



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

Construcción de poliedros uniformes

T E S I S

Que para obtener el grado de Licenciada en Ciencias Físico-Matemáticas
Presenta:

NAILA ITZEL ANGELINA CENTENO

Director:

Dr. Daniel Pellicer Covarrubias
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM Campus Morelia

MORELIA, MICHOACÁN - SEPTIEMBRE DE 2016.

Resumen

En este trabajo presentaremos la lista y la descripción de los poliedros uniformes obtenidos a partir de los grupos de simetrías del tetraedro y del octaedro. Para ello, se estudia la construcción de Wythoff de poliedros uniformes a partir de los triángulos de Schwarz que fue utilizada por Coxeter, Longuet-Higgins y Miller para la elaboración de tal lista.

Palabras clave: Poliedro uniforme, simbología de Wythoff, triángulos de Schwarz, grupos de simetrías de poliedros, sólidos platónicos.

Abstract

In this work we present the list and description of the uniform polyhedra obtained from the symmetries groups of tetrahedron and octahedron. To do so, we study the Wythoff's construction of uniform polyhedra from the Schwarz's triangles that was used by Coxeter, Longuet-Higgins and Miller for elaboration of such list.

Keywords: Uniform polyhedra, Wythoff symbol, Schwarz's triangles, symmetries groups of polyhedra, platonic solids.

Agradezco al proyecto PAPIIT IN107015 de la UNAM por el apoyo brindado para la elaboración de este trabajo.

AGRADECIMIENTOS

Hay muchas personas a las que les quiero agradecer su inmensa participación a lo largo de mi vida.

Quiero agradecer a mi asesor el Dr. Daniel Pellicer por permitirme trabajar con él, además por brindarme su apoyo, paciencia y confianza. Por la enseñanza de las matemáticas y por las cosas de la vida que aprendí de él durante este tiempo.

A mi familia, mis hermanas Paola, Lupe, Claudia, mis hermanos Victor y Fernando pero en especial a mis padres Lourdes y Victor, por su amor, dedicación, amistad, coraje, compasión, firmeza y enseñanza de vida, ya que sin ellos no sería la persona que soy.

Le agradezco a los profesores Armando, Azucena, David, Edgardo, Fernando Hernández, Francisco Mota, Gabriel, Gerardo Tinoco, Héctor Tejeda, Jorge López, Jesús (Chucho), José Vega, Karina Figueroa, Luis Valero, Malú, Osvaldo Guzmán, Petr, Raymundo Bautista, Rigo y Temo, que me formaron en este mundo de las matemáticas y me enseñaron a ser la estudiante que ahora soy, además de brindarme su amistad. Además, agradezco también a la Dra. Pérez Seguí, Dr. Valero Elizondo, al Dr. Hernández Hernández, al Dr. López López y al Dr. Díaz Marín por haber aceptado formar parte de mi mesa sinodal y enriquecer este trabajo.

A mis amigos y compañeros, quienes me acompañaron en los momentos de alegría, cotarro, tristezas, preocupaciones entre otros, gracias a todos ellos. Claro que si hago una lista de todos ellos ésta sería muy larga, cada uno de ustedes saben quiénes son esas personas importantes, para mí, todas aquellas personas buenas y malas que han pasado en mi vida o aún permanecen en ella forman parte de ella. Y a Enrique[†] quien me enseñó a tomar lo bueno de la vida.

A la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por haberme brindado las condiciones adecuadas para poder continuar con mi formación académica.

A Gasde por presentarme otra manera de ver las matemáticas junto a la Unidad de Divulgación y Vinculación, además, gracias a él y Beli por su cariño y su amistad.

Por último, quiero agradecer totalmente a mi esposo Bosco Frías quien ha estado a mi lado a lo largo de mi carrera apoyándome en cada momento, por estos nueve años de amor, cariño, paciencia, comprensión, amistad y por una vida llena de alegría y sueños. Y a Haku por su amor y alegría.

ÍNDICE GENERAL

Resumen y Abstract	I
Agradecimientos	V
Índice de figuras	IX
Introducción	XIII
Capítulo 1. Preliminares	1
1. Polígonos y Poliedros Convexos	1
2. Polígonos y Poliedros Combinatorios	3
3. Simetrías	7
4. Simbología de Schläfli	11
5. Triángulos Esféricos	13
6. Simbología de Wythoff y Triángulos de Schwarz	14
7. Subdivisión Baricéntrica	15
8. Superficies	16
Capítulo 2. Construcción de Wythoff	21
1. Una Construcción Paso a Paso	21
2. Construcción de Wythoff y Ejemplos	27
Capítulo 3. Los Poliedros Uniformes	37
1. Triángulos de Schwarz de los Grupos de Simetrías del Tetraedro y del Octaedro	37
2. $p \mid q r$	40
3. $p q \mid r$	42
4. $p q r \mid$	48

5. p q r	51
Conclusiones	53
Bibliografía	55
Índice Alfabético	57

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Casco convexo de algunos puntos	2
1.2. Cubo con coordenadas de sus vértice.	2
1.3. Algunos planos soportes del cubo.	3
1.4. Polígono regular convexo y polígono regular estrellado.	4
1.5. Vecindad de un vértice de un poliedro.	5
1.6. Figura vertical de un vértice de un cuadrado.	5
1.7. Figura vertical de un vértice del cubo.	6
1.8. Prismas para $n = 3, 4, 5$ y 6 .	6
1.9. Antiprismas para $n = 3, 4, 5$ y 6 .	7
1.10. Rombicuboctaedro a la izquierda y pseudorombicuboctaedro a la derecha.	8
1.11. Los sólidos Platónicos.	9
1.12. Tipos de isometrías del tetraedro.	10
1.13. Tipos de isometrías del cubo.	11
1.14. Cubo.	11
1.15. Esfera con un triángulo esférico.	13
1.16. Triángulos de Schwarz.	15
1.17. Subdivisión baricéntrica de un triángulo y un hexágono.	16
1.18. Subdivisión baricéntrica de un tetraedro y cubo.	16
1.19. La esfera (a la izquierda) y el toro (a la derecha).	17
1.20. Anillo y banda de Möbius.	17

1.21. Banda de Möbius en el plano proyectivo.	17
1.22. Bonete en la esfera.	18
1.23. Asa en la esfera.	19
2.1. Triángulo de Schwarz de $\frac{3}{2} 3 3$.	22
2.2. Proyección del octaedro en la esfera con subdivisión baricéntrica.	22
2.3. Triángulo en la esfera.	23
2.4. Reflexión del triángulo sobre qr .	23
2.5. Triángulo reflejado por un vértice.	24
2.6. Caras restantes del poliedro uniforme.	24
2.7. La esfera muestra dos hexágonos y dos triángulos.	25
2.8. Caras del poliedro etiquetadas.	26
2.9. Caras del poliedro coloreadas.	27
2.10. Caras del poliedro acomodados.	27
2.11. a) $2 3 3$ y b) $2 3 4 $.	28
2.12. Tetraedro y Octaedro.	29
2.13. Proyecciones de los poliedros en la esfera.	29
2.14. Subdivisiones baricéntricas de las proyecciones de los poliedros.	29
2.15. Triángulos en las esferas.	30
2.16. Caras de los poliedros al reflejar los triángulos de Schwarz.	30
2.17. $\frac{3}{2} 3 2$ (a la izquierda) y $\frac{3}{2} 4 4$ (a la derecha).	30
2.18. Tetraedro y Octaedro.	31
2.19. Proyecciones de los poliedros.	31
2.20. Subdivisiones baricéntricas de las proyecciones de los poliedros.	31
2.21. Triángulos en las esferas.	32
2.22. Caras del $\frac{3}{2} 3 2$.	32
2.23. Cara de $\frac{3}{2} 3 2$.	33
2.24. Caras de $3 \frac{4}{3} 4 $.	33
2.25. Caras de $3 \frac{4}{3} 4 $.	34
2.26. Caras del poliedro con etiquetas.	34
2.27. Cara del poliedro coloreadas.	35

Índice de figuras

2.28. Triángulo de Schwarz	35
3.1. Subdivisión Baricéntrica del Tetraedro en la Esfera.	38
3.2. Triángulos que se encuentran en la subdivisión baricéntrica del tetraedro.	38

Desde la antigüedad, los cuerpos geométricos llamados poliedros han cautivado a la civilización ya que estos no sólo aparecían en la matemática, en el arte y en la naturaleza, sino que además poseían una belleza mística y una interesante característica que es la simetría. Por ejemplo, a los sólidos plátonicos que fueron nombrados y estudiados por Platón se les atribuyeron relaciones con elementos de la naturaleza: el tetraedro se relacionó con el fuego, el octaedro con el aire, el cubo con la tierra y el icosaedro con el agua. Aunque originalmente Platón no relacionó al dodecaedro con elemento alguno, ciertos grupos de personas lo relacionaron con el éter que fue postulado por Aristóteles como elemento con el cual estaba formado el cielo.

En el año de 1953, los matemáticos H.S.M. Coxeter, M.S. Longuet-Higgins y J.C.P. Miller estudiaron en [CLM] los poliedros uniformes con el objetivo de encontrarlos a todos, enumerarlos y clasificarlos. En total, ellos hablan de 75 poliedros uniformes y terminan su trabajo mencionando que creían que su lista estaba completa. Sin embargo, en el año de 1975, el matemático J. Skilling en su trabajo [Ski] retoma el problema estudiado por Coxeter, Longuet-Higgins y Miller y encuentra que la lista anterior no estaba completa pues hacía falta agregar un poliedro uniforme más. Este poliedro tiene la propiedad de que un segmento de recta representa a dos aristas distintas lo cual lo descarta como poliedro bajo algunas definiciones. Además, Skilling muestra que añadiendo este último poliedro, ningún poliedro uniforme queda fuera de la lista.

El objetivo de este trabajo es presentar la lista y la descripción de los poliedros uniformes obtenidos por Coxeter, Longuet-Higgins y Miller a partir de los grupos de simetrías del tetraedro y del octaedro. Para ello, estudiaremos la técnica utilizada por dichos autores para su construcción. Tal técnica es la construcción de Wythoff de poliedros uniformes a partir de los triángulos de Schwarz.

Debemos señalar que algunas de las figuras presentadas en este trabajo fueron elaboradas en el editor de gráficos vectoriales Inkscape [Ink11].

El Capítulo 1 corresponde a las definiciones y a los resultados preliminares donde realizaremos un recordatorio de algunas nociones que necesitaremos a lo largo de este trabajo. Aquí se muestra una recopilación de algunos conceptos y resultados sobre: polígonos y poliedros tanto convexos como combinatorios, vecindad de vértice, figura vertical, simetrías de poliedros en especial del tetraedro y octaedro, la simbología y la construcción de Wythoff. Por último hablaremos un poco sobre superficies ya que todo poliedro puede representarse como mapa en una superficie, gracias a esto podemos hablar de orientabilidad de un poliedro.

En el Capítulo 2, en primer lugar realizaremos a detalle la construcción de Wythoff del poliedro uniforme llamado octahemioctaedro. Posteriormente, mencionaremos los pasos de la construcción de Wythoff en general y presentaremos la construcción de otros cuatro poliedros uniformes la cual será separada en dos casos, uno convexo y el otro no convexo. Cabe destacar que el procedimiento de la construcción de Wythoff es el usado en el artículo de [CLM] para dar la lista de los poliedros uniformes.

En el Capítulo 3 y último de este trabajo, señalaremos la lista de los triángulos de Schwarz de los grupos de simetrías del tetraedro y del octaedro, y posteriormente presentaremos la lista de poliedros uniformes con estos grupos de simetrías. La lista de los poliedros uniformes será dividida en cuatro partes en base a la simbología de Wythoff.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo daremos algunas de las definiciones, resultados y propiedades, que nos ayudarán a entender el contenido del Capítulo 2 en el cual realizamos la construcción de poliedros uniformes. El contenido de este capítulo se basa en [III], [Mar] y [Ale].

1. Polígonos y Poliedros Convexos

Comencemos recordando que el espacio \mathbb{R}^n es convexo y que la intersección de cualquier familia de conjuntos convexos es convexo. Además, dado un subconjunto A de \mathbb{R}^n , el conjunto convexo obtenido como la intersección de todos los conjuntos convexos de \mathbb{R}^n que contienen a A se llama el **casco convexo** A .

Definición 1.1. Un **polígono convexo** es el casco convexo de un conjunto finito de puntos afínmente independientes¹ en el plano euclidiano.

Recordemos que para $u \in \mathbb{R}^2$ fijo, $u \neq 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $H = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, u \rangle = \alpha\}$ es una recta. Además, $H^- = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, u \rangle \leq \alpha\}$ y $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, u \rangle \geq \alpha\}$ son los semiplanos cerrados determinados por H .

Definición 1.2. Una recta H es una **recta soporte** de un conjunto convexo $K \subset \mathbb{R}^2$ si $K \cap H \neq \emptyset$ y se tiene que $K \subset H^-$ o bien $K \subset H^+$.

Definición 1.3. Un punto p de un polígono convexo K es un **vértice** si existe una recta soporte H tal que $K \cap H = \{p\}$.

¹Un conjunto de puntos $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ son afínmente independientes si para números reales $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tales que $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0$ y $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$ entonces $\alpha_i = 0$ para $i = 1, \dots, k$.

Definición 1.4. El segmento p_1p_2 entre los puntos p_1 y p_2 de un polígono convexo K es una **arista** si existe una recta soporte H tal que $K \cap H = p_1p_2$.

La Figura 1.1 ilustra los polígonos convexos construidos a partir de los dos conjuntos k_1 y k_2 para cuatro y cinco punto, donde $k_1 = \{v_1, \dots, v_4\}$ y $k_2 = \{v'_1, \dots, v'_5\}$

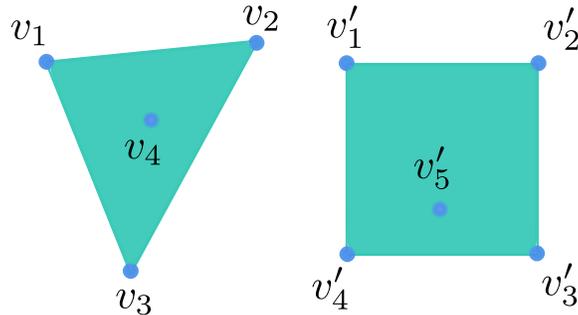


FIGURA 1.1. Casco convexo de algunos puntos.

Definición 1.5. Un **poliedro convexo** es el casco convexo de un conjunto finito de puntos afínmente independientes en el espacio euclidiano.

Por ejemplo, el cubo es un poliedro convexo.

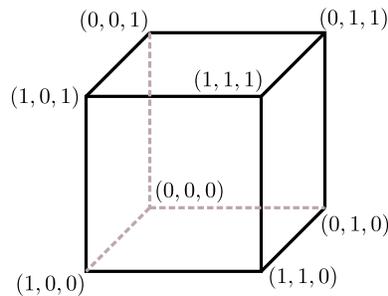


FIGURA 1.2. Cubo con coordenadas en sus vértices.

Análogamente al caso de dimensión 2, para $u \in \mathbb{R}^3$ fijo y $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, u \rangle = \alpha\}$ es un plano. Además, $H^- = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, u \rangle \leq \alpha\}$ y $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, u \rangle \geq \alpha\}$ son los semiplanos cerrados determinados por H .

Definición 1.6. Un plano H es llamado un **plano soporte** de un conjunto convexo $K \subset \mathbb{R}^3$ si $K \cap H \neq \emptyset$ y se tiene que $K \subset H^-$ o bien $K \subset H^+$.

Definición 1.7. Un punto p de un poliedro convexo K es un **vértice** si existe un plano soporte H tal que $K \cap H = \{p\}$.

Definición 1.8. El segmento p_1p_2 entre los puntos p_1 y p_2 de un poliedro convexo K es una **arista** si existe un plano soporte H tal que $K \cap H = p_1p_2$.

Definición 1.9. El casco convexo C de un conjunto de puntos $\{p_1 \dots p_n\}$ en un plano es una **cara** de un poliedro convexo K si existe un plano soporte H de K tal que $K \cap H = C$, donde H es el casco afín² de $\{p_1, \dots, p_n\}$.

Una vez dicho todo esto podemos tomar como ejemplo el cubo, el cual tiene 8 vértices, 12 aristas y 6 caras, cada uno de ellos se obtiene gracias a un plano soporte. En la Figura 1.3 mostramos planos soportes que definen a un vértice, una arista y una cara respectivamente tomando como referencia la Figura 1.2.

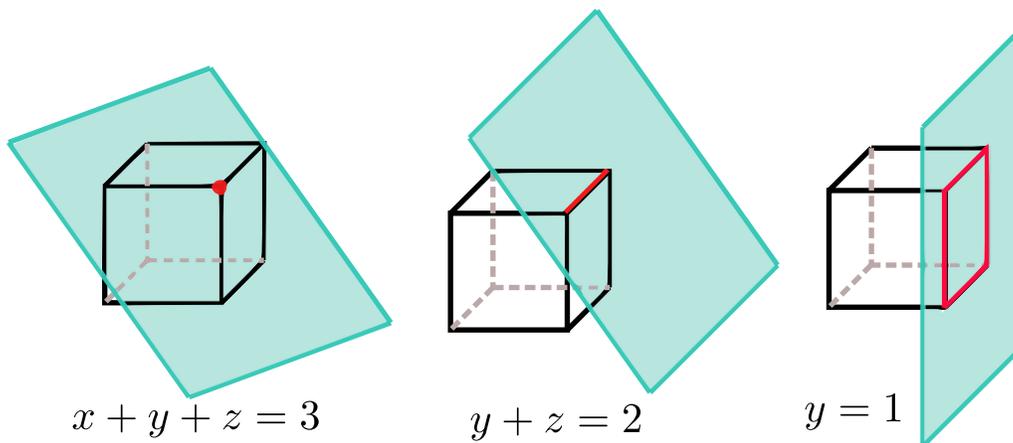


FIGURA 1.3. Algunos planos soportes del cubo (tomando la Figura 1.2).

Para mayores detalles de poliedros y polígonos convexos sugerimos revisar [Ewa].

2. Polígonos y Poliedros Combinatorios

Para nosotros no todos los polígonos y poliedros son convexos y requerimos una definición más adecuada.

Definición 1.10. Un **polígono combinatorio** es un circuito de p segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_pA_1$ los cuales están en el mismo plano de modo que los pares consecutivos $A_{i-1}A_i$ y A_iA_{i+1} coinciden en su extremo A_i . Los segmentos y puntos son llamados respectivamente **aristas** y **vértices** del polígono.

²El casco afín de un subconjunto A de \mathbb{R}^n es el conjunto de todas las combinaciones afines de elementos de A , ver [Ewa, Definición 1.4, p. 4]

Observación 1.11. En adelante, un **polígono** se referirá a un polígono combinatorio a menos que se indique lo contrario.

Decimos que un polígono es **equilátero** si todas sus aristas miden lo mismo y de manera similar un polígono es **equiángulo** si todos los ángulos entre sus segmentos consecutivos son iguales.

Definición 1.12. Un **polígono regular** es un polígono equilátero y equiángulo. Al polígono regular de p lados lo denotamos por $\{p\}$.

Observación 1.13. Hay dos cosas que debemos aclarar, la primera es que en otros trabajos se estudian polígonos no planos, pero aquí nos restringimos sólo a los planos. La segunda es que hay polígonos regulares convexos y regulares estrellados (ver por ejemplo [Cox1, Sección 2.8] o [Cox2, Sección 6.1]), como se muestra respectivamente en la Figura 1.4.

Por lo que la notación $\{p\}$ es sólo para polígonos regulares convexos ya que para polígonos regulares estrellados se les denota por $\{\frac{p}{k}\}$, donde k es el salto de arista que se hace. En el caso convexo las aristas van del vértice i al $i + 1$ (módulo k) y para el caso del octágono estrellado de la Figura 1.4 la arista van de i a $i + 3$ (módulo 8), su símbolo de Schläfli es $\{\frac{8}{3}\}$ y en general de un n -ágono estrellado con aristas del vértice i al vértice $i + k$ es $\{\frac{n}{k}\}$.

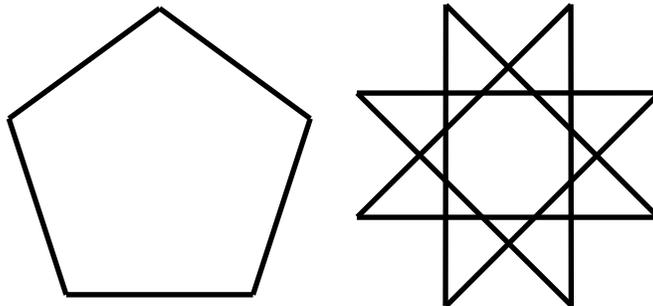


FIGURA 1.4. Polígono regular convexo y polígono regular estrellado.

Definición 1.14. Un **poliedro combinatorio** es un conjunto finito de polígonos, tal que cada arista de cada polígono pertenece también a sólo un polígono más y con la condición que los polígonos que rodean a cada vértice forman un ciclo único. Los polígonos son llamados **caras** y sus lados **aristas**.

La condición acerca del ciclo único formado por las caras alrededor de cada vértice se considera para excluir anomalías como dos pirámides unidas con un vértice en común.

Denotaremos por C al número de caras, por A al número de aristas y por V al número de vértices. Todo poliedro convexo satisface la conocida **fórmula de Euler**: $C + V - A = 2$, donde C es el número de caras, V el de vértices y A el de aristas (ver [Mar, Teorema 17.1, p. 198]).

La **vecindad de un vértice** v de un poliedro P es el conjunto de caras de P que contienen a v .

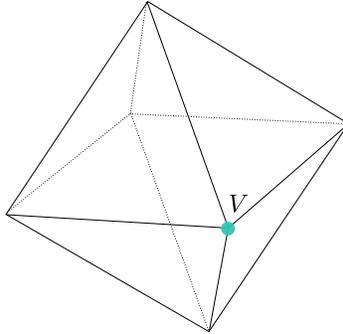


FIGURA 1.5. Vecindad de un vértice del octaedro.

La notación que usaremos para vecindad de un vértice es $P_1.P_2.\dots.P_t$ siempre que los números de las caras alrededor de V en orden cíclico sean P_1, P_2, \dots, P_t . Por ejemplo, en la Figura 1.5, la vecindad de un vértice V del octaedro se puede representar por el símbolo 3.3.3.3, es decir, la vecindad de vértice es el conjunto de los cuatro triángulos alrededor del punto V .

La **figura vertical** de un vértice V de un polígono es el segmento que une los puntos medios de los lados que contienen a V . Si tomamos un cuadrado como se muestra en la Figura 1.6, la figura vertical de éste es el segmento v_1v_2 .

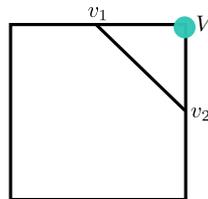


FIGURA 1.6. Figura vertical de un vértice en un cuadrado.

La **figura vertical** del vértice V en un poliedro es el polígono cuyas aristas son las figuras verticales de V en todas las caras alrededor de V . Los vértices de la figura vertical son puntos medios de todas las aristas alrededor de V . Por ejemplo, la figura vertical para un vértice de un cubo (de cualquiera de sus vértices) es un triángulo (ver la Figura 1.7).

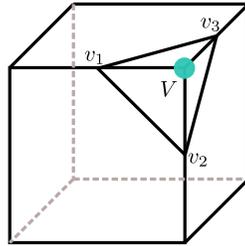


FIGURA 1.7. Figura vertical de un vértice del cubo.

Un **prisma** es un poliedro que consta de dos paralelas bases que son n -ágono con $n \geq 3$ aristas, otra base paralela congruente que es un traslado de la otra base y que además tiene una banda con n -caras todas ellas cuadrados los cuales se unen a los lados correspondientes de las dos bases. En la Figura 1.8 se muestran ejemplos de prismas para $n = 3, 4, 5$ y 6 . Se puede notar que si $n = 4$, entonces el prisma obtenido es un cubo. Ahora, un **antiprisma** es

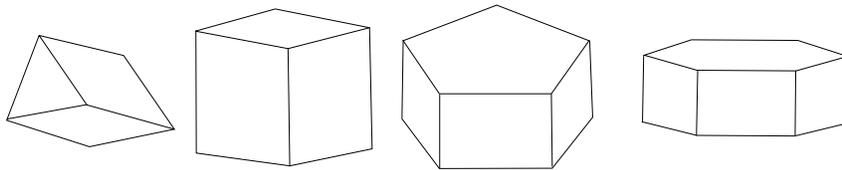


FIGURA 1.8. Prismas para $n = 3, 4, 5$ y 6 .

un poliedro compuesto por dos bases de n -ángonos congruentes paralelas pero conectadas por una banda alternada de triángulos equiláteros, donde $n \geq 3$. Los antiprismas son similares a los prismas pero la característica que tienen es que sus bases están giradas una de la otra por un ángulo de $\frac{\pi}{n}$ radianes. Sus bases n -agonales se encuentran conectadas por $2n$ triángulos equiláteros. En la Figura 1.9 mostramos ejemplos de antiprismas para $n = 3, 4, 5$ y 6 . Cuando $n = 3$, el antiprisma obtenido es el octaedro.

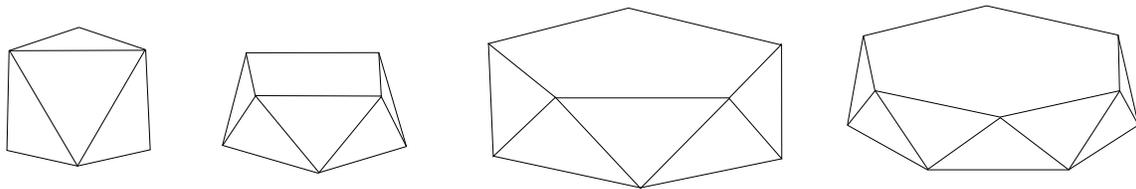


FIGURA 1.9. Antiprismas para $n = 3, 4, 5$ y 6 .

Los **Sólidos Platónicos** son poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares congruentes entre sí y cuyos vértices tienen el mismo grado. En total existen cinco sólidos platónicos que presentamos a continuación, como se muestra en la Figura 1.10:

- El tetraedro es un poliedro con sólo cuatro vértices de modo que cualesquiera tres de ellos forman un triángulo equilátero. Es un caso especial de pirámide sobre un triángulo.
- El octaedro es un poliedro compuesto por ocho triángulos equiláteros, donde cuatro de ellos se encuentran en un vértice. Se puede construir pegando dos pirámides sobre cuadrados en sus bases y no considerando dichas bases.
- El cubo es un poliedro el cual está compuesto por seis caras cuadradas con tres de ellas encontradas en un vértice. Además, se puede ver como el prisma sobre un cuadrado.
- El dodecaedro es un poliedro compuesto por doce caras pentagonales regulares con tres de ellas encontradas en cada vértice.
- El icosaedro está compuesto por veinte caras triangulares con cinco de ellas encontradas en un vértice.

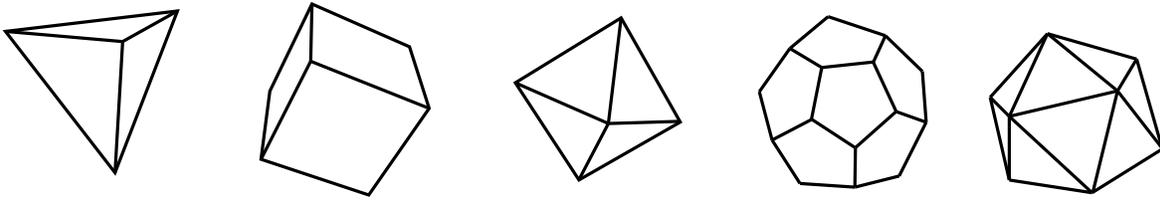


FIGURA 1.10. Los Sólidos Platónicos.

3. Simetrías

Recordemos que una **transformación** en el espacio \mathbb{R}^3 es una biyección del espacio en sí mismo. De manera particular, estaremos interesados en aquellas transformaciones que preservan distancias.

Definición 1.15. Una función $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ entre espacios métricos es una **isometría** si para cualesquier $x_1, x_2 \in X$ se cumple que $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$.

A una transformación de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 se le llama isometría de \mathbb{R}^3 . La **identidad**, definida por $i(P) = P$ para cualquier punto P , es un ejemplo de isometría. Una isometría α es una **simetría** para un conjunto de puntos si α fija a dicho conjunto. El conjunto de simetrías de un objeto es un grupo bajo la composición.

Que un poliedro sea **transitivo en vértices**, significa que para cualquier par de vértices v_1, v_2 del poliedro existe una transformación del grupo de simetrías del poliedro que manda a v_1 en v_2 .

Con esto queremos decir que un vértice se puede transformar en cualquier otro por una operación de simetría. Mostramos dos ejemplos en la Figura 1.11, los cuales, el de la izquierda es transitivo en vértices y el de la derecha no.

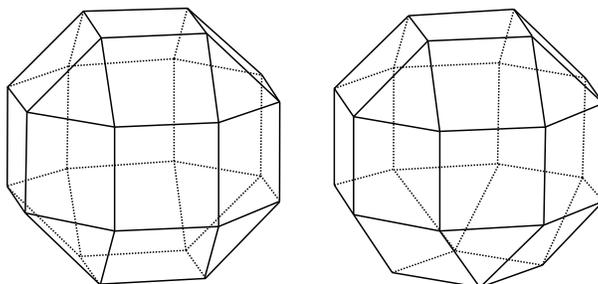


FIGURA 1.11. Poliedro transitivo en vértices a la izquierda y poliedro no transitivo en vértices a la derecha.

Si un poliedro es transitivo en vértices entonces todos sus vértices tienen la misma vecindad de vértice. Ese símbolo se hereda al poliedro. Por ejemplo el octaedro tiene símbolo 3.3.3.3.

Definición 1.16. Un **poliedro** P es **uniforme** si todas sus caras son polígonos regulares y es transitivo en vértices.

Si Δ es un plano, entonces la **reflexión** σ_Δ respecto a Δ es la transformación en el espacio tal que $\sigma_\Delta(P) = P$ si el punto P está en Δ y $\sigma_\Delta(P) = Q$ si el punto P está fuera de Δ y el plano Δ es el plano mediatriz del PQ . Decimos que una isometría es **par** si es un producto una isometría **par** de un número par de reflexiones.

Si los planos Γ y Δ son paralelos, entonces $\sigma_\Delta\sigma_\Gamma$ es una **traslación** a lo largo de las rectas comunes perpendiculares a los planos Γ y Δ .

Si dos planos Γ y Δ se intersectan en una recta l , entonces $\sigma_\Delta\sigma_\Gamma$ es una **rotación** sobre la recta l .

Si dos planos Γ y Δ se intersectan y cada uno es perpendicularmente al plano Π , entonces $\sigma_\Pi\sigma_\Delta\sigma_\Gamma$ es una **reflexión rotatoria** sobre el punto en común de Γ , Δ y Π ; es decir, es una composición de una rotación y una reflexión respecto a un plano perpendicular al eje de rotación.

A continuación mencionamos algunos resultados sobre grupos de isometrías del espacio.

Teorema 1.17. *El grupo de simetrías de un cubo es el grupo de simetrías de un octaedro. El grupo de simetrías de un dodecaedro es el grupo de simetrías de un icosaedro. El grupo de simetrías de un tetraedro está contenido en el grupo de simetrías de un octaedro.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [Mar, Teorema 17.2, p. 203].

□

El grupo de todas las isometrías pares que pertenecen a un tetraedro regular es llamado el grupo tetraedral y se denota por \mathcal{T} ; el grupo de todas las isometrías pares que pertenecen a un octaedro regular o a un cubo es llamado un grupo octaedral y se denota por \mathcal{O} ; el grupo de todas las isometrías pares que pertenecen a un icosaedro regular es llamado un grupo icosaedral y se denota por \mathcal{I} . Hay que tomar en cuenta que \mathcal{T} , \mathcal{O} e \mathcal{I} no son los grupos de simetrías de los Sólidos Platónicos ya que éstos no contienen las isometrías impares.

$\overline{\mathcal{T}}$, $\overline{\mathcal{O}}$ y $\overline{\mathcal{I}}$ son los grupos completos de simetrías del tetraedro, octaedro e icosaedro respectivamente. El grupo $\overline{\mathcal{D}}_n$ son los grupos de simetrías de prismas y antiprismas.

El siguiente resultado sobre grupos finitos de isometrías puede consultarse en [Mar, Teorema 1.18, p. 221].

Teorema 1.18. *Todo grupo finito de isometrías en el espacio es subgrupo de uno de los siguientes:*

$$\overline{\mathcal{D}}_n, \overline{\mathcal{T}}, \overline{\mathcal{O}} \text{ e } \overline{\mathcal{I}}, \text{ con } n = 2, 3, \dots$$

Una vez que reconocemos los Sólidos Platónicos, nuestro siguiente objetivo será estudiar los grupos de isometrías del tetraedro y octaedro ya que estos dos son los principales para el desarrollo usaremos en este trabajo.

Empezaremos con el grupo del tetraedro, ver la Figura 1.12.

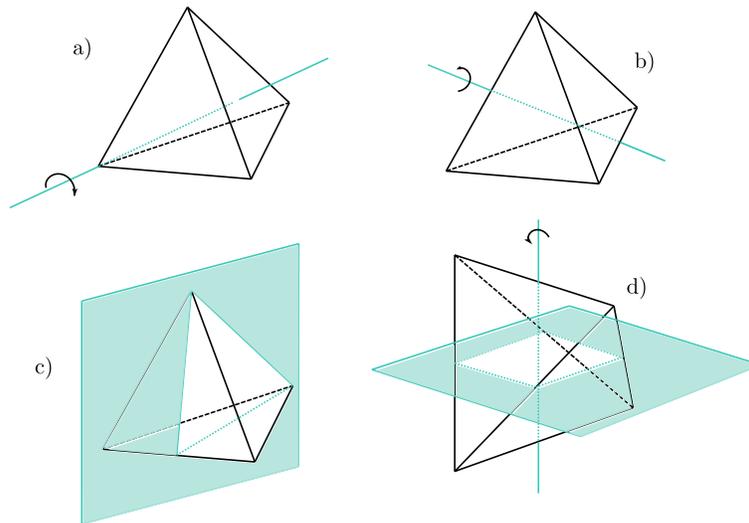


FIGURA 1.12. Tipos de isometrías del tetraedro.

En el inciso a) tenemos un eje que pasa por un vértice y el centro de la cara opuesta, donde las rotaciones de orden 3 alrededor de esos ejes son simetrías del tetraedro. En

total hay cuatro vértices y por cada vértice hay dos rotaciones y la identidad, lo que hace que tengamos ocho rotaciones de orden 3.

En el inciso b) tenemos que el eje pasa por los puntos medios de una arista y de su arista opuesta. Tenemos seis aristas por lo que se tienen tres ejes y por cada eje tenemos una rotación, entonces tenemos tres rotaciones de orden 2.

En c) lo que tenemos es un plano que pasa por la mitad de dos de sus caras y una aristas, así que tenemos seis de este tipo de reflexiones.

En d) se muestra un plano que pasa por los puntos medios de cuatro aristas del tetraedro. Hay tres de estos planos, cada uno de ellos tiene asociado dos reflexiones rotatorias del tetraedro por ángulo de $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$, así, en suma hay seis reflexiones rotatorias de este tipo y son de orden 4.

De este modo, en total tenemos 24 isometrías que constan de la identidad, seis reflexiones, ocho rotaciones por vértice, tres rotaciones por arista y seis reflexiones rotatorias.

A continuación mostraremos las isometrías del cubo en vez de las del octaedro ya que es más sencillo de dibujar en el primer caso, ver la Figura 1.13.

En a) vemos un eje que pasa por vértices opuestos en una diagonal principal del cubo, tenemos ocho vértices y por cada dos pasa un eje, entonces tenemos cuatro ejes y por cada eje dos rotaciones de orden 3. Así, tenemos ocho rotaciones de orden 3.

En b) tenemos el eje que pasa por los centros de una cara y de su cara opuesta. Por cada uno de estos ejes tenemos tres rotaciones, dos de orden 4 y una de orden 2, así que contamos con nueve isometrías.

En c) el eje pasa por una arista y su opuesta, es decir, por el punto medio de la arista y el punto medio de la arista opuesta, por lo que se tienen seis ejes, uno por cada par de aristas opuestas. Por cada eje hay una rotación de orden 2, así que tenemos seis isometrías.

En d) tenemos un plano que pasa por cuatro de las caras del cubo partiendo estas a la mitad. Se tienen tres de estos planos, por lo tanto tenemos tres reflexiones.

En e) tenemos un plano que pasa por pares de aristas opuestas por lo que se tienen seis planos dando seis reflexiones más.

En f) se muestra un plano que pasa por los puntos medios de seis aristas y un eje perpendicular al plano pasando por un par de vértices opuestos del cubo. El producto de la reflexión con respecto al plano y rotación por $\frac{\pi}{3}$ es una reflexión rotatoria, en suma hay nueve de este tipo.

En g) tenemos un plano que pasa por los puntos medios de cuatro aristas y un eje perpendicular al plano y que paso por los centros de caras opuestas del cubo. El

producto de la reflexión con respecto al plano y una rotación por $\frac{\pi}{2}$ es una reflexión rotatoria, en suma hay seis de este tipo.

Por último, hay que tomar en cuenta la identidad.

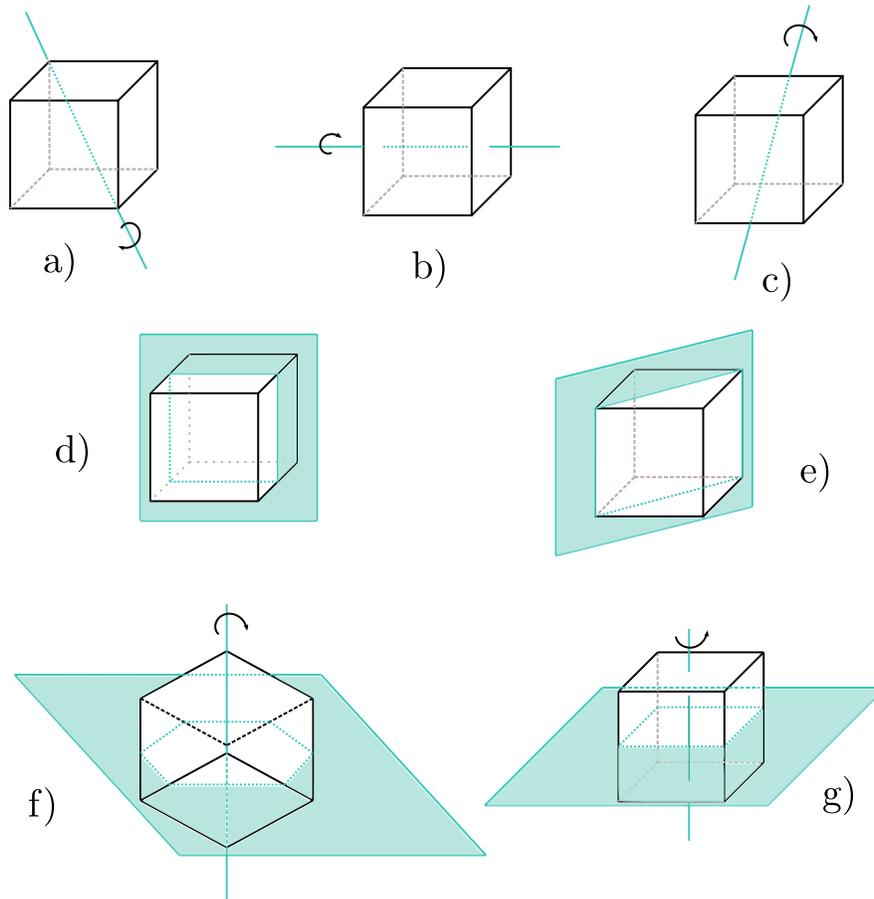


FIGURA 1.13. Tipos de isometrías del cubo.

En resumen, el cubo tiene un total de 48 isometrías que son la identidad, ocho rotaciones por vértice, nueve rotaciones por caras, seis rotaciones por arista, tres reflexiones por cara, seis reflexiones por diagonales pares de vértices opuestos y quince reflexiones rotatorias.

Con esto hemos descrito los grupos de isometrías del tetraedro y del octaedro.

4. Simbología de Schläfli

La **simbología de Schläfli** es una notación que se usa para describir polígonos y poliedros. El símbolo $\{p\}$ denota un p -ágono regular convexo y $\{p, q\}$ denota un poliedro convexo regular donde todas las caras tienen p aristas y q aristas inciden en cada vértice de la figura. Por ejemplo la simbología de Schläfli del cubo es $\{4, 3\}$:

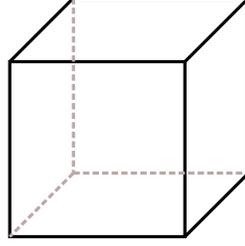


FIGURA 1.14. Cubo.

Notemos que los poliedros convexos con simbología de Schläfli $\{p, q\}$ satisfacen las desigualdades

$$p > 2, \quad q > 2 \quad \text{y} \quad (p-2)(q-2) < 4.$$

Un poliedro regular convexo $\{p, q\}$ con V vértices, A aristas y C caras satisface que

$$V = \frac{4p}{4 - (p-2)(q-2)}, \quad A = \frac{2pq}{4 - (p-2)(q-2)} \quad \text{y} \quad C = \frac{4q}{4 - (p-2)(q-2)}.$$

A continuación vamos a mostrar las propiedades anteriores:

Por la fórmula de Euler (ver Teorema 1.24) tenemos que $V - A + C = 2$. Además, contando el número de aristas obtenemos la ecuación $qV = 2A = pC$.

Primero despejamos de manera conveniente la ecuación $qV = 2A = pC$ y obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} V &= \frac{2A}{q}, & V &= \frac{pC}{q}, \\ A &= \frac{qV}{2}, & A &= \frac{pC}{2}, \end{aligned}$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} C &= \frac{2A}{p}, & C &= \frac{qV}{p}. \end{aligned}$$

Para obtener V tomamos $A = \frac{qV}{2}$ y $C = \frac{qV}{p}$ y las sustituimos en la ecuación $V - A + C = 2$:

$$\begin{aligned} V - \frac{qV}{2} + \frac{qV}{p} &= 2, \\ V\left(1 - \frac{q}{2} + \frac{q}{p}\right) &= 2. \end{aligned}$$

Posteriormente, tenemos que

$$V = \frac{2}{1 - \frac{q}{2} + \frac{q}{p}} = \frac{2}{\frac{2p - pq + 2q}{2p}} = \frac{4p}{2p - pq + 2q + 4 - 4} = \frac{4p}{4 - (p-2)(q-2)}.$$

Como consecuencia, tenemos que $A = \frac{2pq}{4 - (p-2)(q-2)}$ y $C = \frac{4q}{4 - (p-2)(q-2)}$ utilizando las ecuaciones 1.1 y 1.2.

La simbología de Schläfli puede ser extendida para polígonos y poliedros estrellados de (Kepler-Poinsont), en tal caso, los números p y q del símbolo $\{p, q\}$ podrían ser números racionales que no son enteros. Si $p = \frac{n}{k}$, entonces las caras son polígonos $\{\frac{n}{k}\}$. Por otro lado, si $q = \frac{n}{k}$, entonces la figura de vértice es $\{\frac{n}{k}\}$.

5. Triángulos Esféricos

Un **triángulo esférico** es una figura formada en la superficie de una esfera y está determinada por tres vértices unidos dos a dos por arcos de círculos máximos. Los triángulos esféricos serán usados en el siguiente capítulo para construir poliedros uniformes.

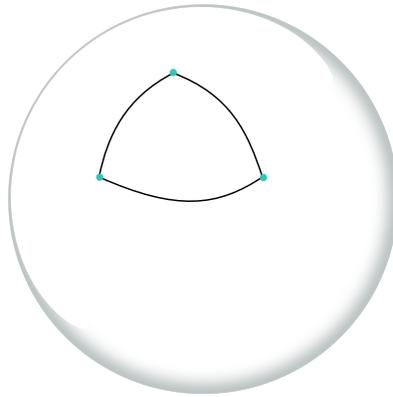


FIGURA 1.15. Esfera con un triángulo esférico.

Denotamos por (pqr) a un triángulo esférico cuyos ángulos son $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$. Observemos que la suma de los ángulos $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ es estrictamente mayor a π (ver [RS],[Mar]).

Es de notar que cada grupo finito de isometrías de \mathbb{R}^3 generado por más de dos reflexiones es generado por las reflexiones en los lados de algún triángulo esférico, donde p, q y r son enteros (ver [CLM]).

Dado que el área esférica de un triángulo es igual a $(p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} - 1)\pi$ (ver [RS]) y puesto que toda área debe ser positiva, las únicas posibilidades de p, q, r para los triángulos son las siguientes:

$$(233), (234), (235), (22r), \text{ con } r \geq 2$$

A los triángulos dados por los ángulos anteriores se les conoce como de **Möbius**.

Desde el centro de la esfera unitaria circunscrita proyectamos las aristas de un poliedro uniforme, así obtenemos una red o malla de arcos circulares “grandes” que descomponen la esfera en polígonos, uno por cada cara del poliedro.

Así, $\{p, q\}$ significa ahora un arreglo esférico de p -ángulos, donde q de ellos se unen a cualquier vértice dado.

6. Simbología de Wythoff y Triángulos de Schwarz

La simbología de Wythoff se utilizará para la enumeración de poliedros uniformes basada en una aplicación sistemática de la construcción de Wythoff a todos los posibles triángulos de Schwarz.

Los **triángulos de Schwarz** son triángulos esféricos cuyos vértices están etiquetados por números racionales p , q y r , donde el ángulo correspondiente a p es $\frac{\pi}{p}$, el ángulo correspondiente a q es $\frac{\pi}{q}$ y el ángulo correspondiente a r es $\frac{\pi}{r}$. De este modo, un triángulo de Schwarz se denota por (pqr) .

La **construcción de Wythoff** es un procedimiento que consiste en elegir un punto en un vértice, en una arista o en el incentro de un triángulo de Schwarz y a partir de él generar un poliedro uniforme los cuales describiremos más adelante.

La **simbología de Wythoff** consiste de tres números racionales p , q y r , todos mayores que 1, que se utilizan para describir a los poliedros uniformes. Para ellos se requiere de un punto C en un triángulo de Schwarz (pqr) que será el vértice inicial del poliedro.

Hay cuatro tipos de símbolos de Wythoff, $|pqr$, $p|qr$, $pq|r$ y $pqr|$.

El significado de la barra $|$ es la ubicación del punto C dentro o en la frontera del triángulo, y se puede resumir de la siguiente manera: consideramos un triángulo de Schwarz con vértices p , q y r y colocaremos el vértice C de acuerdo a los casos que presentamos a continuación:

1. $|pqr$: C es un punto especial dentro de (pqr) que traza poliedros snub por productos de pares de reflexiones. Como ejemplo está el cubo snub, para mayores detalles ver la Sección 5 del Capítulo 3.
2. $p|qr$: C es el vértice p . Dentro este triángulo se tiene un segmento el cual es la bisectriz del ángulo p . Al momento que se refleje el triángulo en alguna de sus aristas se va a preservar la medida de dicho segmento teniendo así aristas completas o mitades ellas en el nuevo poliedro.
3. $pq|r$: C se encuentra en la intersección del segmento pq y la bisectriz del ángulo opuesto, es decir del ángulo en r . Se tienen dos segmentos dentro del triángulo que son los segmentos a partir de C que caen perpendiculares a los otros dos lados. Al reflejar el triángulo sobre las aristas de éste se preserva la medida de los segmentos, dando así aristas completas y mitades de aristas del nuevo poliedro.
4. $pqr|$: C es el incentro del triángulo pqr . Tenemos tres segmentos dentro del triángulo que son los segmentos a partir de C que caen perpendiculares a cada uno de los lados de éste. Al momento de reflejar el triángulo se preservan las medidas de los segmentos de este, dando así aristas completas y mitades del nuevo poliedro.

Es fácil verificar que la medida de los segmentos dentro de los triángulos es la misma.

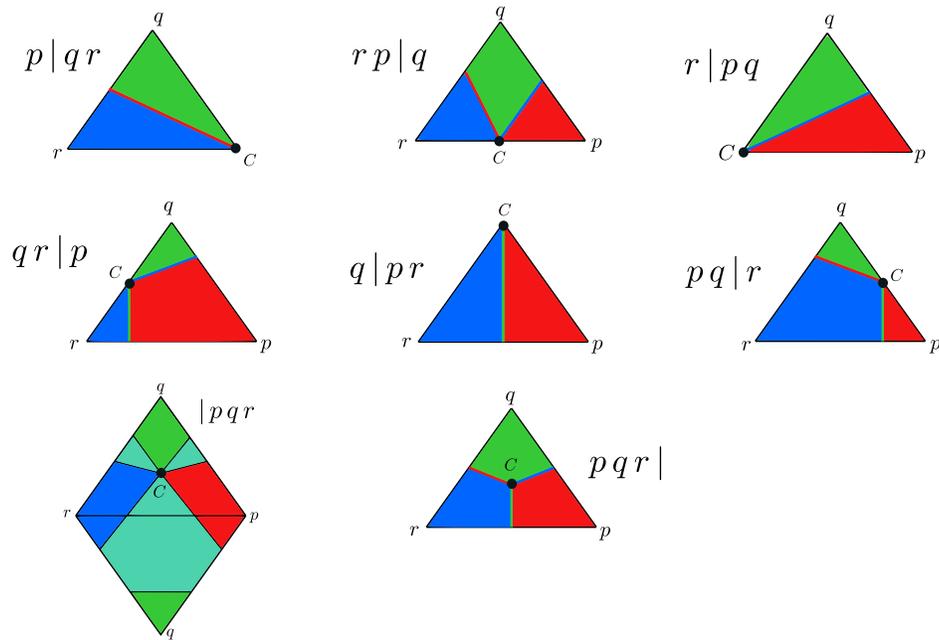


FIGURA 1.16. Triángulos de Schwarz.

Por ejemplo, el símbolo de Wythoff para el tetraedro es $3|23$, esto significa que el punto C del triángulo de Schwarz está en el primer vértice etiquetado con 3.

Es importante hacer énfasis que en los últimos tres casos, siempre que hagamos una reflexión respecto a algún lado del triángulo obtendremos o bien una arista completa del nuevo poliedro o bien la mitad de una de ellas. Esto será de gran importancia para generar poliedros con la construcción de Wythoff.

Lo mencionado en el párrafo anterior no funciona en el primer caso pues éste es particular. Para construir los poliedros de este caso es necesario considerar una pareja de triángulos de Schwarz, ver Observación 2.4.

Para dejar un poco más claro la simbología veamos la Figura 1.16 en la cual damos la idea de cómo están acomodadas las aristas de acuerdo a la posición de la barra en el símbolo de Wythoff. Es importante señalar que si $r = 2$, entonces el triángulo de Schwarz será rectángulo.

7. Subdivisión Baricéntrica

La **subdivisión baricéntrica** es una manera específica de dividir un segmento en dos, un polígono regular en triángulos y las caras de un poliedro en triángulos a través del proceso que presentamos a continuación.

La subdivisión baricéntrica de un segmento A_1A_2 resulta ser la división de A_1A_2 en los segmentos A_1O y OA_2 , donde O es el punto medio de A_1A_2 .

Ahora, explicaremos la subdivisión baricéntrica de un polígono regular $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_pA_1$. El baricentro del polígono es la intersección de todos los ejes de simetría (reflexiones) de éste, para dividir al polígono hay que tomar todos sus ejes de simetría de modo que cada triángulo de la subdivisión tiene por esquina al baricentro, un vértice del polígono y el punto medio de una sus aristas, como se muestra por ejemplo en la Figura 1.17. En el caso de un polígono estrellado, el procedimiento es el mismo una vez que se ha desdoblado en su forma convexa.

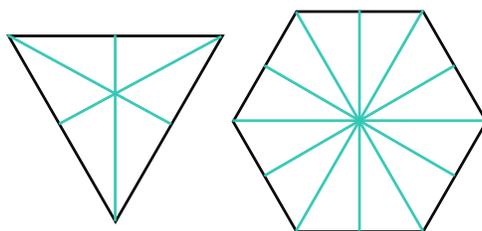


FIGURA 1.17. Subdivisión baricéntrica de un triángulo y un hexágono.

La subdivisión baricéntrica de un poliedro se realiza considerando la subdivisión baricéntrica para cada una de sus caras, como muestra por ejemplo la Figura 1.18.

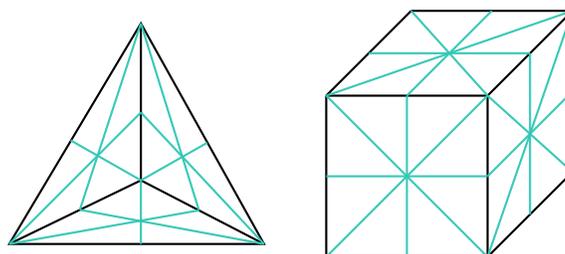


FIGURA 1.18. Subdivisión baricéntrica de un tetraedro y cubo.

Para nosotros, una **bandera** será representado por un triángulo de la subdivisión de cada una de las caras del poliedro.

8. Superficies

Definición 1.19. Una **superficie** es una variedad bidimensional, es decir, un objeto topológico que localmente se parece al plano euclidiano \mathbb{R}^2 . Dicho de otra manera, todo punto de la superficie tiene una vecindad homeomorfa a un disco.

En la Figura 1.19 damos ejemplos de superficies.

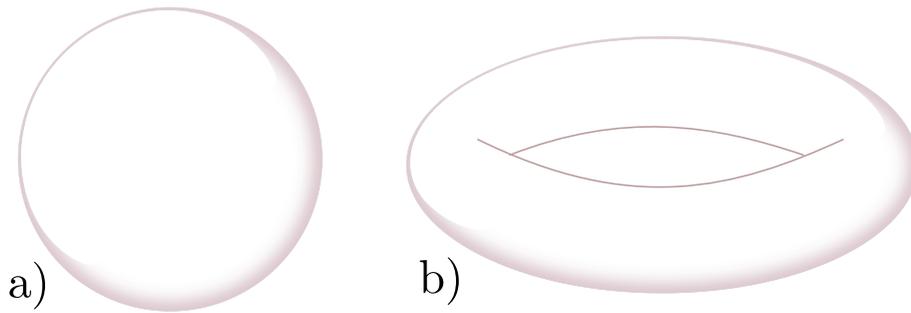


FIGURA 1.19. La esfera a) y el toro b).

Una superficie es **no-orientable** si contiene una banda de Möbius. En la Figura 1.20 mostramos un anillo orientable y la banda de Möbius, y en la Figura 1.21 damos un ejemplo de una superficie es no-orientable, a esta superficie se le conoce como el plano proyectivo. La región entre las dos líneas negras es una banda de Möbius.

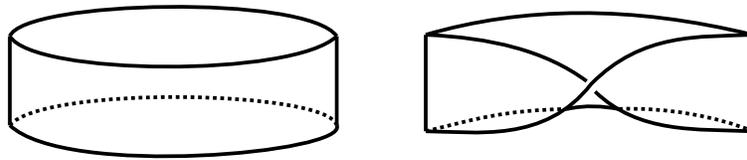


FIGURA 1.20. Anillo y banda de Möbius.

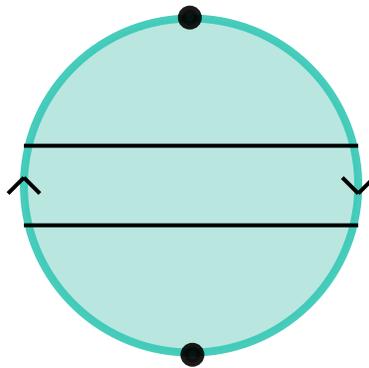


FIGURA 1.21. Banda de Möbius en el plano proyectivo.

Un **mapa** es una descomposición de la superficie en regiones llamadas “caras” que son homeomorfas a un disco. Cada componente conexa de la frontera común de dos regiones determina una arista y cada componente conexa de la frontera común entre tres o más regiones define un vértice.

En la Sección 7 vimos la definición de subdivisión baricéntrica de un polígono. Viendo a las caras de un mapa como polígonos, construimos la subdivisión baricéntrica del mapa como la colección de subdivisiones baricéntricas de sus caras.

Un poliedro es **orientable** si al considerar su subdivisión baricéntrica se pueden orientar todos los triángulos de manera que cualquier par de triángulos adyacentes están coherentemente orientados (ver [Ale, Sección 4.1]). En caso contrario, es **no-orientable**.

Una **propia 2-coloración** de la subdivisión baricéntrica de un poliedro es una asignación de uno de dos elementos de un conjunto A a cada una de sus regiones de manera que una arista de la subdivisión baricéntrica no sea adyacente a dos regiones con el mismo color. Cuando no exista la posibilidad de confusión, a una propia 2-coloración de la subdivisión baricéntrica de un poliedro le llamaremos una 2-coloración del poliedro.

Observación 1.20. Como se verá más adelante, no todos los mapas son tales que su subdivisión baricéntrica admite una propia 2-coloración.

Existen otras formas de verificar si una superficie es no-orientable. El siguiente teorema nos dice que una de ellas consiste en verificar si el poliedro admite una 2-coloración (ver [Ale, Teorema 4.18, p. 97]).

Teorema 1.21. *Un poliedro P es no-orientable si y sólo si dada cualquier propia 2-coloración de una de las caras se tiene que la 2-coloración no puede extenderse a todas las banderas de P de manera propia.*

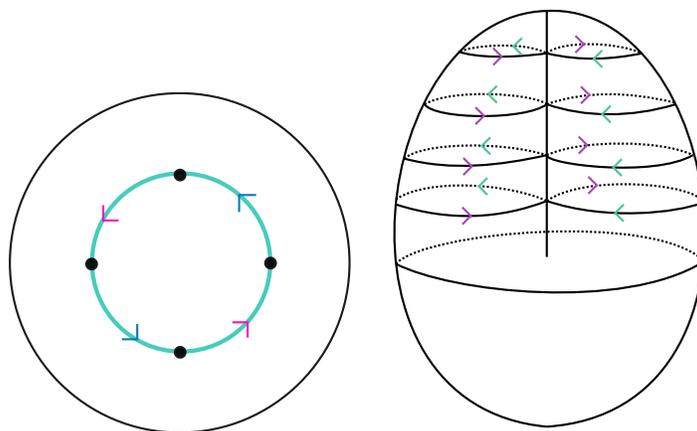


FIGURA 1.22. Bonete en la esfera.

Un **bonete** en un esfera se puede ver de la siguiente manera: consideramos una esfera a la cual le recortamos un pedazo homeomorfo a un disco de su superficie y de tal manera que este

huevo tiene cuatro vértices y hemos orientado sus lados en la dirección correcta para pegarse, como muestra la Figura 1.22. Hay que señalar que no se puede encajar bien en \mathbb{R}^3 , en efecto si se intenta encajar, entonces habría puntos distintos que resultarían ser identificados.

Una **asa** en una esfera se puede ver de la siguiente manera: en una esfera a la cual le recortamos dos pedazos de su superficie cada uno homeomorfo a un disco de tal manera que estos huecos tienen un vértice respectivamente y hemos orientado sus lados en la dirección correcta para pegarse, como muestra la Figura 1.23.

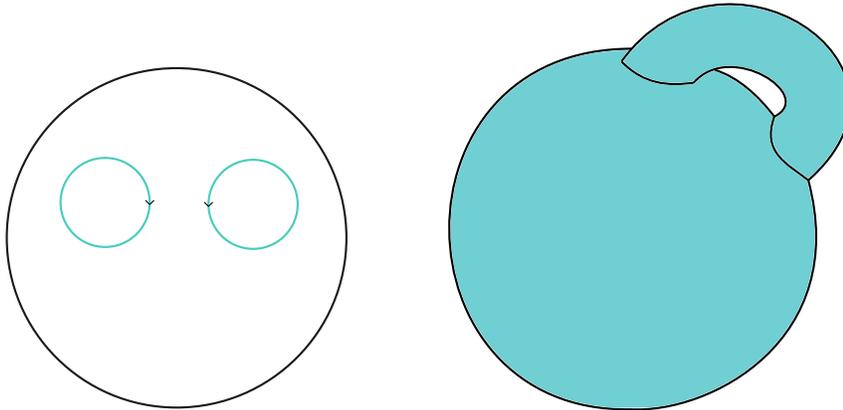


FIGURA 1.23. Asa en la esfera.

Cabe resaltar que el siguiente resultado nos permite identificar superficies homeomorfas.

Teorema 1.22. *Dos superficies compactas sin frontera son homeomorfas si y sólo si se satisface una de las siguientes:*

- a) *ambas son orientables si se obtienen de la esfera agregando el mismo número de asas,*
- b) *ambas son no-orientables si se obtienen de la esfera agregando el mismo número de bonetes.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [CBS, Teorema 8.2, p. 97] y [III, p. 81] □

La característica de Euler de un mapa en una superficie es el número de $\chi = V - A + C$, donde V es el número de vértices, A es el número de aristas y C es el número de caras. Por ejemplo, el cubo tiene ocho vértices, doce aristas y seis caras por lo que $8 - 12 + 6 = 2$.

Teorema 1.23. *Cualesquier dos mapas en la misma superficie tiene la misma característica de Euler.*

Gracias al Teorema 1.23 se puede definir la característica de Euler de una superficie como la característica de Euler de cualquiera de sus mapas.

La característica de Euler de un toro es 0. Si la característica de Euler es 2, entonces la superficie es la esfera y por lo tanto es orientable, ver en [CBS].

Teorema 1.24. *Si V, A y C son respectivamente el número de vértices, aristas y caras de un poliedro convexo, entonces $V - A + C = 2$.*

La característica de Euler de una superficie orientable de g -asas es $2 - 2g$ y la de una superficie no-orientable de g -bonetes es $2 - g$. De esta manera, si la característica de Euler es impar es no-orientable y si es par puede ser orientable o no.

CAPÍTULO 2

CONSTRUCCIÓN DE WYTHOFF

En este capítulo se van a utilizar las herramientas mencionadas en el capítulo anterior con las cuales vamos a construir algunos poliedros que describiremos en el Capítulo 3. Sólo como recordatorio vamos a mencionar las herramientas para construir nuestros poliedros uniformes: la simbología de Wythoff, los triángulos de Schwarz y las simetrías tetraedral y octraedral.

1. Una Construcción Paso a Paso

Para ilustrar la construcción en general vamos a iniciar presentando la construcción paso a paso del poliedro uniforme no convexo llamado “octahemioctaedro”. La construcción se realizará a partir de la simbología de Wythoff.

Para nuestro ejemplo tomamos la simbología de Wythoff $\frac{3}{2} 3 | 3$. Como vimos en el capítulo anterior, dicha simbología nos dice que tenemos un triángulo cuyos vértices están etiquetados con los valores racionales $\frac{3}{2}$, 3 y 3, y cuyos ángulos respectivos son $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{3}$. Además, recordemos que el símbolo $|$ nos indica la posición del punto que va a generar a nuestro poliedro uniforme, en este caso, el punto que genera al poliedro se encuentra en la arista que contiene a los vértices con etiquetas $\frac{3}{2}$ y 3 y la bisectriz del ángulo opuesto. Denotaremos a este punto por C . De esta manera, la simbología $\frac{3}{2} 3 | 3$ induce el triángulo de Schwarz de la Figura 2.1.

Una vez que conocemos el triángulo de Schwarz utilizaremos al octaedro y a su grupo de simetrías, esto se debe al hecho que un triángulo con ese tipo de ángulos se encuentra en la subdivisión baricéntrica del octaedro (ver Sección 1 del Capítulo 3). Por simplicidad, vamos a utilizar la siguiente notación para los vértices: q será el vértice etiquetado con $\frac{3}{2}$,

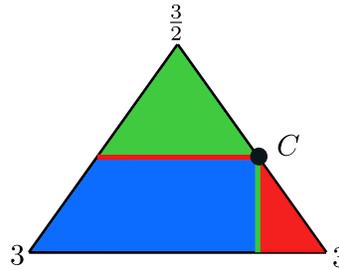


FIGURA 2.1. Triángulo de Schwarz del $\frac{3}{2} \ 3 \ | \ 3$.

mientras que p y r serán los vértices con etiquetas 3. Proyectamos el octaedro en la esfera para posteriormente realizar la subdivisión baricéntrica como se muestra en la Figura 2.2.

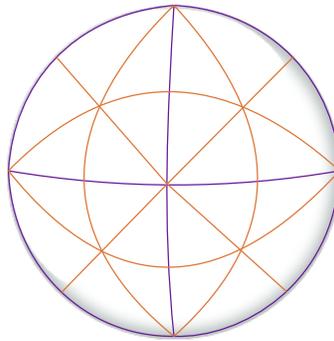


FIGURA 2.2. Proyección del octaedro en la esfera con subdivisión baricéntrica.

Podemos ver que el triángulo con ángulos $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{3}$ se encuentra en la subdivisión baricéntrica de la esfera como se muestra en la Figura 2.3.

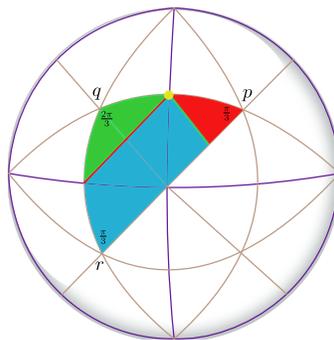


FIGURA 2.3. Triángulo en la esfera.

Una vez que el triángulo de Schwarz está acomodado en la esfera, vamos a reflejar el triángulo una vez respecto a la recta que pasa por los vértices q y r , como se indica en la Figura 2.4.

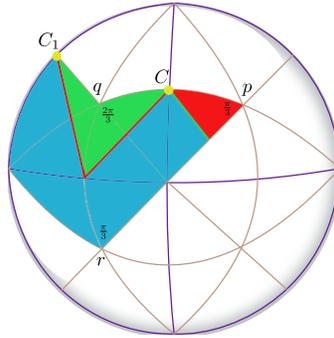


FIGURA 2.4. Reflexión del triángulo sobre qr .

Podemos notar que no será sencillo ver los triángulos generados por las reflexiones ya que éstos se van a encimar o no se alcanzarán a apreciar los nuevos trazos. Para evitar las complicaciones anteriores, lo que haremos será representar el triángulo de Schwarz E con ángulos $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{3}$ como se muestra en la Figura 2.5. Notemos que en tal Figura los ángulos no necesariamente son los indicados con anterioridad pero esta representación nos será de utilidad para el siguiente paso de la construcción.

A continuación construiremos la primera cara del poliedro. Elegimos el vértice p y reflejamos el triángulo E tantas veces como sea necesario para que cierre, es decir, como el ángulo en p es $\frac{\pi}{3}$ hace falta obtener cinco triángulos más alrededor de dicho vértice y completar así $\frac{6\pi}{3} = 2\pi$. Luego, construiremos aristas en C y sus imágenes bajo las reflexiones. Los detalles se explican a continuación.

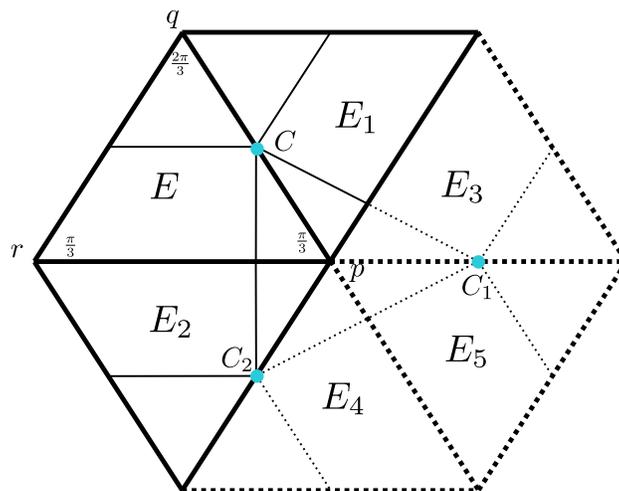


FIGURA 2.5. Triángulo reflejado por un vértice.

Reflejamos el triángulo E sobre pq y obtenemos el triángulo E_1 . Después, reflejamos E sobre pr para obtener el triángulo E_2 , a la imagen de C la llamamos C_2 . Se puede notar que la reflexión de E a E_2 da una arista completa entre C y C_2 mientras que la reflexión de E a E_1 hasta el momento da la mitad de lo que será una de las aristas buscadas. Además, recordando que el ángulo correspondiente al vértice p en los triángulos de E , E_1 y E_2 mide $\frac{\pi}{3}$ y la suma de estos es π , entonces nos faltaría un ángulo cuya medida es π para completar una vuelta. Al reflejar E_1 sobre la arista pr obtenemos el triángulo E_4 , reflejamos el triángulo E_2 sobre la aristas pq para obtener el triángulo E_3 con C_1 como imagen de C_2 , así, sólo faltaría obtener un triángulo, E_5 , y se puede obtener reflejando E_3 sobre pr o reflejando E_4 sobre pq . Notemos que las aristas están colocadas entre pares de vértices que pertenecen a imágenes de E que tienen un lado en común. De esta forma, obtenemos una de las caras del poliedro.

A partir del triángulo de Schwarz se construyó una cara usando reflexiones de las rectas que contienen a los lados de E del vértice p . Procedemos de manera análoga usando los vértices q y r para construir las caras restantes como se muestra en la Figura 2.6.

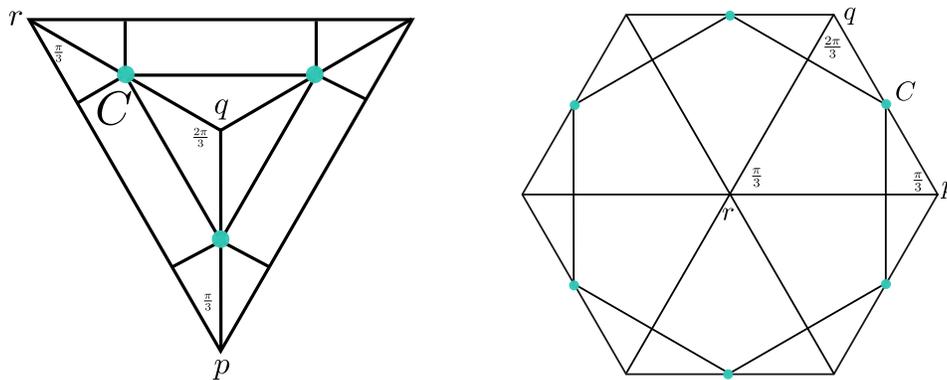


FIGURA 2.6. Caras restantes del poliedro uniforme.

Vemos que tenemos dos tipos de polígonos regulares, dos triángulos obtenidos al reflejar alrededor de los vértices p y q , y un hexágono obtenido al reflejar alrededor del vértice r . Observemos que el hexágono está en un mismo plano y que sus vértices están localizados en un círculo máximo (ver el hexágono azul de la Figura 2.7). Una vez que sabemos el tipo de caras que tiene nuestro poliedro, tomamos las imágenes de esas caras bajo el grupo de reflexiones del octaedro para obtener las que faltan. De esta manera, hemos construido el **octahemioctaedro**.

A continuación describimos la figura vertical del poliedro. La manera en que las caras están acomodadas alrededor de un vértice se muestra en la Figura 2.7. Alrededor del vértice C se encuentran el triángulo con vértices C , C_3 y C_4 y el triángulo con vértices C , C_1 y C_2 .

Notemos que las aristas de C_3 a C y de C a C_2 son aristas consecutivas de un hexágono y que las aristas de C_4 a C y de C a C_1 son consecutivas en otro hexágono. Cada una de las aristas que contienen a C pertenece a uno de esos triángulos y a uno de esos hexágonos. Por lo dicho anteriormente, cada vértice está contenido en dos triángulos y dos hexágonos de manera alternada.

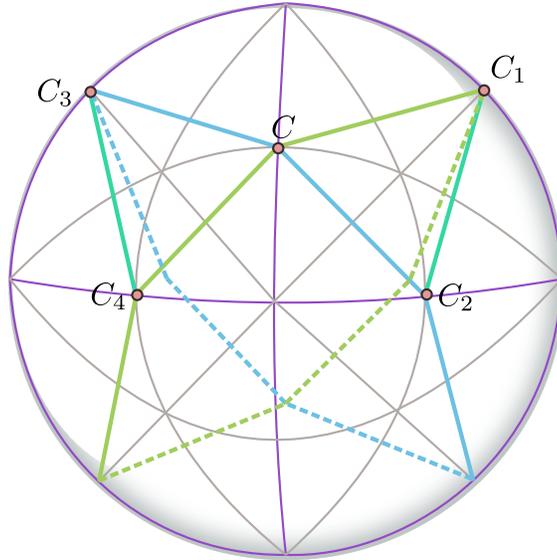


FIGURA 2.7. La esfera muestra dos hexágonos y dos triángulos.

Podemos contar un total de 12 vértices, 24 aristas y 12 caras de las cuales ocho son triángulos equiláteros y cuatro hexágonos regulares. Además, como la característica de Euler es $\chi = 0$, se tiene que el poliedro es no convexo.

Ahora, comprobaremos si este poliedro es orientable o no-orientable. Etiquetamos todos los vértices del poliedro. Posteriormente, procedemos a hacer las subdivisiones baricéntricas de las caras del poliedro. En este caso, son ocho triángulos y cuatro hexágonos, como se muestra en la Figura 2.8.

Una vez realizado lo anterior, vamos a colorear las subdivisiones de una cara de manera alternada, posteriormente coloreamos las demás cuidando el orden del etiquetado de los vértices como en la Figura 2.9. Podemos ver que en nuestro coloreado las subdivisiones de las caras todas son alternadas, es decir, no tiene subdivisiones del mismo color juntas. Además, si las ordenamos como si fueran una teselación o un mapa de triángulos y hexágonos, entonces la podemos dibujar en el toro como se muestra en la Figura 2.10. Puesto que la triangulación de este poliedro resulta ser una triangulación del toro y éste es orientable, tenemos que el poliedro es orientable.

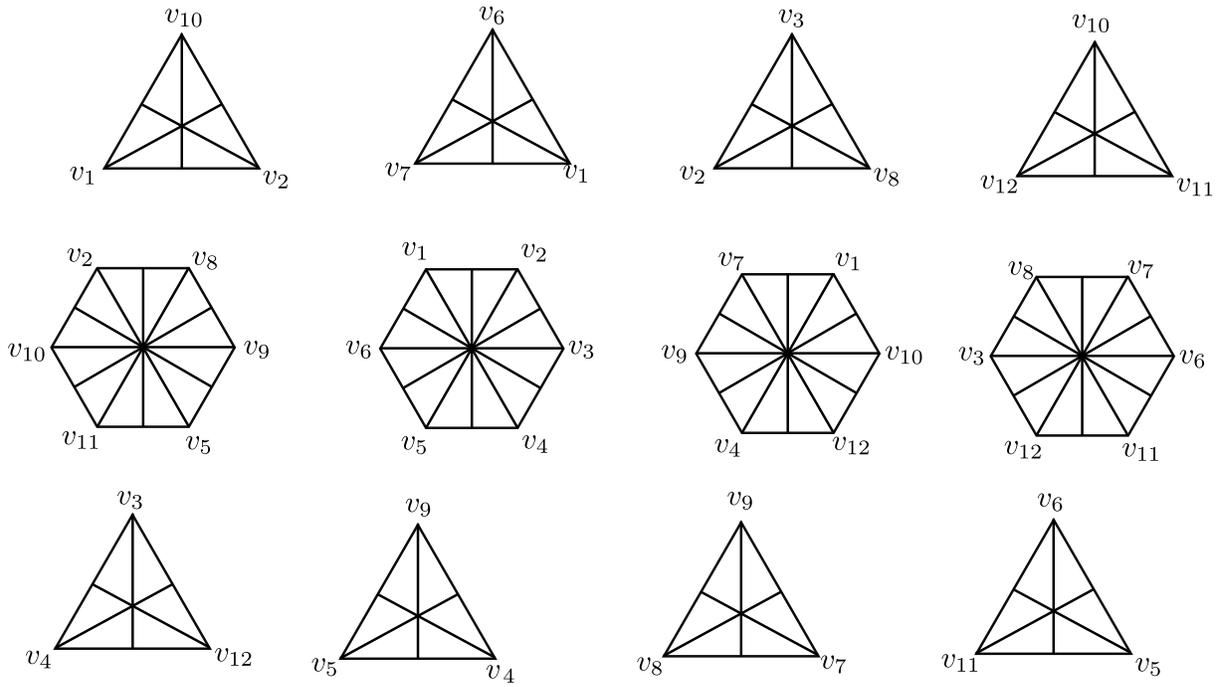


FIGURA 2.8. Caras del poliedro etiquetadas.

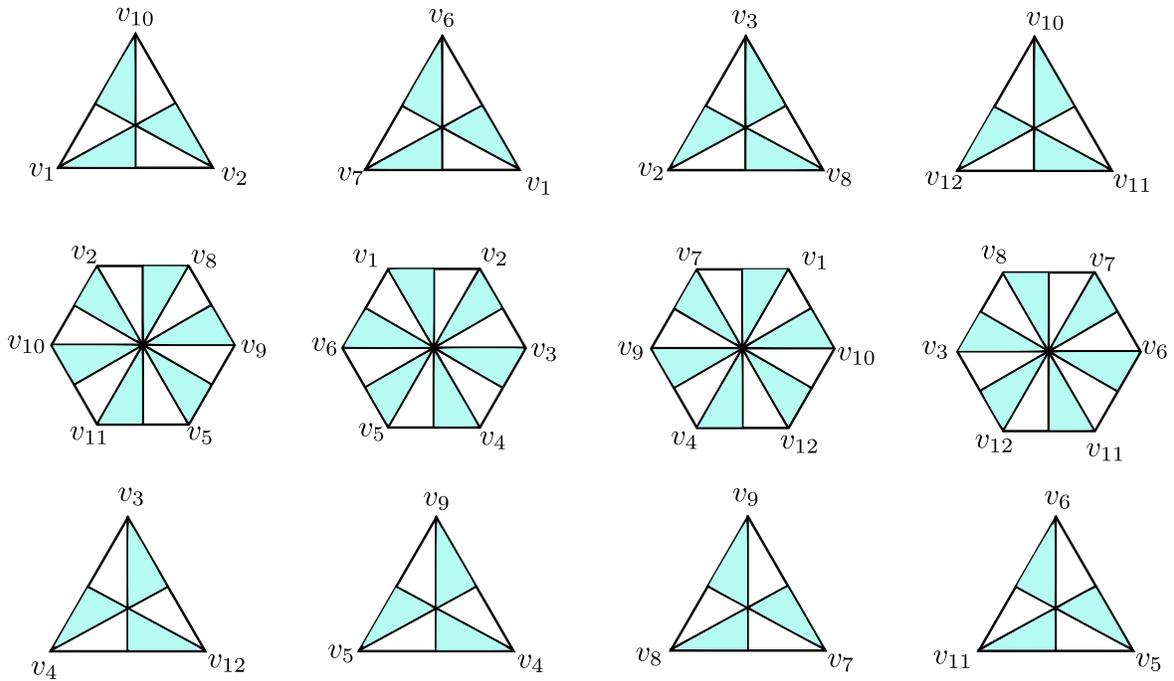


FIGURA 2.9. Caras del poliedro coloreadas.

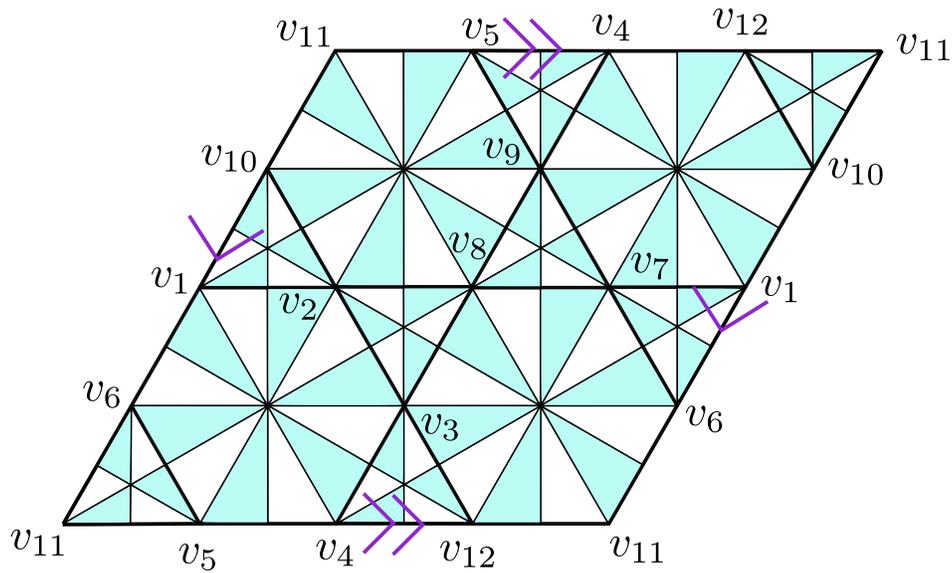


FIGURA 2.10. Caras del poliedro acomodados.

De esta manera, concluimos nuestro estudio del poliedro llamado octahemioctaedro. Notemos que el mismo poliedro se puede construir si se elige al grupo de simetrías del tetraedro en vez del grupo del octaedro pues las imágenes de las tres caras iniciales bajo la acción de los grupos son las mismas.

2. Construcción de Wythoff y Ejemplos

Una vez visto lo anterior, el procedimiento de la construcción general se realiza usando los siguientes pasos:

1. Elegir la simbología de Wythoff.
2. Construir el triángulo de Schwarz derivado de la simbología seleccionada.
3. Una vez conocidos los ángulos del triángulo de Schwarz, encontrar el poliedro adecuado (tetraedro, octaedro o icosaedro) de manera que dichos ángulos se encuentren en la subdivisión baricéntrica del poliedro y escoger el que nos sea más conveniente.
4. Proyectar el poliedro en la esfera.
5. Hacer la subdivisión baricéntrica del poliedro proyectado en la esfera.
6. Encontrar el triángulo en la subdivisión baricéntrica e identificar el vértice C en tal triángulo, ver 6.
7. Para encontrar las primeras caras del poliedro, hacer repetidamente las reflexiones respecto a las dos aristas del triángulo que contienen a cada vértice de manera que se complete un número entero de vuelta alrededor de cada vértice. Tanto C como sus imágenes bajo tales reflexiones serán los vértices de cada cara del poliedro que se

construirá. Las aristas de las caras del poliedro estarán generadas por la concatenación de cada una de las líneas que están al interior del triángulo con su imagen bajo la reflexión aplicada. Llamaremos *cara inicial* a una cara construida de este modo.

8. Finalmente, aplicar a las caras iniciales composiciones de las reflexiones alrededor del triángulo de Schwarz para obtener las caras restantes.

Al procedimiento descrito anteriormente se le llama la **construcción de Wythoff**.

La construcción anterior nos da como resultado un poliedro uniforme como se muestra en el siguiente teorema, para mostrar tal resultado necesitaremos los próximos lemas.

Lema 2.1. *Sea P un poliedro y v_0 un vértice de P . Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. P es transitivo en vértices,
2. para cualquier vértice $v \in P$ existe una simetría σ de P tal que $\sigma(v_0) = v$.

DEMOSTRACIÓN. 1) \Rightarrow 2): Es claro de la definición de transitividad en vértices.

2) \Rightarrow 1): Sea u_1 y u_2 vértices. Queremos mostrar que existe una simetría σ de P tal que $\sigma(u_1) = u_2$. Por hipótesis tenemos que existen simetrías σ_1 y σ_2 de P que satisfacen que $\sigma_{u_1}(v_0) = u_1$ y $\sigma_{u_2}(v_0) = u_2$. Consideramos la simetría $\sigma_{u_2} \circ \sigma_{u_1}^{-1}$ la cual satisface la igualdad $\sigma_{u_2} \circ \sigma_{u_1}^{-1}(u_1) = u_2$. Por lo tanto, P es transitivo en vértices. \square

Lema 2.2. *Las reflexiones respecto a los lados del triángulo de Schwarz son simetrías del poliedro obtenido de la construcción de Wythoff.*

DEMOSTRACIÓN. Sea P un sólido platónico (tetraedro, octaedro e icosaedro) y sea P' un poliedro obtenido de P a partir de la construcción de Wythoff. Fijamos una cara \mathcal{C} de P' . Por construcción existe una cara inicial \mathcal{C}_0 de P' y existe un número finito de reflexiones $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ del triángulo de Schwarz utilizado de modo que $\mathcal{C} = \sigma_k \circ \dots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1(\mathcal{C}_0)$, donde k es un entero positivo. Ahora, tomemos una reflexión σ respecto a un lado del triángulo de Schwarz y consideremos.

$$\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\sigma_k \circ \dots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1(\mathcal{C}_0)).$$

Puesto que las caras de P' son construidas al aplicar una composición de reflexiones del triángulo de Schwarz a las caras iniciales de P' , tenemos que $\sigma \circ \sigma_k \circ \dots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1(\mathcal{C}_0)$ es una cara de P' . De esto se sigue que $\sigma(\mathcal{C})$ es una cara de P' . Por lo tanto, concluimos que las reflexiones de P preservan a P' . \square

Teorema 2.3. *Los poliedros obtenidos de la construcción de Wythoff son uniformes.*

DEMOSTRACIÓN. Para mostrar que tales poliedros son uniformes mostraremos que sus caras son polígonos regulares y que son transitivos en vértices. Sea P un poliedro obtenido de la construcción de Wythoff.

En primer lugar, mostraremos que las caras de P son polígonos regulares. Por construcción, sabemos que las imágenes del vértice C y todos sus vecinos están a la misma distancia (ver Sección 6 del Capítulo 1). Así, todas las aristas tienen la misma longitud. Por otro lado, puesto que las reflexiones preservan ángulos, los ángulos del triángulo y aquellos que se forman con los segmentos que están en su interior se preservan en las imágenes del triángulo de Schwarz bajo las reflexiones. De esta forma, tenemos que los ángulos del polígono son iguales. Por lo tanto, se tiene que las caras de P son polígonos regulares.

En segundo lugar, mostraremos que P es transitivo en vértices. Sea v un vértice de P . Sabemos que v tuvo que generarse a partir de aplicar una composición finita de reflexiones respecto a uno de los lados del triángulo de Schwarz y es la imagen de C bajo dicha composición. Así, existe una composición de tales reflexiones σ_v tal que $\sigma_v(C) = v$. Por el Lema 2.2 tenemos que σ_v es una simetría de P , así, aplicando el Lema 2.1 se tiene que P es transitivo en vértices. \square

No siempre ocurre lo sucedido en el ejemplo de la sección anterior donde se obtuvieron dos caras iguales y una distinta. Puede ser que se obtengan tres caras distintas, tres caras iguales, o incluso que al reflejar respecto a las dos rectas que contienen a un vértice del triángulo de Schwarz se obtenga un segmento de recta y no un polígono.

Una vez descrita la construcción general presentaremos cuatro ejemplos de poliedros uniformes, en primer lugar construiremos dos poliedros convexos y en segundo lugar dos no convexos. Estos poliedros se obtienen a partir de la construcción de Wythoff de manera concisa y siguiendo los pasos anteriores.

A continuación mostramos la construcción de los dos poliedros convexos:

Paso 1 y 2: Los ejemplos en simbología de Wythoff que consideramos son $23|3$ y $342|$, y los triángulos de Schwarz respectivamente son los mostrados en la Figura 2.11:

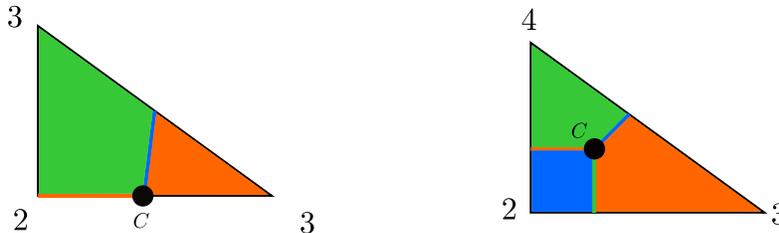


FIGURA 2.11. a) $23|3$ y b) $234|$.

Paso 3: Los poliedros que vamos a utilizar en el orden que estamos considerando se muestran en la Figura 2.12.

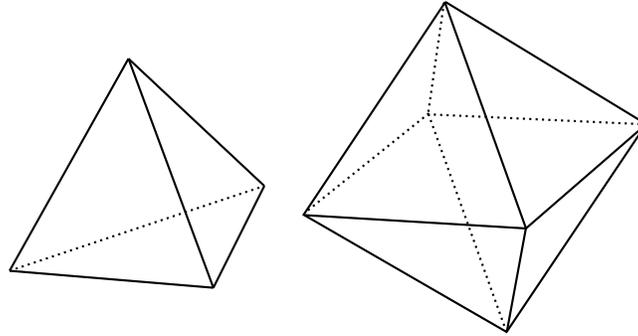


FIGURA 2.12. Tetraedro y octaedro.

Paso 4: Las respectivas proyecciones de los poliedros se presentan a continuación en la Figura 2.13.

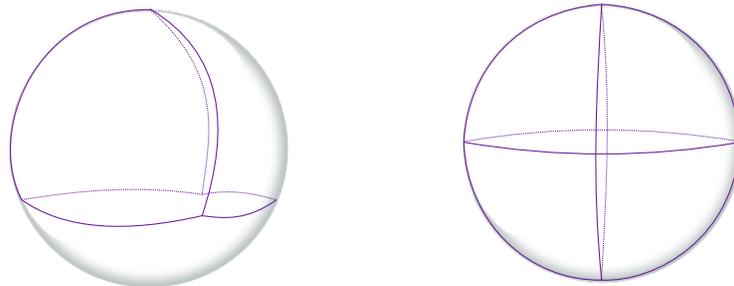


FIGURA 2.13. Proyecciones de los poliedros en la esfera.

Paso 5: Las subdivisiones baricéntricas de las proyecciones quedan dadas como se muestra en la Figuras 2.14.

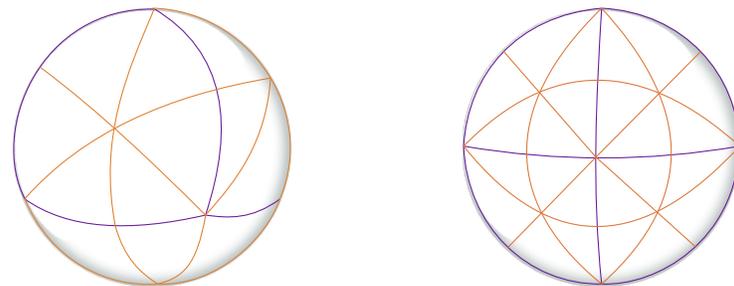


FIGURA 2.14. Subdivisiones baricéntricas de las proyecciones de los poliedros.

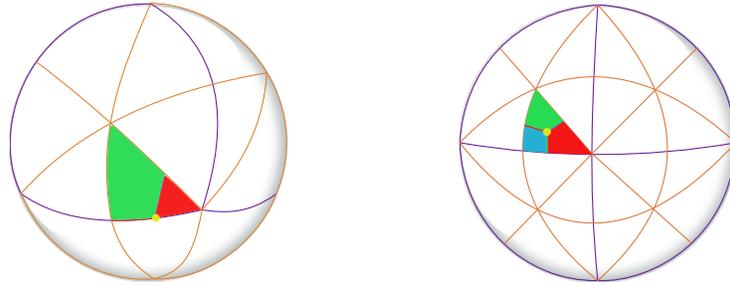


FIGURA 2.15. Triángulos en las esferas.

Paso 6: Localizamos a los triángulos en las esferas anteriores, como se muestra en la Figura 2.15.

Paso 7: Realizamos las dos reflexiones respecto a las aristas del triángulo que contienen a cada vértice. Para los dos poliedros, la Figura 2.16 muestra la construcción en la esfera.

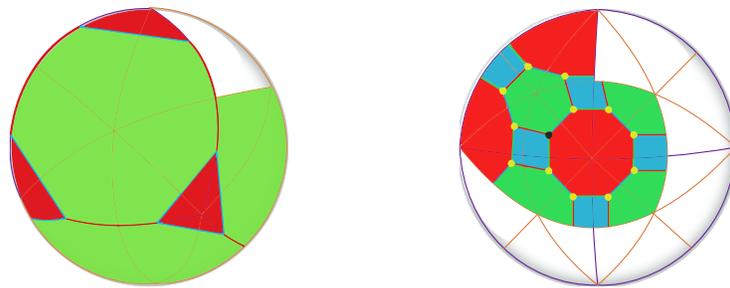


FIGURA 2.16. Caras de los poliedros al reflejar los triángulos de Schwarz.

Paso 8: Los poliedros obtenidos son el **tetraedro truncado** y el **cuboctaedro truncado**, los cuales son convexos y son orientables, además en ambos casos $\chi = 2$.

A continuación mostramos la construcción de los dos poliedros no convexos.

Paso 1 y 2: Las simbologías de Wythoff que consideramos son $\frac{3}{2} 3 | 2$ y $\frac{3}{2} 4 | 4$, y los triángulos de Schwarz respectivamente son los que se muestran en la Figura 2.17.

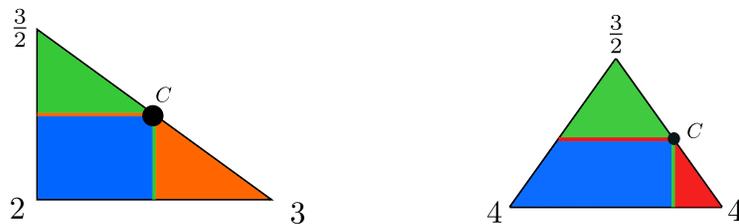


FIGURA 2.17. $\frac{3}{2} 3 | 2$ (a la izquierda) y $\frac{3}{2} 4 | 4$ (a la derecha).

Paso 3: Los poliedros que vamos a utilizar en el orden que estamos considerando se presentan en la Figura 2.18.

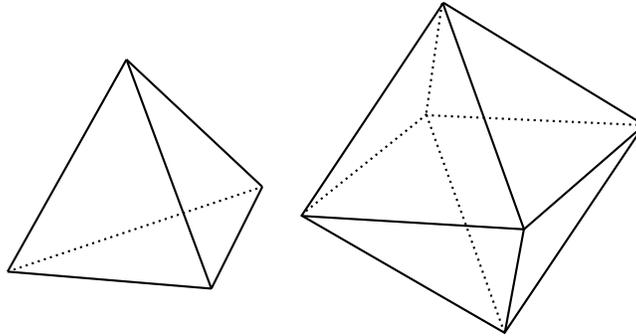


FIGURA 2.18. Tetraedro y octaedro.

Paso 4: Las respectivas proyecciones de los poliedros se presentan en la Figura 2.19.

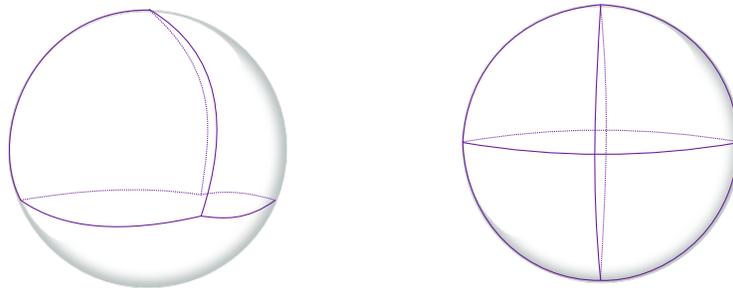


FIGURA 2.19. Proyecciones de los poliedros.

Paso 5: Las subdivisiones baricéntricas de las proyecciones quedan dadas como se muestra en la Figura 2.20.

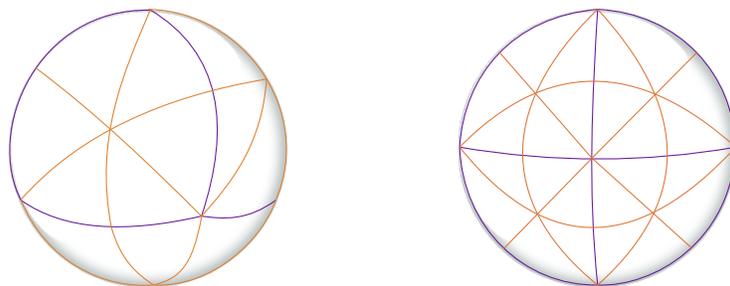


FIGURA 2.20. Subdivisiones baricéntricas de las proyecciones de los poliedros.

Paso 6: Localizamos a los triángulos en las esferas anteriores ver la Figura 2.21.

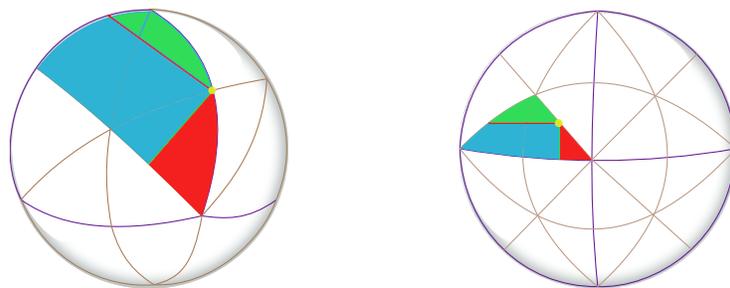


FIGURA 2.21. Triángulos en las esferas.

Paso 7: Realizamos las dos reflexiones respecto a las aristas del triángulo que contienen a cada vértice. El poliedro $\frac{3}{2}3|2$ tienen caras triangulares y cuadradas y el poliedro $\frac{3}{2}4|4$ tienen caras triangulares, cuadradas y octogonales respectivamente (ver Figuras 2.22 y 2.23).

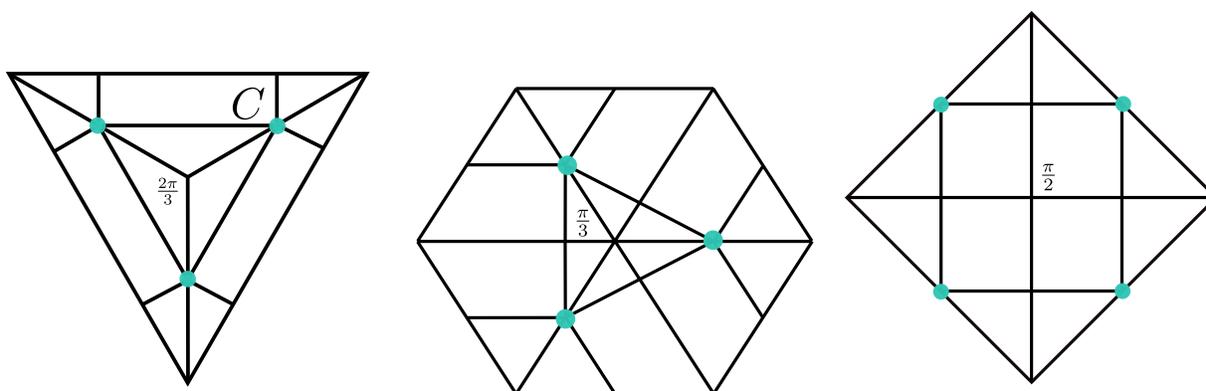


FIGURA 2.22. Caras del $\frac{3}{2}3|2$.

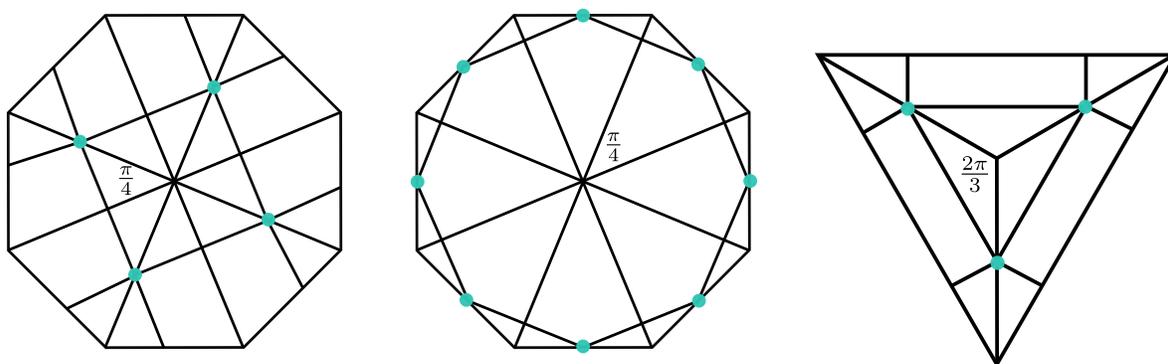


FIGURA 2.23. Caras del $\frac{3}{2}4|4$.

8.- Los poliedros obtenidos son el tetrahemihexaedro y el pequeño cubicuboctaedro, el segundo de ellos es orientable y podemos realizar el procedimiento similar al de la Sección 1 de este capítulo para mostrar esto. Tenemos que el primer poliedro es no-orientable debido a que $\chi = 1$ e impar, esto por la Sección 8 del Capítulo 1. Mostraremos tal hecho de manera similar a lo realizado en la Sección 1 de este capítulo.

Etiquetamos sus vértices, hacemos la subdivisión baricéntrica en cada cara del poliedro como se muestra en la Figura 2.24, consideramos una propia 2-coloración de una sus caras, coloreamos los triángulos y cuando alguna cara tenga triángulos adyacentes del mismo color, entonces el poliedro será no-orientable. Primero, colorearemos el cuadrado cuyo conjunto de vértices es $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Después, se colorean los polígonos con aristas adyacentes al cuadrado, en este caso son los cuatro triángulos, y una vez que éstos se colorearon, el siguiente es el cuadrado cuyo conjunto de vértices es $\{v_3, v_6, v_5, v_1\}$. Cabe señalar que ya no podemos colorear adecuadamente las caras debido al hecho que hay dos triángulos adyacentes coloreados en el cuadrado $\{v_3, v_6, v_5, v_1\}$ que son del mismo color, esto se muestra en la Figura 2.25.

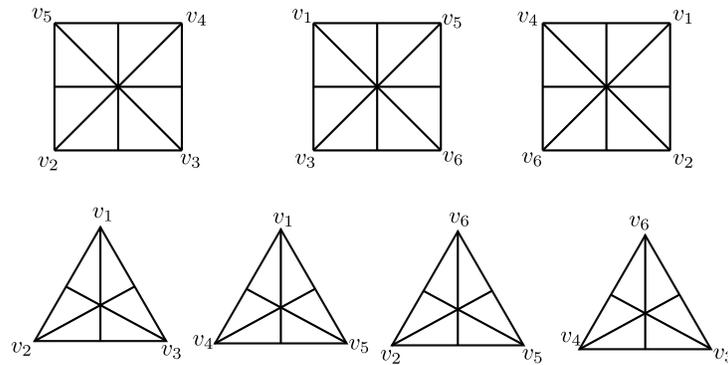


FIGURA 2.24. Caras del poliedro con etiquetas.

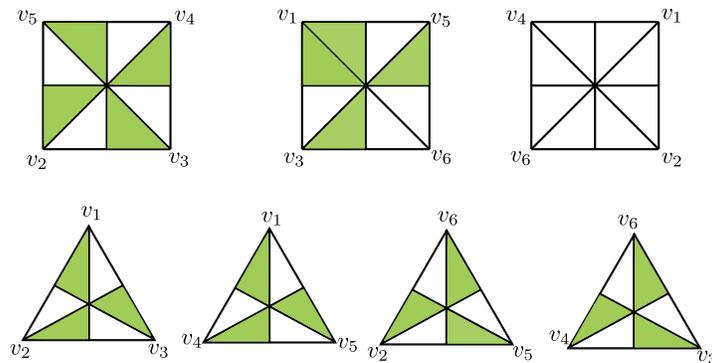


FIGURA 2.25. Cara del poliedro coloreadas.

Observación 2.4. Nos falta introducir el triángulo de Schwarz que tiene la simbología $|pqr$, el cual construye poliedros uniformes sin simetrías de reflexión. En este caso se trabaja con dos triángulos de Schwarz, sólo uno de ellos contiene el punto C que generará al poliedro. Para construir este tipo de poliedro tenemos que trabajar en parejas de estos dos triángulos y para construir las caras iniciales usamos rotaciones alrededor de cada vértice de tales triángulos por ángulos de $\frac{2\pi}{p}$, $\frac{2\pi}{q}$ y $\frac{2\pi}{r}$, respectivamente. Los triángulos y la ubicación de C se muestran en la Figura 2.26.

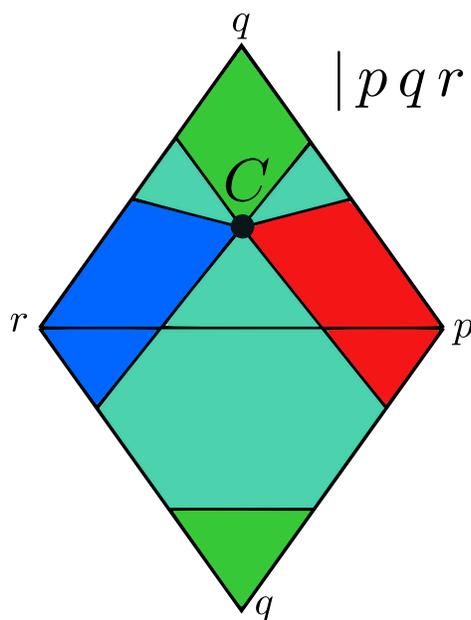


FIGURA 2.26. Triángulo de Schwarz.

CAPÍTULO 3

LOS POLIEDROS UNIFORMES

En este capítulo se mostrarán los poliedros uniformes que son construidos utilizando la construcción de Wythoff con los grupos de simetrías del tetraedro y del octaedro. Hay que aclarar que la lista completa de todos los poliedros uniformes está construida por los 5 Sólidos Platónicos, 13 Sólidos Arquimedianos, los 4 poliedros de Kepler-Poinsot, los 53 poliedros estrellados uniformes, un poliedro estrellado encontrado por John Skilling y dos familias infinitas de prismas y antiprismas.

El acomodo que les daremos a los poliedros uniformes que presentaremos será utilizando la simbología de Wythoff, la cual fue introducida en la Sección 6 del Capítulo 1. Es importante señalar que a lo largo de este capítulo usaremos la notación para número de vértices, número de aristas, número de caras, la vecindad de vértice y la característica de Euler, que introducimos en las Secciones 2, 4 y 8 del Capítulo 1, respectivamente. Por último, hemos de mencionar que utilizaremos los nombres de los poliedros uniformes que la comunidad ha acuñado.

1. Triángulos de Schwarz de los Grupos de Simetrías del Tetraedro y del Octaedro

Comenzaremos mostrando los triángulos de Schwarz que se encuentran en la subdivisión baricéntrica del tetraedro. Para ello, debemos encontrar los ángulos de los triángulos en la subdivisión baricéntrica del tetraedro (ver Figura 3.1). Los únicos ángulos menores a π que aparecen en tales triángulos son $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{2\pi}{3}$. De esta manera, obtenemos los triángulos de la Figura 3.2.

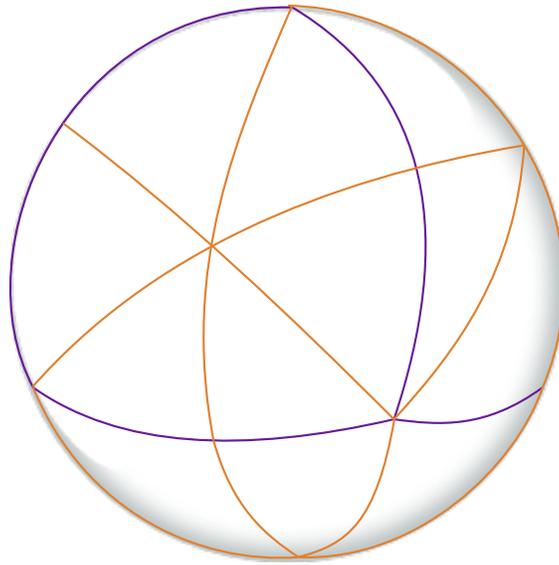


FIGURA 3.1. Subdivisión baricéntrica del tetraedro en la esfera.

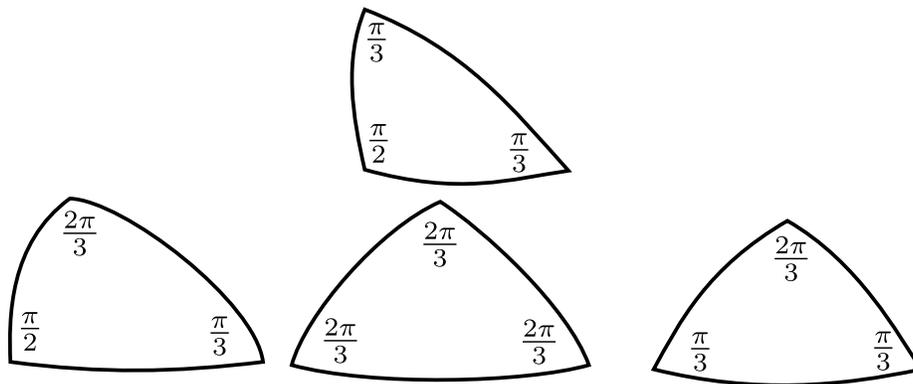


FIGURA 3.2. Triángulos que se encuentran en la subdivisión baricéntrica del tetraedro.

Tomamos el primer triángulo y hacemos las posibles combinaciones de $(2, 3, 3)$ con la simbología de Wythoff. De este modo, tenemos los siguientes casos:

- La simbología de Wythoff es $3 | 23$: éste da el tetraedro.
- La simbología de Wythoff es $33 | 2$: da el cuboctaedro, el cual reservamos para la lista en el grupo de simetrías del octaedro.
- La simbología de Wythoff es $32 | 3$: el tetraedro truncado.
- La simbología de Wythoff es $332 |$: el cuboctaedro truncado y de la misma manera que (b) está en la lista del grupo de simetrías del octaedro.
- La simbología de Wythoff es $2 | 33$: da el octaedro y está en la lista del grupo de simetrías del octaedro.

- f) La simbología de Wythoff es $23|3$: éste da el tetraedro truncado mencionados en (c).
- g) La simbología de Wythoff es $3|32$: éste da el tetraedro mencionados en (a).

Ahora bien, para el caso $(2, \frac{3}{2}, 3)$ la simbología de Wythoff que se tiene es $3\frac{3}{2}|2$ que da un poliedro más. En el caso $(3, \frac{3}{2}, 3)$ no tenemos poliedro que agregar a la lista de aquellos que tiene las simetrías del tetraedro y tampoco para el caso $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, esto se debe a que la construcción no produce poliedro alguno o bien produce poliedros que se pueden construir con otra simbología. Por tanto, tenemos que sólo existen tres poliedros que se construyen a partir del grupo de simetrías del tetraedro que tiene a éste como su grupo de simetrías.

Siguiendo un mecanismo análogo se estudian como en el caso anterior los triángulos de Schwarz en la subdivisión baricéntrica del octaedro. A continuación presentamos la lista de los 18 poliedros uniformes obtenidos a partir del grupo de simetrías del octaedro:

- a) La simbología de Wythoff es $4|23$: éste da el octaedro
- b) La simbología de Wythoff es $3|24$: éste produce el cubo.
- c) La simbología de Wythoff es $2|34$: éste da el cuboctaedro.
- d) La simbología de Wythoff es $24|3$: el octaedro truncado.
- e) La simbología de Wythoff es $23|4$: éste da como resultado el cubo truncado.
- g) La simbología de Wythoff es $34|2$: éste da el rombicuboctaedro.
- h) La simbología de Wythoff es $234|$: éste produce el cuboctaedro truncado.
- i) La simbología de Wythoff es $|234$: el cubo snub.
- j) La simbología de Wythoff es $\frac{3}{2}3|3$: éste da como resultado el octahemioctaedro.
- k) La simbología de Wythoff es $\frac{3}{2}4|4$: éste produce el pequeño cubicuboctaedro.
- l) La simbología de Wythoff es $34|\frac{4}{3}$: el gran cubicuboctaedro.
- m) La simbología de Wythoff es $\frac{4}{3}4|3$: éste da el cubohemioctaedro.
- n) La simbología de Wythoff es $3\frac{4}{3}4|$: éste da como resultado el cuboctaedro cubitruncado.
- ñ) La simbología de Wythoff es $\frac{3}{2}4|2$: éste produce el gran rombicuboctaedro.
- o) La simbología de Wythoff es $24\frac{3/2}{4/2}|$: el pequeño rombihexaedro.
- p) La simbología de Wythoff es $23|\frac{4}{3}$: éste da el hexaedro estrellado truncado.
- q) La simbología de Wythoff es $23\frac{4}{3}|$: éste produce el gran cuboctaedro truncado.
- r) La simbología de Wythoff es $2\frac{4}{3}|\frac{3/2}{4/2}$: éste da el gran rombihexaedro.

2. $p | q r$

En esta sección se muestran los poliedros uniformes cuya simbología de Wythoff es $p | q r$, es decir, el punto que va generar a nuestro poliedro uniforme en el triángulo de Schwarz se encuentran en el vértice p .

1.- Nombre: **Tetraedro**

2.- Simbología de Wythoff: **3 | 2 3**

3.- Número de vértices: **$V = 4$**

4.- Número de aristas: **$A = 6$**

5.- Número de caras: **$C = 4$**

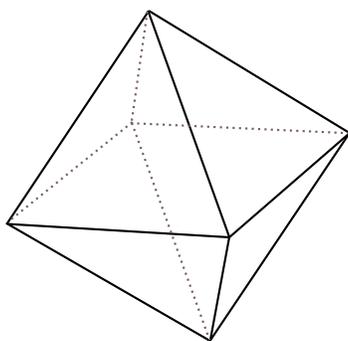
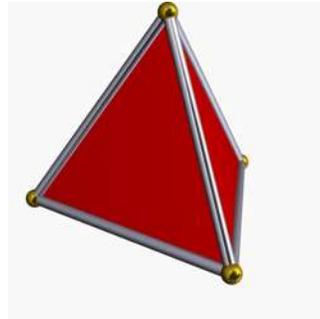
Sus cuatro caras son triángulos equiláteros.

6.- Característica de Euler: **$\chi = 2$**

7.- Vecindad de vértice: **3.3.3**

8.- Descripción: Es un poliedro uniforme con-

vexo y como $\chi = 2$ tenemos que es un poliedro orientable. Este poliedro tiene una sola clase de aristas bajo el grupo de simetrías. Cada arista pertenece a dos triángulos. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del tetraedro. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [Web].



1.- Nombre: **Octaedro**

2.- Simbología de Wythoff: **4 | 2 3**

3.- Número de vértices: **$V = 6$**

4.- Número de aristas: **$A = 12$**

5.- Número de caras: **$C = 8$**

Las caras son ocho triángulos equiláteros.

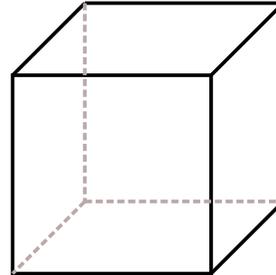
6.- Característica de Euler: **$\chi = 2$**

7.- Vecindad de vértice: **3.3.3.3**

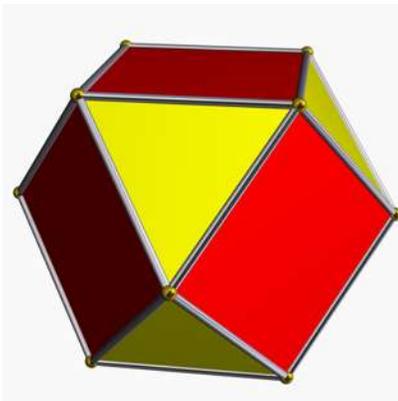
8.- Descripción: El octaedro es un poliedro uniforme convexo y como $\chi = 2$ es ori-

entable, además tiene una clase de aristas bajo el grupo de simetrías. Cada arista pertenece a dos triángulos. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro.

- 1.- Nombre: **Cubo o hexaedro**
 - 2.- Simbología de Wythoff: **3 | 2 4**
 - 3.- Número de vértices: **$V = 8$**
 - 4.- Número de aristas: **$A = 12$**
 - 5.- Número de caras: **$C = 6$**
- Las seis caras son cuadrados.
- 6.- Característica de Euler: **$\chi = 2$**
 - 7.- Vecindad de vértice: **4. 4. 4**



8.- Descripción: El cubo es un poliedro uniforme convexo, tiene característica de Euler $\chi = 2$ por lo que es orientable, y además tiene una clase de aristas bajo el grupo de simetrías. Cada arista pertenece a dos cuadrados. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro.



- 1.- Nombre: **Cuboctaedro**
 - 2.- Simbología de Wythoff: **2 | 3 4**
 - 3.- Número de vértices: **$V = 12$**
 - 4.- Número de aristas: **$A = 24$**
 - 5.- Número de caras: **$C = 14$**
- Las caras son ocho triángulos equiláteros y seis cuadrados.
- 6.- Característica de Euler: **$\chi = 2$**
 - 7.- Vecindad de vértice: **3. 4. 3. 4**

8.- Descripción: El cuboctaedro es un poliedro uniforme convexo, el cual es orientable debido a que $\chi = 2$, además, sólo tiene una clase de aristas bajo el grupo de simetrías. Cada arista pertenece a un cuadrado y a un triángulo. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [**Web**].

3. $p q | r$

En esta sección se muestran poliedros uniformes cuya simbología de Wythoff es $p q | r$, es decir, el punto que va a generar nuestro poliedro uniforme en el triángulo de Schwarz se encuentra en la arista pq del triángulo.

1.- Nombre: **Tetraedro truncado**

2.- Simbología de Wythoff: **2 3 | 3**

3.- Número de vértices: **$V = 12$**

4.- Número de aristas: **$A = 18$**

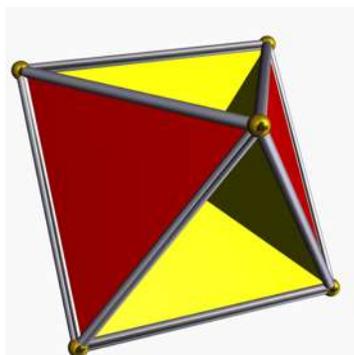
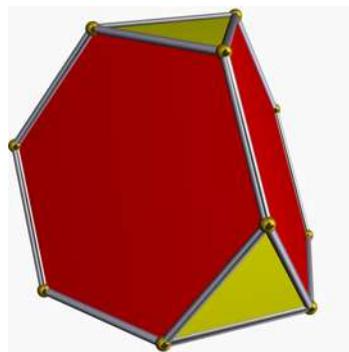
5.- Número de caras: **$C = 8$**

Sus caras, son cuatro triángulos equiláteros y cuatro hexágonos regulares.

6.- Característica de Euler: **$\chi = 2$**

7.- Vecindad de vértice: **3.6.6**

8.- Descripción: El tetraedro truncado es un poliedro uniforme convexo, es orientable ya que $\chi = 2$ y tiene dos clases de aristas bajo el grupo de simetrías. Un tipo de arista pertenece dos hexágonos y el otro pertenece a un triángulo y a un hexágono. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del tetraedro. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [Web].



1.- Nombre: **Tetrahemihexaedro**

2.- Simbología de Wythoff: **$\frac{3}{2} 3 | 2$**

3.- Número de vértices: **$V = 6$**

4.- Número de aristas: **$A = 12$**

5.- Número de caras: **$C = 7$**

Las caras son cuatro triángulos equiláteros y tres cuadrados.

6.- Característica de Euler: **$\chi = 1$**

7.- Vecindad de vértice: **3.4.3.4**

8.- Descripción: Este poliedro uniforme es no convexo, es no-orientable ya que $\chi = 1$ es impar y tiene un clase de aristas bajo el grupo de simetrías. Cada arista pertenece a un triángulo y a un cuadrado. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del tetraedro. Como mapa vive en el plano proyectivo, es decir, la esfera con un bonete. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [Web].

1.- Nombre: **Octaedro truncado**

2.- Simbología de Wythoff: **2 4 | 3**

3.- Número de vértices: **$V = 24$**

4.- Número de aristas: **$A = 36$**

5.- Número de caras: **$C = 14$**

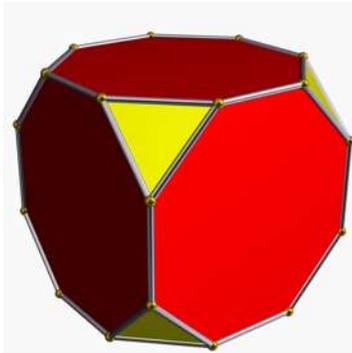
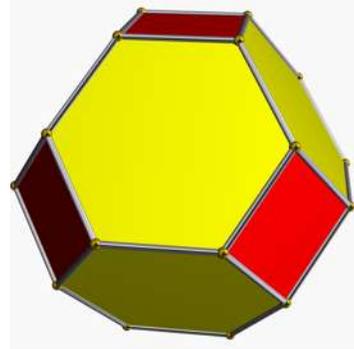
Sus caras son ocho hexágonos regulares y seis cuadrados.

6.- Característica de Euler: **$\chi = 2$**

7.- Vecindad de vértice: **4.6.6**

8.- Descripción: El octaedro truncado es un

poliedro uniforme convexo, es orientable ya que $\chi = 2$ y tiene dos clases de aristas bajo el grupo de simetrías. Un tipo de ellas corresponde a aristas en un cuadrado y un hexágono mientras que el otro a aristas en dos hexágonos. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [Web].



1.- Nombre: **Cubo truncado**

2.- Simbología de Wythoff: **2 3 | 4**

3.- Número de vértices: **$V = 24$**

4.- Número de aristas: **$A = 36$**

5.- Número de caras: **$C = 14$**

Las caras son ocho triángulos equiláteros y seis octágonos regulares convexos.

6.- Característica de Euler: **$\chi = 2$**

7.- Vecindad de vértice: **3.8.8**

8.- Descripción: El cubo truncado es un

poliedro uniforme convexo, como $\chi = 2$ tenemos que es orientable y tiene dos clases de aristas bajo el grupo de simetrías. Un tipo de arista pertenece a un triángulo y a un octágono, y el otro tipo pertenece a dos octágonos. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [Web].

1.- Nombre: **Rombicuboctaedro**

2.- Simbología de Wythoff: **3 4 | 2**

3.- Número de vértices: **$V = 24$**

4.- Número de aristas: **$A = 48$**

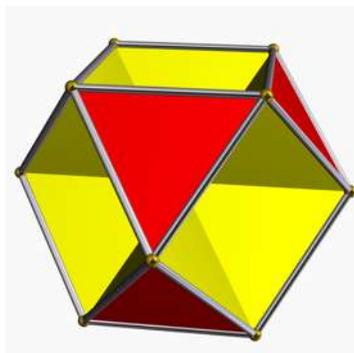
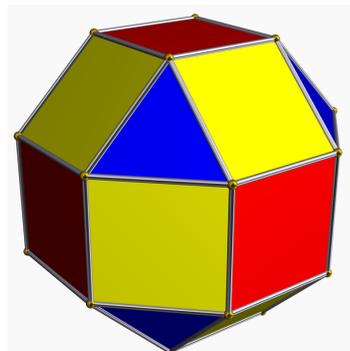
5.- Número de caras: **$C = 26$**

Sus caras son ocho triángulos equiláteros y dieciocho cuadrados.

6.- Característica de Euler: **$\chi = 2$**

7.- Vecindad de vértice: **3.4.4.4**

8.- Descripción: Este poliedro uniforme es convexo, como $\chi = 2$ tenemos que es orientable y además tiene dos clases de aristas, un tipo de ellas pertenece a un triángulo y a un cuadrado y el otro pertenece a dos cuadrados. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [**Web**].



1.- Nombre: **Octahemioctaedro**

2.- Simbología de Wythoff: **$\frac{3}{2} 3 | 3$**

3.- Número vértices: **$V = 12$**

4.- Número de aristas: **$A = 24$**

5.- Número de caras: **$C = 12$**

Las caras son ocho triángulos equiláteros y cuatro hexágonos regulares.

6.- Característica de Euler: **$\chi = 0$**

7.- Vecindad de vértice: **3.6.3.6**

8.- Descripción: El octahemioctaedro es un poliedro uniforme no convexo y es orientable. Tiene característica $\chi = 0$ pero eso no garantiza orientabilidad, sin embargo, tal poliedro es orientable (ver Sección 1 del Capítulo 2). Tiene una clase de aristas bajo el grupo de simetrías. Cada arista pertenece a un triángulo y a un hexágono. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [**Web**].

1.- Nombre: **Pequeño cubicuboctaedro**

2.- Simbología de Wythoff: $\frac{3}{2} 4 | 4$

3.- Número de vértices: $V = 24$

4.- Número de aristas: $A = 48$

5.- Número de caras: $C = 20$

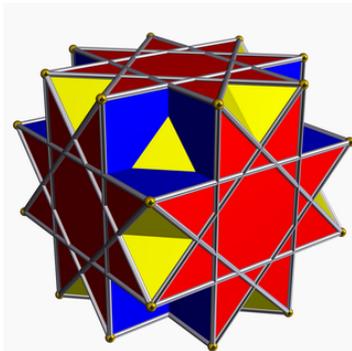
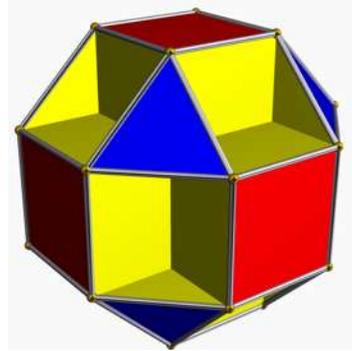
Sus caras son ocho triángulos equiláteros, seis cuadrados y seis octágonos convexos.

6.- Característica de Euler: $\chi = -4$

7.- Vecindad de vértice: **3. 8. 4. 8**

8.- Descripción: El pequeño cubicuboctaedro

es un poliedro uniforme no convexo, es orientable y tiene dos clases de aristas bajo el grupo de simetrías, donde un tipo de aristas pertenece a un triángulo y a un octágono y el otro tipo de aristas pertenece a un cuadrado y un octágono. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [Web].



1.- Nombre: **Gran cubicuboctaedro**

2.- Simbología de Wythoff: $3 4 | \frac{4}{3}$

3.- Número de vértices: $V = 24$

4.- Número de aristas: $A = 48$

5.- Número de caras: $C = 20$

Las caras son ocho triángulos regulares, seis cuadrados y seis octágonos estrellados.

6.- Característica de Euler: $\chi = -4$

7.- Vecindad de vértice: **3. $\frac{8}{3}$. 4. $\frac{8}{3}$**

8.- Descripción: El gran cubicuboctaedro es

un poliedro uniforme no convexo, es orientable y tiene dos clases de aristas bajo el grupo de simetrías: un tipo pertenece a un triángulo y a un octágono estrellado, y el otro tipo pertenece a un cuadrado y a un octágono. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [Web].

1.- Nombre: **Cubohemioctaedro**

2.- Simbología de Wythoff: $\frac{4}{3} 4 | 3$

3.- Número de vértices: $V = 12$

4.- Número de aristas: $A = 24$

5.- Número de caras: $C = 10$

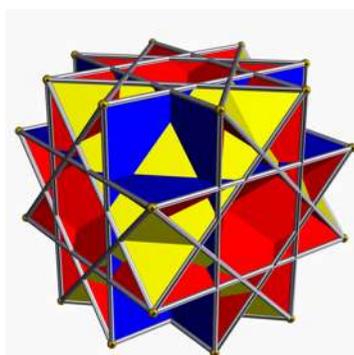
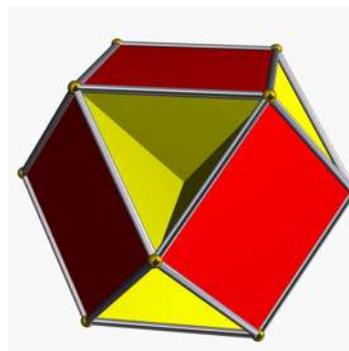
Sus caras son cuatro hexágonos regulares y seis cuadrados.

6.- Característica de Euler: $\chi = -2$

7.- Vecindad de vértice: **4.6.4.6**

8.- Descripción: Este poliedro uniforme es no

convexo, es no-orientable por el procedimiento utilizado del la Sección 1 del Capítulo 2 y además tiene una clase de aristas bajo el grupo de simetrías. Cada arista pertenece a un cuadrado y a un hexágono. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro. Como mapa vive en el plano proyectivo, es decir, la esfera con un bonete. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [**Web**].



1.- Nombre: **Gran rombicuboctaedro no convexo**

2.- Simbología de Wythoff: $\frac{3}{2} 4 | 2$

3.- Número de vértices: $V = 24$

4.- Número de aristas: $A = 48$

5.- Número de caras: $C = 26$

Las caras son ocho triángulos equiláteros y dieciocho cuadrados.

6.- Característica de Euler: $\chi = 2$

7.- Vecindad de vértice: **3.4.4.4**

8.- Descripción: Este poliedro uniforme es un poliedro no convexo, es orientable debido a que $\chi = 2$ y tiene sólo una clase de aristas bajo el grupo de simetrías. Cada arista pertenece a un triángulo y un cuadrado. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [**Web**].

1.- Nombre: **Cubo truncado estrellado**

2.- Simbología de Wythoff: $2\ 3\ |\ \frac{4}{3}$

3.- Número de vértices: $V = 24$

4.- Número de aristas: $A = 36$

5.- Número caras: $C = 14$

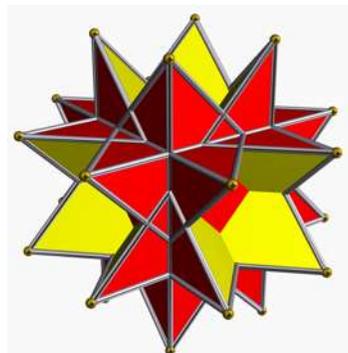
Sus caras son ocho triángulos equiláteros y seis hexágonos estrellados.

6.- Característica de Euler: $\chi = 2$

7.- Vecindad de vértice: $3. \frac{8}{3}. \frac{8}{3}$

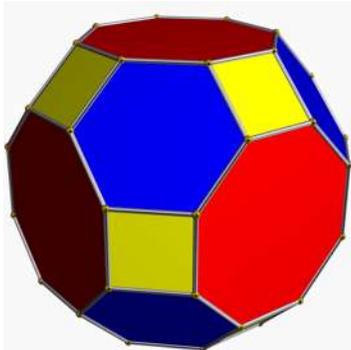
8.- Descripción: Este poliedro uniforme es no

convexo, es orientable ya que $\chi = 2$ y solamente tiene dos clases de aristas bajo el grupo de simetrías. Un tipo de aristas pertenece a un triángulo y un octágono estrellado y el otro tipo de aristas pertenece a dos octágonos estrellados. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [Web].



4. p q r |

En esta sección se muestran los poliedros uniformes cuya simbología de Wythoff es $pqr|$, es decir, el punto que va generar a nuestro poliedro uniforme en el triángulo de Schwarz se encuentra en el incentro de dicho triángulo.



1.- Nombre: **Cuboctaedro truncado**

2.- Simbología de Wythoff: **2 3 4 |**

3.- Número vértices: **$V = 48$**

4.- Número de aristas: **$A = 72$**

5.- Número de caras: **$C = 26$**

Las caras son ocho hexágonos regulares, doce cuadrados y seis octágonos regulares.

6.- Característica de Euler: **$\chi = 2$**

7.- Vecindad de vértice: **4. 6. 8**

8.- Descripción: El cuboctaedro truncado es

un poliedro convexo, es orientable debido a que $\chi = 2$ y tiene tres clases de aristas bajo el grupo de simetrías: uno de los tipos de aristas pertenece a un cuadrado y a un hexágono, otro pertenece a un cuadrado y a un octágono, y el último tipo de aristas pertenece a un hexágono y a un octágono. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [Web].

1.- Nombre: **Cuboctaedro cubitruncado**

2.- Simbología de Wythoff: **$3 \frac{4}{3} 4 |$**

3.- Número de vértices: **$V = 48$**

4.- Número de aristas: **$A = 72$**

5.- Número de caras: **$C = 20$**

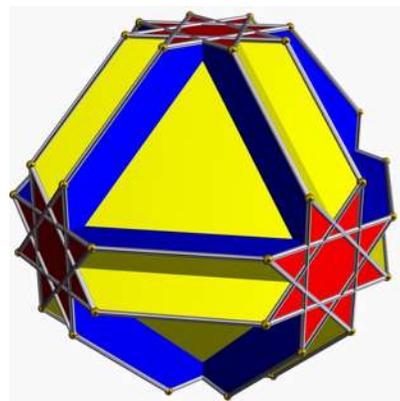
Sus caras son seis octágonos estrellados, ocho hexágonos regulares y seis octágonos regulares.

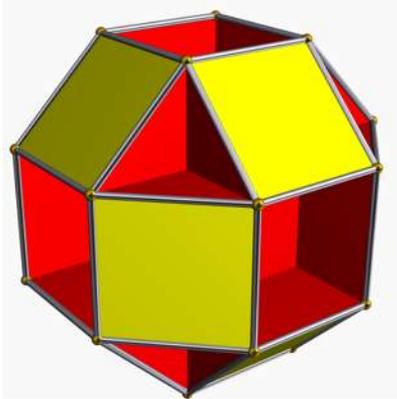
6.- Característica de Euler: **$\chi = -4$**

7.- Vecindad de vértice: **6. 8. $\frac{8}{3}$**

8.- Descripción: Este poliedro uniforme es no

convexo, es orientable y tiene tres tipos de aristas bajo el grupo de simetrías: un tipo de aristas pertenece a un hexágono y un octágono estrellado, otro tipo de aristas pertenece a un hexágono y un octágono convexo y el otro tipo de arista pertenece a un octágono convexo y un octágono estrellado. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [Web].





1.- Nombre: **Pequeño rombihexaedro**

2.- Simbología de Wythoff: $2\ 4\ \frac{3}{2} \mid \frac{4}{2}$

3.- Número de vértices: $V = 24$

4.- Número de aristas: $A = 48$

5.- Número de caras: $C = 18$

Las caras son doce cuadrados y seis octágonos.

6.- Característica de Euler: $\chi = -6$

7.- Vecindad de vértice: **4. 8. 4. 8**

8.- Descripción: Este poliedro uniforme es no convexo, es no-orientable y tiene una clase de

aristas bajo el grupo de simetrías. Cada arista pertenece a un cuadrado y un octágono. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro. Como mapa vive en el plano proyectivo, es decir, la esfera con un bonete. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [**Web**].

Observación 3.1. La construcción de Wythoff del pequeño rombihexaedro da como resultado que algunas aristas pertenezcan a tres caras. Hay un tipo de cara que puede ser removido para obtener el poliedro. La notación que utilizamos aquí fue introducida por Coxeter, Longuet-Higgins y Miller en [**CLM**].

1.- Nombre: **Gran cuboctaedro truncado**

2.- Simbología de Wythoff: $2\ 3\ \frac{4}{3} \mid$

3.- Número de vértices: $V = 48$

4.- Número de aristas: $A = 72$

5.- Número de caras: $C = 26$

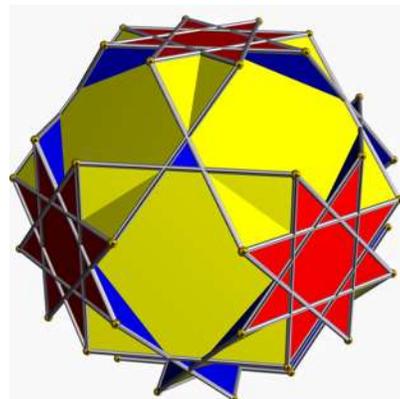
Sus caras son ocho hexágonos regulares , doce cuadrados y seis octágonos estrellados.

6.- Característica de Euler: $\chi = 2$

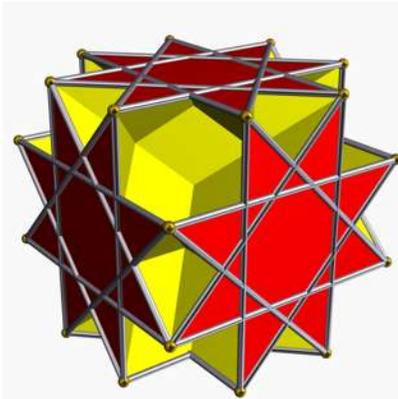
7.- Vecindad de vértice: **4. 6. $\frac{8}{3}$**

8.- Descripción: Este poliedro uniforme es no convexo, es orientable ya que $\chi = 2$ y tiene

tres clases de aristas bajo el grupo de simetrías. Un tipo de aristas pertenece a un cuadrado y a un hexágono, otro tipo de aristas pertenece a un cuadrado y a un octágono estrellado, y el último tipo de aristas pertenece a un hexágono y a un octágono estrellado. Este poliedro



uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [Web].



1.- Nombre: **Gran rombihexaedro**

2.- Simbología de Wythoff: $2 \frac{4}{3} \frac{3/2}{4/2} |$

3.- Número de vértices: $V = 24$

4.- Número de aristas: $A = 48$

5.- Número de caras: $C = 18$

Las caras son doce cuadrados y seis octágonos estrellados.

6.- Característica de Euler: $\chi = -6$

7.- Vecindad de vértice: $4 \cdot \frac{8}{3} \cdot 4 \cdot \frac{8}{3}$

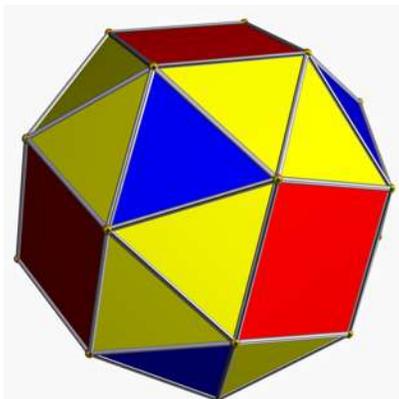
8.- Descripción: Es un poliedro uniforme no convexo, es no-orientable y solamente tiene

una clase de aristas bajo el grupo de simetrías. Cada arista pertenece a un cuadrado y a un octágono estrellado. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro. Como mapa vive en el plano proyectivo, es decir, la esfera con un bonete. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [Web].

Observación 3.2. La construcción de Wythoff del gran rombihexaedro da como resultado que algunas aristas pertenezcan a tres caras. Hay un tipo de cara que puede ser removido para obtener el poliedro. La notación que utilizamos aquí fue introducida por Coxeter, Longuet-Higgins y Miller en [CLM].

5. | p q r

En esta sección se muestra el único poliedro uniforme con grupo el de simetrías del octaedro cuya simbología de Wythoff es |**p q r**, es decir, el punto que va generar a nuestro poliedro uniforme en el triángulo de Schwarz se encuentra en el incentro de éste triángulo.



- 1.- Nombre: **Cubo snub**
- 2.- Simbología de Wythoff: | **2 3 4**
- 3.- Número de vértices: **$V = 24$**
- 4.- Número de aristas: **$A = 60$**
- 5.- Número de caras: **$C = 38$**

Sus caras son treinta y dos triángulos equiláteros y seis cuadrados.

- 6.- Característica de Euler: **$\chi = 2$**
- 7.- Vecindad de vértice: **3.3.3.3.4**

8.- Descripción: El Cubo snub es un poliedro convexo, es orientable ya que $\chi = 2$ y tiene

tres clases de aristas bajo el grupo de simetrías: un tipo de aristas pertenece a dos triángulos y el otro tipo de arista pertenece a un triángulo y un cuadrado. Este poliedro uniforme se obtiene del grupo de simetrías del octaedro. Figura elabora por R. Webb usando el programa Stella [**Web**].

CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió la construcción de poliedros uniformes a través de la construcción de Wythoff usando los grupos de simetrías del tetraedro y del octaedro, y se presentó una lista de tales poliedros uniformes y de algunas de sus características. Para lograr esta construcción se revisó el concepto de los triángulos de Schwarz y la simbología de Wythoff. Además, se construyeron de manera detallada el octahemioctaedro, el tetraedro truncado, el cuboctaedro truncado, el tetrahemihexaedro y el pequeño cubicuboctaedro.

Dentro de las características que se estudiaron de los poliedros uniformes se encuentran la simbología de Schläfli y las superficies en las que los poliedros se representan como mapas. La simbología de Schläfli denota el tipo y el número de polígonos alrededor de cada vértice de un poliedro. Respecto a la orientabilidad, ésta fue estudiada utilizando la característica de Euler y 2-coloraciones de la subdivisión baricéntrica de los poliedros.

Por último, es importante señalar que H.S.M. Coxeter, M.S. Longuet-Higgins y J.C.P. Miller de [CLM] presentaron una lista de poliedros uniformes y pensaron que estaba completa, sin embargo, J. Skilling [Ski] se dio cuenta que la lista estaba incompleta pues mostró la existencia de otro poliedro uniforme y además, mostró que agregando tal poliedro de la lista de poliedros uniformes estaba completa. Los poliedros de la lista anterior sólo admiten caras planas. En un trabajo reciente, A. Williams construye en [Wil] poliedros uniformes que admiten caras con extensión infinita, caras no planas y figuras verticales no planas, en éstos últimos casos, los vértices de las caras y de las figuras verticales no están contenidos en un plano. Además, presenta un nuevo método para construir poliedros uniformes que no pueden obtenerse de la construcción de la Wythoff.

BIBLIOGRAFÍA

- [Ale] P.S. Aleksandrov: *Combinatorial topology. Vol. 1.* Graylock Press, Rochester, N. Y., 1956
- [CL] G. Chantrand; L. Lesniak: *Graphs & digraphs.* Chapman & Hall, London, 1996.
- [CBS] J.H. Conway; H. Burgiel; C. Goodman-Strauss: *The symmetries of things.* A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2008.
- [Cox1] H.S.M Coxeter, *Introduction to geometry.* Second edition. John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1969.
- [Cox2] H.S.M. Coxeter: *Regular Polytopes.* Dover Publications, Inc., New York, 1973.
- [CLM] H.S.M. Coxeter; M.S. Longuet-Higgins; J.C.P. Miller. *Uniform polyhedra.* Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 246, (1954). 401–450.
- [Ewa] G. Ewald. *Combinatorial convexity and algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1996.
- [GB] L.C. Grove; C.T. Benson. *Finite reflection groups.* Springer-Verlag, New York, 1985.
- [Ill] A. Illanes Mejía. *La caprichosa forma de globión.* Fondo de Cultura Económica, México, 1999.
- [Ink11] Inkscape Project, Inkscape, <https://inkscape.org>, Version 0.48.2 (2011).
- [Mar] G.E. Martin. *Transformation geometry. An introduction to symmetry.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [RS] A. I. Ramírez Galarza; G. Sienra Loera. *Invitación a las geometrías no euclidianas.* UNAM, Facultad de Ciencias, Coordinación de Servicios Editoriales, México, 2000.
- [Ski] J. Skilling. *The Complete Set of Uniform Polyhedra.* Phil. Trans. Royal. Soc., London A 1975, 278, 111-135.
- [Web] R. Webb, Stella software, <http://www.software3d.com/Stella.php>.
- [Wil] A. Williams. *Wythoffian Skeletal polyhedra.* Ph.D. Thesis, Northeastern University, 2015.

Índice alfabético

- 2-coloración, 18
- Antiprismas, 6
- Arista, 2, 3
- Asa, 19
- Bandera, 16
- Bonete, 18
- Cara, 3
- Casco convexo, 1
- Construcción de Wythoff, 14
- Figura vertical, 5
- Identidad, 7
- Isometría, 7
- Mapa, 17
- Plano, 2
 - Soporte, 2
- Poliedro
 - Combinatorio, 4
 - Convexo, 2
 - No-orientable, 18
 - Orientable, 18
 - Uniforme, 8
- Polígono, 4
 - Combinatorio, 3
 - Convexo, 1
 - Equiángulo, 4
 - Equilátero, 4
 - Regular, 4
- Prismas, 6
- Recta, 1
 - Soporte, 1
- Reflexión, 8
- Reflexión
 - Rotatoria, 8
- Rotación, 8
- Simbología
 - de Schläfli, 11
- Simbología
 - de Wythoff, 14
- Subdivisión baricéntrica, 15
- Superficie, 16
 - Orientable, 17
- Transformación, 7
- Transitivo en vértices, 7
- Triángulo
 - de Möbius, 13
 - de Schwarz, 14
 - Esférico, 13
- Vecindad de vértice, 5
- Vértice
 - de un polígono, 1
 - de un poliedro combinatorio, 3
 - de un poliedro convexo, 2