rho R_2$.

Para hacer $R_1 \to -R_1$ tome $M = K$ e introduzca el nuevo mapeo característico $\widetilde{\varphi_1}$ para remplazar a φ_1, donde $\widetilde{\varphi_1} = \varphi \circ R$ y $R : I^{r+1} \to I^{r+1}$ por $R(x_1, x_2, \cdots, x_{r+1}) = (1 - x_1, x_2, \cdots, x_{r+1})$. Claramente $[\widetilde{\varphi_1}] = -[\varphi_1]$, por lo tanto $\partial[\widetilde{\varphi_1}] = -\partial[\varphi_1] = -\sum a_{ij}[\psi_j]$. Para hacer $R_1 \to \alpha R_1$ sea $f : (I^r, \partial I^r) \to (K_r, e^0)$ que representa $\alpha \cdot [\varphi_1 | I^r] \in \pi_r(K_r, L)$. Extendamos f trivialmente a ∂I^{r+1}. Tome

$$M = L \cup \bigcup_j e_j^r \cup \bigcup_{i>1} e_i^{r+1} \cup \widetilde{e_1}^{r+1}$$

Donde $\widetilde{e_i}^{r+1}$ tiene mapeo característico $\widetilde{\varphi_1}$ con $\widetilde{\varphi_1}|\partial I^{r+1} = f$, claramente $\partial[\widetilde{\varphi_1}] = \alpha \cdot \partial[\varphi_1]$. Pero $\widetilde{\varphi_1}|\partial I^{r+1}$ es homotópicamente libre en K_r a $\varphi_1|\partial I^{r+1}$. Así por (2.4.0.1) $K \diagup\!\!\searrow M$ rel L.

Para realizar la operación $R_1 \to R_1 + \rho R_2$, sea $\varphi : (I^{r+1}, I^r, J^r) \to (K, K_r, e^0)$ el representante canónico $[\varphi_1] + [\varphi_2']$, donde φ_2' representa $\rho \cdot [\varphi_2]$.



Entonces $\partial[\varphi] = \partial[\varphi_1] + \rho \cdot \partial[\varphi_2] = \sum_j (a_{1j} + \rho a_{2j})[\psi_j]$. Note que $\varphi(\partial I^{r+1}) \subset K_r \subset K_r \cup e_2^{r+1}$. También $\varphi|\partial^{r+1}$ es homotópica en $K_r \cup e_2^{r+1}$ a $\varphi_1|\partial I^{r+1}$ porque $\varphi_2'|I^r$ es homotópicamente (rel ∂I^r) en $K_r \cup e_2^{r+1}$ al mapeo constante en e^0 (de hecho φ_2' es la homotopía) Por lo tanto podemos pegar la nueva celda con mapeo característico $\widetilde{\varphi_1}$ de manera que $\widetilde{\varphi_1}|\partial I^{r+1} = \varphi|\partial I^{r+1}$ y así construir el nuevo complejo M con la matriz asociada que se desea, de manera que:

$$K = [K_r \cup \textstyle\bigcup_i e_i^{r+1}] \bigwedge\!\!\!\searrow [K_r \cup \bigcup_{i>1} \subset \varphi|\partial^{r+1} I^{r+1}] = M, \text{ rel } K_r \cup \bigcup_{i>1} e^{r+1}$$

Finalmente la operación del tipo III corresponde a una expansión elemental. □

Proposición 2.5.0.4. *Suponga que (K, L) es una pareja en forma simplificada la cual tiene una matriz A asociada con respecto a algún conjunto de mapeos característicos. Suponga también que A puede ser transformada a la matriz identidad I_q por operaciones del tipo (I)- (V) donde (I) (II) y (III) son como en 2.5.0.3 y (IV) y (V) son las operaciones análogas de columna.*

IV. $C_j \to \pm C_j \cdot \alpha$ con $(\alpha \in \pi_1 \subset \mathbb{Z}\pi_1)$

V. $C_k \to C_k + C_i \rho$ con $(\rho \in \mathbb{Z}\pi_1)$

Entonces $K \bigwedge\!\!\!\searrow L$ rel L.

Demostración. Suponga que $a_{ij} \to I_q$ por medio de estas cinco operaciones. Obviamente todas las operaciones del tipo III pueden hacerse primero. Luego es bien sabido que operaciones del tipo I y II (IV y V) corresponden a multiplicación izquierda (derecha) por matrices elementales. (Con matriz elemental nos referimos a una matriz diagonal con 1's, excepto por un sólo $\pm\alpha(\alpha \in \pi_1)$ en la diagonal, o una matriz la cual tiene unos en la diagonal y sólo una entrada $a_{ij} = \rho(\rho \in \mathbb{Z}\pi_1)$ distinta de cero fuera de la diagonal.) Entonces tenemos

$$I_q = B \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} C \text{ , } (B, C \text{ producto de matrices elementales})$$

$$C^{-1} = B \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} C$$

$$I_q = CB \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \ (CB \text{ un producto de matrices elementales})$$

Así A puede ser transformada de la identidad por sólo operaciones (I), (II), (III). Usando (2.5.0.2) y (2.5.0.3), tenemos $K \bigwedge\!\!\!\searrow L$ rel L. □

Ahora viene uno de nuestros teoremas principales

Teorema 2.5.1. *Si (K, L) es una pareja CW de manera que K y L son 1-conexos y $K \searrow L$ entonces $K \wedge\!\!\searrow L$, rel L.*

Demostración. Por (2.4.0.3) $K \wedge\!\!\searrow J$ rel L, donde (J, L) está en forma simplificada. Sea A la matriz de (J, L) con respecto a un conjunto de mapeos característicos. Dado que $\pi_1 L = 1, \mathbb{Z}\pi_1 = \mathbb{Z}$. Entonces A es una matriz no singular con coeficientes enteros. Es bien sabido que una matriz de este tipo puede ser transformada a la matriz identidad por medio de operaciones de tipo (I),(II),(III),(IV) y (V). Usando (2.5.0.4) tenemos $J \wedge\!\!\searrow L$, rel L. $\square$

La prueba en (2.5.1) depende solo del hecho de que $\mathbb{Z}$ es un anillo sobre el cual las matrices no-singulares pueden ser trasformadas en la identidad. El siguiente lema muestra que el álgebra no siempre es tan sencilla.

Si G es un grupo entonces una unidad en $\mathbb{Z}(G)$ es un elemento con un inverso multiplicativo por los dos lados. Los elementos del grupo $\pm G = \{g | g \in G\} \cup \{-g | g \in G\}$ son llamadas las unidades triviales, todas las demás son las llamadas unidades no triviales.

Proposición 2.5.1.1. *Suponga que G es un grupo abeliano de manera que $\mathbb{Z}(G)$ tiene unidades no triviales. Entonces hay una matriz no singular A con entradas en $\mathbb{Z}(G)$ no singular la cual no puede ser transformada en la identidad por una sucesión finita de operaciones del tipo (I)-(V).*

El grupo $G = \mathbb{Z}_5$ es un grupo abeliano de manera que $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_5)$ tiene unidades no triviales.

Demostración. Sea a una unidad no trivial de $\mathbb{Z}(G)$ y sea $A = (a)$ la matriz de uno por uno cuya entrada es a. Como G es abeliano, $\mathbb{Z}(G)$ es un anillo conmutativo. Así la función determinante es un mapeo bien definido de las matrices cuadradas sobre $\mathbb{Z}(G)$ a $\mathbb{Z}(G)$ la cual satisface las propiedades usuales de los determinantes. Las operaciones (II) (III) y (V) transforman cualquier matriz en otra matriz con el mismo determinante. Operaciones (I) y (IV) multiplican el determinante por unidades triviales. Si B es la matriz que resultó al manipular A por medio de estas operaciones det $B = g \cdot (\det A) = ga$ para alguna unidad trivial g, así det B es unidad no trivial y en particular B no puede ser la matriz identidad.

Para ver que $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_5)$ tiene unidades no triviales, considere $\mathbb{Z}_5 = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ Entonces $a = 1 - t + t^2$ es una unidad no trivial dado que $(1 - t + t^2)(t + t^2 - t^4) = 1$. $\square$

El siguiente lema muestra que las dificultades algebraicas recién planteadas, pueden presentarse geométricamente.

Proposición 2.5.1.2. *Si G es un grupo que puede ser finitamente presentado y A es una matriz no-singular en $\mathbb{Z}(G)$ entonces*

1. *Existe un complejo CW L conexo cuyo $\pi_1(L, e^0) = G$*
2. *Para cualquier complejo conexo L con $\pi_1(L, e^0) = G$, existe una pareja CW (K, L) en forma simplificada tal que la matriz de (K, L) con respecto a un conjunto de mapeos característicos es precisamente A.*

Demostración. Suponga que G está dado por generadores $x_1, \cdots x_m$ y relaciones $R_i(x_1, \cdots, x_m) = 1$ $(i = 1, \cdots, n)$. Sea $L^1 = e^0 \cup (e_1^1 \cup \cdots \cup e_m^1)$ un producto cuña de círculos, y x_j el elemento del grupo libre $\pi_1(L^1, e^0)$ representado por un mapeo característico para e_j^i. Sea $\varphi_i : \partial I^2 \to L^1$ el mapeo que representara a $R_i(x_1, \cdots, x_m)$. Finalmente tome $L = L^1 \underset{\varphi_1}{\cup} I^2 \underset{\varphi_2}{\cup} \cdots \underset{\varphi_n}{\cup} I^2$. Por aplicaciones sucesivas del teorema de Van Kampen $\pi_1(L, e^0)$ es precisamente G.

Para probar (2) escriba la matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño $p \times p$. Sea $K_2 = L \cup e_1^2 \cdots \cup e_p^2$ donde e_j^2 tiene mapeo característico ψ_j con $\psi_j(\partial I^2) = e^0$. Como siempre $[\psi_j]$ denota el elemento de $\pi_2(K_2, L)$ representado por $\psi_j : (I^2, I^2, J^1) \to (K_2, L, e^0)$. Sea $< \psi_j >$ el elemento de $\pi_2(K_2, e^0)$ representado por ψ_j y sea $\alpha : (K_2, e^0, e^0) \to (K_2, L, e^0)$ (el mapeo inclusión). Claramente $\alpha_\# < \psi_j >= [\psi_j]$. Sea $f_i : (I^2, \partial I^2) \to (K_2, e^0)$ representa $\sum_j a_{ij} < \psi_j >$. Finalmente pegamos 3-celdas a K_2 para obtener $K = K_2 \cup e_1^3 \cup \cdots \cup e_p^3$ donde e_i^3 tiene mapeos característicos $\varphi_i : (I^3, I^2, J^2) \to (K, K_2, e^0)$ con $\varphi_i | I^2 = \alpha \circ f_i$. Entonces $\partial[\varphi_i] = [\varphi_i | I^2] = [\alpha \circ f_i] = \alpha_\#(\sum_j a_{ij} < \psi_j >) = \sum a_{ij}[\psi_j]$.

Así construimos una pareja (K, L) con $K - L = \bigcup e_j^2 \cup \bigcup e_i^3$ de manera que el operador frontera $\partial : \pi_3(K, K_2, e^0) \to \pi_2(K_2, L, e^0)$ tiene la matriz A.

Falta probar solamente que $K \searrow L$. Por (1.2.1.1) basta con probar que $\pi_n(K, L) = 0$ para $n \leq 3$. Para $n \leq 1$ es claro por el teorema de aproximación celular y por la conectividad de K y L. Para $n = 2, 3$ usamos el hecho de que ∂ es un isomorfismo porque A fue asumida no singular. Entonces para $n = 2$, tenemos la sucesión

$$\pi_3(K, K_2) \underset{\cong}{\overset{\partial}{\to}} \pi_2(K_2, L) \to \pi_2(K, L) \to \pi_2(K, K_2) = 0$$

y por exactitud se sigue que $\pi_2(K, L) = 0$ (Aquí $\pi_2(K, K_2) = 0$ porque $K - K_2$ es la unión de 3-celdas). Finalmente note que $\pi_3(K, L) \cong \pi_3(\widetilde{K}, \widetilde{L}) \cong H_3(\widetilde{K}, \widetilde{L})$ el último isomorfismo viene de teorema de Hurewicz el cual aplica debido a que $0 = \pi_i(K, L) \cong \pi_i(\widetilde{K}, \widetilde{L})$ para $i = 1, 2$ y porque $\widetilde{L}$ es 1-conexo por (1.2.4.4). Para ver $H_3(\widetilde{K}, \widetilde{L}) = 0$ considere el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 = H_3(\widetilde{K_2},\widetilde{L}) \arrow[r] & H_3(\widetilde{K},\widetilde{L}) \arrow[r] & H_3(\widetilde{K},\widetilde{K_2}) \arrow[r, "\widetilde{\partial}"] \arrow[d, "Hurewicz"', "\cong"] & H_2(\widetilde{K_2},\widetilde{L}) \arrow[d, "Hurewicz"', "\cong"] \\
& & \pi_3(\widetilde{K},\widetilde{K_2}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_2(\widetilde{K_2},\widetilde{L}) \arrow[d, "\cong"] \\
& & \pi_3(K,K_2) \arrow[r, "\partial", "\cong"'] & \pi_2(K_2,L)
\end{tikzcd}$$

Claramente $\widetilde{\partial}$ es un isomorfismo, por eso y por la exactitud de el primer renglón $H_3(\widetilde{K},\widetilde{L}) = 0$ Por lo tanto $\pi_3(K,L) = 0$. □

Conclusiones Se ha visto que en algunos casos en una pareja homotópicamente trivial (K,L) se debe tener $K \wedge\!\!\searrow L$ rel L. Esto ocurre cuando $\pi_1(L) = 0$ ó más general aún cuando todas las matrices no-singulares sobre $\mathbb{Z}(\pi_1 L)$ pueden ser transformadas a la matriz identidad. Así los conceptos de equivalencia homotópica y equivalencia de homotopía simple coinciden con complejos CW con grupos fundamentales suficientemente buenos. Por otro lado hemos exhibido parejas en forma simplificada con matrices que no pueden ser transformadas a la identidad. Debemos preguntar ahora si estas matrices o bien sus clases de equivalencia bajo las operaciones (I)-(III) representan un problema intrínseco o si son meros artefactos. Partiendo de una pareja que (K,L) tal que $K \searrow L$ podríamos preguntarnos si las clases de equivalencias de matrices que aparecen cuando (K,L) es expandido o colapsado a una pareja en forma simplificada dependen de la elección de una deformación formal.

Dos observaciones son cruciales. Primero las clases de equivalencia de matrices no singulares forman un grupo, el grupo de Whitehead de $\pi_1 L$ escrito como $Wh(\pi_1 L)$ (probaremos a continuación). Segundo si $K \wedge\!\!\searrow J$ rel L donde (J,L) está en forma simplificada entonces está implícita en la demostración de (2.5.0.1) que la matriz de (J,L) es la matriz del operador frontera

$$H_{r+1}(\widetilde{J},\widetilde{J_r}) \to H_r(J_r,\widetilde{L})$$

por definición de complejo de cadena celular, este es el operador frontera en $C(\widetilde{J},\widetilde{L})$ donde $C(\widetilde{J},\widetilde{L})$ es el complejo de cadena

$$0 \to C_{r+1}(\widetilde{J},\widetilde{L}) \xrightarrow{\partial} C_r(\widetilde{J},\widetilde{L}) \to 0$$

como $\widetilde{J} \searrow \widetilde{L}, C(\widetilde{J},\widetilde{L})$ es un $(\mathbb{Z}\pi_1 L)$-complejo acíclico. Entonces a un $(\mathbb{Z}\pi_1 L)$-complejo acíclico hemos asociado un elemento de $Wh(\pi_1 L)$. Nos gustaría mostrar que este elemento determinado por $C(\widetilde{J},\widetilde{L})$ estaba pre-determinado por $C(\widetilde{K},\widetilde{L})$ y en efecto por (K,L)

En este punto ocupamos una aproximación algebraica más sofisticada. Continuaremos con el estudio puramente algebraico de complejos de cadena acíclicos de los grupos de Whitehead de grupos.

Capítulo 3

Grupo de Whitehead algebraico

En este capítulo daremos la construcción algebraica de $Wh(G)$ el grupo de Whitehead para un grupo G. Empezaremos por definir la torsión para un matriz en $GL(\mathbb{Z}(G))$, para luego definirla sobre un objetos con más información llamados $Wh(G)$-módulos con los que construiremos los $Wh(G)$-complejos de cadena. Sobre éstos definiremos el elemento de torsión con el cual podremos probar que la construcción geométrica y la algebraica son equivalentes.

A lo largo del capítulo R denotará un anillo con unidad, sin embargo para nuestros propósitos el anillo a tomar será $\mathbb{Z}(G)$.

3.1. Grupo de Whitehead

El grupo de matrices no singulares de $n \times n$ sobre un anillo R es denotado por $GL(n, R)$. Hay un encaje natural de $GL(n, R)$ en $GL(n+1, R)$ dado por

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

usando esto, el grupo general lineal infinito de R puede ser definido como el límite directo $GL(R) = \varinjlim GL(n, R)$. Por conveniencia de notación tomaremos $A \in GL(n, R)$ como su imagen en $GL(R)$.

Sea $E^n_{i,j} (i \neq j)$ la matriz de $n \times n$ que tiene 0 en todas las entradas salvo por un 1 (unidad en R) que se encuentra en la posición i, j. Una matriz elemental es una matriz de la forma $(I_n + aE^n_{i,j})$ para alguna $a \in R$. Denotaremos $E(R)$ el subgrupo de $GL(R)$ generado por las matrices elementales.

Para poder estudiar $GL(R)/E(R)$, definiremos una relación de equivalencia en $GL(R)$ dada por:

$$A \sim B \ \Leftrightarrow \text{existen } E_1, E_2 \in E(R) \text{ de manera que } A = E_1 B E_2$$

Probaremos luego que $E(R)$ es normal, con lo que la relación antes definida se reduce la relación de pertenecer a la misma clase de conjugación según $E(R)$. Por lo mientras es claro que $A \sim B$ si y sólo si A puede ser obtenida de B al tomar una sucesión finita de operaciones que consiste de añadir un múltiplo por izquierda de un renglón a otro, o bien un múltiplo derecho de una columna a otra. Más general en lugar de tomar renglones, si P_1 y P_2 son submatrices disjuntas de dimensiones $p \times n$ y $q \times n$ de la matriz no singular A de $n \times n$ y si X es una matriz de $p \times q$ sucede lo siguiente:

$$I_R A = \begin{pmatrix} ==== \\ P_1 \\ ==== \\ P_2 \\ ==== \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} ====== \\ P_1 + XP_2 \\ ====== \\ P_2 \\ ====== \end{pmatrix}$$

$$II_R : A = \begin{pmatrix} ==== \\ P_1 \\ ==== \\ P_2 \\ ==== \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} ==== \\ P_2 \\ ==== \\ -P_1 \\ ==== \end{pmatrix}$$

I_R se deduce inmediatamente de la definición de multiplicación de matrices. II_R se sigue de I_R por la secuencia

$$\begin{pmatrix} ==== \\ P_1 \\ ==== \\ P_2 \\ ==== \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ==== \\ P_1 + P_2 \\ ==== \\ P_2 \\ ==== \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ==== \\ P_1 + P_2 \\ ==== \\ -P_1 \\ ==== \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} ==== \\ P_2 \\ ==== \\ -P_1 \\ ==== \end{pmatrix}$$

las correspondientes operaciones sobre columnas dan lugar a equivalencias análogas que llamaremos I_C y II_C.

Proposición 3.1.0.1. *Si A, B son elementos de $GL(R)$ entonces $AB \sim BA$.*

Demostración. Para una n suficientemente grande asumamos que A y B son ambas de $n \times n$. Entonces

$$AB = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} AB & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & 0 \end{pmatrix}$$

Similarmente $BA \sim \begin{pmatrix} 0 & B \\ -A & 0 \end{pmatrix}$

Finalmente, usando II_C y II_R

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & B \\ -A & 0 \end{pmatrix}$$

□

Proposición 3.1.0.2. *$E(R)$ es el subgrupo conmutador de $GL(R)$.*

Demostración. Si $E \in E(R)$ y $X \in GL(R)$ entonces $(XE)X^{-1} \sim X^{-1}(XE)$ por (3.1.0.1), entonces $XEX^{-1} = E_1 E E_2 \in E(R)$. Dado un conmutador $ABA^{-1}B^{-1}$ aplicamos esto con $X = BA$ para obtener

$$(AB)(A^{-1}B^{-1}) = [E_1(BA)E_2](BA)^{-1} = E_1[(BA)E_2(BA)^{-1}] \in E(R)$$

Entonces el subgrupo conmutador está contenido en $E(R)$.

Conversamente un generador típico de $E(R)$ es uno de la forma $(I^n + aE^n_{i,k})$. Notando que $(I^n + aE^n_{i,j})^{-1} = (I^n - aE^n_{i,j})$ podemos ver que este elemento es un conmutador porque

$$(I^n + aE^n_{i,k}) = (I^n + aE^n_{i,j})(I^n + aE^n_{j,k})(I^n - aE^n_{i,j})(I^n - E^n_{j,k})$$

□

Inmediatamente podemos deducir:

Proposición 3.1.0.3. *Si H es un subgrupo de $GL(R)$ que contiene a $E(R)$ entonces H es un subgrupo normal y $GL(R)/H$ es abeliano.*

Tomando un grupo G, considere $R = \mathbb{Z}(G)$ y $S = G \cup (-G) \subset \mathbb{Z}(G)$, sea E_S el grupo generado por $E(R)$ y todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & g & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Donde $g \in S$. Definimos

$$Wh(G) \cong \frac{GL(R)}{E_S}$$

Nota 3.1.1. *La definición anterior puede darse tomando R cualquier anillo con unidad y S un subgrupo del grupo de unidades de R dando lugar a*

$$K_S(R) \cong \frac{GL(R)}{E_S}.$$

Por (3.1.0.3) es un grupo abeliano. Denotamos al mapeo cociente $\tau : GL(R) \to Wh(G)$ y llamaremos $\tau(A)$ a la torsión de la matriz A. Usaremos notación aditiva dado que $Wh(G)$ es abeliano, tenemos así $\tau(AB) = \tau(A) + \tau(B)$.

Si G y G' son grupos, denotando a $S = G \cup (-G)$ y $S' = G' \cup (-G')$, cualquier homomorfismo de anillos $f : \mathcal{Z}(G) \to \mathcal{Z}(G')$ donde $f(S) \subset S'$, entonces f induce un homomorfismo de grupos $f_* : Wh(G) \to Wh(G')$ dado por

$$f_*\tau((a_{ij})) = \tau((f(a_{ij})))$$

f_* está bien definido porque si $(a_{ij}) \in E_S$, así $(f(a_{ij})) \in E_{S'}$. Entonces tenemos un funtor covariante.

Esto da lugar a un funtor covariante de la categoría de grupos y homomorfismos de grupos a la categoría de grupos abelianos y homomorfismos de grupos dados por

$$G \mapsto Wh(G)$$

$$(f : G \to G') \mapsto (f_* : Wh(G) \to Wh(G'))$$

donde f primero induce un homomorfismo de anillos $\mathbb{Z}(G) \to \mathbb{Z}(G')$ dado por $\sum n_i g_i \to \sum n_i f(g_i)$ y por ello induce un f_* como se definió en el párrafo anterior.

Proposición 3.1.1.1. *Si $g \in G$ y $f : G \to G$ es un homomorfismo de grupos de manera que $f(x) = gxg^{-1}$ para toda x entonces $f_* : Wh(G) \to Wh(G)$ es el mapeo identidad.*

Proposición 3.1.1.2. *Si A, B y X son matrices de $n \times n$, $m \times m$ y $n \times m$ respectivamente con $\tau : GL(R) \to Wh(G)$, y si A tiene inverso derecho o B tiene inverso izquierdo, entonces*

1. $\begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *es no singular* $\Leftrightarrow$ *A y B son no singulares.*
2. *Si A y B son no singulares entonces*

$$\tau \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & b \end{pmatrix} = \tau(A) + \tau(B)$$

Demostración. *(1)* es válido cuando digamos B tiene inversa izquierda debido a que:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & -XB^{-1} \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

Donde la matriz de en medio está en $E(R)$ (es resultado de operaciones de renglón en I_{n+m}) y por tanto es no singular.

Donde A y B son no singulares, la ecuación de antes muestra que

$$\tau \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \tau(A) + \tau \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Pero por medio de una secuencia de aplicaciones de II_R y después de II_C se tiene

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & B \\ (-1)^m I_n & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & (-1)^{2m} I_n \end{pmatrix}$$

Así $\begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} = \tau(A) + \tau(B)$ □

3.2. Complejos de cadena de Whitehead

En esta sección trabajaremos con complejos de cadena que consisten de R-módulos izquierdos finitamente generados, por tanto tienen bases finitas. R denotará un anillo con unidad, pero como antes el anillo que nos interesa es $\mathbb{Z}(G)$.

Empecemos con algunas proposiciones y notaciones para los módulos con los que trabajaremos.

Lema 3.2.0.1. *Sea M un R-módulo libre con R un anillo de tal suerte que existe un anillo con división D y un homomorfismo de anillos no trivial $f : R \to D$, entonces cualesquiera dos bases de M tienen la misma cardinalidad.*

Demostración. Basta probar que para cualquier matriz de cambio de base que pueda surgir con entradas en R, existe una matriz B con $AB = I_m$ y $BA = I_n$. Así tenemos que $m = n$

Sea f_* el mapeo inducido que toma las matrices sobre R a las matrices sobre D dado por $f_*((a_{ij})) = (f(a_{ij}))$. Como f es un homomorfismo de anillos $f_*(AB) = f_*(A)f_*(B)$ para cualesquiera A, B. Ahora suponga que A y B son matrices arbitrarias de manera que $AB = I_m$ y $BA = I_n$. Como $f(1)$ es una unidad, se sigue que $f(1) = 1$. Entonces $f_*(I_q) = I_q$ para toda q. Así $f_*(A)f_*(B) = I_m$ y $f_*(B)f_*(A) = I_n$. Como D es un anillo con división, $f_*(A)$ es cuadrada, lo que implica que A es cuadrada, por lo tanto cualesquiera dos bases tienen la misma cardinalidad. □

Corolario 3.2.0.1. *Si G es un grupo, entonces en $\mathbb{Z}(G)$ cualesquiera dos bases tienen la misma cardinalidad.*

Demostración. Considere $A : \mathbb{Z}(G) \to \mathbb{Q}$ dado por $A(\sum_i n_i g_i) = \sum_i n_i$. □

Si $f : M_1 \to M_2$ es un homomorfismo de módulos donde M_1 y M_2 tienen bases ordenadas $x = \{x_1, \dots, x_p\}$ y $y = \{y_1, \dots y_q\}$ respectivamente, entonces $< f >_{x,y}$ denota la matriz (a_{ij}) donde $f(x_i) = \sum_j a_{ij} y_j$. Así cada renglón de $< f >_{x,y}$ da la imagen de un elemento de x. Para simplificar notación cuando el contexto no cause confusión denotaremos $< f >$ a esta matriz.

Considerando estas convenciones, tenemos que

$$< f_2 \circ f_1 > = < f_1 >< f_2 >$$

Si $x = \{x_1, \dots, x_p\}$ y $y = \{y_1, \dots, y_p\}$ son dos bases ordenadas para el mismo módulo, entonces $< x/y >$ denota la matriz no singular (a_{ij}) donde $x_i = \sum_j a_{ij} y_j$. Si x, y, z son bases de M entonces $< x/z >=< x/y >< y/z >$.

Suponga que $f : M_1 \to M_2$ es un homomorfismo de módulos, y que x y x' son bases para M_1 y que y y y' son bases para M_2. Entonces

$$< f >_{x',y'} =< x'/x >< f >_{x,y} < y/y' >,$$

El hecho de que la matriz pueda representar tanto una función como un cambio de base tiene la siguiente expresión en su notación. Si $x = \{x_1, \cdots x_p\}$ y $y = \{y_1, \ldots, y_p\}$ son dos bases para el módulo M y si $f : M \to M$ es un isomorfismo dado por $f(y_i) = x_i$ para toda i, entonces $< f >_{y,y} = < x/y >$.

Definición 3.2.0.1. *Un módulo de Whitehead ó $Wh(G)$-módulo es un $\mathbb{Z}(G)$-módulo libre M junto con una familia $\mathcal{B}$ no vacía de bases distinguidas que satisfacen que si b y b' son bases de M y si $b \in B$ entonces*

$$b' \in B \Leftrightarrow \tau(< b/b' >) = 0 \in Wh(G)$$

Si M_1 y M_2 son $Wh(G)$-módulos y $f : M_1 \to M_2$ es un isomorfismo de módulos, entonces la torsión de f, escrita $\tau(f)$, es definida como $\tau(A) \in Wh(G)$, donde A es la matriz de f con respecto a cualesquiera bases distinguidas de M_1 y M_2. Claramente no depende de las bases escogidas (dentro de la familia de bases distinguidas). Decimos que f es un isomorfismo de $Wh(G)$-módulos si $\tau(f) = 0$. En este caso escribimos $f : M_1 \cong M_2(\Sigma)$.

Definición 3.2.0.2. *Un complejo de cadenas de Whitehead ó $Wh(G)$-complejo es un complejo de cadenas*

$$C : 0 \to C_n \to C_{n-1} \to \cdots \to C_0 \to 0$$

de manera que cada C_i es un $Wh(G)$-módulo. Un base distinguida de C se refiere a una base $c = \bigcup c_i$ donde c_i es un base distinguida de C_i.

Definición 3.2.0.3. *Un isomorfismo simple de $Wh(G)$-complejos $f : C \to C'$ es un morfismo de cadenas tal que $(f|C_i) : C_i \cong C'(\sigma)$.*

3.3. Complejos de cadena acíclicos (exactos)

Los complejos de cadena que servirán para nuestros propósitos cumplirán la propiedad de que todos sus grupos de homología son triviales. A estos se les llama *complejos de cadena acíclicos* mejor conocidos por *exactos*.

Definición 3.3.0.1. *Un R-módulo es establemente libre si existen módulos libres F_1 y F_2 de manera que $M \oplus F_1 = F_2$. (Recuerde que con libre nos referiremos con base finita).*

Note que si M es un R-módulo libre y si $j : A \to M$ es suprayectiva esto implica que hay un sección $s : M \to A$ (es decir que $js = Id_M$). Suponga que $M \oplus F$ es libre. Entonces $j \oplus Id : A \oplus F \to M \oplus F$ es suprayectiva y hay alguna sección $S : M \oplus F \to A \oplus F$

(construido al mapear cada elemento de la base a un elemento arbitrario de su imagen inversa). Así $s = \pi S i_1$ es la sección deseada, donde $i_1 : M \to M \oplus F$ y $\pi : A \oplus F \to A$ son los mapeos evidentes.

Proposición 3.3.0.1. *Suponga que C es un complejo de cadenas acíclico sobre R con operador frontera d, denotando $B_i = d_{i+1}(C_{i+1})$ para toda i, tenemos:*

1. *B_i es establemente libre para toda i,*
2. *Existe $\delta : C \to C$ un morfismo de complejos de cadena de manera que $\delta d + d\delta = Id$ es decir $\delta_{k-1} d_k + d_{k+1}\delta_k = Id_{C_k}$ $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$*

$$\begin{tikzcd}
C : 0 \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "\delta_n"] & \cdots C_{k+1} \arrow[r, "d_{k+1}"] & C_k \arrow[r, "d_k"] \arrow[dl, "\delta_k"] & C_{k-1} \arrow[r, "d_{k-1}"] \arrow[dl, "\delta_{k-1}"] & \cdots \arrow[r, "d_1"] & C_0 \arrow[r, "d_0"] & 0 \arrow[dl, "\delta_{-1}"] \\
C : 0 \arrow[r, "d_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"'] & \cdots C_{k+1} \arrow[r, "d_{k+1}"'] & C_k \arrow[r, "d_k"'] & C_{k-1} \arrow[r, "d_{k-1}"'] & \cdots \arrow[r, "d_1"'] & C_0 \arrow[r, "d_0"'] & 0
\end{tikzcd}$$

3. *Si $\delta : C \to C$ como en (B) entonces, para cada i, $d\delta|B_{i-1} = Id$ y $C_i = B_i \oplus \delta B_{i-1}$.*

Demostración. $B_0 = C_0$ porque C es acíclico. Entonces B_0 es libre. Asuma inductivamente que sabemos que B_{i-1} es establemente libre. Por lo tanto hay un sección $s : B_{i-1} \to C_i$. Como C es acíclico la sucesión

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_i \arrow[r, "\subset"] & C_i \arrow[r, "d"] & B_{i-1} \arrow[l, bend left, "s"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es una sucesión exacta. Así $C_i = B_i \oplus s(B_{i-1})$,donde $s(B_{i-1})$ siendo isomorfo a B_{i-1} es establemente libre. Entonces existen módulos libres F_1, F_2 de manera que $s(B_{i-1}) \oplus F_1 = F_2$. Por lo tanto

$$B_i \oplus F_2 = B_i \oplus s(B_{i-1}) \oplus F_1$$

$$= C_i \oplus F_1$$

Como C_i es libre, esto muestra que B_i es establemente libre, y *(1)* queda demostrado.

Por *(1)* podemos escoger para cada $d_i : C_i \to B_{i-1}$ suprayectiva, una sección $\delta_i : B_{i-1} \to C - i$. Como en la prueba de *(1)* se sigue que $C_i = B_i \oplus \delta_i(B_{i-1})$. Defina $\delta : C \to C$ por la condición de que para toda i

$$\delta | B_i = \delta_{i+1}; \quad \delta|\delta_i(B_{i-1}) = 0$$

De esto resulta:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_i \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "\delta"'] & C_{i-1} \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "\delta"'] & C_{i-2} \arrow[r] & \cdots \\
& \| & \| & \| & \\
& B_i \arrow[r, "0"] & B_{i-1} \arrow[r, "0"] \arrow[ddl, shift left, "\delta"] & B_{i-2} \arrow[ddl, shift left, "\delta"] & \\
& \oplus & \oplus & \oplus & \\
& \delta B_{i-1} \arrow[uur, "d"] & \delta B_{i-2} \arrow[l, "0"'] \arrow[uur, "d"] & \delta B_{i-3} \arrow[l, "0"'] &
\end{tikzcd}
$$

Claramente $d\delta + \delta d = Id$. Esto prueba *(2)*.

Suponga finalmente que dada $\delta : C \to C$ de manera que $d\delta + \delta d = 1$ entonces $d\delta|B_{i-1} = (d\delta + \delta d)|B - i - 1 = Id_{B_{i-1}}$. Así $(\delta|B_{i-1}) : B_{i-1} \to C_i$ es una sección y como en *(1)*, $C_i = B_1 \oplus \delta B_{i-1}$. □

La siguiente proposición nos dice que la torsión no depende de la contracción de cadena que tomemos.

Proposición 3.3.0.2. *Suponga que C es un $Wh(G)$-Complejo acíclico con contracciones de cadena δ y $\widetilde{\delta}$. Para i fija. Sea $Id \oplus \delta d : C_i \to C_i$ definida por*

$$Id \oplus \delta d : B_i \oplus \widetilde{\delta} B_{i-1} = C_i \to B - i \oplus \delta B_{i-1} = C_i \to B_i \oplus \delta B_{i-1} = C_i$$

Entonces

1. *$Id \oplus \delta d$ es un isomorfismo simple*
2. *Si B_i y B_{i-1} son módulos libres con bases b_i y b_{i-1} y si c_i es una base para C_i entonces $\tau < b_i \cup \delta b_{i-1}/c_i >= \tau < b_i \cup \widetilde{\delta} b_{i-1}/c_i >$*

Demostración. Sea $g = Id \oplus \delta d$. Es claro que g es un isomorfismo simple, por el tercer inciso de la proposición anterior, $\delta d : \widetilde{\delta} B_{i-1} \xrightarrow{\cong} \delta B - i - 1$. Si B_i y $\widetilde{\delta} B_{i-1}$ son libres podemos, usando una base de C_i que sea la unión de una base de B_i y una base de $\widetilde{\delta} B_{i-1}$, escribir una matriz la cual refleje claramente la estructura de g. Esta observación motiva la siguiente prueba de *(1)*.

B_i y $\widetilde{\delta} B_{i-1}$ son establemente libres, entonces existen módulos libres F_1 y F_2 de manera que $F_1 \oplus B_i$ y $\widetilde{\delta} B_{i-1} \oplus F_2$ es libre. Fijando bases para F_1 y F_2 y tomando la unión de estas bases junto con una base distinguida para C_i, para tener una base c de

$F_1 \oplus C_i \oplus F_2$. Sea $G = Id_F, \oplus g \oplus Id_F : F_1 \oplus C_i \oplus F_2 \to F_1 \oplus C_i \oplus F_2$. Entonces

$$< G >_{c,c}= \begin{pmatrix} I & & \\ & < g > & \\ & & I \end{pmatrix}$$

y $\tau(< G >_{c,c}) = \tau(g)$

Ahora escojamos bases b_1 y b_2 para $(F_1 \oplus B_i)$ y $(\widetilde{\delta} B_{i-1} \oplus F_2)$. Tomaremos $b = b_1 \cup b_2$ otra base para C_i. Note que $< G >_{c,c}=< c/b >< G >_{b,b}< c/b >^{-1}$, entonces $\tau(< G >_{c,c}) = \tau(< G >_{b,b})$. Pero de hecho

$$< G >_{b,b} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} F_1 \oplus B_i & \widetilde{\delta} B_{i-1} \oplus F_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} F_1 \oplus B_i \\ \\ \widetilde{\delta} B_{i-1} \oplus F_2 \end{array} & \left(\begin{array}{c:c} I & O \\ \hdashline X & I \end{array}\right) \end{array}$$

Para ver esto suponga que $y = \widetilde{\delta} z + w$ donde $z \in B_{i-1}$ y $w \in F_2$. Entonces $G(y) = \delta d(\widetilde{\delta} Z) + w = \delta z + w$. Porque $d(\delta z - \widetilde{\delta} z) = z - z = 0$, podemos escribir $\delta z = \widetilde{\delta} z + x$ para alguna $x \in B_i$. Así $G(y) = (\widetilde{\delta} z + x) + w = x + y$ donde $x \in F_1 \oplus B_i$.

Entonces $\tau(g) = \tau(< G >_{c,c}) = \tau(< G >_{b,b}) = 0$.

Para probar *(2)*, suponga que $b_i = \{u_1, \ldots, u_p\}$ y $b_{i-1} = \{v_1, \ldots, v_q\}$ son base de $B-i$ y B_{i-1} respectivamente. Sea $b = b_i \cup \widetilde{\delta} b_{i-1}$. Entonces $(Id \oplus \delta d)(u_j) = u_j$ y $(Id \oplus \delta d)(\widetilde{\delta} v_k) = \delta v_k$, y se sigue que

$$< b_i \cup \delta b_{i-1}/b_i \cup \widetilde{\delta} b_{i-1} >=< Id \oplus \delta d >_{b,b'}$$

Por la prueba de *(1)*, $\tau(< Id \oplus \delta d >_{b,b}) = 0$. Así

$$0 = \tau < b_i \cup \delta b_{i-1}/b_i \cup \widetilde{\delta} b_{i-1} >= \tau(< b_i \cup \delta b_{i-1}/c_i >< b_i \cup \widetilde{\delta} b_{i-1}/c_i >^{-1})$$

$$= \tau < b_i \cup \delta b_{i-1}/c_i > -\tau < b_i \cup \widetilde{\delta} b_{i-1}/c_i >$$

$\square$

3.4. Equivalencia estable sobre complejos de cadena

Un $Wh(G)$-complejo es un complejo elementalmente trivial si es de la forma

$$C : 0 \to C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \to 0$$

Donde d es un isomorfismo de $Wh(G)$-módulos (entonces tomando las bases distinguidas apropiadas podemos tomar a $<$d$>$ como la matriz identidad).

Un $Wh(G)$-complejo es trivial si es suma directa en la categoría de $Wh(G)$-complejos, de complejos elementalmente triviales.

Dos $Wh(G)$-complejos C y C' son establemente equivalentes y lo denotaremos por $C \sim C'$ si hay complejos triviales T y T' tales que $C \oplus T \cong C' \oplus T'(\Sigma)$. Claramente esto define una relación de equivalencia.

Proposición 3.4.0.1. *Si C es un $Wh(G)$-complejo acíclico de la forma*

$$C : 0 \to C_n \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_{i+3}} C_{i+2} \xrightarrow{d_{i+2}} C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \to 0 \quad (n \leq i+1)$$

Y si $\delta : C \to C$ es una contracción de cadena entonces $C \sim C_\delta$, donde C_δ es el complejo

$$\begin{tikzcd} C_\delta : 0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "d_n"] & \cdots \arrow[r, "d_{i+3}"] & C_{i+2} \arrow[r, "d_{i+2}"] & C_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] & 0 \\ & & & \oplus & & \\ & & & C_i \arrow[uur, "\delta_{i+1}"'] & & \end{tikzcd}$$

Demostración. Para simplificar notación tome $i = 0$. Esto no afectará la demostración.

Sea T el complejo trivial con $T_1 = T_2 = C_0$ y $T_i = 0$ en otro caso, y $\delta_2 = 1 : T_2 \to T_1$. Sea T' el complejo trivial con $T'_0 = T'_1 = C_0$, y $T'_i = 0$ en otro caso, y $\partial'_1 = 1 : T'_1 \to T'_0$. Afirmamos que $C \oplus T \cong C_\delta \oplus T'(\Sigma)$.

Los diagramas importantes son

$$\begin{tikzcd} C \oplus T : \ldots \arrow[r] & C_3 \arrow[r] & C_2 & C_1 \arrow[dr, "d_1"] & & \\ & & \oplus \arrow[r, "d_2 \oplus 1"] & \oplus & C_0 \arrow[r] & 0 \\ & & C_0 & C_0 \arrow[ur, "0"'] & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C_\delta \oplus T : \dots \arrow[r] & C_3 \arrow[r] & C_2 \arrow[r, "d_2"] & C_1 \arrow[r, "0"] & C_0 \arrow[r] & 0 \\
 & & \oplus & \oplus & & \\
 & & C_0 \arrow[uur, "\delta_1"'] & C_0 \arrow[uur, "Id=\partial'_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

Defina $f : C \oplus T \to C_\delta \oplus T'$ por

$f_i = 1$, si $i \neq 1$

$f_1(c_0 + c_1) = \delta_1 c_0 + (c_1 + d_1 c_1)$ si $c_0 \in C_0$ y $c_1 \in C_1$

Claramente f es un morfismo de cadenas. Para probar que f es un isomorfismo simple debemos mostrar que cada f_i es un isomorfismo simple. Esto es obvio excepto para $i = 1$. Pero

$$< f_1 > = \begin{array}{c} C_0 \\ C_1 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & < \delta_1 > \\ d_1 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & < \delta_1 > \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ < \delta_1 > & I \end{pmatrix}$$

esto es debido a que $< \delta_1 >< d - 1 > = < d_1 \delta_1 >=< d_1 \delta_1 + \delta_0 d_0 > = I$ y por 3.1.1.2 $\tau(f_1) = 0$. □

Si C es un $Wh(G)$-complejo acíclico, podemos aplicar inductivamente el resultado anterior para obtener C' que es cero excepto en dos dimensiones y tal que $C \sim C'$. Note el parecido como cuando en el capítulo anterior demostramos que toda pareja CW puede ser vista en forma simplificada.

Proposición 3.4.0.2. *Sea C un $Wh(G)$-complejo acíclico con operador frontera d y cadena de contracción δ que satisface $\delta^2 = 0$ y sea*

$$C_{impar} = C_1 \oplus C_3 \oplus \cdots$$

$$C_{par} = C_0 \oplus C_2 \oplus \cdots$$

Entonces C es establemente equivalente a un $Wh(G)$-complejo de la forma

$$C' : 0 \to C'_m = C_{impar} \xrightarrow{d+\delta} |C_{impar} C'_{m-1} = C_{par} \to 0$$

para algún entero m.

Demostración. Sea m un entero impar tal que C es de la forma $0 \to C_m \to C_{m-1} \to \cdots \to C_0 \to 0$. Si $j \leq m$, tome $C'_j = C_j \oplus C_{j-2} \oplus C_{j-4} \oplus \cdots$. Sea D^i el complejo de cadena

$$D^i : 0 \to C_m \xrightarrow{d} \cdots \to C_{i+2} \xrightarrow{d} C'_{i+1} \xrightarrow{d'} C'_i \to 0$$

Donde d es el operador frontera en C y $d' = (d|C_{i+1}) + (d+\delta)|C'_{i-1}$. Ahora es fácil ver que D^i es un complejo de cadena, $D^0 = C$ y $D^{m-1} = C'$. Ahora defina $\Delta^i = \Delta; D^i \to D^i$ un homomorfismo de grado 1 por

$\Delta|C_j = \delta|C_j$ si $j \geq i+2$,

$\Delta|C'_{i+1} = (\delta|C_{i+1}) \circ \pi$ donde $\pi : C'_{i+1} \to C_{i+1}$ es la proyección natural,

$\Delta|C'_i = (d+\delta)|C'_i$

Entonces Δ es una cadena de contracción de D^i. Esto es fácilmente verificado ya que vimos que

$$(d^i\Delta + \Delta d^i)|C'_{i+1} = (d\delta + \delta d)|C_{i+1} \oplus (d+\delta)^2|C'_{i-1} = 1c'_{i+1}$$

con d' denotando el operador frontera de D'. Como $d^2 = \delta^2 = 0$, entonces D^i y Δ^i satisfacen la hipótesis de 3.4.0.1. La conclusión de 3.4.0.1 establece precisamente que $D^i \sim D^{i+1}$ Por inducción $C \sim C'$. $\square$

3.5. Torsión de un complejo de cadenas acíclico

Definición 3.5.0.1. *Sea C un $Wh(G)$-complejo con operador frontera d. Sea δ cualquier cadena de contracción de C*

$$C_{par} = C_0 \oplus C_2 \oplus \cdots$$

$$C_{impar} = C_1 \oplus C_3 \oplus \cdots$$

$$(d+\delta)_{impar} = (d+\delta)|C_{impar} : C_{impar} \to C_{par}$$

Entonces $\tau(C) = \tau((d+\delta)_{par}) \in Wh(G)$.

Escribiremos $d+\delta$ en lugar de $(d+\delta)_{impar}$ cuando no quede lugar para confusión. Está entendido que $\tau(C)$ está definida en términos de bases distinguidas de C_{impar} y C_{par}. Si $c = \bigcup c_i$ es una base elegida para C, entonces $\tau(C) = \tau(< d+\delta >_{C_{impar}, C_{par}})$ donde $c_{impar} = (c_1 \cup c_3 \cup \cdots)$ y $c_{par} = (c_0 \cup c_2 \cup \cdots)$. Por conveniencia $(< d+\delta >_{C_{impar}, C_{par}})$ será abreviado por $< d+\delta >_c$ o simplemente $< d+\delta >$ cuando no haya riesgo de confusión. La forma de $< d+\delta >$ es

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} C_0 & C_2 & C_4 & \end{array} \\
\begin{array}{c} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \\ \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} < d_1 > & < \delta_2 > & & \\ & < d_3 > & < \delta_4 > & \\ & & < d_5 > & \\ & & & \ddots \end{array}\right)
\end{array}$$

Para mostrar que $\tau(C)$ está bien definido, hay que mostrar que $< d+\delta >$ es no singular y que $\tau(d+\delta)$ es independiente de las bases distinguidas tomadas y de la cadena de contracción δ que tomemos.

Proposición 3.5.0.1. *Sea c una base para C. Entonces $< (d+\delta)_{impar} >_c$ y $< (d+\delta)_{par} >_c$ son no singulares con $\tau(< (d+\delta)_{par} >_c) = -\tau(< (d+\delta)_{impar} >_c)$.*

Demostración. $(d+\delta)_{par} \circ (d+\delta)_{impar} = (d^2 + d\delta + \delta d + \delta^2)|C_{impar} = (1+\delta^2)|C_{impar}$. Así

$$< (d+\delta)_{impar} >_c < (d+\delta)_{par} >_c = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_3 \\ C_5 \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_0 & C_2 & C_4 & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} I & < \delta_3\delta_2 > & & \\ & I & < \delta_5\delta_4 > & \\ & & I & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

Por 3.1.1.2 está matriz es no-singular y tiene torsión cero. Una afirmación similar sirve para $< (d+\delta)_{par} >_c < (d+\delta)_{impar} >_c$ y el resultado se sigue. □

Proposición 3.5.0.2. *Sean $c = \bigcup c_i$ y $c' = \bigcup c_i'$ bases para C, donde c_i y c_i' son bases arbitrarias de C_i. Entonces*

$$\tau(< (d+\delta) >_c) = \tau(< (d+\delta) >_{c'}) + \sum_i (-1)^i \tau(< c_i'/c_i >)$$

En particular, si las bases c_i y c_i' son bases distinguidas, $\tau(< d+\delta >_c) = \tau(< d+\delta >_{c'})$, entonces $\tau(d+\delta)$ es independiente de cuales bases distinguidas tomemos.

Demostración. $< d+\delta >_c = < c_{impar}/c'_{impar} >< d+\delta >_{c'} < c'_{par}/c_{par} >$

$$= \begin{pmatrix} < c_1/c_1' > & & \\ & < c_3/c_3' > & \\ & & \ddots \end{pmatrix} < d+\delta >_{c'} \begin{pmatrix} < c_0'/c_0 > & & \\ & < c_2'/c_2 > & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

Entonces usando 3.1.1.2

$$\begin{aligned} \tau(< d+\delta >_c) &= \textstyle\sum_i \tau < c_{2i+1}/c'_{2i+1} > + \tau(< d+\delta >_{c'}) + \sum_i \tau < c'_{2i}/c_{2i} > \\ &= \textstyle\sum_i \tau < c'_{2i+1}/c_{2i+1} > + \tau(< d+\delta >_{c'}) + \sum_i \tau < c'_{2i}/c_{2i} > \\ &= \tau(< d+\delta >_{c'}) + \textstyle\sum_i (-1)^i \tau < c_i'/c_i > \end{aligned}$$

□

Proposición 3.5.0.3. *Suponga que C es un $Wh(G)$-complejo acíclico con contracciones de cadena δ y δ' entonces $\tau(d+\delta) = \tau(d+\delta')$.*

Demostración. Todos los cálculos los haremos respecto a una base distinguida fija

$$\begin{aligned}\tau(d+\delta')-\tau(d+\delta) &= \tau<(d+\delta')_{impar}>+\tau<(d+\delta)_{par}> \text{ Por 3.5.0.1}\\ &= \tau<(d+\delta)\circ(d+\delta')|C_{impar}>\\ &= \tau<(\delta d+d\delta'+\delta\delta')|C_{impar}>\end{aligned}$$

$$= \text{ torsión de } \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_3 \\ C_5 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_3 & C_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} <\delta d+d\widetilde{\delta}> & <\delta\widetilde{\delta}> & & & \\ & <\delta d+d\widetilde{\delta}> & <\delta\widetilde{\delta}> & & \\ & & <\delta d+d\widetilde{\delta}> & <\delta\widetilde{\delta}> & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}\end{array}$$

$= \sum_i \tau<(\delta d+d\delta')|C_{2i+1}>$ por 3.1.1.2, si cada $(\delta d+d\delta')|C_{2i+1}$ es no singular.

Note que $(\delta d+d\delta')|C_j = 1\oplus\delta d : B_j\oplus\delta' B_{j-1}\to B_j\oplus\delta B_{j-1}$. Donde $(B_k = dC_{k+1})$. Si $b_j\in B_j$ y $b_{j-1}\in B_{j-1}$ tenemos:

$$\begin{aligned}(\delta d+d\delta')(b_j) &= b_j\\ (\delta d+d\delta')(\delta' b_{j-1}) &= (\delta d)(\delta' b_{j-1})+(1-\delta' d)(\delta' b_{j-1})\\ &= \delta d(\delta' b_{j-1})+\delta' b_{j-1}-\delta' b_{j-1}\\ &= \delta d(\delta' b_{j-1})\end{aligned}$$

Entonces por 3.3.0.2*(1)*, $(\delta d+d\delta)|C_{2i+1}$ es un isomorfismo simple. Por lo tanto $\tau(d+\delta')=\tau(d+\delta)$. □

Con esto terminamos de probar que $\tau(C)$ está bien definida.

3.6. Caracterización de la torsión para un complejo de cadenas

Proposición 3.6.0.1. *Sea $\mathcal{C}$ la clase de $Wh(G)$-complejos, entonces el mapeo de torsión $\tau:\mathcal{C}\to Wh(G)$ satisface las siguientes propiedades:*

P1) *Si* $C\cong C'(\Sigma)\Rightarrow\tau(C)=\tau(C')$

P2) $\tau(C'\oplus C'')=\tau(C')+\tau(C'')$

P3) $\tau(0\to C_n\xrightarrow{d}C_{n-1}\to 0)=(-1)^{n-1}\tau(d)$

Demostración. En lo consecutivo d,d',d'' denotaran los operadores frontera de C,C' y C'' respectivamente.

Suponga que $f : C \cong C'(\Sigma)$ esto significa que existen bases distinguidas de C y C' de manera que $< d_n >=< d'_n >$ y $< f_n >= I$, para toda n. Escogiendo cadenas de contracción $\delta : C \to C$ y tomando $\delta' = f\delta f^{-1}$. Entonces $< d+\delta >=< d'+\delta' >$, por lo tanto $\tau(C) = \tau(C')$ y la propiedad P1 se satisface.

Asuma que $C = C' \oplus C''$ y que δ', δ'' son cadenas de contracción para C' y C''. Entonces $d = d' \oplus d''$, se sique que $\delta = \delta' \oplus \delta''$ es la cadena de contracción de C. Como la permutación de dos renglones o dos columnas no altera la torsión de una matriz, tenemos que

$$\begin{aligned} \tau(C) = \tau < d + \delta >= \tau < (d' \oplus d'') + (\delta' \oplus \delta'') > \\ = \tau \begin{pmatrix} < d' + \delta' > & \\ & < d'' + \delta'' > \end{pmatrix} \\ = \tau(C') + \tau(C'') \end{aligned}$$

Finalmente suponga que C es

$$0 \to C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \to 0$$

Tome $\delta_j = 0$ si $j \neq n$ y $\delta_n = d_n^{-1} : C_{n-1} \to C_n$. Si n es impar, $\delta|C_{impar} = 0$ entonces $\tau C = \tau(d) = (-1)^{n-1}\tau(d)$. Análogamente para caso par. □

La propiedad (2) puede ser muy restrictiva, para situaciones donde tenemos sucesiones exactas cortas podemos cambiarla por una situación más general.

Proposición 3.6.0.2. *suponga que* $0 \to C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C'' \to 0$ *es una sucesión exacta de complejos de cadena acíclicos y que* $\sigma : C'' \to C$ *es una sección de grado* 0 *(pero no necesariamente un mapeo de cadenas). Asuma además que c,* C' *y* C'' *son* $Wh(G)$*-complejos con bases distinguidas* c, c' *y* c''*. Entonces*

$$\tau(C) = \tau(c') + \tau(C'') + \sum(-1)^k \tau < c'_k c''_k / c_k >$$

donde $c'_k c''_k \equiv i(c'_k \cup \sigma(c''_k)$*. En particular, si* $i(c'_k \cup \sigma(c''_k)$ *es una base distinguida de* c_k *para toda* k*, entonces* $\tau(C) = \tau(C') + \tau(C'')$*.*

Vea [1, Cohen p. 57] para demostración.

Proposición 3.6.0.3. *Si* $\mathcal{C}$ *denota la clase de* $Wh(G)$*-complejos acíclicos, entonces el mapeo de torsión* $\tau : \mathcal{C} \to Wh(G)$ *es la única función que satisface las propiedades P1)-P3) recién enunciadas*

Demostración. Suponga que $\mu : \mathcal{C} \to Wh(G)$ también satisface *P1)-P3)*. Usando 3.4.0.2 $C \sim C'$ donde C' es $(0 \to C'_m \xrightarrow{d} C'_{m-1} \to 0)$. Entonces $C \oplus T \cong C' \oplus T'(\Sigma)$ para algunos complejos triviales T y T'. Las propiedades *P1)*- *P3)* implican que $\tau(C) = \tau(C) + \tau(T) = \tau(C') + \tau(T') = \tau(C')$. Similarmente $\mu(C) = \mu(C')$. Por *P3)* $\tau(C') = (-1)^{m-1}\tau(d') = \mu(C')$, así $\tau(C) = \mu(C)$. $\square$

Hasta ahora hemos dado dos construcciones del grupo de Whitehead. La geométrica que surge de manera natural para verificar condiciones de discretización de la teoría de homotopía. La algebraica que brinda una estructura abstracta sobre la cual hay teoría ya desarrollada. Deberemos mostrar que ambas construcciones son equivalentes para que la definición algebraica tenga una motivación y la geométrica se enriquezca. En el siguiente capítulo daremos el significado de la torsión de una pareja de complejos CW en términos de los conceptos recién desarrollados. Esto permitirá dar una equivalencia natural entre el funtor geométrico y el algebraico.

Capítulo 4

Torsión de una pareja CW

En este capítulo daremos la demostración de que las construcciones algebraica y geométrica son equivalentes, para esto deberemos extender la definición de torsión para una pareja de complejos CW, con la cual podremos dar una equivalencia natural entre los funtores definidos en los capítulos anteriores. Definiremos la torsión de una equivalencia de homotopía y mostraremos algunos afirmaciones sobre esta que finalmente nos dará la relación entre la homotopía y la homotopía simple.

4.1. Torsión de una pareja CW

Queremos definir la torsión para una pareja CW usando las definiciones anteriores de torsión. En vista de lo planteado, lo natural será definir un complejo de cadenas a partir de una pareja CW.

Definición 4.1.0.1. *Sea (K, L) una pareja CW, el* ***complejo de cadenas celular*** *$C(K, L)$ es construido tomando $C_n = H_n(K^n \cup L, K^{n-1} \cup L)$ y tomando $d_n : C_n(K, L) \to C_{n-1}(K, L)$ el operador frontera usual en la sucesión exacta larga de homología singular de la tripleta $(K^n \cup L, K^{n-1} \cup L, K^{n-2} \cup L)$.*

Suponga que (K, L) es una pareja CW de manera que $K \searrow L$. Sea $p : \widetilde{K} \to K$ el cubriente universal y sea $G = Cov(\widetilde{K})$ el grupo de homeomorfismos de cubierta. Entonces $\widetilde{K} \searrow \widetilde{L}$ por 1.2.4.4. El complejo de cadenas celular es un $\mathbb{Z}(G)$-complejo. Si escogemos para cada celda $e_\alpha \in K - L$ un mapeo característico φ_α y un levantamiento específico $\widetilde{\varphi_\alpha}$ de φ_α, por 4.1.0.2 $B = \{< \widetilde{\varphi_\alpha} > | e_\alpha \in K - L\}$ es una base para $C(\widetilde{K}, \widetilde{L})$ es un $Wh(G)$-complejo. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de todas las bases construidas de esta manera.

Proposición 4.1.0.1. *El complejo $C(\widetilde{K}, \widetilde{L})$ junto con la familia de bases $\mathcal{B}$ determina un $Wh(G)$-complejo acíclico.*

Demostración. $C(\widetilde{K},\widetilde{L})$ es acíclico porque $\widetilde{K} \searrow \widetilde{L}$, entonces por 1.3.0.3 $H(C(\widetilde{K},\widetilde{L})) \cong H(|\widetilde{K}|,|\widetilde{L}|) = 0$.

Suponga que c y $c' \in \mathcal{B}$ restringido a las bases $c_n = \{<\widetilde{\varphi_1}>,\ldots,<\widetilde{\varphi_q}>\}$ y $c'_n = \{<\widetilde{\psi_1}>,\ldots,<\widetilde{\psi_q}>\}$ de $C_n(\widetilde{K},\widetilde{L})$. Entonces

$$\begin{aligned} <\widetilde{\psi_j}> &= \textstyle\sum_k a_{jk} <\widetilde{\varphi_k}> \qquad \text{para alguna } a_{jk} = \sum_i n_i^{j,k} g_i \in \mathbb{Z}(G) \\ &= \textstyle\sum_{i,k} n_i^{j,k} <g_i\widetilde{\varphi_k}> \end{aligned}$$

Pero la celda $\widetilde{\varphi_j}(I^n)$ como levantamiento de e_j, es igual a uno de las celdas $g_{i_j}\widetilde{\varphi_j}(I^n)$ y es disjunta de todas las otras. Así por 1.3.0.2 c), los coeficientes en la última suma son cero excepto cuando $N = n_{i_j}^{i,j}$. Pero cuando $\widetilde{\varphi_j}(I^n) = g_{i_j}^{-1}\widetilde{\psi_j}(I^n)$, entonces por el mismo argumento $<\widetilde{\varphi_j}>= N' < g_{i_j}^{-1}\widetilde{\psi_j}>$. Entonces $<\widetilde{\psi_j}>= NN' <\widetilde{\psi_j}>$. Así $N = \pm 1$ y $<\widetilde{\psi_j}>= \pm g_{i_j} <\widetilde{\varphi_j}>$. Por lo tanto

$$<c_n/c'_n>= \left(\pm g_{i_1} \quad \right)$$

Así $C(\widetilde{K},\widetilde{L})$ es un $Wh(G)$-complejo estableciendo que b es una base distinguida si y solamente si $\tau < c/b >= 0$ para toda c en $\mathcal{B}$. □

Proposición 4.1.0.2. *Suponga* $p : \widetilde{K} \to K$ *es el cubriente universal y que* G *es el grupo de transformaciones de cubierta de* $\widetilde{K}$. *Asuma que* $L < K$ *y* $\widetilde{L} = p^{-1}L$. *Para cada celda* e_α *de* $K - L$ *sea* $\varphi_\alpha : I^n \to K$ *(*$n = n(\alpha)$*) y un específico levantamiento* $\widetilde{\varphi_\alpha} : I^n \to \widetilde{K}$. *Entonces* $\{<\widetilde{\varphi_\alpha}> | e_\alpha^n \in K - L\}$ *es una base para* $C(\widetilde{K},\widetilde{L})$ *como un* $Wh(G)$*- complejo.*

Demostración. Sea $* = *_n$ un punto fijo de (I^n) para cada n. Para cada $y \in p^{-1}\varphi_\alpha(*)$, sea $\widetilde{\varphi_{\alpha,y}}$ el único levantamiento de φ_α tal que $\widetilde{\varphi_{\alpha,y}}(*) = y$. Como $p : \widetilde{K} \to K$ es un cubriente universal, G actúa libre y transitivamente sobre cada fibra $p^{-1}(x)$. Entonces cada $\widetilde{\varphi_{\alpha,y}}$ es expresado de manera única como $\widetilde{\varphi_{\alpha,y}} g \circ \widetilde{\varphi_\alpha}$ para alguna $g \in G$ y $\{\widetilde{\varphi_{\alpha,y}} | y \in p^{-1}\varphi_\alpha(*)\} = \{g \circ \widetilde{\varphi_\alpha} | g \in G\}$. Pero por 1.3.0.2 y 1.2.4.3, $C(\widetilde{K},\widetilde{L})$ es libre $\mathbb{Z}$-módulo con

$$\{<\widetilde{\varphi_{\alpha,y}}>\} = \{<g \circ \widetilde{\varphi_\alpha}>\} = \{g_* <\widetilde{\varphi_\alpha}>\} = \{g \cdot <\widetilde{\varphi_\alpha}>\}$$

donde g varia sobre G y φ_α varia sobre los mapeos característicos de $K - L$. Así cada $c \in C(\widetilde{K},\widetilde{L})$ es representado de manera única por una suma finita

$$\begin{aligned} c &= \textstyle\sum_{i,\alpha} n_{i,\alpha}(g_i \cdot <\widetilde{\varphi_\alpha}>) \\ &= \textstyle\sum_\alpha (\sum_i n_{i,\alpha}(g_i \cdot <\widetilde{\varphi_\alpha}>) \\ &= \textstyle\sum_\alpha r_\alpha <\widetilde{\varphi_\alpha}>, r_\alpha \in \mathbb{Z}(G) \end{aligned}$$

Entonces $\{<\widetilde{\varphi_\alpha}>|e_\alpha$ es un celda de $K-L\}$ es un base para $C(\widetilde{K},\widetilde{L})$ como un $Wh(G)$-módulo. □

Recuerde que en la construcción algebraica dimos un funtor covariante que mandaba a cada grupo en su grupo de Whitehead y cada homomorfismo $G_1 \to G_2$ al morfismo naturalmente inducido en $Wh(G_1) \to Wh(G_2)$. Consideremos ahora en particular los isomorfismos inducidos $Wh(\pi_1(X,x)) \to Wh(\pi_1(X,y))$ correspondientes a los isomorfismos de cambio de punto base $\pi_1(X,y) \to \pi_1(X,y)$.

Proposición 4.1.0.3. *Si X es un espacio arco conexo que contiene a los puntos x y y entonces todos los caminos de x a y inducen el mismo isomorfismo $f_{x,y}$ de $Wh(\pi_1(X,x))$ a $Wh(\pi_1(X,y))$. Más aún $f_{y,z}\circ f_{x,y} = f_{x,z}$ para z un punto en X.*

Demostración. Si $\alpha:(I,0,1)\to(X,x,y)$, sea $f_\alpha:\pi_1(X,x)\to\pi_1(X,y)$. Denotemos el isomorfismo usual dado por $f_\alpha[\omega]=[\alpha^{-1}*\omega*\alpha]$. Entonces, si α y β son dos caminos tales que $f_\beta^{-1}f_\alpha([\omega])=[\beta*\alpha^{-1}]\cdot[\omega]\cdot[\beta*\alpha^{-1}]^{-1}$ para toda $[\omega]\in\pi_1(X,x)$. Por lo tanto $f_\beta^{-1}f_\alpha$ es un automorfismo interior y por 3.1.1.1 $(f_\beta)_*^{-1}(f_\alpha)_* = Id$. Así $(f_\beta)_*=(f_\alpha)_*$ para toda α y β, y podemos establecer que $f_{x,y}=(f_\alpha)_*$. Es obvio que $f_{y,z}\circ f_{x,y}=f_{x,z}$. □

Suponga que como antes $p:\widetilde{K}\to K$ es un cubriente universal, con $G=Cov(\widetilde{K})$ y K es conexo. Escogiendo puntos bases $x\in X$ y $\widetilde{x}\in p^{-1}(x)$ sabemos que existe un isomorfismo $\theta=\theta(x,\widetilde{x}):\pi_1(K,x)\to G$. Si denotamos $\theta([\alpha])=\theta_{[\alpha]}$ para toda $\alpha\in\pi_1(K,x)$ por

$$\theta_{[\alpha]}(y)=\widetilde{\alpha*p\omega}(1)$$

donde $y\in\widetilde{K},\omega$ es un camino de $\widetilde{x}$a y y $\widetilde{\alpha*p\omega}(0)=\widetilde{x}$ si identificamos $\pi_1(K,x)$ con G por medio de θ entonces por 4.1.0.1, $C(\widetilde{K},\widetilde{L})$ es un $Wh(\pi_1(K,x))$-complejo acíclico y definimos $\tau(K,L)\in Wh(\pi_1(K,x))$. Nos gustaría tener una definición que no dependa del punto base. Usando 4.1.0.3 definiremos

$$Wh(\pi_1K)=[\bigcup_{x\in K}Wh(\pi_1(K,x))]/\text{"}\sim\text{"}$$

donde $a\sim b$ si $a\in Wh(\pi_1(K,x))$ y $b\in Wh(\pi_1(K,y))$ y $f_{x,y}(a)=b$.

Sea $j_x:Wh(\pi_1(K,x))\to Wh(\pi_1K)$ la biyección natural. La estipulación de que j_x es un isomorfismo de grupos da a $Wh(\pi_1K)$ la estructura de grupo la cual es independiente de x. Note que $j_y^{-1}j_x=f_{x,y}$.

Si $f : (K, x) \to (K', x')$, entonces el homomorfismo inducido en los grupos fundamentales da lugar a la composición de homomorfismos

$$Wh(\pi_1 K) \xrightarrow{j_x^{-1}} Wh(\pi_1(K, x)) \xrightarrow{f_\#} Wh(\pi_1(K', x')) \xrightarrow{j_{x'}} Wh(\pi_1 K')$$

Proposición 4.1.0.4. *El homomorfismo f_* es independiente de las pareja (x, x') cuando $f(x) = x'$ es escogida. Entonces existe un funtor covariante de la categoría de complejos-CW finitos y mapeos a la categoría de grupos abelianos y homomorfismo definido por*

$$K \to Wh(\pi_1(K))$$

$$\{f : K \to K'\} \to \{f_* : Wh(\pi_1(K)) \to Wh(\pi_1(K'))\}$$

Más aún si $f \simeq g$ entonces $f_* = g_*$.

Poniendo todo esto junto, $\tau(K, L) \in Wh(\pi_1 L)$ es definido (en el caso conexo) como sigue: Escoge un punto $x \in K$, una cubierta universal $p : (\widetilde{K}, \widetilde{L}) \to (K, L)$ y un punto $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$. Sea $i : L \to K$ la inclusión. Entonces $\tau(K, L)$ es el final de la sucesión

$$\begin{array}{c}
\tau(C(\widetilde{K}, \widetilde{L})) \in Wh(G) \\
\Big\downarrow \scriptstyle{\psi(x, \widetilde{x})} \\
\tau(C(\widetilde{K}, \widetilde{L})) \in Wh(\pi_1(K, x)) \\
\Big\downarrow \scriptstyle{j_x} \\
\tau' \in Wh(\pi_1 K) \\
\Big\downarrow \scriptstyle{i_*^{-1}} \\
\tau(K, L) \in Wh(\pi_1 L)
\end{array}$$

$\tau(K, L)$ está bien definida por las proposiciones anteriores.

4.2. Propiedades fundamentales de la torsión de una pareja

Proposición 4.2.0.1. *Si (K, L) es una pareja de complejos CW tal que $K \searrow L$ y si cada componente de $K - L$ es simplemente conexo entonces $\tau(K, L) = 0$.*

Demostración. Claramente es suficiente probar cuando K es conexo. Sea c una componente conexa $K - L$. Entonces c es cerrado en $K - L$, y $\overline{c} \subset L \cup c$ con $L \cup c$ un conjunto cerrado. Si e es una celda de K que coincide en c entonces e no puede caer totalmente en L, así L siendo un subcomplejo tenemos que $e \cap L = \varnothing$. Por lo tanto $e \subset K - L$ y consecuentemente $e \subset c$. Combinando estos hechos veremos que $L \cup c$ es un subcomplejo de K y $c = (L \cup c) - L$ es la unión de las celdas.

Como lo acostumbrado $p : \widetilde{K} \to K$ es un cubriente universal con G el grupo de homeomorfismos de cubierta. Como c es simplemente conexo se levanta con un homeomorfismo a $\widetilde{K}$. Sea C un levantamiento de c, entonces $p|C : C \to c$ es un homeomorfismo. Sea $\{gC | 1 \neq g \in G\}$ los otros levantamientos. Estos levantamientos son disjuntos a pares dado que c es conexo. Para cada p-celda e_α de c sea $\widetilde{\varphi_\alpha}$ un levantamiento de un mapeo característico de manera que $\widetilde{\varphi_\alpha}(I^p) \subset C$. Haciendo esto para todas las componentes c de $K - L$, y todas las celdas e_α, obtendremos una base distinguida $\{<\widetilde{\varphi_\alpha}>\}$ para $C(\widetilde{K}, \widetilde{L})$ (que estaremos pensando como un $Wh(G)$-complejo).

Para una e_α n-celda fija de la componente c de $K - L$,

$$\partial < \widetilde{\varphi_\alpha} > \in H_{n-1}(\widetilde{K}^{n-1} \cup \widetilde{L}, \widetilde{K}^{n-2} \cup \widetilde{L})$$

Es representado por un ciclo singular enviado por $\widetilde{\varphi_\alpha}(\partial I^n)$. Más aún $\widetilde{\varphi_\alpha}(I^n) \subset C$ y $\varphi_\alpha(I^n) \subset L \cup c$, entonces $\widetilde{\varphi_\alpha}(\partial I^n) \subset \widetilde{L} \cup C$. Así cualquier $(n-1)$-celda de $\widetilde{K} - \widetilde{L}$ que coincide en $\widetilde{\varphi_\alpha}(\partial^n)$ debe caer en C. Se sigue de 1.3.0.2(3) que la expresión

$$\partial < \varphi_\alpha > = \sum_{\beta, j} n_{\alpha\beta j} g_j < \widetilde{\varphi_\beta} >, \;\; n_{\alpha\beta j} \in \mathbb{Z}, \;\; g_j \in G$$

debe tener $n_{\alpha\beta j} = 0$ a menos de que $g_j \widetilde{\varphi_\beta}(I^{n-1}) \subset C$. Pero por elección de nuestra base preferida $g_j \widetilde{\varphi_\beta}(I^{n-1}) \subset C$ sólo cuando $g_j = 1$. Entonces

$$\partial < \varphi_\alpha > = \sum_{\beta} n_{\alpha\beta} < \widetilde{\varphi_\alpha} >$$

y veamos que la matriz de δ solo tiene enteros. Si tenemos una matriz con tales condiciones entonces, $\tau(C(\widetilde{K}, \widetilde{L})) = 0 \in Wh(G)(Vea[1, Cohen p. 60])$. □

Proposición 4.2.0.2. *Si $K > L > M$ donde $K \searrow L$ y $L \searrow M$ entonces*

$$\tau(K, M) = \tau(L, M) + i_*^{-1} \tau(K, L)$$

Donde $i : M \to L$ es el mapeo inclusión.

Demostración. Asumamos que K es conexo. Sea $p : \widetilde{K} \to K$ el cubriente universal y $L = p^{-1}L$, $G' = Cov(\widetilde{L})$ y $G = Cov(\widetilde{K})$. Si $j : L \underset{\to}{\subset} K$ entonces $j_\# : G' \to G$ es un isomorfismo. Note (usando 1.1.1.1 con $\widetilde{J} : \widetilde{L} \underset{\to}{\subset} \widetilde{K}$) que $j_\#(g') \in G$ es la única extensión de g'. Sea $J = j_\#$ y también denotemos J al mapeo inducido de $\mathbb{Z}(G') \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}(G)$. Por 4.1.0.1, $C(\widetilde{K}, \widetilde{M})$ y $C(\widetilde{K}, \widetilde{L})$ son $Wh(G)$-complejos y $C(\widetilde{L}, \widetilde{M})$ es un $Wh(G')$complejo. Pero

$C(\widetilde{L},\widetilde{M})$ también puede ser visto como un $Wh(G)$-complejo si dado $g \in G$ y $x \in C(\widetilde{L},\widetilde{M})$ definimos $g \cdot x = g' \cdot (x)$ donde $J(g') = g$. Escoja una base preferida $\{< \widetilde{\varphi\alpha} > | e_\alpha \in K - L\}$ para $C(\widetilde{K},\widetilde{M})$ como un $\mathbb{Z}(G)$-módulo y use los mismos levantamientos $\widetilde{\varphi\alpha}$ para dar las bases preferidas $\{< \widetilde{\varphi\alpha} > | e_\alpha \in K - L\}$ y $\{< \widetilde{\varphi\alpha} > | e_\alpha \in L - M\}$ para los $\mathbb{Z}(G)$-módulos $C(\widetilde{K},\widetilde{L})$ y $C(\widetilde{L},\widetilde{M})$. Entonces el mapeo inclusión induce una sucesión exacta corta

$$0 \to C(\widetilde{L},\widetilde{M}) \to C(\widetilde{K},\widetilde{M}) \to C(\widetilde{K},\widetilde{L}) \to 0$$

de $Wh(G)$-complejos acíclicos con sus bases preferidas dadas. Entonces por 3.6.0.2 $\tau C(\widetilde{K},\widetilde{M}) = \tau C(\widetilde{L},\widetilde{M}) + \tau C(\widetilde{K},\widetilde{L})$.

Ahora piense en $C(\widetilde{L},\widetilde{M})$ como un $Wh(G')$-complejo y note que, por definición de $C(\widetilde{L},\widetilde{M})_J$ hay una base trivial que preserva isomorfismo de $C(\widetilde{L},\widetilde{M})_J$ con el complejo $C(\widetilde{L},\widetilde{M})$ visto como un $Wh(G)$-complejo discutido anteriormente. Así la torsión de este último complejo es igual a $\tau(C(\widetilde{L},\widetilde{M})_J) = J_* \tau C(\widetilde{L},\widetilde{M})$. Entonces $\tau C(\widetilde{K},\widetilde{M}) = [\tau C(\widetilde{K},\widetilde{L}) + J_* \tau C(\widetilde{L},\widetilde{M})] \in Wh(G)$. La proposición ahora se deduce poniendo cada término de la ecuación en su imagen en $Wh(\pi_1(M))$ según el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Wh(G') \arrow[rr, "J_*"] \arrow[d] & & Wh(G) \arrow[d] \\
Wh(\pi_1(L)) \arrow[rr, "j_*"'] & & Wh(\pi_1(K)) \\
& Wh((\pi_1(M)) \arrow[ul, "i_*"] \arrow[ur, "k_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Donde i, j, k son inclusiones y la flechas verticales resultan de la equivalencia natural entre ambas construcciones como se discutió en la sección anterior. □

Proposición 4.2.0.3. *(Lema de Excisión) Si K, L con L conexo (por tanto también $K \cup L$) y M son subcomplejos del complejo $K \cup L$ y $K \searrow$; entonces $\tau(K \cup L, L) = j_* \tau(K, M)$ donde $j : M \to L$ es el mapeo inclusión.*

Demostración. Suponga que M y K tienen componentes $M_1 \dots M_s$ y $K_1 \dots, K_s$ donde $K_i \searrow M_i$. La prueba del teorema consistirá en el detalle técnico del hecho de que $(K \cup L) - L = \bigcup_i (K_i - M_i)$ donde $K_i - M_i$ son disjuntos.

Sea $p : \widetilde{K \cup L} \to K \cup L$ el cubriente universal de $K \cup L$ y denote por $\widetilde{X} = p^{-1} X$ si $X \subset K \cup L$. Sea $G = Cov(\widetilde{K \cup L})$. Note que $C(\widetilde{K \cup L}, \widetilde{L}) = \oplus_i C(\widetilde{K_i \cup L}, \widetilde{L})$, donde todos los complejos de cadena en esta ecuación pueden ser vistos como $Wh(G)$-complejos. Entonces por 3.6.0.1

$$\tau(K \cup L, M) = \sum_i \tau C(\widetilde{K_i \cup L}, \widetilde{L}) \in Wh(G)$$

para calcular $\tau C(\widetilde{K_i \cup L}, \widetilde{L})$ consideramos el cubriente universal $\widehat{p}: (\widehat{K_i}, \widehat{M_i}) \to (K_i, M_i)$ donde $\widehat{G_i} = Cov(\widehat{K_i})$. Fijando puntos bases $x \in M_i$, $\widehat{x} \in \widehat{p^{-1}}(x)$ y $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ y siendo $J_i : (K_i, x) \to (K \cup L, x)$ la inclusión, los siguientes diagramas están determinados.

$$\begin{tikzcd}
(\widehat{K_i}, \widehat{x}) \arrow[r, "J_i"] \arrow[d, "\widehat{p}"] & (\widetilde{K \cup L}, \widetilde{x}) \arrow[d, "p"] \\
(K_i, x) \arrow[r, "J_i"'] & (K \cup L, x)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\widehat{G_i} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\cong"] & G \arrow[d, "\cong"] \\
\pi_1(K_i, x) \arrow[r, "J_{i\#}"'] & \pi_1(K \cup L, x) \\
\pi_1(M_i, x) \arrow[r, "(j|M_i)_\#"] \arrow[u, "\cong"', "\text{incl}"] & \pi_1(L, x) \arrow[u, "\cong"', "\text{incl}"]
\end{tikzcd}$$

Usaremos el hecho de que 1.2.1 dice que $\widetilde{J_i} \circ g = \lambda(g) \circ \widetilde{J_i}$ si $g \in \widehat{G}$.

Para las celdas $e_\alpha \in K_i - M_i$ con mapeo característico φ_α escogemos un levantamiento fijo $\widehat{\varphi\alpha}$ a $\widehat{K_i}$ y defina $\widetilde{\varphi\alpha} = \widetilde{J_i} \circ \widehat{\varphi\alpha}$. Entonces $\{< \widehat{\varphi\alpha} >\}$ es una base para el $Wh(G)$-complejo $C(\widetilde{K_i \cup L}, \widetilde{L})$.

Además $\widetilde{J_i}$ induce un mapeo de cadenas (sobre $\mathbb{Z}$), dado que es celular. Entonces si $\delta < \widehat{\varphi\alpha} >= \sum n_{\alpha\beta\gamma} g_\gamma < \widehat{\varphi\beta} >$ donde $g_\gamma \in \widehat{g_i}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\partial < \widetilde{\varphi_\alpha} > &= \widetilde{J}_{i*} \partial < \widehat{\varphi_\alpha} > \\
&= \sum n_{\alpha\beta\gamma} (\widetilde{J_i} \circ g_\gamma)_* < \widehat{\varphi_\beta} > \\
&= \sum n_{\alpha\beta\gamma} (\lambda(g_\gamma) \circ \widetilde{J_i})_* < \widehat{\varphi_\beta} > \\
&= \sum n_{\alpha\beta\gamma} (\lambda(g_\gamma) < \widetilde{\varphi_\beta} >
\end{aligned}$$

Entonces $C(\widetilde{K_i \cup L}, \widetilde{L})$ es simplemente isomorfo a $C(\widehat{K_i}, \widehat{M_i})_\lambda$. Así $\tau C(\widetilde{K_i \cup L}, \widetilde{L}) = \lambda_* \tau C(\widehat{K_i}, \widehat{M_i}) \in Wh(G)$. Esto corresponde, por la parte derecha del diagrama de arriba a $(j|M_i)_* \tau(K_i, M_i) \in Wh(\pi_1 L)$. Por lo tanto

$$\tau(K \cup L, L) = \sum_j (j|M_i)_* \tau(K_i, M_i) \cong j_* \tau(K, M)$$

$\square$

Proposición 4.2.0.4. *Si K, L y M son subcomplejos del complejo $K \cup L$ con $M = K \cap L$ y $K \searrow M$ y $L \searrow M$ entonces $\tau(K \cup L, M) = \tau(K, M) + \tau(L, M)$.*

Proposición 4.2.0.5. *Suponga que (K, L) es una pareja CW conexa en forma simplificada, $K = L \cup \bigcup_j^a e_j^n \cup \bigcup_i^a e_i^{n+1}$, $(n \geq 2)$ y si $\{\psi_j\}$ y $\{\varphi_i\}$ son mapeos característicos para e_j^n y e_i^{n+1}. Sea $K_n = L \cup \bigcup_j^a e_j^n$. Sea $< \partial >$ la matriz con entrada en $\mathbb{Z}(\pi_1(L, e_0))$ del operador frontera $\partial : \pi_{n+1}(K, K_n; e^0) \to \pi_n(K_n, L; e^0)$ con respecto a las bases $\{\psi_j\}$ y $\{\varphi_i\}$, dado por 2.5.0.1. Entonces $\tau(K, L) = (-1)^n \tau < \partial >$.*

Demostración. Se sigue de 2.5.0.1 y del hecho de que el mapeo de Hurewicz conmuta con el operador frontera y que hay un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & \\
H_{n-1}(\widetilde{K}, \widetilde{K}_n) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\partial"] & \pi_1(k, K_n; e^0 \arrow[d, "\partial"] \\
H_n(\widetilde{K}_n, \mathrm{lg}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \pi_n(K_n, L; e^0) \\
0 &
\end{tikzcd}$$

en donde las bases distinguidas $\{\widetilde{\psi_j}\}$ y $\{\widetilde{\varphi_i}\}$ van a las bases $\{[\psi_j]\}$ y $\{[\varphi_i]\}$. Como la columna de la izquierda es solo $C(\widetilde{K}, \widetilde{L})$, el resultado se sigue de la propiedad 3 de la torsión de un complejo de cadenas como se vio en 3.6.0.1. ☐

4.3. Equivalencia natural entre $Wh(L)$ y $Wh(\pi_1 L)$

Hemos dado dos construcciones para el grupo de Whitehead, deberemos probar que ambas son equivalentes. Encontraremos una equivalencia natural entre el funtor geométrico:

$$L \to Wh(L)$$

$$\{f : L \to L'\} \to \{f_* : Wh(L) \to Wh(L')\}$$

Y el funtor algebraico:

$$L \to \oplus_i Wh(\pi_1(L_j)), \text{ donde } L_1, \ldots, L_q \text{ son las componentes de } L$$

$$\{f : L \to L'\} \to \{f_* = \sum_j f_{j*} : \oplus_j Wh(\pi_1(L_j) \to \oplus_i Wh(\pi_1(L_i'))$$

Teorema 4.3.1. *Para cada complejo CW finito L defina $T_L : Wh(L) \to \oplus_j Wh(\pi_1(L_j)$ donde $L_j$son las componentes de L, como $T_L([K, L]) = \tau(K, L)$. Entonces $T = \{T_L\}$ es una equivalencia natural de funtores.*

Demostración. Para cada L, T_L no depende del representante: Si $L < K < K'$ donde $K' \overset{e}{\searrow} K$ entonces $K' \searrow K$ y $K' - K$ es simplemente conexo. Entonces por 4.2.0.1 y 4.2.0.2

$$\tau(K', L) = \tau(K, L) + i_*^{-1} \tau(K', K) = \tau(K, L)$$

Por inducción sobre el número de colapsos y expansiones elementales $\tau(K,L) = \tau(K',L)$ si $K \curlywedgedownarrow K'$ rel L. Entonces $T_L([K,L]) = T_{L'}([K,L']) $ si $[K,L] = [K',L]$.

Para cada L, T_L es un homomorfismo: Esto es exactamente el contenido de 4.2.0.4 T_L es uno a uno. Suponga que $T_L([K,L]) = \tau(K,L) = 0$. Podemos asumir por 2.4.0.3 y el hecho de que T_L está bien definida, que para cada componente de (K,L) está en forma simplificada. Entonces por 4.2.0.5, $\tau <\partial^j>= 0$, donde ∂^j es el operador frontera usual en homotopía para la j-ésima componente. Pero por 2.5.0.4 esto implica que $K \curlywedgedownarrow L$ rel L. Así $[K,L] = 0$ y T_L es inyectiva.

T_L es suprayectiva por 4.2.0.5 y por 2.5.1.2.

Entonces para cada L, T_L es un isomorfismo. Para probar que T es una equivalencia natural resta ver que si $f : L \to L'$, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
Wh(L) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "T_L"] & Wh(L') \arrow[d, "T_L"] \\
\oplus_j Wh(\pi_1(L_j)) \arrow[r, "f_*"] & \oplus_i Wh(\pi_1(L'_i))
\end{tikzcd}$$

Asumamos que f es celular. Entonces, dado $[K,L] \in Wh(L)$

$$\begin{aligned}
T_{L'} f_*[K,L] &= \tau(K \underset{L}{\cup} M_f, L'), && \text{por definición de } f_* \\
&= \tau(M_f, L') + i_*^{-1}\tau(K \underset{L}{\cup} M_f, M_f), && \text{donde } i : L' \subset M_f \\
&= i_*^{-1}\tau(K \underset{L}{\cup} M_f, M_f), && \text{dado que } M_f \searrow L' \\
&= p_*\tau(K \underset{L}{\cup} M_f, M_f), && \text{con } p : M_f \to L' \text{ es la proyección natural} \\
&= p_* j_* \tau(K,L) && \text{donde } j : L \overset{\subset}{\to} M_f \\
&= f_*\tau(K,L) && \text{dado que } pj = f
\end{aligned}$$

□

4.4. La torsión de una equivalencia homotópica.

Suponga que $f : K \to L$ es una equivalencia de homotopía celular entre complejos CW finitos. Entonces $M_f \searrow K$ y $f_* : Wh(K) \to Wh(L)$ es un isomorfismo. Definimos

$$\tau(f) = f_*\tau(M_f, K) \in Wh(L)$$

Probaremos algunas propiedades de la torsión de una equivalencia homotópica.

Proposición 4.4.0.1. *Si $f, g : K \to L$ son equivalencias homotópicas celulares con $f \sim g$, entonces $\tau(f) = \tau(g)$.*

Demostración. Como $f \sim g$ entonces $f_* = g_*$ por 4.1.0.4. Es suficiente demostrar que $\tau(M_f, K) = \tau(M_g, K)$ que es cierto por $M_f \bigwedge\!\!\!\searrow M_g$ rel K por 2.2.0.6. □

La proposición anterior nos permite considerar siempre equivalencias homotópicas celular sin alterar las aseveraciones hechas sobre la torsión.

Proposición 4.4.0.2. *Una equivalencia de homotopía celular $f : K \to L$ es un equivalencia de homotopía simple si y solamente si $\tau(f) = 0$.*

Demostración. Dado que f_* es un isomorfismo, $\tau(f) = 0$ si y solamente si $\tau(M_f, K) = 0$. Pero por 4.3.1 esto es cierto si y solamente si $M_f \bigwedge\!\!\!\searrow K$ rel K. Y 2.2.0.9 dice que es cierto si y solamente si f es una equivalencia de homotopía simple. □

Proposición 4.4.0.3. *Si $L < K$ y $K \searrow L$ entonces $\tau(i) = i_*(K, L)$ donde $i : L \to K$ es el mapeo inclusión.*

Demostración. $M_i = (L \times I) \underset{L \times I}{\cup} K \times 1$, donde $L \cong L \times 0 < M_i$. Entonces

$M_i \nearrow (K \times I) \searrow K \times 0 \cong K$ rel L

Entonces $\tau(M_i, L) = \tau(K, L)$ por lo tanto $\tau_i = i_* \tau(M_i, L) = i_*(K, L)$. □

Proposición 4.4.0.4. *Si $f : K \to L$ y $g : L \to M$ son equivalencias de homotopía celulares entonces $\tau(gf) = \tau(f) + g_* \tau(f)$.*

Demostración. Haciendo uso de las proposiciones anteriores tenemos:

$$\begin{aligned}
\tau(gf) &= g_* f_* \tau(M_{gf}, K) \\
&= g_* f_* [\tau(M_f \underset{L}{\cup} M_g, K)] \text{ por 2.2.0.7} \\
&= g_* f_* [\tau(M_f, K)] + i_*^{-1} [\tau(M_f \underset{L}{\cup} M_g, M_f)], \\
&\quad \text{donde } i : K \overset{\subset}{\to} M_f, \text{ usando 4.2.0.2} \\
&= g_* \tau(f) + g_* f_* [i_*^{-1} j_* \tau(M_g, L)], \\
&\quad \text{donde } j : L \overset{\subset}{\to} M_f \text{ y usando excisión 4.2.0.3,} \\
&= g_* \tau(f) + g_* \tau(M_g, L), \\
&\quad \text{dado que } f = pi \text{ y } Id_L = pj \Rightarrow f_* i_*^{-1} j_* = Id_{Wh(\pi_1(L))} \\
&= g_* \tau(f) + \tau(g), \\
&\quad \text{como } f = pi \text{ y } Id_L = pj \Rightarrow f_* i_*^{-1} j_* = Id_{Wh(\pi_1(L))} \\
&= g_* \tau(f) + \tau(g)
\end{aligned}$$

□

Como corolario obtenemos

Corolario 4.4.0.1. *Si $f : K \to L$ y $g : L \to K$ son equivalencias de homotopía celulares las cuales son inversas homotópicas la una de la otra entonces $\tau(g) = -g_*\tau(f)$.*

Demostración. Como $gf \simeq Id_K$ tenemos que $0 = \tau(gf) = \tau(g) + g_*\tau(f)$. □

Proposición 4.4.0.5. *Si $f : (K, K_0) \to (L, L_0)$ donde $K \searrow K_0$, $L \searrow L_0$, y $f : K \to L$ y $\overline{f} = f|K_0 : K_0 \to L_0$ son equivalencias de homotopía celulares entonces*

1. $\tau(f) = j_*\tau(\overline{f}) + [\tau(j) - f_*\tau(i)]$.
2. $\tau(L, L_0) = \overline{f}_*\tau(K, K_0) + [D_*\tau(f) - \tau(\overline{f})]$.

donde $i : K_0 \subset K$, $j : L_0 \subset L, D : L \to L_0$ es el retracto por deformación.

Demostración. Claramente $fi = j\overline{f}$. Así

$\tau(f) + f_*\tau(i) = \tau(j) + j_*\tau(\overline{f})$. Probando *(1)*.

Más aún:

$$\begin{aligned}
\tau(j) &= f_*\tau(i) + \tau(f) - j_*\tau(\overline{f}) \\
j_*\tau(L, L_0) &= f_*i_*\tau(K, K_0) + \tau(f) - j_*\tau(\overline{f}) \text{ por 4.4.0.3} \\
\tau(L, L_0) &= (DFi)_*\tau(K, K_0) + D_*\tau(f) - \tau(\overline{f}) \\
&= \overline{f}_*\tau(K, K_0) + [D_*\tau(f) - \tau(\overline{f})]
\end{aligned}$$

Probando *(2)*. □

Como corolario obtenemos

Corolario 4.4.0.2. *Si $f : (K, K_0) \to (L, L_0)$ como en 4.4.0.5 y si f y $\overline{f}$ son equivalencias de homotopía simples, entonces (a) $\tau(j) = f_*\tau(i)$ y (b) $\tau(L, L_0) = \overline{f}_*\tau(K, K_0)$.*

4.5. La relación entre la homotopía y la homotopía simple

Regresando a los propósitos iniciales de la búsqueda de la discretización de la teoría de homotopía, es fundamental poder dar una respuesta completa a la siguiente pregunta ¿Toda equivalencia homotópica es una equivalencia de homotopía simple? La respuesta es no. Mostraremos que cualquier elemento de torsión puede ser realizado como la torsión de una equivalencia de homotopía.

Proposición 4.5.0.1. *Si $\tau_0 \in Wh(L)$ entonces hay un complejo CW K y una equivalencia de homotopía $f : K \to L$ con $\tau(f) = \tau_0$.*

Demostración. Sea K un complejo CW de manera que $K \searrow L$ y tal que $\tau(K, L) = -\tau_0$ Tal complejo existe por la definición dada en la construcción del grupo de Whitehead geométrico de $Wh(L)$. Sea $f : K \to L$ la inversa homotópica del mapeo inclusión $i \to K$ entonces 4.4.0.3-4.4.0.1 dicen que $\tau(f) = -f_*\tau(i) = -f_*i_*\tau(K, L) = -\tau(K, L) = \tau_0$. □

Podemos hacer ahora una pregunta más amplia. Si existe una equivalencia homotópica $f : K \to L$ entonces ¿existe una equivalencia de homotopía simple? La respuesta no sólo dependerá del $Wh(L)$, si no también en que tan rico es el grupo $\mathcal{E}(L)$ de clases de equivalencia (bajo homotopía) de equivalencias de auto-homotopías de L. Esto es explicado en las siguientes tres proposiciones.

Proposición 4.5.0.2. *Suponga que L es un complejo CW dado. Si K es homotópicamente equivalente a L (denotado "$K \simeq L$") defina $S_K \subset Wh(L)$ por*

$$S_K = \{\tau(f) | f : K \to L \text{ es una equivalencia homotópica}\}$$

entonces si $K \simeq L \simeq K'$, las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. $S_K \cap S_{K'} \neq \varnothing$.
2. *K y K' tienen el mismo tipo de homotopía simple.*
3. $S_K = S_{K'}$.

Así $\mathcal{F} = \{S_K | K \simeq L\}$ es la familia de conjuntos que forman parte de una partición de $Wh(L)$. La cardinalidad de $\mathcal{F}$ es exactamente la misma que el conjunto de clases de equivalencia de homotpías simples dentro de la misma clase de homotopía de L.

Demostración. (1)⇒ (2). Suponga que $S_K \cap S_{K'} \neq \varnothing$. Entonces hay equivalencias homotópicas $f : K \to L$ y $g' : K' \to L$ tales que $\tau(f) = \tau(g)$. Sea $\overline{g}$ la inversa homotópica a g, así $\overline{g}f : K \to K'$ por 4.4.0.4 y 4.4.0.1,

$$\tau(\overline{g}f) = \tau(\overline{g}) + \overline{g}_*\tau(f) = -\overline{g}_*\tau(g) + \overline{g}_*\tau(f) = 0$$

(2)⇒ (3) Suponga que $s : K' \to K$ es una equivalencia de homotopía simple. Si $\tau_0 \in S_K$ escoja $f : K \to L$ con $\tau(f) = \tau_0$. Entonces $fs : K' \to L$ y $\tau(fs) = \tau(f) + f_*\tau(s) = \tau(f) = \tau_0$. Así $S_K \subset S_{K'}$. Simétricamente $S_K = S_{K'}$. (3)⇒ (1) trivial, dado que por definición $S_K \neq S_{K'}$. □

Adoptemos la siguiente notación: $\upsilon_L = |\mathcal{F}|$, con $\mathcal{F}$ como en la proposición anterior. $\mathcal{E}(L)$= El grupo de clases de equivalencia (bajo equivalencias de auto-homotopías de L).

Note que $Wh_0(L)$ es un subgrupo de $Wh(L)$.

Proposición 4.5.0.3. $\upsilon_L \cdot |Wh_0(L)| \leq |Wh(L)|\upsilon_L \cdot |\mathcal{E}(L)|$.

Demostración. Si $g : K \to L$ es una equivalencia de homotopía fija entonces la correspondencia $f \to fg$ (f una equivalencia de auto-homotopía de L) induce una biyección de $\mathcal{E}(L)$ al conjunto $\mathcal{E}(K, L)$ de clases de equivalencia de equivalencias de homotopía de $K \to L$. Así por 4.4.0.1, $|S_K| \leq |\mathcal{E}(K, L)| = |\mathcal{E}(L)|$ para toda K, y la desigualdad $|Wh(L)| \leq \upsilon_L \cdot |\mathcal{E}(L)|$ se sigue de 4.5.0.2.

Por otro lado, si $g_0 : K \xrightarrow{\cong} L$ entonces, para cualquier f que induce la identidad en $Wh(L)$, tenemos $\tau(fg_0) = \tau(f) + \tau(g_0) \in S_K$. Entonces la clase lateral $\tau(g_0) + Wh_0(L)$ está contenida en S_K, y $|S_K| \geq |Wh_0(L)|$. Por lo tanto de 4.5.0.2, $|\upsilon_L \cdot |Wh_0(L)| \leq |Wh(L)|$. □

Proposición 4.5.0.4. *Suponga que L es un complejo CW. Entonces*

1. *Cada complejo homotópicamente equivalente a L tiene el mismo tipo de homotopía simple que L si y sólamente si $Wh(L) = \{\tau(f) | f \in \mathcal{E}(L)\}$.*
2. *Si $Wh(L)$ es infinito y $\mathcal{E}(L)$ es finito, hay una cantidad infinita de clases de equivalencia de homotopía simple dentro de la misma clase de homotopía de L.*

Demostración. Las afirmaciones en (1) son equivalentes por 4.5.0.2, cada una es equivalente a la afirmación $S_k = S_L$ para toda K.

(2) Se sigue trivialmente de 4.5.0.2 y 4.5.0.3.

□

4.6. Comentarios finales

El estudio de la teoría de homotopía simple y sus implicaciones va mucho más allá de lo aquí presentado.

Como se menciona en la introducción, uno de los resultados importantes de la teoría presentada es la clasificación de espacios lentes. Las clasificaciones por homología, homotopía y homotopía simple (completa) de los espacios lente, pueden encontrarse en [1, Cohen p. 85]. Esta última ocupa de definiciones generalizadas del $Wh(G)$, que son los K_S grupos definidos en 3.1.1, cálculo explicito de la torsión para una equivalencia homotópica y teoremas sobre cambios de anillo de la definición algebraica del $Wh(G)$. Además del uso de los siguientes resultados:

Proposición 4.6.0.1. *Si $h : K \to L$ es un homeomorfismo lineal a pedazos entonces $\tau(h) = 0$. Si $h : (K, K_0) \to (L, L_0)$ es un homeomorfismo lineal a pedazos de parejas, entonces $\tau(K, K_0) = 0$ si y solamente si $\tau(L, L_0) = 0$.*

Proposición 4.6.0.2. *Suponga que $h : K \to L$ es un homeomorfismo entre poliedros. Ya sea que (a) dim K = dim $L \leq 3$ o (b) K y L son variedades lineales a pedazos, entonces $\tau(h) = 0$.*

Ambas proposiciones están relacionadas con el teorema de la invarianza topológica de Whitehead que establece que si $h : K \to L$ es un homeomorfismo entre complejos CW finitos, entonces $\tau(h) = 0$. El cual es un resultado muy importante y altamente no trivial. La segunda proposición junto con el concepto llamado h-cobordismo permiten dar contraejemplos a la conjetura de Hauptvermutung.

La teoría de homotopía simple y otras herramientas no expuestas aquí son usadas para la demostración del teorema de h-cobordismo probado por Stephen Smale y por el cual recibió la Medalla Fields y es un resultado fundamental en la teoría de variedades de dimensiones altas. Para empezar, prueba casi inmediatamente la conjetura generalizada de Poincaré.

Muchas preguntas acerca del $Wh(G)$ para un G cualquiera permanecen abiertas y son trabajo de investigación actual.

Apéndice A

El sombrero de burro

En la introducción empezamos hablando sobre una definición de colapsabilidad en términos de complejos simpliciales (colapsabilidad simplicial). Dicha noción motiva cambiar de idea a un concepto más flexible para trabajar que son los complejos CW. La pregunta acerca de si los conceptos de colapsabilidad simplicial y colapsabilidad coinciden es respondida en un espacio muy particular llamado *"Sombrero de Burro"* (Dunce hat). El cual servirá de ejemplo para decir que efectivamente que ambos conceptos no son equivalentes.

El sombrero de burro D es usualmente pensado como un 2-simplejo Δ^2 con aristas definidas como sigue

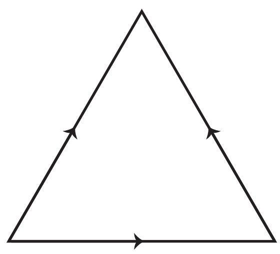


FIGURA A.1: Sombrero de burro.

Como una aplicación directa de 2.4.0.1 podemos mostrar que D tiene el mismo tipo de homotopía simple que un punto. Pues D puede ser pensado como un 1-complejo $\partial\Delta^2$ pegándole una 2-celda Δ^2 por el mapeo $\varphi : \partial\Delta^2 \to \partial\Delta^2$ la cual manda cada arista completamente alrededor de la circunferencia una vez indicada la dirección. Es fácil ver que este mapeo es homotópico a $1_{\partial\Delta^2}$

$$D = (\partial\Delta^2 \underset{\varphi}{\cup} \Delta^2) \wedge\!\!\searrow (\partial\Delta^2 \underset{I}{\cup} \Delta^2) = \Delta^2 \searrow 0$$

Sin embargo D no tiene caras libres y por tanto no hay colapsos simpliciales en D, lo que significa que no es colapsable (noción dada por simplejos). Se puede probar que es contráctil (mismo tipo de homotopia que un punto), es simplemente conexo (claro, al ser contráctil, además no es difícil demostrarlo usando teorema de Siefert Van-Kampen) y por lo recién explicado tiene el mismo tipo de homotopía simple que un punto.

Más detalles se pueden consultar en [10, Zeeman].

Apéndice B

Información sobre grupos de Whitehead

El contenido de la tesis se centra en dar las construcciones geométrica y algebraica de los grupos de Whitehead, sin embargo salvo para $G = 0$, nunca dimos un ejemplo de un cálculo sobre $Wh(G)$.

Proposición B.0.0.1. $Wh(\mathbb{Z}) = 0$.

Demostración. Pensaremos al grupo $\mathbb{Z}$ como $\{t^i | i \in \mathcal{Z}\}$ de manera que $\mathbb{Z}(\mathbb{Z})$ es el conjunto de sumas finitas $\sum n_i t^i$.Note que $\mathbb{Z}(\mathbb{Z})$ no tiene unidades no triviales ya que en la ecuación:

$$(at^\alpha + \dots bt^\beta)(ct^\gamma + \dots dt^\delta), (\alpha \leq \dots \leq \beta, \gamma \leq \dots \leq \delta, abcd \neq 0)$$

implica que $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 0$. Entonces $\alpha = \beta, \gamma = \delta$ y estas unidades son triviales. Suponga que $a_{ij}(t)$ una matriz de $(n \times n)$ es un representante de un elemento arbitrario A en $Wh(\mathbb{Z})$. Multiplicando cada renglón por una potencia suficientemente grande de t, podemos asumir que cada entrada de $a_{ij}(t)$ no tiene potencias negativas de t. Sea q la mayor potencia de t que ocurre en cualquier $a_{ij}(t)$. Si $q > 1$ entonces podemos obtener otro representante de A en el que la mayor potencia de t que ocurre es $q-1$. Escribiendo $(a_{ij}(t)) = b_{ij}(t) + (k_{ij}(t^q))$ (con $k_{ij} \in \mathbb{Z}$) tendríamos

$$(a_{ij}(t)) \sim \begin{pmatrix} (a_{ij}(t)) & t \cdot I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (b_{ij}(t)) & t \cdot I_n \\ (-k_{ij}t^{q-1})) & I_n \end{pmatrix}$$

Así procediendo por inducción sobre q podremos asumir que, para toda $i, j, a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}t(b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{Z})$. Así A puede ser representada por una matriz digamos de $m \times m$ con entradas lineales. Como $(a_{ij}(t))$ es no singular su determinante es una unidad la cual por el primer párrafo, es $\pm t^p$ para alguna p. Desarrollando el determinante se sigue que $det(b_{ij}) = 0$ o bien $det(c_{ij}) = 0$. Asumamos que el $det(b_{ij}) = 0$ (el tratamiento para el otro caso será similar). Como es bien conocido, operaciones enteras de renglón y columna en la matriz (b_{ij}) permiten transformarla en una matriz diagonal de la forma

$$\begin{pmatrix} 1-ab & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

cuya torsión es 0.

$$\begin{pmatrix} b'_{11} & & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & \\ & & & & b'_{kk} & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}, k < m$$

Realizando las mismas operaciones en la matriz $a_{ij}(t)$ esta lleva consigo a $a'_{ij}(t) = b'_{ij} + c'_{ij}t$, donde $b'_{ij} = 0$ a menos de que $i - j \leq K$. En particular el último renglón es de la forma

$$(c'_{m1}t \; c'_{m2}t \cdots c'_{mm}t)$$

Multiplicando el último renglón por t^{-1} y aplicando operaciones enteras de columna (i.e. multiplicando una columna por -1 o sumar un múltiplo entero de una columna a otra), la matriz $(a'_{ij}(t))$ puede ser transformada a una matriz de $n \times n$ $(a''_{ij}(t))$ con entradas lineales y el último renglón de la forma $(0 \; 0, \ldots 0, c''_{mm})$ para alguna $c''_{mm} \in \mathbb{Z}$ Pero el $det(a''_{ij}(t)) = \pm t^p$, entonces $c''_{mm} = \pm 1$, por lo tanto la última columna puede ser transformada a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y W es representada por una matriz de $(m-1) \times (m-1)$ con entradas lineales. Procediendo inductivamente, A puede ser representada por una matriz (a) de 1×1. Pero a es una unidad trivial, entonces $A = 0$. □

En el capítulo 2, demostramos que $Wh(G)$ para $G = \mathbb{Z}_5$ es no trivial. Se sabe que $Wh(\mathbb{Z}_5) = \mathbb{Z}$ su demostración involucra material que va más allá de los propósitos de la tesis. Puede encontrarse en [11, Higman].

Usando la construcción de unidades no triviales en $\mathbb{Z}_n$ se puede mostrar que $Wh(\mathbb{Z}_n) \neq 0$ con $n \neq 1, 2, 3, 4$ y 6 vea [1, Cohen p. 44]. Y cuando $n = 1, 2, 3, 4$ ó 6 entonces $Wh(\mathbb{Z}_n) = 0$ vea [1, Cohen p. 45].

Bibliografía

[1] M. M. Cohen, *A Course in Simple-Homotopy Theory.* Springer-Verlag, 1973.

[2] W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introuction.* Springer-Verlag, 1967.

[3] W. S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology.* Springer-Verlag, 1991.

[4] H. Schubert, *Topology.* Springer, 1968.

[5] A. Hatcher, *Algebraic Topology.* Cambridge university Press, 2002.

[6] J. J. Rotman, *An Introduction to Algebraic Topology.* Springer-Verlag, 1988.

[7] S. Lang, *Algebra.* Springer, 2002.

[8] G. W. Whitehead, *Homotopy theory.* Springe-Verlag, 1966.

[9] E. H. Spanier, *Algebraic Topology.* Springer-Verlag, 1966.

[10] E. C. Zeeman, "On the dunce hat," *Topology*, vol. 2, pp. 341–358, 1964.

[11] G. Higman, "The units of group-rings," *Proc. London Math. Soc. (2)*, vol. 46, pp. 231–248, 1940.