



UNIVERSIDAD MICHOCANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS

MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

IMÁGENES CONTINUAS DEL
INTERVALO $[0, 1]$: CONTINUOS DE
PEANO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

PRESENTA:

Larissa Lizbeth Malvárez Álvarez

ASESOR:

Dra. María Luisa Pérez Seguí

Morelia Michoacán, Noviembre de 2016.



*Dedicado a
mi familia*

Índice general

1. Preliminares	5
2. Conceptos básicos	17
2.1. Espacios localmente conexos	17
2.1.1. Conexidad en pequeño	22
2.2. Espacios arco-conexos y espacios conexos por trayectorias	23
2.3. Separaciones	23
2.4. Cadenas simples	26
2.5. Compacidad local	29
2.6. Teorema de metrización de Urysohn	30
3. Teoría de Continuos	35
3.1. Continuos	35
3.2. Puntos de corte en continuos	41
4. Continuos de Peano	49
4.1. Arco-conexidad en continuos de Peano	50
4.2. Teorema de Alexandroff-Hausdorff	54
4.3. Teorema de Hahn-Mazurkiewicz	57
Bibliografía	62

Resumen

Hay dos resultados importantes para los continuos de Peano que se presentan en esta tesis. El primero dice que todos los continuos de Peano son arcoconexos. El segundo, es el famoso Teorema de Hahn-Mazurkiewicz que caracteriza a los continuos de Peano como imágenes continuas del intervalo $[0, 1]$. También se prueba un resultado muy interesante que afirma que los arcos son los únicos continuos con exactamente dos puntos que no son de corte.

Palabras clave: localmente conexo, arco, cadena simple, punto de corte, continuo, continuo de Peano e intervalo $[0, 1]$.

Abstract

There are two important results for Peano continuums presented in this thesis. First one says that all Peano's continuums are arcwise-connected. Second one is the famous Hahn-Mazurkiewicz's Theorem which characterizes Peano's continuums as interval $[0, 1]$ continuous images. It is also proved a very interesting result which states that arcs are the only continuums with exactly two noncut points.

Key words: locally connected, arc, simple chain, cut point, continuum, Peano continuum and interval $[0, 1]$.

Introducción

La Teoría de Continuos surge como una rama dentro del área de Topología cuyo objeto es el estudio de los espacios métricos, compactos y conexos. Su estudio adquirió gran importancia debido a la necesidad de entendimiento de ciertas nociones geométricas; posteriormente tuvo distintas ramificaciones como la teoría de hiperespacios de continuos, dendritas, continuos homogéneos, continuos indescomponibles, etc. La Teoría de Continuos se empezó a estudiar en México de manera creciente a partir de la década de los años ochenta del siglo XX.

Un espacio topológico es localmente conexo si tiene una base formada por conjuntos conexos. En particular, en esta tesis estamos interesados en los continuos localmente conexos, comúnmente llamados **continuos de Peano**, en honor a Giuseppe Peano (1858-1932); matemático que en 1890 dio el primer ejemplo de una curva que llenaba el espacio, es decir una función continua del intervalo $[0, 1]$ sobre el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. La aportación de Peano fue históricamente importante puesto que la idea “intuitiva” que se tenía de curva no encajaba con el ejemplo dado por Peano. Después, en 1913, Hahn y Mazurkiewicz demostraron que todo continuo de Peano es imagen continua de $[0, 1]$ (e inversamente), teorema que es motivo de estudio de esta tesis.

El objetivo principal de esta tesis es caracterizar a los continuos de Peano como imágenes continuas del intervalo $[0, 1]$. Para ello, en el capítulo 1 se recuerdan los conceptos y resultados básicos de topología general necesarios para entender los capítulos posteriores; se establece el bien conocido resultado de que cualquier imagen continua del intervalo $[0, 1]$ es un conjunto conexo y compacto, hecho esencial para probar una implicación del Teorema de Hahn-Mazurkiewicz.

En el capítulo 2 se estudian algunas propiedades de espacios topológicos como: la arco-conexidad, la compacidad local y la conexidad local; también se aborda un tipo especial de separación de conjuntos (puntos de corte), el concepto de cadena simple y las condiciones necesarias para que exista. Al final se prueba el famoso Teorema de Metrización de Urysohn.

En el capítulo 3 se introduce el concepto de continuo y se dan algunos ejemplos; enseguida

se prueba que la intersección anidada de continuos es un continuo, que es una herramienta muy útil para construcción de continuos. También se analiza cómo se comportan los puntos de corte en continuos y, para concluir el capítulo, se prueba que cualquier continuo con exactamente dos puntos que no son de corte es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

En el capítulo 4 se define a los continuos de Peano y se prueba que todo continuo de Peano es arco-conexo. Posteriormente se establece que cualquier imagen continua del intervalo $[0, 1]$ bajo una función continua y cerrada es métrico y que las funciones cerradas preservan la conexidad local. Por lo tanto, si el espacio X está en la clase de los espacios de Hausdorff, cualquier función continua $f : [0, 1] \rightarrow X$ es cerrada, de donde se tiene que, en la clase de los espacios de Hausdorff, las imágenes continuas del intervalo $[0, 1]$ son continuos localmente conexos. Por último se demuestra el recíproco (**El Teorema de Hahn-Mazurkiewicz**), es decir, que todo continuo de Peano es imagen continua del intervalo $[0, 1]$.

Finalmente, cabe señalar que todo el contenido que aquí se presenta presupone que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de Topología General y de Teoría de Conjuntos. El lector puede complementar lo expuesto en esta tesis consultando los textos [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se da un recordatorio de algunas de las definiciones, teoremas, proposiciones y lemas de Topología General que se requieren para entender mejor los capítulos siguientes.

Conexidad

Definición 1.1. Sea X un espacio topológico. Una separación en abiertos para X es una pareja de abiertos no vacíos (U, V) tal que $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = X$.

Definición 1.2. Un espacio topológico X es conexo si no existe una separación en abiertos para X . En caso contrario decimos que X es desconexo.

Observación 1.3. Si Y es un subespacio de un espacio topológico X , entonces Y es conexo si, y sólo si, no existe una pareja de abiertos (U, V) de X tal que:

- $Y \cap U \neq \emptyset$ y $Y \cap V \neq \emptyset$.
- $Y \subset U \cup V$
- $Y \cap U \cap V = \emptyset$

El siguiente lema es otra caracterización de los espacios conexos. Antes, haremos una convención: un subconjunto A de un espacio topológico X que es a la vez cerrado y abierto en X recibirá el nombre de *cerrado-abierto*.

Lema 1.4. *Un espacio X es conexo si, y sólo si, los únicos subconjuntos cerrado-abiertos son X y $\emptyset$.*

Demostración. Supongamos que X es conexo y sea $C \subsetneq X$ un subconjunto cerrado-abierto; entonces $(C, (X \setminus C))$ forma una separación para X , lo cual es una contradicción. Inversamente, supongamos que los únicos conjuntos cerrado-abiertos son X y $\emptyset$ y que X es disconexo. Tomemos (U, V) separación de X . Entonces $X \setminus U = V$ y $X \setminus V = U$ son cerrado-abiertos, lo cual no puede ocurrir. Así, X es conexo. $\square$

Lema 1.5. *Sea X un espacio topológico. Si (U, V) es una separación para X y A es un subespacio conexo de X , entonces $A \subseteq U$ o $A \subseteq V$.*

Demostración. Supongamos que A no está totalmente contenido en U ni en V ; eso implica que $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$. Además, $A \subset (U \cup V) = X$ y $A \cap U \cap V = \emptyset$. Por tanto, $(A \cap U, A \cap V)$ es una separación de A , contradiciendo la conexidad de A . Así, A debe estar totalmente contenido en U o en V . $\square$

Proposición 1.6. *Sea Y un subespacio conexo de un espacio topológico X . Si Z es un conjunto de X tal que $Y \subset Z \subset \overline{Y}$, entonces Z es conexo. En particular, la cerradura de cualquier conjunto conexo es conexa.*

Demostración. Supongamos que Z no es conexo, es decir, existe una separación en abiertos (U, V) para Z . Por la conexidad de Y y el Lema 1.5, tenemos que $Y \subset U$ o $Y \subset V$; sin pérdida de generalidad supongamos que $Y \subset U$. Sea $z \in V$. Tenemos que $z \in V \subset Z \subset \overline{Y}$, entonces z está en la cerradura de Y y como V es un abierto que contiene a z , $V \cap Y \neq \emptyset$, pero $Y \subset U$, por tanto (U, V) no puede ser una separación en abiertos para Z . $\square$

Lo siguiente es probar que la imagen continua de un espacio conexo es conexa. Como al restringir el rango de una función continua a la imagen del espacio conexo, la función que queda sigue siendo continua, es suficiente considerar a una función continua y suprayectiva.

Proposición 1.7. *Sea X un espacio topológico conexo y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces Y es conexo.*

Demostración. Supongamos que Y no es conexo, sea (U, V) una separación en abiertos para Y . Tenemos que:

$$f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = X \quad \text{y} \quad f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = \emptyset.$$

Además, f es suprayectiva, de donde se tiene que $f^{-1}(U) \neq \emptyset \neq f^{-1}(V)$, lo cual contradice la conexidad de X . $\square$

Ejemplo 1.8. *Seno del topólogo.* Consideremos la gráfica de la función $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (x, \sin(\frac{1}{x}))$, es decir, el conjunto $S = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$. Este conjunto es conexo por ser la imagen de una función continua definida en el intervalo conexo $(0, 1]$ (Proposición 1.7). Entonces, su cerradura es el conjunto:

$$\overline{S} = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) : 0 < x \leq 1 \right\}$$

y, de acuerdo con la Proposición 1.6, es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ (ver figura 1.1). Al conjunto $\overline{S}$ se le conoce como la curva del topólogo o el seno del topólogo y es un ejemplo muy utilizado en topología.

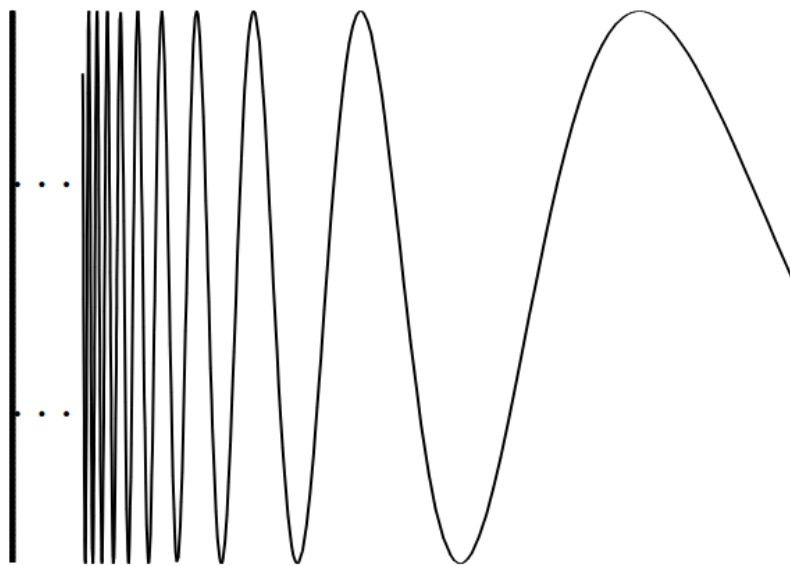


Figura 1.1: Curva del topólogo

Definición 1.9. Sea X un espacio topológico. Una componente es un subconjunto conexo maximal C de X , es decir, C es conexo y no existe D subconjunto conexo de X del cual C sea subconjunto propio.

Ejemplo 1.10. El espacio total X es la unión ajena de sus componentes y todo subconjunto conexo de X está contenido en alguna componente.

Ejemplo 1.11. Los espacios $\mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$ sólo tienen una componente (el mismo espacio), pues son espacios conexos.

Ejemplo 1.12. Si un espacio X tiene la topología discreta, entonces sus componentes constan de un solo elemento.

Proposición 1.13. *Las componentes de cualquier espacio topológico X son cerradas.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea C la componente a la cual pertenece x . Entonces, $\overline{C}$ es también conexo por la Proposición 1.6, pero C es maximal, por tanto $\overline{C} \subseteq C$. $\square$

Ejemplo 1.14. *Consideremos a $\mathbb{Q}$ como subespacio de $\mathbb{R}$. Las componentes de $\mathbb{Q}$ son todos los conjuntos de la forma $\{q\}$ con $q \in \mathbb{Q}$. Este es un ejemplo de un espacio en el que las componentes no necesariamente son abiertas. Más adelante se verá que hay espacios en los que las componentes son abiertas y cerradas.*

Definición 1.15. *Sea X un conjunto totalmente ordenado; damos a X la **topología inducida por el orden**, la cual tiene por base:*

$$\beta = \{(a, b) : a, b \in X\} \cup \{[a_0, b) : a_0, b \in X\} \cup \{(a, b_0] : a, b_0 \in X\},$$

donde el a_0 y b_0 son los elementos mínimo y máximo, respectivamente (en caso de no existir, el segundo y el tercer uniendo se omiten).

Observemos que una subbase para esta topología es:

$$\gamma = \{(a, \infty), a \in X\} \cup \{(-\infty, b) : b \in X\}.$$

Definición 1.16. *Un conjunto totalmente ordenado X con más de un elemento es un continuo lineal si satisface las siguientes condiciones:*

(a) *La propiedad del supremo.*

(b) *Dados $a, b \in X$, con $a < b$, existe $c \in X$ tal que $a < c < b$.*

Ejemplo 1.17. *El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es un continuo lineal.*

Ejemplo 1.18. *El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ no es un continuo lineal, pues no satisface la propiedad del supremo.*

Proposición 1.19. *Si X es un continuo lineal y Y es un intervalo, rayo o $Y = X$, entonces Y es conexo.*

Demostración. Supongamos que Y no es conexo y sea (U, V) una separación en abiertos para Y . Tomemos $a \in U$, $b \in V$, y supongamos, sin pérdida de generalidad que $a < b$. Definimos $U' = U \cap [a, b]$ y $V' = V \cap [a, b]$. Entonces (U', V') es una separación en abiertos para $[a, b]$. Como X es un continuo lineal y b es cota superior de U' , entonces U' tiene supremo c . Claramente $c \leq b$, pues b es cota superior; también, $a \leq c$ ya que $a \in U'$ y c

es el supremo de U' , de manera que $c \in [a, b] = U' \cup V'$. Veamos que c no está en U' ni en V' lo cual contradice el hecho de que (U', V') es separación para $[a, b]$.

Si $c \in U'$, entonces $c \neq b$ pues $b \in V'$. Además, por ser U' abierto en $[a, b]$, existe un intervalo de la forma $[c, d) \subset U'$, y por la condición (b) que satisface un continuo lineal, existe $e \in (c, d)$. Así $e \in U'$ y $e > c$, lo cual contradice que c es el supremo de U' .

Por otro lado, si $c \in V'$, análogo al razonamiento anterior, existe un intervalo de la forma $(d, c] \subset V'$ y $e \in (d, c) \subset V'$, lo cual es una contradicción pues e sería una cota superior de U' menor que c . $\square$

Ejemplo 1.20. De la proposición anterior se sigue que la recta real $\mathbb{R}$, sus intervalos y sus rayos son conexos.

Definición 1.21. Sean $(X, <), (Y, <)$ espacios topológicos ordenados y $f : X \rightarrow Y$ una función, decimos que f preserva el orden si dados $x, y \in X$ con $x < y$, entonces se tiene que $f(x) < f(y)$.

Proposición 1.22. Sean X y Y espacios topológicos ordenados y $f : X \rightarrow Y$ función biyectiva que preserva el orden; entonces f es homeomorfismo.

Demostración. Notemos que la función inversa, la cual está bien definida por ser biyectiva, también preserva el orden. Ahora sólo falta probar que f es abierta. Sea $(a, b) \subset X$ un elemento básico. Como f preserva el orden, tenemos que $f(a, b) \subseteq (f(a), f(b))$; más aún, si $y \in (f(a), f(b))$, entonces existe $x \in X$ tal que $x \in (a, b)$, esto debido a que f es biyectiva y a que f^{-1} también preserva el orden. Así, $f(a, b) = (f(a), f(b))$ que es un abierto en Y . Con lo anterior concluimos que f es abierta y, por tanto, homeomorfismo. $\square$

Ejemplo 1.23. Este ejemplo muestra que se debe tener cuidado con las topologías al utilizar la proposición anterior. Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x < -1, \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Es claro que f es biyectiva, continua y preserva el orden, sin embargo, no es homeomorfismo ya que su función inversa, digamos g , no es continua. Para probar esto notemos que el intervalo $[0, \infty)$ es abierto en X , pero la imagen inversa bajo g de $[0, \infty)$ es $[0, \infty)$ que no es abierto en $\mathbb{R}$. El problema aquí es que X no tiene la topología del orden, si no la de subespacio.

El siguiente lema es bien conocido de topología general.

Lema 1.24. Sean X, Y espacios topológicos. Y sean $C_i \subseteq X$ para $i = 1, 2, \dots, n$, cerrados tales que $X = \bigcup_{i=1}^n C_i$. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función tal que $f|_{C_i}$ es continua para cada $i = 1, 2, \dots, n$, entonces f es continua.

En el lema anterior es muy importante que la colección de cerrados en el que la función es continua sea finito.

Ejemplo 1.25. Como ejemplo de que el lema podría no cumplirse si la colección de cerrados no es finita tenemos la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Definición 1.26. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $a \neq b$. Al conjunto $I_{ab} = \{ta + (1-t)b : t \in [0, 1]\}$ le llamamos segmento cerrado de a a b . Cualquier segmento cerrado I_{ab} en $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

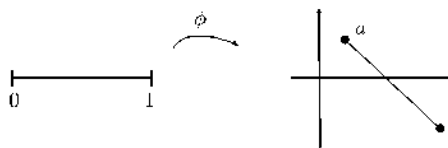


Figura 1.2: Segmento cerrado de a a b

Definición 1.27. Una poligonal en $\mathbb{R}^n$ es una sucesión finita de segmentos cerrados $I_1, \dots, I_n$ tales que un extremo de I_1 coincide con uno de los extremos de I_2 , el extremo de I_2 que no está en I_1 coincide con uno de los extremos de I_3 , y así sucesivamente (véase figura 1.3).

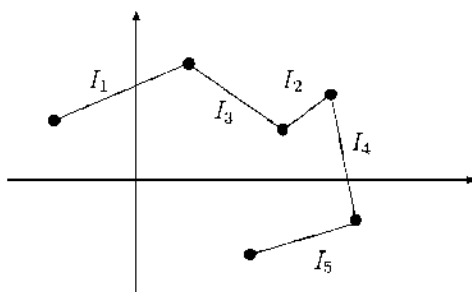


Figura 1.3: Poligonal

Definición 1.28. El diámetro de un conjunto F en un espacio métrico (X, d) se define como el número real $\text{diam}(F) = \sup\{d(x, y) : x, y \in F\}$ cuando este número existe.

Axiomas de separación

En esta sección haremos un recordatorio de los axiomas de separación y de algunas de sus propiedades que serán utilizadas en los capítulos posteriores.

Definición 1.29. Un espacio topológico X es T_0 si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un subconjunto abierto U de X tal que U contiene a uno de los puntos x o y , pero al otro no.

Definición 1.30. Un espacio topológico X es T_1 si para cualesquiera puntos distintos $x, y \in X$, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$.

Definición 1.31. Un espacio topológico X es un espacio de Hausdorff o T_2 si satisface que para cualesquier puntos distintos $x, y \in X$, existen abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$ y $y \in V$.

Definición 1.32. Sea X un espacio topológico T_1 . Decimos que X es un espacio regular o T_3 si para cualquier $C \subset X$ cerrado y $x \in X \setminus C$ existen abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$ y $C \subset V$.

Definición 1.33. Un espacio topológico X es normal o T_4 si es T_1 y satisface que para cualesquiera subconjuntos C y D cerrados y disjuntos de X , existen abiertos disjuntos U y V de X tales que $C \subseteq U$ y $D \subseteq V$.

Observación 1.34. Es fácil ver que los axiomas de separación cumplen las siguientes implicaciones:

$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

El siguiente lema es de gran utilidad en topología pues da una caracterización de los espacios regulares y normales.

Proposición 1.35. Sea X un espacio topológico T_1 . Entonces:

- (a) X es regular si, y sólo si, para cualesquiera $x \in X$ y $U \subset X$ abierto que contiene a x existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

(b) X es normal si, y sólo si, para cualesquiera $C \subset X$ cerrado y U abierto que contiene a C existe V abierto tal que $C \subset V \subset \bar{V} \subset U$.

Demostración. (a) Supongamos que X es un espacio regular. Sean $x \in X$ y U un abierto que contiene a x . El conjunto $X \setminus U$ es cerrado y no contiene a x así, por la regularidad de X , existen abiertos disjuntos V y W tales que $x \in V$ y $X \setminus U \subseteq W$. Notemos que $X \setminus W$ es un cerrado que contiene a V , por tanto, $\bar{V} \subset X \setminus W$. Entonces $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq X \setminus W \subseteq U$. Recíprocamente, sean $C \subseteq X$ un cerrado y $x \in X \setminus C$. Tenemos que $X \setminus C$ es un abierto que contiene a x y, por hipótesis, existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq X \setminus C$. Tomemos V y $W = X \setminus \bar{V}$; notemos que dichos conjuntos son abiertos, disjuntos y satisfacen que $x \in V$ y $C \subset W$, por tanto, son los abiertos buscados.

(b) Supongamos que X es un espacio normal. Sean $C \subset X$ cerrado y U un abierto que contiene a C . Por la normalidad de X , existen abiertos disjuntos V y W tales que $C \subset V$ y $X \setminus U \subset W$. De tal manera que $X \setminus W$ es un cerrado que contiene a V , por tanto, $\bar{V} \subset X \setminus W$. Así, $C \subset V \subset \bar{V} \subset X \setminus W \subset U$.

Recíprocamente, sean C y D conjuntos cerrados y disjuntos de X . Notemos que el conjunto $X \setminus D$ es un abierto que contiene a C . Por hipótesis, existe $V \subset X$ tal que $C \subset V \subset \bar{V} \subset X \setminus D$. Entonces, V y $W = X \setminus \bar{V}$ son los abiertos buscados. $\square$

Ejemplo 1.36. El espacio $\mathbb{R}_\ell$ es normal y, por lo tanto, regular. Recordemos que en el espacio $\mathbb{R}_\ell$, también llamado Recta de Sorgenfrey, los elementos básicos son los intervalos de la forma $[a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Sean C y D subconjuntos cerrados y disjuntos de $\mathbb{R}_\ell$. Para cada $c \in C$ tomemos $[c, x_c)$ básico que no intersecta a D , y para cada $d \in D$ tomemos $[d, y_d)$ básico que no intersecta a C . Entonces los abiertos disjuntos buscados son $U = \bigcup_{c \in C} [c, x_c)$ y $V = \bigcup_{d \in D} [d, y_d)$.

Ejemplo 1.37. Todo espacio métrico (X, d) es normal.

Demostración. Sean C, D subconjuntos cerrados y disjuntos de X . Como $C \subseteq X \setminus D$, para cada punto $x \in C$ podemos tomar un $\varepsilon_x > 0$ tal que $x \in B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq X \setminus D$. Análogamente, para todo punto $y \in D$, podemos tomar un $\delta_y > 0$ de tal manera que $y \in B_{\delta_y}(y) \subseteq X \setminus C$. Sean

$$U = \bigcup_{x \in C} B_{\frac{\varepsilon_x}{3}}(x) \text{ y } V = \bigcup_{y \in D} B_{\frac{\delta_y}{3}}(y).$$

Claramente los conjuntos U y V son abiertos de (X, d) que contienen a C y a D , respectivamente. Además, U y V son disjuntos, ya que si existiera un $z \in U \cap V$, entonces $z \in B_{\frac{\varepsilon_x}{3}}(x) \cap B_{\frac{\delta_y}{3}}(y)$ para algún $x \in C$ y $y \in D$. Lo cual implica que:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\varepsilon_x}{3} + \frac{\delta_y}{3} < \max\{\varepsilon_x, \delta_y\},$$

y por tanto, $x \in B_{\varepsilon_y}(y)$ o $y \in B_{\varepsilon_x}(x)$, lo cual no puede pasar por la definición de U y V . $\square$

Lema 1.38. Sean X un espacio de Hausdorff, $x \in X$ y $C \subseteq X$ compacto tal que $x \notin C$. Entonces existen abiertos disjuntos U, V que cumplen que $x \in U$ y $C \subseteq V$.

Demostración. Como X es Hausdorff, para cada $c \in C$ existen abiertos disjuntos U_c, V_c tales que $x \in U_c$ y $c \in V_c$. La colección $\{V_c : c \in C\}$ es una cubierta abierta de C , que es compacto, así, existe una subcubierta finita $\{V_{c_1}, \dots, V_{c_n}\} \subset \{V_c : c \in C\}$ de C . Entonces, los conjuntos $U = \bigcap_{i=1}^n U_{c_i}$ y $V = \bigcup_{i=1}^n V_{c_i}$ son los abiertos buscados. $\square$

Lema 1.39. Si X es un espacio de Hausdorff y $H, K \subseteq X$ son compactos y disjuntos, entonces existen dos abiertos disjuntos U, V tales que $H \subseteq U$ y $K \subseteq V$.

Demostración. Por el lema anterior, para cada punto $x \in H$, existen abiertos disjuntos U_x y V_x , con $x \in U_x$ y $K \subset V_x$. Notemos que la colección $\mathcal{U} = \{U_x : x \in H\}$ es una cubierta abierta para H y, como H es compacto, podemos extraer una subcubierta finita $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\} \subset \mathcal{U}$ de H . Si tomamos $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ y $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ obtenemos los abiertos buscados. $\square$

Corolario 1.40. Si X es un espacio Hausdorff y compacto, entonces X es normal.

Demostración. Sean C y D subconjuntos cerrados de X . Por ser cerrados en un espacio compacto, son compactos. Y por el lema anterior, existen abiertos disjuntos U, V tales que $C \subseteq U$ y $D \subseteq V$. $\square$

Compacidad

De esta sección cabe resaltar dos resultados. El primero afirma que la imagen continua de un espacio compacto es un compacto. El segundo nos dice que cualquier función que va de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es cerrada.

Proposición 1.41. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos. Si $K \subset X$ es compacto, entonces su imagen $f(K)$ es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $f(K)$. Veamos que $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta finita de $f(K)$. Consideremos el conjunto $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$. Como f es continua, cada elemento de $\mathcal{V}$ es abierto. Notemos que si $x \in K$, entonces $f(x) \in f(K)$, de donde existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $f(x) \in U$ y, por tanto, $x \in f^{-1}(U)$ así, $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta

de K . Además, K es compacto, entonces podemos tomar $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)\}$ subcubierta finita de K . Afirmamos que $\{U_1, \dots, U_n\}$ es cubierta de $f(K)$. Si $f(x) \in f(K)$ con $x \in K$, entonces existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in f^{-1}(U_i)$ y, por lo tanto, $f(x) \in U_i$. Así $f(K)$ es compacto. $\square$

La prueba de los siguientes lemas se puede consultar en [3].

Lema 1.42. *Sea X un espacio compacto. Si $C \subset X$ es cerrado, entonces C es compacto.*

Lema 1.43. *Sea X un espacio de Hausdorff. Si $K \subset X$ es compacto, entonces K es cerrado.*

Proposición 1.44. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Si X es compacto y Y Hausdorff, entonces f es cerrada.*

Demostración. Sea $C \subset X$ cerrado. Como C es subconjunto del espacio compacto X , C es compacto y, por la Proposición 1.41, $f(C)$ también es compacto. Entonces, $f(C)$ es un compacto contenido en un Hausdorff, por Lema 1.43, $f(C)$ es cerrado. $\square$

Definición 1.45. *Sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X . Decimos que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de la intersección finita (**PIF**) si cualquier subfamilia finita de $\mathcal{C}$ tiene intersección no vacía.*

Lema 1.46. *Un espacio topológico X es compacto, si y sólo si, toda familia de cerrados con la **PIF** tiene intersección no vacía.*

Proposición 1.47. *Si X es un espacio topológico compacto y A es un subconjunto infinito de X , entonces A tiene punto de acumulación.*

Demostración. Supongamos que no, es decir, $A' = \emptyset$; de lo anterior tenemos que A es cerrado pues $A = A' \cup A = \overline{A}$. Como X es compacto, tenemos que A también es compacto. Para cada $a \in A$, tomemos U_a abierto tal que $U_a \cap A = \{a\}$ (tal conjunto existe pues A no tiene puntos de acumulación). Entonces la cubierta abierta $\{U_a : a \in A\}$ tiene subcubierta finita, lo cual es una contradicción pues A es un conjunto infinito. $\square$

Definición 1.48. *Un espacio topológico es compacto por sucesiones si toda sucesión tiene subsucesión convergente.*

Proposición 1.49. *Sea X un espacio primero numerable y T_1 . Si todo conjunto infinito*

tiene punto de acumulación, entonces X es compacto por sucesiones.

Definición 1.50. Sea (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de (X, d) . Decimos que $\delta > 0$ es un número de Lebesgue para $\mathcal{U}$ si para todo $A \subseteq X$ con $\text{diam}(A) < \delta$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \subset U$.

Es claro que si δ es un número de Lebesgue para $\mathcal{U}$ entonces cualquier real positivo $\delta' < \delta$ también lo es. No toda cubierta tiene número de Lebesgue; el siguiente lema nos da una condición suficiente.

Lema 1.51. Si (X, d) es métrico y compacto por sucesiones, entonces toda cubierta abierta de X tiene número de Lebesgue.

Observación 1.52. En virtud de 1.47 y 1.49 se tiene que todo espacio métrico y compacto es compacto por sucesiones y, por el Lema 1.51, toda cubierta abierta tiene número de Lebesgue.

Axiomas de numerabilidad

Definición 1.53. Decimos que un espacio X es separable si contiene un subconjunto denso numerable.

Definición 1.54. Un espacio topológico X es primero numerable o satisface el primer axioma de numerabilidad si cada punto $x \in X$ tiene una base local de vecindades numerable.

Definición 1.55. Un espacio topológico X es segundo numerable o satisface el segundo axioma de numerabilidad si existe una base numerable para la topología de X .

Proposición 1.56. Si (X, d) es un espacio métrico y compacto, entonces (X, d) es:

(a) Separable

(b) Segundo numerable.

Demostración. (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $\mathcal{U}_n = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X\}$ cubierta abierta de X . Sea $V_n = \{B_{\frac{1}{n}}(x_{n,1}), \dots, B_{\frac{1}{n}}(x_{n,k_n})\}$ una subcubierta finita extraída de $\mathcal{U}_n$ (podemos hacerlo pues X es compacto); y sea $D_n = \{x_{n,1}, \dots, x_{n,k_n}\}$, es decir D_n es el conjunto de los centros de las bolas que pertenecen a V_n . Afirmamos que $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$

es un conjunto denso numerable en X . Basta con probar que cualquier básico intersecta a D , pues claramente D es numerable. Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ de tal manera que $\frac{1}{N} < \varepsilon$ y $y \in D_N$ tal que $d(x, y) < \frac{1}{N}$, tal y existe pues los abiertos $B_{\frac{1}{N}}(z)$ con $z \in D_N$ cubren a X . Así, $y \in B_{\frac{1}{N}}(x) \subset B_\varepsilon(x)$ y, por tanto, $B_\varepsilon(x) \cap D \neq \emptyset$.

(b) Ahora probemos que X es segundo numerable. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea V_n definido como en la prueba de (a). Afirmamos que $\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ es base numerable para X . Es claro que β es numerable, nos resta probar que cualquier básico de X contiene un elemento de β . Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ y sea $y \in X$ tal que $d(x, y) < \frac{1}{N}$. Así, si $z \in B_{\frac{1}{N}}(y)$, entonces

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

por tanto, $z \in B_\varepsilon(x)$ y podemos concluir que $B_{\frac{1}{N}}(y) \subset B_\varepsilon(x)$. □

Capítulo 2

Conceptos básicos

En este capítulo veremos algunas propiedades locales como: conexidad local, conexidad en pequeño y la compacidad local; también, estudiaremos otros conceptos de espacios topológicos relacionados con la conexidad, como las cadenas simples, conjuntos que cortan y los puntos de corte que separan dos puntos. Terminamos el capítulo con la prueba del Teorema de metrización de Urysohn.

2.1. Espacios localmente conexos

Definición 2.1. Sea X un espacio topológico y sea $x \in X$. El espacio X es localmente conexo en x si para cada conjunto abierto U tal que $x \in U$, existe un conjunto abierto conexo V que contiene a x y tal que $V \subseteq U$. Si X es localmente conexo en cada punto decimos que es localmente conexo.

También podemos definir la *conexidad local* usando vecindades. Decimos que un espacio X es *localmente conexo en un punto* $x \in X$ si para toda vecindad N de x existe una vecindad abierta y conexa V de X tal que $x \in V \subset N$; en otras palabras, x tiene una base local de vecindades (abiertas) conexas.

Observación 2.2. Las definiciones de conexidad local dadas anteriormente son equivalentes.

Demostración. Sea $x \in X$ con X espacio topológico. Supongamos que para cada abierto U que contiene a x existe un conjunto abierto y conexo V tal que $x \in V \subset U$. Sea N vecindad de x . Tomemos U abierto alrededor de x y $U \subset N$; por hipótesis, existe V abierto (vecindad de todos sus puntos) y conexo tal que $x \in V \subset U \subset N$. El recíproco es trivial pues todo abierto U es vecindad de todos sus puntos. $\square$

Observación 2.3. *Un espacio topológico es localmente conexo si, y sólo si, tiene una base de conjuntos abiertos y conexos.*

Ejemplo 2.4. *Los espacios $\mathbb{R}^n$ son localmente conexos pues cada bola abierta es conexa.*

Ejemplo 2.5. *Un espacio puede ser localmente conexo y desconexo; tal es el caso del espacio $X = (0, 1] \cup (2, 3] \subset \mathbb{R}$.*

Ejemplo 2.6. *Existen espacios que son conexos y no localmente conexos. La curva del topólogo es un espacio conexo, como se probó en la sección pasada, pero no es localmente conexo, pues los puntos de la forma $(0, y)$, con $-1 \leq y \leq 1$, poseen vecindades que no contienen vecindades conexas.*

Lema 2.7. *Sea X un espacio localmente conexo. Si U es un subconjunto abierto de X , entonces U es localmente conexo.*

Demostración. Sean $x \in U$ y $V \subset U$ abierto que contiene a x . Como los abiertos de U son abiertos en X y X es localmente conexo, existe $W \subset V$ abierto conexo tal que $x \in W \subseteq V \subseteq U$. $\square$

Como acabamos de ver, la conexidad local es una propiedad que se hereda a subespacios abiertos, pero en general, la conexidad local no es una propiedad hereditaria, como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.8. *El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, como subespacio de $\mathbb{R}$, no es localmente conexo.*

Ejemplo 2.9. *Consideremos el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$. Éste se obtiene mediante un proceso de intersección de subconjuntos cerrados anidados de $\mathbb{R}$. La construcción es como sigue:*

Comenzamos con $C_1 = [0, 1]$ y definimos $C_2 \subset C_1$ como el resultado de dividir el intervalo $[0, 1]$ en tres partes iguales y substraer el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, es decir, $C_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$; el conjunto $C_3 \subset C_2$ se obtiene dividiendo en tres los dos intervalos de C_2 y quitando el tercio abierto medio de cada uno de ellos (Ver figura 2.1). Recursivamente definimos C_n como el conjunto que se obtiene de quitar los tercios abiertos medios de cada intervalo cerrado de C_{n-1} . Entonces, el conjunto de Cantor es $\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. El conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ es otro subespacio de $\mathbb{R}$ que no es localmente conexo.

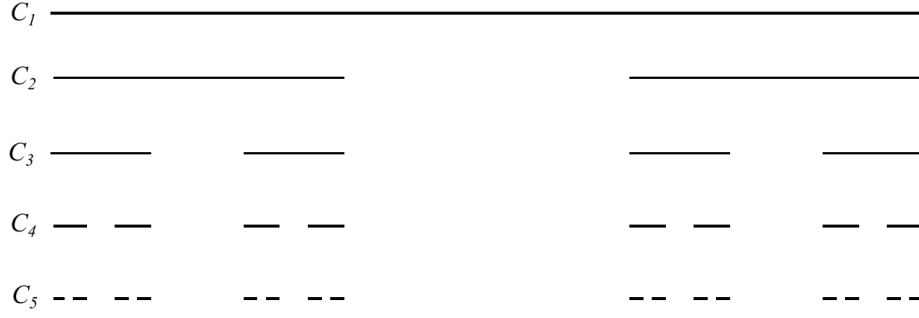


Figura 2.1: Conjunto de Cantor

Proposición 2.10. *Un espacio X es localmente conexo si, y sólo si, las componentes de cada abierto de X son abiertas.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean $U \subseteq X$ un abierto y C una componente conexa de U . Si $x \in C$, por la conexidad local de U podemos tomar un conjunto abierto conexo V que contenga a x tal que $V \subset U$. Además, como C es maximal, $V \subset C$, así C es abierta en X .

Ahora supongamos que las componentes de cada abierto de X son abiertas. Sean $x \in X$ y $U \subseteq X$ un abierto que contenga a x . Tomemos C la componente conexa de U que contiene a x . Como C es abierta, C es el abierto conexo que buscamos. Por tanto, X es localmente conexo en x . $\square$

Corolario 2.11. *Cualquier componente de un espacio localmente conexo X es abierta y cerrada.*

Demostración. Es inmediato de la Proposición 2.10 y la Proposición 1.13 en la que probamos que las componentes siempre son cerradas. $\square$

Lema 2.12. *Sea X un espacio conexo y localmente conexo. Si C es una componente de un conjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $X \setminus \overline{C} \neq \emptyset$, entonces $\overline{C} \setminus C$ no es vacío y separa a X .*

Demostración. Supongamos que $\overline{C} \setminus C = \emptyset$; de lo anterior tenemos que C es cerrado pues $\overline{C} = C$. Además, por la Proposición 2.10, C es abierto, así $C \subset X$ es abierto y cerrado, lo cual, por el Lema 1.4, es una contradicción. De lo anterior se tiene que, $\overline{C} \setminus C \neq \emptyset$.

Para probar la segunda parte basta con observar que $(C, (X \setminus \overline{C}))$ es una separación de $X \setminus (\overline{C} \setminus C)$. Veamos primero que su intersección es vacía, $C \cap (X \setminus \overline{C}) = \emptyset$. Claramente, $X \setminus (\overline{C} \setminus C) = C \cup (X \setminus \overline{C})$. $\square$

Si bien conexidad local es una invariante topológica (ver Corolario 2.16), la conexidad local es una propiedad que no necesariamente se preserva bajo funciones continuas, como

se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.13. Consideremos la función f que va del intervalo $(0, 1]$ a la gráfica de la función $\sin(\frac{1}{x})$ unido con un arco del punto $(0, 0)$ al $(1, \sin(1))$ de tal manera que su única intersección sea el punto $(1, \sin(1))$ (Ver figura 2.1). Obsérvese que el intervalo $(0, 1]$ es localmente conexo, pero su imagen no es localmente conexa en el punto $f(1)$.

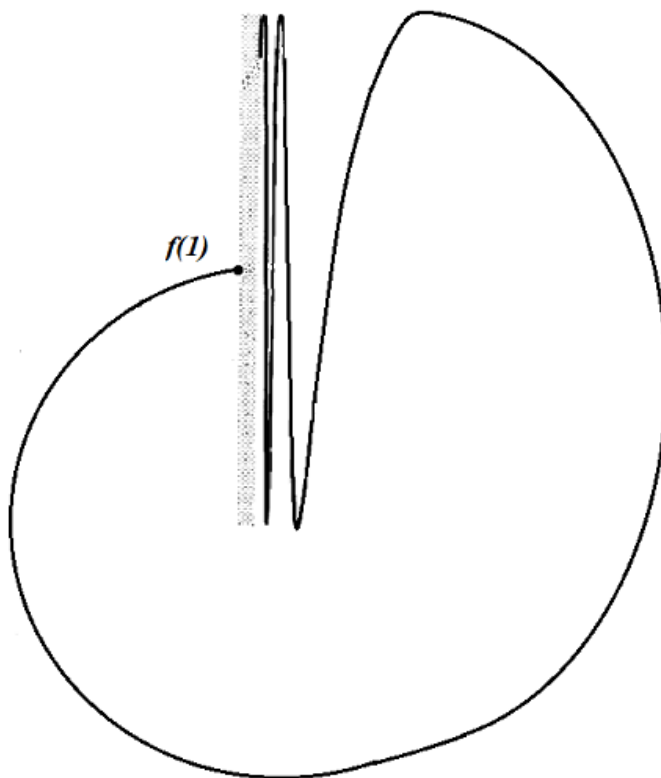


Figura 2.2: Imagen de un espacio localmente conexo que no es localmente conexo

Ejemplo 2.14. Incluso si la función es biyectiva y continua la conexidad local no se preserva. Sean $X = \{1, 2, \dots\}$ y $Y = \{\frac{1}{n} : n \in X\}$ con la topología como subespacio de $\mathbb{R}$, entonces la función $f : X \rightarrow Y$ tal que para cada $n \in X$, $f(n) = \frac{1}{n}$ es continua (pues X tiene la topología discreta) y biyectiva. Además X es localmente conexo pero Y no lo es.

Hay dos tipos de funciones más generales que los homeomorfismos que también preservan la conexidad local; dichas funciones son las abiertas y las funciones cerradas. Recordemos que una función es cerrada (resp. abierta) si manda conjuntos cerrados (resp. abiertos) en conjuntos cerrados (resp. abiertos).

Proposición 2.15. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua, abierta y suprayectiva. Si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. Sea $y \in Y$ y V un abierto que contiene a y . Como f es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Además, por la continuidad de f , $f^{-1}(V)$ es un abierto tal que $x \in f^{-1}(V) \subset X$. Por la conexidad local de X , existe un conjunto abierto conexo U tal que $x \in U \subset V \subset X$. Entonces, $f(U)$ es un conjunto abierto (pues f es abierta), conexo (por la continuidad de f) y tal que $y = f(x) \in f(U) \subset V$. Por tanto, Y es localmente conexo. $\square$

Corolario 2.16. *Sea $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. Se sigue directamente de la Proposición 2.15. $\square$

Lema 2.17. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Si C es una componente de Y , entonces $f^{-1}(C)$ es unión de componentes de X .*

Demostración. Sea $x \in f^{-1}(C)$ y sea $D \subseteq X$ la componente a la que pertenece x . Como f es continua, $f(D)$ es conexo y, $f(x) \in f(D) \cap C$, entonces $f(D)$ debe estar contenido en C . Tomando sus imágenes inversas tenemos que $D \subset f^{-1}(f(D)) \subset f^{-1}(C)$. Así, $f^{-1}(C)$ es unión de las componentes de X tales que las imágenes de sus puntos intersectan a C . $\square$

Lema 2.18. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua, cerrada y suprayectiva. Si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. Vamos a probar que las componentes de cada abierto en Y son abiertas. Sea U un subconjunto abierto de Y y sea C una componente conexa de U . Como f es continua, $f^{-1}(U)$ es abierto en X ; además, por ser subconjunto de un espacio localmente conexo, $f^{-1}(U)$ es localmente conexo (Lema 2.7); y por la Proposición 2.10, sus componentes son abiertas. De acuerdo con el lema anterior, $f^{-1}(C)$ es unión de componentes de $f^{-1}(U)$ y por tanto, $f^{-1}(C)$ es abierto en X . Ahora notemos que $X \setminus f^{-1}(C)$ es cerrado y, como f es cerrada tenemos que $f(X \setminus f^{-1}(C))$ es cerrado en Y . Veamos que $f(X \setminus f^{-1}(C)) = Y \setminus C$. Si $y \in f(X \setminus f^{-1}(C))$, entonces existe $x \in X \setminus f^{-1}(C)$ tal que $f(x) = y$, así $y = f(x) \in Y \setminus C$.

Por otro lado, si $y \in Y \setminus C$, entonces existe $x \in X \setminus f^{-1}(C)$ tal que $f(x) = y$, así $y = f(x) \in f(X \setminus f^{-1}(C))$.

Así, C es abierto y, por lo tanto, Y es localmente conexo. $\square$

2.1.1. Conexidad en pequeño

En la definición de conexidad local en un punto x es importante que exista un **abierto** conexo que contenga a x pero, si sólo pedimos que exista un conjunto conexo que contenga x diremos que el espacio es *conexo en pequeño en x* (en alemán, *im kleinen*). A continuación damos la definición formal.

Definición 2.19. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que X es *conexo en pequeño en x* si para cada abierto U que contiene a x existe un conjunto conexo V tal que $x \in \text{Int}(V) \subset V \subset U$. Un espacio X es *conexo en pequeño* si es conexo en pequeño en cada punto.

Observación 2.20. Es claro que si X es localmente conexo, entonces X es conexo en pequeño.

Ejemplo 2.21. El recíproco de la observación anterior no se cumple. Sea X el subespacio de $\mathbb{R}^2$ construido como sigue: en cada punto $p_n = (\frac{1}{n}, 0)$ (con $n \in \mathbb{N}$) tracemos los segmentos cerrados con pendiente $\frac{-1}{m}$ ($m \in \mathbb{N}$) y tales que los segmentos cerrados tengan medida $\frac{1}{n(n+1)}$, es decir, la distancia que hay entre el punto p_n y p_{n+1} . Ahora, sea X la unión de todas estas escobas con el punto $(0, 0)$ (véase figura 2.3). Entonces X es localmente conexo en el punto $x = (0, 0)$ pero, no es conexo en pequeño en x .

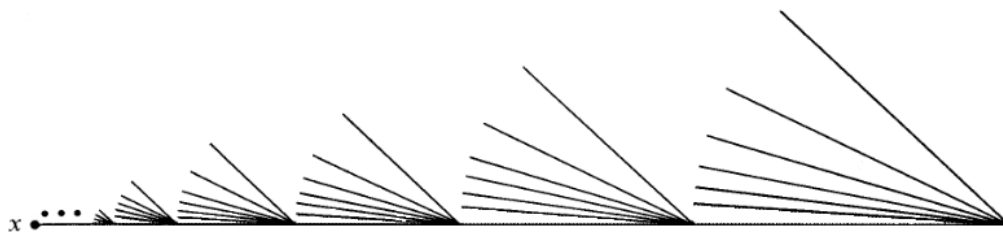


Figura 2.3: Espacio conexo en pequeño y no lc

Proposición 2.22. Si X es un espacio conexo en pequeño en cada uno de sus puntos, entonces X es localmente conexo.

Demostración. Probaremos que cada componente de cada abierto de X es abierta. Sea U un subconjunto abierto de X y sea C componente de U . Sea $x \in C$, por ser X conexo en pequeño, existe un conjunto conexo V_x tal que $x \in \text{Int}(V_x) \subset V_x \subset U$. Como C es componente conexa y $x \in C$, $V_x \subseteq C$. Por tanto $C = \bigcup_{x \in C} \text{Int}(V_x)$ es abierto. $\square$

2.2. Espacios arco-conexos y espacios conexos por trayectorias

Definición 2.23. Sea X un espacio topológico y sean $x, y \in X$. Una trayectoria de x a y es una función continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $x = \gamma(0)$ y $y = \gamma(1)$.

Definición 2.24. Un espacio X es conexo por trayectorias (*cpt*) si para cualesquiera $x, y \in X$ existe trayectoria de x a y .

Ejemplo 2.25. El intervalo $[0, 1]$ es *cpt*.

Ejemplo 2.26. Si X tiene la topología indiscreta, entonces X es *cpt*.

Ejemplo 2.27. Si X tiene la topología discreta y al menos dos puntos, entonces X no es *cpt*.

Ejemplo 2.28. Sea X el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ con la topología cofinita entonces, X es *cpt*. Si $x, y \in \mathbb{R}$ se define una función $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ por $\gamma(t) = (1 - t)x + ty$. Para probar la continuidad, veamos que la imagen inversa de cerrados es cerrado en $[0, 1]$. Los conjuntos cerrados en la topología cofinita son los conjuntos finitos. Como γ es biyectiva, la imagen inversa de un conjunto finito es finito, el cual es también un cerrado en la topología usual de $[0, 1]$.

Hay un tipo de conexidad más fuerte que la conexidad por trayectorias llamada *arco-conexidad*. Esta conexidad no sólo exige que entre cada dos puntos exista una trayectoria, sino que además, dicha trayectoria debe tener inversa continua, es decir, debe ser homeomorfismo en su imagen. El ejemplo 2.28 es *cpt* pero no arcoconexo.

Definición 2.29. Sea X espacio topológico y sean $x, y \in X$. Un arco de x a y es una trayectoria γ de x a y que es homeomorfismo entre $[0, 1]$ y $\gamma([0, 1]) \subseteq X$.

Definición 2.30. Un espacio X es arco-conexo si para cualesquiera $x, y \in X$ existe arco de x a y .

2.3. Separaciones

Es intuitivo pensar que un subconjunto separa a un conjunto conexo, si al quitarle el subconjunto, el conjunto conexo queda desconexo. Esto lo formalizamos en la siguiente

definición.

Definición 2.31. Sea X un espacio conexo y T_1 . Decimos que un conjunto $S \subset X$ separa a X si existe una separación (U, V) de $X \setminus S$. Si $S = \{x\}$, es decir, si S consta sólo de un punto del espacio, a dicho punto le llamamos punto de corte.

Ejemplo 2.32. Si tomamos $X = \mathbb{R}$, entonces todo conjunto de la forma $\{x\}$ con $x \in \mathbb{R}$ separa a X , pues $\mathbb{R} \setminus \{x\} = (-\infty, x) \cup (x, \infty)$. Dicho de otra manera, cada punto $x \in \mathbb{R}$ es un punto de corte.

Ejemplo 2.33. Para el intervalo $[0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$, todos los puntos $x \in (0, 2\pi)$ son puntos de corte. En general, para cualquier intervalo cerrado $[a, b]$, los puntos $x \in (a, b)$ son puntos de corte.

Ejemplo 2.34. El círculo unitario $\mathbb{S}^1$ no posee puntos de corte, debido a que si quitamos cualquier punto de $\mathbb{S}^1$ lo que queda sigue siendo conexo.

Proposición 2.35. Sea $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo entre espacios topológicos. Si $x \in X$ es un punto de corte, entonces $f(x)$ es un punto de corte de Y .

Demostración. Tenemos que $X \setminus \{x\}$ no es un conjunto conexo; además, $f(X \setminus \{x\}) = Y \setminus \{f(x)\}$ (por ser f homeomorfismo), entonces $Y \setminus \{f(x)\}$ no puede ser conexo. Por lo tanto $f(x)$ es punto de corte de Y . $\square$

Como acabamos de probar, la propiedad de ser un punto de corte se preserva bajo homeomorfismo; pero bajo funciones continuas podría no ser así. Consideremos la función $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $f(x) = (\cos x, \sin x)$; ésta función es continua, pero $[0, 2\pi]$ tiene una cantidad no numerable de puntos de corte y $\mathbb{S}^1$ no tiene puntos de corte.

Definición 2.36. Sean $a, b \in X$, con X espacio conexo y T_1 . Un conjunto $S \subseteq X$ separa a a de b si existe una separación (U, V) de $X \setminus S$ tal que $a \in U$ y $b \in V$. En el caso en que $S = \{x\}$, decimos que x es un punto de corte que separa a a de b .

Ejemplo 2.37. En el intervalo $[0, 1]$ los únicos puntos que no son de corte son el 0 y el 1 pues los conjuntos $[0, 1] \setminus \{0\}$ y $[0, 1] \setminus \{1\}$ siguen siendo conexos.

Ejemplo 2.38. Consideremos $X = \mathbb{R}^2$ y los puntos $a = (-1, 1)$, $b = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Entonces el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ separa a a de b , pues

$$\mathbb{R}^2 \setminus S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\},$$

es claro que $(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\})$ es una separación de $\mathbb{R}^2 \setminus S$.

Definición 2.39. Sea X un espacio conexo. Decimos que un conjunto S separa débilmente a X entre $a, b \in X \setminus S$, si S intersecta cada conjunto cerrado conexo que contiene a a y a b .

Observación 2.40. Si S separa a a de b , entonces S separa débilmente a X entre a y b .

Demostración. Sea $C \subseteq X$ un cerrado conexo tal que $a, b \in C$. Como S separa a a de b , existe (U, V) separación en abiertos para $X \setminus S$ tal que $a \in U$ y $b \in V$. Supóngase que $S \cap C = \emptyset$, de lo cual tenemos que $C \subseteq X \setminus S$ y por ser conexo, $C \subseteq U$ o $C \subseteq V$; sin pérdida de generalidad supongamos que $C \subseteq U$, pero $a, b \in C \subseteq U$; esto implica que $b \in U \cap V$, lo cual contradice que (U, V) sea separación. $\square$

Ejemplo 2.41. El recíproco de la observación anterior no siempre se cumple. Para ver esto, definimos los siguientes conjuntos:

$$A = \{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}, \quad B = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\} \text{ y } C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \left(x, \frac{x}{n} \right) : 0 \leq x \leq 1 \right\}.$$

Sea Y el subespacio de $\mathbb{R}^2$ dado por $Y = A \cup B \cup C$. Ahora, consideremos los siguientes

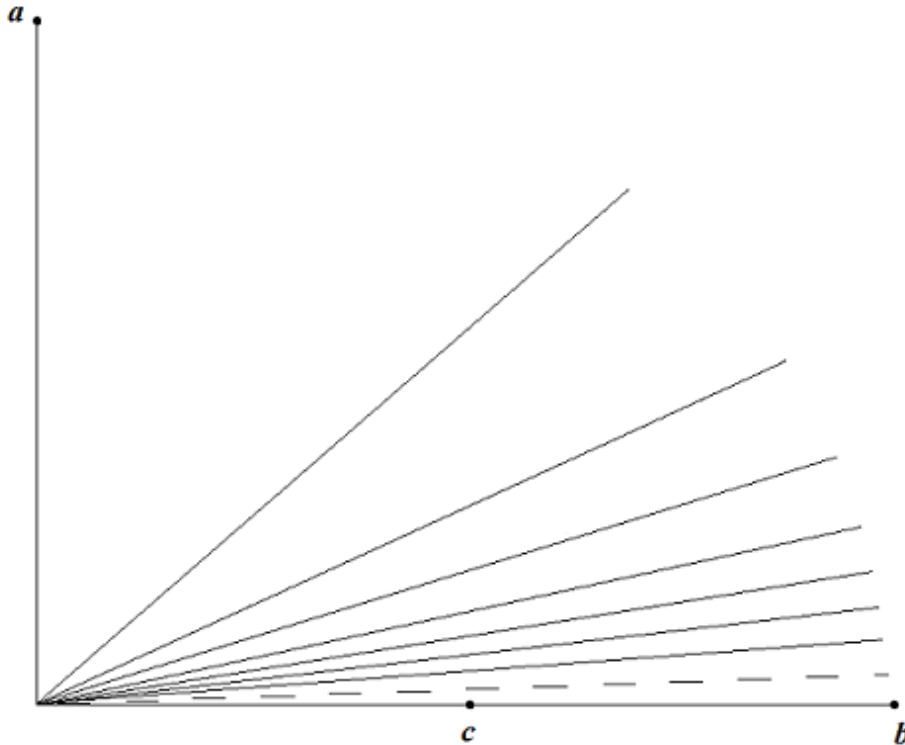


Figura 2.4: Contraejemplo

puntos $a = (0, 1)$, $b = (1, 0)$, $c = (\frac{1}{2}, 0) \in Y$ (ver figura 2.4). Nótese que cada conjunto cerrado conexo D tal que $a \in D$ y $b \in D$ contiene al conjunto $A \cup B$ y, como $c \in A \cup B$, $\{c\}$ intersecta a cada conjunto cerrado conexo que contenga a a y a b , es decir, $\{c\}$ separa débilmente a X entre a y b . Sin embargo, el subespacio $Y \setminus \{c\}$ es conexo, lo que implica que el conjunto $\{c\}$ no separa a a de b .

2.4. Cadenas simples

Definición 2.42. Sean $x, y \in X$. Una cadena simple de x a y es una colección $U_1, \dots, U_n$ de conjuntos abiertos conexos que satisface las siguientes dos condiciones:

- (a) x está únicamente en U_1 y y está únicamente en U_n ,
- (b) $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si, y sólo si, $|i - j| \leq 1$.

A cada elemento U_i de la cadena simple le llamaremos eslabón (figura 2.5).

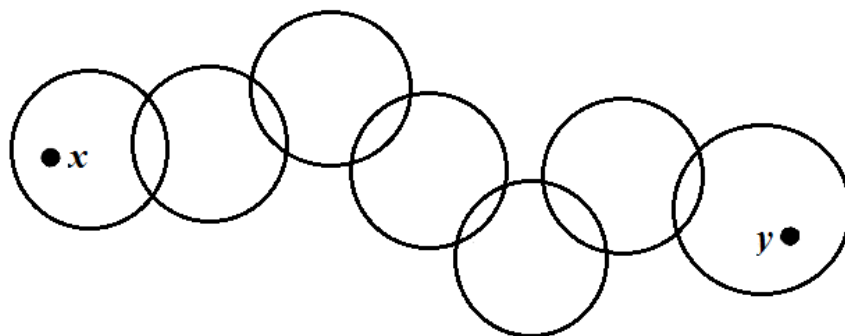


Figura 2.5: Cadena simple de x a y .

Proposición 2.43. Sea X un espacio conexo y localmente conexo. Si $x, y \in X$ y $\mathcal{U}$ es una cubierta de abiertos conexos de X , entonces existe una cadena simple de x a y formada por elementos de $\mathcal{U}$.

Demostración. Sea $Z = \{z \in X : \text{existe cadena simple } C \subseteq \mathcal{U} \text{ de } x \text{ a } z\}$. La idea es probar que el conjunto Z es un subconjunto abierto y cerrado de X y, como X es conexo, Z tiene que ser todo X . Observemos primero que Z no es vacío pues $x \in Z$. Sea $z \in Z$ y tomemos cadena simple $\{U_1, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ de x a z . Entonces, para cada $b \in U_n$ existe cadena simple de x a b , es decir, $U_n \subset Z$; de esta manera z tiene un abierto U_n que lo contiene y que está contenido en Z .

Para ver que Z es cerrado probaremos que contiene a su cerradura. Sea $z \in \overline{Z}$ y tomemos $U \in \mathcal{U}$ algún abierto que contiene a z ; como $z \in \overline{Z}$, $Z \cap U \neq \emptyset$; sea $b \in Z \cap U$ y tomemos $\{U_1, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ cadena simple de x a b . Tenemos dos casos: Si $z \in U_k$ para algunos $k \in \{1, \dots, n\}$, entonces tomamos el k más pequeño para el que $z \in U_k$ y $\{U_1, \dots, U_k\}$ es una cadena simple de x a z y así, $z \in Z$. De otro modo, si $z \notin U_k$ para $k \in \{1, \dots, n\}$, tomamos el $m \in \{1, \dots, n\}$ más pequeño para el cual $U \cap U_m \neq \emptyset$ (e.g. $m = n$) entonces, $\{U_1, \dots, U_m, U\}$ es una cadena simple de x a z ; así $z \in Z$. $\square$

Veamos en el siguiente ejemplo que la condición de conexidad local en la proposición anterior es necesaria.

Ejemplo 2.44. Consideremos al seno del topólogo y tomemos $x = (0, 0)$ y $y = (1, \sin(1))$. Entonces no existe cadena simple de x a y pues los abiertos alrededor del punto x no son conjuntos conexos (véase figura 2.4).

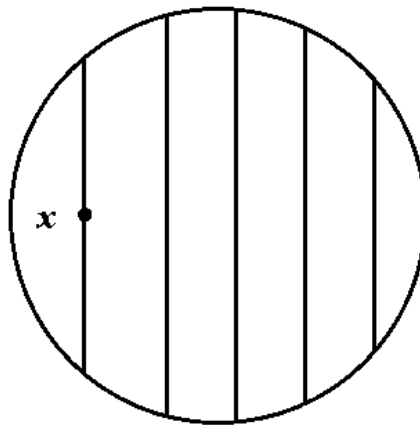


Figura 2.6: Abierto alrededor del punto $(0, 0)$

Proposición 2.45. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y conexo. Entonces cualesquiera $a, b \in U$ pueden unirse mediante una poligonal en U .

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{B_{r_\lambda}(x_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ una colección de bolas abiertas conexas de $\mathbb{R}^n$ que cubren a U y tal que cada $B_{r_\lambda}(x_\lambda) \subseteq U$. Dicha cubierta existe pues las bolas abiertas son base de $\mathbb{R}^n$. Si $x, y \in U$, por la conexidad de U y la proposición anterior, existe una cadena simple $\{B_{r_0}(x_0), \dots, B_{r_n}(x_n)\} \subset \mathcal{B}$ de x a y . Entonces la unión de los segmentos cerrados $I_i = \{tx_i + (1-t)x_{i+1} : t \in [0, 1]\}$ con $i \in \{1, \dots, n-1\}$ forma una poligonal de x a y en U . $\square$

Observación 2.46. *El teorema anterior es falso si quitamos la condición de que U sea abierto. En $\mathbb{R}^2$ consideremos el círculo unitario $U = \mathbb{S}^1$. Para cualesquiera dos puntos distintos que tomemos en U , no existe poligonal totalmente contenida en U que los una.*

Lema 2.47. *Sea X un espacio topológico conexo, localmente conexo y regular. Un conjunto cerrado C separa débilmente a X entre a y b si, y sólo si, C separa a a de b .*

Demostración. El recíproco del lema se probó en la Observación 2.40; probemos la ida. Supongamos que C intersecta a cada conjunto cerrado conexo que contiene a a y a b . Como $X \setminus C$ es un subconjunto abierto de un espacio localmente conexo, todas sus componentes son abiertas. Sea U la componente de $X \setminus C$ en la que se encuentra a . Tenemos dos casos: $b \in U$ o b está en otra componente conexa. Si $b \notin U$, entonces $X \setminus C = U \cup (X \setminus C \setminus U)$ forma una separación en abiertos para $X \setminus C$ tal que $a \in U$ y $b \in (X \setminus C \setminus U)$, es decir, C separa a a de b . Si $b \in U$, para cada punto $x \in U$ tomemos un abierto conexo V_x tal que $x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U$ (esto se puede por la regularidad X). Entonces, el conjunto $\mathcal{U} = \{V_x : x \in U\}$ es una cubierta de abiertos conexos de U y, por la Proposición 2.43, existe una cadena simple $V_1, \dots, V_n$ de a a b formada por elementos de $\mathcal{U}$, de tal manera que $\cup_{i=1}^n \overline{V_i}$ es un subconjunto cerrado conexo de $X \setminus C$ que contiene a los puntos a y b , lo cual es una contradicción, pues C separa débilmente. Así $b \notin U$ y, por tanto, C separa a a de b . $\square$

Ejemplo 2.48. *Sin la condición de que el conjunto C sea cerrado el lema anterior podría ser falso. Sean $X = \mathbb{R}^2$, $C = (-1, 1) \times \mathbb{R}$, $a = (-2, 0)$ y $b = (2, 0)$. Es claro que C separa a a de b , pues $X \setminus C = \{(-\infty, -1] \times \mathbb{R}\} \cup \{[1, \infty) \times \mathbb{R}\}$ y $(\{(-\infty, -1] \times \mathbb{R}\}, \{[1, \infty) \times \mathbb{R}\})$ es una separación tal que a y b están en abiertos distintos; sin embargo, C no separa débilmente entre a y b pues $X \setminus C$ es un cerrado que contiene a $\{a, b\}$ y que no intersecta a C .*

Lema 2.49. *Sea X un espacio topológico localmente conexo y regular. Si U es un subconjunto abierto y conexo de X , entonces cualesquiera dos puntos $a, b \in U$ están en un conjunto C cerrado, conexo y contenido en U .*

Demostración. Notemos que U es localmente conexo pues es un subconjunto abierto de un espacio localmente conexo. Además, por la regularidad de X , para cada punto $x \in U$ existe un conjunto abierto conexo V_x tal que $x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U$. Consideremos la cubierta abierta de U formada por dichos abiertos, es decir, la cubierta $\mathcal{V} = \{V_x : x \in U\}$. Aplicando el Lema 2.43 al conjunto U , para cualesquiera dos puntos $a, b \in U$, existe cadena simple $\{V_1, \dots, V_n\}$ de a a b formada por elementos de $\mathcal{V}$. Tomemos $C = \cup_{i=1}^n \overline{V_i}$ entonces, C es un cerrado, conexo, con $a, b \in C$ y $C \subset U$, tal como queríamos probar. $\square$

Proposición 2.50. *Sea X un espacio conexo, localmente conexo y regular. Si $x, y \in X$, entonces p separa a x de y si, y sólo si, cada cadena simple de x a y tiene un eslabón que contiene a p .*

Demostración. Supongamos que p separa a x de y y procedamos por contradicción, es decir, existe cadena simple $\{U_1, \dots, U_n\}$ de x a y tal que $p \notin U_i$, para $i \in \{1, \dots, n\}$. Como X es localmente conexo y regular, p separa débilmente entre x y y . Además, $U = \cup_{i=1}^n U_i$ es un subconjunto abierto, conexo y $\{x, y\} \subset U$; entonces, por la proposición anterior, existe un subconjunto cerrado conexo C que contiene a $\{x, y\}$ y $C \subset U$, de tal manera que p no intersecta a C , lo cual es una contradicción. Así, p tiene que estar en algún eslabón de la cadena simple.

Recíprocamente, supongamos que cada cadena simple de x a y tiene un eslabón que contiene a p , pero p no separa a x de y . Tenemos que x y y están en la misma componente conexa C de $X \setminus \{p\}$. Como C es localmente conexa (por ser subconjunto de X), existe cadena simple $\mathcal{U}$ de x a y totalmente contenida en C y tal que $p \notin \mathcal{U}$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por tanto, p debe separar a x de y . $\square$

2.5. Compacidad local

Definición 2.51. *Sea X un espacio topológico y sea $x \in X$. Decimos que X es localmente compacto en el punto x si existe un abierto U que contiene a x y tal que $\overline{U}$ es compacto. Decimos que X es localmente compacto si es localmente compacto en todos sus puntos.*

Ejemplo 2.52. *Recordemos que en $\mathbb{R}^n$ las bolas cerradas centradas en un punto son conjuntos cerrados y acotados, luego compactos. Por tanto, $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto. Este es un claro ejemplo de que un espacio puede ser localmente compacto y no necesariamente compacto.*

Ejemplo 2.53. *El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, con la topología de subespacio de subconjunto de $\mathbb{R}$, no es localmente compacto. En efecto, sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{Q}$. Sea $x \in \overset{\circ}{K}$. Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subset K$. Tomando cerraduras en $\mathbb{R}$ y teniendo en cuenta que K es cerrado en $\mathbb{R}$ obtenemos que $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset K \subset \mathbb{Q}$, lo cual es una contradicción. Como todos los compactos de $\mathbb{Q}$ son de interior vacío, no puede ser localmente compacto.*

Ejemplo 2.54. *Cualquier espacio topológico X con la topología discreta es un espacio localmente compacto pues las vecindades $\{x\}$ con $x \in X$ son compactas.*

Proposición 2.55. *Si X es un espacio topológico compacto, entonces X es localmente*

compacto.

Demostración. El espacio total X es un abierto que contiene a todos sus puntos y cuya cerradura es compacta. $\square$

Lema 2.56. *Sea X es un espacio topológico compacto y T_2 . Si U es un subespacio abierto, entonces U es localmente compacto.*

Demostración. Como X es compacto y T_2 , el subconjunto cerrado $\overline{U}$ es compacto, es decir, el propio U es el abierto con cerradura compacta que buscamos. $\square$

2.6. Teorema de metrización de Urysohn

En esta sección veremos resultados muy importantes en topología, entre ellos el *Lema de Urysohn* y, el teorema principal de la sección, el *Teorema de metrización de Urysohn* el cual nos dice que las condiciones suficientes para que un espacio topológico sea metrizable es que sea regular y segundo numerable. Otra prueba de este teorema se puede consultar en [7].

Teorema 2.57. (Lema de Urysohn). *Sea X un espacio normal. Si A y B son subconjuntos cerrados, disjuntos y no vacíos de X , entonces existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.*

Demostración. Primero construiremos, usando la normalidad, una cierta familia de abiertos en X indexada por los racionales en $[0, 1]$, de tal manera que se forme un “encebollado” que cubra a A y que cumpla que si $p < q$, entonces $\overline{U}_p \subset U_q$. Después se usan estos conjuntos para definir la función continua que buscamos.

Paso 1. Pongamos a todos los racionales de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ en una lista sin repeticiones $P = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$. Por simplicidad, supongamos que $q_1 = 1$ y $q_2 = 0$. Definimos por inducción a los conjuntos U_{q_n} (se puede pues P es numerable) de la siguiente manera: sea $U_1 = X \setminus B$ entonces, A es un cerrado contenido en U_1 y, por la normalidad de X , podemos tomar un abierto U_0 tal que $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset U_1$. Ahora, supongamos contruidos los primeros $U_{q_1}, U_{q_2}, \dots, U_{q_n}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ de tal forma que si $p, q \in \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ y $p < q$, entonces $\overline{U}_p \subset U_q$. Queremos definir a $U_{q_{n+1}}$ de tal manera que se siga cumpliendo la propiedad. Notemos que el conjunto $\{q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}\}$ está linealmente ordenado, su máximo es el 1 y su mínimo es el 0, además, $q_{n+1} \neq 1$ y $q_{n+1} \neq 0$, por tanto podemos tomar $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ que cumplan que q_i es el elemento máximo de $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ tal que $q_i < q_{n+1}$ y q_j el menor elemento que satisface que $q_{n+1} < q_j$ (es decir, $q_i < q_{n+1} < q_j$ y entre q_i y q_j no hay otro q_k con $k \leq n$). Por hipótesis de inducción

tenemos que $\overline{U}_{q_i} \subset U_{q_j}$ y, por la normalidad, sea $U_{q_{n+1}}$ abierto tal que:

$$\overline{U}_{q_i} \subset U_{q_{n+1}} \subset \overline{U}_{q_{n+1}} \subset U_{q_j}.$$

Veamos que el conjunto $\{U_{q_1}, U_{q_2}, \dots, U_{q_n}, U_{q_{n+1}}\}$ satisface que si $p < q$, entonces $\overline{U}_p \subset U_q$.

Sean $q_r, q_s \in \{q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}\}$, tenemos dos casos:

Caso 1. Si $r, s \in \{1, 2, \dots, n\}$, se cumple por hipótesis de inducción.

Caso 2. Sin pérdida de generalidad supongamos que $q_r = q_{n+1}$, entonces $q_s \leq q_i$ (donde q_i es el antecesor inmediato de q_{n+1}) y por tanto $q_s \leq q_i < q_{n+1}$, de donde se sigue que

$$\overline{U}_s \subset U_{q_i} \subset \overline{U}_{q_i} \subset U_{q_{n+1}}$$

o $q_j \leq q_s$ (q_j es el sucesor inmediato de q_{n+1}), en cuyo caso

$$\overline{U}_{q_{n+1}} \subset U_{q_j} \subset \overline{U}_j \subset U_{q_s}.$$

De este modo los conjuntos U_p están simplemente ordenados por la inclusión, así como sus subíndices están ordenados por el orden usual de la recta real.

Paso 2. Ya hemos definido U_q para $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Extendamos la definición para todos los racionales como sigue:

$$U_p = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } p < 0, \\ X, & \text{si } p > 1. \end{cases}$$

Notemos que se satisface que para cualesquiera $p, q \in \mathbb{Q}$, si $p < q$, entonces $\overline{U}_p \subset U_q$.

Paso 3. Definamos $f : X \rightarrow [0, 1]$ como:

$$f(x) = \inf\{q \in \mathbb{Q} : x \in U_q\}$$

Para ver que f es la función buscada veamos lo siguiente:

- f está bien definida
- $f(a) = 0$ para toda $a \in A$
- $f(b) = 1$ para toda $b \in B$
- $x \in \overline{U}_p \Rightarrow f(x) \leq p$
- $x \notin U_p \Rightarrow f(x) \geq p$

Sea $x \in X$. El conjunto $\{q \in \mathbb{Q} : x \in U_q\}$ no contiene ningún racional menor que 0 (pues $U_q = \emptyset$, si $q < 0$) y contiene a cada racional mayor que 1 (dado que $U_q = X$ para $q > 1$), es decir, está acotado inferiormente y es no vacío, por tanto, tiene ínfimo y f está bien definida.

Si $a \in A$, entonces $a \in U_q$ para toda $q \geq 0$, así $f(a) = \inf\{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\} = 0$. Si $b \in B$, entonces $b \in U_q$ para toda $q > 1$, así $f(b) = \inf\{q \in \mathbb{Q} : q > 1\} = 1$.

Sea $x \in \overline{U}_p$, entonces $x \in U_q$ para todo $q > p$, así p es cota inferior del conjunto $\{q \in \mathbb{Q} : x \in U_q\}$, por tanto, $f(x) \leq p$. Si $x \notin U_p$, tenemos que $x \notin U_q$ para todo $q > p$, así el conjunto $\{q \in \mathbb{Q} : x \in U_q\}$ no contiene algún racional menor a p , por tanto, $f(x) \geq p$.

Usaremos estos dos últimos hechos para probar la continuidad de f . Sean $x_0 \in X$ y $(a, b) \subset [0, 1]$ un abierto tal que $f(x_0) \in (a, b)$. Sean $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que $f(x_0) \in (p, q) \subset [p, q] \subset (a, b)$. Afirmamos que $U = U_q \setminus \overline{U}_p$ es el abierto buscado. Observe que $x_0 \in U$ pues el hecho de que $p < f(x_0) < q$ implica que $x_0 \in U_q$ y $x_0 \notin \overline{U}_p$. Ahora probemos que $f(U) \subset (a, b)$. Sea $x \in U$; entonces $x \in U_q \subset \overline{U}_q$ y $f(x) \leq q$ (porque $x \in \overline{U}_p \Rightarrow f(x) \leq p$). También $x \notin \overline{U}_p$, así $x \notin U_p$ y $f(x) \geq p$ (por $x \notin U_p \Rightarrow f(x) \geq p$). De esta manera, $f(x) \in [p, q] \subset (a, b)$ para todo $x \in U$. $\square$

Lema 2.58. (Teorema de inmersión). *Sea X un espacio T_0 . Si $\{f_i : X \rightarrow \mathbb{R} : i \in I\}$ es una familia de funciones continuas con la propiedad de que dado $x \in X$ y U abierto que contiene a x , existe $i \in I$ tal que $f_i(x) > 0$ y $f_i(X \setminus U) = 0$, entonces la función $f : X \rightarrow \mathbb{R}^I$ cuyas funciones coordenadas son las f_i es una inmersión.*

Demostración. En primer lugar notemos que f es continua puesto que cada f_i es continua. Para ver que es inmersión vamos a probar que f es inyectiva y abierta en la imagen.

Probemos la inyectividad. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como X es T_0 , existe U abierto tal que $x \in U$ y $y \notin U$; sea $i \in I$ tal que $f_i(x) > 0$ y $f_i(X \setminus U) = 0$; entonces $f_i(y) = 0 \neq f_i(x)$, por lo tanto, $f(x) \neq f(y)$.

Veamos que f es abierta en la imagen. Sean U abierto de X , $z_0 \in f(U)$ y $x_0 \in U$ tales que $f(x_0) = z_0$. Queremos encontrar un abierto W tal que $z_0 \in W \subset f(U)$. Tomemos $i \in I$ para el cual $f_i(x_0) > 0$ y $f_i(X \setminus U) = 0$. Como la proyección $p_i : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, el conjunto $V = p_i^{-1}(0, \infty)$ es abierto en $\mathbb{R}^I$. Afirmamos que $W = V \cap f(X)$ es el abierto buscado. Es claro que W es abierto en $f(X)$. Además $z_0 \in W$ puesto que $p_i(z_0) = p_i(f(x_0)) = f_i(x_0) > 0$. Si $z \in W$, entonces $z \in V$, así que $p_i(z) > 0$; también $z \in f(X)$, por lo cual, existe $x \in X$ con $f(x) = z$. Puesto que $0 < p_i(z) = p_i(f(x)) = f_i(x)$ y f_i es nula fuera de U , el punto x debe estar en U . Entonces $z = f(x)$ está en $f(U)$ y, por lo tanto, $W \subset f(U)$. Así podemos concluir que f es una inmersión. $\square$

Corolario 2.59 (Teorema de metrización de Urysohn). *Si X es un espacio regular y segundo numerable, entonces X es metrizable.*

Demostración. La idea es probar que X es homeomorfo a un subespacio del espacio métrico $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dotado con la topología producto.

Veamos que existe una colección numerable de funciones continuas $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ con la

propiedad de que dado cualquier punto $x_0 \in X$ y un abierto U que contenga a x_0 , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x_0) > 0$ y $f_i(X \setminus U) = 0$. Como X es regular y segundo numerable, es normal, así que podemos utilizar el lema de Urysohn para formar la colección numerable de funciones antes descrita. Sea $\beta = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para X . Por el Lema de Urysohn 2.57, para cada $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $\overline{B_n} \subset B_m$, podemos tomar una función continua $g_{n,m} : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $g_{n,m}(\overline{B_n}) = \{1\}$ y $g_{n,m}(X \setminus B_m) = \{0\}$. Así, la colección de funciones continuas $\{g_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$ satisface que dados $x_0 \in X$ y U un abierto que contiene a x_0 , podemos escoger $B_m \in \beta$ tal que $x_0 \in B_m \subset U$ y, por la regularidad de X , existe un $B_n \in \beta$ con $x_0 \in B_n \subset \overline{B_n} \subset B_m \subset U$. Por lo tanto, (n, m) es una pareja de índices para la cual la función $g_{n,m}$ satisface que $g_{n,m}(x_0) > 0$ y $g_{n,m}(X \setminus U) = \{0\}$. Como la colección de funciones $g_{n,m}$ es numerable, basta con renombrar las funciones y obtenemos nuestra colección deseada $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dada por $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x) \dots)$. Por el teorema de inmersión, f es inmersión y, por lo tanto, X es metrizable. $\square$

Capítulo 3

Teoría de Continuos

3.1. Continuos

Definición 3.1. Decimos que un espacio topológico X es un continuo si es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Empecemos viendo algunos ejemplos.

Ejemplo 3.2. El ejemplo más sencillo de continuo es el intervalo $[0, 1]$. Cualquier espacio homeomorfo a él es un continuo y recibe el nombre de arco (ver figura 3.1).

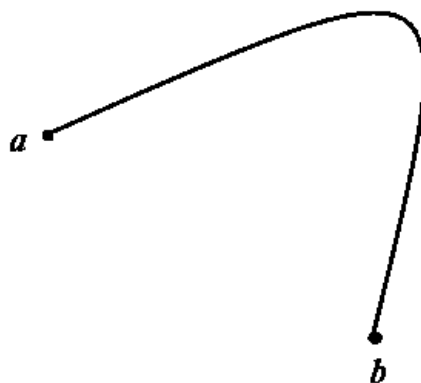


Figura 3.1: Arco

Ejemplo 3.3. La circunferencia unitaria. Está dada por el subespacio de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = 1\}.$$

Por ser un subconjunto del espacio métrico $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^1$ es un espacio metrizable; es compacto por el Teorema de Heine-Borel y es conexo por ser imagen continua del intervalo $[0, 2\pi]$ bajo la función $f(x) = (\cos x, \sin x)$. Así, $\mathbb{S}^1$ es un continuo.

Ejemplo 3.4. *La escoba topológica.* Es el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por la unión numerable de los segmentos de recta que van del punto $(0,0)$ al punto $(1, \frac{1}{n})$, con $n \in \mathbb{N}$ (ver figura 3.2). Claramente, la escoba topológica es un continuo.

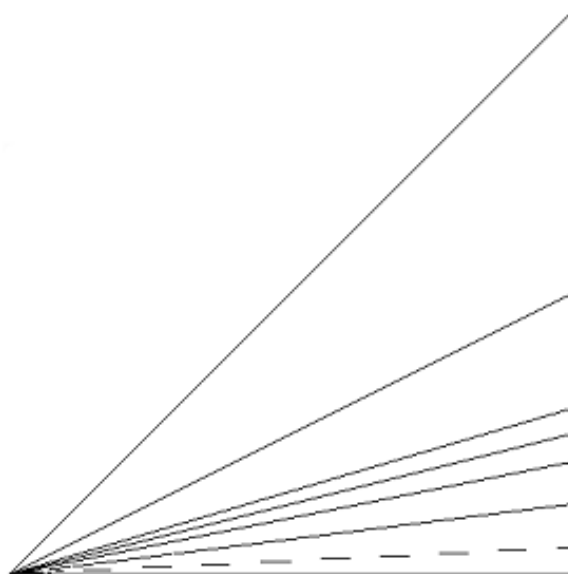


Figura 3.2: La escoba topológica

Ejemplo 3.5. *El peine topológico.* También llamado espacio peine, es el subespacio de $\mathbb{R}^2$ dotado con la topología usual dado por:

$$([0, 1] \times 0) \cup \left(\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \times [0, 1] \right) \cup (0 \times [0, 1])$$

Es otro claro ejemplo de continuo (véase figura 3.3).

Ejemplo 3.6. *Círculo de Varsovia.* Es el nombre que se le otorga a cualquier espacio homeomorfo al subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por el seno del topólogo unido con tres arcos, uno del punto $(0, -1)$ al punto $(0, -2)$, otro del punto $(0, -2)$ al $(1, -2)$ y, por último, un arco del $(1, -2)$ al $(1, \sin(1))$ (véase la figura 3.4).

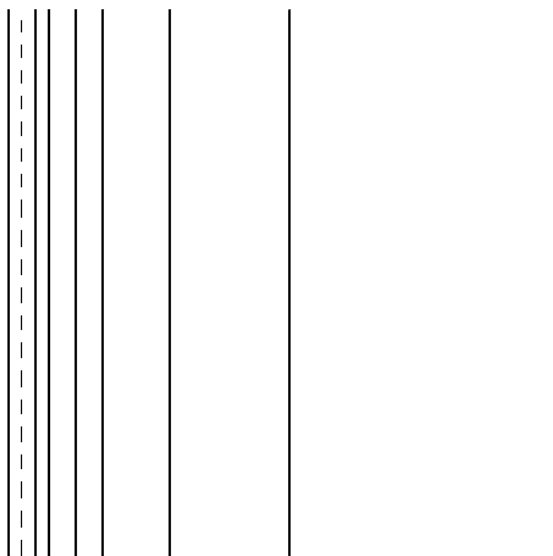


Figura 3.3: Peine topológico

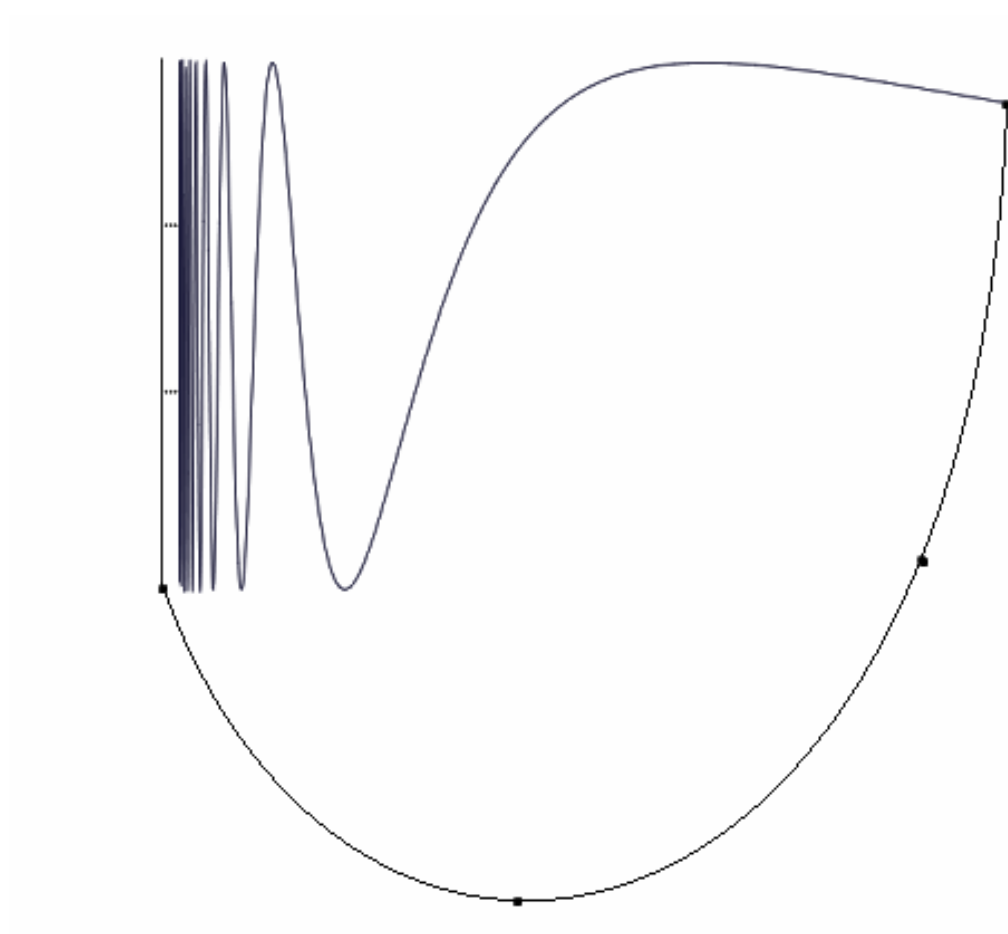


Figura 3.4: Círculo de Varsovia

Ejemplo 3.7. El espacio topológico $\mathbb{R}$ no es un continuo debido a que no es compacto.

Es válido preguntarse si la intersección de continuos es un continuo. En general, la respuesta es no, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.8. Los semicírculos unitarios $C_1 = \{e^{ix} : x \in [0, \pi]\}$ y $C_2 = \{e^{ix} : x \in [\pi, 2\pi]\}$ son continuos, pero su intersección es el conjunto disconexo (y por tanto, no continuo) $\{(-1, 0), (1, 0)\}$.

Sin embargo, una de las técnicas más utilizadas para obtener ejemplos interesantes de continuos son las intersecciones anidadas. Uno de los problemas que podría presentarse a la hora de intersectar conjuntos anidados es la conexidad; como se puede observar en el ejemplo 3.9, la intersección anidada de conjuntos conexos no es, necesariamente, conexa.

Ejemplo 3.9. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea:

$$X_n = [-1, 1] \times \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \setminus \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \{0\} \right\}$$

Obsérvese que cada X_n es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$, pero

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \left(\left[-1, -\frac{1}{2}\right] \times \{0\} \right) \cup \left(\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\} \right),$$

que no es conexo.

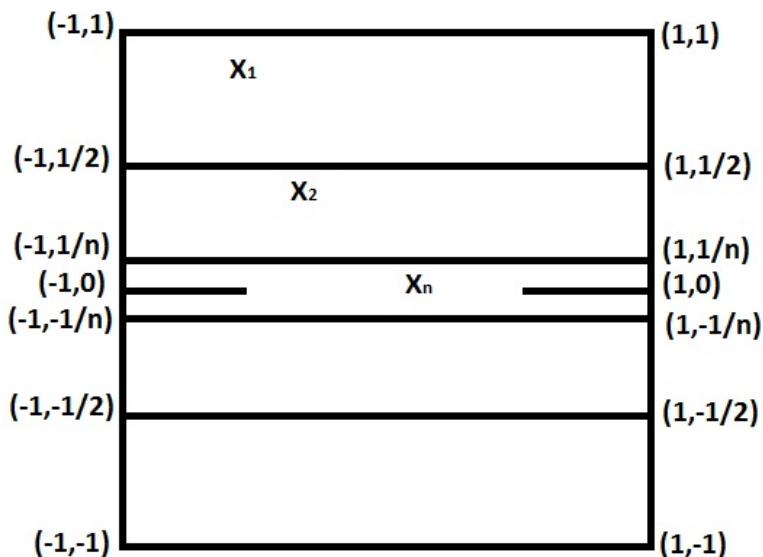


Figura 3.5: Intersección de conexos no conexa

La buena noticia es que al agregar la hipótesis de compacidad a cada uno de los intersectandos se pueden obtener resultados positivos. A continuación veremos que la intersección anidada de continuos es un continuo.

Lema 3.10. *Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de espacios métricos compactos tales que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$, y sea $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Si U es un subconjunto abierto de X_1 tal que $X \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que para toda $n \geq N$, $X_n \subset U$. En particular, si todo $X_n \neq \emptyset$, entonces X es un espacio métrico, compacto y no vacío.*

Demostración. Procedamos por contradicción. Supóngase que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X_n \setminus U$, y consideremos la sucesión $\{x_n : x_n \in X_n \setminus U\}$. Como $X_1 \setminus U$ es un subconjunto cerrado del compacto X_1 , entonces $X_1 \setminus U$ es un compacto y, por hipótesis, es métrico. De aquí se tiene que $\{x_n : x_n \in X_n \setminus U\}$ tiene una subsucesión convergente, digamos $\{x_{n_k} : n_k \in \mathbb{N}\}$, que converge a un punto $p \in X_1 \setminus U$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ y $n_k \geq j$ se tiene que $x_{n_k} \in X_j$ y así, $p \in X_j$ para todo j . Por lo tanto, $p \in X$ y, por hipótesis, $X \subset U$, de donde $p \in U$, lo que es una contradicción puesto que $p \in X_1 \setminus U$.

Por último, probemos que X es métrico, compacto y no vacío. Supongamos que $X = \emptyset$. Tomando $U = \emptyset$, se tiene que $X \subset U$ y que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N \subset \emptyset$, lo cual es una contradicción. Como X es la intersección de conjuntos cerrados, entonces X es cerrado, y además, contenido en el espacio métrico X_1 , por lo tanto X es métrico y compacto. $\square$

Proposición 3.11. *Si $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de continuos tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$, entonces $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ es un continuo.*

Demostración. Por el Lema 3.10, X es un espacio métrico, compacto y no vacío. Supongamos que X no es conexo, es decir, que existen abiertos disjuntos A, B de X tales que $A \cup B = X$. Como A y B son también cerrados (ya que cada uno es complemento del otro) y X_1 es un espacio normal, existen abiertos disjuntos no vacíos U y V en X_1 tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Sea $W = U \cup V$, entonces $X \subset U \cup V = X_1$ y, por el Lema 3.10, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N \subset W$, de donde $X_N = (X_N \cap U) \cup (X_N \cap V)$. Dado que $A \cup B = X \subset X_N$ y $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, se tiene que $X_N \cap U \neq \emptyset$ y $X_N \cap V \neq \emptyset$, pero esto implica que X_N es disconexo, lo cual es una contradicción. Así, X es conexo. $\square$

La proposición anterior nos permite construir ejemplos interesantes de continuos, como el que se muestra enseguida.

Ejemplo 3.12. *La curva universal de Sierpinski. Para construir este espacio dividamos el cuadrado $S_0 = [0, 1] \times [0, 1]$ en nueve cuadrados iguales. Sea S_1 el resultado de quitar el cuadrado interno de S , es decir, $S_1 = S \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Análogamente, sea S_2 el*

resultado de dividir en nueve cuadrados iguales a los ocho cuadrados restantes y quitarles el cuadrado interno. Continuando de la misma manera definimos $S_3, S_4, \dots$. Sea $S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$; como cada S_n es un continuo, por 3.11, S también lo es y se llama la curva universal de Sierpinski (véase figura 3.6).

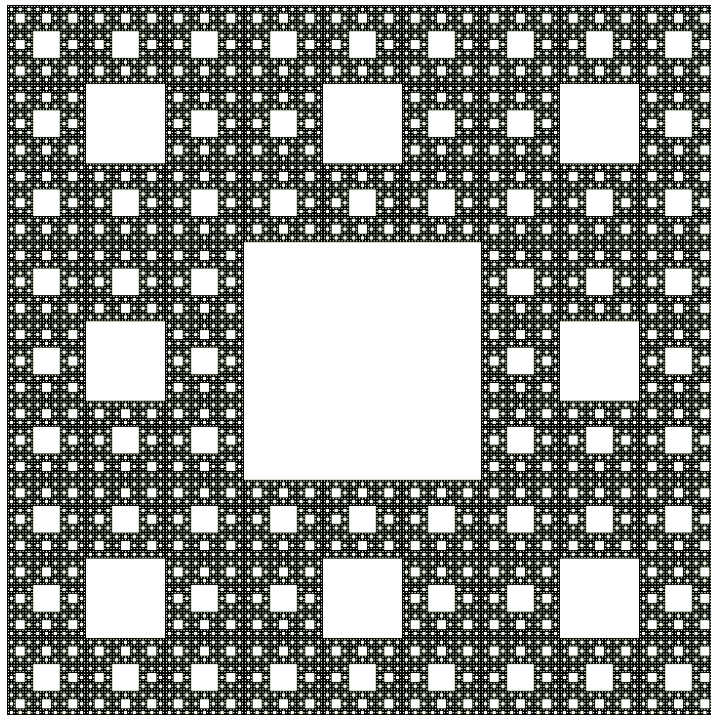


Figura 3.6: Curva universal de Sierpinski

Dado que nuestro principal objeto de estudio en esta tesis serán los continuos localmente conexos, cabe aclarar que los continuos no necesariamente son localmente conexos; a continuación se dan algunos ejemplos.

Ejemplo 3.13. *El seno del topólogo es conexo y metrizable por ser un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, compacto por ser un cerrado y acotado, por tanto, un continuo y, como vimos anteriormente, no es localmente conexo.*

Ejemplo 3.14. *El peine topológico es otro ejemplo de un continuo que no es localmente conexo; esto es debido a que si tomamos una pequeña bola situada en $(0, 1)$ no podemos encontrar un abierto dentro de ella que sea conexo y contenga al $(0, 1)$. La razón es clara: dicho abierto debe contener algún punto de la forma $(\frac{1}{n}, 1)$, el cual pertenece a una componente conexa del abierto distinta de la de $(0, 1)$, así que no puede ser conexo (véase figura 3.7).*

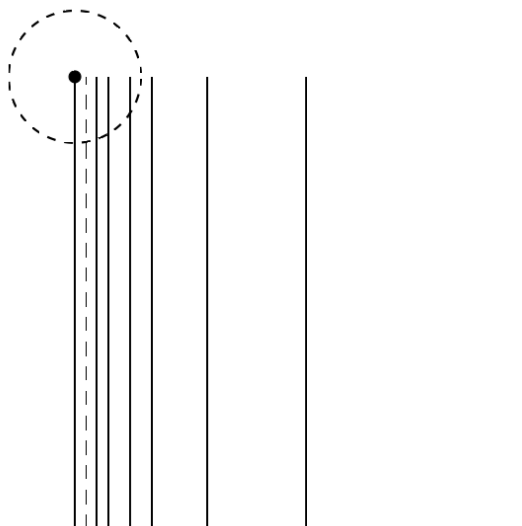


Figura 3.7: Ejemplo de continuo no localmente conexo

3.2. Puntos de corte en continuos

El resultado principal de esta sección establece que el intervalo $[0, 1]$ está caracterizado como el único continuo que tiene exactamente dos puntos que no son de corte. Otro resultado interesante de esta sección nos dice que todo continuo con más de un punto tiene al menos dos puntos que no son de corte.

Lema 3.15. *Sea X un continuo. Si $p \in X$ es un punto de corte y (U, V) es una separación en abiertos de $X \setminus \{p\}$, entonces los conjuntos $U \cup \{p\}$ y $V \cup \{p\}$ son continuos.*

Demostración. Los conjuntos $U \cup \{p\}$ y $V \cup \{p\}$ son métricos por ser subconjuntos de un continuo. Para ver que son compactos, basta ver que son cerrados en X . El espacio es T_1 ; entonces $X \setminus \{p\}$ es abierto, de tal manera que U y V también son abiertos de X . Notemos que $U \cup \{p\} = X \setminus V$ y $V \cup \{p\} = X \setminus U$ que son cerrados.

Es suficiente probar la conexidad para el conjunto $U \cup \{p\}$ (la prueba para $V \cup \{p\}$ es análoga). Definimos la función $f : X \rightarrow U \cup \{p\}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in U \cup \{p\}, \\ p, & \text{si } x \in V \cup \{p\}. \end{cases}$$

Ahora, f es una función continua, pues es continua en cada uno de los subconjuntos cerrados en los que está definida. Como X es conexo, entonces $f(X) = U \cup \{p\}$ es conexo. $\square$

Lema 3.16. Sean X un continuo, $x, y \in X$ puntos de corte distintos y $(U_x, V_x), (U_y, V_y)$ las respectivas separaciones para $X \setminus \{x\}$ y $X \setminus \{y\}$. Si $y \in U_x$, entonces $x \in V_y$.

Demostración. Supongamos que $x \notin V_y$, es decir, $x \in U_y$; entonces $V_y \cup \{y\} \subseteq X \setminus \{x\}$, de tal manera que, por ser un subconjunto conexo de $X \setminus \{x\}$, $V_y \cup \{y\} \subseteq U_x$ o $V_y \cup \{y\} \subseteq V_x$, pero $y \in U_x$ y $y \notin V_x$, entonces $V_y \cup \{y\} \subseteq U_x$. Por hipótesis, U_y y U_x están contenidos en U , así $V_y \cup U_y \subseteq U$, lo cual contradice el hecho de que es una separación de $X \setminus \{y\}$. Por tanto $x \in V_y$. $\square$

Lema 3.17. Sea X un continuo. Si $p \in X$ es un punto de corte y (U, V) es una separación de $X \setminus \{p\}$, entonces cada uno de los conjuntos U y V contiene al menos un punto que no es de corte.

Demostración. Supongamos que no, es decir, que al menos uno de los abiertos contiene sólo puntos que son de corte, digamos U . Para cada $x \in U$ sea (U_x, V_x) separación de $X \setminus \{x\}$. Notemos que dado $x \in U$, se cumple que $V \cup \{p\} \subseteq X \setminus \{x\} = U_x \cup V_x$, pues $x \notin V \cup \{p\}$, de manera que ambos conjuntos U_x y V_x no pueden intersectar a $V \cup \{p\}$ porque lo separarían. Entonces, sin pérdida de generalidad, supongamos que $U_x \cap (V \cup \{p\}) = \emptyset$, es decir, para cada $x \in U$, $U_x \subseteq U$. Sean $V = \{U_x \cup \{x\} : x \in U\}$ y $\mathcal{F}$ la familia de todas las cadenas formadas por elementos de U . Recordemos que si $A = \{U_{x_\gamma} \cup \{x_\gamma\} : \gamma \in \Gamma\}$ y $B = \{U_{x_\theta} \cup \{x_\theta\} : \theta \in \Theta\}$ son elementos de $\mathcal{F}$, entonces $A \leq B$ si, y sólo si, para cada $\gamma \in \Gamma$, $U_{x_\gamma} \cup \{x_\gamma\}$ es un elemento de la cadena B . Veamos ahora que toda cadena de elementos de $\mathcal{F}$ tiene una cota superior. Sea $C = \{C_\psi : \psi \in \Psi\}$ una cadena de elementos de $\mathcal{F}$; entonces una cota superior para C es la cadena D que cumple que para cada $\psi \in \Psi$ todos los elementos de C_ψ están en D . Aplicando *Lema de Zorn* existe un elemento maximal, en este caso, una cadena $\mathcal{C} = \{U_{x_\lambda} \cup \{x_\lambda\} : \lambda \in \Lambda\}$. Sea

$$S = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (U_{x_\lambda} \cup \{x_\lambda\}).$$

Obsérvese que S es un continuo no vacío pues es la intersección de continuos anidados. Tomemos $q \in S$ y (U_q, V_q) separación de $X \setminus \{q\}$. Tenemos que para cada $\lambda \in \Lambda$, $q \in U_{x_\lambda}$ y, por el lema anterior, $x_\lambda \in V_q$. Como $x_\lambda \in V_q$, tenemos que $U_q \cup \{q\}$ es un subconjunto conexo de $X \setminus \{x_\lambda\}$ y, por tanto, debe estar contenido en U_{x_λ} o en V_{x_λ} ; pero $q \in U_{x_\lambda}$ y $q \notin V_{x_\lambda}$; entonces $U_q \cup \{q\} \subseteq U_{x_\lambda}$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Sea $r \in U_q$ y sea (U_r, V_r) separación de $X \setminus \{r\}$. Por el lema anterior, $q \in V_r$, así $U_r \cup \{r\}$ es un subconjunto conexo de $X \setminus \{q\}$. Como $r \notin V_q$, $U_r \cup \{r\} \subseteq U_q \subseteq U_q \cup \{q\} \subseteq U_{x_\lambda} \subseteq U_{x_\lambda} \cup \{x_\lambda\}$ para cada $\lambda \in \Lambda$, entonces $r \in \mathcal{C}$ pero, como vimos, $q \notin U_r \cup \{r\}$, lo cual es una contradicción, por lo que podemos concluir que U debe tener al menos un punto de corte. $\square$

Teorema 3.18. Si X es un continuo con más de un punto, entonces X tiene al menos

dos puntos que no son de corte.

Demostración. Si X no tiene puntos de corte, no hay nada que probar. Si X tiene al menos un punto de corte x y (U, V) es una separación en abiertos de $X \setminus \{x\}$, entonces cada abierto U y V contiene al menos un punto que no es de corte por el Lema 3.17. $\square$

Denotamos por $E(a, b)$ al conjunto que contiene a los puntos a, b y todos los puntos de corte que separan a de b . En este conjunto definimos el siguiente orden:

Para $x, y \in E(a, b)$, $x \leq y$ si, y sólo si, $x = y$ o x separa a de y .

Lema 3.19. Sean $x, y \in E(a, b) \setminus \{a, b\}$ distintos. Si (U_x, V_x) y (U_y, V_y) son separaciones de $X \setminus \{x\}$ y $X \setminus \{y\}$, respectivamente, tales que $a \in (U_x \cap U_y)$ y $b \in (V_x \cap V_y)$, entonces se cumple una de las siguientes afirmaciones:

(a) Si $y \in V_x$, entonces $U_x \cup \{x\} \subseteq U_y$ y $V_y \cup \{y\} \subseteq V_x$.

(b) Si $y \in U_x$, sucede que $U_y \cup \{y\} \subseteq U_x$ y $V_x \cup \{x\} \subseteq V_y$.

Demostración. Probemos primero (a). Si $y \in V_x$, tenemos que $U_x \cup \{x\}$ es un subconjunto conexo de $X \setminus \{y\}$ de manera que debe estar contenido en U_y o en V_y . Claramente $U_x \cup \{x\} \not\subseteq V_y$ pues $a \in U_x \cup \{x\}$ y $a \notin V_y$, así $U_x \cup \{x\} \subseteq U_y$. Ahora, como $U_x \cup \{x\} \subseteq U_y$ tenemos que $(V_y \cup \{y\}) \cap (U_x \cup \{x\})$ es vacío, por tanto $V_y \cup \{y\}$ es subconjunto de V_x . Para (b) la prueba es muy similar. Como $y \in U_x$, entonces $V_x \cup \{x\}$ es un subconjunto conexo de $X \setminus \{y\}$, así que está contenido o en U_y o en V_y . Notemos que no puede estar contenido en U_y pues $b \in (V_x \cup \{x\}) \setminus U_y$, de manera que $V_x \cup \{x\} \subseteq V_y$. Para probar la otra contención observemos que, como $V_x \cup \{x\} \subseteq V_y$, se tiene que $(V_x \cup \{x\}) \cap (U_y \cup \{y\}) = \emptyset$ y, por tanto, $U_y \cup \{y\} \subseteq U_x$. $\square$

Corolario 3.20. La definición de orden en el conjunto $E(a, b)$ es simétrica, es decir, si x separa a de y , entonces y separa x de b .

Lema 3.21. El conjunto $E(a, b)$ con el orden definido anteriormente es un conjunto totalmente ordenado.

Demostración. Sean $x, y, z \in E(a, b) \setminus \{a, b\}$ todos distintos entre sí. Tomemos (U_x, V_x) separación para $X \setminus \{x\}$, (U_y, V_y) separación para $X \setminus \{y\}$ y (U_z, V_z) separación para $X \setminus \{z\}$, de manera que $a \in (U_x \cap U_y \cap U_z)$ y $b \in (V_x \cap V_y \cap V_z)$.

Primero probaremos que cualesquiera dos elementos son comparables. Como $y \in X \setminus \{x\}$, tenemos dos casos: $y \in U_x$ o $y \in V_x$. Si $y \in V_x$ ya acabamos, pues en este caso x separa a de y ($x \leq y$). Si $y \in U_x$, por el lema que acabamos de probar, $V_x \cup \{x\} \subseteq V_y$, entonces $x \in V_y$ y así, y separa a de x ($y \leq x$).

Reflexividad. Como $x = x$, $x \leq x$.

Antisimetría. Se tienen cuatro casos, de los cuales el único caso no trivial es cuando $x < y$ y $y < x$. Queremos ver que no se pueden cumplir las dos condiciones anteriores simultáneamente. Como $x < y$, tenemos que $y \in V_x$ y, por el Lema 3.19, $V_y \cup \{y\} \subseteq V_x$. Por otro lado, $y < x$ implica $x \in V_y$, por lo tanto $x \in V_y \cup \{y\} \subseteq V_x$ lo cual es una contradicción pues (U_x, V_x) es una separación de $X \setminus \{x\}$. Así, el único caso posible es $x = y$.

Transitividad. Supongamos que $x \leq y$ y $y \leq z$. Vamos a probar que $x \leq z$, y eso pasa si, y sólo si, $z \in V_x$. Como $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $y \in V_x$ y $z \in V_y$. Por el Lema 3.19, $V_y \cup \{y\} \subseteq V_x$, así $z \in (V_y \cup \{y\}) \subseteq V_x$, como queríamos probar. $\square$

Lema 3.22. *Sea X un continuo y sean $a, b \in X$. Si $E(a, b)$ tiene más de dos puntos, entonces la topología del orden está contenida en la topología de subespacio.*

Demostración. Sean $x \in E(a, b) \setminus \{a, b\}$ y sea (U_x, V_x) separación de $X \setminus \{x\}$ tal que $a \in U_x$ y $b \in V_x$. Veamos que los subbásicos

$$(x, \infty) = \{p \in E(a, b) : p > x\} = \{p \in E(a, b) : p \text{ separa } a \text{ de } x\} \text{ y}$$

$$(-\infty, x) = \{p \in E(a, b) : p < x\} = \{p \in E(a, b) : x \text{ separa } a \text{ de } p\},$$

de la topología del orden en $E(a, b)$, son abiertos de la topología de subespacio. Para ver esto vamos a probar que:

$$(a) \quad (-\infty, x) = \{p \in E(a, b) : p < x\} = U_x \cap E(a, b).$$

$$(b) \quad (x, \infty) = \{p \in E(a, b) : p > x\} = V_x \cap E(a, b).$$

Probaremos sólo el inciso (a); para el inciso (b) la prueba es análoga. Sea $p \in E(a, b)$ tal que $p < x$. Como $p < x$, $x \in V_p$ y, por el Lema 3.19, $U_p \cup \{p\} \subseteq U_x$, de ahí se tiene que $p \in U_x$ y, por tanto, $p \in E(a, b) \cap U_x$. Probemos ahora la otra contención; sea $p \in E(a, b) \cap U_x$; por el Lema 3.19 tenemos que $V_x \cup \{x\} \subseteq V_p$, entonces $x \in V_p$, es decir, p separa a de x ($p < x$). Así, $(-\infty, x) = \{p \in E(a, b) : p < x\} = U_x \cap E(a, b)$ que es un abierto en la topología de subespacio. $\square$

Proposición 3.23. *Si X es un continuo con exactamente dos puntos $a, b \in X$ que no son de corte, entonces $E(a, b) = X$ y la topología de X coincide con la topología del orden.*

Demostración. Sea $y \in X \setminus \{a, b\}$. Entonces existe (U_y, V_y) separación en abiertos de $X \setminus \{y\}$. Por el Lema 3.17, cada uno de los abiertos contiene al menos un punto de corte, lo cual implica que $y \in E(a, b)$ y, por tanto, $X = E(a, b)$.

Sabemos que la topología del orden está contenida en la topología de X , sólo falta ver que la topología de X está contenida en la topología del orden. Sea U abierto en X y $x \in U$. Supongamos que U no es abierto en la topología del orden, en otras palabras, para

todo intervalo (r, s) tal que $x \in (r, s)$ se tiene que (r, s) intersecta a $X \setminus U$. Consideremos la familia de todos los conjuntos $[r, s] \cap (X \setminus U)$ tales que $x \in (r, s)$. Cada uno de estos conjuntos es cerrado en X pues $X \setminus U$ es cerrado y $[r, s]$ es cerrado en la topología del orden que está contenida en la topología de X . Además, dicha la familia tiene la PIF ya que si nos tomamos cualquier colección finita $[r_i, s_i]$, $i = 1, \dots, n$, con $x \in (r_i, s_i)$, entonces $\bigcap_{i=1}^n [r_i, s_i] \cap (X \setminus U)$ no puede ser vacía, puesto que si fuera vacía, el intervalo $(r = \max\{r_i : i = 1, \dots, n\}, s = \min\{s_i : i = 1, \dots, n\})$ cumple que $x \in (r, s) \subset U$, lo que contradice nuestra suposición. Por el Lema 1.46, tenemos que:

$$\bigcap_{x \in (r, s)} [r, s] \cap (X \setminus U) \neq \emptyset.$$

Ahora, veamos que $\bigcap_{x \in (r, s)} [r, s] = \{x\}$. Sea $A = \bigcap_{x \in (r, s)} [r, s]$. Es claro que $\{x\} \subseteq A$. Para ver que $A \subseteq \{x\}$, supongamos que no y tomemos $y \in A$ tal que $y \neq x$. Afirmamos que existe $r \in X$ tal que $y < r < x$. Tenemos dos casos. Si $x \notin \{a, b\}$, entonces $y < x$ o $y > x$; sin pérdida de generalidad, sea $y < x$. Si no existe r tal que $y < r < x$, se tiene que $((-\infty, x), (y, \infty))$ forma una separación para X , lo que contradice la conexidad de X . Si $x \in \{a, b\}$, entonces $x = a$ o $x = b$. Supongamos sin pérdida de generalidad $x = a$ y que no existe r tal que $x < r < y$; así $(-\infty, y) = \{a\}$ es abierto y ya era cerrado, lo cual es una contradicción a la conexidad de X . De esta manera, en cualquier caso existe r tal que $y < r < x$. Así, el intervalo (r, b) es tal que $x \in (r, b)$, pero $y \notin [r, b]$. Por tanto $A \subseteq \{x\}$. Así

$$\bigcap_{x \in (r, s)} [r, s] \cap (X \setminus U) = \emptyset,$$

lo que es una contradicción. □

Definición 3.24. *El conjunto de los números racionales diádicos en el intervalo $(0, 1)$ (que denotaremos por P) es el conjunto definido por los números racionales que son de la forma $\frac{k}{2^n}$ con $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$ y sin repeticiones, es decir,*

$$P = \left\{ \frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \dots \right\}$$

Lema 3.25. *El conjunto P tiene las siguientes propiedades:*

(a) *P no tiene máximo ni mínimo,*

(b) *Si $p, q \in P$ y $p < q$, entonces existe $r \in P$ tal que $p < r < q$.*

Demostración. Supongamos que P sí tiene mínimo. Sea $p = \min P = \frac{k}{2^n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$. Basta con tomar $q = \frac{1}{2^{n+1}}$, entonces $q \in P$ y claramente, $q < p$, lo cual no es posible pues p era el mínimo.

Análogamente, supongamos que P sí tiene máximo. Sea $p = \max P = \frac{k}{2^n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$. Sabemos que:

$$k + \frac{1}{2} > k.$$

Realizando la suma tenemos que:

$$\frac{2k+1}{2} > k.$$

Multiplicando la desigualdad anterior por $\frac{1}{2^n}$; obtenemos

$$\frac{2k+1}{2^{n+1}} > \frac{k}{2^n}.$$

Como $k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$, se tiene que $\frac{2k+1}{2^{n+1}} \in P$ y es mayor que p , lo cual es una contradicción. De lo anterior podemos concluir que, efectivamente, P no tiene máximo ni mínimo.

Para probar la parte (b) basta con tomar la media en cada uno de los casos. Sean $p = \frac{a}{2^n}, q = \frac{b}{2^m} \in P$, con $n, m \in \mathbb{N}$, $a \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$ y $b \in \{1, \dots, 2^m - 1\}$, y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $p < q$.

Caso 1. Si $n = m$,

$$r = \frac{a+b}{2^{n+1}}.$$

Caso 2. Si $n > m$,

$$r = \frac{a + 2^{n-m}b}{2^{n+1}}.$$

Caso 3. Si $m > n$,

$$r = \frac{2^{m-n}a + b}{2^m + 1}.$$

En cada uno de los casos, r cumple que es un elemento de P y $p < r < q$, como queríamos probar. $\square$

Lema 3.26. Sea A un conjunto numerable y totalmente ordenado que cumple las dos condiciones siguientes:

(a) No tiene máximo ni mínimo.

(b) Si $p, q \in A$ y $p < q$, entonces existe $r \in A$ tal que $p < r < q$.

Entonces existe un isomorfismo de orden entre A y P (el conjunto de los racionales diádicos en el $(0, 1)$).

Demostración. Numeremos los elementos de $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ de tal manera que $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. Definamos $f : A \rightarrow P$ tal que $f(a_1) = \frac{1}{2}$ y sean n_1 y n_2 los primeros enteros que satisfacen que $a_{n_1} < a_1 < a_{n_2}$ (ambos existen por la condición (a)). Sean $f(a_{n_1}) = \frac{1}{2^2}$ y $f(a_{n_2}) = \frac{3}{2^2}$, es decir, al elemento a_{n_1} le asociamos el primer racional que aparezca en

P que no haya sido asignado y que satisfaga que es menor que $\frac{1}{2} = f(a_1)$, y al elemento a_{n_2} le asociamos el primer racional que aparezca en P que no haya sido asignado y que cumpla que es mayor que $\frac{1}{2} = f(a_1)$. Ahora, sean n_3, n_4, n_5 y n_6 los primeros enteros que satisfacen que $a_{n_3} < a_{n_1} < a_{n_4} < a_1 < a_{n_5} < a_{n_2} < a_{n_6}$, la existencia de n_3 y n_6 queda garantizada por la condición (a) y la existencia de n_4 y n_5 por la condición (b). Es decir, la asociación es como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} a_1 &\mapsto \frac{1}{2} \\ a_{n_1} &\mapsto \frac{1}{2^2} \\ a_{n_2} &\mapsto \frac{3}{2^2} \\ a_{n_3} &\mapsto \frac{1}{2^3} \\ a_{n_4} &\mapsto \frac{3}{2^3} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Veamos que f preserva el orden. Sean $a_j, a_k \in A$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a_j < a_k$. Si $f(a_j) = p$ para algún $p \in P$, por como definimos la función, se tiene que $f(a_k) = q$, donde q es algún elemento (puede no ser el primero) de P tal que $p < q$. Sólo nos resta probar que f es biyectiva.

Inyectividad: Sean a_j y a_k elementos distintos de A . Sin pérdida de generalidad supongamos que $a_j < a_k$, como f preserva el orden, $f(a_j) < f(a_k)$.

Suprayectividad: Por la construcción de la función f , todos los elementos de P tienen una preimagen puesto que vamos tomando el siguiente primer elemento en P que satisface alguna de las desigualdades y todos satisfacen alguna, pues P es totalmente ordenado. $\square$

Ejemplo 3.27. Como $\mathbb{Q}$ satisface las condiciones (a) y (b), tenemos que existe un isomorfismo de orden entre P y $\mathbb{Q}$ y, por transitividad, existe un isomorfismo de orden entre $\mathbb{Q}$ y cualquier conjunto totalmente ordenado que satisfaga (a) y (b)

Definición 3.28. En $\mathbb{R}$, decimos que (A, B) es una cortadura de Dedekind si satisface que:

- (a) A y B son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Q}$
- (b) para todo $a \in A$ y $b \in B$, tenemos que $a < b$
- (c) A no tiene máximo.

Resulta que el conjunto de los números reales es la colección de todas las cortaduras de Dedekind, es decir, cada número real puede ser representado por una cortadura de Dedekind y dos números reales son iguales si, y sólo si, tienen la misma cortadura.

Teorema 3.29. *Si X es un continuo con exactamente dos puntos que no son de corte, entonces X es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.*

Demostración. Sean $a, b \in X$ los únicos puntos en X que no son de corte. De acuerdo con el Lema 3.23, $X = E(a, b)$ y, más aún, X tiene la topología del orden inducido por el orden de separación. Por ser X un espacio métrico compacto, podemos tomar $D \subset X$ denso y numerable que no contiene a los puntos que no son de corte a y b .

Veamos que D satisface las hipótesis del Lema 3.26, es decir:

- (a) D no tiene máximo ni mínimo.
- (b) Si $p, q \in D$ con $p < q$, entonces existe $r \in D$ tal que $p < r < q$.

Para probar (a) procederemos por contradicción. Sea $d = \min D$. Por la densidad de D , tenemos que $(a, d) \cap D \neq \emptyset$, y entonces existe $d' \in (a, d)$ tal que $d' < d$, lo cual es un absurdo pues d era el mínimo. Análogamente, sea $e = \max D$. Entonces, $(e, b) \cap D \neq \emptyset$ y, por tanto, existe $e' \in D$ tal que $e' > e$, lo cual es también una contradicción. Así, D no tiene un elemento máximo, ni mínimo.

Ahora probemos la parte (b). Como el conjunto (p, q) es un abierto en X y D es denso, se tiene que $(p, q) \cap D \neq \emptyset$, y entonces existe $r \in D$ tal que $p < r < q$.

Así, por el Lema 3.26, tenemos que existe un isomorfismo de orden $f : D \rightarrow \mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Nos gustaría extender el isomorfismo de orden f a un homeomorfismo $F : X \rightarrow [0, 1]$. Definimos $F(x) = f(x)$ para todo $x \in D$, $F(a) = 0$ y $F(b) = 1$. Si $x \in X \setminus D$ y $a \neq x \neq b$, entonces x es un punto de corte de X , esto es, existe separación (U_x, V_x) de $X \setminus \{x\}$; notemos que si $u \in U_x$ y $v \in V_x$, entonces u separa a de v , es decir, $u < v$. Veamos que $f(U_x \cap D)$ y $f(V_x \cap D)$ forman una cortadura de Dedekind en el $[0, 1]$. Como $U_x \cap D$ y $V_x \cap D$ son disjuntos y f es una función biyectiva, se tiene que $f(U_x \cap D)$ y $f(V_x \cap D)$ son disjuntos y su unión es:

$$f(U_x \cap D) \cup f(V_x \cap D) = f((U_x \cup V_x) \cap D) = f((X \setminus \{x\}) \cap D) = f(D) = \mathbb{Q} \cap (0, 1).$$

Además, por ser f un isomorfismo de orden, si $u \in f(U_x \cap D)$ y $v \in f(V_x \cap D)$, entonces $u < v$, por lo tanto, $f(U_x \cap D)$ y $f(V_x \cap D)$ forman una cortadura de Dedekind. Dicha cortadura determina un único elemento en $(0, 1)$ que asignaremos como $F(x)$. Así, F está bien definida, es un isomorfismo de orden y, por lo tanto, un homeomorfismo entre X y $[0, 1]$. $\square$

Capítulo 4

Continuos de Peano

Como sabemos, los continuos no necesariamente son espacios localmente conexos; cuando lo son reciben el nombre de **Continuos de Peano**.

Definición 4.1. *Un espacio topológico X es un continuo de Peano si es métrico, compacto, conexo y localmente conexo.*

Ejemplo 4.2. *Los arcos son los ejemplos más sencillos de continuos de Peano.*

Ejemplo 4.3. *La n -esfera en $\mathbb{R}^{n+1}$. Está definida como el conjunto:*

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\},$$

y es un continuo de Peano, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 4.4. *Las n -celdas. Consideremos el espacio euclideo $\mathbb{R}^n$. Para cada punto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sea $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Entonces, una n -celda es un espacio homeomorfo a la n -bola cerrada:*

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}.$$

La n -celda es un continuo de Peano, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 4.5. *El cubo de Hilbert. Es un espacio topológico homeomorfo al producto numerable del intervalo $[0, 1]$ dotado con la topología producto. Se le denota por $[0, 1]^\omega$. Los elementos de $[0, 1]^\omega$ son sucesiones infinitas de la forma $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ donde $x_i \in [0, 1]$ para $i \in \mathbb{N}$. Como $[0, 1]^\omega$ es producto numerable de espacios conexos y compactos, tenemos que $[0, 1]^\omega$ mismo es conexo y compacto. Más aún, el cubo de Hilbert es metrizable con la*

métrica p definida por:

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x_i - y_i|.$$

En [8] se prueba que el producto de espacios localmente conexos es localmente conexo si, y sólo si, cada espacio es localmente conexo y todos, excepto una cantidad finita de ellos, son conexos; por lo tanto, el cubo de Hilbert es un continuo de Peano.

Ejemplo 4.6. *El toro topológico. Se define como el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por el producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Es otro continuo de Peano.*

Ejemplo 4.7. *El espacio Peine 3.5 y la escoba topológica 3.4 son continuos que no son continuos de Peano, puesto que no son localmente conexos.*

4.1. Arco-conexidad en continuos de Peano

Sabemos que un espacio conexo y localmente conexo tiene la propiedad de que cualesquiera dos de sus puntos pueden unirse por una cadena simple de conjuntos abiertos y conexos (Proposición 2.43). Una cadena simple puede considerarse como una aproximación a un arco. Uniendo dos puntos con cadenas simples cada vez más finas, deberíamos acercarnos más y más a un arco. Hay varias razones por las cuales la construcción podría fallar. Primero, si las cadenas simples no están relacionadas de alguna manera, su límite podría no ser un continuo. Para evitar esto, podríamos pedir que los eslabones de cada cadena sucesiva estén contenidos en su predecesor pero, incluso con esta precaución, la intersección de todas las cadenas podría no ser un arco (ver ejemplo 4.2), que es la base de la construcción del llamado *pseudoarco*, continuo que cumple la propiedad de que no se puede poner como la unión de dos subcontinuos propios. Finalmente, puede pasar que la intersección de las cadenas simples dejen fuera algunos puntos necesarios para formar un arco; para ilustrar esto véase el ejemplo 4.8.

Ejemplo 4.8. *Consideremos el espacio topológico $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$. Definimos las cadenas simples del punto $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ como sigue:*

$$C_1 = \{B_1((-1, 0)), B_1((0, 0)), B_1((1, 0))\},$$

en general, para $n \in \mathbb{N}$

$$C_n = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(k/n, 0) : k \in \mathbb{Z}, -n \leq k \leq n \right\}.$$

Entonces, la intersección de las cadenas simples no será un arco debido a que los puntos del eje x con coordenadas irracionales no pertenecen al espacio (ver figura 4.1).

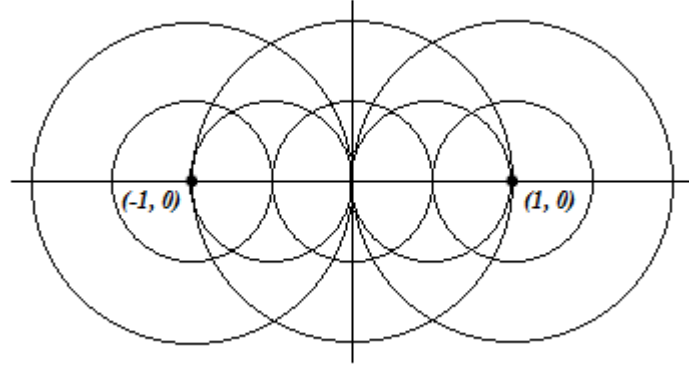


Figura 4.1: Aproximación a un arco por medio de cadenas simples

Definición 4.9. Sean $x, y \in X$, con X espacio topológico. Si $C_1 = \{U_{1,1}, \dots, U_{1,n_1}\}$ y $C_2 = \{U_{2,1}, \dots, U_{2,n_2}\}$ son cadenas simples de x a y , decimos que la cadena C_2 refina a C_1 si cumple las dos condiciones siguientes:

- (a) Cada conjunto $U_{2,i} \in C_2$ está contenido en algún conjunto $U_{1,j}$ de C_1 .
- (b) Sean $U_{2,i}, U_{2,k} \in C_2$ con $i < k$. Si ambos están contenidos en algún $U_{1,r}$ de C_1 , entonces para cada entero j con $i < j < k$, se tiene que $U_{2,j}$ también está contenido en $U_{1,r}$.

La figura 4.1 muestra un claro ejemplo de una cadena que refina a otra. Por otro lado, la figura 4.2 muestra ejemplo de una cadena que no refina a otra.

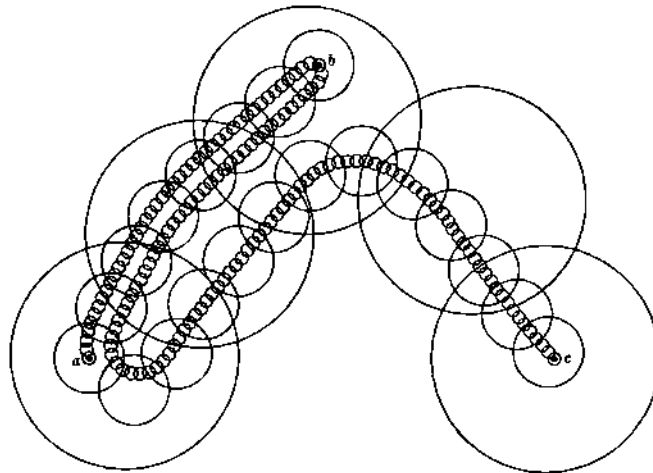


Figura 4.2: Contraejemplo

Lema 4.10. Sean X un espacio conexo, localmente conexo y Hausdorff, y sean $a, b \in X$. Si C es una cadena simple $U_1, \dots, U_n$ de a a b y $\mathcal{U}$ es una colección de conjuntos abiertos tal que cada U_i es unión de elementos de $\mathcal{U}$, entonces existe una cadena simple de elementos de $\mathcal{U}$ de a a b que refina a C .

Demostración. Sean $x_0 = a$, $x_n = b$. Para cada $i = 1, \dots, n - 1$, tomemos $x_i \in U_i \cap U_{i+1}$. Como cada U_i es conexo y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de U_i , por la Proposición 2.43, existe una cadena simple C_i de x_{i-1} a x_i formada por elementos de $\mathcal{U}$. La unión de todos los eslabones de cada cadena C_i es una cadena, pero no necesariamente simple, pues puede pasar que un eslabón intersekte a otros no contiguos a él. Sin embargo, dicha unión sí contiene una cadena simple que refina a C . Para construirla, tomemos en C_1 el primer eslabón V_i que intersekte a un eslabón de C_2 y en C_2 tomemos el último eslabón W_j que intersekte a V_i (véase figura 4.3). Desechamos los eslabones que están después de V_i y antes de W_j . Repitiendo el proceso para cada i , obtenemos la cadena simple deseada. $\square$

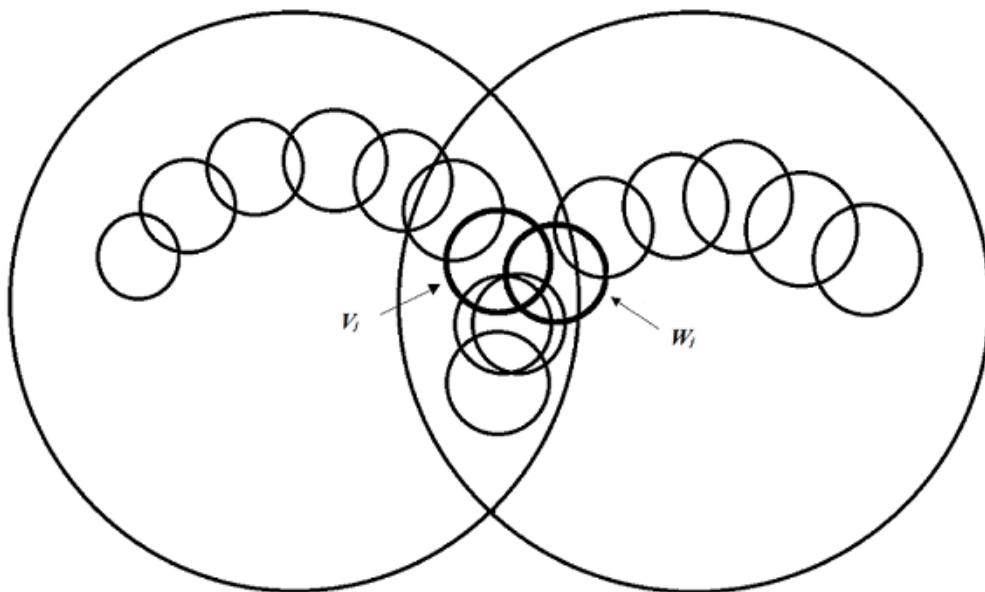


Figura 4.3: Cadena simple

Teorema 4.11. Si X un espacio topológico localmente compacto, conexo, localmente conexo y métrico, entonces X es arco-conexo.

Demostración. Sean x y y dos elementos de X . Por Lema 2.43 podemos tomar una cadena simple $C_1 = \{U_{1,1}, \dots, U_{1,n_1}\}$ de x a y compuesta por conjuntos abiertos, conexos y tal

que cada $U_{1,i}$ tiene diámetro menor a 1 y su cerradura es compacta (se puede pues X es localmente compacto). Notemos que, por la regularidad de X , para cada punto en $U_{1,i}$ existe un subconjunto abierto, conexo, con diámetro menor que $\frac{1}{2}$ y cuya cerradura está contenida en $U_{1,i}$. Si el punto está en alguna intersección $U_{1,i} \cap U_{1,i+1}$, entonces escogemos el abierto de diámetro menor a $\frac{1}{2}$ de tal manera que su cerradura esté contenida en la intersección. Así, dichos conjuntos de diámetro menor a $\frac{1}{2}$ cubren a los elementos de C_1 y, por Lema 2.43, existe una cadena simple $C_2 = \{U_{2,1}, \dots, U_{2,n_2}\}$ de conjuntos abiertos de diámetro menor a $\frac{1}{2}$ que une los puntos x y y y que refina a C_1 . Análogamente, construimos la cadena simple $C_3 = \{U_{3,1}, \dots, U_{3,n_3}\}$ de x a y , tal que cada $U_{3,i}$ tiene diámetro menor que $\frac{1}{3}$, $\overline{U_{3,i}}$ está contenida en algún eslabón de C_2 y C_3 refina a C_2 . Sucesivamente podemos construir $C_4, C_5, \dots$ cadenas simples.

Definimos, para cada $j \in \mathbb{N}$:

$$K_j = \overline{U_{j,1}} \cup \dots \cup \overline{U_{j,n_j}}$$

Veamos que para cada $j \in \mathbb{N}$ se cumple que:

(a) $K_{j+1} \subset K_j$ y

(b) K_j es un continuo

(a) Si $x \in K_{j+1} = \overline{U_{j+1,1}} \cup \dots \cup \overline{U_{j+1,n_{j+1}}}$, entonces $x \in \overline{U_{j+1,k}}$ para algún $k \in \{1, \dots, n_{j+1}\}$ y, por construcción, $\overline{U_{j+1,k}} \subset U_{j,i}$ para algún $i \in \{1, \dots, n_{j,n_j}\}$, así $x \in U_{j,i} \overline{U_{j,i}} \subset K_j$. Por lo tanto, $K_{j+1} \subset K_j$.

(b) Para cada $j \in \mathbb{N}$, se tiene que K_j es no vacío y métrico (pues es un subconjunto del espacio métrico X). Es claro que K_j es conexo debido a que cada $U_{j,i}$ es conexo y $U_{j,i} \cap U_{j,i+1} \neq \emptyset$. Para probar la compacidad primero notemos que K_1 es compacto por ser una unión finita de conjuntos compactos que tomamos convenientemente para formar la cadena C_1 . Ahora, cada K_j es cerrado pues es una unión finita de conjuntos cerrados y, por (a), $K_j \subset K_1$, por consiguiente, K_j es compacto. Sea

$$K = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} K_j.$$

Entonces, K es un continuo puesto que es una intersección anidada de continuos no vacíos (Proposición 3.11). Además, $\{x, y\} \subset K$, ya que $\{x, y\} \subset K_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Veamos que los únicos puntos que no son de corte de K son x y y . Sea $k \in K \setminus \{x, y\}$. Entonces, para cada $j \in \mathbb{N}$, k puede estar en uno o dos eslabones $U_{j,i}$ que pertenecen a la cadena C_j . Tomemos A_j como la unión de todos los eslabones que están antes de los eslabones (o eslabón) que contienen a k y tomemos a B_j como la unión de todos los eslabones que están después de los eslabones (o eslabón) que contienen a k . Definimos:

$$A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A_j \cap K) \text{ y } B = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (B_j \cap K)$$

Es claro que (A, B) es una separación puesto que son disjuntos, no vacíos (al menos $x \in A$ y $y \in B$), abiertos relativos en K y cualquier punto de $K \setminus \{k\}$ está en A o está en B . Por lo tanto, todos los puntos de $K \setminus \{x, y\}$ son de corte y K tiene únicamente dos puntos que no son de corte, x y y . Por Teorema 3.29, K es homeomorfo a $[0, 1]$, es decir, K es un arco de x a y y con esto concluimos que X es arco-conexo. $\square$

Notemos que en la prueba del teorema anterior sólo se usó la compacidad local para constriuir la primera cadena simple de tal manera que K_1 fuera compacto y, por (a), todos los siguientes K_j también fueran compactos. Así, si en lugar de compacidad local tenemos compacidad y todas las demás hipótesis, la prueba es básicamente la misma.

Corolario 4.12. *Si X es un continuo de Peano, entonces X es arcoconexo.*

Demostración. Se sigue directamente del Lema 2.55 y el Teorema 4.11. $\square$

Corolario 4.13. *Sea X un continuo de Peano. Si U es un subconjunto abierto y conexo de X , entonces U es arcoconexo.*

Demostración. Notemos que U es métrico, conexo, localmente conexo (por ser un subconjunto abierto de un localmente conexo) y, por Lema 2.56, tenemos que X localmente compacto. Así, por el Teorema 4.11, X es arcoconexo. $\square$

4.2. Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Antes de probar el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz vamos a dar un bosquejo de la prueba del *Teorema de Alexandroff-Hausdorff*, el cual describe una característica del conjunto de Cantor que le otorga un papel muy importante dentro de la teoría de espacios compactos. El nombre del teorema se debe a que fueron Alexandroff y Hausdorff los matemáticos que dieron la primera prueba del teorema de forma paralela e independiente. Lo que afirma el teorema es que existe una función continua y suprayectiva del conjunto de Cantor en cualquier espacio topológico métrico y compacto. La prueba completa del teorema y de los resultados que aquí usamos se pueden ver en [2] y [1].

Sistemas y Límites inversos

En esta sección se van a introducir los conceptos de sistema y límite inverso, y se enunciarán algunos resultados que necesitaremos. Sin embargo, para nuestro propósito sólo definiremos el caso particular en el que el conjunto dirigido es $\mathbb{N}$ y los conjuntos son espacios topológicos, lo que nos simplifica las cosas, pues al considerar colecciones numerables de espacios topológicos, los sistemas inversos pueden ser representados como una secuencia lineal de funciones entre espacios topológicos. En cualquier caso, el límite

inverso es un subconjunto del espacio producto.

Definición 4.14. Sea $X_0, X_1, X_2, \dots$ una colección numerable de espacios topológicos, y para cada $n > 0$ sea f_n una función continua de X_n en X_{n-1} . La secuencia de espacios y funciones continuas $\{X_n, f_n\}$ se llama sistema inverso y puede ser representado por el siguiente diagrama:

$$X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{f_2} X_2 \xleftarrow{f_3} \dots \xleftarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \xleftarrow{f_n} X_n \xleftarrow{f_{n+1}} \dots$$

El límite inverso es el subconjunto de $\prod X_n$ definido como:

$$X_\infty = \{(x_0, x_1, \dots) : f(x_n) = x_{n-1}, n > 0\}$$

Ejemplo 4.15. Sean $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ la función que a cada $x \in X_n$ le asocia $x \in X_{n-1}$. Entonces

$$X_\infty = \{(x_0, x_1, \dots) : x_n = x_{n-1}\} = \left\{ (x_0, x_1, \dots) : x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \right\}.$$

En este caso X_∞ es homeomorfo a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

El ejemplo anterior nos dice que las intersecciones anidadas se pueden ver como límites inversos. En particular el conjunto de Cantor es el límite inverso de los espacios C_n definidos en el ejemplo 2.9.

Definición 4.16. Sean $\{X_n, f_n\}$ y $\{Y_n, g_n\}$ secuencias de límites inversos. Una función $\Phi : \{X_n, f_n\} \rightarrow \{Y_n, g_n\}$ es una secuencia $\{\varphi_n\}$ de funciones $\varphi_n : X_n \rightarrow Y_n$ tales que, para cada $n > 0$, $\varphi_{n-1} \circ f_n = g_n \circ \varphi_n$. Decimos que Φ es continua si, y sólo si, cada φ_n es continua; se dice que Φ es suprayectiva si, y sólo si, cada φ_n es suprayectiva. La función inducida $\varphi : X_\infty \rightarrow Y_\infty$ está definida por:

$$\varphi(x_0, x_1, \dots) = (\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), \dots).$$

Es claro que φ está bien definida. Además, se tiene el siguiente lema.

Lema 4.17. Si Φ es continua, entonces la función inducida φ es continua.

Lema 4.18. Sean X_n y Y_n espacios Hausdorff compactos, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si Φ es suprayectiva, entonces φ es suprayectiva.

Lema 4.19. Sea X un espacio topológico. Si $\{X_n, f_n\}$ es un sistema inverso tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $X_n = X$, y f_n es la función identidad, entonces su límite inverso X_∞ es homeomorfo a X .

Teorema 4.20 (Alexandroff-Hausdorff). Si X es un espacio métrico y compacto, entonces existe función continua y suprayectiva del conjunto de Cantor en X .

Demostración. Sea $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \dots$ una colección numerable de cubiertas finitas de X formadas por cerraduras de conjuntos abiertos, de tal manera que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

- Si $U \in \mathcal{U}_n$, entonces su diámetro es menor que $\frac{1}{2^n}$ y
- si $n \geq 2$, entonces $\mathcal{U}_n$ es refinamiento de $\mathcal{U}_{n-1}$.

Esta colección existe pues X es métrico y compacto. Supóngase que $\mathcal{U}_n = \{U_{n,1}, \dots, U_{n,k_n}\}$. Consideremos la cubierta $\mathcal{U}_1$; definimos $V_{1,i} = \{(u, i) : u \in U_{1,i}\}$; así, para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, k_1\}$, $V_{1,i} \cap V_{1,j} = \emptyset$, y cada $V_{1,i}$ es un espacio homeomorfo a $U_{1,i}$ y, por tanto, métrico y compacto. Sea

$$V_1 = V_{1,1} \cup \dots \cup V_{1,k_1}.$$

Notemos que V_1 es métrico y compacto (por ser unión finita de compactos). Ahora fijémosnos en la cubierta $\mathcal{U}_2$. Cada $U_{2,i} \in \mathcal{U}_2$ está contenido en al menos un $U_{1,i} \in \mathcal{U}_1$. Definimos $V_{2,i,j} = \{(u, i, j) : u \in U_{2,j} \subset U_{1,i}\}$ y sea

$$V_2 = \bigcup_{j=1}^{k_2} \left(\bigcup_{U_{2,j} \subset U_{1,i}} V_{2ij} \right)$$

Definimos $f_2 : V_2 \rightarrow V_1$ por $f_2((u, i, j)) = (u, i)$. Nótese que f_2 es continua en cada cerrado $V_{2,i,j}$ y, por tanto, continua en todo V_2 . Sea $\varphi_1 : V_1 \rightarrow X$ la función dada por $\varphi_1(u, i) = u$ y sea $\varphi_2 : V_2 \rightarrow X$ dada por $\varphi_2(u, i, j) = u$. Continuando con el mismo proceso, podemos formar un par de sistemas inversos $\{V_n, f_n\}$ y $\{X, i_X\}$ y una función Φ entre ellos, tal como se muestra en el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} V_1 & \xleftarrow{f_2} & V_2 & \xleftarrow{f_3} & V_3 & \leftarrow & \dots \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \dots \\ X & \xleftarrow{i_X} & X & \xleftarrow{i_X} & X & \leftarrow & \dots \end{array}$$

Veamos que el diagrama conmuta. Sea $(u, i_1, i_2, \dots, i_n) \in V_n$. Por una parte se tiene que $f_n((u, i_1, i_2, \dots, i_n)) = (u, i_1, i_2, \dots, i_{n-1})$ y $\varphi_{n-1}((u, i_1, i_2, \dots, i_n)) = u$. Por otro lado, $\varphi_n((u, i_1, i_2, \dots, i_n)) = u$ y, aplicando la identidad, $i_X(u) = u$. De aquí tenemos que $\varphi_{n-1} \circ f_n = i_X \circ \varphi_n$. La función inducida es una función $\varphi : V_\infty \rightarrow X_\infty$ continua y

suprayectiva por los Lemas 4.17 y 4.18, además, por Lema 4.19, X_∞ es homeomorfo a X . En [2] y [1] se prueba que el límite inverso V_∞ es homeomorfo al conjunto de Cantor. Por lo tanto existe una función continua y suprayectiva del conjunto de Cantor en X $\square$

4.3. Teorema de Hahn-Mazurkiewicz

En esta sección se probará el **Teorema de Hahn-Mazurkiewicz**. Primero probaremos algunos lemas que nos dicen que las imágenes continuas del intervalo $[0, 1]$, además de ser conexas y compactas, son localmente conexas y métricas. Después se probará el recíproco; extendiendo a todo el intervalo $[0, 1]$ la función continua del conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ en X dada por el Teorema de Alexandroff-Hausdorff.

Proposición 4.21. *Sean Y un espacio de Hausdorff y X un espacio compacto y localmente conexo. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. La función f es cerrada (Proposición 1.44) y, por Lema 2.18, Y es localmente conexo. $\square$

Proposición 4.22. *Sean Y un espacio de Hausdorff y X un espacio compacto y métrico. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces Y es metrizable.*

Demostración. La idea es probar que Y es un espacio topológico regular y segundo numerable para aplicar el Teorema de metrización de Urysohn 2.59.

Primero notemos que, por ser X compacto, Y es compacto y, por hipótesis, Y es Hausdorff, así que Y es normal. Como X es segundo numerable (por Proposición 1.56) podemos tomar $\beta = \{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ base numerable de X . Sea $\mathcal{B}_X$ el conjunto de todas las uniones finitas de elementos de β . Si $U \in \mathcal{B}_X$, entonces $X \setminus U$ es cerrado y, como f es cerrada (por la Proposición 1.44), $f(X \setminus U)$ es cerrado. Tomemos

$$\mathcal{C} = \{Y \setminus f(X \setminus U) : U \in \mathcal{B}_X\}.$$

Es claro que $\mathcal{C}$ es una colección numerable de conjuntos abiertos en Y . Sea $V \subseteq Y$ abierto y sea $y \in V$. Obsérvese que $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V)$; además, como $\{y\}$ es cerrado (pues Y es T_2) y f es continua, $f^{-1}(y)$ es un subconjunto cerrado de X , por lo tanto, $f^{-1}(y)$ es compacto. Entonces, tomemos $\{U_1 \cup \dots \cup U_n\} \subset \beta$ cubierta finita de $f^{-1}(y)$ tal que:

$$f^{-1}(y) \subset U_1 \cup \dots \cup U_n \subset f^{-1}(V).$$

Sea $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$. Entonces $U \in \mathcal{B}_X$ y, tomando complementos, nos queda que:

$$X \setminus f^{-1}(V) \subset X \setminus U \subset X \setminus f^{-1}(y). \quad (4.1)$$

Luego, aplicando f a (4.1), se tiene que:

$$f(X \setminus f^{-1}(V)) \subset f(X \setminus U) \subset f(X \setminus f^{-1}(y)).$$

Como f es suprayectiva, satisface la igualdad $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ para cualesquiera A y B subconjuntos de X ; entonces

$$f(X) \setminus f(f^{-1}(V)) \subset f(X \setminus U) \subset f(X) \setminus f(f^{-1}(y)).$$

De nuevo, por la suprayectividad de f , se cumple la igualdad $f(X) = Y$ y $f(f^{-1}(A)) = A$, para cualquier $A \subset Y$, por lo tanto:

$$Y \setminus V \subset f(X \setminus U) \subset Y \setminus \{y\}.$$

Tomando complementos en Y se tiene que:

$$\{y\} \subset Y \setminus f(X \setminus U) \subset V,$$

por lo tanto, la colección $\mathcal{C} = \{Y \setminus f(X \setminus U) : U \in \mathcal{P}_F(\mathcal{B}_X)\}$ es una base para Y . $\square$

Como resultado de las últimas dos proposiciones obtenemos el siguiente teorema, que es una de las dos implicaciones del Teorema de Hahn-Mazurkiewicz.

Proposición 4.23. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Si Y es un espacio topológico de Hausdorff y X es un espacio topológico conexo, compacto, localmente conexo y métrico (un continuo de Peano), entonces $f(X)$ es un continuo de Peano.*

Proposición 4.24. *Sea $f : [0, 1] \rightarrow Y$ una función continua. Si Y es un espacio topológico de Hausdorff, entonces $f(X)$ es un continuo de Peano.*

Lema 4.25. *Si (X, d) es un espacio métrico, compacto y localmente conexo, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ con la propiedad de que para cualesquiera $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$ existe un conjunto abierto conexo $V \subset X$ con $x, y \in V$ y $\text{diam}(V) < \varepsilon$. En este caso decimos que X es uniformemente localmente conexo.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$; por la conexidad local de X tenemos que cada punto $x \in X$ está contenido en algún subconjunto abierto y conexo U_x tal que $\text{diam}(U_x) < \varepsilon$. Sea $\{U_x : x \in X\}$ cubierta abierta de conjuntos conexos de X . Como X es compacto, podemos tomar una subcubierta finita $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$; además, por ser X métrico y compacto, la cubierta tiene número de Lebesgue (Observación 1.52), digamos $\delta > 0$, de donde obtenemos que si $x, y \in X$ y $d(x, y) < \delta$; entonces existe algún $U_{x_i} \in \{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$ tal que $x, y \in U_{x_i}$. Así, $V = U_{x_i}$ es el conjunto conexo buscado. $\square$

Lema 4.26. Si X es un continuo de Peano y $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ con la propiedad de que para cualesquiera $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$ existe un arco de x a y de diámetro menor que ε . En este caso decimos que X es uniformemente localmente arco-conexo.

Demostración. Por 4.25, X es uniformemente localmente conexo. Sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para cualesquiera $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$, existe un conjunto abierto conexo $V \subset X$ con $x, y \in V$ y $\text{diam}(V) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, por 4.13, V es arco-conexo. Así, existe un arco de x a y contenido en V , cuyo diámetro es menor que ε . $\square$

Teorema 4.27 (Hahn-Mazurkiewicz). Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Entonces, X es un continuo de Peano si, y sólo si, existe función continua y suprayectiva $F : [0, 1] \rightarrow X$.

Demostración. [$\Leftarrow$] Supongamos que existe una función continua y suprayectiva $F : [0, 1] \rightarrow X$. Por la Proposición 4.24 tenemos que X es compacto, conexo, métrico y localmente conexo, por tanto, un continuo de Peano.

[$\Rightarrow$] Ahora supóngase que X es un continuo de Peano. Sean $I = [0, 1]$ y $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor. Nombremos a las componentes conexas de $I \setminus \mathcal{C}$ como $I_j = [a_j, b_j]$, de tal manera que

$$\mathcal{C} = I \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j.$$

Por 4.20, existe $f : \mathcal{C} \rightarrow X$ continua y suprayectiva. Más aún, f es uniformemente continua. Sea $\varepsilon_0 = \text{diam}(X) + 1$ y sea $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ una sucesión decreciente de reales positivos que converge a 0. Por el Lema 4.26, X es uniformemente localmente arco-conexo, así que podemos tomar $\gamma_0 = 1$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, γ_n con la propiedad de que $0 < \gamma_n < \gamma_{n-1}$ y para cualesquiera $x, y \in X$ con $d(x, y) < \gamma_n$ existe arco de x a y en X con diámetro menor que ε_n . Además, debido a la continuidad uniforme de f , sea $\delta_0 = 1$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea δ_n de tal manera que $0 < \delta_n < \delta_{n-1}$ y si $c, d \in \mathcal{C}$ con $|c - d| < \delta_n$, entonces $d(f(c), f(d)) < \gamma_n$. Sea $\mathcal{S} = \{I_j : j \in \mathbb{N}\}$. Definimos:

$$S_0 = \{I_j \in \mathcal{S} : |c_j - d_j| \geq \delta_1\},$$

$$S_1 = \{I_j \in \mathcal{S} : \delta_1 > |c_j - d_j| \geq \delta_2\} \text{ y,}$$

en general, para $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \{I_j \in \mathcal{S} : \delta_n > |c_j - d_j| \geq \delta_{n+1}\}.$$

Notemos que $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ es partición de $\mathcal{S}$ pues dado $j \in \mathbb{N}$ el $\text{diam}(I_j)$ sólo puede satisfacer una de las desigualdades. Tomemos $j, n \in \mathbb{N}$ tales que $I_j \in S_n$. Sea $F_j : I_j \rightarrow X$ un arco del punto $f(c_j)$ al $f(d_j)$ de diámetro menor que ε_n . Esto se puede por la continuidad uniforme de f se tiene que $d(f(c_j), f(d_j)) < \gamma_n$ y, por ser X uniformemente

localmente arco-conexo, existe arco de $f(c_j)$ a $f(d_j)$ con diámetro menor que ε_n . Definimos $F : I \rightarrow X$ como sigue:

$$F = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in \mathcal{C}, \\ F_j(x), & \text{si } x \in I_j. \end{cases}$$

Es claro que F está bien definida; además f es suprayectiva y $F|_{\mathcal{C}} = f$, de donde tenemos que F es suprayectiva. Veamos que F es continua. Sea $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2}$. Por la continuidad uniforme de f podemos tomar δ tal que si $c, d \in \mathcal{C}$ y $|c - d| < \delta$, entonces $d(f(c), f(d)) < \min\{\gamma_n, \varepsilon_n\}$. Sean $s, t \in I$ con $|s - t| < \delta$. Tenemos tres casos:

Caso 1. Si $s, t \in I_j$, para algún $j \in \mathbb{N}$. Como $F : I_j \rightarrow X$ es un arco de diámetro menor que ε_n , entonces

$$d(F(s), F(t)) < \varepsilon_n. \quad (4.2)$$

Caso 2. Si $s, t \in \mathcal{C}$, tenemos que $F(s) = f(s)$ y $F(t) = f(t)$, además, el δ utilizado es el de la continuidad uniforme f , por lo tanto

$$d(F(s), F(t)) < \varepsilon. \quad (4.3)$$

Caso 3. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $s \in \mathcal{C}$, $t \in I_j$, para algún $j \in \mathbb{N}$, y $s < c_j < t$. Entonces

$$|s - c_j| + |c_j - t| = |s - t| < \delta,$$

lo cual implica que

$$|s - c_j| < \delta \quad \text{y} \quad |c_j - t| < \delta.$$

Por (4.2) y (4.3), se tiene que

$$d(F(s), F(t)) \leq d(F(s), F(c_j)) + d(F(t), F(c_j)) < \varepsilon_n + \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así, F es continua. □

Corolario 4.28. *Si X es un espacio de Hausdorff conexo por trayectorias, entonces es arco-conexo.*

Demostración. Sean $x, y \in X$; sabemos que existe $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ continua tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$; entonces la imagen de $[0, 1]$ bajo α es un continuo de Peano y, por tanto, arco-conexo. □

En virtud del teorema 4.27 se tiene que existe una función continua y suprayectiva del intervalo $[0, 1]$ en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Esa observación fue hecha tiempo antes por Peano, al dar el ejemplo de la curva que llenaba todo el espacio. Sin embargo, la descripción de la curva que dio Peano fue meramente analítica y no dio ningún método que permitiera visualizar su curva. Después, matemáticos como Hilbert, Sierpiński, Lebesgue,

E. Cesàro, entre otros, dieron métodos que permiten visualizar el proceso de construcción de curvas que llenan el espacio. Vamos a analizar la construcción dada por Hilbert.

Ejemplo 4.29. Curva de Hilbert: Para cada valor de $n \in \mathbb{N}$, se divide el intervalo unitario I en 4^n intervalos de longitud 4^{-n} , y el cuadrado $I \times I$, en 4^n cuadrados de lado 2^{-n} . Se establece una correspondencia biyectiva entre los intervalos de I y los cuadrados de $I \times I$. En las figuras 4.29 y 4.29 se muestran los primeros pasos de la construcción de la curva de Hilbert que llena el espacio.

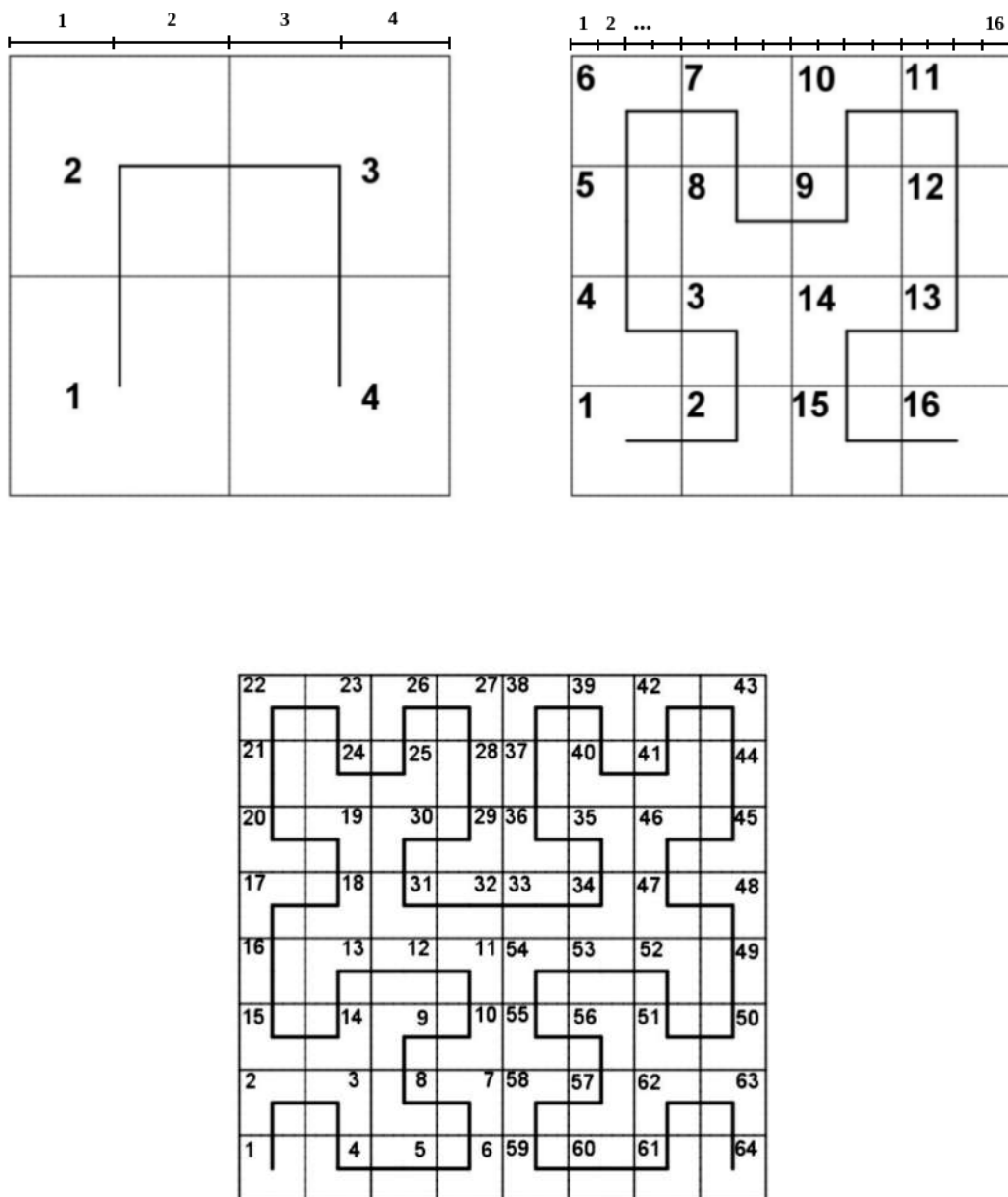


Figura 4.4: Pasos 1, 2 y 3 de la construcción de Hilbert

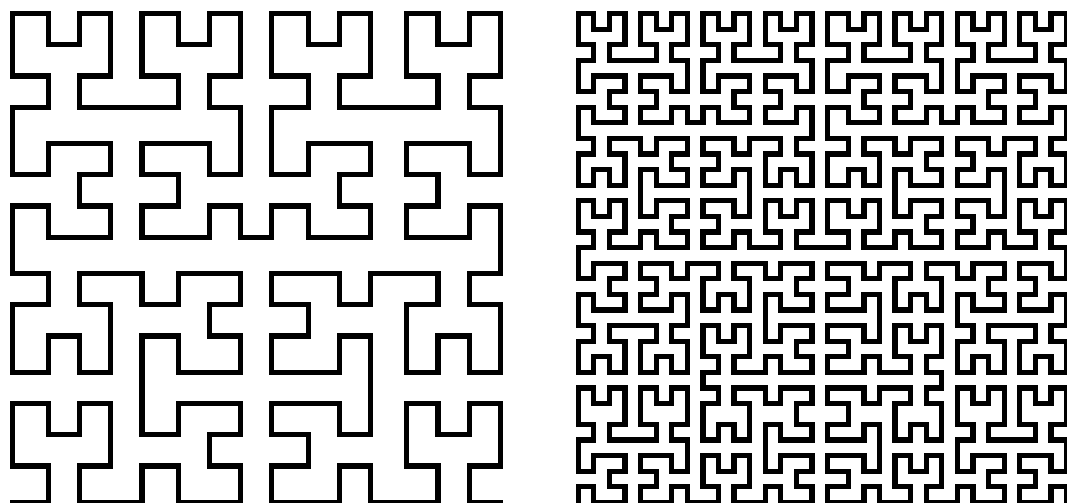


Figura 4.5: Pasos 4 y 5 de la construcción de Hilbert

Conclusión

El Teorema de Hanz-Mazurkiewicz es un teorema de sencillez aparente ya que esconde formas muy poco intuitivas. Consecuencias (por mencionar algunas) del teorema es que existe una función continua y suprayectiva de I en una n -celda, en el toro topológico, en una n -esfera o aún más asombroso, de I en el cubo de Hilbert.

Bibliografía

- [1] J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology*. Addison-Wesley, 1961.
- [2] S. Willard, *General Topology*. Addison-Wesley, 1970.
- [3] M. L. P. Seguí, *Notas de Topología I*. FCFM, UMSNH, 2014.
- [4] M. L. P. Seguí, *Notas de Topología II*. FCFM, UMSNH, 2015.
- [5] H. Sagan, *Space Filling Curves*. Springer-Verlag, 1994.
- [6] F. C. Segura and A. T. Mascarúa, *Elementos de Topología General*. Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 37, Sociedad Matemática Mexicana, 2012.
- [7] J. R. Munkres, *Topology, a first course*, vol. 3. Prentice-Hall, 2002.
- [8] L. F. de Jesús, *Continuos localmente conexos*. Tesis de Licenciatura, FCFM, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2015.