



UNIVERSIDAD MICHOCACA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

“EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO DEL CONTROL
ADMISIBLE”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:

PEDRO LUIS CÁSTULO CRUZ

ASESOR:
DR. ABDON EDDY CHOQUE RIVERO

MORELIA, MICHOACÁN, JULIO 2016



Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a Dios, a mi familia y amigos por apoyarme siempre. A mis padres Máxima y José gracias por el apoyo durante mi vida universitaria. A mis hermanos: Armando, José, Benjamin, Álvaro y María del Carmen, por apoyarme en todo momento, esto es por ustedes. A mi esposa Mercedes por la comprensión y paciencia durante el desarrollo de este trabajo. A mis amigos que me apoyaron y me brindaron su amistad: Blanca, Omar, Jaimes y Sebastian. A mi padrino Sergio Rodríguez Díaz por todos sus consejos y apoyo. A todos los profesores que fueron parte de mi formación y orientación, por la paciencia y tolerancia que me han tenido. Agradezco a mi asesor Dr. Abdon E. Choque Rivero, por su esfuerzo, dedicación y atención que prestó para la realización de esta tesis. Por su forma de trabajar, su paciencia y motivación se ha ganado mi admiración y confianza. Es muy agradable trabajar con usted, gracias por todo profesor. Además, quiero agradecer al IFM por el espacio que me brindó para el desarrollo de este trabajo. Por último, también quisiera agradecer a los sinodales: Dr. Fernando Garibay Bonales, Dr. Petr Zhevandrov Bolshakova, Dr. Joaquin Estévez Delgado y Dr. Francisco Javier Domínguez Mota, por el tiempo dedicado a mi tesis.

Resumen

Vamos a considerar el sistema lineal $\dot{x} = Ax + bu$, completamente controlable, donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, A es una matriz $n \times n$ cuyos elementos encima de la diagonal son iguales a 1 y los restantes ceros, b es un vector n -dimensional cuyo último componente es 1 y todos los demás 0. Hallar el control admisible $|u| \leq 1$, tales que la trayectoria fase $x(t)$ del sistema $\dot{x} = Ax + bu(t)$, partiendo desde el punto de fase $x(0) = x_0$, llegue al origen en tiempo $T > T_{min}$, es decir $x(T) = 0$.

En la presente tesis revisamos de manera detallada la sección [§4] y [§5] del libro [5] donde se estudia el principio del máximo admisible, en el trabajo hacemos la comparación del control óptimo $u_{opt}(t)$ respecto la rapidez y el control $u_{max}(t)$ que resulta de la aplicación del principio del máximo admisible. Estos dos controles toman valores ± 1 y ambos garantizan el traslado de un punto inicial $x(0) = x_0$ al origen en tiempo finito. El control óptimo $u_{opt}(t)$ realiza el traslado de $x(0) = x_0$ al origen en un tiempo mínimo posible (T_{min}). El control del máximo admisible $u_{max}(t)$ también realiza el traslado al origen en tiempo $T > T_{min}$.

Se dan ejemplos para $n = 2$ y $n = 3$, se comparan los tiempos de conmutación del control óptimo con respecto al control admisible.

Palabras clave: Control Admisible, Control óptimo, Función de Controlabilidad, Principio del Máximo Admisible, sistema canónico.

Abstract

Let us consider the linear system $\dot{x} = Ax + bu$, fully controllable, where $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, A it is a matrix $n \times n$ whose elements above the diagonal are equal to 1 and the remaining zeros, b is an n -dimensional vector whose last component is 1 and all others 0. Find admissible control $|u| \leq 1$, such that the trajectory phase $x(t)$ of the system $\dot{x} = Ax + bu(t)$, starting from the phase point $x(0) = x_0$, moves the origin in time $T > T_{min}$, i.e. $x(T) = 0$.

In this thesis we reviewed in detail the section §4 and §5 of the book [5] where the beginning of the admissible maximum is studied. We compare the optimal control $u_{opt}(t)$ relative speed and the $u_{max}(t)$ Control resulting from the application of the principle of the permissible maximum. Recall that these two controls take values ± 1 and both guarantee the transfer of an initial point $x(0) = x_0$ the origin in finite time. The optimal control $u_{opt}(t)$ makes the transfer of $x(0) = x_0$ the origin in a minimum possible time T_{min} . The maximum permissible control $u_{max}(t)$ also performs the transfer origin $T > T_{min}$.

Examples for $n = 2$ and $n = 3$ are given, the switching times of optimal control with respect to the permissible control compared.

Keywords: Admissible Control, Optimal Control, Controllability Function, Principle of Maximum allowable, canónico system.

*Dedicado a mi
familia y amigos*

Índice general

Agradecimientos	iii
Resumen	v
Abstract	vii
Índice general	xi
1. Introducción	1
1.1. Sistemas controlables	1
1.2. Estabilidad en tiempo finito e infinito	2
1.3. Función de controlabilidad	2
1.4. Principio del máximo admisible	3
1.5. Resultado de la tesis	4
2. Sistemas controlables	5
2.1. Controlabilidad de sistemas de control	5
2.2. Controlabilidad de sistemas lineales de control EDO	6
2.3. Principio de Máximo de Pontryagin	7
2.4. Principio del máximo para la optimalidad en sentido del tiempo	9
2.5. Principio del máximo para la optimalidad en sentido del tiempo para sistemas lineales	11
2.6. Determinación de las trayectorias óptimas del punto x_0 al origen	12
2.6.1. Fórmula para determinar el tiempo de traslado del punto x_0 al origen	16
2.6.2. Ejemplo 1	18
3. Estabilización en tiempo finito e infinito	21
3.1. Estabilización	21
3.2. Estabilización en tiempo finito. Problema de síntesis	23
3.2.1. Función de controlabilidad	24
3.2.2. Construcción de $\theta(x)$ en forma Integral	26
3.2.3. Problema de síntesis para el sistema canónico, familia de controles posicionales admisibles	31
3.2.4. Construcción de la función de controlabilidad	32
3.2.5. Solución al problema de síntesis	34

4. Principio del máximo admisible	43
4.1. Principio del máximo admisible para el sistema canónico	44
4.2. Determinación de las trayectorias óptimas del punto x_0 al origen	52
4.2.1. Fórmula para determinar el tiempo de traslado del punto x_0 al origen	53
4.2.2. Ejemplo para $n = 2$	59
4.2.3. Ejemplo para $n = 3$	61
4.2.4. Continuación del ejemplo para $n = 2$	64
A.	67
A.1. Teorema de Picard	67
A.2. Formas cuadráticas	67
A.3. Resultante	69
A.4. Discriminante	70
A.5. Intersección de multiplicidad	71
A.6. Método Multiplicadores de Lagrange	71
A.7. Criterio de Routh-Hurwitz	72
B.	75
B.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	75
B.2. Método indirecto de Lyapunov.	76
B.3. Método directo de Lyapunov.	77
Bibliografía	81

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo presentamos un breve resumen sobre el contenido del presente trabajo. En la primera sección describimos los sistemas controlables de la forma (1.1), explicando algunas nociones de controlabilidad para sistemas lineales. En la siguiente sección estudiaremos el principio de máximo de Pontryagin (PMP) para la optimalidad en sentido del tiempo, en particular para sistemas lineales, dando un ejemplo para el caso $n = 2$. Mencionaremos en la sección siguiente algunos fundamentos de la teoría de estabilidad en tiempo finito e infinito, posteriormente revisaremos la noción de controlabilidad, así como su construcción en forma integral para determinar la función $u(x(t))$ llamada control del sistema. Finalmente introduciremos el principio de máximo admisible para encontrar el control admisible, y la trayectoria fase $x(t)$ para el sistema canónico. Cabe señalar que se realizará la comparación del control óptimo $u_{opt}(t)$ con respecto del control admisible $u_{max}(t)$ en sentido del tiempo, donde los dos controles garantizan el traslado de $x(0) = x_0$ al origen en tiempo finito, encontrando así que el control admisible $u_{max}(t)$ realiza el traslado en un tiempo T mayor al tiempo mínimo T_{min} del control óptimo $u_{opt}(t)$, es decir $T > T_{min}$.

1.1. Sistemas controlables

En la teoría de control, el problema a considerar es el siguiente: en el momento inicial de tiempo t_0 un objeto se encuentra en la posición de fase x_0 , se requiere encontrar una función continua a trozos $u(t)$ llamado control del sistema, tal que traslade el objeto a una posición final predeterminada x_1 , es decir encontrar la trayectoria fase del movimiento del objeto considerado.

En este trabajo los objetos principales de estudio son los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, tales sistemas se llaman sistemas controlables de la forma:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \quad (1.1)$$

donde f está definido en $D \subset \mathbb{R}^{n+r} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$. El conjunto $\mathbb{R}^n$ se llama *espacio fase* de (1.1), cada elemento $x \in \mathbb{R}^n$ recibe el nombre de *vector fase* y $\mathbb{R}^r$ es el espacio de los controles, $u \in \mathbb{R}^r$ representa el parámetro que representa el control del sistema.

Al considerar problemas de llevar un sistema de estado inicial arbitrario al origen mientras se minimiza un índice de desempeño, en nuestro caso tiempo, la controlabilidad del sistema es una condición necesaria para la existencia de solución.

1.2. Estabilidad en tiempo finito e infinito

Con ayuda del método introducido por el matemático ruso Alexander M. Lyapunov determinaremos que el sistema de ecuaciones diferenciales es asintóticamente estable, sin necesidad de calcular su solución, haciendo hincapié en las propiedades de los puntos de equilibrio.

Un sistema es estable según Lyapunov, si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para cada solución $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema (1.1) cuyos valores cumplan las condiciones

$$\|x_i(t) - \rho_{i0}\| < \delta \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.2)$$

se verifica la desigualdad

$$\|x_i(t) - \rho_i(t_0)\| < \epsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.3)$$

para todos los valores $t \geq t_0$.

Si, en las condiciones (1.2), además del cumplimiento de (1.3), se cumple la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - \rho_i(t_0)\| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.4)$$

la solución $\rho_i(t_0)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) se llama asintóticamente estable.

En términos de los valores propios el sistema $\dot{x} = Ax$ es asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa.

El problema es estabilizar el sistema controlable

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1.5)$$

en tiempo finito, este problema es conocido como el problema de síntesis de controles admisibles, el cual consiste en construir un conjunto de controles posicionales $u(x)$ tales que $u(x)$ sea continua en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y cumpla con la restricción $|u| \leq d$. La trayectoria del sistema (1.1) que comienza en $x(0) = x_0$ termine en el origen en tiempo finito $T(x) < \infty$, y el sistema sea asintóticamente estable en el origen.

1.3. Función de controlabilidad

Un método para resolver el problema de la sección anterior es la función de controlabilidad sugerido por V.I. Korobov en 1979, el cual se basa en la construcción de una función

$\theta(x)$ donde se construye el control posicional buscado $u(x) = \tilde{u}(x, \theta(x))$. La función $\theta(x)$ es una función de tipo Lyapunov.

Fué sugerido en [8] una forma integral suficientemente general de construcción de la función de controlabilidad $\theta(x)$ y el control $u(x)$ que resuelve el problema de síntesis para el sistema lineal completamente controlable

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \{u : \|u\| \leq d\} \subset \Omega, \quad (1.6)$$

donde A es una matriz $n \times n$ y b es un vector. En esta sección daremos una breve descripción de la forma integral.

Sea la matriz

$$N(\theta) := \int_0^\theta \left(1 - \frac{t}{\theta}\right) e^{-At} b b^* e^{-A^* t} dt. \quad (1.7)$$

Para todo $x \in Q \setminus \{0\}$ ($Q := \{x : \|x\| \leq R\}$), la ecuación

$$2a_0\theta = (N^{-1}(\theta)x, x) \quad (1.8)$$

tiene solución única positiva continuamente diferenciable. Definiendo $\theta(x)$ en $x = 0$ como $\theta(0) = 0$, la función $\theta(x)$ resulta ser continua en cero. Existe una constante $C = 0$ tal que el conjunto $Q = \{x : \|x\| \leq C\}$ es acotado y $Q \subset \text{int } Q^1$ ($Q^1 = \{x : \|x\| \leq R\}$). Se propone la función $u(x, \theta(x))$ como el control

$$u(x) := -\frac{1}{2} b^* N^{-1}(\theta(x)) x, \quad (1.9)$$

que resuelve el problema de síntesis.

1.4. Principio del máximo admisible

Estudiaremos el principio del máximo admisible considerando el sistema canónico

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}, \quad (1.10)$$

bajo la suposición de que Ω es compacto. Definimos la función de control $\theta(x)$ mediante

$$2a_0\theta = (N^{-1}\theta x, x). \quad (1.11)$$

Definimos la matriz

$$N(\theta) := \int_0^\theta \left(1 - \frac{t}{\theta}\right) e^{-At} b b^* e^{-A^* t} dt. \quad (1.12)$$

Definición 1.4.1. El control $\bar{u}(x)$ de la relación

$$(\psi(x), \varphi(x, \bar{u}(x))) = \max_{u \in \Omega} (\psi(x), \varphi(x, u(x))), \quad x \neq 0, \quad \bar{u}(0) \in \Omega \quad (1.13)$$

que llamamos el control del principio del máximo admisible.

Proponemos el control $u(x)$ mediante

$$u(x) = -\frac{1}{2}b^*N^{-1}\theta(x)x. \quad (1.14)$$

De esta manera para encontrar el control $u(x_1, x_2)$ encontramos la raíz positiva de $\theta(x_1, x_2)$ de la ecuación (1.11) y después encontramos $u(x)$.

1.5. Resultado de la tesis

En este trabajo hacemos la comparación del control óptimo $u_{opt}(t)$ respecto la rapidez y el control $u_{max}(t)$ que resulta de la aplicación del principio del máximo admisible.

Recordemos que estos dos controles toman valores ± 1 y ambos garantizan el traslado de un punto inicial $x(0) = x_0$ al origen en tiempo finito.

1. El control óptimo $u_{opt}(t)$ realiza el traslado de $x(0) = x_0$ al origen en un tiempo mínimo posible T_{min} .
2. El control del máximo admisible $u_{max}(t)$ también realiza el traslado al origen en $T > T_{min}$.

Cabe señalar que a diferencia del control óptimo, el control del máximo admisible se construye mediante una función de tipo Lyapunov.

Capítulo 2

Sistemas controlables

En la teoría de control los objetos principales son los sistemas de ecuaciones que dependen de un parámetro de control u , por ejemplo, sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), tales sistemas se llaman **sistemas controlables**. Los objetos controlables se ven literalmente en nuestra vida diaria, por ejemplo un refrigerador, un automóvil, etc. Lo común en todos estos objetos es que podemos de una u otra forma influir en su conducta, es decir podemos controlarlos. Nosotros consideramos modelos matemáticos de procesos controlables y no así de objetos reales.

2.1. Controlabilidad de sistemas de control

El objeto de estudio de la teoría de control es un sistema de la forma:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad (2.1)$$

donde f está definido en $D \subset \mathbb{R}^{n+r} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$. El conjunto $\mathbb{R}^n$ se llama *espacio fase* de (2.1), cada elemento $x \in \mathbb{R}^n$ recibe el nombre de *vector fase* y $\mathbb{R}^r$ es el espacio de los controles, $u \in \mathbb{R}^r$ representa el parámetro que representa el control del sistema. La solución $x = \tau(t)$ es solución de (2.1) si $\tau(t)$ (*trayectoria fase*) satisface (2.1), es continua y diferenciable en nuestro intervalo I .

Definición 2.1.1. Si para el par de puntos $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ existe una función continua a trozos $u(t)$ definida en $[t_0, T]$ tal que la solución de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u(t)), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Es tal que satisface $x(T) = x_1$, entonces se dice que el control $u(t)$ traslada o lleva x_0 en x_1 en tiempo $T - t_0$.

Definición 2.1.2. (Completamente controlable) El sistema de control (2.2) se llama completamente controlable, denotado CC, si para todo $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ existe un control admisible $u(t)$ definida en $[t_0, T]$ tal que traslada x_0 a x_1 .

Definición 2.1.3. Sea A una matriz de dimensión $n \times n$. La matriz exponencial e^{At} se define mediante la relación

$$e^{At} := \sum_0^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j. \quad (2.3)$$

La matriz está bien definida en virtud de la desigualdad $\|e^{At}\| \leq e^{t\|A\|}$.

2.2. Controlabilidad de sistemas lineales de control EDO

Consideremos el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad (2.4)$$

donde A y b son matrices constantes, de dimensiones $n \times n$ y $n \times r$ respectivamente. Sean definidas las siguientes matrices:

$$Q := (b, Ab, \dots, A^{n-1}b), \quad (2.5)$$

de dimensión $n \times n$, denominado matriz de Kalman, y la matriz $n \times n$

$$N(T) := \int_{t_0}^T e^{-At} b b^* e^{-A^*t} dt. \quad (2.6)$$

Teorema 2.2.1. (*Criterio de controlabilidad de sistemas lineales constantes*)
Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. El sistema (2.4) es completamente controlable en $[t_0, T]$.
2. $\text{Rango}(Q) = n$.
3. $N(t_0, T) > 0$.

Además la función

$$u(t) = b^* e^{-A^*t} N^{-1}(t_0, T) (e^{-AT} x_1 - e^{-At_0} x_0), \quad (2.7)$$

es uno de los posibles controles que trasladan $x(t_0) = x_0$ a $x(T) = x_1$ en tiempo $T - t_0$ mediante el control $u(t)$.

Lema 2.2.2. Todo sistema lineal completamente controlable de la forma (2.4) es equivalente al sistema lineal

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{b}u, \quad (2.8)$$

donde:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

y los números $a_1, a_2, \dots, a_n$ son los coeficientes del polinomio característico de la matriz A :

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n - a_n \lambda^{n-1} - \dots - a_1.$$

Para la prueba ver [17, pág. 23].

Definición 2.2.3. El sistema (2.4) se llama 0-controlable en $D \subset \mathbb{R}^n$ en tiempo T , si para cualquier $x \in D$ existe un control admisible $u : [0, T] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^r$ tal que traslada x al origen en tiempo T .

2.3. Principio de Máximo de Pontryagin

El principio máximo de Pontryagin se utiliza en la teoría de control óptimo para encontrar el mejor control posible que lleve a un sistema de control de un estado a otro, especialmente en la presencia de restricciones para los controles de estado o de entrada. Fue formulado en 1956 por el matemático ruso Lev Semenovich Pontryagin.

El objeto de control se describe mediante el sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad u = (u_1, \dots, u_r). \quad (2.9)$$

Suponemos que el control u es un conjunto acotado U de $\mathbb{R}^r$. Asumimos que $f(x, u)$ es continuo respecto de u, x , y posee derivadas parciales respecto de $x_j, j = 1, \dots, n$. Llamaremos controles admisibles a funciones u continuas a trozos que toman valores en el conjunto U . El problema de control óptimo tiene el siguiente planteamiento:

Entre todos los controles admisibles, que trasladan un punto de partida x^0 al punto x^1 , si tal control existe, hallar un control tal que

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u) dt, \quad (2.10)$$

tenga alcance mínimo.

f_0 es continuo respecto de x y continuo respecto a u . Consideremos una nueva coordenada x_0 :

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x, u), \quad (2.11)$$

añadiendo (2.11) a (2.9) tenemos

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, u), \quad (2.12)$$

donde $\dot{\bar{x}} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $\bar{f}(\bar{x}, u) = (f_0(\bar{x}, u), \dots, f_n(\bar{x}, u))$. Notemos que $\bar{f}(\bar{x}, u)$ no depende de x_0 . Sea $\bar{x}^0 = (0, x^0)$ en espacio fase $n + 1$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sea $u(t)$ un control admisible y $x(t)$ su trayectoria correspondiente que satisface

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1.$$

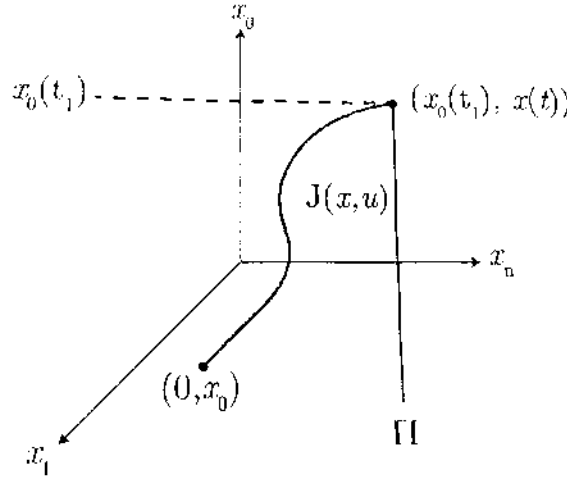
De (2.11)

$$x_0(t) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(\tau), u(\tau)) d\tau,$$

para $t = t_1$

$$x_0(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(\tau), u(\tau)) d\tau = J(x, u).$$

De esta manera, en $\bar{x}$ la trayectoria fase $\bar{x}(t)$ que corresponde al control $u(t)$ pasa en $t = t_0$ por el punto $(0, x^0)$ y para $t = t_1$, por el punto $\bar{x}^1 = (J, x^1)$. Denotemos mediante Π la recta paralela al eje x_0 que pasa por $(0, x^1)$.



Consideremos funciones auxiliares $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ que satisfacen

$$\dot{\psi} = - \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j(\bar{x}, u)}{\partial x_i} \psi_j, \quad i = 0, \dots, n. \quad (2.13)$$

Este sistema se llama adjunto al sistema (2.12). Si se escoge un control $u(t)$ en $[0, t_1]$ se puede hallar la trayectoria $\bar{x} : \bar{x}(t_0) = \bar{x}^0$. Colocando en (2.13) tenemos

$$\dot{\psi} = - \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j(\bar{x}(t), u(t))}{\partial x_i} \psi_j, \quad i = 0, \dots, n. \quad (2.14)$$

El sistema (2.13) satisface las condiciones de existencia y unicidad (2.12) y (2.13) se puede unir mediante la función

$$H(\bar{\psi}, \bar{x}, u) = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(\bar{x}, u) = (\bar{\psi}, \bar{f}(\bar{x}, u)). \quad (2.15)$$

Donde $\bar{\psi} = (\psi_0, \dots, \psi_n)$, entonces (2.12) y (2.13) se puede escribir como

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad i = 0, \dots, n, \quad (2.16)$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 0, \dots, n. \quad (2.17)$$

Notemos que las funciones vectoriales $\bar{x}(t)$ y $\bar{\psi}(t)$ son continuos y son continuos diferenciables excepto en los puntos donde el control admisible $u(t)$ tiene saltos. Para los valores fijos de $\bar{x}$ y $\bar{\psi}$ la función H es una función de u .

Denotemos

$$\mu(\bar{\psi}, \bar{x}) = \sup_{u \in U} H(\bar{\psi}, \bar{x}, u), \quad \text{o} \quad \mu(\bar{\psi}, \bar{x}) = \max_{u \in U} H(\bar{\psi}, \bar{x}, u),$$

si el máximo se alcanza.

2.4. Principio del máximo para la optimalidad en sentido del tiempo

En este caso el funcional es:

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0, \quad f_0(x, u) \equiv 1. \quad (2.18)$$

Formulemos el teorema del principio del máximo cuando en calidad de costo, el funcional J lo escogemos en términos de la rapidez. Escribimos la función $H(\bar{\psi}, \bar{x}, u)$ tomando en cuenta (2.18):

$$H(\bar{\psi}, \bar{x}, u) = \psi_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(x, u), \quad (2.19)$$

consideremos el vector n -dimensional

$$\psi(t) = (\psi_1, \dots, \psi_n),$$

y la función

$$H(\psi, x, u) = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(x, u). \quad (2.20)$$

Donde

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.21)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.22)$$

Denotemos

$$M(\psi, x) = \sup_{u \in U} H(\psi, x, u) \quad \text{o} \quad \max_{u \in U} H(\psi, x, u).$$

Es claro que

$$M(\psi, x) = \mu(\bar{\psi}, x) - \psi_0. \quad (2.23)$$

Tomando en cuenta las notaciones introducidas, el teorema del principio del máximo se formula de la siguiente manera:

Teorema 2.4.1. *Sea $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ algún control admisible que lleve x_0 a x_1 y $x(t)$ su trayectoria fase correspondiente. Para que $u(t)$ sea el control óptimo en sentido de la rapidez, es necesario que exista $\psi(t) \neq 0$ que satisface (2.22) tal que:*

1. *para todo $t \in [t_0, T]$, la función H alcanza su máximo:*

$$H(\psi(t), x(t), u) = M(\psi(t), x(t)). \quad (2.24)$$

2. *En el tiempo finito t_1 , se satisface la condición*

$$M(\psi(t_1), x(t_1)) \geq 0. \quad (2.25)$$

Observación 2.4.2. *Como en el caso general si $\psi(t), x(t)$ y $u(t)$ satisfacen (2.21), (2.22) y (2.24) la función $M(\psi(t), x(t))$ es constante en $[t_0, t_1]$. Por eso cualquier verificación de (2.25) es válido en $t \in [t_0, t_1]$.*

Observación 2.4.3. *Las variables $\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ se determinan salvo una constante. Ya que $\psi = \text{constante}$, entonces para el caso $\psi_0 \neq 0$ se puede tomar $\psi_0 = -1$. De acuerdo al teorema antes mencionado*

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = \mu(\psi(t), x(t)) = 1,$$

sobre la trayectoria óptima.

2.5. Principio del máximo para la optimalidad en sentido del tiempo para sistemas lineales

Consideremos el sistema (2.4) donde $u \in U \subset \mathbb{R}^r$. Asumimos que (2.4) es completamente controlable respecto de cada u_j . Tales sistemas se llaman *sistemas normales*. Para el sistema (2.4) ser normal, es necesario y suficiente que las matrices

$$G_j = (b_j, Ab_j, \dots, A^{n-1}b_j), \quad j = 1, \dots, r,$$

sean invertibles. Aquí $b_j (j = 1, \dots, r)$ son las columnas de la matriz b . Notemos que cada sistema normal es completamente controlable. Sin embargo, cada sistema completamente controlable puede no ser normal. Sea que el conjunto de control U esté dado por $\{|u_j| \leq 1, \quad j = 1, \dots, r\}$.

El hamiltoniano H para el sistema lineal (2.4) tiene la forma:

$$H(\psi, x, u) = \psi^T Ax + \psi^T bu = \sum_{i=1}^n \psi_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^r b_{ik} u_k \right). \quad (2.26)$$

El sistema adjunto al sistema (2.4) es:

$$\dot{\psi} = -A^T \psi. \quad (2.27)$$

De acuerdo al teorema 2.4.1, H alcanza su máximo en $u(t)$. Ya que H depende de u solamente en $\psi^T bu$, entonces el control óptimo debe maximizar $\psi^T bu$, tenemos,

$$\psi^T bu = (\psi, bu) = (b^T \psi, u) = \sum_{k=1}^r u_k \sum_{i=1}^n b_{ik} \psi_i.$$

Cada u_k en esta suma cambia independientemente de los otros $u_j, j \neq k$. El máximo de cada sumando se alcanza en:

$$u_k = \text{sign} \sum_{i=1}^n b_{ik} \psi_i \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.28)$$

De esta manera, el control óptimo es una función constante a trozos que toma valores en los lados del cubo $|u_i| \leq 1, i = 1, \dots, n$, es decir u_r toma valores 1 o -1 de acuerdo al valor de

$$\sum b_{ik} \psi_i(t).$$

Se puede demostrar que si el sistema (2.4) es normal, entonces la relación (2.25) determina de manera unívoca, para cada vector $\psi(t)$ distinto de cero, la función control $u_k(t)$, además esta función tiene un número finito de conmutaciones.

2.6. Determinación de las trayectorias óptimas del punto x_0 al origen

Consideremos el siguiente sistema canónico

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u,\end{aligned}\tag{2.29}$$

donde u es una función continua a trozos, con la condición $|u| \leq 1$.

El problema a considerar es el siguiente:

Se requiere llegar al origen $(0,0)$, a partir de un punto fase x_0 en el menor tiempo posible, es decir, en un tiempo óptimo T_{min} .

La función H (Hamiltoniano) en este caso tiene la forma

$$H = \Psi_1 x_2 + \Psi_2 u.\tag{2.30}$$

Ahora, las condiciones correspondientes para el máximo son:

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \text{ entonces } \Psi_1 = \kappa_1, \\ \dot{\Psi}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\Psi_1, \text{ entonces } \Psi_2 = \kappa_2 - \kappa_1 t,\end{aligned}$$

donde κ_1 y κ_2 son constantes.

Tomando en cuenta la condición $-1 \leq u \leq 1$ tenemos que

$$u(t) = \text{sign } \Psi_2 = \text{sign } (\kappa_2 - \kappa_1 t).\tag{2.31}$$

Deducimos a partir de (2.31) que cada control óptimo $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, es una función continua a trozos, que toma los valores ± 1 , y tiene un máximo de dos intervalos en los que es constante (ya que los cambios de la función lineal $\kappa_2 - \kappa_1 t$ cambia a lo mucho una vez en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$.)

Por el contrario, si cualquiera de las funciones $u(t)$ puede obtenerse de la igualdad (2.31) para algunos valores de κ_2 y $\kappa_1 t$. Para el intervalo de tiempo en el que $u \equiv 1$, tenemos a partir de (2.29) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= 1.\end{aligned}$$

Entonces tenemos

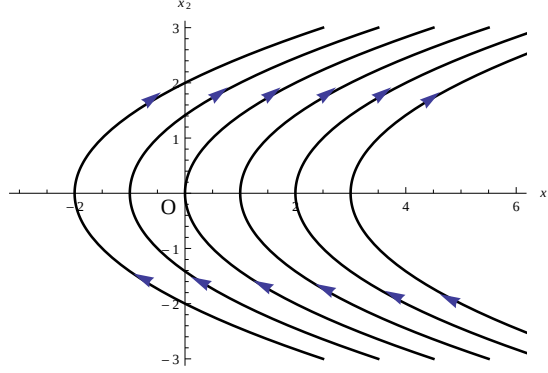
$$\begin{aligned}x_2 &= t + s_1, & x_1 &= \frac{t^2}{2} + s_1 t + s_2 \\ x_1 &= \frac{1}{2}(t^2 + 2s_1 t + s_2 + 4s_1^2) - 2s_1^2 + s_2 \\ x_1 &= \frac{1}{2}(t + s_1)^2 + s_2 - 2s_1^2.\end{aligned}$$

Como s_1 y s_2 son constantes de integración tenemos

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + d_0, \quad (2.32)$$

donde $d_0 = s_2 - 2s_1^2$ es constante.

Por lo tanto, la porción de la trayectoria fase para la que $u \equiv 1$ es un arco de la parábola (2.32). La familia de parábolas (2.32) se muestra en la gráfica 2.1.



Gráfica 2.1: $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + d_0$

Análogamente, para el intervalo de tiempo en el que $u \equiv -1$, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -1. \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} x_2 &= -t + s_4, & x_1 &= -\frac{t^2}{2} + s_4 t + s_5 \\ x_1 &= -\frac{1}{2}(t^2 - 2s_4 t + s_4^2) + \frac{1}{2}s_4^2 + s_5 \\ x_1 &= -\frac{1}{2}(-t + s_4)^2 + \frac{1}{2}s_4^2 + s_5. \end{aligned}$$

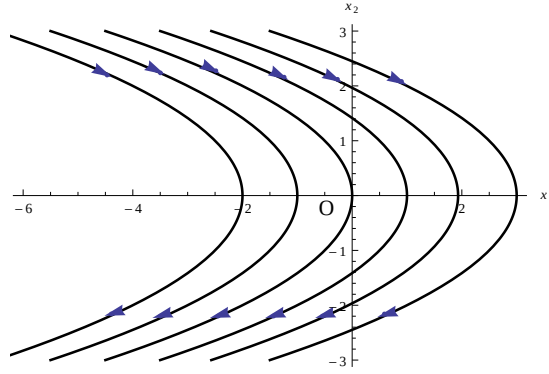
Como s_4 y s_5 son constantes de integración tenemos

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + d'_0, \quad (2.33)$$

donde $d'_0 = s_5 - \frac{1}{2}s_4^2$ es constante.

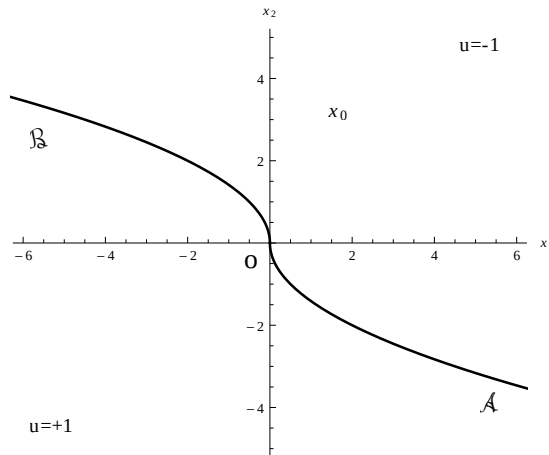
La familia de parábolas (2.33) se muestra en la gráfica 2.2.

Los puntos de fase se mueven hacia arriba a lo largo de parábolas (2.32) (desde $\dot{x}_2 = u = +1$), y hacia abajo a lo largo de las parábolas (2.33) ($\dot{x}_2 = -1$).



Gráfica 2.2: $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + d'_0$

Como se indicó anteriormente, cada control óptimo $u(x(t))$ es una función continua a trozos, con la condición ± 1 , y que tiene como máximo dos intervalos en los que es constante. Si $u(t)$ es inicialmente igual a 1, y luego a -1, la trayectoria de fase se compone de dos segmentos adyacentes parabólicos. El segundo de estos segmentos se encuentra en la parábola definida por (2.32), que pasa por el origen (ya que la trayectoria deseada debe conducir al origen), si primero tenemos $u = -1$ y después $u = +1$, la curva de fase es reemplazado por uno que es simétrico con respecto al origen. La gráfica 2.4 representa toda la familia de trayectorias de fase, $\mathcal{AO}$ es el arco de la parábola $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2$ en la mitad del semiplano inferior; $\mathcal{BO}$ es el arco de la parábola $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2$ en la mitad del semiplano superior).

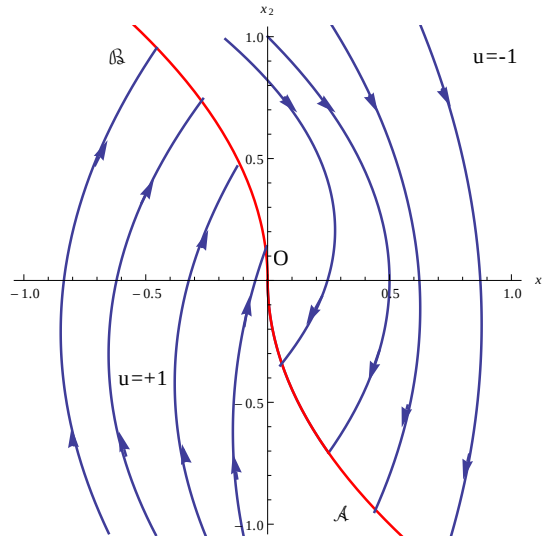


Gráfica 2.3: $x_1 + \frac{1}{2} | x_2 | x_2 = 0$

El punto fase se mueve a lo largo de un arco de la parábola (2.33) que pasa por el punto inicial x_0 , si x_0 está por encima de la curva de $\mathcal{AOB}$; y se mueve a lo largo del arco $\mathcal{AO}$. En otras palabras, si la posición inicial x_0 está por encima de la curva de $\mathcal{AOB}$, el punto

fase debe moverse bajo la influencia del control $u = -1$ hasta que alcanza el arco OA . En el instante en que llega, el valor de u cambia a $+1$ y permanece en este valor hasta que el punto fase alcanza el origen. Sin embargo, si la posición inicial x_0 está por debajo de AOB , u debe ser igual a $+1$ hasta el momento en que llega al arco BO , y en el momento donde el valor de u cambia a -1 , hasta alcanzar el origen.

Así, de acuerdo con el teorema 2.4.1, sólo las trayectorias descritas anteriormente son óptimas. Por otra parte, se puede observar a partir de la investigación anterior donde en cada punto fase sólo hay una trayectoria que lleva al origen que puede ser óptima. Se podría estar seguro de que existe siempre una trayectoria óptima para cualquier punto inicial x_0 , y podríamos decir con confianza que todas las trayectorias que hemos encontrado son óptimas. Por lo tanto, las trayectorias que hemos encontrado son óptimas, ver gráfica 2.4, entonces no hay otras trayectorias óptimas que nos trasladen al origen. Así la solución del problema óptimo se puede interpretar como sigue:



Gráfica 2.4: Todas las trayectorias $x(t)$ óptimas

Llamaremos $\nu(x_1, x_2) = \nu(x)$ la función en el plano x_1x_2 de la siguiente manera

$$\nu(x) = \begin{cases} +1 & \text{por debajo de la curva de } AOB, \text{ y el arco } OA, \\ -1 & \text{Por encima de la curva de } AOB, \text{ y en el arco } BO. \end{cases}$$

A continuación, en cada trayectoria óptima $x(t)$ el valor del parámetro de control en un instante arbitrario t es igual a $\nu(x(t))$, es decir, que es igual al valor de la función de ν en que el punto fase x_0 se está moviendo a lo largo de la trayectoria óptima

$$u(t) = \nu(x(t)),$$

y se encuentra en el momento t . Esto significa que si sustituimos la variable u por la función $\nu(x)$ en el sistema (2.29), obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \nu(x_1, x_2),\end{aligned}\tag{2.34}$$

cuya solución para un estado inicial x_0 arbitrario produce una trayectoria fase óptima que traslada al origen.

2.6.1. Fórmula para determinar el tiempo de traslado del punto x_0 al origen

Sea que el punto x_0 repose encima de la línea $\mathcal{AOB}$ (ver gráfica 2.3). Denotemos las coordenadas de este punto mediante (x_1^0, x_2^0) . Para que la parábola (2.33) pase a través del punto x_0 , es necesario y suficiente que las coordenadas de este punto satisfagan la ecuación (2.33), de donde tenemos

$$d'_0 = x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2.$$

De esta manera, la parábola (2.33), que pasa por el punto x_0 se representa por la ecuación

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2\tag{2.35}$$

El punto de conmutación $\mathcal{C}$, representado en la gráfica 2.4, puede ser encontrado como punto de intersección de la parábola (2.35) con la línea $\mathcal{AO}$ (ver gráfica 2.5), cuya ecuación tiene la forma

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2.\tag{2.36}$$

Para hallar el punto de intersección es necesario resolver las ecuaciones (2.35) y (2.36) simultáneamente, como un sistema de ecuaciones. Sustrayendo la relación (2.36) de (2.35), tenemos $x_2^2 = x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2$, de donde $x_{2\mathcal{C}} = \pm\sqrt{x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2}$. Para el punto $\mathcal{C}$ es necesario tomar el signo menos, ya que en punto $\mathcal{C}$ reposa en la línea $\mathcal{AO}$, es decir, debajo del eje de las abscisas. De esta manera encontramos la ordenada del punto $\mathcal{C}$.

$$x_{2\mathcal{C}} = -\sqrt{x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2}.\tag{2.37}$$

Para encontrar la primera coordenada del punto $\mathcal{C}$ lo que hacemos es sustituir (2.37) en (2.35) de donde

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{1}{2}\left(x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2\right) + x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2 = -\frac{1}{2}x_1^0 - \frac{1}{4}(x_2^0)^2 + x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2 \\ &= \frac{2}{4}x_1^0 + \frac{1}{4}(x_2^0)^2 = \frac{1}{4}(2x_1^0 + (x_2^0)^2).\end{aligned}$$

Entonces

$$x_{1\mathcal{C}} = \frac{1}{4} (2x_1^0 + (x_2^0)^2). \quad (2.38)$$

Durante el movimiento del punto x_0 hasta el punto $\mathcal{C}$ tenemos $u \equiv -1$, entonces la segunda de las ecuaciones (2.29) tiene la forma $\dot{x}_2 = -1$ y por eso, integrando, obtenemos (mediante α se denota como antes el momento de conmutación, es decir el momento de paso de la trayectoria a través del punto $\mathcal{C}$).

$$x_{2\mathcal{C}} - x_2^0 = \int_{t_0}^{\alpha} \dot{x}_2 dt = \int_{t_0}^{\alpha} (-1) dt = t_0 - \alpha.$$

Análogamente, durante el movimiento del punto $\mathcal{C}$ al origen de coordenadas tenemos $u = 1$ y por eso $\dot{x}_2 = +1$

$$-x_{2\mathcal{C}} = 0 - x_{2\mathcal{C}} = \int_{\alpha}^{t_1} \dot{x}_2 dt = \int_{\alpha}^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 - \alpha.$$

Sustrayendo la primera relación de la segunda, tenemos $x_2^0 - 2x_{2\mathcal{C}} = t_1 - t_0$. Pero $t_1 - t_0$ es tiempo de movimiento a través de la trayectoria óptima considerada desde el punto x_0 al origen de coordenadas es decir, el tiempo $T^p(x_0)$ de movimiento óptimo. Así,

$$T^p(x_0) = x_2^0 - 2x_{2\mathcal{C}} = x_2^0 + 2\sqrt{x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2}. \quad (2.39)$$

Esta fórmula fue deducida para los puntos x_0 situados encima de la línea $\mathcal{AOB}$. Es fácil ver, sin embargo, que esta fórmula (y los razonamientos, con ayuda de los cuales fue deducida) permanece en vigor en el caso cuando el punto x_0 se ubica en la línea $\mathcal{AOB}$. Precisamente si este punto se ubica en el arco $\mathcal{AO}$, entonces el punto $\mathcal{C}$ coincide con el punto x_0 y durante todo el movimiento $u = 1$. De esta manera, la fórmula (2.39) se cumple si el punto $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ se ubica encima de la línea $\mathcal{AOB}$, entonces el tiempo óptimo de movimiento $T^p(x_0)$ puede ser calculado de manera análoga. Sin embargo, es más sencillo notar que el punto $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ se ubica debajo de la línea $\mathcal{AOB}$, entonces el punto x'_0 con coordenadas $(-x_1^0, -x_2^0)$ que es simétrica al punto x_0 con respecto al origen de coordenadas, se ubica encima de la línea $\mathcal{AOB}$, y el tiempo del movimiento óptimo de los puntos x_0 y x'_0 es el mismo, es decir, $T^p(x_0) = T^p(x'_0)$. Por eso, sustituyendo en la fórmula (2.39) x_1^0 y x_2^0 correspondiente por $-x_1^0$ y $-x_2^0$, tenemos la función $T^p(x_0)$ para los puntos $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$, que se ubica debajo de la línea $\mathcal{AOB}$ (o en la misma línea):

$$T^p(x'_0) = -x_2^0 + 2\sqrt{-x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2}. \quad (2.40)$$

Consecuentemente,

$$T^{\mathcal{P}}(x_0) = \begin{cases} x_2^0 + 2\sqrt{x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2}, & \text{Si el punto } x_0 = (x_1^0, x_2^0) \text{ se ubica encima de } \mathcal{AOB} \\ & \text{o sobre la misma;} \\ -x_2^0 + 2\sqrt{-x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2}, & \text{Si el punto } x_0 = (x_1^0, x_2^0) \text{ se ubica debajo de } \mathcal{AOB} \\ & \text{o sobre la misma.} \end{cases}$$

Observemos que si el punto $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ se ubica en el arco $\mathcal{AO}$ (es decir, $x_1^0 = \frac{1}{2}(x_2^0)^2$ y en particular $x_2^0 < 0$) entonces la expresión (2.39) toma la forma $T^{\mathcal{P}}(x_0) = x_2^0 + 2|x_2^0| = x_2^0 + 2(x_2^0)$, mientras que la expresión (2.40) también, da $T^{\mathcal{P}}(x_0) = -x_2^0$. En otras palabras, en el arco $\mathcal{AO}$ ambas fórmulas (2.39), (2.40) dan los mismos valores $T^{\mathcal{P}}(x_0)$. Lo mismo se cumple en el arco $\mathcal{BO}$. Esto demuestra que, aunque encima y debajo de la línea $\mathcal{AOB}$ la función $T^{\mathcal{P}}(x_0)$ se define de dos maneras distintas mediante las fórmulas (2.39), (2.40) en la misma línea $\mathcal{AOB}$ estas ambas fórmulas coinciden, y por eso la función $T^{\mathcal{P}}(x_0)$ es continua en todo el plano.

2.6.2. Ejemplo 1

Consideremos el sistema canónico (2.29), para el caso $n = 2$, el problema a considerar es el siguiente: A partir de un punto fase x_0 , encontrar la trayectoria que traslade el punto x_0 al origen $(0,0)$, así como el tiempo de recorrido.

Vamos a encontrar la trayectoria del punto $x_0 = (x_1^0, x_2^0) = (0, 1)$ al punto $\mathcal{C}$, este punto, se encuentra sobre la trayectoria (2.36), y la trayectoria al punto $\mathcal{C}$ se determina por (2.35), de donde

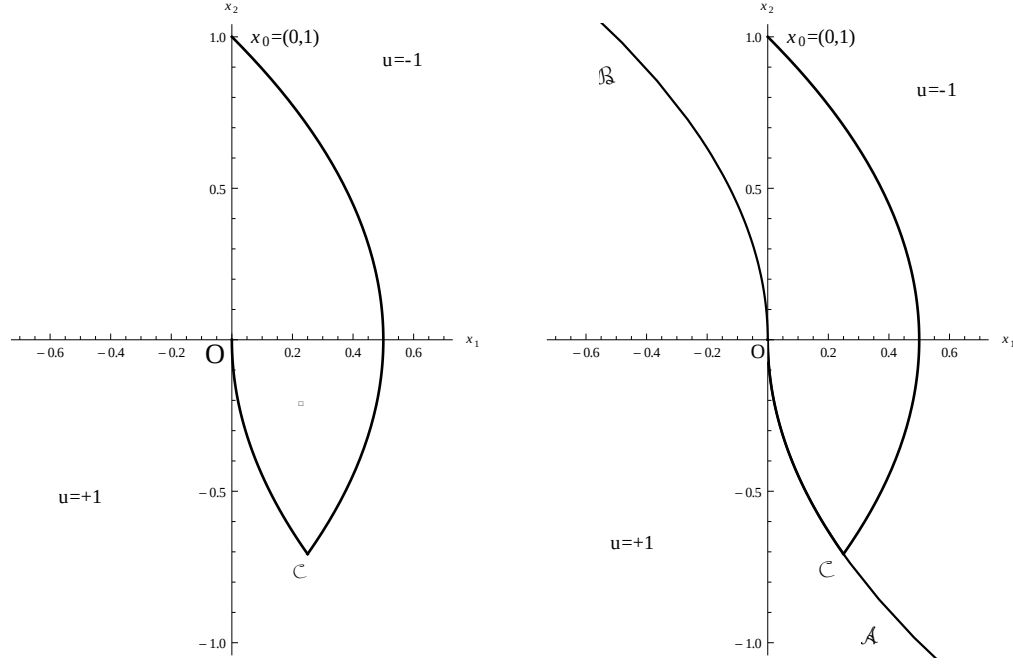
$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}. \quad (2.41)$$

Las coordenadas del punto $\mathcal{C}$ se determinan por (2.37) y (2.38), al momento de sustituir el punto x_0 , sea $\mathcal{C} = (x_{1\mathcal{C}}, x_{2\mathcal{C}})$, de donde

$$\begin{aligned} x_{1\mathcal{C}} &:= \frac{1}{4}, \\ x_{2\mathcal{C}} &:= -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

El punto $\mathcal{C}$ es el punto de intersección con la trayectoria (2.36). Ahora el tiempo de traslado al origen, se obtiene por (2.39) o mediante (2.40), así tenemos

$$T^{\mathcal{P}}(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Gráfica 2.5: Trayectoria del punto x_0 al origen O

La trayectoria se muestra en la gráfica 2.5.

Entonces la trayectoria óptima que traslada el estado inicial x_0 al origen O, se muestra en la gráfica 2.5, y el tiempo de traslado $T^p(x_0)$ del punto x_0 al origen se realiza en un tiempo $T^p(x_0)$, generalmente denotado como T_{min} .

Ahora vamos a encontrar la trayectoria del punto x_0 a un punto $\mathcal{C}$, sea $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$, donde

$$\begin{aligned} x_1^0 &:= \frac{5}{10}, \\ x_2^0 &:= -\frac{8}{10}. \end{aligned}$$

La trayectoria del punto fase x_0 al punto $\mathcal{C}$, donde $\mathcal{C}$ está ubicado en la línea $\mathcal{OA}$, se determina por (2.36), de donde

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{5}{10} + \frac{64}{200}. \quad (2.42)$$

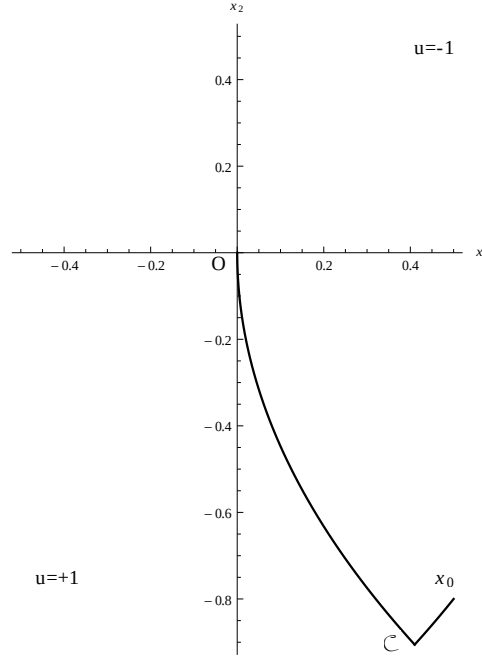
Las coordenadas del punto $\mathcal{C} = (x_{1\mathcal{C}}, x_{2\mathcal{C}})$ se determinan por (2.37) y (2.38), de donde

$$\begin{aligned} x_{1\mathcal{C}} &:= -\sqrt{\frac{41}{50}}, \\ x_{2\mathcal{C}} &:= \frac{41}{100}. \end{aligned}$$

Ahora el tiempo de traslado del punto x_0 al origen, se obtiene por (2.39) o mediante (2.40), así tenemos

$$T^{\mathcal{P}}(x_0) = \frac{1}{5} \left(4 + \sqrt{82} \right).$$

La trayectoria se muestra en la gráfica 2.6.



Gráfica 2.6: Trayectoria del punto x_0 al origen O

Entonces la trayectoria óptima que traslada el estado inicial x_0 al origen, se traslada en un tiempo $T^{\mathcal{P}}(x_0)$, generalmente denotado como T_{min} .

Capítulo 3

Estabilización en tiempo finito e infinito

En esta sección hablaremos sobre la estabilización en tiempo finito e infinito, usando el método de A. Lyapunov. Primero daremos la definición de estabilidad para el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

donde A es una matriz de dimensión $n \times n$ y b es un vector. Finalmente revisaremos algunos teoremas y lemas para el desarrollo de este trabajo.

3.1. Estabilización

Definición 3.1.1. Sea A una matriz real $n \times n$. La matriz A se llama matriz de Hurwitz si el polinomio característico $P_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ tiene raíces con parte real negativa.

El problema de estabilización para el sistema (3.1) consiste en hallar un control posicional $u = u(x)$; es decir un control que depende de las coordenadas del espacio fase, tal que $u(0) = 0$ y el sistema

$$\dot{x} = Ax + bu(x), \quad (3.2)$$

sea asintóticamente estable en el origen. El sistema (3.2) es conocido como sistema cerrado.

La construcción del control estabilizador se lleva a cabo de la siguiente manera: primero escogemos una forma cuadrática $V(x) = (Fx, x)$ como posible candidata a función de Lyapunov. Después buscamos un control de la forma $u(x) = -a^T x$ tal que la solución trivial ($x(t) \equiv 0$) del sistema cerrado $\dot{x} = (A - ba^T)x$ sea asintóticamente estable. Para esto, sea Q cualquier matriz simétrica positiva definida y resolvemos para F la ecuación de Lyapunov

$$(A - ba^T)^* F + F(A - ba^T) = -Q$$

De esto, si $(A - ba^T)$ es Hurwitz, la ecuación de Lyapunov tiene una única solución positiva definida. La función cuadrática $V(x) = (Fx, x)$ es una función de Lyapunov para el sistema cerrado en una vecindad del origen.

Definición 3.1.2. El sistema lineal (2.4) se llama estabilizable si existe un control $u = a^T x$ donde a^T es una matriz $n \times r$ tal que todas las soluciones $x(t)$ del sistema

$$\dot{x} = Ax + bPx, \quad (3.3)$$

tienden a cero cuando t tiende a infinito, es decir $A + bP$ es una matriz de Hermite.

Es importante mencionar que se pueden tener sistemas estabilizables que no son completamente controlables.

Lema 3.1.3. *El sistema canónico (2.4) es estabilizable.*

Demostración: El sistema canónico (2.4) se puede escribir como el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= u. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Mediante el cambio de variables $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $\dots$, $x_n = y^{(n-1)}$, el sistema (3.4) es equivalente a la ecuación diferencial de orden n :

$$y^{(n)} = u \quad (3.5)$$

Si colocamos

$$u = a_1 y + a_2 \dot{y} + \dots + a_n y^{(n-1)}, \quad (3.6)$$

en la ecuación (3.5), entonces tenemos la ecuación:

$$y^{(n)} - a_n y^{(n-1)} - a_{n-1} y^{(n-2)} - \dots - a_1 y = 0, \quad (3.7)$$

cuya ecuación característica es:

$$\varphi := \lambda^n - a_n \lambda^{n-1} - a_{n-1} \lambda^{n-2} - \dots - a_1. \quad (3.8)$$

Si elegimos los coeficientes a_j de tal forma que

$$\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j),$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ números negativos distintos, entonces la solución general de (3.8) está determinado por

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}. \quad (3.9)$$

Por lo tanto, como $\lambda_j < 0$ en (3.9) tenemos que $y(t)$ y todas sus derivadas tienden a cero cuando t tiende a infinito.

Debido a que la solución del sistema (3.5) está determinado por:

$$x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

entonces $x(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, y el control $u(t)$ está determinado en (3.6) con $y = y(t)$ la solución de (3.9). ■

3.2. Estabilización en tiempo finito. Problema de síntesis

En la teoría de control los objetos principales son los sistemas de ecuaciones que dependen de un parámetro de control u , a diferencia del estudio de ecuaciones diferenciales con parámetros donde el parámetro u es un número fijo, en la teoría de control u es una función $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r$ continua a trozos (por la izquierda), que depende del tiempo, llamada control del sistema.

El problema de estabilización en tiempo finito de sistemas lineales controlables con control restringido, es clásico en la teoría de control, se conoce como problema de síntesis y es planteado de la siguiente manera.

Problema de síntesis: Consideremos un sistema controlable

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \quad (3.10)$$

se quiere construir un conjunto de controles posicionales $u(x)$ tales que:

1. $u(x)$ sea una función continua en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, y cumpla con la restricción $|u(x)| \leq d$.
2. La trayectoria del sistema cerrado $\dot{x} = f(x, u(x))$, que comienza en $x(0) = x_0$ termine en el origen en tiempo finito $T(x_0) < \infty$.

Entre las particularidades de este problema se tiene la siguiente:

El sistema cerrado no satisface las condiciones del Teorema de Picard sobre existencia y unicidad (ver apéndice A.1.1) en la región donde se resuelve el problema de síntesis, ya que a través del punto $x = 0$ pasan un conjunto infinito de trayectorias. Esta dificultad se puede omitir si:

1. Consideramos controles continuos para $x \neq 0$, que satisfagan la condición de Lipschitz en cada anillo $\{x : \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2\}$ y tales que para $\rho_1 \rightarrow 0$ la condición de Lipschitz crezca sin cota.

2. Además ya que el control $u(x)$ satisface la restricción $u \in \Omega$, entonces aún en el caso lineal el sistema cerrado es no lineal.

V.I. Korobov [5] sugirió un método de resolución al problema de síntesis para sistemas lineales y algunos no lineales, este método, está basado en la construcción de una función $\theta(x)$ mediante la cual se construye el control posicional buscado $u(x) = \tilde{u}(x, \theta(x))$. La función $\theta(x)$ es una función del tipo de Lyapunov y se describe en el siguiente Teorema.

3.2.1. Función de controlabilidad

Teorema 3.2.1. *(Teorema fundamental de la función de controlabilidad)[Korobov, 1979]. Consideremos el sistema controlable dado por:*

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in W \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \quad f : \mathbb{R}^n \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n. \quad (3.11)$$

Supongamos que la función f satisface la condición de Lipschitz

$$\|f(x'', u'') - f(x', u')\| \leq L_1(\rho, \rho_1)(\|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|),$$

en cada región

$$(x, u) : 0 < \rho \leq \|x\| \leq \rho_1, \quad u \in \Omega.$$

Si existe una función $\theta(x)$ continua en una vecindad G del origen y un control $u(x)$ con $x \in Q$ donde $Q = \{x : \theta(x) \leq C, C > 0\}$ (C es tal que el conjunto Q es acotado) tales que:

1. $\theta(x)$ Es continuamente diferenciable en $G \setminus \{0\}$.
2. $\theta(0) = 0$, $\theta(x) \geq 0$ para $x \in G \setminus \{0\}$.
3. El control $u(x)$, cumple la condición de Lipschitz es decir, se tiene $\|u(x'') - u(x')\| \leq L_2(\rho, \rho_1) \|x'' - x'\|$ para $x \in Q$ y $0 < \rho \leq \|x\| < \rho_1$.
4. Se satisface la desigualdad:

$$\dot{\theta}|_{(3.11)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \leq -\beta \theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x), \quad (3.12)$$

para $\alpha > 0, \beta > 0$.

Entonces la trayectoria del sistema $\dot{x} = f(x, u(x))$, que comienza en un punto $x(0) = x_0 \in Q$, termina en el origen en tiempo finito:

$$T(x_0) \leq \frac{\alpha}{\beta} \theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_0). \quad (3.13)$$

Demostración:

Calculamos la derivada de $\theta(x)$ respecto al tiempo, evaluada en el sistema $\dot{x} = f(x, u(x))$ sobre la trayectoria $x(t)$ que comienza en el punto $x_0 \in Q$.

Tenemos:

$$\dot{\theta}(x(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta(x(t))}{\partial x_i} f_i(x(t), u(x(t))),$$

ya que se satisface la desigualdad (3.12), se tiene:

$$\dot{\theta}(x(t)) \leq -\beta \theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x(t)).$$

Si la trayectoria $x(t) \neq 0$ entonces

$$\frac{d}{dt} \theta^{\frac{1}{\alpha}}(x(t)) = \frac{\dot{\theta}(x(t))}{\alpha \theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x(t))} \leq \frac{\beta \theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x(t))}{\alpha \theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x(t))} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Sea $\tau > 0$ cualquier número tal que la solución $x(t)$ está bien definida en $[0, \tau]$. Integramos la última desigualdad de 0 a τ , entonces:

$$\theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_\tau) - \theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_0) \leq -\frac{\beta}{\alpha} \tau,$$

o equivalentemente:

$$\theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_\tau) \leq \theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_0) - \frac{\beta}{\alpha} \tau. \quad (3.14)$$

Denotemos por $B(0, \varepsilon)$ y $B(0, \rho_0)$ las bolas con centro en 0 y radios ε y ρ respectivamente y $\varepsilon \leq \|x_0\|, \rho_0$ tal que $Q \subset B(0, \rho_0)$. Como cualquier solución que comienza en un punto $x_0 \in Q$ se queda en Q (debido a que $\theta(x(t)) \leq 0$ y si $x', x'' \in Q \setminus B(0, \varepsilon)$ tiene lugar la desigualdad:

$$\|f(x'', u(x'')) - f(x', u(x'))\| \leq L_1(\varepsilon, \rho_0)(1 + L_2(\varepsilon, \rho_0)) \|x'' - x'\|.$$

Entonces la solución $x(t)$ que empieza en $x_0 \in Q$, se puede extender al segmento $[0, T_1]$ tal que si $t \in [0, T_1]$ entonces $\|x(t)\| > \varepsilon$, por tal motivo para esos valores de t , la desigualdad (3.14) es cierta.

Probemos que en el tiempo $T(\varepsilon) \leq \frac{\alpha}{\beta} \theta^{\frac{\alpha}{\beta}}(x_0)$ la trayectoria $x(t)$ llega a la frontera de la bola $S(\varepsilon)$. Suponiendo lo contrario, obtenemos que $\|x(t)\| > \varepsilon$ para $0 \leq t \leq T$ y $T > \frac{\alpha}{\beta} \theta^{\frac{\alpha}{\beta}}(x_0)$, pero si $\rho \neq T$, la parte derecha de la desigualdad (3.14) es no positiva, pero la parte izquierda de la misma desigualdad cuando $\rho \neq T$, es positiva ya que $\|x(t)\| > \varepsilon$. Como el tiempo de llegada a la frontera de la bola de radio ε crece monótonamente si ε decrece y como $T(\varepsilon) < \frac{\alpha}{\beta} \theta^{\frac{\alpha}{\beta}}(x_0)$, entonces existe $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = \tau \leq \frac{\alpha}{\beta} \theta^{\frac{\alpha}{\beta}}(x_0)$, pero $\lim_{t \rightarrow T} x(t) = 0$. ■

La función $\theta(x)$ es llamada función de controlabilidad.

Observación 3.2.2. Notemos que para $\alpha = \infty$ en caso de cumplirse la desigualdad (3.12), la función $\theta(x)$ es la función de Lyapunov.

3.2.2. Construcción de $\theta(x)$ en forma Integral

Fué sugerido en [8] una forma integral suficientemente general de construcción de la función de controlabilidad $\theta(x)$ y el control $u(x)$ que resuelve el problema de síntesis para el sistema lineal completamente controlable

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \{u : |u| \leq d\} \subset \Omega, \quad (3.15)$$

donde A es una matriz $n \times n$ y b es un vector. En esta sección daremos una breve descripción de la forma integral.

Sea la matriz

$$N(\theta) := \int_0^\theta \left(1 - \frac{t}{\theta}\right) e^{-At} b b^* e^{-A^* t} dt. \quad (3.16)$$

Para todo $x \in Q \setminus \{0\}$ ($Q := \{x : \|x\| \leq R\}$), la ecuación

$$2a_0\theta = (N^{-1}(\theta)x, x) \quad (3.17)$$

tiene solución única positiva continuamente diferenciable. Definiendo $\theta(x)$ en $x = 0$ como $\theta(0) = 0$, la función $\theta(x)$ resulta ser continua en cero. Existe una constante $C = 0$ tal que el conjunto $Q = \{x : \|x\| \leq C\}$ es acotado y $Q \subset \text{int } Q^1$ ($Q^1 = \{x : \|x\| \leq R\}$). Se propone la función $u(x, \theta(x))$ como el control

$$u(x) := -\frac{1}{2} b^* N^{-1}(\theta(x)) x, \quad (3.18)$$

que resuelve el problema de síntesis.

Observación 3.2.3. *La siguiente igualdad es válida*

$$\frac{F^{-1}(\theta)}{d\theta} = -F^{-1}(\theta) \frac{dF(\theta)}{d\theta} F^{-1}(\theta). \quad (3.19)$$

Demostración: Se sigue al derivar respecto de θ la identidad

$$I = F(\theta) F^{-1}(\theta).$$

■

Lema 3.2.4. *Sea el sistema de control (3.15) completamente controlable. Entonces:*

a) *La matriz $N(\theta)$ es una matriz definida positiva para $\theta > 0$.*

b) *La matriz*

$$F(\theta) := N^{-1}(\theta) \quad (3.20)$$

satisface la igualdad:

$$-F - \frac{dF(\theta)}{d\theta} = AF - bb^* - FA^*. \quad (3.21)$$

Demostración:

a) Ya que (3.15) es CC (ver teorema 2.2.1) entonces:

$$\text{rang}(b, Ab, \dots, A^n b) = n. \quad (3.22)$$

Por contradicción, supongamos que $N(\theta)$ no es positiva definida, es decir existe un ζ tales que

$$V(x) = \zeta^* N(\theta) \zeta \leq 0. \quad (3.23)$$

Por otro lado

$$V(x) = \int_0^\theta \left(1 - \frac{t}{\theta}\right) (\zeta^* e^{-At} b) (b^* e^{-A^* t} \zeta) dt.$$

Denotando $y^* := (\zeta^* e^{-At} b)$, $y := (b^* e^{-A^* t} \zeta)$ y recordando que $y^* y = \|y\|^2$ entonces tenemos

$$V(x) = \int_0^\theta \left(1 - \frac{t}{\theta}\right) \| \zeta^* e^{-At} b \|^2 dt \geq 0 \quad (3.24)$$

ya que $\left(1 - \frac{t}{\theta}\right) \| \zeta^* e^{-At} b \|^2 \geq 0$.

De (3.23) y (3.24) tenemos $V(x) = 0$, es decir

$$\left(1 - \frac{t}{\theta}\right) \| \zeta^* e^{-At} b \| = 0$$

pero $\left(1 - \frac{t}{\theta}\right) > 0$, lo que implica que

$$\| \zeta^* e^{-At} b \| = 0 \quad (3.25)$$

luego derivando (3.25) respecto a t tenemos:

$$\begin{cases} \zeta^* e^{-At} b = 0 \\ -\zeta^* A e^{-At} b = 0 \\ \vdots \\ (-1)^m \zeta^* A^{n-1} e^{-At} b = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

tomando en cuenta que $e^{-At} A^k = A^k e^{-At}$ y denotando $q^* = \zeta^* e^{-At_0}$, donde $q \neq 0$, las relaciones (3.26) se reescriben como sigue:

$$\begin{cases} q^* b = 0 \\ q^* A b = 0 \\ \vdots \\ q^* A^{n-1} b = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

lo cual quiere decir que: $q^* Q = 0$ así el $\text{rang}(Q) > m$. Lo que contradice la condición del inciso (3.22), de donde $N(\theta)$ es positiva definida. ■

b) Utilizando la ecuación de la función de controlabilidad (3.17) y sustituyendo (3.20), tenemos:

$$2a_0\theta = (F^{-1}(\theta)x, x). \quad (3.28)$$

Ahora derivamos la ecuación (3.28) respecto de θ , tenemos

$$2a_0\dot{\theta} = \left(\frac{dF^{-1}(\theta)}{d\theta} \dot{\theta} x, x \right) + (F^{-1}(\theta)\dot{x}, x) + (F^{-1}(\theta)x, \dot{x}).$$

Es decir,

$$\left(\frac{2a_0\theta}{\theta} - \left(\frac{dF^{-1}(\theta)}{d\theta} x, x \right) \right) \dot{\theta} = (F^{-1}(\theta)\dot{x}, x) + (F^{-1}(\theta)x, \dot{x}).$$

De (3.28) y (3.19) tenemos

$$\left[\left(\frac{F^{-1}(\theta)}{\theta} x, x \right) + \left(F^{-1}(\theta) \frac{dF(\theta)}{d\theta} F^{-1}(\theta)x, x \right) \right] \dot{\theta} = (F^{-1}(\theta)\dot{x}, x) + (F^{-1}(\theta)x, \dot{x}),$$

es decir,

$$\left[\left(F^{-1}(\theta) \frac{F^{-1}(\theta)}{\theta} F^{-1}(\theta)x, x \right) + \left(F^{-1}(\theta) \frac{dF(\theta)}{d\theta} F^{-1}(\theta)x, x \right) \right] \dot{\theta} = (F^{-1}(\theta)\dot{x}, x) + (F^{-1}(\theta)x, \dot{x}).$$

Sea $y_\theta = F^{-1}(\theta)x$, $u = -\frac{1}{2}b^*F^{-1}(\theta)x$. Utilizando la ecuación (3.15) y (3.18) en la parte derecha de la anterior igualdad tenemos:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{F(\theta)}{\theta} y_\theta, y_\theta \right) + \left(\frac{dF(\theta)}{d\theta} y_\theta, y_\theta \right) \right] \dot{\theta} = (F^{-1}(\theta)(Ax + bu), x) + (F^{-1}(\theta)x, (Ax + bu)). \\ & = (F^{-1}(\theta)Ax, x) + (F^{-1}(\theta)bu, x) + (F^{-1}(\theta)x, Ax) + (F^{-1}(\theta)x, bu) \\ & = (F^{-1}(\theta)AF(\theta)F^{-1}(\theta)x, x) + (F^{-1}(\theta)b(-\frac{1}{2}b^*F^{-1}(\theta)x), x) + (F^{-1}(\theta)A^*x, x) + \\ & (F^{-1}(\theta)x, b(-\frac{1}{2}b^*F^{-1}(\theta)x)) = (F^{-1}(\theta)AF(\theta)y_\theta, x) - \frac{1}{2}(F^{-1}bb^*y_\theta, x) + (F^{-1}(\theta)A^*FF^{-1}x, x) \\ & - \frac{1}{2}(bb^*y_\theta, y_\theta) = (AF(\theta)y_\theta, y_\theta) - \frac{1}{2}(bb^*y_\theta, y_\theta) + (F(\theta)A^*y_\theta, y_\theta) - \frac{1}{2}(bb^*y_\theta, y_\theta), \end{aligned}$$

para $\dot{\theta} = -1$ se obtiene

$$\left[\left(-\frac{F(\theta)}{\theta} y_\theta, y_\theta \right) - \left(\frac{dF(\theta)}{d\theta} y_\theta, y_\theta \right) \right] = (AFy_\theta, y_\theta) - (bb^*y_\theta, y_\theta) + (FA^*y_\theta, y_\theta),$$

que es equivalente a

$$\left[-\left(\frac{F(\theta)}{\theta} + \frac{dF(\theta)}{d\theta} \right) y_\theta, y_\theta \right] = ((AF - bb^* + FA^*)y_\theta, y_\theta)$$

de donde (3.21) se cumple. ■

Observación 3.2.5. *Se satisface la igualdad*

$$(N^{-1}(\theta)\hat{x}, \hat{x}) = \frac{f_{11}}{\theta^{2n-1}}x_1^2 \quad (3.29)$$

donde $\hat{x} = (x_1, \dots, 0)$ y $f_{11} > 0$.

Demostración:

Sea $\tilde{F} = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^n$. La cual es positiva definida ya que $N^{-1}(\theta)$ lo es. De $N^{-1}(\theta) = D_\theta \tilde{F} D_\theta$, donde

$$D_\theta := \text{diag} \left(\theta^{-\frac{2(n-i)+1}{2}} \right)_{i=1}^n, \quad (3.30)$$

tenemos de (3.29). El elemento $f_{11} > 0$ ya que $\tilde{F}$ es positiva definida. ■

Lema 3.2.6. *La ecuación*

$$2a_0\theta = (N^{-1}(\theta)x, x), \quad a_0 > 0 \quad (3.31)$$

tiene una sola solución única positiva continuamente diferenciable $\theta = \theta(x)$.

Demostración:

Probaremos que (3.31) tiene solución positiva, denotemos la ecuación (3.31) de la siguiente manera $\Phi(x, \theta) = 2a_0\theta - (N^{-1}(\theta)x, x)$, al derivar respecto de θ tenemos:

$$\frac{d\Phi(x, \theta)}{d\theta} = \frac{2a_0}{\theta} - \left(\frac{dN^{-1}(\theta)}{d\theta} x, x \right). \quad (3.32)$$

De (3.19) con $N(\theta) = F^{-1}(\theta)$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(x, \theta)}{d\theta} &= \frac{1}{\theta} (N^{-1}(\theta)x, x) + \left(N^{-1}(\theta) \frac{dN(\theta)}{d\theta} N^{-1}(\theta)x, x \right) \\ &= \frac{1}{\theta} (N^{-1}(\theta)N(\theta)N^{-1}(\theta)x, x) + \left(N^{-1}(\theta) \frac{dN(\theta)}{d\theta} N^{-1}(\theta)x, x \right) \\ &= \frac{1}{\theta} (N(\theta)N^{-1}(\theta)x, N^{-1}(\theta)x) + \left(\frac{dN(\theta)}{d\theta} N^{-1}(\theta)x, N^{-1}(\theta)x \right). \end{aligned}$$

Es decir

$$\frac{d\Phi(x, \theta)}{d\theta} = \left(\left(\frac{N(\theta)}{\theta} + \frac{dN(\theta)}{d\theta} \right) y_\theta, y_\theta \right),$$

donde $y_\theta = N^{-1}(\theta)x$. Ahora verificamos que la matriz:

$$\begin{aligned} \left(\frac{N(\theta)}{\theta} + \frac{dN(\theta)}{d\theta} \right) &= \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{t}{\theta} \right) e^{-At} b b^* e^{-A^*t} dt + \int_0^\theta \left(\frac{t}{\theta^2} \right) e^{-At} b b^* e^{-A^*t} dt \\ &= \frac{1}{\theta} \int_0^\theta e^{-At} b b^* e^{-A^*t} dt \end{aligned}$$

entonces por el teorema 2.2.1 inciso 3, la matriz

$$\left(\frac{N(\theta)}{\theta} + \frac{dN(\theta)}{d\theta} \right) \quad (3.33)$$

es definida positiva, es decir, $\Phi(\hat{x}, \theta)$ es creciente para x fijo.

De la observación 3.2.5 se tiene que

$$\Phi(\hat{x}, \theta) = 2a_0\theta - \frac{f_{11}}{\theta^{2n-1}} x_1^2$$

Para θ suficientemente pequeño $\Phi(x, \theta) < 0$. Ahora cuando $\theta \rightarrow \infty$, $\Phi(x, \theta) \rightarrow \infty$. Además $\Phi(x, \theta)$ es continua, entonces $\Phi(\hat{x}, \theta) = 0$ tiene única solución positiva. ■

Para el caso $n = 2$, el sistema canónico se determina por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Con restricciones de la forma $|u| \leq 1$. Escribimos el sistema (3.34) en la forma matricial

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

entonces (3.16) resulta:

$$N(\theta) = \begin{pmatrix} \theta^3/12 & \theta^2/6 \\ -\theta^2/6 & \theta/2 \end{pmatrix}.$$

La matriz (3.33) se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{N(\theta)}{\theta} &= \begin{pmatrix} \frac{\theta^2}{12} & -\frac{\theta}{6} \\ -\frac{\theta}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \frac{dN(\theta)}{d\theta} = \begin{pmatrix} \frac{3\theta^2}{12} & -\frac{2\theta}{6} \\ \frac{12}{2\theta} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ \frac{N(\theta)}{\theta} + \frac{dN(\theta)}{d\theta} &= \begin{pmatrix} \frac{\theta^2}{12} & -\frac{\theta}{6} \\ -\frac{\theta}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3\theta^2}{12} & -\frac{2\theta}{6} \\ \frac{12}{2\theta} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\theta^2}{3} & -\frac{\theta}{2} \\ -\frac{\theta}{2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Usando el criterio de Silvester la matriz anterior es definida positiva ya que $\frac{\theta^2}{3} > 0$ y

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\theta^2}{3} & -\frac{\theta}{2} \\ -\frac{\theta}{2} & 1 \end{pmatrix} > 0.$$

Por lo tanto $N(\theta)$ es definida positiva para x fijo. La

$$\frac{d\Phi(x, \theta)}{d\theta} > 0$$

consecuentemente, no puede tener más de un cero. Cuando $\theta \rightarrow 0$ tenemos $\Phi(x, \theta) = 0$, para $\Phi(x, 0) = 0$. Sea $\bar{x} = (x_1, 0)^*$, para nuestro caso tenemos

$$\Phi(x, \theta) = 2a_0\theta - \frac{36}{\theta^3}x_1^2$$

Para θ suficientemente pequeño $\Phi(x, \theta) < 0$. Ahora cuando $\theta \rightarrow \infty$, $\Phi(x, \theta) \rightarrow \infty$. Además $\Phi(x, \theta)$ es continua.

El siguiente Teorema 3.2.7 resuelve el problema de síntesis del sistema (3.15).

Teorema 3.2.7. *Para valores suficientemente pequeños de $a_0 : 0 < a_0 \leq a_f$ el control de la forma (3.18) resuelve el problema de síntesis en una vecindad del origen del sistema (3.15) mediante controles continuos que satisfacen la condición*

$$u \in \{u : \|u\| \leq d\} \subset \Omega.$$

3.2.3. Problema de síntesis para el sistema canónico, familia de controles posicionales admisibles

Aquí reproduciremos parcialmente los resultados del trabajo. Recordemos que el sistema canónico está dado por el sistema

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{3.35}$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A diferencia de la forma integral de construcción de la función de controlabilidad $\theta(x)$ y del control $u(x)$ ahora se construye una función $\theta(x)$ para el sistema canónico (3.35), como la única solución positiva (ver [31]) de la ecuación:

$$2a_0\theta = (D_\theta \tilde{F} D_\theta x, x). \tag{3.36}$$

Donde D_θ está definida por (3.30), a_0 es un número positivo y $\tilde{F}$ una matriz positiva definida.

Si definimos $\theta(0) = 0$ entonces de la ecuación (3.36) se sigue que $\theta(x)$ es una función continua y es continuamente diferenciable para $x \neq 0$.

Una vez determinada $\theta(x)$ buscaremos un control $u(x)$ de la forma

$$u(x) = \theta^{-\frac{1}{2}}(x) a^* D_{\theta(x)} x = \sum_{k=1}^n \frac{a_k x_k}{\theta^k(x)}. \quad (3.37)$$

El objetivo de esta sección será determinar condiciones sobre el número a_0 , el vector a y la matriz $\tilde{F}$ de tal manera que la función $\theta(x)$ sea una función de controlabilidad que represente el tiempo exacto de recorrido del punto x al origen ($\dot{\theta}(x) = -1$) y que el control $u(x)$ resuelva el problema de síntesis del sistema canónico.

3.2.4. Construcción de la función de controlabilidad

La condición $\dot{\theta}(x) = -1$ permite obtener una primer propiedad del vector a como lo establece el lema siguiente.

Lema 3.2.8. *Supongamos que la función de controlabilidad $\theta(x)$ satisface la igualdad $\dot{\theta}(x) = -1$. Entonces:*

$$a_n = -\frac{n(n+1)}{2}. \quad (3.38)$$

Demostración: Coloquemos $y(\theta, x) = D_\theta x$, entonces la función de controlabilidad $\theta(x)$ para $x \neq 0$ satisface la ecuación:

$$2a_0\theta(x) = (Fy(\theta(x), x), y(\theta(x), x)). \quad (3.39)$$

Mientras que el control (3.37) toma la forma:

$$u(x) = \theta^{-1/2}(x) a^* y(\theta(x), x). \quad (3.40)$$

Con base en las siguientes identidades:

$$D_\theta A D_\theta^{-1} = \theta^{-1} A, \quad D_\theta b = \theta^{-1/2} b.$$

La derivada de la función $y(\theta(x), x)$ respecto al sistema (3.35) con este control tiene la forma:

$$\dot{y}(\theta(x), x) = \theta^{-1}(x) \left(\dot{\theta}(x) \mathcal{H} + A + b a^* \right) y(\theta(x), x),$$

donde

$$\mathcal{H} = \text{diag} \left(-\frac{2(n-i)+1}{2} \right)_{i=1}^2. \quad (3.41)$$

Entonces de la ecuación (3.39) al derivar respecto de $\theta(x)$ y utilizando (3.35) con el control $u(x)$ de la forma (3.40), tenemos la siguiente igualdad

$$\dot{\theta}(x) = \frac{((F(A + ba^*) + (A + ba^*)^* F)y(\theta(x), x), y(\theta(x), x))}{((F - \mathcal{H}F - F\mathcal{H})y(\theta(x), x), y(\theta(x), x))}, \quad (3.42)$$

con base en la suposición del lema (i.e $\dot{\theta}(x) = -1$) tenemos la igualdad:

$$F \left(A + ba^* + \frac{1}{2}I - \mathcal{H} \right) + \left(A + ba^* + \frac{1}{2}I - \mathcal{H} \right)^* F = 0. \quad (3.43)$$

De esta igualdad tenemos que la matriz $F^{\frac{1}{2}}(A + ba^* + \frac{1}{2}I - \mathcal{H})F^{-\frac{1}{2}}$ es antisimétrica y por eso las raíces de su ecuación característica:

$$\begin{aligned} & \det \left(F^{\frac{1}{2}}(A + ba^* + \frac{1}{2}I - \mathcal{H})F^{-\frac{1}{2}} - \lambda I \right) \\ & \det \left(F^{\frac{1}{2}}(A + ba^* + \frac{1}{2}I - \mathcal{H} - \lambda F^{-\frac{1}{2}}I F^{\frac{1}{2}}) F^{-\frac{1}{2}} \right) \\ & \det \left(F^{\frac{1}{2}}(A + ba^* + \frac{1}{2}I - \mathcal{H} - \lambda I) F^{-\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

y consecuentemente de la ecuación:

$$\det \left(\left(A + ba^* + \frac{1}{2}I - \mathcal{H} \right) - \lambda I \right) = 0, \quad (3.44)$$

tienen partes reales iguales a cero. La ecuación (3.44) la escribimos en la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} \lambda - n & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - 2 & -1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & \lambda - 1 - a_n \end{pmatrix} \\ &= \prod_{j=1}^n (\lambda - j) - \sum_{j=1}^n a_j \prod_{i=j+1}^n (\lambda - i) - a_1 = \lambda^n - \left(a_n + \frac{n(n+1)}{2} \right) \lambda^{n-1} - \dots \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que las raíces de esta ecuación tienen parte real igual a cero y cuentan con su adjunta compleja entonces se tiene que $a_n = -n(n+1)/2$. ■

De la ecuación (3.43) tenemos

$$\left(A + ba^* + \frac{1}{2}I - \mathcal{H} \right) F^{-1} + F^{-1} \left(A + ba^* + \frac{1}{2}I - \mathcal{H} \right)^* = 0. \quad (3.45)$$

Vamos a proponer una matriz F tal que $F^{-1} = D_n C D_n$, donde C es una matriz hankeliana ($C = (c_{2n-i-j})_{i,j=1}^n$). Vamos a definir a F y el vector a de la siguiente forma (para la construcción de a y F ver [31]):

$$a := \left(a_1, (-1)^{n-2}(n-2)! \frac{1}{\Delta} \left(\Delta'_{n-1} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} a_1 + \Delta''_{n-1} \right), \dots, \right. \\ \left. - \frac{1}{\Delta} \left(\Delta'_2 \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} a_1 + \Delta''_2 \right), -\frac{n(n+1)}{2} \right)^*, \quad (3.46)$$

la matriz $F = D_n^{-1} C^{-1} D_n^{-1}$, donde

$$C := \begin{pmatrix} \frac{1}{2n(2n-1)} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(n+1)} & \frac{1}{(n+1)n} \\ \frac{1}{(2n-1)(2n-2)} & \cdots & \frac{1}{(n+1)n} & \frac{1}{n(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(n+2)(n+1)} & \cdots & \frac{1}{4 \cdot 3} & \frac{1}{3 \cdot 2} \\ \frac{1}{n(n-1)} & \cdots & \frac{1}{3 \cdot 2} & c_0 \end{pmatrix} (2n-1)2nc_{2n-2}, \quad (3.47)$$

$$c_0 = \frac{1}{\Delta} \left(\Delta' \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} a_1 + \Delta''_1 \right).$$

3.2.5. Solución al problema de síntesis

Ahora mencionaremos algunos lemas que nos serán útiles para la solución al problema de síntesis.

Lema 3.2.9. Sea C la matriz definida por (3.47). Si $c_{2n-2} > 0$, y $c_0 > \xi_0$, donde ξ_0 es la raíz de la ecuación $\det \tilde{C}(\xi) = 0$, donde:

$$\tilde{C}(\xi) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2n(2n-1)} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(n+1)} & \frac{1}{(n+1)n} \\ \frac{1}{(2n-1)(2n-2)} & \cdots & \frac{1}{(n+1)n} & \frac{1}{n(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(n+2)(n+1)} & \cdots & \frac{1}{4 \cdot 3} & \frac{1}{3 \cdot 2} \\ \frac{1}{n(n-1)} & \cdots & \frac{1}{3 \cdot 2} & \xi \end{pmatrix} (2n-1)2nc_{2n-2},$$

entonces la matriz C es positiva definida.

Para la demostración ver [31].

Observación 3.2.10. La ecuación $\det \tilde{C}(\xi) = 0$ se puede escribir en la forma:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2n-1} & \cdots & \frac{1}{(n+1)} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{(2n-2)} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(n+1)} & \cdots & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{2} & (1 + \frac{1}{n})\xi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.48)$$

Para establecer este hecho, a cada fila i -ésima se añaden todas las filas siguientes y después de las filas y columnas del determinante obtenido se sacan factores iguales. Para los casos $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ la raíz ξ_0 de $\det \tilde{C}(\xi) = 0$ es igual a $\frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{9}{20}, \frac{7}{15}, \frac{10}{21}, \frac{27}{356}$, respectivamente.

Lema 3.2.11. La matriz $C^1 := C - C\mathcal{H} - \mathcal{H}C$ es positiva definida para $c_{2n-2} > 0$, y $c_0 > (\frac{1}{2} + \frac{1}{2n})\xi + \frac{1}{4} - \frac{1}{4n}$, donde ξ_0 es la raíz de (3.48).

Para la demostración ver [31].

La solución al problema de síntesis para el sistema canónico (3.35) en el caso cuando la función de controlabilidad representa el tiempo de movimiento la da el siguiente teorema.

Teorema 3.2.12. Consideremos la matriz C y el vector a definidos por las igualdades (3.46) y (3.47). Si

$$c_{2n-2} > 0, \quad c_0 > \max \left\{ \xi_0, \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) \xi_0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} \right\}, \quad (3.49)$$

donde ξ_0 es la raíz de (3.48) y el número a_0 satisface la condición

$$0 < a_0 \leq \frac{d^2}{2(F^{-1}a, a)}; \quad F^{-1} = D_n C D_n. \quad (3.50)$$

Entonces:

1. Para $x \neq 0$ la ecuación (3.36) tiene una única solución positiva $\theta(x)$ y si definimos $\theta(0) = 0$ entonces $\theta(x)$ es una función de controlabilidad.
2. El control $u(x)$ de la forma (3.37) traslada cualquier punto inicial $x \in \mathbb{R}^n$ al origen a través de la trayectoria del sistema $\dot{x} = Ax + bu(x)$ en tiempo $T(x) = \theta(x)$ y satisface la restricción $|u(x)| \leq d$.

Demostración: Usando las condiciones (3.49) y aplicando el Lema 3.2.9 obtenemos que la matriz C es positiva definida, de donde se sigue que la matriz $F^{-1} = D_n C D_n$ es positiva definida y por consecuencia la matriz F también lo es. Si la matriz $F - F\mathcal{H} - \mathcal{H}F > 0$ entonces la ecuación (3.36) para $x \neq 0$ tiene una única solución $\theta(x)$ continuamente diferenciable.

Establezcamos los valores de los parámetros a_1 y c_{2n-2} para los cuales la matriz $F - F\mathcal{H} - \mathcal{H}F$ va a ser positiva definida. La positividad de esta matriz se sigue de la positividad de la matriz $F^{-1} - \mathcal{H}F^{-1} - F^{-1}\mathcal{H}$. Ya que la matriz $F^{-1} = D_n C D_n$, mientras que D_n y $\mathcal{H}$ conmutan entonces es válida la siguiente igualdad

$$F^{-1} - \mathcal{H}F^{-1} - F^{-1}\mathcal{H} = D_n(C - \mathcal{H}C - C\mathcal{H})D_n.$$

En virtud al Lema 3.2.11 y con base en las condiciones (3.49) la matriz $C - \mathcal{H}C - C\mathcal{H}$ es positiva definida. Por eso la matriz $F - F\mathcal{H} - \mathcal{H}F$ también es positiva definida de esta manera cuando se cumplen las condiciones (3.49), la ecuación (3.36) para $x \neq 0$ tiene una única solución $\theta(x)$ continuamente diferenciable. Colocando $\theta(0) = 0$, obtenemos que la función $\theta(x)$ es continua para todo x .

Establezcamos ahora la restricción del control. Encontremos una estimación para la expresión $a^*y(\theta, x)\theta^{-\frac{1}{2}}$. Para esto, para un θ fijo resolvamos el problema de encontrar el extremo de la función $a^*y(\theta, x)\theta^{-\frac{1}{2}}$ sujeto a las restricciones del tipo

$$(Fy(\theta, x), y(\theta, x)) - 2a_0\theta = 0. \quad (3.51)$$

Este problema lo resolvemos con ayuda de los multiplicadores de Lagrange, aquí la función de Lagrange tiene la forma:

$$a^*y(\theta, x)\theta^{-\frac{1}{2}} - \lambda(Fy(\theta, x), y(\theta, x)) + 2\lambda a_0\theta.$$

Sea y_0 el punto de extremo. La condición necesaria del extremo nos da $a\theta^{-\frac{1}{2}} - 2\lambda Fy_0 = 0$, de donde tenemos que $y_0 = 1/(2\lambda)\theta^{-\frac{1}{2}}F^{-1}a$. Colocando y_0 en la restricción (3.51), obtenemos $1/(2\lambda) = \pm\sqrt{2a_0/(F^{-1}a, a)}\theta$. Consecuentemente tenemos $(a, y_0)\theta^{-\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{2a_0(F^{-1}a, a)}$. Entonces usando la forma del control $u(x)$ obtenemos

$$|u(x)| \leq \sqrt{2a_0(F^{-1}a, a)}. \quad (3.52)$$

Escogiendo el número a_0 de la condición (3.50), de la desigualdad (3.52) se sigue que el control $u(x)$ satisface las restricciones dadas en todo el espacio.

De esta manera, de acuerdo al teorema fundamental de la función de controlabilidad, el control $u(x)$ resuelve el problema de síntesis del control restringido en todo el espacio y el tiempo de recorrido desde cualquier punto x al origen es igual al valor de la función de controlabilidad en el punto x es decir $T(x) = \theta(x)$.

■

Ejemplo 1

Encontrar la solución al problema de síntesis del sistema canónico.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u, \quad |u| \leq \frac{1}{10}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ya que $\Delta = -1$, $\Delta'_1 = -\frac{1}{12}$, $\Delta''_1 = 0$, (ver [31],pág.37) entonces el vector a de (3.46), la matriz C de (3.47) y la matriz D_2 tienen la forma:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -a_1 \end{pmatrix} c_2, \quad D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces la matriz F^{-1} y su inversa son las siguiente:

$$F^{-1} = D_2 C D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -a_1 \end{pmatrix} c_2, \quad F = \frac{1}{(4 + a_1)c_2^2} \begin{pmatrix} a_1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

de la ecuación (3.48) hallamos que $\xi_0 = \frac{1}{3}$. Entonces (3.49) tiene la forma:

$$c_2 > 0, \quad \frac{a_1}{12} > \frac{3}{8} \quad \text{de donde} \quad a_1 < -\frac{9}{2},$$

de acuerdo con lo anterior tomamos $c_2 = 1$, $a_1 = -6$. Entonces la matriz F y el vector a esta dado por:

$$a = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Escojamos el valor de a_0 en la ecuación (3.36) usando la condición (3.50), en nuestro caso toma la forma $0 < a_0 \leq 1/3600$. Escojamos la función de controlabilidad $\theta(x)$ para $x \neq 0$ como la única solución positiva de la ecuación (3.36), entonces recordando que:

$$D_\theta = \begin{pmatrix} \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix},$$

tenemos que la ecuación (3.36) tiene la forma:

$$\frac{1}{1800}\theta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{1800}\theta = \frac{1}{2\theta}x_1^2 + \frac{2}{\theta^2}x_1x_2 + \frac{3}{\theta^3}x_2^2 \iff \frac{1}{900}\theta^4 = \theta^2x_1^2 + 4\theta x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Para la condición inicial $x_0 = (x_1^0, 0)$, tenemos que $\theta_0 = \theta(x_0) = 30x_1^0$.

El control $u(x)$ de la forma (3.37), el cual resuelve el problema de síntesis para el sistema (3.53) y que satisface las condiciones $|u(x)| \leq \frac{1}{10}$, se da mediante la fórmula:

$$u(x) = -\frac{6x_1}{\theta^2(x_1, x_2)} - \frac{3x_2}{\theta(x_1, x_2)}. \quad (3.54)$$

Y satisface $|u(x)| \leq \frac{1}{10}$, para condiciones iniciales $x_0 = (x_1^0, 0)$, el tiempo de recorrido es $\theta(x_0) = 30x_1^0$.

Encontremos la trayectoria del sistema (3.53), que corresponde al control $u = u(x)$ de la forma (3.54) y comienza en el punto $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$. Esta trayectoria es la solución del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{6x_1}{\theta^2(x_1, x_2)} - \frac{3x_2}{\theta(x_1, x_2)}.\end{aligned}$$

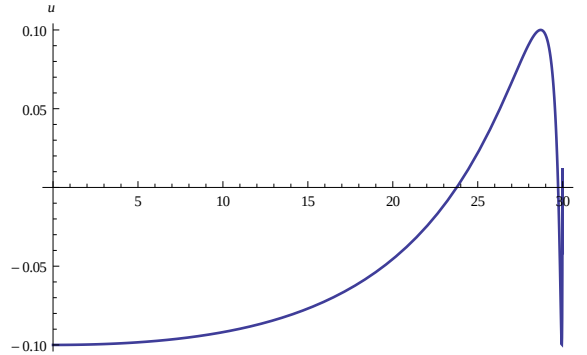
Resolviendo este sistema, encontramos que la trayectoria del sistema canónico usando el control posicional $u(x)$ es:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -\frac{1}{30}(t - 30x_1^0) \left(\cos \ln \left(1 - \frac{t}{30x_1^0} \right) + 2 \sin \ln \left(1 - \frac{t}{30x_1^0} \right) \right), \\ x_2(t) &= -\frac{1}{30}(t - 30x_1^0)^2 \sin \ln \left(1 - \frac{t}{30x_1^0} \right).\end{aligned}$$

El control $u(x)$ sobre la trayectoria $(x_1(t), x_2(t))$ es de la forma

$$u(x(t)) = -\frac{1}{10} \cos \ln \left(1 - \frac{t}{30x_1^0} \right).$$

Es fácil de ver que satisface la restricción, es decir, $\|u(x)\| \leq \frac{1}{10}$.



Gráfica 3.1: la gráfica del control $u((x(t)))$

Ejemplo 2

Resolvamos el problema de síntesis para el sistema canónico con control restringido

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= u, \quad |u| \leq 1.\end{aligned}\tag{3.55}$$

Ya que $\Delta = -\frac{1}{20}$, $\Delta'_1 = -\frac{1}{360}$, $\Delta''_1 = -\frac{1}{60}$, $\Delta'_2 = -\frac{1}{60}$, $\Delta''_2 = -\frac{1}{2}$, (ver [31], pág.37) entonces el vector a de (3.46), la matriz C de (3.47) y la matriz D_3 tienen la forma

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \frac{a_1}{3} - 10 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 5 \\ \frac{5}{2} & 5 & 10 - \frac{a_1}{12} \end{pmatrix} c_4, \quad D_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces la matriz $F^{-1} = D_3 C D_3$ y su inversa son de la siguiente forma:

$$F^{-1} = \frac{1}{(4 + a_1)c_4^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & -5 \\ \frac{5}{4} & -5 & 10 - \frac{a_1}{12} \end{pmatrix} c_4,$$

$$F = -\frac{c_4}{30 + a_1} \begin{pmatrix} -40a_1 & 240 - 12a_1 & 120 \\ 240 - 12a_1 & 180 - 4a_1 & 60 \\ 120 & 60 & 12 \end{pmatrix}.$$

De la ecuación (3.48) hallamos que $\xi_0 = \frac{5}{12}$. Entonces (3.49) tiene la forma:

$$c_4 > 0, \quad \frac{1}{3} - \frac{a_1}{360} > \frac{4}{9},$$

de acuerdo con lo anterior coloquemos $c_4 = 1$, $a_1 = -45$. Entonces:

$$a = \begin{pmatrix} -45 \\ -25 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad F^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 10 & -20 \\ 5 & -20 & 55 \end{pmatrix}, \quad F = 4 \begin{pmatrix} 30 & 13 & 2 \\ 13 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Escojamos el valor de a_0 en la ecuación (3.36) usando la condición (3.50), en nuestro caso toma la forma $0 < a_0 \leq 2/205$. Escojamos la función de controlabilidad $\theta(x)$ para $x \neq 0$ como la única solución positiva de la ecuación (3.36), entonces la ecuación tiene la forma:

$$\theta^6 = 6150x_1^2 + 5330\theta x_1x_2 + 820\theta^2 x_1x_3 + 410\theta^3 x_2x_3 + 1230\theta^2 x_2^2 + 41\theta^4 x_3^2. \quad (3.56)$$

El control $u(x)$ de la forma (3.37), el cual resuelve el problema de síntesis para el sistema (3.55) y que satisface las condiciones $|u(x)| \leq 1$, se da mediante la fórmula:

$$u(x) = -\frac{45}{\theta^3(x)}x_1 - \frac{25}{\theta^2(x)}x_2 - \frac{6}{\theta(x)}x_3. \quad (3.57)$$

Encontremos la trayectoria del sistema (3.55), que corresponde al control $u = u(x)$ de la forma (3.57) y comienza en el punto $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^3$. Esta trayectoria es la solución del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\frac{45}{\theta^3(x)}x_1 - \frac{25}{\theta^2(x)}x_2 - \frac{6}{\theta(x)}x_3. \end{aligned}$$

Ya que $\theta(x)$ representa el tiempo de movimiento de x_0 al origen entonces se cumple $\dot{\theta}(x(t)) = -1$, entonces $\theta(x(t)) = \theta_0 - t$, donde θ_0 es la raíz positiva de la ecuación (3.56) para $x = x_0$. Consecuentemente la trayectoria buscada es solución del problema de Cauchy de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\frac{45}{(\theta_0 - t)^3}x_1 - \frac{25}{(\theta_0 - t)^2}x_2 - \frac{6}{\theta_0 - t}x_3. \\ x_1(0) &= x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_3(0) = x_3^0.\end{aligned}$$

Este sistema se lleva a la ecuación diferencial de la forma:

$$(\theta_0 - t)^3 x_1^{(3)} + 6(\theta_0 - t)^2 \ddot{x}_1 + 25(\theta_0 - t) \dot{x}_1 + 45x_1 = 0,$$

Esta ecuación de Euler, con condiciones iniciales $x_1(0) = x_1^0$, $\dot{x}_1(0) = x_2^0$, $\ddot{x}_1(0) = x_3^0$. Con el cambio de variable $t = \theta_0 - e^\tau$ esta ecuación de Euler se reduce a la ecuación diferencial con coeficientes constantes respecto de la función $y(\tau) = x_1(\theta_0 - e^\tau)$, el cual tiene la forma

$$y''' - 9y'' + 33y' - 45y = 0.$$

Donde tenemos

$$y(\tau) = e^{3\tau} \left(c_1 + c_2 \cos \sqrt{6} + c_3 \sin \sqrt{6} \tau \right),$$

con coeficientes constantes c_1, c_2, c_3 que se hallan de las condiciones iniciales

$$y(\tau_0) = x_1^0, \quad y'(\tau_0) = -\theta_0 x_2^0, \quad y''(\tau_0) - y'(\tau_0) = \theta_0^2 x_3^0, \quad \tau_0 = \ln \theta_0.$$

Estas son iguales a

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{1}{6\theta} \left(\frac{15}{\theta_0^2} x_1^0 + x_3^0 \right), \\ c_2 &= \zeta_1 \cos(\sqrt{6} \ln \theta_0) - \zeta_2 \sin(\sqrt{6} \ln \theta_0), \\ c_3 &= \zeta_1 \sin(\sqrt{6} \ln \theta_0) - \zeta_2 \cos(\sqrt{6} \ln \theta_0).\end{aligned}$$

Aquí

$$\zeta_1 = \frac{1}{6\theta} \left(\frac{9}{\theta_0^2} x_1^0 + \frac{5}{\theta_0} x_2^0 + x_3^0 \right), \quad \zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{6}\theta_0^2} \left(\frac{3}{\theta_0} x_1^0 + x_2^0 \right).$$

Ya que $x_1(t) = y(\ln(\theta_0 - t))$, las funciones $x_2(t)$ y $x_3(t)$ se encuentran diferenciando la función $x_1(t)$, entonces

$$x(t) = \begin{pmatrix} (\theta_0 - t)^3 (\zeta_1 \cos \alpha(t) + \zeta_2 \sin \alpha(t)) \\ (\theta_0 - t)^2 (-3\zeta_1 - (3\zeta_1 + \sqrt{6}\zeta_2)) \cos \alpha(t) + (-3\zeta_2 + \sqrt{6}\zeta_1) \sin \alpha(t) \\ (\theta_0 - t)(6\zeta_1 + 5\sqrt{6}\zeta_2 \cos \alpha(t) - 5\sqrt{6}\zeta_2 \sin \alpha(t)) \end{pmatrix},$$

donde $\alpha(t) = \sqrt{6} \ln \left(1 - \frac{t}{\theta_0} \right)$. Obviamente $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \theta_0$. El control $u(x)$ en la trayectoria $x(t)$ tiene la forma:

$$u(x(t)) = -6c_1 + 5(6\zeta_1 - \sqrt{6}\zeta_2) \cos \alpha(t) + 5(\sqrt{6}\zeta_1 - 6\zeta_2) \sin \alpha(t).$$

Para facilitar los cálculos y evidenciar los resultados resolvamos el problema de arribar al origen desde los puntos de la curva $x_1 = 0$,

$$x_2 = -\frac{41x_3^3}{121}, \quad x_3 > 0.$$

En este caso como se sigue de la ecuación (3.56), el tiempo de recorrido θ_0 del punto

$$x_0 = \left(0, -\frac{41(x_3^0)^2}{121}, x_3^0 \right)^* \text{ es igual a } \frac{41x_3^0}{11}.$$

La trayectoria del sistema que comienza en este punto tiene la forma:

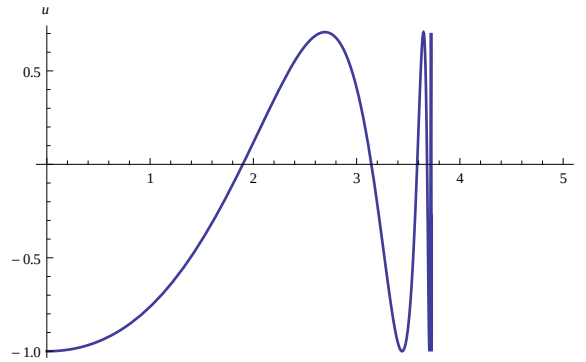
$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{41x_3^0 - 11t}{121} (6 + 5 \cos \alpha(t) + 5\sqrt{6} \sin \alpha(t)) \\ \frac{(41x_3^0 - 11t)^2}{9922} (-6 + 4 \cos \alpha(t) - 3\sqrt{6} \sin \alpha(t)) \\ \frac{(41x_3^0 - 11t)^3}{327426} (6 - 6 \cos \alpha(t) + \sqrt{6} \sin \alpha(t)) \end{pmatrix},$$

donde $\alpha(t) = \sqrt{6} \ln \left(1 - \frac{11t}{41x_3^0} \right)$.

En esta trayectoria el control se define mediante la fórmula

$$u(t) = -\frac{1}{41} (6 + 35 \cos \alpha(t)),$$

y como es fácil de ver, satisface la restricción dada.



Gráfica 3.2: la gráfica del control $u(t)$

Capítulo 4

Principio del máximo admisible

En la parte anterior a este trabajo se consideraron métodos de construcción de controles posicionales continuos que resuelven el problema de síntesis. Al mismo tiempo en los problemas de síntesis óptimo frecuentemente se estudian controles óptimos posicionales discontinuos. Los controles discontinuos que resuelven el problema local de síntesis se puede definir como sigue.

Consideramos el sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

bajo la suposición de que el conjunto Ω es compacto. Sea $Q_\theta = \{x : \theta(x) \leq \theta\}$, donde la función de controlabilidad $\theta(x)$ se define por la función

$$2a_0\theta = (N^{-1}(\theta)x, x), \quad a_0 > 0, \quad (4.2)$$

denotemos mediante $\psi(x)$ el vector soporte de la frontera Q_θ ,

$$\psi(x) = -N^{-1}(\theta(x))x.$$

Vamos a definir $N(\theta)$ donde

$$N(\theta) := \int_0^\theta \left(1 - \frac{t}{\theta}\right) e^{-At} B B^* e^{-A^*t} dt. \quad (4.3)$$

Definición 4.0.13. El control $\bar{u}(x)$ de la relación

$$(\psi(x), \varphi(x, \bar{u}(x))) = \max_{u \in \Omega} (\psi(x), \varphi(x, u(x))), \quad x \neq 0, \quad \bar{u}(0) \in \Omega \quad (4.4)$$

que llamamos el control del principio del máximo admisible.

La igualdad (4.4) determina en la región $Q' = \{x : \theta(x) \leq C'_f\}$, en general el control no continuo y multivaluado $\bar{u}(x)$ (la función $\bar{u}(x)$ es multivaluado en los puntos x , en los cuales

los máximos de esta igualdad se alcanza en valores de u no únicos). Por eso la solución $x(t)$ de la ecuación (4.1) vamos a entender en el sentido de la inclusión diferencial

$$\dot{x} \in F(x) \in \varphi(x, \bar{u}(x)), \quad x(0) = x_0 \in Q'. \quad (4.5)$$

El problema de existencia de la solución de la ecuación (4.5) representa un problema importante, un estudio detallado de este problema se da en [5].

Definición 4.0.14. Dado $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial V con producto interno $\langle, \rangle$ y $W \subset V$ un subconjunto de V , un vector $v \in V$ se llama soporte de W si $\langle v, w \rangle \leq 0 \quad \forall w \in W$.

En particular la condición suficiente de la existencia de la ecuación (4.5) es la suposición de que el conjunto $F(x)$ es un conjunto compacto convexo para $x \in Q'$ y la transformación $F(x)$ es cuasicontinuo superior por inclusión. Se considera la cuestión de la existencia de solución, formularemos el teorema de síntesis posicional.

Teorema 4.0.15. Sea que el problema de Cauchy (4.5) es soluble en el intervalo $[0, \frac{1}{M_f}\theta(x_0)]$ y $x(t)$ es su solución. Entonces existe $0 \leq T(x_0) \leq \frac{1}{M_f}\theta(x_0)$ tal que $x(t) \equiv 0$ para $t \geq T(x_0)$.

Para la demostración ver [5].

En el caso cuando el sistema es lineal respecto del control $\dot{x} = Ax + bu$ el control que se obtiene del principio del máximo admisible toma los valores de la frontera $\bar{u}(x) \in \Omega$ y si el control es unidimensional el sistema tiene la forma $\dot{x} = Ax + bu$, $b \in \mathbb{R}^n$, y la restricción por ejemplo tiene la forma $u \in \partial\Omega = [-1, 1]$, para:

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} -\text{sign } b^* N^{-1}(\theta(x)x) & \text{para } b^* N^{-1}(\theta(x)x) \neq 0, \\ [-1, 1] & \text{para } b^* N^{-1}(\theta(x)x) = 0. \end{cases}$$

Con ayuda del principio del máximo admisible se resuelve además el problema de síntesis global para el sistema $\dot{x} = Ax + bu$, en donde los valores propios de A tiene parte real no negativa.

4.1. Principio del máximo admisible para el sistema canónico

Consideremos el sistema canónico

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= u. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Con restricciones sobre el control de la forma $u \in \Omega = \{u: |u| \leq d\}$. Escribimos el sistema (4.6) de la forma $\dot{x} = Ax + bu$, donde A es una matriz $n \times n$ cuyos elementos encima de la diagonal son iguales a 1 y los restantes son 0, b es un vector n -dimensional cuyo último componente es el 1 y todos los demás 0,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$N(\theta)$ está determinado por (3.16).

En este caso $N^{-1}(\theta) = D_\theta F D_\theta$, el control que resuelve el problema de síntesis lo escogemos de acuerdo al principio de máximo admisible, es decir de la relación:

$$\max_{v \in \Omega} (\psi, Ax + bu) = (\psi, Ax + b\bar{u}), \quad (4.7)$$

donde

$$\psi(x) = -(N^{-1}(\theta)x) = -(D_\theta F D_\theta x). \quad (4.8)$$

Entonces el principio de máximo admisible tiene que $u(x) = -\text{sign}(D_\theta \tilde{F} D_\theta x, b)$.

Definición 4.1.1. La superficie $S \subset \mathbb{R}^n$, que determina la ecuación $(D_\theta \tilde{F} D_\theta x, b) = 0$, se llama superficie de salto del control $\bar{u}(x)$, determinado por el principio del máximo admisible.

Sea D_θ definido por (3.30) y $\tilde{F} = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^n$, tenemos

$$\begin{aligned} b^* D_\theta \tilde{F} D_\theta x &= \begin{pmatrix} 0, & \dots & \theta^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^{-\frac{2n-1}{2}} x_1 \\ \vdots \\ \theta^{-\frac{1}{2}} x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \theta^{-1/2} f_{1n}, & \theta^{-1/2} f_{2n}, & \dots & \theta^{-1/2} f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^{-\frac{2n-1}{2}} x_1 \\ \vdots \\ \theta^{-\frac{1}{2}} x_2 \end{pmatrix} \\ &= \theta^{-n} f_{1n} x_1 + \theta^{-(n+1)} f_{2n} x_2 + \dots + \theta^{-1} f_{nn} x_n. \end{aligned}$$

Lo que es equivalente a

$$b^* D_\theta \tilde{F} D_\theta x = f_{1n} x_1 + \theta f_{2n} x_2 + \dots + \theta^{n-1} f_{nn} x_n.$$

Entonces la ecuación de la superficie de salto de control para el caso general tiene la forma:

$$\sum_{j=1}^n f_{nj} \theta^{j-1} x_j = 0. \quad (4.9)$$

Sea x un punto fijo que pertenece a S , entonces la parte derecha de (4.2) y (4.9) son polinomios $P_1(\tilde{\theta})$ y $P_2(\tilde{\theta})$ respectivamente. El resultante $R(P_1, P_2)$ de estos polinomios que permite obtener las raíces comunes de $P_1(\tilde{\theta})$ y $P_2(\tilde{\theta})$ definido en (A.3.2).

$$\begin{vmatrix} 2a_0 & 0 & f_{nn}x_n^2 & 2f_{n-1n}x_{n-1}x_n & \dots & 2f_{12}x_1x_2 & f_{11}x_1^2 \\ f_{nn}x_n & f_{n-1n}x_{n-1} & f_{n-2n}x_{n-2} & f_{n-3n}x_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & f_{nn}x_n & f_{n-1n}x_{n-1} & f_{n-2n}x_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f_{12}x_2 & f_{11}x_1 \end{vmatrix} \quad (4.10)$$

La ecuación (4.2) y (4.9) puede tener una raíz que no es positiva consecuentemente la superficie que se determina mediante (4.10) además de los puntos de la superficie de salto puede contener otros puntos, quedan los puntos en los cuales se tiene una raíz común positiva.

Consideremos dos ejemplos $n = 2$ y $n = 3$. Determinaremos la superficie de salto de control para el sistema canónico.

Ejemplo 1

En el caso $n = 2$ el sistema (4.6) tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Con restricciones de la forma $|u| \leq 1$. Escribamos el sistema (4.11) en forma matricial

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

a_0 se obtiene mediante

$$a_0 = \frac{d}{2(F^{-1}a, a)},$$

$$a^* F^{-1} a = (-1 \quad -2) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 9/2, \quad a_0 = \frac{1}{2(9/2)} = 1/9.$$

Ahora encontramos la función de controlabilidad $\theta(x)$ mediante

$$2a_0\theta = (D_\theta F D_\theta x, x) = x^* D_\theta F D_\theta x,$$

$$\begin{aligned}
\frac{2\theta}{9} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\theta^{-3/2} \\ x_2\theta^{-1/2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x_1\theta^{-3/2} + x_2\theta^{-1/2} \\ x_1\theta^{-3/2} + x_2\theta^{-1/2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^{-3/2}(3x_1\theta^{-3/2} + x_2\theta^{-1/2}) \\ \theta^{-1/2}(x_1\theta^{-3/2} + x_2\theta^{-1/2}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x_1\theta^{-3} + x_2\theta^{-2} \\ x_1\theta^{-2} + x_2\theta^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\frac{2}{9}\theta = 3x_1^2\theta^{-3} + x_1x_2\theta^{-2} + x_1x_2\theta^{-2} + x_2^2\theta^{-1},$$

de donde

$$\frac{2}{9}\theta^4 - \theta^2x_2^2 - 2\theta x_1x_2 - 3x_1^2 = 0. \quad (4.12)$$

Ahora la ecuación para el salto de control de acuerdo a (4.9) para el caso $n = 2$ tiene la forma

$$f_{21}x_1 + f_{22}\theta(x)x_2 = 0,$$

entonces al sustituir los valores correspondientes de f_{21} y f_{22} tenemos

$$x_1 + \theta x_2 = 0. \quad (4.13)$$

A continuación despejamos θ de la ecuación (4.13) tenemos

$$x_1 = -\theta x_2.$$

El valor de x_1 se sustituye en la ecuación (4.12)

$$\frac{2}{9}\theta^4 - \theta^2x_2^2 - 2\theta x_1x_2 - 3x_1^2 = 0,$$

de donde

$$\frac{2}{9}\theta^4 - \theta^2x_2^2 + \theta x_2 2\theta x_2 - 3(\theta x_2)^2 = \frac{2}{9}\theta^4 - \theta^2x_2^2 + 2\theta^2x_2^2 - 3\theta^2x_2^2 = \frac{2}{9}\theta^4 - 2\theta^2x_2^2$$

$$\frac{2}{9}\theta^4 = 2\theta^2x_2^2.$$

Es decir

$$\theta^2 = 9x_2^2 \quad \theta = 3|x_2|$$

Consecuentemente, la ecuación de superficie de salto de control tiene la forma

$$x_1 = -3x_2|x_2|.$$

De manera análoga podemos llevar a cabo el despeje de θ , aplicando el método del resultante y utilizando la ecuación (4.12) y (4.13), la ecuación (4.10) tiene la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{9} & 0 & -x_2^2 & -2x_1x_2 & -3x_1^2 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Donde $\frac{1}{9}x_1^4 - x_1^2x_2^4 = 0$. Es decir $x_1 = -\theta x_2$ y $\theta > 0$ para x_1x_2 . Consecuentemente, la ecuación de salto de control se da mediante la igualdad

$$x_1 = -3x_2|x_2|.$$

El control que resuelve el problema de síntesis lo escogemos del principio de máximo admisible de la relación (4.7).

La función $\psi(x)$ se obtiene de la ecuación (4.8) y tiene la siguiente forma:

$$\psi(x) = -N^{-1}x = -D_\theta F D_\theta x.$$

Sea

$$D_\theta = \begin{pmatrix} \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

para el caso $n = 2$ tenemos

$$\begin{aligned} \psi(x) &= - \begin{pmatrix} \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\theta^{-3/2} \\ x_2\theta^{-1/2} \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x_1\theta^{-3/2} + x_2\theta^{-1/2} \\ x_1\theta^{-3/2} + x_2\theta^{-1/2} \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \theta^{-3/2}(3x_1\theta^{-3/2} + x_2\theta^{-1/2}) \\ \theta^{-1/2}(x_1\theta^{-3/2} + x_2\theta^{-1/2}) \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 3x_1\theta^{-3} + x_2\theta^{-2} \\ x_1\theta^{-2} + x_2\theta^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3x_1}{\theta^3} - \frac{x_2}{\theta^2} \\ -\frac{x_1}{\theta^2} - \frac{x_2}{\theta} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} -\frac{3x_1 + x_2\theta}{\theta^3} \\ -\frac{x_1 + x_2\theta}{\theta^2} \end{pmatrix}.$$

Ahora sustituimos $\theta = 3 |x_2|$ en la igualdad anterior. Tenemos

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} -\frac{3x_1 + 3x_2 |x_2|}{(3 |x_2|)^3} \\ -\frac{x_1 + 3x_2 |x_2|}{(3 |x_2|)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x_1 + |x_2|x_2}{9|x_2|^3} \\ -\frac{x_1 + 3|x_2|x_2}{9|x_2|^2} \end{pmatrix}.$$

Para el sistema canónico (4.11) escrita en su forma matricial $\dot{x} = Ax + bu$, se expresa por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

de donde

$$Ax + bu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix}.$$

Así del principio de máximo admisible tenemos:

$$\max_{u \in \Omega} (\psi(x), Ax + Bu) = (\psi(x), Ax + B\bar{u}) = (Ax + Bu)^* \psi(x),$$

$$(Ax + Bu)^* \psi(x) = \begin{pmatrix} x_2 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{x_1 + |x_2|x_2}{9|x_2|^3} \\ -\frac{x_1 + 3|x_2|x_2}{9|x_2|^2} \end{pmatrix} = x_2 \left(-\frac{x_1 + |x_2|x_2}{9|x_2|^3} \right) - u \left(\frac{x_1 + 3|x_2|x_2}{9|x_2|^2} \right).$$

Entonces (4.7) es de la siguiente forma:

$$\max_{u \in \Omega} \left(-\frac{x_2(x_1 + |x_2|x_2)}{9|x_2|^3} - \frac{u(x_1 + 3|x_2|x_2)}{9|x_2|^2} \right) = -\frac{x_2(x_1 + |x_2|x_2)}{9|x_2|^3} - \frac{\bar{u}(x_1 + 3|x_2|x_2)}{9|x_2|^2}.$$

De esta manera el control del máximo admisible es:

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_1 + 3|x_2|x_2 < 0, \\ -1, & \text{si } x_1 + 3|x_2|x_2 > 0. \end{cases}$$

Observación 4.1.2. *El problema de tiempo de control óptimo, el control también es igual a ± 1 , pero las curvas de conmutación son otras.*

Determinemos la función de control de otra manera, recordemos que

$$N(\theta) = \int_0^\theta \begin{pmatrix} 1 - \frac{t}{\theta} \\ -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \frac{\theta^3}{12} & -\frac{\theta^2}{6} \\ -\frac{\theta^2}{6} & \frac{\theta}{2} \end{pmatrix},$$

y la inversa

$$N^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{36}{\theta^3} & \frac{12}{\theta^2} \\ \frac{12}{\theta^2} & \frac{6}{\theta} \end{pmatrix}, \text{ de donde } F = \begin{pmatrix} 36 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix},$$

Para determinar la función de control $\theta(x_1, x_2)$ utilizamos $2a_0\theta = (N^{-1}x, x)$, además a_0 satisface la igualdad $a_0 = \frac{2}{f_{22}} = \frac{1}{3}$, es decir la función de control se determina como solución de la ecuación:

$$\frac{2}{3}\theta^4 - 6\theta^2x_2^2 - 24\theta x_1x_2 - 36x_1^2 = 0. \quad (4.14)$$

La superficie de salto de control se da por la ecuación (4.9) y tiene la siguiente forma:

$$f_{21}x_1 + f_{22}\theta(x)x_2 = 0$$

es decir:

$$2x_1 + \theta x_2 = 0. \quad (4.15)$$

Despejamos la función θ de la ecuación (4.14) y (4.15), de la ecuación (4.15) tenemos $x_1 = -\frac{1}{2}\theta x_2$ sustituyendo este valor en la ecuación (4.14) obtenemos $\theta = \frac{3\sqrt{2}}{2}|x_2|$. Consecuentemente, la ecuación de superficie de salto de control tiene la forma

$$x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}x_2|x_2|.$$

De manera análoga despejamos θ con la ayuda del resultante la ecuación (4.10) tenemos

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -6x_2^2 & -24x_1x_2 & -36x_1^2 \\ x_2 & 2x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 2x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & 2x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & 2x_1 \end{vmatrix} = 0.$$

De donde $\frac{32}{3}x_1^4 - 12x_1^2x_2^4 = 0$. Es decir $x_1 = -\frac{1}{2}\theta x_2$ y $\theta > 0$, entonces $x_1x_2 < 0$. Consecuentemente la ecuación de superficie de salto de control se da mediante la ecuación

$$x_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}x_2|x_2|.$$

El control de que resuelve el problema de síntesis lo escogemos mediante el principio de control admisible, es decir, de la relación (4.7), donde $\psi(x)$ se obtiene de (4.8), para el caso $n = 2$ tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -(N^{-1}(\theta)x) = - \begin{pmatrix} \frac{36}{\theta^3} & \frac{12}{\theta^2} \\ \frac{12}{\theta^2} & \frac{6}{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \frac{36x_1}{\theta^3} + \frac{12x_2}{\theta^2} \\ \frac{12x_1}{\theta^2} + \frac{6x_2}{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{36x_1}{\theta^3} - \frac{12x_2}{\theta^2} \\ -\frac{12x_1}{\theta^2} - \frac{6x_2}{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{36x_1 + 12x_2\theta}{\theta^3} \\ -\frac{12x_1 + 6\theta x_2}{\theta^2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ahora sustituimos el valor de $\theta = \frac{3\sqrt{2}}{2} |x_2|$, tenemos

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} -\frac{8(\sqrt{2}x_1 + |x_2|)x_2}{3|x_2|^3} \\ -\frac{8x_1 + 6\sqrt{2}|x_2|}{3|x_2|^2} \end{pmatrix}.$$

Así del principio de máximo admisible tenemos:

$$\begin{aligned}(Ax + bu)^*\psi(x) &= \begin{pmatrix} x_2 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{8(\sqrt{2}x_1 + |x_2|)x_2}{3|x_2|^3} \\ -\frac{8x_1 + 6\sqrt{2}|x_2|}{3|x_2|^2} \end{pmatrix} \\ &= x_2 \left(-\frac{8(\sqrt{2}x_1 + |x_2|)x_2}{3|x_2|^3} \right) - u \left(\frac{8(x_1 + 6\sqrt{2}|x_2|)}{3|x_2|^2} \right).\end{aligned}$$

Entonces (4.7) tiene la forma:

$$\begin{aligned}\max_{u \in \Omega} & \left(-\frac{8x_2(\sqrt{2}x_1 + |x_2|x_2)}{3|x_2|^3} - \frac{u(8x_1 + 6\sqrt{2}|x_2|x_2)}{3|x_2|^2} \right) \\ &= -\frac{8x_2(\sqrt{2}x_1 + |x_2|x_2)}{3|x_2|^3} - \frac{\bar{u}(8x_1 + 6\sqrt{2}|x_2|x_2)}{3|x_2|^2}.\end{aligned}$$

De esta manera:

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}x_2|x_2| < 0, \\ -1, & \text{si } x_1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}x_2|x_2| > 0. \end{cases}$$

4.2. Determinación de las trayectorias óptimas del punto x_0 al origen

El control $\bar{u}(x)$ obtenido mediante el principio del máximo admisible tiene las siguientes ecuaciones para

$$x_2 > 0, \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\kappa x_2^2, \quad \kappa > 0, \quad (4.16)$$

$$x_2 < 0, \quad \Rightarrow \quad x_1 = \kappa x_2^2, \quad \kappa > 0. \quad (4.17)$$

A partir de (2.29) para el intervalo de tiempo en el que $u \equiv 1$, se reescribe como

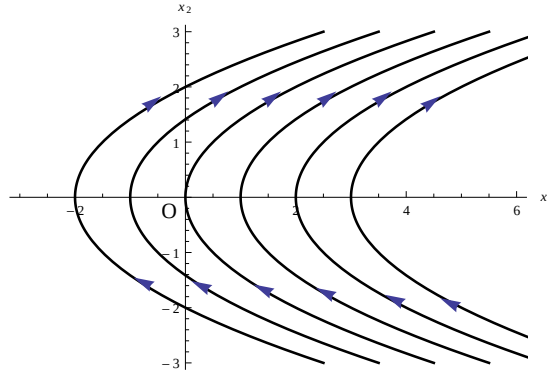
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= 1. \end{aligned}$$

Entonces

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + d_1. \quad (4.18)$$

Por lo tanto, la porción de la trayectoria fase para la que $u \equiv 1$, a partir de (2.29) se genera un arco de la parábola (4.18), (ver cap. 2).

La familia de parábolas (4.18) se muestra en la gráfica 4.1.

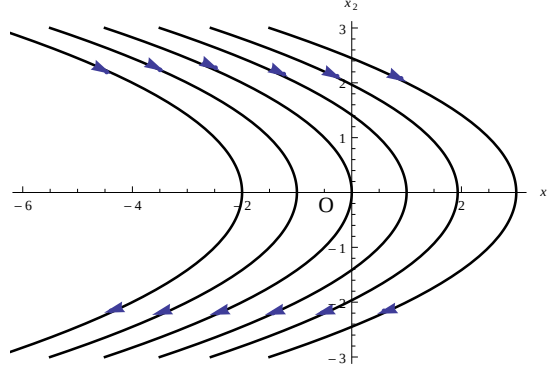


Gráfica 4.1: $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + d_1$.

Análogamente, para el intervalo de tiempo en el que $u \equiv -1$, tenemos que las trayectorias son arcos parabólicos, y se determina por la siguiente ecuación

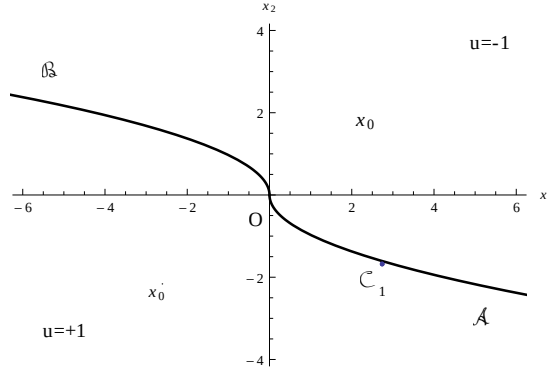
$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + d'_1. \quad (4.19)$$

La familia de parábolas (4.19) se muestra en la gráfica 4.2.



Gráfica 4.2: $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + d'_1$.

Los puntos de fase se mueven hacia arriba a lo largo de parábolas (4.18) (desde $\dot{x}_2 = u = +1$), y hacia abajo a lo largo de las parábolas (4.19) ($\dot{x}_2 = -1$). La gráfica correspondiente para (4.16) y (4.17) se muestra en la gráfica 4.3.



Gráfica 4.3: $x_1 + \frac{3\sqrt{2}}{4} |x_2| x_2 = 0$.

4.2.1. Fórmula para determinar el tiempo de traslado del punto x_0 al origen

Sea que el punto x_0 repose encima de la línea AOB (ver gráfica 4.3). Denotemos las coordenadas de este punto mediante (x_1^0, x_2^0) . Para que la parábola (4.19) pase a través del punto x_0 , es necesario y suficiente que las coordenadas de este punto satisfagan la ecuación (4.19):

$$x_1^0 = -\frac{1}{2}x_2^0 + d'_1$$

De donde tenemos $d'_1 = x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2$. De esta manera, la parábola (2.33), que pasa por el punto x_0 se representa por la ecuación

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2. \quad (4.20)$$

El punto conmutación $\mathcal{C}_1$, representado en la gráfica 4.3, puede ser encontrado como punto de intersección de la parábola (4.16) con la línea $\mathcal{AO}$ (ver gráfica 4.3), cuya ecuación tiene la forma

$$x_1 = \kappa x_2^2, \quad \kappa > 0. \quad (4.21)$$

Para hallar el punto de intersección es necesario resolver el sistema de ecuaciones (4.20) y (4.21). Sustrayendo la relación (4.21) de (4.20), tenemos

$$x_{2\mathcal{C}_1}^2 = \left(\frac{2}{2\kappa + 1} \right) \left(x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2 \right), \text{ de donde } x_{2\mathcal{C}_1} = \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2\kappa + 1} \right) \left(x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2 \right)}.$$

Para el punto $\mathcal{C}_1$ es necesario tomar el signo menos, ya que en punto $\mathcal{C}_1$ se ubica debajo del eje de las abscisas. De esta manera encontramos la ordenada del punto $\mathcal{C}_1$.

$$x_{2\mathcal{C}_1} = -\sqrt{\left(\frac{2}{2\kappa + 1} \right) \left(x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2 \right)}. \quad (4.22)$$

Para encontrar la primera coordenada del punto $\mathcal{C}_1$ lo que hacemos es sustituir (4.22) en (4.20) de donde

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{2\kappa + 1} \right) \left(x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2 \right) + x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2 = -\frac{1}{2\kappa + 1}x_1^0 + x_1^0 - \frac{(x_2^0)^2}{2(2\kappa + 1)} + \frac{1}{2}(x_2^0)^2 \\ &= \frac{2\kappa + 1 - 1}{2\kappa + 1}x_1^0 + \frac{2\kappa + 1 - 1}{2(2\kappa + 1)}(x_2^0)^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$x_{1\mathcal{C}_1} = \frac{2\kappa}{2\kappa + 1}x_1^0 + \frac{2\kappa}{2(2\kappa + 1)}(x_2^0)^2. \quad (4.23)$$

(La absisa del punto $\mathcal{C}_1$ no lo utilizaremos). Ya que durante el movimiento del punto x_0 hasta el punto $\mathcal{C}_1$ tenemos $u \equiv -1$, entonces la segunda de las ecuaciones (2.29) tiene la forma $\dot{x}_2 = -1$, integrando, tenemos (mediante α se denota como antes el momento de conmutación, es decir el momento de paso de la trayectoria a través del punto $\mathcal{C}_1$).

$$x_{2\mathcal{C}_1} - x_2^0 = \int_{t_0}^{\alpha} \dot{x}_2 dt = \int_{t_0}^{\alpha} (-1) dt = t_0 - \alpha,$$

entonces

$$-\eta(x_{2\mathcal{C}_1} - x_2^0) = \eta(t_0 - \alpha). \quad (4.24)$$

Análogamente, durante el movimiento del punto $\mathcal{C}_1$ al origen de coordenadas tenemos $u = \eta$ y por eso $\dot{x}_2 = +\eta$, entonces

$$-x_{2\mathcal{C}_1} = 0 - x_{2\mathcal{C}_1} = \int_{\alpha}^{t_1} \dot{x}_2 dt = \int_{\alpha}^{t_1} (\eta) dt = (\eta)(t_1 - \alpha),$$

entonces

$$-x_{2\mathcal{C}_1} = \eta(t_1 - \alpha). \quad (4.25)$$

Sustrayendo (4.24) de (4.25), tenemos

$$-x_{2\mathcal{C}_1} - \eta(x_{2\mathcal{C}_1} - x_2^0) = -\eta(t_0 - \alpha) + \eta(t_1 - \alpha),$$

entonces

$$-x_{2\mathcal{C}_1} \left(\frac{1 + \eta}{\eta} \right) + x_2^0 = t_1 - t_0.$$

Pero $t_1 - t_0$ es tiempo de movimiento a través de la trayectoria admisible considerada desde el punto x_0 al origen de coordenadas es decir, el tiempo $T^{\mathcal{K}}(x_0)$ de movimiento admisible. Así,

$$T^{\mathcal{K}}(x_0) = x_2^0 - x_{2\mathcal{C}_1} \left(\frac{1 + \eta}{\eta} \right) = x_2^0 + \left(\frac{1 + \eta}{\eta} \right) \sqrt{\left(\frac{2}{2\kappa + 1} \right) \left(x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2 \right)},$$

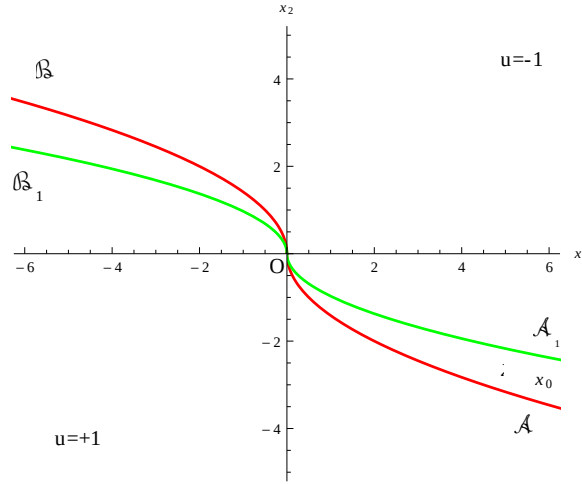
entonces

$$T^{\mathcal{K}}(x_0) = x_2^0 + \frac{(1 + \eta)\sqrt{2}}{\eta\sqrt{2\kappa + 1}} \sqrt{x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2}. \quad (4.26)$$

Esta fórmula fue deducida para los puntos x_0 situados encima de la línea $\mathcal{AOB}$. Es fácil ver que esta fórmula (y los razonamientos, con ayuda de los cuales fue deducida) permanece en vigor en el caso cuando el punto x_0 se ubica en la línea $\mathcal{AOB}$. Precisamente si este punto se ubica en el arco $\mathcal{AO}$, entonces el punto $\mathcal{C}_1$ coincide con el punto x_0 (en particular, durante todo el movimiento $u = \eta$). De esta manera, la fórmula (4.26) se cumple si el punto $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ se ubica encima de la línea $\mathcal{AOB}$, entonces el tiempo admisible de movimiento $T^{\mathcal{K}}(x_0)$ puede ser calculado de manera análoga. Sin embargo, es más sencillo notar que el punto $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ se ubica arriba de la línea $\mathcal{AOB}$, entonces el punto x'_0 con coordenadas $(-x_1^0, -x_2^0)$ que es simétrica al punto x_0 con respecto al origen de coordenadas, se ubica debajo de la línea $\mathcal{AOB}$, y el tiempo del movimiento admisible de los puntos x_0 y x'_0 es el mismo: $T^{\mathcal{K}}(x_0) = T^{\mathcal{K}}(x'_0)$. Por eso, sustituyendo en la fórmula (4.26) x_1^0 y x_2^0 correspondiente por $-x_1^0$ y $-x_2^0$, tenemos la función $T^{\mathcal{K}}(x_0)$ para los puntos $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$, que se ubican debajo de la línea $\mathcal{AOB}$ (o en la misma línea):

$$T^{\mathcal{K}}(x'_0) = -x_2^0 + \frac{(1 + \eta)\sqrt{2}}{\eta\sqrt{2\kappa + 1}} \sqrt{-x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2}. \quad (4.27)$$

Ahora veamos que sucede cuando el punto x_0 con las coordenadas x_1^0, x_2^0 , reposa debajo del arco $\mathcal{OA}_1$, y encima del arco $\mathcal{OA}$, es decir, el punto esta debajo de la superficie de



Gráfica 4.4: Superficie de conmutación, Pontryagin (rojo) y Korobov (verde).

conmutación de Korobov y encima de la superficie de conmutación de Pontryagin como se muestra en la siguiente gráfica

Para que la parábola (4.19) pase a través del punto x_0 , es necesario y suficiente que las coordenadas de este punto satisfagan la ecuación (4.19):

$$x_1^0 = \frac{1}{2}(x_2^0)^2 + d_1$$

De donde obtenemos $d_1 = x_1^0 - \frac{1}{2}(x_2^0)^2$. De esta manera, la parábola (4.19), que pasa por el punto x_0 se representa por la ecuación

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + x_1^0 - \frac{1}{2}(x_2^0)^2 \quad (4.28)$$

El punto de conmutación $\mathcal{C}_2$, representado en la gráfica 4.5, puede ser encontrado como punto de intersección de la parábola (4.28) con la línea $\mathcal{A}OB$, cuya ecuación tiene la forma

$$x_1 = \kappa x_2^2, \quad \kappa > 0. \quad (4.29)$$

Para hallar el punto de intersección es necesario resolver el sistema de ecuaciones (4.28) y (4.29). Sustrayendo la relación (4.29) de (4.28), tenemos

$$x_{2\mathcal{C}_2}^2 = \left(\frac{2}{2\kappa - 1} \right) \left(x_1^0 - \frac{1}{2}(x_2^0)^2 \right), \text{ de donde } x_{2\mathcal{C}_2} = \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2\kappa - 1} \right) \left(x_1^0 - \frac{1}{2}(x_2^0)^2 \right)}.$$

Para el punto $\mathcal{C}_2$ es necesario tomar el signo menos, ya que en punto $\mathcal{C}_2$ se ubica debajo del eje de las abscisas. De esta manera encontramos la ordenada del punto $\mathcal{C}_2$.

$$x_{2\mathcal{C}_2} = -\sqrt{\frac{2}{2\kappa - 1}} \sqrt{x_1^0 - \frac{1}{2}(x_2^0)^2}. \quad (4.30)$$

Para encontrar la primera coordenada del punto $\mathcal{C}_2$ lo que hacemos es sustituir (4.30) en (4.28) de donde

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2\kappa - 1} \right) \left(x_1^0 - \frac{1}{2}(x_2^0)^2 \right) + x_1^0 - \frac{1}{2}(x_2^0)^2 = \frac{2\kappa}{2\kappa - 1} x_1^0 + \frac{-1 - 4\kappa + 2}{2(\kappa - 1)} (x_2^0)^2.$$

Entonces

$$x_{1\mathcal{C}_2} = \frac{2}{2\kappa - 1} x_1^0 + \frac{1 - 4\kappa}{2(2\kappa - 1)} (x_2^0)^2. \quad (4.31)$$

Durante el movimiento del punto x_0 hasta el punto $\mathcal{C}_2$ tenemos $u \equiv 1$, entonces la segunda de las ecuaciones (2.29) tiene la forma $\dot{x}_2 = 1$, integrando, tenemos (mediante α se denota como antes el momento de conmutación, es decir el momento de paso de la trayectoria a través del punto $\mathcal{C}_2$).

$$x_{2\mathcal{C}_2} - x_2^0 = \int_{t_0}^{\alpha} \dot{x}_2 dt = \int_{t_0}^{\alpha} (1) dt = \alpha - t_0,$$

entonces

$$\eta(x_{2\mathcal{C}_2} - x_2^0) = \eta\alpha - t_0. \quad (4.32)$$

Análogamente, durante el movimiento del punto $\mathcal{C}_2$ al origen de coordenadas tenemos $u = \eta$ y por eso $\dot{x}_2 = +\eta$, entonces

$$-x_{2\mathcal{C}_2} = 0 - x_{2\mathcal{C}_2} = \int_{\alpha}^{t_1} \dot{x}_2 dt = \int_{\alpha}^{t_1} (\eta) dt = \eta(t_1 - \alpha),$$

entonces

$$-x_{2\mathcal{C}_2} = \eta(t_1 - \alpha). \quad (4.33)$$

Sumando (4.32) y (4.33), tenemos

$$-x_{2\mathcal{C}_2} + \eta(x_{2\mathcal{C}_2} - x_2^0) = \eta(t_1 - \alpha) + \eta(\alpha - t_0)$$

Entonces

$$-x_{2\mathcal{C}_2} \left(\frac{\eta - 1}{\eta} \right) - x_2^0 = t_1 - t_0.$$

Pero $t_1 - t_0$ es el tiempo de movimiento a través de la trayectoria admisible considerada desde el punto x_0 al origen de coordenadas es decir, el tiempo $T^{\mathcal{K}}(x_0)$ de movimiento admisible. Así,

$$T^{\mathcal{K}}(x_0) = -x_2^0 - \left(\frac{\eta - 1}{\eta} \right) x_{2\mathcal{C}_2}. \quad (4.34)$$

Sustituyendo (4.31) tenemos

$$T^{\mathcal{K}}(x_0) = -x_2^0 + \left(\frac{\eta - 1}{\eta} \right) \sqrt{\frac{2}{2\kappa - 1}} \sqrt{x_1^0 - \frac{1}{2}(x_2^0)^2},$$

entonces

$$T^{\mathcal{K}}(x_0) = -x_2^0 + \frac{\sqrt{2}(\eta - 1)}{\eta(\sqrt{2\kappa - 1})} \sqrt{x_1^0 - \frac{1}{2}(x_2^0)^2}. \quad (4.35)$$

De esta manera, la fórmula (4.35) se cumple si el punto $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ se ubica encima de la línea $\mathcal{OB}_1$, entonces el tiempo admisible de movimiento $T^{\mathcal{K}}(x_0)$ puede ser calculado de manera análoga. Sin embargo, es más sencillo notar que el punto $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ se ubica debajo de la línea $\mathcal{BO}$ y encima de la línea $\mathcal{OB}_1$, entonces el punto x'_0 con coordenadas $(-x_1^0, -x_2^0)$ que es simétrica al punto x_0 con respecto al origen de coordenadas, se ubica encima de la línea $\mathcal{OB}_1$, y el tiempo del movimiento admisible de los puntos x_0 y x'_0 es el mismo: $T^{\mathcal{K}}(x_0) = T^{\mathcal{K}}(x'_0)$. Sustituyendo en la fórmula (4.35) x_1^0 y x_2^0 correspondiente por $-x_1^0$ y $-x_2^0$, tenemos

$$T^{\mathcal{K}}(x'_0) = x_2^0 + \frac{\sqrt{2}(\eta - 1)}{\eta(\sqrt{2\kappa - 1})} \sqrt{-x_1^0 - \frac{1}{2}(x_2^0)^2}. \quad (4.36)$$

Sea

$$\eta_0 := \frac{(1 + \eta)\sqrt{2}}{\eta\sqrt{2\kappa + 1}},$$

$$\kappa_0 := \frac{\sqrt{2}(\eta - 1)}{\eta(\sqrt{2\kappa - 1})}.$$

Consecuentemente

$$T^{\mathcal{K}}(x_0) = \begin{cases} x_2^0 + \eta_0 \sqrt{x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2}, & \text{Si el punto } x_0 = (x_1^0, x_2^0) \text{ se ubica encima de } \mathcal{BOA}_1 \\ & \text{o sobre la misma,} \\ -x_2^0 + \eta_0 \sqrt{-x_1^0 + \frac{1}{2}(x_2^0)^2}, & \text{Si el punto } x_0 = (x_1^0, x_2^0) \text{ se ubica debajo de } \mathcal{AOB}_1 \\ & \text{o sobre la misma,} \\ -x_2^0 + \kappa_0 \sqrt{x_1^0 - \frac{1}{2}(x_2^0)^2}, & \text{Si el punto } x_0 = (x_1^0, x_2^0) \text{ se ubica entre } \mathcal{A}_1\mathcal{OA}, \\ x_2^0 + \kappa_0 \sqrt{-x_1^0 - \frac{1}{2}(x_2^0)^2}, & \text{Si el punto } x_0 = (x_1^0, x_2^0) \text{ se ubica entre } \mathcal{BOB}_1. \end{cases}$$

Observemos que si el punto $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ se ubica en el arco $\mathcal{OA}_1$ (es decir, $x_1^0 = \frac{1}{2}(x_2^0)^2$ y en particular $x_2^0 < 0$) entonces la expresión (4.26) es de la forma $T^{\mathcal{K}}(x_0) = x_2^0 + \eta_0 \mid (x_2^0)^2 \mid = x_2^0 + \eta_0(-x_2^0) = x_2^0(1 - \eta)$, mientras que la expresión (4.36) reesulta $T^{\mathcal{K}}(x_0) = -x_2^0(1 - \eta_0)$. En otras palabras, en el arco $\mathcal{OA}_1$ ambas fórmulas (4.26), (4.36) dan los mismos valores $T^{\mathcal{K}}(x_0)$. Lo mismo se cumple en el arco $\mathcal{OB}_1$. Esto demuestra que, encima y debajo de la línea $\mathcal{A}_1\mathcal{OB}_1$ la función $T^{\mathcal{K}}(x_0)$ se define de dos maneras distintas mediante las fórmulas (4.26) y (4.36), en la misma línea $\mathcal{A}_1\mathcal{OB}_1$ estas fórmulas coinciden, y por eso la función $T^{\mathcal{K}}(x_0)$ es continua en todo el plano.

4.2.2. Ejemplo para $n = 2$

Consideremos el sistema canónico (2.29), para el caso $n = 2$, el problema a considerar es el siguiente: A partir de un punto fase x_0 , encontrar la trayectoria que traslade el punto x_0 al origen $(0,0)$, así como el tiempo óptimo de recorrido.

Vamos a encontrar la trayectoria del punto $x_0 = (x_1^0, x_2^0) = (0, 1)$ al punto $\mathcal{C}_1$, este punto, se encuentra sobre la trayectoria (4.20), y la trayectoria al punto $\mathcal{C}_1$ se determinó por

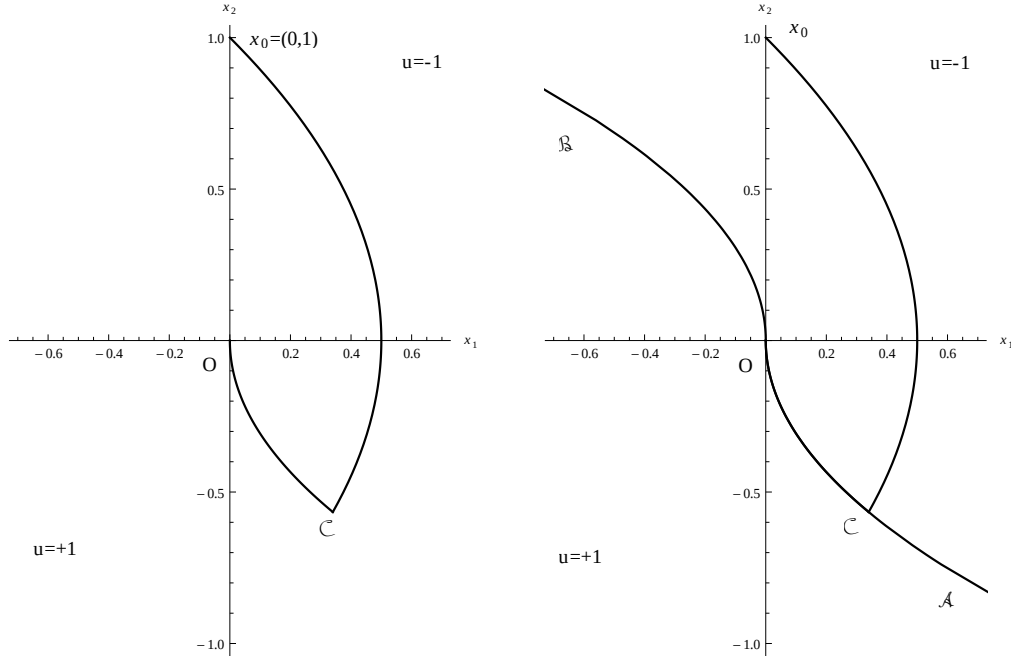
$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}. \quad (4.37)$$

Las coordenadas del punto $\mathcal{C}_1 = (x_{1\mathcal{C}_1}, x_{2\mathcal{C}_1})$ se determinan por (4.22) y (4.23), de donde

$$x_{1\mathcal{C}_1} := \frac{3\sqrt{2}}{2(2 + 3\sqrt{2})},$$

$$x_{2\mathcal{C}_1} := -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + 3\sqrt{2}}}.$$

El punto $\mathcal{C}_1$ es el punto de intersección con la trayectoria (4.21). El tiempo de traslado al origen, se obtiene por (4.26), de donde



Gráfica 4.5: Trayectoria del punto x_0 al origen.

$$T^{\mathcal{K}}(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{11}{14} (1 + 2\sqrt{2})}.$$

La trayectoria que traslada el estado inicial x_0 al origen, se muestra en la gráfica 4.5, y el tiempo de traslado en $T^{\mathcal{K}}(x_0)$ del punto x_0 al origen es el tiempo T .

Ahora vamos a encontrar la trayectoria del punto x_0 a un punto $\mathcal{C}_2$, sea $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$, de donde

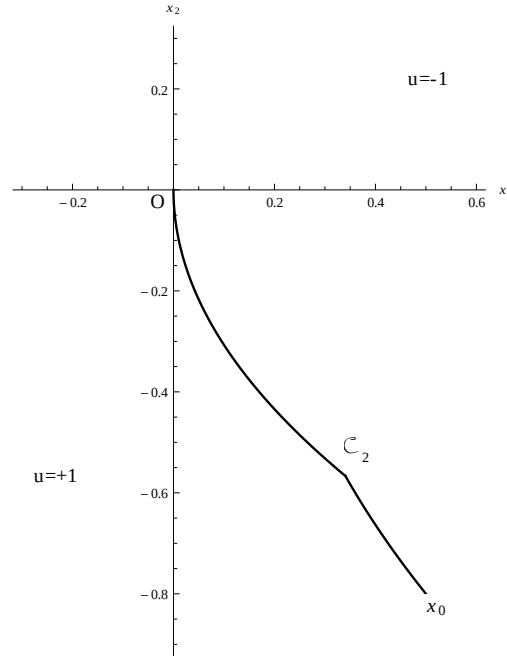
$$\begin{aligned} x_1^0 &:= \frac{5}{10}, \\ x_2^0 &:= -\frac{8}{10}. \end{aligned}$$

Este punto, se encuentra sobre la trayectoria (2.36), y la trayectoria al punto $\mathcal{C}_2$ se determinado por

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{5}{10} + \frac{64}{200}. \quad (4.38)$$

Las coordenadas del punto $\mathcal{C}_2 = (x_{1\mathcal{C}}, x_{2\mathcal{C}})$, se determinan por (4.30) y (4.31), de donde

$$\begin{aligned} x_{1\mathcal{C}} &:= -\frac{3}{5}\sqrt{\frac{1}{7}\left(2+3\sqrt{2}\right)} \\ x_{2\mathcal{C}} &:= \frac{3}{\sqrt{6\sqrt{2}-4}} - \frac{24}{175}\left(3+\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$



Gráfica 4.6: Trayectoria del punto x_0 al origen.

El punto $\mathbb{C}_2$ es el punto de intersección con la trayectoria (4.29). El tiempo de traslado al origen, se obtiene por (4.35), donde

$$T^{\mathcal{K}}(x_0) = \frac{1}{10} \left(8 + 3\sqrt{6\sqrt{2} - 4} \right).$$

Entonces la trayectoria que traslada el estado inicial x_0 al origen, se muestra en la gráfica 4.6, y el tiempo de traslado es $T^{\mathcal{K}}(x_0)$, generalmente denotado por T_{min} .

4.2.3. Ejemplo para $n = 3$

Consideremos ahora el sistema canónico (4.6) para el caso $n = 3$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= u. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Con restricciones de la forma $|u| \leq 1$. Escribimos el sistema (4.39) en la forma (4.1), de donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz tiene la forma $N(\theta)$

$$N(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\theta^5}{120} & -\frac{\theta^4}{40} & \frac{\theta^3}{24} \\ -\frac{40}{\theta^3} & \frac{12}{\theta^2} & -\frac{6}{\theta} \\ \frac{24}{\theta^4} & -\frac{6}{\theta^2} & \frac{2}{\theta} \end{pmatrix},$$

y la matriz inversa

$$N^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{2400}{\theta^5} & \frac{960}{\theta^4} & \frac{120}{\theta^3} \\ \frac{960}{\theta^4} & \frac{420}{\theta^3} & -\frac{60}{\theta^2} \\ \frac{120}{\theta^3} & -\frac{60}{\theta^2} & \frac{12}{\theta} \end{pmatrix}.$$

Consecuentemente

$$F = \begin{pmatrix} 2400 & 960 & 120 \\ 960 & 420 & 60 \\ 120 & 60 & 12 \end{pmatrix}.$$

En este caso la función de controlabilidad (4.2) resulta

$$\frac{1}{3}\theta^6 = 2400x_1^2 + 1920x_1x_2\theta + 240x_1x_3\theta^2 + 420x_2^2\theta^2 + 120x_2x_3\theta^3 + 12x_3^2\theta^4. \tag{4.40}$$

Consecuentemente la ecuación para el salto de control para $n = 3$, de determina por la ecuación (4.9) y tiene la forma:

$$f_{31}x_1 + f_{32}x_2\theta + f_{33}x_3\theta^2 = 0.$$

Ahora al sustituir los valores correspondientes de los elementos de la matriz F , tenemos

$$10x_1 + 5\theta(x)x_2 + \theta^2(x)x_3 = 0. \quad (4.41)$$

Despejamos la ecuación (4.41) respecto de x_1

$$x_1 = -5\theta x_2 - \theta^2 x_3, \quad (4.42)$$

sustituimos en (4.40) y resolviendo obtenemos el valor de θ , posteriormente sustituimos en (4.42) para obtener el valor de θ . Consecuentemente la superficie de salto de control tiene la forma $S(x)$.

Otra manera de resolver este problema es hacer uso del resultante para las ecuaciones (4.40) y (4.41), tenemos

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -12x_3^2 & -120x_2x_3 & -240x_1x_3 - 420x_2^2 & -1920x_1x_2 & -240x_1^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -12x_3^2 & -120x_2x_3 & -240x_1x_3 - 420x_2^2 & -1920x_1x_2 & -240x_1^2 \\ x_3 & 5x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 5x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 5x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & 5x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & 5x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & 5x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & 5x_2 \end{vmatrix}$$

La ecuación que se obtiene de este método es de la siguiente forma

$$\frac{2000}{9}x_1^2(500x_1^4 - 5625x_2^6 + 1800x_1x_2^4x_3 - 17100x_1^2x_2^2x_3^2 + 3600x_1^3x_3^3 + 3240x_2^4x_3^4 - 9072x_1x_2^2x_3^5 + 6480x_1^2x_3^6). \quad (4.43)$$

Ahora para obtener la superficie de salto de control, se resuelve (4.43) para (x_1, x_2, x_3) , es decir

$$S(x) = \{x = (x_1, x_2, x_3) : s(x_1, x_2, x_3) = 0\}, \quad (4.44)$$

donde $S(x)$ es la superficie de salto de control.

El control que resuelve el problema de síntesis lo escogemos del principio de máximo admisible, de la relación (4.7) donde $\psi(x)$ se obtiene de la ecuación (4.8) y tiene la siguiente forma:

$$\psi(x) = -N^{-1}x.$$

Sea

$$D_\theta = \begin{pmatrix} \theta^{-5/2} & 0 & 0 \\ 0 & \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2400 & 960 & 120 \\ 960 & 420 & 60 \\ 120 & 60 & 12 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

para el caso $n=3$ tenemos

$$\psi(x) = - \begin{pmatrix} \theta^{-5/2} & 0 & 0 \\ 0 & \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2400 & 960 & 120 \\ 960 & 420 & 60 \\ 120 & 60 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^{-5/2} & 0 & 0 \\ 0 & \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

resolviendo el producto de matrices de la igualdad anterior resulta

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \frac{2400}{\theta^5}x_1 + \frac{960}{\theta^4}x_2 + \frac{120}{\theta^3}x_3 \\ \frac{960}{\theta^4}x_1 + \frac{420}{\theta^3}x_2 - \frac{60}{\theta^2}x_3 \\ \frac{120}{\theta^3}x_1 - \frac{60}{\theta^2}x_2 + \frac{12}{\theta}x_3 \end{pmatrix}.$$

Ahora sustituimos el valor de θ en la igualdad anterior y haciendo uso del principio del máximo admisible encontramos que el control $u(x)$ que resuelve el problema de síntesis fuera de la superficie $S(x)$ viene dado por:

$$u(x) = -\text{sign } s(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } s(x_1, x_2, x_3) < 0, \\ -1, & \text{si } s(x_1, x_2, x_3) > 0. \end{cases} \quad (4.45)$$

Un caso particular de la ecuación (4.40), para $x_1 = 0$ tenemos

$$\frac{1}{3}\theta^4 = 420x_2^2 + 120x_2x_3\theta + 12x_3^2\theta^2. \quad (4.46)$$

De la ecuación (4.41), para $x_1 = 0$ resulta

$$5x_2 + \theta x_3 = 0. \quad (4.47)$$

Utilizando el método del resultante en las ecuaciones (4.46) y (4.47) resulta

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -12x_3^2 & -120x_2x_3 & -420x_2^2 \\ x_3 & 5x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 5x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 5x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & 5x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Así la superficie de conmutación se determina por.

$$125x_2 - 72x_3^2 = 0. \quad (4.48)$$

4.2.4. Continuación del ejemplo para $n = 2$

Aplicando el método de A.E. Choque Rivero, Yu. Karlovich, ver [3] o [10], en el ejemplo 1, para el sistema canónico

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u.\end{aligned}\tag{4.49}$$

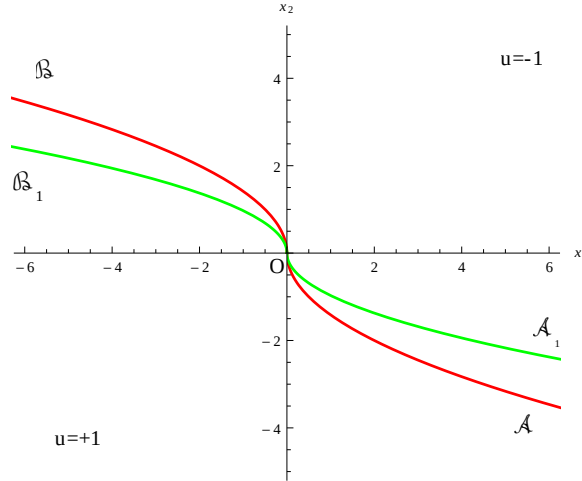
La superficie de conmutación correspondiente al control óptimo está determinado por

$$\bar{u}_{opt}(x(t)) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_1 + \frac{1}{2}|x_2|x_2 < 0, \\ -1, & \text{si } x_1 + \frac{1}{2}|x_2|x_2 > 0. \end{cases}$$

El tiempo de traslado a partir del punto fase $x_0 = (1, 0)$, al punto $\mathcal{C}$ se ubica en la línea $\mathcal{AOB}$ y de este punto al origen, se realiza en un tiempo

$$T^p(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Cabe señalar que el control durante el recorrido del punto x_0 al punto $\mathcal{C}$ es $u = -1$ y del punto $\mathcal{C}$ al origen es $u = +1$.



Gráfica 4.7: Superficie de conmutación: Pontryagin (color rojo), Korobov (color verde)

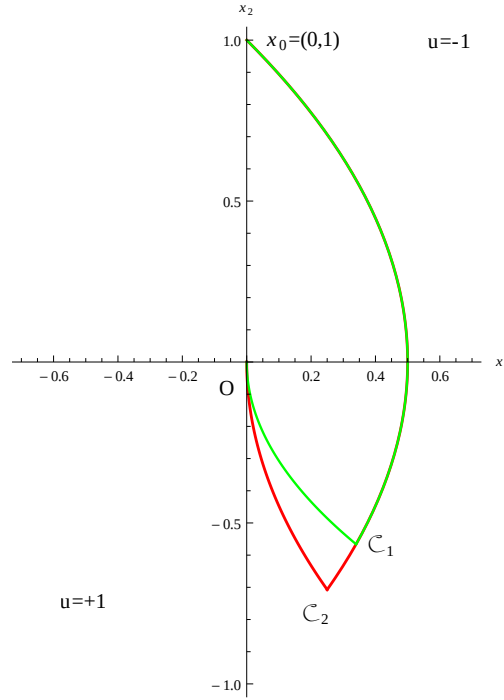
La superficie de salto de conmutación mediante principio de máximo admisible está determinado por

$$\bar{u}_{max}(x(t)) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}x_2|x_2| < 0, \\ -1, & \text{si } x_1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}x_2|x_2| > 0. \end{cases}$$

Para este caso el control durante el recorrido del punto x_0 al punto $\mathcal{C}$ es $u = -1$ y del punto $\mathcal{C}$ al origen es $u = +\frac{\sqrt{2}}{3}$. El tiempo de traslado a partir del punto fase $x_0 = (1, 0)$, al punto $\mathcal{C}$ se ubica en la línea $\mathcal{AOB}$ y de este punto al origen, se realiza en un tiempo

$$T^{\mathcal{K}}(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{11}{14} (1 + 2\sqrt{2})}.$$

Concluimos que el tiempo de traslado al origen mediante el control admisible $u_{max}(t)$ se da en un tiempo mayor al tiempo mínimo del control óptimo es decir $T > T_{min}$.



Gráfica 4.8: Comparación del traslado del punto x_0 al origen: Pontryagin (color rojo), Korobov (color verde)

Como se muestra en la gráfica 4.8, la trayectoria del punto fase $x_0 = (1, 0)$ al origen. Usando el control óptimo $u_{opt}(x(t))$, la trayectoria describe una curva del punto x_0 al punto $\mathcal{C}_2$ y de este punto al origen, con un tiempo T_{min} (color rojo). El control admisible $u_{max}(x(t))$ determina la trayectoria del punto $x_0 = (1, 0)$ al punto $\mathcal{C}_1$ y de este punto al origen, con un tiempo T (color verde). Donde se observa que la mejor trayectoria de traslado del punto fase x_0 al origen se da mediante el control admisible del máximo, sin embargo, este traslado se realiza en un tiempo $T > T_{min}$.

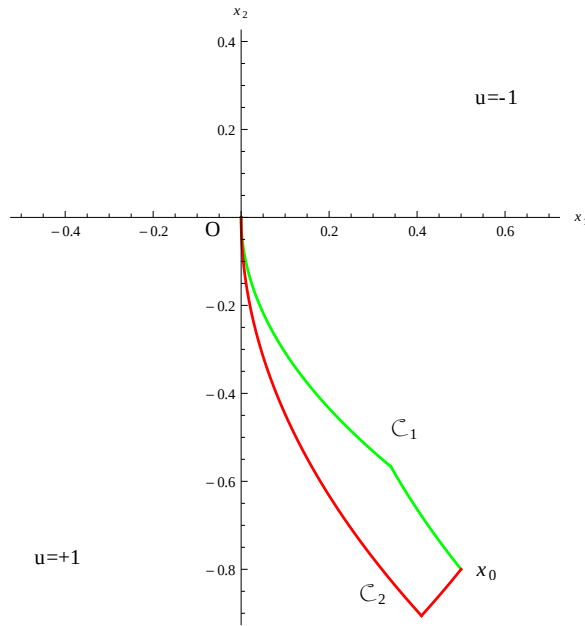
Ahora para el punto $x_0 = \left(\frac{5}{10}, -\frac{8}{10}\right)$ la trayectoria en color rojo describe el traslado al origen mediante el control óptimo del punto x_0 al punto $\mathcal{C}_2$ y de este punto al origen, con un tiempo T_{min} .

$$T^{\mathcal{P}}(x_0)_{min} = \frac{1}{5} \left(4 + \sqrt{82}\right).$$

El control admisible $u_{max}(x(t))$ determina la trayectoria del punto $x_0 = \left(\frac{5}{10}, -\frac{8}{10}\right)$ al punto $\mathcal{C}_1$ y de este punto al origen, con un tiempo T (color verde).

$$T^{\mathcal{K}}(x_0) = \frac{1}{10} \left(8 + 3\sqrt{6\sqrt{2} - 4}\right).$$

Donde se observa que la trayectoria de color verde a partir del punto fase x_0 al origen realiza el traslado más corto, sin embargo, se realiza en un tiempo $T > T_{min}$.



Gráfica 4.9: Comparación del traslado del punto x_0 al origen: Pontryagin (color rojo), Korobov (color verde)

Se llega a la conclusión que el tiempo de traslado del punto fase x_0 al origen mediante la aplicación del principio del máximo admisible, con el control $u_{max}(t)$ se realiza en un tiempo T mayor al tiempo T_{min} que resulta de aplicar el principio del mínimo de Pontryagin. Cabe señalar que estos dos controles toman valores ± 1 y garantizan el traslado deel punto x_0 al origen.

Apéndice A

A.1. Teorema de Picard

Teorema A.1.1. (*Picard*) Consideremos el problema de Cauchy

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0 \quad (\text{A.1})$$

donde $f(t, x)$ es una función continua y localmente Lipschitz respecto de x en el rectángulo $\mathbf{R} = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$ que contiene al punto (t_0, x_0) .

Entonces el problema de Cauchy (A.1) tiene una solución única en el intervalo $(t_0 - h, t_0 + h)$ donde

$$h = \min \left[a, \frac{b}{M} \right] \quad y \quad M = \max_{(t, x) \in \mathbf{R}} |f(t, x)|$$

La demostración de este teorema puede encontrarse en cualquier libro de ecuaciones diferenciales ordinarias, en particular en [24].

A.2. Formas cuadráticas

Sea A una matriz $n \times n$ simétrica, y sea x un n -vector. Entonces x^*Ax es un escalar,

$$x^*Ax = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j. \quad (\text{A.2})$$

El mapeo $Q : x \mapsto x^*Ax$ es la forma cuadrática definida por A .

Una matriz simétrica A (o su forma cuadrática asociada) se llama

- Definida positivo si $x^*Ax > 0$ para todo $x \neq 0$.
- Definida negativo si $x^*Ax < 0$ para todo $x \neq 0$.
- Semidefinida positivo si $x^*Ax \geq 0$ para todo $x \neq 0$.
- Semidefinida negativo si $x^*Ax \leq 0$ para todo $x \neq 0$.

Proposición A.2.1. *La matriz simétrica A es:*

- *definida positiva si y sólo si todos sus valores propios son estrictamente positivos.*
- *definida negativa si y sólo si todos sus valores propios son estrictamente negativos.*
- *semidefinida positiva si y sólo si todos sus valores propios son no negativos.*
- *semidefinida negativo si y sólo si todos sus valores propios son no positiva.*

Demostración:

Sea $x_1, \dots, x_n$ una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$ que consiste en vectores propios de A . (véase, por ejemplo, Apostol [53, el Teorema 5.4, p. 120].) Sea λ_i el valor propio correspondiente a x_i . Es decir,

$$Ax_i = \lambda_i x_i.$$

Escribiendo $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, vemos que

$$y^* Ay = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\alpha_i x_i) A (\alpha_j x_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \lambda_j x_i x_j = \sum_k (\alpha_k)^2 \lambda_k,$$

donde la última igualdad se deduce de la ortonormalidad de $x_1, \dots, x_n$. Todas las declaraciones anteriores se derivan de esta ecuación y el hecho de que $(\alpha_k)^2 \geq 0$ para todo k . ■

Proposición A.2.2. *Si A es definida positiva (definida negativa), entonces A^{-1} también existe y es definida positiva (definida negativa).*

Demostración

Supongamos que $Ax = 0$. Entonces $x^* Ax = x^* 0 = 0$. Puesto que A es definida positiva, vemos que $x = 0$. Por lo tanto A es invertible.

Puesto que $(Ax = \lambda x) \Rightarrow (x = \lambda A^{-1}x) \Rightarrow (A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x)$, los valores propios de A y A^{-1} son recíprocos, por lo que deben tener el mismo signo (Aplicar la proposición A.2.1). ■

Definición A.2.3. (Criterio de Sylvester). Un método que nos permite saber si la matriz A , asociada a una forma cuadrática, es positiva definida es el Criterio de Sylvester, el cual afirma que la matriz A es positiva definida si y sólo si los menores diagonales principales Δ_i de A son positivos para $x_1, \dots, x_n$, donde:

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Teorema A.2.4. Sea D una región en $\mathbb{R}^m$, y sea el intervalo $I = [a, b]$. Si la función $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en el conjunto $I \times D$ junto con su derivada parcial respecto del parámetro α , y las funciones $\varphi_0 = D \rightarrow \mathbb{R}$, son diferenciables en la región D , además $\varphi_0(D) \subset I$ y $\psi_0(D) \subset I$, entonces la función

$$\Phi_0 = \alpha \mapsto \int_{\varphi_0(\alpha)}^{\psi_0(\alpha)} f(x, \alpha) dx, \quad \alpha \in D,$$

es diferenciable en la región D , y su derivada se calcula mediante.

$$\Phi'_0 = \int_{\varphi_0(\alpha)}^{\psi_0(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha) dx + f(\psi_0(\alpha), \alpha) \psi'_0(\alpha) - f(\varphi_0(\alpha), \alpha) \varphi'_0(\alpha), \quad \alpha \in D.$$

A.3. Resultante

Definición A.3.1. La resultante $R(f, g)$ de dos polinomios $f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ y $g(x) = b_0 x^m + \dots + b_m$ con $a_0 b_0 \neq 0$ se define como:

$$R(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{ij} (\alpha_i - \beta_j),$$

donde los α_i son las raíces de $f(x)$ y los β_j son las raíces de $g(x)$.

Aplicación: En el caso trivial observamos que si f y g son mónicos tenemos:

$$\prod g(x) = (-1)^{mn} \prod f(B),$$

donde:

$$f(x) = \prod_{\alpha} (x - \alpha), \quad g(x) = \prod_{\beta} (x - \beta).$$

Por ejemplo:

$$\prod_{\xi^n=1} (\xi^2 - 2) = (\sqrt[n]{2} - 1)(-\sqrt[n]{2} - 1).$$

Proposición A.3.2. De la definición es claro que $R(f, g) = 0$ si y sólo si f y g tienen raíces comunes. El determinante $R(f, g)$ es una función simétrica de las raíces de f y g pueden ser expresadas en términos de los coeficientes. La expresión de su determinante es de la forma:

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & \\ & a_0 & \cdots & a_{n-1} & a_n & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_0 & \cdots & a_n & \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_n & & \\ & & \cdots & & & & \\ & & & b_0 & \cdots & b_n & \end{vmatrix},$$

de orden $m + n$ (con m filas comprende los coeficientes de f y n filas con coeficientes de g).

Prueba:

Tenemos $R(f, g) = 0$ si y sólo si f y g tienen raíces comunes, esto es si y sólo si f y g tienen g.c.d esto es si y sólo si tienen polinomios $r(x)$ y $s(x)$ de grado $m-1$ y $n-1$ respectivamente tal que

$$r(x)f(x) + s(x)g(x) = 0.$$

Considerando $m+n$ coeficientes de $r(x)$ y $s(x)$ con incógnitas. Estas ecuaciones tienen $m+n$ ecuaciones homogéneas en $m+n$ incógnitas con la solución no trivial el determinante disminuye, por tanto el determinante $R(f, g)$ es una expresión de grado mn en a_i y grado n en b_j . Así el determinante debe ser igual a $R(f, g)$ con constante en ambas partes y mirando el coeficiente de $a_0^m b_0^n$ mostramos que la contante es 1. Si $a_0 b_0 = 0$ es el determinante por definición de $R(f, g)$ ahora $R(f, g) = a_0 R(f, g)$ si $b_0 = 0$ donde $g(x)$ es un polinomio de grado $m-1$ con $f(x) = g(x)$ y para $a_0 = 0$ ($R(f, g) = b_0 R(f, g)$ si $a_0 = 0$ con $f(x)$ polinomios de grado $n-1$.) Para el caso particular si $a_0 = b_0 = 0$ entonces $R(f, g) = 0$ el polinomio para el caso homogéneo.

$$\bar{F}(X, Y) = \sum a_i X^{n-i} Y^i,$$

$$G(X, Y) = \sum b_i X^{n-i} Y^i.$$

Ahora $R(f, g) = 0$ expresado en la variable $V(F)$ y $V(G)$ en la línea de proyección tiene un punto en común donde $a_0 = b_0 = 0$ el punto en común es $(1, 0)$.

■

A.4. Discriminante

El discriminante D del polinomio $f(x)$ es definido como:

$$D = a_0^{2n-2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j) = a_0^{2n-2} \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2,$$

tenemos

$$R(f, f') = (-1)^{\frac{(n-2)n}{2}} a_0 D,$$

veamos para $f(x) = a_0 \prod_i (x - \alpha_i)$

$$f'(x) = a_0 \sum_j \prod_{i \neq j} (x - \alpha_i),$$

así

$$f'(\alpha_i) = a_0 \prod_{i \neq j} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Y

$$R(f, f') = a_0^{n-1} \prod_i f'(\alpha_i) = a_0^{2n-1} \prod_{i \neq j} (\alpha_j - \alpha_i).$$

A.5. Intersección de multiplicidad

Tenemos dos curva $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$ con componentes comunes, la intersección de multiplicidad en los puntos comunes tal que sea el teorema de Bezouts. Sea f y g de grado n y m respectivamente y escogemos coordenadas tal que no pasen por el origen $(0, 0)$ y el origen no se junte con la línea de punto de intersección con la curva. Escribimos la ecuación homogénea

$$\hat{F}(X, Y, Z) = 0 \quad y \quad G(X, Y, Z) = 0$$

y consideramos $\hat{F}$ y G como polinomios de Z con coeficientes en $[X, Y]$, asumimos que $\hat{F}$ y G son polinomios de grado n y m en Z con coeficientes en A_i y B_i donde el polinomio homogéneo de grado i en X y Y . Ahora $R(\hat{F}, G)$ es un polinomio de grado mn en X y Y llamando a $R(\hat{F}, G)$ y puede ser definido la intersección de multiplicidad de la curva $\hat{F} = 0$ y $G = 0$ en $P(X_0, Y_0, Z_0)$ sera la multiplicidad de las raíces (X_0, Y_0) de $R(X, Y)$. Con la definición del teorema de Bezouts conviene la relación simple de la suma de la multiplicidad de las raíces de polinomios de grado igual al otro polinomio.

A.6. Método Multiplicadores de Lagrange

Para hallar los extremos de la función $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se emplea el método de multiplicadores de Lagrange, sea φ una función de la forma

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Supongamos que:

1. Las derivadas parciales de primer orden de las funciones $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) son continuas en el recinto D.
2. $m < n$, siendo el rango de la matriz

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi_j} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n),$$

igual a m en todo el punto del recinto D.

Consideremos una función nueva (función de Lagrange)

$$\phi = f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i,$$

donde λ_i sin factores constantes indeterminados. Después analizaremos el extremo incondicionado de la función $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, o sea, formaremos el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} = 0. \tag{A.4}$$

Y a partir de este sistema y de las m ecuaciones de enlace

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_n = 0,$$

determinaremos los valores de los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ y las coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de los posibles puntos de extremo.

La condición (A.3) son condiciones necesarias de extremo tanto para la función de Lagrange como para la función inicial $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Si el punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ es un punto de extremo condicionado de la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, será a la vez un punto estacionario de la función de Lagrange, o sea, en este punto será $\partial/\partial x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), para analizar el punto estacionario $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ en tanto que el extremo condicionado de la función de Lagrange $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, habrá que considerar la forma cuadrática

$$B(dx_1, dx_2, \dots, dx_{n-m}) = \sum_{i,j}^{n-m} b_{ij} dx_i dx_j. \quad (A.5)$$

La segunda diferencial de la función de Lagrange, teniendo en cuenta las condiciones

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} dx_n = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Si la forma cuadrática (A.5) es definida, en el punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ tendremos extremo condicionado estricto, a saber, máximo condicionado estricto si la forma cuadrática (A.5) es definida negativa y mínimo condicionado si la forma cuadrática (A.5) es definida positiva.

En cambio si la forma cuadrática (A.5) es indefinida, en el punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ no habrá extremo condicionado.

Por consiguiente, la existencia en el punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ de máximo (mínimo) incondicionado de la función de Lagrange (tomando con los valores encontrados para $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$) implica la existencia de la función $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con las condiciones de enlace

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

La ausencia de extremo incondicionado de la función de Lagrange $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ no significa, aún la ausencia de extremo condicionado de la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

A.7. Criterio de Routh-Hurwitz

Sea (A.6) una ecuación diferencial lineal de coeficientes reales constantes

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \iff \dot{y} = Ay, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (a_0, a_1, \dots, a_n = \text{const}, a_0 > 0). \quad (A.6)$$

La solución nula $y = 0$ de la ecuación (A.6) es asintóticamente estable, cuando las partes reales de todas las raíces de la ecuación característica

$$f(\lambda) = a_0\lambda^{(n)} + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n, \quad (\text{A.7})$$

son negativas.

Criterio de Routh-Hurwitz. Para que las partes reales de todas las raíces de la ecuación (A.7) sean negativas es necesario y suficiente que sean positivos todos los menores principales diagonales de la matriz de Hurwitz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

La matriz de Hurwitz se compone del modo siguiente: En la diagonal principal se escriben los coeficientes del polinomio (A.7), comenzando por a_1 y terminando por a_n . Las columnas, una tras otra, constan de los coeficientes de subíndices solamente impares o de subíndices solamente pares. Entre estos últimos va incluido el coeficiente a_0 . Todos los demás elementos de la matriz, corresponden a subíndices mayores que n o menores que cero, se suponen iguales a cero.

Los menores diagonales principales de la matriz de Hurwitz son de la forma:

$$\Delta_1 = |a_1|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Por lo tanto, la condición de Hurwitz dice: para que la solución $y \equiv 0$ de la ecuación (A.6) sea estable, es necesario y suficiente que se cumplan las relaciones:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0, \quad (\text{A.8})$$

como $\Delta_n = a_n\Delta_{n-1}$, la condición $\Delta_n > 0$ puede sustituirse por $a_n > 0$.

Apéndice B

B.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

La noción de estabilidad que consideraremos en este trabajo es postulada por el matemático ruso Aleksandr Mijáilovich Lyapunov.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = f(x), \tag{B.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in C^1(W)$.

Definición B.1.1. Un punto $x_0 \in W$ se llama punto de equilibrio del sistema (B.1) si $f(x_0) = 0$.

Ejemplo 1

Sea $n = 2$ y consideremos el sistema (B.1) con

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Claramente $f(x) = 0$ en los puntos $x = (1, 0)^*$ y $x = (-1, 0)^*$, estos son los únicos puntos de equilibrio de (B.1).

Definición B.1.2. Sea $x_0 \in W$ un punto de equilibrio del sistema (B.1) se dice:

1. x_0 es estable según Lyapunov (ó simplemente estable) si para toda vecindad U de x_0 existe una vecindad $U_1 \subset U$ de x_0 tal que toda solución $x(t)$ con $x(0)$ en U_1 está definida y permanece en U para todo $t > 0$.
2. x_0 es asintóticamente estable, si es estable y cada vecindad U_1 se puede elegir de modo que para toda solución $x(t)$ con x_0 en U_1 se cumple

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0.$$

3. x_0 es inestable si no es estable.

El análisis de las soluciones del sistema (B.1) cerca de los puntos de equilibrio es uno de los principales objetivos en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Un punto de equilibrio, sin embargo, ha de satisfacer un cierto criterio de estabilidad para ser relevante físicamente.

Para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio x_0 del sistema (B.1), utilizaremos los métodos indirecto y directo de Lyapunov.

B.2. Método indirecto de Lyapunov.

El método indirecto de Lyapunov permite analizar la estabilidad en el punto de equilibrio x_0 mediante la linealización de (B.1) alrededor de x_0 , esto es, estudiando la estabilidad cerca del origen del sistema lineal $\dot{x} = Ax$, donde:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x)|_{x=x_0}. \quad (\text{B.2})$$

El sistema lineal (B.1) tiene al origen $x = 0$ como punto de equilibrio y el comportamiento de las soluciones de este sistema está completamente determinado por los valores propios de la matriz A . En particular se tiene que el origen es asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa (ver teorema B.2.1).

Si una matriz A tiene todos sus valores propios con parte real negativa, entonces A es llamada matriz de Hurwitz. Por lo tanto el origen del sistema (B.2) es asintóticamente estable si y sólo si A es de Hurwitz.

Teorema B.2.1. *Método indirecto de Lyapunov. El punto de equilibrio x_0 del sistema no lineal (B.1) es asintóticamente estable si el origen del sistema lineal (B.2) es asintóticamente estable, esto es, si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa. El punto de equilibrio x_0 es inestable si al menos un valor propio de A tiene parte real positiva.*

Ejemplo 2

Consideremos el sistema no lineal en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - (2x_2 - 1)^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 - (x_2 - 1). \end{aligned}$$

Este sistema tiene un punto de equilibrio en $x_0 = (0, 1)^*$ y su linealización en x_0 está dada por

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, notemos que el método indirecto de Lyapunov no establece ninguna condición cuando algún valor propio de la matriz A tiene parte real igual a cero, en este caso la linealización no es suficiente para determinar la estabilidad del punto de equilibrio del sistema no lineal. En la siguiente sección describiremos otro método, desarrollado también por Lyapunov, que en algunas ocasiones resuelve esta dificultad.

B.3. Método directo de Lyapunov.

A finales del siglo XIX Lyapunov desarrollo otro método para el análisis de la estabilidad en los puntos de equilibrio del sistema (B.1), este método considera una nueva función con ayuda de la cual se establece si el sistema estudiado es estable o asintóticamente estable, el cuál fué denominado método directo de Lyapunov o también conocido como teorema de Lyapunov sobre la estabilidad.

Teorema B.3.1. *Método directo de Lyapunov.*

Sea $x_0 \in W$ un punto de equilibrio de (B.1). Si existe $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en una vecindad $U \subset W$ de x_0 . derivable en $U \setminus \{x_0\}$, tal que:

1. $V(x_0) = 0, \quad V(x) > 0 \quad \text{en} \quad U \setminus \{x_0\},$
2. $\dot{V}|_{(4)} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k \leq 0 \quad \text{en} \quad U \setminus \{x_0\},$

entonces x_0 es estable, si además

3. $\dot{V}|_{(4)} < 0 \quad \text{en} \quad U \setminus \{x_0\},$

entonces x_0 es asintóticamente estable.

Definición B.3.2. Una función $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las condiciones 1) y 2) del teorema, se llama función de Lyapunov para x_0 . Una función V que satisface la condición 1) del teorema con $x_0 = 0$ se dice que es positiva definida.

Los métodos directo e indirecto de Lyapunov son clásicos, su demostración puede consultarse en la mayoría de los textos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejemplo 3

Consideremos el sistema en $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_2(x_3 - 1), \\ \dot{x}_2 &= -x_1(x_3 - 1), \\ \dot{x}_3 &= -x_3^3. \end{aligned}$$

El único punto de equilibrio es el origen. La linealización de este sistema en $x_0 = (0, 0, 0)$ es:

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz A tiene dos valores propios imaginarios y un valor propio igual a cero. Por lo tanto no podemos decidir sobre la estabilidad utilizando el método indirecto de Lyapunov. Sin embargo, si utilizamos la función positiva definida $V = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$, tenemos:

$$\dot{V} = 2(\dot{x}_1 x_1 + 2\dot{x}_2 x_2 + \dot{x}_3 x_3),$$

de modo que:

$$\frac{1}{2}\dot{V} = 2x_1 x_2(x_3 - 1) - 2x_1 x_2(x_3 - 1) - x_3^4 = -x_3^4.$$

Así $\dot{V} \leq 0$, por lo tanto aplicando el método directo de Lyapunov concluimos que el origen es estable.

Ejemplo 4

El sistema de ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^2$ es de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 3x_2^3. \end{aligned}$$

Tiene al origen como punto de equilibrio y considerando la función positiva definida $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, tenemos que

$$\dot{V} = 2x_1(x_2 - x_1^3) + 2x_2(-x_1 - 3x_2^3) = -2(x_1^4 + 3x_2^4).$$

Así $\dot{V} < 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, entonces utilizando el método directo de Lyapunov, el origen es asintóticamente estable.

Una desventaja que se presenta al tratar de aplicar el método directo de Lyapunov es que no existe un método generalizado para hallar funciones de Lyapunov, por lo que es necesario proponer una función positiva definida y probar si esta cumple las condiciones 2) o 3) del teorema B.3.1.

Para sistemas lineales, las funciones positivas definidas V más simples, que son buenas candidatas a ser funciones de Lyapunov, son las formas cuadráticas positivas definidas, esto es:

$$V(x) = x^T P x.$$

Donde $P \in M$, donde M es una matriz $n \times n$ simétrica y positiva definida. Recordemos que una matriz P es positiva definida y escribimos $P > 0$ si y sólo si todos los valores propios de P son positivos, de manera equivalente si y sólo si todos sus menores diagonales principales son positivos.

La estabilidad asintótica del origen del sistema (B.2) también puede ser estudiada usando el método directo de Lyapunov. Consideremos una función cuadrática positiva definida $V(x) = x^T P x$, La derivada de V respecto del sistema (B.2) está dada por:

$$\dot{V}(x)|_{(B.2)} = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (A^T P + P A) x = -x^T \hat{Q} x.$$

Donde $\hat{Q}$ es la matriz simétrica definida por:

$$A^T P + P A = -\hat{Q}. \quad (B.3)$$

Si $\hat{Q}$ es positiva definida, el origen es asintóticamente estable. La ecuación (B.3) es llamada ecuación de Lyapunov.

El siguiente teorema caracteriza la estabilidad asintótica del origen del sistema lineal (B.2) en términos de la solución de la ecuación de Lyapunov.

Teorema B.3.3. *Una matriz A es de Hurwitz si y sólo si dada cualquier matriz simétrica y positiva definida $\hat{Q}$, existe una matriz simétrica y positiva definida P , tales que satisfacen la ecuación de Lyapunov (B.3). Además, si A es de Hurwitz, entonces P es la única solución de (B.3).*

Bibliografía

- [1] A.E. CHOQUE RIVERO, V.I KOROBV, V.O SKORYK; *The controllability function as time of motion I Mathematical Physics, Analysis and Geometry*. Analysis and Geometry, No. 2, Vol.11, 2004
- [2] A.E. CHOQUE RIVERO, V.I KOROBV, V.O SKORYK; *The controllability function as time of motion II Mathematical Physics, Analysis and Geometry*. Analysis and Geometry, No. 3, Vol.11, 2004
- [3] A.E. CHOQUE RIVERO, YU. KARLOVICH; *The time optimal control as an interpolation problem*, Commun. Math. Anal, ISSN:0973-3841, Conf. 03(2011)
- [4] A.E. CHOQUE RIVERO; *Sistemas de control desde el punto de vista del problema de momentos*. Emalca 2013.
- [5] V.I. KOROBV; *The Controllability Function Method*. (in Russian). R & C Dynamics, Moscow-Ighevsk, 2007
- [6] V.I. KOROBV; G.M. SKYLAR; *A general approach to the solution of the bounded control synthesis problem in a controllability problem*. Mat. Sb. 109 (1979) 582-606; English translation: USSR-Sb.37(1980).
- [7] V.I. KOROBV, SKORYK V.O.; *Synthesis and restricted inertial controls for systems with multivariate control*. Math.Anal.Appl. 275 (2002) 84-107.
- [8] V.I. KOROBV, SKLYAR G.M.; *Methods for constructing of positional controls and an admissible maximum principle*. Differential'nye Uravnenia 26 (1990) 1914-1924; English translation: Differential Equations 26 (1990) 1422-1431.
- [9] V.I. KOROBV, SKLYAR G.M.; *Methods for constructing of positional controls and an admissible maximum principle, Ddefferential'nye Uravnenia 26 (1990) 1914-1924*.:English traslation: Differential Equations 26 (1990) 1914-1931.
- [10] L.S. PONTRYAGIN; V.G. BOLTYANSKI; R.V. GAMKRELITSE AND E.F. MISCHENKO; *The mathematical theory of optimal processes*. Moscow, 1961; English translated, Gordon and Breach, 1985.

-
- [11] FILIPPOV, A. F.; "*Differential equations with discontinuous right-hand side.*". *Matemat. Sbornik*. 51 (1960) 99-128. (in Russian).
 - [12] FILIPPOV, A. F.; "*Differential equations with multivalued discontinuous righthand side.*". *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 151 (1963), 65-68. (In Russian).
 - [13] FILIPPOV A. F; *Differential equations with discontinuous right-hand sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
 - [14] LESLIE M. HOCKING.; *Optimal Control an Introduction to the Theory with Applications*. Ed clarendon press, Oxford. 1991.
 - [15] JACK W. MACKI; AARON STRATUS.; *Introduction to Optimal Theory*. Ed Springer-Verlang, second edition. 1980.
 - [16] N.N. KRASOVSKII; *Control of dynamical systems*. Nauka, Moscow, 1985.
 - [17] DONALD E. KIRK; *Optimal Control Theory. An introduction*.Dover Publications, 1970.
 - [18] ZABCZYK JERZY; *Mathematical Control Theory: An Introduction*.Birkhäuser, Boston, 1992.
 - [19] ISIDORI A; *Nonlinear Control Systems*. Third Edition, Springer Verlag, 1995.
 - [20] R.E. KALMAN; Y.C. HO; K.S. NARENDRA; *Controllability of dynamical systems*. Contributions to differential equations 1:189-213, 1963.
 - [21] BELLMA, R.(1953); *An introduction to the theory of dynamic programming*.The RAND Corporation. Report R-245.
 - [22] A.N. KOLMOGOROV, S.V. FORMIN; *Elementos de la teoría de funciones y análisis funcional*. Ed. Mir. Moscú 1975.
 - [23] M.L. KRASNOV, G.I. MAKARENKO, A.L. KISEILOV; *Calculo variacional*.Ed. Mir. Moscú 1984.
 - [24] L. E. ELSGOLTZ; *Calculus of Variations*. Pergamon Press Ltd., 1962
 - [25] CRONIN J.; *Differential Equations, introduccion and Qualitative Theory*. Rutgers University, New Brunswick, New Jersey, Second Edition (1994).
 - [26] T.M. APOSTOL.; *Calculus*, 2da. ed., volume 2. Waltham, Massachusetts: Blaisdell. 1969.
 - [27] G.MAKARENKO; A.KISELIOV; M.KRASNOV; *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Mir Moscu, 1968; Spanish translated 1979.

-
- [28] A.I. MALTSEV.; *Fundamentos de álgebra lineal*, 1ra. ed., traducido al español. Ed siglo XXI editores S.A, México 1970.
- [29] L.I. GOLOVINA.; *Algebra lineal y alguna de sus aplicaciones*, 3^{ra}. ed., traducido al español. Ed. Mir. Moscú 1980.
- [30] V.V. VOEVODIN.; *Algebra lineal*, traducido al español. Ed. Mir. Moscú 1986.
- [31] GANTMACHER F. R; *Theory of Matrices*. Chelsea Publ., Bronx, NY, 1959.
- [32] KC BORDER.; *More than you wanted to know about quadratic forms*. Division of the Humanities and Social Sciences.v.2013.12.06::15.58.
- [33] JOHANNA DENISE GARCÍA SALDAÑA; *Estabilización en tiempo finito de algunos sistemas controlables*. Tesis de Maestría. Asesor: A.E. Choque Rivero. 2008.
- [34] BLANCA DE JESUS G.O; *El control admisible mediante polinomios ortogonales*. Tesis de Licenciatura. Asesor A.E. Choque Rivero 2015.