Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico-Matematicas
Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

Invariantes Computacionales para Diferenciar las Tablas de Marcas de un Total de 297 Grupos de Orden 32, 48, 64, 72 y 80

Tesis
Para obtener el grado de
Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

Presenta
Lua Tanny Maldonado Hernández

Asesor:
Dr. Luis Valero Elizondo

Morelia, Michoacán.
Agosto, 2016

"Todos nos enfrentamos a una serie de grandes oportunidades brillantemente disfrazadas de situaciones imposibles"

Charles R. Swindoll

Dedicatoria

Esta tesis la dedico a mis hermanas y mis padres, quienes me dieron educación, consejos, mucho apoyo, y agradezco mucho por toda la paciencia y confianza otorgada.

A mis buenos amigos Margarita, Josss, Miguel, Diego, quienes me animaron en los ratos difíciles y fueron de gran apoyo durante el tiempo que escribía este proyecto.

A mis sinodales por la revisión de la tesis y principalmente a mi asesor el Dr. Luis Valero agradezco por exhortarme a continuar, por su paciencia, amabilidad y todo su apoyo.

Índice general

Índice de figuras

Índice de códigos

Resumen

En esta tesis se pretende demostrar computacionalmente que dados dos grupos no isomorfos de orden menor que 96 sus tablas de marcas son no isomorfas. Los casos aquí presentados son los de orden 32, 48, 64, 72 y 80, los demás casos fueron mostrados anteriormente.

El objetivo consiste en encontrar todos los grupos hasta isomorfismo mediante invariantes computacionales; por otro lado, si usando este método no es alcanzado el objetivo, se procede a diferenciar sus tablas de marcas a través del paquete computacional *Groups, Algorithms, Programming* (GAP), [2]. GAP es un lenguaje de programación práctico y exclusivo para uso algebraico.

La tesis se divide en 3 capítulos:

- En el primer capítulo se presentan las definiciones y propiedades básicas de grupos que servirán de apoyo a lo largo de la tesis.
- En el segundo capítulo veremos las propiedades de una tabla de marcas y algunos ejemplos de su cálculo.
- En el tercer capítulo se presenta una lista de algunas propiedades que se preservan por isomorfismos de tablas de marcas de dos grupos y una lista del número posible de grupos no abelianos por cada orden, así como también diferenciar tablas de marcas mediante invariantes computacionales de dichos grupos usando GAP.

Palabras clave: Grupos no Abelianos, Subgrupos, Tabla de Marcas, Orden, Isomorfismo.

Abstract

This work pretends to prove computationally that given two non-isomorphic groups of order lower than 96 its tables of marks are non-isomorphic. In this work we present cases of groups of order 32, 48, 64, 72 and 80, other cases were previously proved.

The aim is to find all groups up to isomorphism using computational invariants, in case the aim is not reached by means of computational invariants, we proceed to differentiate its tables of marks by using GAP. GAP (Groups, Algorithms, Programming - Computational Group Theory) is a fast and exclusive system for computational discrete algebra.

This thesis is divided into 3 chapters:

- In the first chapter basic group definition and its properties are presented. These concepts will be used throughout this thesis.
- In the second chapter, we will study the properties of tables of marks and some examples of its calculation.
- In the third chapter, a list of some properties that are preserved up to table of marks isomorphism of two groups are presented, also a list of possible number of non-abelian groups for each order is given. Finally we show how to differentiate table of marks of these groups using computational invariants in GAP.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones y propiedades de un grupo

Definición 1 (Operación Binaria)**.** Sea G un conjunto no vacío. Una **operación binaria** en G es una función $*\colon G \times G \to G$.

Notación 1. Usualmente escribiremos ab en lugar de $*(a, b)$, tanto si se trata de una operación binaria $*$ en un conjunto, o simplemente de una función $*\colon A \times B \to C$ con A,B,C conjuntos. La única excepción a esta convención es cuando tengamos una operación binaria denotada $+$ en un conjunto; usualmente escribiremos $a + b$ en lugar de $+(a, b)$ o ab.

Definición 2 (Grupo)**.** Un grupo es un conjunto G junto con una operación binaria $*$ que satisface las siguientes tres propiedades:

i) Para cualesquiera elementos a, b, c en G se tiene que $a(bc) = (ab)c$. En este caso, se dice que la operación binaria $*$ es asociativa.

ii) Existe un elemento e en G tal que $ea = a = ae$ para todo a en G. El elemento e se llama la identidad del grupo G.

iii) Para todo a en G, existe un elemento b en G tal que $ba = e = ab$. El elemento b se llama el inverso del elemento a, y usualmente se denota a^{-1}.

Definición 3 ($p-$grupo)**.** Sea p un número primo, y G un grupo finito. Decimos que G es un **p−grupo** si el orden de G es una potencia de p.

Definición 4 (Grupo cíclico)**.** Sea G un grupo. Decimos que G es un **grupo cíclico** si existe un elemento x en G tal que todo elemento de G distinto de la identidad se puede expresar como un producto de la forma $xx \cdots x$, o de la forma $x^{-1}x^{-1} \cdots x^{-1}$. En este caso decimos que x es un generador del grupo G, y lo denotamos $G = \langle x \rangle$.

Propiedad 1. *Sea G un grupo y sea $1 \in G$ tal que $1g = g$ para todo $g \in G$. Sea $h \in G$ tal que $hh = h$. Entonces $h = 1$, donde 1 es el único elemento de G tal que $1g = g$ para todo $g \in G$.*

Definición 5 (Grupo trivial)**.** Sea G un conjunto con un solo elemento, entonces si existe una única operación binaria en G, decimos que G es un **grupo trivial**.

Proposición 1 (Proposiciones)**.** *Sea G un grupo, y sean g, h y k elementos de G; sea n un entero positivo:*

I) *Se tiene que $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$*

II) *Entonces $(g^{-1})^{-1} = g$.*

III) *Sean $g_1, \cdots, g_n$ elementos de G. Entonces $(g_1, \cdots, g_n)^{-1}$=$g_n^{-1} \cdots g_1^{-1}$*

IV) *Entonces $(g^n)^{-1} = (g^{-1})^n$.*

V) *Ley de cancelación izquierda:*

Si $gh = gk$ entonces $h = k$.

Definición 6 (Conmutatividad)**.** Se dice que dos elementos g y h en un grupo G **conmutan** si $gh = hg$.

Definición 7 (Grupo abeliano)**.** Un grupo se dice **abeliano** si para todo $g, h \in G$, se tiene que g y h conmutan.

Notación 2. Usualmente en un grupo abeliano se usa notación aditiva, es decir, se escribe $g + h$ en lugar de gh, o $g * h$.

El elemento identidad se denota 0 en vez de 1.

Definición 8 (Orden de grupo)**.** El **orden de un grupo** G, denotado por $|G|$, es el número de elementos en G.

1.2. Clases laterales izquierdas

Definición 9 (Clase lateral izquierda)**.** Sea S un subgrupo de un grupo G. Una **clase lateral izquierda** de S en G es un subconjuto de la forma gS con $g \in G$. Decimos que g es un representante de gS.

Análogamente, la **clase lateral derecha** de S en G es un subconjunto de la forma Sg, el cual también tiene a g como representante.

1.3. Subgrupos

Definición 10 (Subgrupo)**.** Un subconjunto no vacío S de un grupo G es un **subgrupo** de G si para todos $g, h \in S$ se tiene que g^{-1} y gh están en S. Si S es un subrupo de G, lo denotamos como $S \leq G$.

Nótese que G es un subgrupo de sí mismo.

Definición 11 (Subgrupo propio)**.** Decimos que S es un **subgrupo propio** de G si $S \leq G$ y $S \neq G$, y lo denotamos $S < G$.

1.3.1. Subgrupos normales

Definición 12 (Subgrupo normal)**.** Sea G un grupo y N un subgrupo propio de G. Decimos que N es un **subgrupo normal** de G (también se dice que N **es normal** en G), denotado por $N \triangleleft G$, si $ghg^{-1} = N$ para toda $g, h \in G$.

Propiedad 2. *Sean G un grupo y N un subgrupo de G, entonces son equivalentes:*

i) *N es un subgrupo normal de G.*

ii) *$gNg^{-1} \subseteq N$ para toda G que pertenece a G.*

iii) *Para cualesquiera $g, h \in G$ si $gh \in N$ entonces $hg \in N$.*

iv) *$gN = Ng$ para todo $g \in G$.*

v) *El conjunto de clases laterales izquierdas de N en G coincide con el conjunto de clases laterales derechas de N en G.*

1.3.2. Conjugación

Definición 13 (Conjugado)**.** Sea G un grupo, y sea $g \in G$. Un **conjugado** de g es un elemento de la forma hgh^{-1}, con $h \in G$. Donde hgh^{-1} es $hg(h^{-1})$.

La notación $({}^{h}g)$, leéase "g conjugado a h bajo G", denota el conjugado de $g \in G$.

Propiedad 3. *Sea G un grupo arbitrario entonces, la relación $({}^{h}g)$ es una relación de equivalencia en G.*

Definición 14 (Clases de conjugación)**.** Las clases de equivalencia bajo la relación $({}^{h}g)$ se llaman **clases de conjugación** de G, es decir, $H =_G K$ significa que $\exists g \in G$ tal que $H = gKg^{-1}$.

Proposición 2. *Sea G un grupo, y $H, K \leq G$. $H =_G K$ si, y sólo si, existe $g \in G$ tal que $gHg^{-1} = K$.*

Teorema 1. *Sea G un grupo, y sean H, K subgrupos de G. Si $g \in G$. Entonces*

1. $gHg^{-1} \leqslant G$

   Demostración. Se deduce directamente de la definición. □

2. $H =_G H$

   Demostración. Consideremos $H = gHg^{-1} = eHe^{-1} = H$. □

3. $H =_G K \Leftrightarrow K =_G H$

   Demostración. Sea $H = gKg^{-1} \Rightarrow K = g^{-1}H(g^{-1})^{-1} = g^{-1}Hg = H$. □

4. $H =_G K$ *y* $K =_G T \Rightarrow H =_G T$

   Demostración. Si $H =_G K \Rightarrow H = gKg^{-1}$ y si $K =_G T \Rightarrow K = xTx^{-1}$. Esto implica que $H = gKg^{-1} = g(xTx^{-1})g^{-1} = (gx)T(gx)^{-1}$. □

1.4. Acción de grupos sobre conjuntos

1.4.1. Grupo cociente

Teorema 2. *Sea G un grupo y sea H un subgrupo normal de G. Tenemos que el conjunto de clases laterales azquierdas de H en G forma un grupo con la operación $(gH)(xH) = gxH$. Este grupo se llama el **grupo cociente** de G entre H, y se denota G/H.*

Notación 3. $G/H = \{gH | g \in G\}$ es el conjunto de las clases laterales izquierdas de H en G y tal que $gH = \{gh \,|\, h \in H\}$.

Definición 15 (Puntos fijos)**.** Sean G un grupo y X un $G -$ *conjunto*. Los **puntos fijos** de X bajo la acción de G son los elementos $x \in X$ que cumplen $gx = x$ para toda g en G.

El conjunto de todos los puntos fijos de X bajo la acción de G se denota con X^G.

Teorema 3. *Sea G un grupo, y H, K subgrupos conjugados en G y sea $Q \leq G$ Entonces*

i) $\#(G/H)^Q = \#(G/K)^Q$

ii) $\#(G/Q)^H = \#(G/Q)^K$

Definición 16 (Representantes de clases de conjugación)**.** Sea G un grupo. Los **representantes de clases de conjugación** son H_1, H_2, …, H_n, tales que $H_i \leq H_{i+1}$. Es decir, que $H_1 = 1$ y $H_n = G$.

1.4.2. G - Conjuntos

Definición 17 ($G-$conjunto)**.** Un $G-$conjunto es un conjunto X en donde se define una acción de G. Es decir, una función:

$$* : G \times X \to X$$
$$* : (g \cdot x) \to g \cdot x$$

Que cumple lo siguiente:

1. $1 \cdot x = x$; para todo $x \in X$.
2. $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ donde la operación gh es la del grupo y las demás están dadas por la acción.

Notación 4. gh denota la operación del grupo, mientras que $g \cdot x$ la acción del grupo en conjunto.

Definición 18 ($G-$Conjunto transitivo)**.** Sean G un grupo y X un $G-$conjunto no vacío. Decimos que X es un $G-$**Conjunto transitivo** si para todos $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $y = gx$.

Teorema 4. *Sean G un grupo finito y X un $G-$conjunto transitivo. Entonces X es finito, y su cardinalidad es un divisor del orden de G.*

Definición 19 ($G-$subconjunto)**.** Sean G un grupo, X un $G-$conjunto y Y un subconjunto de X. Decimos que Y es un **G−subconjunto** de X si, Y es cerrado bajo la acción de G; es decir, si para toda $g \in G$ y para toda $y \in Y$ tenemos que $gy \in Y$.

En este caso, Y se puede considerar a su vez como un $G-$conjunto con la acción de G que Y hereda de X.

Teorema 5. *Sean G un grupo y X un $G-$conjunto no vacío. Entonces X se parte de manera única como la unión disjunta de $G-$subconjuntos transitivos, que se llaman las órbitas de G en X.*

1.5. Homomorfismos

Definición 20 (Homomorfismo)**.** Sean $(G, *)$ y (H, o) grupos. Un **homomorfismo** $\psi \colon G \to H$ es una función tal que $\psi(g * h) = \psi(g)$ ó $\psi(h)$ para todo $g, h \in G$.

Definición 21 (Monomorfismo)**.** Un **monomorfismo** es un homomorfismo inyectivo.

Definición 22 (Epimorfismo)**.** Un **epimorfismo** es un homomorfismo suprayectivo.

Definición 23 (Isomorfismo)**.** Un **isomorfismo** es un homomorfismo biyectivo.

Definición 24 (Endomorfismo)**.** Un **endomorfismo** es un homomorfismo de un grupo en sí mismo.

Definición 25 (Automorfismo)**.** Un **automorfismo** es un isomorfismo de un grupo en sí mismo.

Definición 26 (Grupos isomorfismos)**.** Dos grupos G y H son **isomorfos**, denotado $G \cong H$, si existe un isomorfismo de G en H. Cuando los grupos G y H tienen más estructura que la de un grupo (como por ejemplo $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, que son campos), uno suele decir homomorfismo de grupos en vez de homomorfismo.

Definición 27. Sean G y H grupos. Entonces la función $\psi\colon G \to H$ dada por $\psi(g) = 1_H$ para todo $g \in G$ es un homomorfismo (donde 1_H denota al elemento identidad de H). Este homomorfismo se llama el homomorfismo trivial de G en H.

1.5.1. Algunas propiedades de los homomorfismos

Propiedad 4. *Sean G y H grupos, y $\psi\colon G \to H$ un homomorfismo, entonces ψ manda al elemento identidad de G en el elemento identidad de H, es decir, $\psi(1_G) = 1_H$.*

Propiedad 5. *Sean G y H grupos, $\psi\colon G \to H$ un homomorfismo, y sea $g \in G$, entonces ψ manda inversos en inversos, es decir, $\psi(g^{-1}) = \psi(g)^{-1}$.*

Propiedad 6. *Sean G y H grupos, $\psi\colon G \to H$ un homomorfismo. Sea $g \in G$, entonces ψ preserva potencias es decir, para cualquier entero n se tiene que $\psi(g^n) = \psi(g)^n$.*

Propiedad 7. *Sean G y H grupos y $\psi\colon G \to H$ un homomorfismo. Sea $g \in G$ un elemento de orden finito, entonces $\psi(g)$ tiene orden finito y que de hecho el orden de $\psi(g)$ es un divisor del orden de g.*

1.5.2. Isomorfismos

Definición 28 (Función identidad)**.** Sea G un grupo, entonces la **función identidad** de G, es decir, $id_G\colon G \to G$ dada por $id_G(g) = g$ para toda $g \in G$, es un automorfismo del grupo G.

Definición 29 (Automorfismo interno)**.** Sean G un grupo $g \in G$. La función $\varsigma_g\colon G \to H$ está definida por $\varsigma_g(h) = ghg^{-1}$ para todo $h \in G$ y ς_g es un automorfismo de G, llamado un **automorfismo interno**.

Proposición 3. *La composición de dos isomorfismos es un isomorfismo.*

Proposición 4. *El inverso de un isomorfismo es un isomorfismo.*

1.5.3. Normalizadores

Definición 30 (normalizador)**.** Sean G un grupo y S un subgrupo de G. El normalizador de S en G, denotado $N_G(S)$, es el conjunto $g \in G/gSg^{-1} = S$.

Definición 31. Sean G un grupo y S un subgrupo de G, entonces $N_G(S)$ es un subgrupo de G.

Definición 32 (subgrupo normal)**.** Sean G un grupo S un subgrupo de G, entonces S es un subgrupo normal de $N_G(S)$.

Definición 33. Sea G un grupo y S un subgrupo de G, entonces $N_G(S)$ es el mayor subgrupo de G que contiene a S como subgrupo normal, es decir, que si T es un subgrupo de G que contiene a S y S es normal en T entonces $T \leq N_G(S)$.

1.5.4. Productos directos internos

Definición 34 (producto directo interno)**.** Sea G un grupo con subgrupos normales N y M. Si $N \cap M = 1$ y $NM = G$, entonces decimos que G es el **producto directo interno** de los subgrupos N y M.

Definición 35. Sea G un grupo con subgrupos normales N y M tales que G es el **producto directo interno** de N y M, entonces $G \cong N \times M$.

1.5.5. Productos semidirectos internos

Definición 36 (producto semidirecto interno)**.** Sea G un grupo y sea N y S subgrupos de G. Decimos que el grupo G es el producto semidirecto interno de N por S, denotado $G = N \rtimes S$, si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. N es normal en G;

2. $NS = G$;

3. $N \cap S = 1$.

Capítulo 2

Tabla de Marcas

Sea G un grupo finito. Escojamos representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G, y los enumeramos de menor a mayor, supongamos $H_1, H_2, ..., H_n$.

La tabla de marcas de G es la matríz de n por n cuya entrada (i, j) es el número de puntos fijos bajo H_i del $G-conjunto$ G/H_j, denotado por $\psi_{H_i}(G/H_j)$.

Teorema 6. $\#(G/K)^H = \dfrac{|N_G(K)|}{|K|}\alpha\,(H,K) = \dfrac{|N_G(H)|}{|K|}\beta\,(H,K)\,,$

donde

$$\alpha(H,K) = \#\left\{E \leq G|E =_G K, H \leq E\right\},$$

es decir, se definen como el número de subgrupos de G que son $G-$conjugados a K y que contienen a H, y

$$\beta(H,K) = \#\left\{E \leq G|E =_G H, E \leq K\right\},$$

es decir, el número de subgrupos de K que son $G-$conjugados a H, y $N_G(H)$ representa al normalizador de H en G y $N_G(K)$ representa al normalizador de K en G.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
(G/K)^H &= \#\{gK \mid hgK = gK \ \forall h \in H\} \\
&= \frac{\#\{g \in G | hgK = gK \ \forall h \in H\}}{|K|} \\
&= \frac{\#\left\{g \in G | g^{-1}hgk = g^{-}1gK \ \forall h \in H\right\}}{|K|} \\
&= \frac{\#\left\{g \in G | g^{-1}hg \in K \ \forall h \in H\right\}}{|K|} \\
&= \frac{\#\left\{g \in G | g^{-1}Hg \subset K \ \forall h \in H\right\}}{|K|} \\
&= \frac{\#\left\{g \in G | H \leq gKg^{-1} \ \forall h \in H\right\}}{|K|} \\
&= \frac{|N_G(K)| \#\{E \leq G | E \text{ es conjugado a } K, H \leq E\}}{|K|} \\
&= \frac{|N_G(K)|}{|K|}\alpha(H, K)
\end{aligned}
$$

De manera análoga podemos demostrar la segunda igualdad como sigue:

$$
\begin{aligned}
(G/K)^H &= \#\left\{gK \mid g^{-1}hgK = K \ \forall h \in H\right\} \\
&= \frac{\#\{g \in G | hgK = gK \ \forall h \in H\}}{|K|} \\
&= \frac{\#\left\{g \in G | g^{-1}hgK = K \ \forall h \in H\right\}}{|K|} \\
&= \frac{\#\left\{g \in G | g^{-1}hg \in K \ \forall h \in H\right\}}{|K|} \\
&= \frac{\#\left\{g \in G | g^{-1}Hg \subset K\right\}}{|K|} \\
&= \frac{|N_G(H)| \#\{E \leq G | E \text{ es conjugado a } H, E \leq K\}}{|K|} \\
&= \frac{|N_G(H)|}{|K|}\beta(H, K)
\end{aligned}
$$

□

La tabla de marcas de un grupo G es la matríz:

$$(a_{i,j}) = \psi_{H_i}(G/H_i) = \frac{|N_G(H_i)|}{|H_j|}\beta(H_i, H_j) = \frac{|N_G(H_j)|}{|H_j|}\alpha(H_i, H_j).$$

2.1. Propiedades de las tablas de marcas

Supongamos que hemos ordenado los subgrupos de forma creciente para calcular una tabla de marcas H_i de un grupo G; entonces se puede extraer la siguiente información:

a) El **orden** de un grupo G es siempre la mayor entrada de una tabla de marcas H_i.

b) El **número de clases de conjugación de subgrupos** es el tamaño de la matriz H_i.

c) Los **índices de los subgrupos de** G son las entradas del primer renglón de H_i.

d) Los **órdenes de los subgrupos de** G se desprenden de conocer los índices y el orden de G.

e) El **índice de** H_i **en su normalizador** es la entrada $i - i$.

f) El **orden del normalizador de** H_i **en** G es la entrada $\frac{(1-1)(i-i)}{(1-i)}$

g) El **índice del normalizador de** H_i **en** G es la entrada $\frac{1-i}{i-i}$

h) El **número de subgrupos de** G es la entrada

$$\sum_i \frac{(1-i)}{(i-i)}$$

i) Los **subgrupos normales de** G Son los H_i tales que la columna i-ésima tiene sólo dos valores, que son cero y el índice de H_i en G.

k) La **tabla de marcas de un grupo cociente** G/H usando el teorema de la correspondencia, se obtiene encontrando los subgrupos de G que contienen a H.

Proposición 5. *La tabla de marcas $A = (a_{i,j})$ del grupo G satisface:*

1. *A es cuadrada de tamaño $n \times n$ donde $n = \#\mathscr{C}_G$.*

   Demostración.

   Es sencillo de ver ya que la construcción de A es cuadrada y $n = \#\mathscr{C}_G$. □

2. *A tiene coordenadas enteras.*

   Demostración.

   Es suficiente recordar que $\psi_{H_i}(G/H_j) = \#(G/H_j)^{H_i}$ son los puntos fijos de H_j bajo H_i, lo cual es una cifra entera. □

3. *A es triangular superior.*

Demostración.

$a_{i,j} = 0$ si $i > j$, pues si $|H_i| > |H_j|$ entonces $\alpha(H_i, H_j) = 0$, y si. $|H_i| = |H_j|$ corresponden a clases de conjugación diferentes y $\alpha(H_i, H_j) = 0$, por lo tanto, $\psi_{H_i}(G/H_j) = 0 = a_{i,j}$. □

4. $a_{i,n} = 1$ *para todo* $1 \leq i \leq n$, *es decir, la última columna es la unidad de* $\prod_{\mathscr{C}_G} \mathbb{Z}$.

Demostración.

$N_G(G) = G$, $\alpha(H_i, G) = 1$ esto último es porque G no tiene conjugados, entonces $\dfrac{|N_G(H_n)|}{H_n}\alpha(H_i, H_n) = \dfrac{|G|}{|G|} = 1.$ □

5. *La primera fila de G corresponde a los índices de los subgrupos de G, esto es:*

$a_{1,i} = |G/H_i|$ *para todo* $1 \leq i \leq n$, *como casos particulares* $a_{1,1} = |G|$, $a_{1,n} = 1$.

Demostración.

$N_G(1_G) = G$, $\beta(1_G, H_i) = 1$ pues 1_G no tiene conjugados, entonces

$$\frac{|N_G(H_1)|}{|H_i|}\beta(H_1, H_i) = \frac{|G|}{|H_i|} = |\frac{G}{H_i}|$$ □

6. *Un elemento en la diagonal divide a cada elemento de la misma columna que él, esto es:* $\psi_{H_i}(G/H_i)|\psi_{H_j}(G/H_i)$.

Demostración.

$$a_{j,i} = \frac{|N_G(H_i)|}{|H_i|}\alpha(H_i, H_j) = a_{i,i}\alpha(H_i, H_j) \text{ y } a_{i,i}|a_{j,i}.$$ □

7. $a_{1,1} = |G|$ *es la mayor entrada de* A.

Demostración.

$\psi_{H_i}(G/H_i)$ son los puntos fijos de G/H_j bajo la acción de H_i entonces $a_{i,j} \leq |G/H_j| \leq |G|$, donde la última igualdad se da únicamente cuando $j = 1, H_j = 1_G$. Así $a_{1,1} > a_{i,j}$ si $i \neq 1$ o $j \neq 1$. □

8. $|H_i| = \dfrac{a_{1,1}}{a_{1,i}}$

Demostración.

$$\frac{a_{1,1}}{a_{1,i}} = \frac{|G|}{|G/H_i|} = |H_i|. \qquad \square$$

9. $|N_G(H_i)| = \dfrac{a_{1,1}}{a_{1,i}/a_{i,i}}$

Demostración.

$$\frac{a_{1,1}}{a_{1,i}/a_{i,i}} = |G| \Bigg/ \left(\frac{|G|/|H_i|}{|N_G(H_i)/|H_i|} \right) = |G|/|G/N_G(H_i)| = N_G(H_i) \qquad \square$$

10. $\alpha(H_i, H_j) = \dfrac{a_{i,j}}{a_{j,j}}$

Demostración.

$$\frac{a_{i,j}a_{1,i}}{a_{i,i}a_{1,j}} = \frac{\frac{|N_G(H_i)|}{|H_i|}\beta(H_i,H_j)\frac{|G|}{|H_i|}}{a_{i,j}a_{1,i}} \qquad \square$$

11. $\beta(H_i, H_j) = \dfrac{a_{i,j}a_{1,i}}{a_{i,i}a_{1,j}}$.

Demostración.

$$\frac{a_{i,j}a_{1,i}}{a_{i,i}a_{1,j}} = \frac{\frac{|N_G(H_i)|}{|H_i|}\beta\left(H_i,H_j\right)\ \frac{|G|}{|H_i|}}{\frac{|N_G(H_i)|}{|H_i|}\ \frac{|G|}{|H_j|}} = \beta(H_i, H_j) \qquad \square$$

2.2. Calculando tablas de marcas

2.2.1. Grupos de orden p

Calcular la tabla de los grupos cíclicos siguientes:

1. $G = C_3$. Este grupo cíclico tiene como subgrupos a $\{1, C_3\}$. Entonces su tabla de marcas es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $G = C_5$. Este grupo cíclico tiene como subgrupos a $\{1, C_5\}$. Entonces su tabla de marcas es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $G = C_p$ con p primo. Este grupo cíclico de orden p primo tiene como subgrupos a $\{1, C_p\}$. Entonces su tabla de marcas es:

$$\begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.2. Grupos de orden p^2

Calcular la tabla de marcas de los grupos cíclicos de orden p^2.

1. $G = C_4$. Este grupo cíclico tiene como subgrupos a $\{1, C_2, C_4\}$. Entonces su tabla de marcas es:
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $G = C_9$. Este grupo cíclico tiene como subgrupos a $\{1, C_3, C_9\}$. Entonces su tabla de marcas es:
$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. $G = C_{25}$. Este grupo cíclico tiene como subgrupos a $\{1, C_5, C_{25}\}$. Entonces su tabla de marcas es:
$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. $G = C_{49}$. Este grupo cíclico tiene como subgrupos a $\{1, C_7, C_{49}\}$. Entonces su tabla de marcas es:
$$\begin{bmatrix} 49 & 7 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. $G = C_{121}$. Este grupo cíclico tiene como subgrupos a $\{1, C_{11}, C_{121}\}$. Entonces su tabla de marcas es:
$$\begin{bmatrix} 121 & 11 & 1 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. $G = C_{p^2}$. Este grupo cíclico tiene como subgrupos a $\{1, C_p, C_{p^2}\}$. Entonces su tabla de marcas

es:

$$\begin{bmatrix} |G/1| & p & 1 \\ 0 & |G/C_p| & 1 \\ 0 & 0 & |G/C_{p^2}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^2 & p & 1 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos a denotar las clases de conjugación de un grupo G como H_1,H_2,..,H_n ordenados de forma creciente. Esto implica que $H_1 = 1_G$ y $H_n = G$.

A partir de una tabla de marcas podemos calcular:

1. $|G| = |H|[G : H]$ en representación al orden de un grupo G.

2. $[G : H] = \dfrac{|G|}{|H|}$, representando al índice de G en un subgrupo H.

3. $|H| = \dfrac{|G|}{[G : H]}$ como el orden del subgrupo H.

4. $[G : N_G(H)]$ es el numero de subgrupos de G conjugados a H.

5. $|N_G(H)|$ representando al normalizador de G.

Teorema 7. $|N_G(H_i)| \Longleftrightarrow [G : N_G(H_i)] = \dfrac{|G|}{|N_G(H_i)|}$.

Observación 1. GAP calcula la transpuesta de la tabla de marcas H_i.

Ejemplo 1. A partir de la tabla de marcas del grupo simétrico C_{16} calcular $[G : H_i]$, $|N_G(H_i)|$, $[G : N_G(H_i)]$ y $\beta(H, K)$.

Solución.

La tabla de marcas del grupo cíclico C_{16} es:

$$\begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $[G : H_i]$= 16,8,4,2,1.

2. $|H_i|$= 1,2,4,8,16.

3. $|N_G(H_i)|$= 16,16,16,16,16.

4. $[G : N_G(H_i)]$= 1,1,1,1,1.

5. $[N_G(H_i) : H_i]$= 16,8,4,2,1.

Se quiere calcular también el número de subgrupos de G que son conjugados a H.

Sabemos que
$\#(G/K)^H = \dfrac{|N_G(H)|}{|K|}\beta(H,K)$

Entonces

$$\beta(H_i,H_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 2. 1. A partir de la tabla de marcas del grupo simétrico S_4 calcular $[G : H_i]$, $|N_G(H_i)|$, $[G : N_G(H_i)]$ y $\beta(H,K)$.

Solución.

La tabla de marcas de S_4 es:

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 12 & 4 \\ 12 & . & 2 \\ 8 & . & . & 2 \\ 6 & 6 & . & . & 6 \\ 6 & 2 & 2 & . & . & 2 \\ 6 & 2 & . & . & . & . & 2 \\ 4 & . & 2 & 1 & . & . & . & 1 \\ 3 & 3 & 1 & . & 3 & 1 & 1 & . & 1 \\ 2 & 2 & . & 2 & 2 & . & . & . & . & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $[G : H_i]$= 24, 12, 12, 8, 6, 6, 6, 4, 3, 2, 1.
2. $|H|$= 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 6, 8, 12, 24.
3. $|N_G(H_i)|$= 24, 8, 4, 6, 24, 8, 8, 6, 8, 24, 24.
4. $[G : N_G(H_i)]$= 1, 3, 6, 4, 1, 3, 3, 4, 3, 1, 1.
5. $[N_G(H_i) : H_i]$= 24, 4, 2, 2, 6, 2, 2, 1, 1, 2, 1.
6. Sabemos que

   $\#(G/K)^H = \dfrac{|N_G(H)|}{|K|}\beta(H,K)$ y se quiere calcular $\beta(H_2,H_{10})$, $\beta(H_3,H_6)$, $\beta(H_4,H_{10})$.

- Calcular $\beta(H_2, H_{10})$.

  Sabemos que

$$\#(G/K)^H = \frac{|N_G(H)|}{|K|}\beta(H, K)$$

donde

$$\beta(H, K) \neq 0.$$

$$\beta(H_2, H_{10}) \neq 0.$$

Calculando:

$$\begin{aligned} |H_{10}| &= \frac{|G|}{[G : H_{10}]} = \frac{24}{2} = 12. \\ |H_2| &= \frac{|G|}{[G : H_2]} = \frac{24}{12} = 2. \end{aligned}$$

Si

$$\frac{|N_G(H_2)|}{|H_2|} = 4$$

entonces

$$|N_G(H_2)| = 8$$

.

Tenemos

$$(ToM)_{2,10} = \beta(H_2, H_{10})\frac{N_G(H_2)}{|H_{10}|}$$

.

Esto es igual a

$$2 = \frac{N_G(H_2)}{12}\beta(H_2, H_{10}) = \beta(2, 12)\frac{8}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12(2) = \beta(2,12)8 \Rightarrow \frac{24}{8} = \beta(H_2, H_{10})$$

$$\Rightarrow \beta(H_2, H_{10}) = 3$$

- Calcular $\beta(H_3, H_6)$.

  Sabemos que

$$\#(G/K)^H = \frac{N_G(H)}{|K|}\beta(H,K)$$

  donde

$$\beta(H,K) \neq 0$$

$$\beta(H_3, H_6) \neq 0.$$

  Calculando:

$$\begin{aligned} |H_6| &= \frac{|G|}{[G:H_6]} = \frac{24}{6} = 4 \\ |H_3| &= \frac{|G|}{[G:H_3]} = \frac{24}{12} = 2. \end{aligned}$$

  Si

$$\frac{|N_G(H_3)|}{|H_3|} = 2$$

  entonces

$$|N_G(H_3)| = 4$$

  y tenemos

$$(ToM)_{3,6} = \beta(H_3, H_6)\frac{N_G(H_3)}{|H_6|}.$$

  Esto es

$$8 = N_G(H_3)\beta(H_3, H_6).$$

Sustituyendo $N_G(H_3)$ resulta que:

$$\beta(H_3, H_6) = 2.$$

Capítulo 3

Aportaciones originales

3.1. Atributos que se preservan

Definición 37. Sean G, H grupos finitos. Sea ψ una función de la familia de todas las clases de conjugación de subgrupos de G a la familia de clases de conjugación de los subgrupos de Q. Dado un subgrupo H de G, denotamos por H' a cualquier representante de $\psi([H])$. Decimos que ψ en un isomorfismo entre tablas de marcas de G y Q si ψ en una biyección y si $\#(Q/K')^{H'} = \#(G/K)^{H}$ para todos los subgrupos H, K de G.

Teorema 8. *Sean G, Q grupos finitos con tablas de marcas isomorfas. Sean K, H subgrupos de G, y sean K', H' subgrupos de G, y sean K', H' representantes en sus respectivas clases de conjugación de subgrupos bajo el isomorfismo entre sus tablas de marcas. Entonces tenemos que:*

1. *a)* $G' = Q$
   b) $(1_G)' = 1_Q$
   c) $|G| = |Q|$
   d) $|H| = |H'|$
   e) $|N_G(H)| = |N_Q(H')|$
   f) $\alpha(H,K) = \alpha(H',K')$
   g) $\beta(H,K) = \beta(H',K')$

2. *El subgrupo H es normal en G si y solo si H' en normal en Q. En este caso, G/H y G/H' tiene isomorfismo de tablas de marcas.*

3. *Si $K \leq H$ y al menos uno de estos dos grupos es normal en G, entonces $K' \leq H'$ para cualquier opción de K' y H'.*

4. *Si K y H son subgrupos normales de G, entonces $(K \cap H)' = K' \cap H'$ y $(KH)' = K'H'$. En particular, dos subgrupos normales con intersección trivial correspondiente a dos subgrupos*

normales con intersección trivial. Además, si $G = K \times H$, entonces $Q = K' \times H'$, K y K' tienen isomorfismos de tablas de marcas, y H y H' tienen isomorfismos de tablas de marcas.

5. *El subgrupo H es maximal en G si y solo si H' es maximal en Q.*

6. *Para cualquier divisor d de orden de H, el número de subgrupos de H de orden d es preservado; en particular, el número total de subgrupos de H es preservado.*

7. *El subgrupo de H es cíclico si y solo si H' es cíclico.*

8. *Si G es abeliano entonces $G \cong Q$.*

9. *Si G es isomorfo a S_n para algunos $n \geq 5$, entonces Q es isomorfo a G.*

Demostración. A continuación se hacen las demostraciones:

1. Por el teorema de isomorfismo de tablas de marcas notemos que para todo $H, K \leq G$ se tiene que:

$$\frac{|N_G(K)|}{|K|}\alpha(H,K) = \frac{|N_Q(K')|}{|K'|}\alpha(H',K')$$

$$\frac{|N_G(K)|}{|K|}\beta(H,K) = \frac{|N_Q(H')|}{|K'|}\beta(H',K')$$

.

   a) Por demostrar que $G' = Q$.
   Consideremos $K = G$. Notemos que para todo $H \leq G$, $\alpha(G,H) = 1$.
   Entonces para todo $H \leq G$,

$$\frac{|N_G(G')|}{|G'|}\alpha(H',G') = \frac{|N_G(G)|}{|G|} = 1$$

   por tanto $\alpha(H',G') \neq 0$. En particular, tomamos $H \leq G$ tal que $H' = Q$ (esto es posible ya que ψ es una biyección), $\alpha(Q,G') \neq 0$ implica que $Q \leq_Q G'$ y por tanto $Q = G'$.

   b) Por demostrar que $(1_G)' = 1_Q$.
   Notemos que para todo $K \leq G$, $\beta(1,K) = 1$. Entonces para todo $K < G$,

$$\frac{|N_G(1')|}{|K'|}\beta(1',K') = \frac{|N_G(1')|}{|K|}$$

   por tanto $\beta(1',K') \neq 0$ para todo $K \leq G$. En particular, tomando $K \leq G$ tal que $K' = 1$ (es posible ya que ψ es una biyección) tenemos que $\beta(1',1) \neq 0$, esto implica que

$1' \leq_Q 1$, lo cual se da la igualdad y queda demostrado.

c) Por demostrar que $|G| = |Q|$.
$\dfrac{|N_G(1)|}{|1|}\alpha(1,1) = \dfrac{|N_G(1')|}{|1'|}\alpha(1',1')$, Esto implica que $|G| = \dfrac{|N_G(1)|}{|1|}$ es decir, $|G| = \dfrac{|Q|}{1}$ y por tanto $|G| = |Q|$.

d) Por demostrar que $|H| = |H'|$.
Sea $H \leq G$. Entonces $\dfrac{|N_G(1)|}{|H|}\beta(1,H) = \dfrac{|N_G(1')|}{|H'|}\beta(1',H')$.
Notemos que para todo $H \leq G$, $\beta(1,H) = 1$, $1' = 1$ implica que $\beta(1',H') = 1$, $|N_G(1)| = G$, $|N_Q(1')| = Q$, entonces tenemos $\dfrac{|G|}{|H|} = \dfrac{|Q|}{|H'|}$ con $|G| = |Q|$ y de ahí que $|H| = |H'|$.

e) Por demostrar que $|N_G(H)| = |N_Q(H')|$.
Sea $H \leq G$, sabemos que $\dfrac{|N_G(H)|}{|H|} = \dfrac{|N_Q(H)|}{|H'|}$. Conocemos también por *d*) que $|H| = |H'|$ y entonces podemos deducir que $|N_G(H)| = |N_Q(H')|$.

f) Sea $H \leq G$. Entonces $\dfrac{|N_G(H)|}{|H|}\alpha(H,H) = \dfrac{|N_G(H')|}{|H'|}\alpha(H',H')$, es decir,
$\dfrac{|N_G(H)|}{|H|} = \dfrac{|N_G(H')|}{|H'|}$.
Entonces para todo $H, K \leq G$, $\dfrac{|N_G(K)|}{|K|}\alpha(H,K) = \dfrac{|N_Q(K')|}{|K'|}\alpha(H',K')$.
Como $\dfrac{|N_G(K)|}{|K|} = \dfrac{|N_Q(K')|}{|K'|}$, cancelando en ambos lados obtenemos que $\alpha(H,K) = \alpha(H',K')$.

g) Sea $H, K \leq G$. Entonces $\dfrac{|N_G(H)|}{|K|}\beta(H,K) = \dfrac{|N_Q(H')|}{|K'|}\beta(H',K')$ con $|K| = |K'|$ y $|N_G(H)| = |N_Q(H')|$.
Cancelando en ambos miembros de la igualdad obtenemos que $\beta(H,K) = \beta(H',K')$. ■

2. La demostración se sigue de la parte 1.

3. El subgrupo normal corresponde a un único subgrupo y el resto se sique de la parte 1.

4. La intersección de dos subgrupos normales es el subgrupo normal más grande contenido en ambos subgrupos, KH es el más pequeño de los subgrupos normales que contiene ambos K y H; el resto es claro.

5. Supongamos que H es un subgrupo maximal de G. Sea M' un subgrupo de Q entre H' y Q, y sea M un subgrupo que corresponde a G. Ya que $0 \neq \alpha(H', K') \neq \alpha(H, K)$, un conjugado a M contiene a H. Pero H es un subgrupo maximal, asi que este conjugado es o bien H o G.

6. Cada p-subgrupo de Sylow de G es normal y esta propiedad es preservada.

7. El número de subgrupos de H de orden d es igual a

$$\sum \beta(K, H)$$

para todo $K \in \mathscr{C}(G)$ de orden d.

8. El grupo de los cuaternios es el único grupo de orden 8 con tres subgrupos de orden 4.

9. El subgrupo conmutador es el subgrupo normal mas pequeño de G con un cociente abeliano. Esta propiedad es preservada bajo la correspondencia.

$\square$

Definición 38. Sean G, Q grupos finitos. Sea ψ una función de la familia de clases de conjugación de G a la de Q. Dado $H \leq G$, denotamos por H' cualquier representante de $\psi([H])$. ψ es un isomorfismo de marcas o isomorfismo entre las marcas de G y Q si ψ es biyección y $\#(K'^{H'}) = \#(K^H)$, es decir, preserva los puntos fijos de G/K bajo la acción de H, $\psi_H(G/K) = \psi_{H'}(Q/K')$.

A continuación por medio de los siguientes invariantes computacionales vamos a diferenciar las tablas de marcas de los grupos representados en las secciones posteriores.

Invariantes:

CE = Cantidad de los Elementos del Grupo.
NSN = Número de Subgrupos Normales.
OSN = Orden de Subgrupos Normales.
CCS = Clases de Conjugación de Subgrupos.

3.2. Grupos no abelianos de orden 32 y algunos algoritmos utilizados programados en GAP

Estructura de grupos de orden 32(ver apéndice A, código A.13):

2.$(C_4 \times C_2) : C4$
4. $C_8 : C_4$
5.$(C_8 \times C_2) : C_2$
6.$((C_4 \times C_2) : C_2$
7. $((C_8 : C_2) : C_2$
8. $C_2.((C_4 \times C_2) : C_2) = (C_2 \times C_2).(C_4 \times C_2)$
9. $(C_8 \times C_2) : C_2$
10. $Q_8 : C_4$
11. $(C_4 \times C_4) : C_2$
12. $C_4 : C_8$
13. $C_8 : C_4$
14. $C_8 : C_4$
15. $C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)$
17. $C_{16} : C_2$
18. D_{32}
19. QD_{32}
20. Q_{32}
24. $(C_4 \times C_4) : C_2$
27. $(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) : C_2$
28. $(C_4 \times C_2 \times C_2) : C_2$
29. $(C_2 \times Q_8) : C_2$
30. $(C_4 \times C_2 \times C_2) : C_2$
31. $(C_4 \times C_4) : C_2$
32. $(C_2 \times C_2).(C_2 \times C_2 \times C_2)$
33. $(C_4 \times C_4) : C_2$
34. $(C_4 \times C_4) : C_2$
35. $C_4 : Q_8$
38. $(C_8 \times C_2) : C_2$
42.$(C8 \times C2) : C2$
43.$(C2 \times D8) : C2$
44.$(C2 \times Q8) : C2$
49.$(C2 \times D8) : C2$
50.$(C2 \times Q8) : C2$

Familias de grupos de orden 32 ordenados según la cantidad de sus elementos:

- CE=[[1, 1], [2, 11], [4, 4], [8, 16]]: 7.
- CE=[[1, 1], [2, 3], [4, 4], [8, 24]]: 15.
- CE=[[1, 1], [2, 3], [4, 4], [8, 8], [16, 16]]: 17.
- CE=[[1, 1], [2, 17], [4, 2], [8, 4], [16, 8]]: 18.
- CE=[[1, 1], [2, 9], [4, 10], [8, 4], [16, 8]]: 19.
- CE=[[1, 1], [2, 1], [4, 18], [8, 4], [16, 8]]: 20.
- CE=[[1, 1], [2, 15], [4, 16]]: 28.
- CE=[[1, 1], [2, 15], [4, 8], [8, 8]]: 43.
- CA = [[1, 1], [2, 7], [4, 24]]: 2, 24, 29, 33.
  NSN(2) = 26, NSN(24) =30, NSN(29) =24, NSN(33) =20.
- CA = [[1, 1], [2, 3], [4, 12], [8, 16]]: 4, 8, 12.
  NSN(4) =18, NSN(8) =12, NSN(12) =16.
- CA = [[1, 1], [2, 7], [4, 8], [8, 16]]: 5, 38.
  NSN(5) =16, NSN(38) =28.

- CA = [[1, 1], [2, 11], [4, 12], [8, 8]]: 9, 42.
  NSN(9) =14, NSN(42) =20

* CA = [[1, 1], [2, 3], [4, 20], [8, 8]]: 10, 13, 14.
  CCS(13) = [[1, 14], [2, 2], [4, 2]] = CCS(14).
  CCS(10) = [[1, 14], [2, 6], [4, 1]].

- CA = [[1, 1], [2, 7], [4, 16], [8, 8]]: 11, 44.
  NSN(11) = 12, NSN(44) = 20.

- CA = [[1, 1], [2, 19], [4, 12]]: 27, 34, 49.
  NSN(49) =68.
  NSN(27) = 26 = NSN(34).
  CCS(27) = [[1, 26], [2, 38], [4, 1]],
  CCS(34) = [[1, 26], [2, 24], [4, 4]].

- CA = [[1, 1], [2, 11], [4, 20]]: 30, 31, 50.
  NSN(50) =68.
  NSN(30) = 22 = NSN(31).
  CCS(30) = [[1, 22], [2, 16], [4, 1]],
  CCS(31) = [[1, 22], [2, 14], [4, 2]].

- CA = [[1, 1], [2, 3], [4, 28]]: 32, 35.
  NSN(32) = 22, NSN(35) =26.

```
 1:  32
 2:  16 16
 3:  16  . 16
 4:  16  .  . 16
 5:   8  8  8  8 8
 6:   8  8  .  . . 8
 7:   8  8  .  . . . 8
 8:   8  .  .  8 . . . 2
 9:   8  .  8  . . . . . 2
10:   4  4  4  4 4 4 4 . . 4
11:   4  4  4  4 4 . . . 2 . 2
12:   4  4  4  4 4 . . 2 . . . 2
13:   4  4  .  . . 4 . . . . . . 4
14:   4  4  .  . . 4 . . . . . . . 4
15:   2  2  2  2 2 2 2 2 . 2 . 2 . . 2
16:   2  2  2  2 2 2 2 . . 2 . . 2 2 . 2
17:   2  2  2  2 2 2 2 . 2 2 2 . . . . . 2
18:   1  1  1  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

Figura 3.1: Tabla de marcas del grupo no abeliano 13 con orden 32.

```
 1:  32
 2:  16 16
 3:  16  . 16
 4:  16  .  . 16
 5:   8  8  8  8 8
 6:   8  8  .  . . 8
 7:   8  8  .  . . . 8
 8:   8  .  8  . . . . 2
 9:   8  .  8  . . . . . 2
10:   4  4  4  4 4 4 4 . . 4
11:   4  4  4  4 4 . . . 2 . 2
12:   4  4  4  4 4 . . 2 . . . 2
13:   4  4  .  . . 4 . . . . . . 4
14:   4  4  .  . . 4 . . . . . . . 4
15:   2  2  2  2 2 2 2 2 . 2 . 2 . . 2
16:   2  2  2  2 2 2 2 . . 2 . . 2 2 . 2
17:   2  2  2  2 2 2 2 . 2 2 2 . . . . . 2
18:   1  1  1  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

Figura 3.2: Tabla de marcas del grupo no abeliano 14 con orden 32.

3.3. Grupos no abelianos de orden 48 y algunos algoritmos utilizados programados en `GAP`

Estructura de grupos de orden 48(ver apéndice A, código A.13):

1. $C_3 : C_{16}$	17. $(C_3 \times Q_8) : C_2$
3. $(C_4 \times C_4) : C_3$	18. $C_3 : Q_{16}$
5. $C_{24} : C_2$	19. $(C_2 \times (C_3 : C_4)) : C_2$
6. $C_{24} : C_2$	28. $C_2.S_4 = SL(2,3).C_2$
7. D_{48}	29. $GL(2,3)$
8. $C_3 : Q_{16}$	30. $A_4 : C_4$
10. $(C_3 : C_8) : C_2$	33. $SL(2,3) : C_2$
12. $(C_3 : C_4) : C_4$	37. $(C_{12} \times C_2) : C_2$
13. $C_{12} : C_4$	39. $(C_2 \times (C_3 : C_4)) : C_2$
14. $(C_{12} \times C_2) : C_2$	41. $(C_4 \times S_3) : C_2$
15. $(C_3 \times D_8) : C_2$	50. $(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) : C_3$
16. $(C_3 : C_8) : C_2$	

Familias de grupos de orden 48 ordenados según la cantidad de sus elementos:

- CA = [[1, 1], [2, 1], [3, 2], [4, 2], [6, 2], [8, 4], [12, 4], [16, 24], [24, 8]]: 1.
- CA = [[1, 1], [2, 3], [3, 32], [4, 12]]: 3.
- CA = [[1, 1], [2, 7], [3, 2], [4, 8], [6, 2], [8, 16], [12, 4], [24, 8]]: 5.
- CA = [[1, 1], [2, 13], [3, 2], [4, 14], [6, 2], [8, 4], [12, 4], [24, 8]]: 6.
- CA = [[1, 1], [2, 25], [3, 2], [4, 2], [6, 2], [8, 4], [12, 4], [24, 8]]: 7.
- CA = [[1, 1], [2, 1], [3, 2], [4, 26], [6, 2], [8, 4], [12, 4], [24, 8]]: 8.
- CA = [[1, 1], [2, 3], [3, 2], [4, 4], [6, 6], [8, 24], [12, 8]]: 10.
- CA = [[1, 1], [2, 17], [3, 2], [4, 2], [6, 10], [8, 12], [12, 4]]: 15.
- CA = [[1, 1], [2, 5], [3, 2], [4, 14], [6, 10], [8, 12], [12, 4]]: 16.

- CA = [[1, 1], [2, 13], [3, 2], [4, 6], [6, 2], [8, 12], [12, 12]]: 17.
- CA = [[1, 1], [2, 1], [3, 2], [4, 18], [6, 2], [8, 12], [12, 12]]: 18.
- CA = [[1, 1], [2, 7], [3, 2], [4, 24], [6, 14]]: 19.
- CA = [[1, 1], [2, 1], [3, 8], [4, 18], [6, 8], [8, 12]]: 28.
- CA = [[1, 1], [2, 13], [3, 8], [4, 6], [6, 8], [8, 12]]: 29.
- CA = [[1, 1], [2, 7], [3, 8], [4, 24], [6, 8]]: 30.
- CA = [[1, 1], [2, 7], [3, 8], [4, 8], [6, 8], [12, 16]]: 33.
- CA = [[1, 1], [2, 11], [3, 2], [4, 20], [6, 10], [12, 4]]: 39.
- CA = [[1, 1], [2, 19], [3, 2], [4, 12], [6, 2], [12, 12]]: 41.
- CA = [[1, 1], [2, 15], [3, 32]]: 50.
- CA = [[1, 1], [2, 3], [3, 2], [4, 28], [6, 6], [12, 8]]: 12, 13.
  NSN(12) = 17, NSN(13) =19.
- CA = [[1, 1], [2, 15], [3, 2], [4, 16], [6, 6], [12, 8]]: 14, 37.
  NSN(14) = 17, NSN(37) =23.

3.4. Grupos no abelianos de orden 64 y algunos algoritmos utilizados programados en `GAP`

Estructura de los grupos de orden 64(ver apéndice A, código A.13):

3. $C_8 : C_8$
4. $((C_8 \times C_2) : C_2) : C_2$
5. $(C_4 \times C_2) : C_8$
6. $(C_8 \times C_4) : C_2$
7. $Q_8 : C_8$
8. $((C_8 \times C_2) : C_2) : C_2$
9. $(C_2 \times Q_8) : C_4$
10. $(C_8 : C_4) : C_2$

11. $(C_2 \times C_2) \cdot ((C_4 \times C_2) : C_2) = (C_4 \times C_2) \cdot (C_4 \times C_2)$
12. $(C_4 : C_8) : C_2$
13. $(C_2 \times C_2) \cdot ((C_4 \times C_2) : C_2) = (C_4 \times C_2) \cdot (C_4 \times C_2)$
14. $(C_2 \times C_2) \cdot ((C_4 \times C_2) : C_2) = (C_4 \times C_2) \cdot (C_4 \times C_2)$
15. $C_8 : C_8$
16. $C_8 : C_8$
17. $(C_8 \times C_2) : C_4$
18. $(C_8 \times C_2) : C_4$
19. $C_4.(C_4 \times C_4)$
20. $(C_4 \times C_4) : C_4$
21. $(C_8 \times C_2) : C_4$
22. $(C_4 \times C_2) \cdot D_8 = C_4 \cdot (C_4 \times C_4)$
23. $(C_4 \times C_2 \times C_2) : C_4$
24. $(C_8 : C_2) : C_4$
25. $(C_8 \times C_2) : C_4$
27. $C_{16} : C_4$
28. $C_{16} : C_4$
29. $(C_{16} \times C_2) : C_2$
30. $(C_{16} : C_2) : C_2$
31. $(C_{16} \times C_2) : C_2$
32. $((C_8 : C_2) : C_2) : C_2$
33. $(C_4 \times C_2 \times C_2) : C_4$
34. $(((C_4 \times C_2) : C_2) : C_2) : C_2$
35. $(C_4 \times C_4) : C_4$
36. $(C_2 \cdot ((C_4 \times C_2) : C_2) = (C_2 \times C_2) \cdot (C_4 \times C_2)) : C_2$
37. $C_2 \cdot (((C_4 \times C_2) : C_2) : C_2) = (C_4 \times C_2) \cdot (C_4 \times C_2)$

38. $(C_{16} \times C_2) : C_2$
39. $Q_{16} : C_4$
40. $(C_{16} \times C_2) : C_2$
41. $(C_{16} : C_2) : C_2$
42. $(C_{16} : C_2) : C_2$
43. $C_2 \cdot ((C_8 \times C_2) : C_2) = C_8 \cdot (C_4 \times C_2)$
44. $C_4 : C_{16}$
45. $C_8 \cdot D_8 = C_4 \cdot (C_8 \times C_2)$
46. $C_{16} : C_4$
47. $C_{16} : C_4$
48. $C_{16} : C_4$
49. $C_4 \cdot D_{16} = C_8 \cdot (C_4 \times C_2)$
51. $C_{32} : C_2$
52. D_{64}
53. QD_{64}
54. Q_{64}
57. $(C_4 \times C_4) : C_4$
60. $(C_2 \times ((C_4 \times C_2) : C_2)) : C_2$
61. $(C_2 \times (C_4 : C_4)) : C_2$
62. $((C_4 \times C_2) : C_4) : C2$
63. $(C_4 \times C_4) : C_4$
64. $(C_4 \times C_4) : C_4$
65. $(C_4 \times C_4) : C_4$
66. $(C_2 \times (C_4 : C_4)) : C_2$
67. $(C_4 \times C_2 \times C_2 \times C_2) : C_2$
68. $(C_4 : C_4) : C_4$

69. $(C_4 \times C_4 \times C_2) : C_2$
70. $(C_4 : C_4) : C_4$
71. $(C_4 \times C_4 \times C_2) : C_2$
72. $(C_2 \times Q_8) : C_4$
73. $(C_2 \times C_2 \times D_8) : C_2$
74. $(C_2 \times C_2 \times Q_8) : C_2$
75. $(C_2 \times ((C_4 \times C_2) : C_2)) : C_2$
76. $(C_4 \times C_2) : Q_8$
77. $(C_2 \times (C_4 : C_4)) : C_2$
78. $(C_2 \times (C_4 : C_4)) : C_2$
79. $(C_2 \times C_2 \times C_2) \cdot (C_2 \times C_2 \times C_2)$
80. $(C_2 \times (C_4 : C_4)) : C_2$
81. $(C_2 \times C_2 \times C_2) \cdot (C_2 \times C_2 \times C_2)$
82. $(C_2 \times C_2 \times C_2) \cdot (C_2 \times C_2 \times C_2)$
86. $(C_8 \times C_4) : C_2$
88. $(C_2 \times (C_8 : C_2)) : C_2$
89. $(C_8 \times C_2 \times C_2) : C_2$
91. $(((C_4 \times C_2) : C_2) : C_2) : C_2$
94. $(C_2 \times (C_8 : C_2)) : C_2$
97. $(C_8 \times C_2 \times C_2) : C_2$
98. $(C_2 \times (C_8 : C_2)) : C_2$
99. $(C_2 \times (C_8 : C_2)) : C_2$
100. $(Q_8 : C_4) : C_2$
102. $(C_2 \times (C_8 : C_2)) : C_2$
104. $(C_4 : C_8) : C_2$
105. $(C_4 : C_8) : C_2$

108. $(C_8 : C_4) : C_2$

109. $(C_8 : C_4) : C_2$

111. $(C_4 \cdot D_8 = C_4 \cdot (C_4 \times C_2)) : C_2$

112. $(C_8 \times C_4) : C2$

113. $(C_4 : C_8) : C_2$

114. $(C_8 \times C_4) : C_2$

116. $(C_8 \times C_2 \times C_2) : C_2$

117. $(C_8 \times C_4) : C_2$

121. $(C_4 \times Q_8) : C_2$

122. $Q_{16} : C_4$

123. $(C_4 \times D_8) : C_2$

124. $(C_8 \times C_4) : C_2$

125. $((C_4 \times C_4) : C_2) : C_2$

127. $C_8 : Q_8$

128. $(C_2 \times C_2 \times D_8) : C_2$

129. $(C_2 \times C_2 \times Q_8) : C_2$

130. $(C_2 \times D_{16}) : C_2$

131. $(C_2 \times QD_{16}) : C_2$

132. $(C_2 \times Q_{16}) : C_2$

133. $(C_2 \times Q_{16}) : C_2$

134. $((C_4 \times C_4) : C_2) : C_2$

135. $((C_4 \times C_4) : C_2) : C_2$

136. $((C_4 \times C_4) : C_2) : C_2$

137. $((C_4 \times C_4) : C_2) : C_2$

138. $(((C_4 \times C_2) : C_2) : C_2) : C_2$

139. $(((C_4 \times C_2) : C_2) : C_2) : C_2$

140. $(C_4 \times D_8) : C_2$
141. $(C_2 \times QD_{16}) : C_2$
142. $(Q_8 : C_4) : C_2$
143. $C_4 : Q_{16}$
144. $(C_4 \times D_8) : C_2$
145. $(C_2 \times Q_{16}) : C_2$
146. $(C_8 \times C_2 \times C_2) : C_2$
147. $(C_8 \times C_2 \times C_2) : C_2$
148. $(C_2 \times Q_{16}) : C_2$
149. $(C_2 \times (C_8 : C_2)) : C_2$
150. $(C_2 \times (C_8 : C_2)) : C_2$
151. $(C_2 \times Q_{16}) : C_2$
152. $(C_2 \times QD_{16}) : C_2$
153. $(C_2 \times D_{16}) : C_2$
154. $(C2 \times Q_{16}) : C_2$
155. $(C_8 : C_4) : C_2$
156. $Q_8 : Q_8$
157. $(C_8 : C_4) : C_2$
158. $Q_8 : Q_8$
159. $(C_8 : C_4) : C_2$
160. $(C_2 \times C_2) \cdot (C_2 \times D_8) = (C_4 \times C_2) \cdot (C_2 \times C_2 \times C_2)$
161. $(C_2 \times (C_4 : C_4)) : C_2$
162. $(C_2 \times (C_4 : C_4)) : C_2$
163. $((C_8 \times C_2) : C_2) : C_2$
164. $(Q_8 : C_4) : C_2$
165. $(Q_8 : C_4) : C_2$

166. $(C_8 : C_4) : C_2$

167. $(C_8 \times C_4) : C_2$

168. $(C_2 \times C_2) \cdot (C_2 \times D_8) = (C_4 \times C_2) \cdot (C_2 \times C_2 \times C_2)$

169. $(C_8 \times C_4) : C_2$

170. $(Q_8 : C_4) : C_2$

171. $((C_8 \times C_2) : C_2) : C_2$

172. $(C_2 \times C_2) \cdot (C_2 \times D_8) = (C_4 \times C_2) \cdot (C_2 \times C_2 \times C_2)$

173. $(C_8 \times C_4) : C_2$

174. $(C_8 \times C_4) : C_2$

175. $C_4 : Q_{16}$

176. $(C_8 \times C_4) : C_2$

177. $(C_2 \times D_{16}) : C_2$

178. $(C_2 \times Q_{16}) : C_2$

179. $C_8 : Q_8$

180. $(C_2 \times C_2) \cdot (C_2 \times D_8) = (C_4 \times C_2) \cdot (C_2 \times C_2 \times C_2)$

181. $C_8 : Q_8$

182. $C_8 : Q_8$

185. $(C_{16} \times C_2) : C_2$

189. $(C_{16} \times C_2) : C_2$

190. $(C_2 \times D_{16}) : C_2$

191. $(C_2 \times Q_{16}) : C_2$

199. $(C_4 \times D_8) : C_2$

200. $(C_4 \times Q_8) : C_2$

201. $(C_4 \times Q_8) : C_2$

206. $(C_4 \times C_2 \times C_2 \times C_2) : C_2$

210. $(C_4 \times C_4 \times C_2) : C_2$

213. $(C_4 \times C_4 \times C_2) : C_2$

214. $(C_4 \times Q_8) : C_2$

215. $(C_2 \times C_2 \times D_8) : C_2$

216. $(C_2 \times C_2 \times D_8) : C_2$

217. $(C_2 \times C_2 \times Q_8) : C_2$

218. $(C_2 \times ((C_4 \times C_2) : C_2)) : C_2$

219. $(C_4 \times D_8) : C_2$

220. $(C_4 \times D_8) : C_2$

221. $(C_4 \times D_8) : C_2$

222. $(C_4 \times Q_8) : C_2$

223. $(C_4 \times Q_8) : C_2$

224. $((C_2 \times Q_8) : C_2) : C_2$

225. $(C)4 : Q_8) : C_2$

227. $(C_2 \times C_2 \times D_8) : C_2$

229. $(C_2 \times C_2 \times Q_8) : C_2$

231. $(C_4 \times D_8) : C_2$

232. $(C_4 \times D_8) : C_2$

233. $(C_4 \times Q_8) : C_2$

234. $(C_4 \times D_8) : C_2$

235. $(C_4 \times Q_8) : C_2$

236. $(C_4 \times D_8) : C_2$

237. $(C_4 \times Q_8) : C_2$

238. $Q_8 : Q_8$

240. $(C_4 \times D_8) : C_2$

241. $((C_4 \times C_2 \times C_2) : C_2) : C_2$

242. $((C_4 \times C_4) : C_2) : C_2$

243. $((C_2 \times C_2) \cdot (C_2 \times C_2 \times C_2)) : C_2$

244. $((C_4 \times C_4) : C_2) : C_2$

245. $(C_2 \times C_2) \cdot (C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2)$

249. $(C_2 \times (C_8 : C_2)) : C_2$

256. $(C_2 \times (C_8 : C_2)) : C_2$

257. $(C_2 \times D_{16}) : C_2$

258. $(C_2 \times QD_{16}) : C_2$

259. $(C_2 \times Q_{16}) : C_2$

266. $(C_2 \times ((C_4 \times C_2) : C_2)) : C_2$

Familias de grupos de orden 64 ordenados según la cantidad y orden de sus elementos:

- CA = [[1, 1], [2, 3], [4, 12], [8, 48]] = 3, 15,16.

  NSN(3) =29, NSN(15) = NSN(16) = 21.

  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 5],[8, 5],[16, 3],[32, 3],[64, 1]]=15,16.
  CCS=[[1, 21], [2, 4], [4, 2]]=15,16.

- CA=[[1, 1], [2, 7], [4, 24], [8, 32]]= 5,17,24,25,86,93,104,105,112,113,114,154.

  NSN(5)=19, NSN(17)=NSN(93)=NSN(105)=41, NSN(24)=29, NSN(25)=27,
  NSN(86)=57, NSN(104)=45=NSN(112), NSN(113)=37, NSN(114)=33,
  NSN(154)=25.

  OSN=[[1, 1],[2, 7],[4, 11],[8, 11],[16, 7],[32, 3],[64, 1]] =17. OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 7],[8, 11],[16, 11],[32, 7],[64, 1]]=93,105.

  CCS=[[1, 41], [2, 32]]=93.
  CCS=[[1, 41], [2, 16]] =105.

  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 11],[8, 11],[16, 11],[32, 7],[64, 1]]=104,112.

CCS=[[1, 45], [2, 18]]=104.
CCS=[[1, 45], [2, 14]]=112.

- CA = [[1, 1], [2, 11], [4, 20], [8, 32]] = 6,10,36,116,117,124,125.
  NSN(6) = 21, NSN(10) = 15, NSN(36) = 13,
  NSN(116) = 37 = NSN(117),
  NSN(124) = 33 = NSN(125).

  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 5],[8, 9],[16, 11],[32, 7],[64, 1]]= 116,117.
  CCS=[[1, 37], [2, 24], [4, 1]]=116.
  CCS=[[1, 37], [2, 22], [4, 2]]=117.

  OSN=[[1, 1],[2, 1],[4, 3],[8, 9],[16, 11],[32, 7],[64, 1]] = 124, 125.
  CCS=[[1, 33], [2, 18], [4, 2]]=124.
  CCS=[[1, 33], [2, 16], [4, 3]]=125.

- CA=[[1, 1], [2, 3], [4, 28], [8, 32]] = 7,11,13,14,37,127.
  NSN(7) = 21, NSN(11) = 15, NSN(13) = 19 = NSN(14), NSN(37) = 13, NSN(127) = 37.

  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 5],[8, 3],[16, 3],[32, 3],[64, 1]]= 13, 14.
  CCS=[[1, 19], [2, 7], [4, 6]] = 13, 14.

- CA=[[1, 1], [2, 15], [4, 32], [8, 16]] =8,97,98,102,129,146,133,149,161,162,163,259.

  NSN(8)=17, NSN(97)=41=NSN(98), NSN(102)=39, NSN(129)=31,
  NSN(133)=NSN(146)=29, NSN(149)=NSN(161)=NSN(162)=27,
  NSN(163)=25, NSN(259)=79.

  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 7],[8, 11],[16, 11],[32, 7],[64, 1]]= 97,98.
  CCS=[[1, 41], [2, 32], [4, 6]]=97.
  CCS=[[1, 41], [2, 32], [4, 8]]=98.

  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 3],[8, 7],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]= 133.
  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 5],[8, 5],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]= 146.

OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 3],[8, 5],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]= 149.

OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 5],[8, 3],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]= 161,162.
CCS=[[1, 27], [2, 19], [4, 10], [8, 1]]=161,162.

- CA=[[1, 1], [2, 7], [4, 40], [8, 16]] =9,18,20,21,100,108,109,
  CA=[[1, 1], [2, 7], [4, 40], [8, 16]] =132,148,151,164,165,166.

  NSN(9)=17, NSN(18)=NSN(151)=NSN(164)=NSN(165)=27, NSN(20)=29=NSN(148), NSN(21)=37, NSN(100)=NSN(108)=NSN(109)=41, NSN(132)=31, NSN(166)=25.

  OSN=[[1, 1],[2, 1],[4, 7],[8, 7],[16, 7],[32, 3],[64, 1]]= 18.
  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 3],[8, 5],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]=151.

  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 5],[8, 3],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]= 164, 165.
  CCS=[[1, 27], [2, 19], [4, 6]]= 164,165.

  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 7],[8, 7],[16, 7],[32, 3],[64, 1]] =20.
  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 5],[8, 5],[16, 7],[32, 7],[64, 1]] =148.

  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 7],[8, 11],[16, 11],[32, 7],[64, 1]]= 100,108,109.
  CCS=[[1, 41], [2, 32], [4, 2]]= 100.
  CCS=[[1, 41], [2, 12], [4, 4]]= 108.
  CCS=[[1, 41], [2, 12], [4, 6]]= 109.

- CA = [[1, 1], [2, 19], [4, 28], [8, 16]] = 32,123,135,136,141,144,167,171,173,176.

  NSN(32)=13, NSN(123)=35, NSN(135)=27=NSN(136)=NSN(144),
  NSN(141)=29=NSN(167)= NSN(176), NSN(171)=25, NSN(173)=33.

  OSN= [[1, 1],[2, 1],[4, 3],[8, 7],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]=135, 136.
  CCS=[[1, 27], [2, 39], [4, 6], [8, 1]]= 135.
  CCS=[[1, 27], [2, 39], [4, 8], [8, 2]]=136.

  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 3],[8, 5],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]=144.
  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 5],[8, 5],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]= 141.

OSN=[[1, 1], [2, 3], [4, 7], [8, 3], [16, 7], [32, 7], [64, 1]]= 167.

OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 3],[8, 7],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]= 176.

- CA=[[1, 1], [2, 11], [4, 36], [8, 16]] = 33,121,137,142,145,155,157,159,169,170,178.

NSN(33)=13, NSN(121)=35, NSN(137)=27=NSN(145)=NSN(159),
NSN(142)=29=NSN(155)=NSN(157)=NSN(178), NSN(169)=25=NSN(170).

OSN=[[1, 1], [2, 1], [4, 3], [8, 7], [16, 7], [32, 7], [64, 1]]= 137.
OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 3],[8, 5],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]=145, 159.
CSS=[[1, 27], [2, 23], [4, 5], [8, 1]]=145.
CCS=[[1, 27], [2, 15], [4, 9]]= 159.

OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 5],[8, 5],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]=142, 155,157.
CCS=[[1, 29], [2, 22], [4, 9]]=142.
CCS=[[1, 29], [2, 14], [4, 11]]= 155,157.
OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 3],[8, 7],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]=178.
OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 3],[8, 3],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]= 169,170.
CCS=[[1, 25], [2, 16], [4, 6], [8, 1]]=169.
CCS=[[1, 25], [2, 16], [4, 8], [8, 1]]= 170.

- CA=[[1, 1], [2, 23], [4, 24], [8, 16]] = 99,130,131,147,150,256,258.

NSN(99)=41, NSN(130)=29=NSN(147), NSN(131)=31, NSN(150)=27, NSN(256)=79=NSN(258).

OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 3],[8, 7],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]= 130. OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 5],[8, 5],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]= 147.

OSN=[[1, 1],[2, 1],[4, 7],[8, 19],[16, 35],[32, 15],[64, 1]]= 256, 258.
CCS=[[1, 79], [2, 43], [4, 9]]=256.
CCS=[[1, 79], [2, 43], [4, 4], [8, 3]]= 258.

- CA=[[1, 1],[2, 3],[4, 44],[8, 16]]= 122,143,156,158,160,168,172,175,179,180,181,182.

NSN(122)=35, NSN(172)=25, NSN(175)=33=NSN(179)=NSN(181),
NSN(143)=29=NSN(156)=NSN(158)=NSN(168)=NSN(180)=NSN(182)=29,

NSN(160)=27

OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 5],[8, 5],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]= 143,156,158.

CCS=[[1, 29], [2, 22], [4, 3]]=143.
CCS=[[1, 29], [2, 14], [4, 5]]= 156,158.

OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 7],[8, 3],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]=168.

OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 3],[8, 7],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]=180,182.
CCS=[[1, 29], [2, 10], [4, 4]]=180.
CCS=[[1, 29], [2, 10], [4, 6]]=182.

OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 7],[8, 7],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]= 175,179,181.
CCS=[[1, 33], [2, 24], [4, 4]]= 175.
CCS=[[1, 33], [2, 8], [4, 8]]= 179,181.

- CA=[[1, 1], [2, 27], [4, 20], [8, 16]] = 134,140,177.

NSN(134) = 27, NSN(140) = 29 = NSN(177).

OSN=[[1, 1], [2, 3], [4, 5], [8, 5], [16, 7], [32, 7], [64, 1]]= 140.
OSN=[[1, 1], [2, 3], [4, 3], [8, 7], [16, 7], [32, 7], [64, 1]]= 177.

- CA=[[1, 1],[2, 15],[4, 48]]= 23,61,62,66,69,74,77,78,80,91,201,210,217,220,223,224.

NSN(23)=29, NSN(61)=57, NSN(62)=49, NSN(66)=53, NSN(69)=45,
NSN(74)=39=NSN(77)=NSN(80)=NSN(91),NSN(78)=35, NSN(201)=121, NSN(210)=77,
NSN(217)=81=NSN(224), NSN(220)=73=NSN(223).

OSN=[[1, 1],[2, 7],[4, 7],[8, 9],[16, 7],[32, 7],[64, 1]]=74,77,80.
CCS=[[1, 39], [2, 53], [4, 9]]= 74.
CCS=[[1, 39], [2, 45], [4, 9]]= 77,80.

OSN=[[1, 1],[2, 1],[4, 7],[8, 11],[16, 11],[32, 7],[64, 1]]= 91.

OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 7],[8, 19],[16, 35],[32, 15],[64, 1]]=217,224.
CCS=[[1, 81], [2, 52], [4, 2]] =217.
CCS=[[1, 81], [2, 24], [4, 16]]=224.

OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 3],[8, 15],[16, 35],[32, 15],[64, 1]]=220,223.
CCS=[[1, 73], [2, 28], [4, 8]]=220.
CCS=[[1, 73], [2, 26], [4, 9]]=223.

- CA = [[1, 1], [2, 7], [4, 8], [8, 16], [16, 32]]= 29,30,31,185.

  NSN(29) = 21, NSN(30) =17 = NSN(31), NSN(185) = 39.

  OSN= [[1, 1],[2, 1],[4, 3],[8, 5],[16, 3],[32, 3],[64, 1]]= 30, 31.
  CCS=[[1, 17], [2, 10], [4, 2]]= 30.
  CCS=[[1, 17], [2, 10], [4, 1]]=31.

- CA = [[1, 1], [2, 19], [4, 44]] = 34,139,229,232,234,236,240,243.

  NSN(34)=13, NSN(139)=27, NSN(229)=83,
  NSN(232)=75=NSN(234)=NSN(236)=NSN(240),
  NSN(243)=71.

  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 5],[8, 15],[16, 35],[32, 15],[64, 1]]= 232,234,236,240.

  CCS=[[1, 75], [2, 37], [4, 12]]=232.
  CCS=[[1, 75], [2, 35], [4, 9]]=234.
  CCS=[[1, 75], [2, 33], [4, 10]]=236,240.

- CA = [[1, 1], [2, 11], [4, 52]] = 35,233,235,237,244.

  NSN(35) = 13, NSN(233) = 75 = NSN(237), NSN(235) = 83, NSN(244) = 71.

  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 5],[8, 15],[16, 35],[32, 15],[64, 1]]=233,237.
  CSS=[[1, 75], [2, 31], [4, 1]]=233.
  CCS=[[1, 75], [2, 29], [4, 2]]=237.

- CA = [[1, 1], [2, 3], [4, 36], [8, 8], [16, 16] = 39,47,48.
  NSN(39) = NSN(47) = NSN(48) = 17.

  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 3],[8, 3],[16, 3],[32, 3],[64, 1]]=39,47,48.
  CCS=[[1, 17], [2, 6], [4, 5], [8, 1]]=39.
  CCS=[[1, 17], [2, 2], [4, 2], [8, 2]]=47,48.

  CA = [[1, 1], [2, 3], [4, 20], [8, 24], [16, 16]] = 43, 46.

NSN(43) = NSN(46) = 15.

- OSN=[[1, 1],[2, 1],[4, 3],[8, 3],[16, 3],[32, 3],[64, 1]]= 43,46.

  CCS=[[1, 15], [2, 7], [4, 5]]=43.
  CCS=[[1, 15], [2, 3], [4, 2], [8, 1]]=46.

- CA=[[1, 1],[2, 7],[4, 56]]=57,63,64,65,68,70,72,76,79,81,82,200,214,222,225.

  NSN(57)=NSN(65)=65, NSN(63)=49, NSN(64)=41, NSN(68)=45,
  NSN(70)=NSN(72)=53, NSN(76)=43, NSN(79)=39, NSN(81)=35,
  NSN(82)=31, NSN(200)=121, NSN(214)=85, NSN(222)=73, NSN(225)=81.

  OSN=[[1, 1],[2, 7],[4, 11],[8, 19],[16, 19],[32, 7],[64, 1]]=57.
  OSN=[[1, 1],[2, 7],[4, 19],[8, 19],[16, 11],[32, 7],[64, 1]]=65.
  OSN=[[1, 1],[2, 7],[4, 11],[8, 15],[16, 11],[32, 7],[64, 1]]=70,72.

  CCS=[[1, 53], [2, 30], [4, 2]]=70. CCS=[[1, 53], [2, 38], [4, 2]]=72.

- CA=[[1, 1], [2, 31], [4, 32]] = 60,73,215,216,266.

  NSN(60) = 65, NSN(73) = 43, NSN(215) = NSN(216) = 81, NSN(266) = 375.

  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 7],[8, 19],[16, 35],[32, 15],[64, 1]]=215,216.
  CCS=[[1, 81], [2, 64], [4, 28]]=215.
  CCS=[[1, 81], [2, 60], [4, 26]]=216.

- CA=[[1, 1], [2, 23], [4, 40]] = 67,71,75,199,206,213,218,219,221.

  NSN(67)=NSN(71)=53, NSN(75)=39, NSN(199)=121, NSN(206)=NSN(213)=85,
  NSN(218)=81, NSN(219)=NSN(221)=73.

  OSN=[[1, 1],[2, 7],[4, 11],[8, 15],[16, 11],[32, 7],[64, 1]]=67,71.
  CCS=[[1, 53], [2, 82], [4, 8]]=67.
  CCS=[[1, 53], [2, 62], [4, 14]]=71.
  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 11],[8, 19],[16, 35],[32, 15],[64, 1]]=206,213.
  CCS=[[1, 85], [2, 78], [4, 2]]=206.
  CCS=[[1, 85], [2, 66], [4, 4]]=213.

OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 3],[8, 15],[16, 35],[32, 15],[64, 1]]=219,221.
CCS=[[1, 73], [2, 32], [4, 20]]=219.
CCS=[[1, 73], [2, 30], [4, 17]]=221.

- CA = [[1, 1], [2, 27], [4, 36]] = 138,227,231,241,242.

  NSN(138) = 27, NSN(227) = NSN(231) = 83, NSN(241) = NSN(242) = 71.

  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 9],[8, 19],[16, 35],[32, 15],[64, 1]]=227,231.
  CCS=[[1, 83], [2, 67], [4, 17]]=227.
  CCS=[[1, 83], [2, 61], [4, 12]]=231.

  OSN=[[1, 1],[2, 3],[4, 1],[8, 15],[16, 35],[32, 15],[64, 1]]=241,242.
  CCS=[[1, 71], [2, 27], [4, 28]]=241.
  CCS=[[1, 71], [2, 27], [4, 32]]=242.

3.5. Grupos no abelianos de orden 72 y algunos algoritmos utilizados programados en GAP

Estructura de los grupos de orden 72(ver apéndice A, código A.13):

1. $C_9 : C_8$	22. $(C_6 \times S_3) : C_2$
3. $Q_8 : C_9$	23. $(C_6 \times S_3) : C_2$
4. $C_9 : Q_8$	24. $(C_3 \times C_3) : Q_8$
6. D_{72}	31. $(C_3 \times C_3) : Q_8$
8. $(C_{18} \times C_2) : C_2$	33. $(C_{12} \times C_3) : C_2$
13. $(C_3 \times C_3) : C_8$	35. $(C_6 \times C_6) : C_2$
15. $((C_2 \times C_2) : C_9) : C_2$	40. $(S_3 \times S_3) : C_2$
19. $(C_3 \times C_3) : C_8$	41. $(C_3 \times C_3) : Q_8$
21. $(C_3 \times (C_3 : C_4)) : C_2$	43. $(C_3 \times A_4) : C_2$

Familias de grupos de orden 72 ordenados según la cantidad y orden de sus elementos:

- CA= [[1, 1], [2, 1], [3, 2], [4, 2], [6, 2], [8, 36], [9, 6],[12, 4],[18,6], [36, 12]]=1.
- CA= [[1, 1], [2, 1], [3, 2], [4, 6], [6, 2], [9, 24], [12, 12],[18, 24]]=3.
- CA= [[1, 1], [2, 1], [3, 2], [4, 38], [6, 2], [9, 6], [12, 4],[18, 6],[36, 12]]=4.

- CA= [[1, 1], [2, 37], [3, 2], [4, 2], [6, 2], [9, 6], [12, 4],[18, 6],[36, 12]]=6.
- CA= [[1, 1], [2, 21], [3, 2], [4, 18], [6, 6], [9, 6], [18, 18]]=8.
- CA= [[1, 1], [2, 1], [3, 8], [4, 2], [6, 8], [8, 36], [12, 16]]=13.
- CA= [[1, 1], [2, 21], [3, 2], [4, 18], [6, 6], [9, 24]]=15.
- CA= [[1, 1], [2, 1], [3, 8], [4, 18], [6, 8], [8, 36]]=19.
- CA= [[1, 1], [2, 19], [3, 8], [4, 12], [6, 8], [12, 24]]=21.
- CA= [[1, 1], [2, 13], [3, 8], [4, 18], [6, 32]]=22.
- CA= [[1, 1], [2, 25], [3, 8], [4, 6], [6, 20], [12, 12]]=23.
- CA= [[1, 1], [2, 1], [3, 8], [4, 30], [6, 8], [12, 24]]=24.
- CA= [[1, 1], [2, 1], [3, 8], [4, 38], [6, 8], [12, 16]]=31.
- CA= [[1, 1], [2, 37], [3, 8], [4, 2], [6, 8], [12, 16]]=33.
- CA= [[1, 1], [2, 9], [3, 8], [4, 18], [8, 36]]=39.
- CA= [[1, 1], [2, 9], [3, 8], [4, 54]]= 41.
- CA= [[1, 1], [2, 21], [3, 26], [4, 18], [6, 6]]= 43.
- CA= [[1, 1], [2, 21], [3, 8], [4, 18], [6, 24]]= 35,40.
  NSN(35)=21,NSN(40)= 7.

3.6. Grupos no abelianos de orden 80 y algunos algoritmos utilizados programados en `GAP`

Estructura de los grupos de orden 80(ver apéndice A, código A.13):

1. $C_5 : C_{16}$	17. $(C_5 \times Q_8) : C_2$
3. $C_5 : C_{16}$	18. $C_5 : Q_{16}$
5. $C_{40} : C_2$	19. $(C_2 \times (C_5 : C_4)) : C_2$
6. $C_{40} : C_2$	28. $(C_5 : C_8) : C_2$
7. D_{80}	29. $(C_5 : C_8) : C_2$
8. $C_5 : Q_{16}$	31. $C_{20} : C_4$
10. $(C_5 : C_8) : C_2$	33. $(C_5 : C_8) : C_2$
12. $(C_5 : C_4) : C_4$	34. $(C_2 \times (C_5 : C_4)) : C_2$
13. $C_{20} : C_4$	38. $(C_{20} \times C_2) : C_2$
14. $(C_{20} \times C_2) : C_2$	40. $(C_2 \times (C_5 : C_4)) : C_2$
15. $(C_5 \times D_8) : C_2$	42. $(C_4 \times D_{10}) : C_2$
16. $(C_5 : C_8) : C_2$	49. $(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) : C_5$

Familias de grupos de orden 80 ordenados según la cantidad y orden de sus elementos:

- CA= [[1, 1], [2, 1], [4, 2], [5, 4], [8, 4], [10, 4], [16, 40],[20, 8], [40, 16] = 1.
- CA= [[1, 1], [2, 1], [4, 2], [5, 4], [8, 20], [10, 4], [16, 40], [20, 8]]= 3.
- CA= [[1, 1], [2, 11], [4, 12], [5, 4], [8, 24], [10, 4], [20, 8], [40, 16]]= 5.
- CA= [[1, 1], [2, 21], [4, 22], [5, 4], [8, 4], [10, 4], [20, 8], [40, 16]]= 6.
- CA= [[1, 1], [2, 41], [4, 2], [5, 4], [8, 4], [10, 4], [20, 8], [40, 16]]= 7.
- CA= [[1, 1], [2, 1], [4, 42], [5, 4], [8, 4], [10, 4], [20, 8], [40, 16]]= 8.
- CA= [[1, 1], [2, 3], [4, 4], [5, 4], [8, 40], [10, 12], [20, 16]]= 10.
- CA = [[1, 1], [2, 25], [4, 2], [5, 4], [8, 20], [10, 20], [20, 8]]= 15.
- CA= [[1, 1], [2, 5], [4, 22], [5, 4], [8, 20], [10, 20], [20, 8]]=16.
- CA= [[1, 1], [2, 21], [4, 6], [5, 4], [8, 20], [10, 4], [20, 24]]= 17.
- CA= [[1, 1], [2, 1], [4, 26], [5, 4], [8, 20], [10, 4], [20, 24]]= 18.
- CA= [[1, 1], [2, 7], [4, 40], [5, 4], [10, 28]]= 19.
- CA= [[1, 1], [2, 11], [4, 52], [5, 4], [10, 4], [20, 8]]= 31.
- CA = [[1, 1], [2, 3], [4, 20], [5, 4], [8, 40], [10, 12]]= 33.
- CA= [[1, 1], [2, 23], [4, 40], [5, 4], [10, 12]] = 34.
- CA= [[1, 1], [2, 15], [4, 32], [5, 4], [10, 20], [20, 8]]= 40.
- CA= [[1, 1], [2, 31], [4, 16], [5, 4], [10, 4], [20, 24]]= 42.

- CA= [[1, 1], [2, 15], [5, 64]]= 49.
- CA= [[1, 1], [2, 3], [4, 44], [5, 4], [10, 12], [20, 16]]= 12, 13.
  NSN(12) = 17, NSN(13) = 19.
- CA= [[1, 1], [2, 23], [4, 24], [5, 4], [10, 12], [20, 16]]= 14,38.
  NSN(14) = 17, NSN(38) = 23.
- CA= [[1, 1], [2, 11], [4, 12], [5, 4], [8, 40], [10, 4], [20, 8]]= 28, 29.
  NSN(28) = 14, NSN(29)= 12.

Existen casos especiales de pares de grupos más complejos, donde no se ha podido justificar el por qué sus tablas de marcas no son isomorfas; pero si existen otros valiosos argumentos que a continuación vamos a presentar:

1. Grupos 13 y 14:

   En el grupo 13 existe el subgrupo 3, que es un subgrupo normal de orden 2 contenido en 5 clases de subgrupos de orden 4.

   Por otra parte, en el grupo 14 no existe tal subgrupo normal.

2. Grupos de orden 15 y 16:

   Este par de grupos tienen 2 subgrupos 14 y 17, los cuales son los únicos que tienen índice 8 en G e índice 2 en su normalizador.

   Por otra parte, el subgrupo 7 contenido en el grupo 16, es un subgrupo normal contenido en los subgrupos 14 y 17. En cambio, en el grupo 15 no existe tal subgrupo de índice 16 contenido en ambos subgrupos.

3. Grupos 47 y 48:

   Los subgrupos 8 y 9 son únicos de orden 4 que tienen índice 2 en su normalizador. En el grupo 47, existe el subgrupo 4 de orden 2 que está contenido en ambos subgrupos.

   Pero en cambio, en el grupo de orden 48 no existe tal subgrupo de orden 2 contenido en ambos subgrupos.

4. Grupos 155 y 157:

   En el grupo 155, el subgrupo 4 en un subgrupo normal de orden 2 contenido en 7 clases de subgrupos de orden 4.

   Por el contrario, en el grupo 157 no hay tal subgrupo normal de orden 2.

5. Grupos 156 y 158:

   Los subgrupos 8 y 15 son únicos de índice 16 en G e índice 4 en su normalizador.

   En el grupo 158 existe el subgrupo 4 que es normal y de índice 32 contenido en dichos subgrupos; mientras tanto, en el grupo 156 no existe tal subgrupo que esté contenido en dichos subgrupos.

6. Grupos 161 y 162:

   Los subgrupos 13 y 21 son únicos con índice 16 en G e índice 4 en su normalizador.

   En el grupo 161 existe el subgrupo 4 que es normal y de índice 32 contenido en ambos subgrupos.

   Pero por otra parte, en el grupo 162 no hay tal subgrupo de índice 32 contenido en ambos subgrupos.

7. Grupos 164 y 165:

   Los subgrupos 16 y 17 son los únicos de índice 16 en G e índice 4 en su normalizador.

   En el grupo 165 existe el subgrupo 6 que es normal y de índice 32 contenido en ambos subgrupos.

   Por otro lado, no existe tal subgrupo que está contenido en dichos subgrupos en el grupo 164.

8. Grupos 179 y 181:

En el grupo 181, el subgrupo 3 es un subgrupo de orden 2 contenido en 7 clases de subgrupos de orden 4; pero en el grupo 179 no existe tal subgrupo de orden 2.

9. Grupos 236 y 240:

Para ver si el par de grupos 236 y 240 tienen tablas de marcas no isomorfas; existe un argumento completamente distinto a todos los casos anteriores. Dicho caso es único tal que, se ha recurrido a comparar sus tablas de marcas y permutado mediante un algoritmo computacional programado en GAP se justifica.

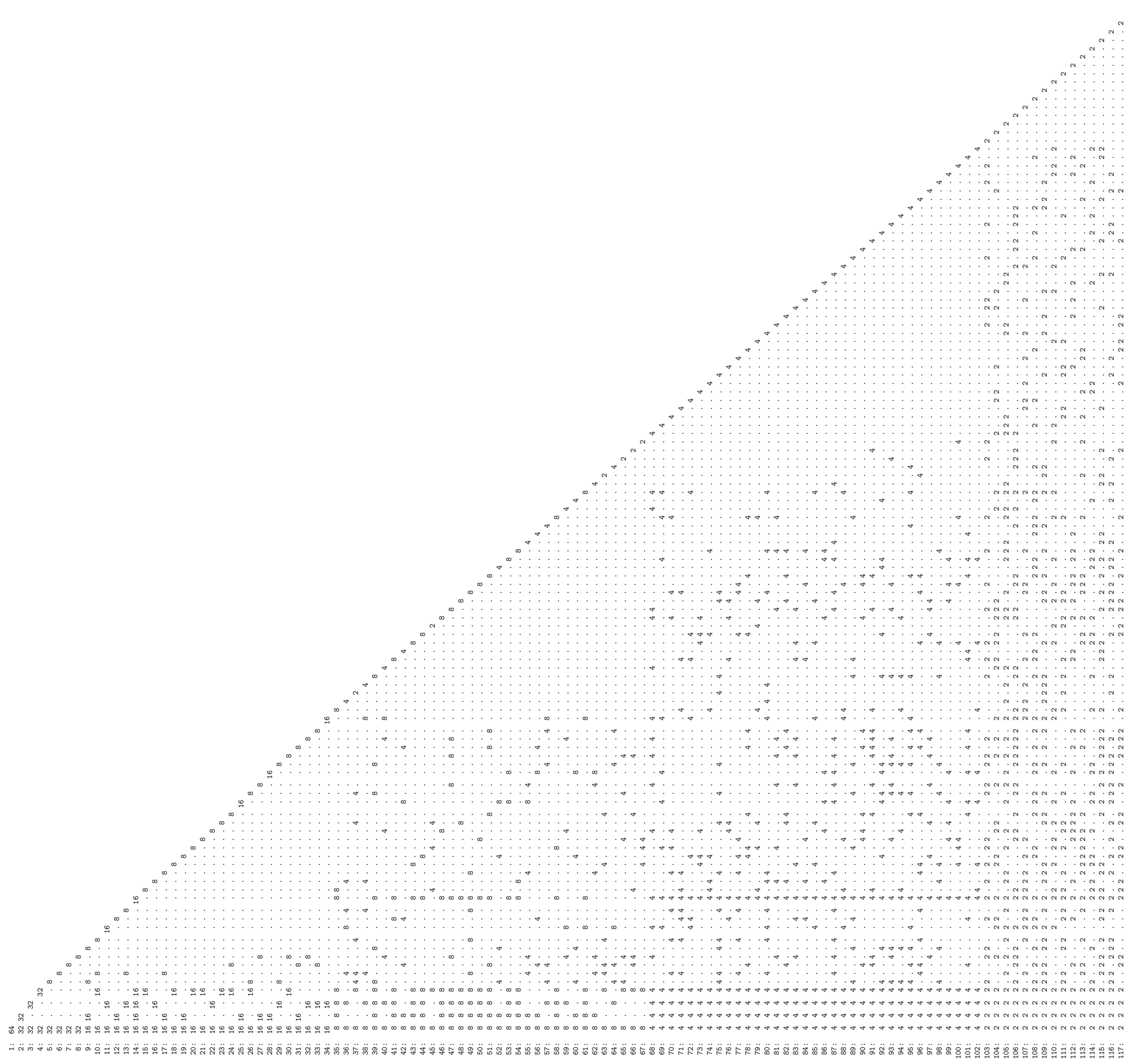

Figura 3.3: Tabla de marcas del grupo 236 con orden 64.

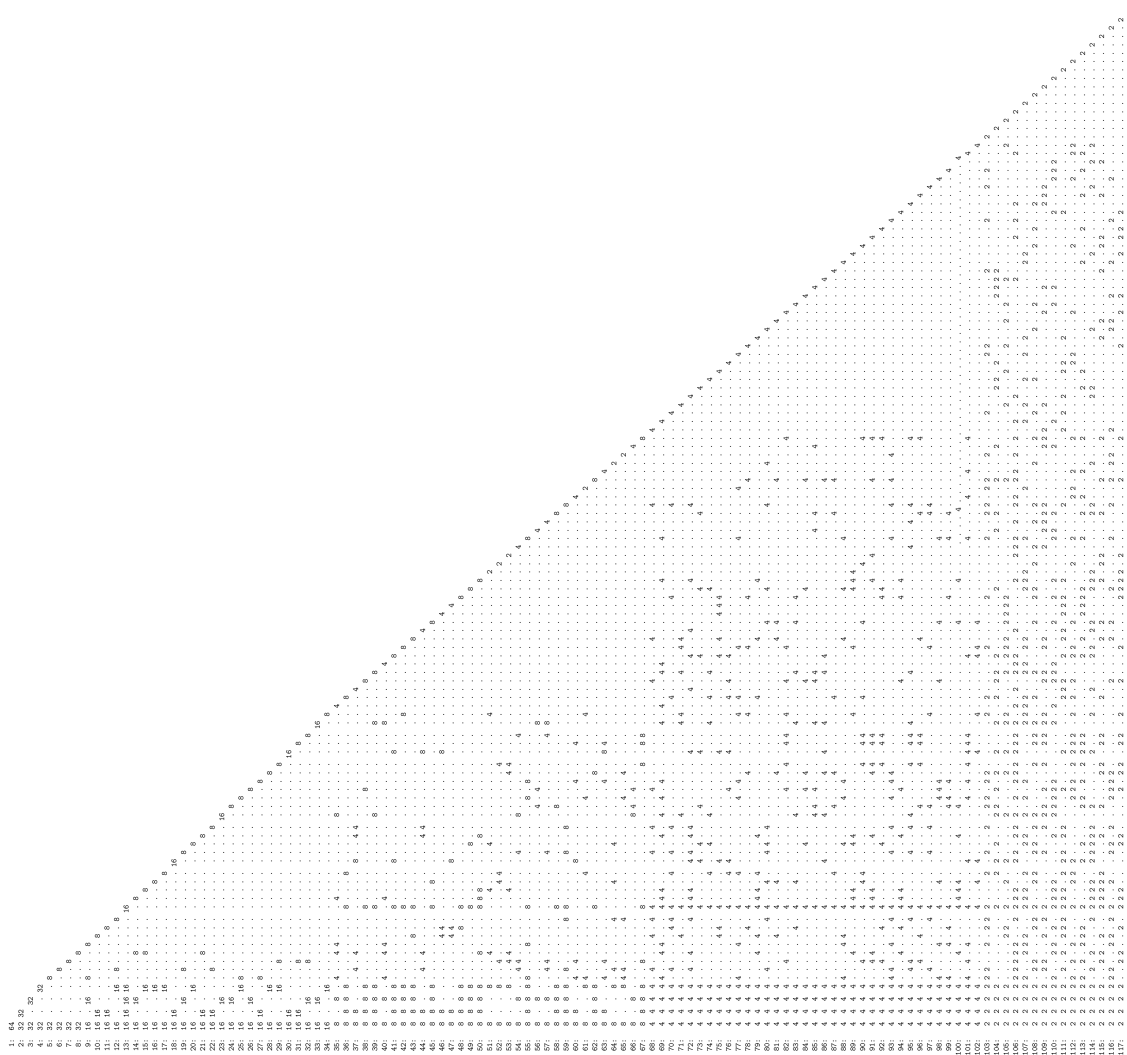

Figura 3.4: Tabla de marcas del grupo 240 con orden 64.

```
 1: 64
 2: 32 32
 3: 32 . 32
 4: 32 . . 32
 5: 32 . . . 8
 6: 32 . . . . 8
 7: 32 . . . . . 8
 8: 32 . . . . . . 8
 9: 16 16 . . 8 . . . 8
10: 16 . . 16 . 8 . . . 8
11: 16 . 16 . . . . . . . 16
12: 16 16 . . . . . . . . . 8
13: 16 . 16 . . 8 . . . . . . 8
14: 16 16 16 16 . . . . . . . . . 16
15: 16 . . 16 . . . . . . . . . . 8
16: 16 . 16 . . . . . . . . . . . . 8
17: 16 16 . . . 8 . . . . . . . . . . 8
18: 16 . . 16 . . . . . . . . . . . . . 8
19: 16 16 . . . . . . . . . . . . . . . . 8
20: 16 . . 16 . . . . . . . . . . . . . . . 8
21: 16 . . 16 . . . . . . . . . . . . . . . . 8
22: 16 . 16 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
23: 16 . . 16 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
24: 16 . . 16 . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . 8
25: 16 16 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16
26: 16 . . 16 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
27: 16 16 . . . . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
28: 16 16 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16
29: 16 . 16 . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
30: 16 . . 16 . . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
31: 16 16 . . . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
32: 16 . 16 . . . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
33: 16 . 16 . . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
34: 16 . 16 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16
35: 8 8 8 8 . . . . . . . . . 8 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
36: 8 8 8 8 . . . . . . . . . 8 . . . . . . . . 8 . . . . . . . . . . . . 8
37: 8 8 . . . 4 . 4 . . . . . . . . 4 . . . . . . . . . 4 8 . . . . . . . . 4
38: 8 8 8 8 . . . . . . . . . 8 . . . . . . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . 8
39: 8 8 8 8 . . . . . . 8 . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8 . . . . 8
40: 8 . 8 . 4 . . 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 . . 4 . 8 . . . . . 4
41: 8 8 8 8 . . . . . . . . . 8 . . . . . . . . . . 8 . . 8 . . . . . . . . . . . . 8
42: 8 8 8 8 . . . . . . . . . 8 . . . . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
43: 8 8 8 8 . . . . . . . 8 . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
44: 8 8 . . . 4 . 4 . . . . . . . . 4 . . . . . . . 8 . 4 . . . . . . . . . . . . . . . . 4
45: 8 . 8 . 4 . . 4 . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 . . 4 . . . . . . . . . . . . 4
46: 8 8 . . . . . . . . . 4 . . . . . . 4 . . . . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
47: 8 8 . . . . . . . . . 4 . . . . . . 4 . . . . . . . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
48: 8 8 8 8 . . . . . . . . . 8 . . . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
49: 8 8 8 8 . . . . . . . . . 8 . . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
50: 8 8 8 8 . . . 8 . . . . . 8 . . . . . . . . . . . . 8 . . 8 . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
51: 8 . . 8 . . . 4 . . . . . . . . . 4 . 4 . . . . . . . . . 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
52: 8 . . 8 . . 4 . . . . . . . 4 . . . . . . . 4 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
53: 8 . . 8 . . 4 4 . . . . . . . . . . . . 4 . . 4 . . . . . 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
54: 8 . 8 . . 4 4 . . . 8 . 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
55: 8 8 8 8 8 . . . 8 . . . . 8 . . . . . . . . . . . 8 . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
56: 8 . 8 . . . . . . . . . . . . 4 . . . . . 4 . . . . . . . . . . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
57: 8 . 8 . . 4 4 . . . . . 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
58: 8 8 8 8 . . . . . . . . . 8 . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
59: 8 8 8 8 . 8 . . . 8 . . 8 8 . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
60: 8 8 . . 4 . 4 . 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8 . . 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
61: 8 . . 8 4 . . . . . . . . . . . . . . 4 . . 4 . . 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
62: 8 8 8 8 . . . . . . . . . 8 . . . . . . 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
63: 8 8 . . 4 . 4 . 4 . . . . . . . . . . . . . . . 8 . . . . . 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
64: 8 . . 8 . 4 . . . 4 . . . . 4 . . 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
65: 8 . . 8 4 4 . . . 4 . . . . . . . . . . 4 . . . . 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
```

Figura 3.5: Permutación de la tablas de marcas del grupo 240.

Apéndice A

Herramientas computacionales

A.1. Funciones *GAP* utilizadas

- **Group**

  Group(gen, ...) (ver capítulo 1, definición 2) es el grupo generado por los argumentos **gen,...**, por ejemplo:

```
gap> s4 := Group((1,2,3,4),(1,2));;
```

Código A.1: Grupo generado por los elementos (1,2,3,4),(1,2).

- **Subgroup**

  Subgroup(G,gens)(ver capítulo 1, definición 12) crea el subgrupo de G generado por *gens*, por ejemplo:

```
gap> H := Subgroup(s4, [(1,2)]);;
```

Código A.2: Subgrupo de S_4 generado por (1,2)

- **SmallGroup** *SmallGroup(OG,i)* es una función que toma 2 elementos(ambos son números enteros) o alternativamente una lista de números, y regresa un grupo, hay que destacar que *OG* representa el orden del grupo e *i* representa el i-ésimo grupo de orden *OG* por ejemplo:

```
gap> H := SmallGroup(32,2);;
<pc group of size 32 with 5 generators
```

Código A.3: Caracterización del segundo grupo de orden 32

- **NumberSmallGroups** *NumberSmallGroups(a)* es una función que toma 1 entero positivo y regresa un entero, que significa el número de grupos de orden a, por ejemplo:

```
gap> H := SmallGroup(32,2);;
<pc group of size 32 with 5 generators
```

Código A.4: Caracterización del segundo grupo de orden 32.

- **StructureDescription** *StructureDescription(G)* es una función que toma un grupo G y exhibe una estructura del grupo dado. La idea es regresar una cadena de carácteres que de una visión de la estructura interna del grupo, por ejemplo:

```
gap> H := SmallGroup(32,2);;
<pc group of size 32 with 5 generators
gap> StructureDescription(g2):
"(C4 x C2) : C4"
```

Código A.5: Estructura del segundo grupo de orden 32.

Esto significa que el segundo grupo de orden 32 es el producto directo de los grupos generados por 4 y 2 elementos (C_4 y C_2), producto semidirecto con el grupo generado por 4 elementos(C_4).

- **IsAbelian** *IsAbelian(G)*(ver capítulo 1, definición 9) recibe como parámetro un grupo G y regresa *True* si el grupo G es abeliano y *False* en caso contrario. Un grupo G es abeliano si y sólo si para cada $g, h \in G$ se cumple $gh = hg$, siendo esta la operación realizada para obtener el resultado.

  A continuación presentaremos un ejemplo de su uso para el grupo S_4:

```
gap> s4 := Group( (1,2,3,4), (1,2) );;
gap> IsAbelian( s4 );
false
gap> IsAbelian( Subgroup( s4, [ (1,2) ] ) );
true
```

Código A.6: Uso de la función IsAbelian.

- **Collected(L)** *Collected(L)* regresa una estadística de los elementos de L en forma de lista con entradas *[object,count]*, por ejemplo:

```
gap> Collected(List([1...100], IsPrime));
[[true,25],[false,75]]
```

Código A.7: Cantidad de elementos primos y no primos en el conjunto 1,...,100.

- **NormalSubgroups** *NormalSubgroups(G)*(ver capítulo 1, definición 14) es un comando que toma un grupo G y regresa una lista de grupos(la lista de subgrupos normales de G), por ejemplo:

```
gap>NormalSubgroups(SymmetricGroup(3));
[Group  (()), Group  ([(1,2,3)]), Sym([1..3])]
```

Código A.8: Subgrupos normales del grupo S_3.

- **Size** *Size(G)* recibe como parámetro un grupo de G y regresa un número entero que significa el tamño del grupo:

```
gap>Size(SymmetricGroup(3));
6
```

Código A.9: Tamaño del grupo S_3.

- **ConjugacyClassesSubgroups** *ConjugacyClassesSubgroups(G)*(ver capítulo 1, definición 16) toma un grupo G y regresa una lista de todas las clases de conjungación de los subgrupos de G.

```
gap>ConjugacyClassesSubgroups(SymmetricGroup( 3 ));
[Group((  ))^G, Group([(2,3)])^G, Group([(1,2,3)])^G, Group  ([(1,2,3), (2,3)])^G
    ]
```

Código A.10: Clases de conjugación del grupo S_3.

- **Tablemarks** *TableofMarks(G)*(ver capítulo 2) toma un grupo G y regresa la matriz de tabla de marcas del grupo G, por ejemplo:

```
gap>Display(TableOfMarks(SmallGroup(32,1)));
1:    32
2:    16   16
3:    8     8    8
4:    4     4    4    4
5:    2     2    2    2    2
6:    1     1    1    1    1    1
```

Código A.11: Tabla de marcas del primer grupo de orden 32.

- **MatTom** *MatTom(tom)* produce una matriz cuadrada correspondiente a la tabla de marcas *tom* en forma comprimida, por ejemplo:

```
gap>TableOfMarks(SymmetricGroup(3));
1:   6
2:   3   1
3:   2   .   2
4:   1   1   1   1
gap> MatTom(TableOfMarks(SymmetricGroup(3)));
[[6,0,0,0],[3,1,0,0],[2,0,2,0],[1,1,1,1]]
```

Código A.12: Uso de la función MatTom.

A.2. Funciones implementadas en *GAP*

En la elaboración de éste proyecto, he recurrido al lenguaje de programción GAP para realizar los cálculos más complejos, que son la gran mayoría.

```
gap> StructureDescription(SmallGroup(o,i));
gap> for i in [1..n] do
gap> Print(i,''.",StructureDescription(SmallGroup(OG,i)), ''\n");
gap> od;
```

Código A.13: Descripción física de la estructura de un grupo G en forma de lista "OG" es el orden de G en forma de lista. "OG" es el orden de G e "i" es el grupo i-ésimo en GAP.

```
gap> ordElem := function(g)
gap> local h,w;
gap> w := [];
gap> w := h ->Collected(List(Elements(h), Order));
gap> return w(g);
gap> end;
```

Código A.14: Obtención del orden de los elementos de todos los subgrupos de G.

```
gap> NumSubNormal := function(g)
gap> local l;
gap> l := NormalSubgroups(g);
gap> return Size(l);
gap> end;
```

Código A.15: Cálculo del número de subgrupos normales de los subgrupos de G.

```
gap> OrdenSubgNormal := function(g)
gap> local ls, lo;
gap> ls := NormalSubgroups(g);
gap> lo := Collected(List(ls, Order));
gap> return lo;
gap> end;
```

Código A.16: Obtención del orden de los subgrupos normales de los subgrupos de G.

```
gap> ClasCS := function(g)
gap> local l, lc;
gap> l := ConjugacyClassesSubgroups(g);
gap> lc := Collected(List(l, Size));
gap> return lc;
gap> end;
```

Código A.17: Obtención del número de clases de conjugación de subgrupos de G.

```
gap> g:= SmallGroup(OG, i);
gap> t:= TableOfMarks(g);
gap> Display(t);
```

Código A.18: Descripción y estructura física de una tabla de marcas de un grupo G.

```
gap>  compara:= function(t1, t2)
      local m1, m2, i,j, contra;
      contra:= false;
      m1:= MatTom(t1);
      m2:= MatTom(t2);
      for i in [1..Size(m1)] do
           if m1[i] = m2[i] then
             j:= 1;
           else
            Print(``Renglon ",i,``\n");
          fi;
         od;
      end;
```

Código A.19: Comparando tablas de marcas.

```
perm:= (9,27)*(10,12)*(11,23)*(13,19)*(15,16)*(16,24)*(17,22)*(18,20)*(21,28)*
     (25,30)*(14,19)*(19,23)*(20,34)*(22,26)*(23,26)*(24,29)*(26,30)*(27,28)*(28,34)
     *\\
(29,34)*(30,34)*(32,34)*(33,34)*(35,45).\\

t1 := SortedTom(t240,perm);\\

compara(t36,t1);\\

Display(t1);
```

Código A.20: Permutar y comparar una tabla de marcas respecto a otra.

Bibliografía

[1] L. M. Huerta-Aparicio, A. Molina-Rueda, A.G. Raggi-Cárdenas y Luis Valero-Elizondo. *On some invariants preserved by isomorphisms of tables of marks*. Revista Colombiana de Matemáticas. Volumen 43(2009)2, páginas 165-164.

[2] *The GAP Group. GAP - Groups, Algorithms and Programming, version 4.4, 2006, http:www.gap-system.org.*

[3] Alberto Raggi-Cárdenas, Instituto de Matemáticas, UNAM. Luis Valero Elizondo, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH. *Two non-isomorphic groups of order 96 with isomorphic tables of marks and non-corresponding centres and abelian subgroups.*

[4] Alberto G. Raggi-Cárdenas, Luis Valero-Elizondo y Eder Vieyra-Sánchez *Minimal groups with isomorphic tables of marks(Part one) September 10, 2009.*

[5] Eder Vieyra-Sánchez, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH. *Isomorfismos entre tablas de marcas de grupos de orden menor o igual a 95.*

[6] Ariel Molina Rueda, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH. *Comprobación computacional de una conjetura de tablas de marcas y anillos de Burnside.*

[7] Liam Naughton y Goetz Pfeiffer, *The GAP Table Of Marks Library*, version 1.2.5, November 2014, School of Mathematics, Statistics and Applied Mathematics, National University of Ireland Galway.

[8] Alexander Hulpke with contributions by Kenneth Monks and Ellen Ziliak, *Abstract Algebra in GAP*, Version of January 2011, Department of Mathematics, Colorado State University; 1874 Campus Delivery.

[9] Julianne G. Rainbolt and Joseph A. Gallian, *Abstract Algebra with GAP*, 2002, Supplement to: J. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*.

[10] J. S. Milne, *Group Theory*, Version 3.13, March 15, 2013.

[11] Robert A. Beezer, *Sage for Abstract Algebra, A Supplement to Abstract Algebra, Theory and Applications*, August 16, 2013, Department of Mathematics and Computer Science, University of Puget Sound.