



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE  
HIDALGO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

SOLUCIÓN Y EVOLUCIÓN NUMÉRICA DE ESTRELLAS DE  
TOLMANN-OPPEHEIMER-VOLKOFF USANDO EL  
MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
LIC. EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:  
SANTIAGO MEDRANO VILLA



DIRECTOR DE TESIS:  
DR. JOSÉ ANTONIO GONZÁLEZ CERVERA

MORELIA MICHOACÁN

DICIEMBRE DE 2016



*A mis padres por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero más que nada, por su amor.*

*Todo este trabajo ha sido posible gracias a ellos.*



## **Agradecimientos**

Este trabajo de Tesis es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente, participaron distintas personas opinando, corrigiendo, teniéndome paciencia, dando ánimo, acompañando en los momentos de crisis y en los momentos de felicidad. Este trabajo me ha permitido aprovechar la competencia y la experiencia de muchas personas que deseo agradecer en este apartado.

En primer lugar, a mi asesor de Tesis, el Dr. José Antonio González, mi más amplio agradecimiento por haberme confiado este trabajo en persona, por su paciencia ante mi inconsistencia, por su valiosa dirección y apoyo para seguir este camino de Tesis y llegar a la conclusión del mismo. Le agradezco también a los Drs. Joaquín Estevez, Francisco Siddhartha Guzmán, Francisco Domínguez Mota y Mauricio Ortíz , por su disposición para revisar esta tesis, haciendo observaciones y correcciones de manera oportuna.

A mi novia Paulina, por ser la persona que ha compartido su tiempo a mi lado, motivándome para poder seguir adelante en todos los aspectos de mi vida.

A mis amigos Memo, Iván, Jorge, Dulce, Richi, Pancho, Mike, Chava, Erick, Manolo y a todos aquellos que me han brindado su amistad, se merecen muchas y buenas palabras, por todo el tiempo que me han dado, por las conversaciones de las que tanto provecho he sacado, por el respaldo y la amistad. Gracias por los buenos y malos momentos, por aguantarme y por escucharme. Siempre estuvieron ahí en lo bueno y en lo malo. A todos ustedes, gracias.

Todo esto nunca hubiera sido posible sin el amparo incondicional que me otorgaron y el cariño que me inspiraron mis padres, que de forma incondicional, entendieron mis ausencias y mis malos momentos. Que siempre estuvieron a mi lado para saber cómo iba mi proceso. Las palabras nunca serán suficientes para testimoniar mi aprecio y mi agradecimiento.

A todos ustedes , mi mayor reconocimiento y gratitud.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Consideraciones previas</b>	<b>3</b>
2.1. Relatividad General . . . . .	3
2.1.1. Métrica . . . . .	4
2.1.2. Geodésicas . . . . .	5
2.1.3. Curvatura . . . . .	5
2.1.4. Derivada covariante . . . . .	6
2.1.5. Ecuaciones de Einstein . . . . .	8
2.1.6. Identidades de Bianchi y leyes de conservación . . . . .	8
2.2. Hidrodinámica . . . . .	9
2.3. Ecuaciones TOV . . . . .	11
2.4. Objetos Compactos . . . . .	12
2.4.1. Enanas blancas . . . . .	14
2.4.2. Estrellas de Neutrones . . . . .	18
2.4.3. Estrellas de Quarks . . . . .	19
2.4.4. Agujeros Negros . . . . .	20
<b>3. Métodos Numéricos</b>	<b>23</b>
3.1. Métodos Runge-Kutta . . . . .	23
3.2. Método de Diferencias Finitas . . . . .	24
3.3. Método de Líneas . . . . .	26
3.4. Orden de Convergencia . . . . .	27
<b>4. Estabilidad y evolución de las TOV</b>	<b>29</b>
4.1. Configuración Inicial . . . . .	29
4.2. Evolución . . . . .	34
<b>5. Conclusiones</b>	<b>49</b>
<b>A. Deducción de las ecuaciones TOV</b>	<b>51</b>

<b>B. Aplicación de los métodos numéricos a las ecuaciones TOV y las ecuaciones de Euler acopladas a las ecuaciones de Einstein</b>	<b>55</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>



## Resumen

Las estrellas son objetos astronómicos interesantes que evolucionan de formas muy particulares dependiendo de parámetros físicos como su masa, densidad y presión por mencionar algunos. En este trabajo se desarrolla un código numérico en el lenguaje de programación FORTRAN para generar una configuración inicial que representa una estrella estática y esféricamente simétrica a partir de las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Dada esta configuración y utilizando las ecuaciones de la hidrodinámica de Euler relativistas acopladas a las ecuaciones de Einstein se evolucionan en el tiempo el fluido y la geometría de la estrella para entender su evolución temporal y un estudio de las ramas estables e inestables de dichas estrellas. Para esto se utiliza el método de diferencias finitas.

**Palabras Clave** — Relatividad General, Métodos Numéricos, Diferencias Finitas, Relatividad Numérica, Ecuaciones TOV.



## **Abstract**

The stars are astronomical objects that evolve in different ways depending on the physical parameters like the mass, density and pressure. In this work a numerical code in FORTRAN is developed to generate an initial configuration representing a static and spherically symmetric star using the Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations. With this configuration and using hydrodynamics of Euler and Einstein equations, we study the time evolution of the fluid and the geometry of the star and the stable and unstable branches of these stars. We use the finite differences method.

# Capítulo 1

## Introducción

Las estrellas son de los objetos astronómicos más estudiados, y representan los bloques fundamentales de la construcción de galaxias. La edad, la distribución y composición de las estrellas en una galaxia trazan su historia, dinámica y evolución. Las estrellas son las responsables de la fabricación y distribución en el universo de elementos pesados como el carbono, el nitrógeno y el oxígeno, y sus características están íntimamente ligadas a las características de los sistemas planetarios que pueden existir alrededor de ellas. En consecuencia, el estudio del nacimiento, vida y muerte de las estrellas es fundamental en el campo de la astronomía.

El objetivo del presente trabajo es estudiar la estabilidad de las estrellas estáticas esféricamente simétricas usando las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) para generar una configuración inicial de la estrella: utilizando las variables físicas como la masa, presión, y densidad, así como las ecuaciones de hidrodinámica relativista para un fluido perfecto y con las ecuaciones de Einstein se realiza la evolución en el tiempo de manera numérica y se estudia su comportamiento bajo distintas configuraciones.

Para realizar todo esto es necesario hacer uso de diferentes métodos numéricos para resolver las distintas ecuaciones diferenciales, y la forma de resolverlas es mediante un código de programación que nos permita simular las estrellas con sus diferentes parámetros. El uso de simulaciones numéricas es muy importante ya que en ellas nos basamos para comprender como es que funcionan las cosas que suceden a nuestro alrededor mejorando las usando datos cada vez mas realistas.

El contenido de la presente tesis es el siguiente:

En el capítulo 2 se presenta una introducción de la teoría general de la relatividad de la cuál se obtienen las ecuaciones sobre las que se trabajará numéricamente, es decir, como generar los valores iniciales de las estrellas mediante las ecuaciones TOV y de ellas la evo-

lución en el tiempo. También se habla un poco sobre los cuerpos que se están modelando para entender un poco de que es lo que ocurre durante la evolución de una estrella.

En el capítulo 3 describimos los diferentes métodos numéricos que se utilizan para resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias (ecuaciones TOV) y parciales (ecuaciones de hidrodinámica y de Einstein) que se mostraron en el capítulo 2, además de una descripción de la discretización de las ecuaciones para poder ser implementadas en un método numérico adecuado.

En el capítulo 4 se enuncian los pasos de la implementación del código para construir las diferentes configuraciones iniciales y analizar la estabilidad de cada una. Una vez que se obtiene la configuración inicial se explica el código de evolución y se analiza porque es necesario recurrir a una viscosidad artificial para evolucionar las ecuaciones de hidrodinámica. Finalmente se analiza el comportamiento de las diferentes configuraciones en función del tiempo y se estudia la estabilidad de la estrella en función de los parámetros físicos.

En el último capítulo se hace una breve conclusión de las complicaciones que ocurren al tratar de resolver la evolución y se proponen algunas mejoras prácticas para resolverla.

Por último en el apéndice A se muestra de donde salen las ecuaciones de TOV a partir de las ecuaciones de relatividad general y en el apéndice B se desarrollan las diferentes ecuaciones con el método apropiado.

# Capítulo 2

## Consideraciones previas

Para poder estudiar la evolución estelar se deben de tomar en cuenta algunas herramientas teóricas esenciales, como por ejemplo la Teoría General de la Relatividad debido a que se busca estudiar el comportamiento de las estrellas bajo campos gravitacionales fuertes y también las ecuaciones de la hidrodinámica en las que supondremos que la estrella está compuesta por un fluido perfecto.

En base a las ecuaciones que se obtienen de la relatividad general y de la hidrodinámica, se encuentran las ecuaciones de TOV que ayudarán a generar un modelo que representa la configuración inicial de la estrella. Desde el punto de vista de la curvatura del espacio-tiempo se considera una métrica para el interior de la estrella y se evoluciona con las ecuaciones de Euler para hidrodinámica relativista [1].

Además de hacer un breve repaso de la Relatividad General y de la hidrodinámica, hablaremos sobre los objetos compactos, sus características y algunas de sus propiedades que resultan al conjuntarlos con la relatividad general.

### 2.1. Relatividad General

La teoría de la relatividad general es actualmente la teoría que se utiliza para describir la gravitación, esta fue postulada por Albert Einstein a finales de 1915. De acuerdo a esta teoría, la gravitación ya no es considerada como una fuerza, tal como se interpreta en la física newtoniana, sino mas bien una manifestación de la "curvatura" del espacio-tiempo [2, 3, 4].

En 1905 Einstein propuso la teoría de la relatividad especial la cuál surge de la idea de que la física vista en un sistema de referencia, sea claramente descrita en cualquier otro sistema de referencia inercial al primero, sin que ningún sistema sea más importante que otro.

Esta democratización conduce a un nuevo concepto donde se puede manifestar, el cuadriespacio. Al querer estudiar estas relaciones en sistemas descritos en coordenadas curvilíneas, nos lleva a introducir objetos geométricos que deben de tener un comportamiento claro bajo cambios de sistemas de referencia, a los cuales se les llama tensores. Al notar que las coordenadas curvilíneas pueden, en sí, estar describiendo a un espacio curvo, se generaliza el concepto de movimiento libre en el cuadriespacio y, en general, se aprende a reescribir las leyes conocidas de la física, en este cuadriespacio con expresiones tensoriales. De esta teoría se llega a un nuevo paradigma: no hay fuerza gravitatoria, sino curvatura, la materia curva al espacio y la geometría determina al movimiento de la materia.

A partir de estas ideas Einstein dio a conocer el principio de equivalencia, del cuál surgió la idea de pensar que la gravitación podía identificarse con la curvatura del cuadriespacio también llamado espacio-tiempo, de manera que la geometría era alterada por la distribución de materia y energía. Una manera de representar todas estas ideas matemáticamente es recurriendo a la forma tensorial.

### 2.1.1. Métrica

Consideremos un espacio continuo de cuatro dimensiones (tres espaciales y una temporal), matemáticamente, una variedad diferenciable de cuatro dimensiones. Sean  $x^\alpha$  las coordenadas de un evento en dicho espacio-tiempo, donde  $\alpha$  toma los valores de  $\{0, 1, 2, 3\}$ , los cuales nos dicen en que momento y en que lugar del espacio ocurrió el evento. Se hace referencia a la componente 0 como la componente del tiempo y a los valores  $\{1, 2, 3\}$  como las componentes del espacio.

Entre dos eventos infinitesimalmente cercanos con coordenadas  $x^\mu$  y  $x^\mu + dx^\mu$  es posible definir una distancia invariante  $ds^2$  de la siguiente forma

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

donde a  $g_{\mu\nu}$  se le conoce como tensor métrico o simplemente métrica, y la última igualdad define la convención de suma de Einstein (índices que aparecen repetidos se suman). La distancia invariante no depende del sistema de coordenadas que se utilice para describir al espacio-tiempo. En cada punto del espacio-tiempo, las componentes del tensor métrico forman una matriz simétrica no singular de  $4 \times 4$  elementos, con eigenvalores cuyos signos son  $(-, +, +, +)$ , es decir, un eigenvalor negativo asociado al tiempo y tres eigenvalores positivos asociados al espacio. En el caso de relatividad especial, el tensor métrico se reduce a la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.2)$$

que corresponde al espacio tiempo plano. En relatividad general el tensor métrico puede variar de un punto a otro.

### 2.1.2. Geodésicas

Una de las ideas de Einstein fue pensar que en la presencia de un campo gravitacional, los objetos siguen moviéndose en las trayectorias lo mas rectas posibles, es decir trayectorias extremas, pero ahora en una métrica distinta. De este modo la gravedad no se ve como una fuerza, sino como una distorsión de la métrica. Dada esta distorsión, los objetos se mueven siguiendo la trayectoria más corta de un punto a otro, llamada geodésica.

La trayectoria de un objeto se calcula con ayuda de un parámetro llamado tiempo propio, que corresponde al tiempo medido por un observador en el punto donde está el objeto y se define como  $d\tau^2 = -ds^2$ . Este tiempo propio no tiene porque ser  $dt$ , pues  $t$  es solamente una coordenada. La ecuación para una curva geodésica esta dada en general por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.3)$$

donde a las cantidades  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  se les conocen como símbolos de Christoffel y están dados en términos de derivadas de la métrica como

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left[ \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right]. \quad (2.4)$$

La ecuación geodésica puede escribirse también como

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0 \quad (2.5)$$

donde  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$  y se define como la "4-velocidad", que es el concepto de velocidad ordinaria generalizada a 4 dimensiones.

### 2.1.3. Curvatura

Para distinguir un espacio-tiempo plano de uno que no lo es, usamos el tensor de curvatura de Riemann representado por  $R_{\mu\nu\rho}^\sigma$ . Este tensor mide el cambio de un vector al transportarlo alrededor de un circuito manteniendolo siempre paralelo a si mismo. En un espacio-tiempo plano no ocurre cambio alguno en el vector, pero en uno curvo si. Definimos el tensor de Riemann como



$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} - \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} + \left(\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma}\right). \quad (2.6)$$

A partir del tensor de Riemann podemos definir el tensor de Ricci sumando dos de los índices libres

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} \quad (2.7)$$

El tensor de Riemann tiene en total 256 componentes pero debido a las simetrías únicamente 20 de ellos son independientes y se puede demostrar que si el espacio-tiempo es plano todos ellos son cero, de manera que el tensor de Ricci tiene 10 componentes independientes, pero si el espacio-tiempo es plano no necesariamente es cero. Del tensor de Ricci se puede calcular el escalar de curvatura  $R$  de la siguiente manera

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Cuando se escriben los tensores con los índices arriba y en otras ocasiones con los índices abajo, no se refieren al mismo tensor sino a vectores y covectores en el espacio tangente y en el espacio dual. La regla consiste en subir o bajar los índices contrayendolos con el tensor métrico  $g^{\mu\nu}$  o  $g_{\mu\nu}$ . Ejemplos

$$\begin{aligned} v_{\mu} &= g_{\mu\nu}v^{\nu} \\ v^{\mu} &= g^{\mu\nu}v_{\nu} \\ T^{\mu\nu} &= g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}T_{\alpha\beta} \\ R_{\sigma\mu\nu\rho} &= g_{\sigma\lambda}R_{\mu\nu\rho}^{\lambda}. \end{aligned}$$

#### 2.1.4. Derivada covariante

Cuando se considera el cambio de un campo tensorial en el espacio-tiempo, se debe tomar en cuenta que al moverse de un punto a otro no solo las componentes de dicho campo pueden cambiar, sino también la base en la que se esta representando este. Para un espacio plano tridimensional en coordenadas cartesianas, la base es en general llamada base canónica. Una base común para un espacio curvo o plano es la base coordenada en la que los elementos de la base, la componente es uno a lo largo de la dirección de la coordenada dada y cero en las demás direcciones. El producto escalar de esta base se ve como

$$\vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\beta} = g_{\alpha\beta} \quad (2.9)$$

entonces las componentes del tensor métrico son el producto escalar de los vectores base.

Dado un vector  $\vec{v}$ , las componentes de dicho vector serán  $v^\alpha$  en las coordenadas  $x^\alpha$ , mientras que  $\vec{e}_\alpha$  el vector base en dirección de  $x^\alpha$

$$\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha \quad (2.10)$$

el vector  $\vec{v}$  es una combinación lineal de los elementos de la base. Ahora, si se considera el cambio de un vector a lo largo de la coordenada se obtiene

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (v^\beta \vec{e}_\beta) = \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} \vec{e}_\beta + v^\beta \frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial x^\alpha} \quad (2.11)$$

de forma que la derivada de un vector es más que la simple derivada de sus componentes.

Como  $\partial \vec{e}_\beta / \partial x^\alpha$  es un vector, se puede expresar como una combinación lineal de los vectores base. Con esto en mente, se introducen los símbolos de Christoffel que se mencionaron anteriormente para denotar los coeficientes de dicha combinación lineal

$$\frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial x^\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu \quad (2.12)$$

de manera que sustituyendo (2.12) en (2.11) tenemos que

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} \vec{e}_\beta + v^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu = \left( \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + v^\mu \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \right) \vec{e}_\beta \quad (2.13)$$

Esto nos da las componentes de  $\partial \vec{v} / \partial x^\alpha$  en términos de la base  $\vec{e}_\beta$ . Se define la derivada covariante como

$$\nabla_\beta v^\alpha = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + v^\mu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \quad (2.14)$$

que nos dice como cambian las componentes del vector al movernos en el espacio-tiempo, incluyendo cambios de los elementos de la base. Si los símbolos de Christoffel son cero, la derivada covariante se reduce a la derivada parcial.

Para un vector con índice abajo, la derivada covariante es

$$\nabla_\beta v_\alpha = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu v_\mu, \quad (2.15)$$

mientras que para tensores de más índices, en la derivada covariante se añade un término con símbolos de Christoffel por cada índice libre, con el signo adecuado dependiendo de si el índice está arriba o abajo.

### 2.1.5. Ecuaciones de Einstein

La forma en la que se relaciona la geometría del espacio-tiempo con la distribución de la materia y energía esta contenida en las ecuaciones de Einstein que se expresan de la siguiente forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein, el cual esta relacionado con el tensor de curvatura de Ricci y  $T^{\mu\nu}$  el tensor de Energía-Momento de la materia [3-4].

El tensor de energía-momento, describe la densidad de energía, la densidad del momento y el flujo de momento de un campo de materia a través de las siguientes componentes:

$$T^{00} = \text{Densidad de energía} \quad (2.17)$$

$$T^{0i} = \text{Densidad de momento} \quad (2.18)$$

$$T^{ij} = \text{Flujo de momento } i \text{ a través de la superficie. } j \quad (2.19)$$

En el caso de un espacio-tiempo vacío las ecuaciones de Einstein se reducen a  $G_{\mu\nu} = 0$  o equivalente a  $R_{\mu\nu} = 0$ , lo cuál no significa que el espacio-tiempo sea plano pues se sabe que el campo gravitacional de un objeto se extiende más allá del objeto mismo, por lo que la curvatura en una región del vacío cercana a un objeto masivo no puede ser cero. De estas ecuaciones se predice la existencia de las ondas gravitacionales o de los hoyos negros, entre otras.

### 2.1.6. Identidades de Bianchi y leyes de conservación

A partir del tensor de curvatura de Riemann es posible demostrar que se cumplen las siguientes propiedades

$$\nabla_{\lambda}R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_{\nu}R_{\alpha\beta\lambda\mu} + \nabla_{\mu}R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0 \quad (2.20)$$

las cuales se conocen como las identidades de Bianchi. Una consecuencia de estas identidades es que la divergencia covariante del tensor de Einstein es igual a cero

$$\nabla_{\nu}G^{\mu\nu} = 0. \quad (2.21)$$

Esta propiedad en las ecuaciones de Einstein implica inmediatamente que

$$\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.22)$$

lo cual representa las leyes locales de conservación de la energía y el momento. En el caso

de un fluido, al seleccionar la componente  $\mu$  de (2.22) como  $\mu = 0$  se obtiene la ecuación de conservación de la masa.

## 2.2. Hidrodinámica

A la hora de describir el movimiento de un fluido existen dos puntos de vista. Una primera forma de hacerlo es seguir a cada partícula en su movimiento, de manera que se busquen unas funciones que den la posición, así como las propiedades físicas de la partícula en cada instante de tiempo. A ésta descripción se le conoce como Lagrangiana. Una segunda forma es asignar a cada punto del espacio y en cada instante de tiempo, un valor para las propiedades o magnitudes físicas sin importar que en ese instante, la partícula ocupa ese volumen diferencial. Ésta es la descripción conocida como Euleriana, que no está ligada a las partículas sino a los puntos del espacio ocupados por el fluido. El valor de una propiedad física en un punto y en un instante determinado es el de la partícula que ocupa dicho punto en ese instante.

La descripción Lagrangiana utiliza conceptos propios de la mecánica de partículas para describir un medio continuo, por lo que no es aconsejable en la mayoría de las situaciones debido a la complejidad de las ecuaciones a las que da lugar. Por este motivo desde los años setenta comenzaron a desarrollarse códigos usando coordenadas eulerianas. Wilson [5] diseñó un código en coordenadas cilíndricas capaz de tratar la acreción de materia sobre un agujero negro en rotación con simetría axial cuyo tensor de energía momento para la materia estaba descrito por el de un fluido perfecto.

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos relativistas se han deducido usualmente por analogía con la dinámica de fluidos newtoniana, identificando adecuadamente las magnitudes relativistas que representan las densidades y flujos de materia, momento y energía.

En lo que sigue de este trabajo, se considera un fluido perfecto, para el cuál el tensor de energía-momento está dado por

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 h u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

donde  $\rho_0$  es la densidad de masa,  $h$  es la entalpía,  $p$  es la presión del fluido,  $u_\mu$  la 4-velocidad del fluido y  $g^{\mu\nu}$  la 4-métrica. La entalpía se define como

$$h = 1 + \varepsilon + \frac{p}{\rho_0} \quad (2.24)$$

donde  $\varepsilon$  es la energía interna específica, relacionada con la densidad de energía  $\epsilon$  como

$$\varepsilon = \frac{\epsilon}{\rho_0} - 1. \quad (2.25)$$

Suponiendo que el fluido está caracterizado por un tensor de energía-momento como (2.23). Una de las ecuaciones de la dinámica de fluidos relativista representa la ley de conservación local de la masa

$$\nabla_\mu (\rho_0 u^\mu) = 0 \quad (2.26)$$

las otras ecuaciones que representan las leyes de conservación son las obtenidas de las identidades de Bianchi (2.22).

Cuando estas ecuaciones se proyectan en hipersuperficies del espacio-tiempo y sus direcciones normales se obtienen las ecuaciones de Euler relativistas. El resultado es un sistema de ecuaciones para las variables primitivas  $\rho_0$ ,  $v^r$ ,  $p$  donde  $v^r$  es la velocidad del elemento de fluido medido por un observador euleriano. Considerando la métrica en simetría esférica

$$ds^2 = -\alpha(t, r)dt^2 + a^2(t, r)dr^2 + r^2 d\theta + r^2 \sin \theta d\phi \quad (2.27)$$

donde el valor de  $\alpha$  y  $a$  debe determinarse. Comparado con la formulación 3+1 donde se escribe la métrica como

$$ds^2 = -(\alpha - \beta_i \beta^i)dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (2.28)$$

donde  $\alpha$  se conoce como la función de lapso entre las hipersuperficies y  $\beta_i$  el vector de corrimiento, que calcula el desplazamiento entre el observador euleriano y las líneas de coordenadas constantes y las  $\gamma_{ij}$  son la 3-métrica espacial asociada a las hipersuperficies. Para el caso que se estudia  $\beta_i = 0$  por lo que  $\gamma_{rr} = a^2$ ,  $\gamma_{\theta\theta} = r^2$  y  $\gamma_{\phi\phi} = r^2 \sin \theta$ .

La forma en la que se relaciona la velocidad espacial con las componentes espaciales de la cuadrivelocidad del fluido en (2.23) es a través de la relación  $v^r = u^r \sqrt{1 - g_{rr} v^r v^r} = u^r \sqrt{1 - a^2 v^r v^r} = u^r / W$ , donde  $W$  es el factor de Lorentz definido como  $W = \alpha u^t$ . Sustituyendo en la ecuación para la conservación local de la masa (2.26) se tiene que

$$\nabla_\mu (\rho_0 u^\mu) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \rho_0 u^\mu) = 0 \quad (2.29)$$

donde  $g$  es el determinante de tensor métrico  $g = \det g_{\mu\nu}$ . De la métrica en la ecuación (2.28) se obtiene que  $\sqrt{-g} = \alpha a r^2 \sin \theta$  y finalmente sustituyendo en (2.29) se tiene

$$\frac{1}{\alpha a r^2} \partial_t (\alpha a r^2 u^t) + \frac{1}{\alpha a r^2} \partial_r (\alpha a r^2 u^r) = 0 \quad (2.30)$$

definiendo  $D = \rho_0 W = \rho_0 \alpha u^t$

$$\partial_t(aD) + \frac{1}{r^2}\partial_r(\alpha ar^2 v^r D) = 0 \quad (2.31)$$

que es la primera ecuacion de Euler.

Haciendo el mismo cálculo con las ecuaciones que se obtienen de (2.22) llegamos a que

$$\partial_t(aD) + \frac{1}{r^2}\partial_r(\alpha ar^2 D v^r) = 0, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(aS_r) + \frac{1}{r^2}\partial_r(\alpha ar^2 (S_r v^r + p)) = \\ -\alpha a \frac{a^2 m}{r^2} (S_r v^r + \tau + p + D) + \alpha a \frac{2p}{r}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\partial_t(a\tau) + \frac{1}{r^2}\partial_r(\alpha ar^2 (\tau + p) v^r) = -\alpha a \frac{m}{r^2} S_r. \quad (2.34)$$

donde las variables conservativas se definen como

$$D = \rho_0 W \quad (2.35)$$

$$S_r = \rho_0 h W^2 v_r \quad (2.36)$$

$$\tau = \rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W \quad (2.37)$$

Se pueden reescribir las ecuaciones de Einstein usando las mismas variables conservativas de forma que se tiene

$$\partial_t a = -4\pi r \alpha a S_r, \quad (2.38)$$

$$\partial_r a = a^3 \left[ 4\pi r (\tau + D) - \frac{m}{r^2} \right], \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial_r \alpha}{\alpha} = a^2 \left[ 4\pi r (S_r v^r + p) + \frac{m}{r^2} \right]. \quad (2.40)$$

## 2.3. Ecuaciones TOV

En el campo de la astrofísica, el estudio de las estrellas TOV no es algo realmente nuevo en el área de simulaciones computacionales. Estas ecuaciones describen a las estrellas compactas mejor que las ecuaciones newtonianas del equilibrio hidrostático ya que toman en consideración correcciones provenientes de la relatividad general [6].

Basandose en una métrica esférica para el interior de una estrella, y usando unidades generalizadas,  $G = c = M_{\odot} = 1$  donde  $M_{\odot}$  es una masa solar, se obtiene que la métrica se puede expresar como

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.41)$$

si además se considera el tensor de energía-momento para un fluido perfecto se pueden deducir a partir de las leyes de conservación las ecuaciones TOV para una estrella.

Utilizando la métrica (2.41) y el tensor de energía-momento para un fluido perfecto (2.23) en las Ecuaciones de Einstein mostradas en la sección 2.1 pueden obtenerse las ecuaciones de Tolmann-Oppenheimer-Volkoff que son

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho (1 + \epsilon/c^2) \quad (2.42)$$

$$\frac{dp}{dr} = -G(\rho(1 + \epsilon/c^2) + p/c^2) \frac{m + 4\pi r^3 p/c^2}{r(r - 2Gm/c^2)} \quad (2.43)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p/c^2}{r(r - 2Gm/c^2)} \quad (2.44)$$

Para una deducción completa de las ecuaciones TOV se puede consultar el apéndice A.

Este es un conjunto de tres ecuaciones diferenciales ordinarias para la masa, la presión y la energía interna de la estrella cuyas soluciones a partir de condiciones iniciales nos darán la configuración de la estrella.

Estas ecuaciones se solucionarán por métodos numéricos y servirán para generar una configuración inicial de la estrella la cuál se evolucionará con las ecuaciones de la hidrodinámica relativista y nos servirán para estudiar la evolución temporal de las estrellas.

## 2.4. Objetos Compactos

Las estrellas nacen de la materia dispersa en la mayoría de las galaxias. La turbulencia que ocurre en lo profundo de nubes de materia da lugar a zonas con suficiente masa que puedan comenzar a colapsar bajo su propia atracción gravitacional. Durante los colapsos que ocurren dentro de la nube, el material en el centro empieza a calentarse para dar lugar así a una estrella. No todo este material termina en una estrella, el polvo restante puede convertirse en planetas, asteroides o cometas o puede permanecer simplemente como polvo. Modelos computacionales de la formación estelar predicen que las nubes giratorias de gas y polvo pueden dividirse en dos o tres partes; esto explicaría por qué la mayoría de las

estrellas en la Vía Láctea están emparejadas, es decir, formando sistemas binarios donde dos estrellas orbitan mutuamente alrededor de un centro de masas en común o en grupos de varias estrellas.

Dentro de las estrellas ocurre la fusión nuclear del hidrógeno para formar helio en su interior. La liberación de energía a partir de las reacciones que ocurren en el centro de la estrella proporciona la presión necesaria para que las estrellas no colapsen bajo su propia gravedad, además de energía que las hace brillar [7].

Las estrellas abarcan un amplio rango de luminosidades y colores, y se pueden clasificar de acuerdo con esas características. Las estrellas más pequeñas, conocidas como enanas rojas, pueden contener tan poco como  $0.1M_{\odot}$  y emitir sólo el 0.01 % de energía, brillando débilmente a temperaturas entre  $3000 - 4000K$ . A pesar de su naturaleza diminuta, las enanas rojas son, con mucho, las más numerosas estrellas en el Universo y tienen esperanzas de vida de decenas de miles de millones de años. Por otro lado, las estrellas más masivas conocidas como hipergigantes, pueden ser de  $100M_{\odot}$  o más, y tienen temperaturas de superficie de más de  $30,000K$ . Las hipergigantes emiten cientos de miles de veces más energía que el Sol, pero tienen una vida de sólo unos pocos millones de años.

Las secuencias evolutivas de estrellas se describen por su posición en un gráfico llamado el diagrama de Hertzsprung-Russell (HR). Estos autores descubrieron que cuando la luminosidad (magnitud absoluta o brillo) de las estrellas se representa frente a su temperatura (clasificación estelar) las estrellas no están distribuidas al azar en el gráfico, pero están en su mayoría restringidas a unas pocas regiones bien definidas. Las características físicas de las estrellas cambian con el tiempo, y por lo tanto sus posiciones sobre el diagrama HR también, por lo que el diagrama HR puede ser considerado como una trama visual de la evolución estelar.

En la figura (2.1) se muestra el HR, donde se grafican luminosidad y magnitud absoluta vs temperatura. El 90 % de todas las estrellas ocupan la banda diagonal que va desde la esquina superior izquierda (estrellas luminosas calientes) a la esquina inferior derecha (estrellas tenues frías) del diagrama HR también llamada secuencia principal. Las estrellas se convierten en estrellas de secuencia principal cuando el proceso de la fusión termonuclear - la conversión de hidrógeno en helio - se estabiliza. Las estrellas que se encuentran en la secuencia principal están en equilibrio hidrostático, es decir, la presión de radiación hacia el exterior desde el proceso de fusión es equilibrada por la fuerza gravitatoria hacia adentro y son el tipo de estrellas que se modelarán con las ecuaciones de TOV (2.42-2.44) [8].



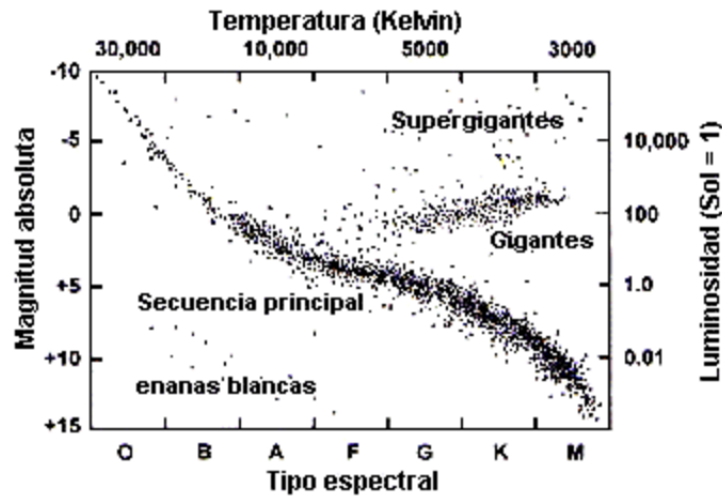


Figura 2.1: Diagrama de Hertzsprung Russell, donde se puede observar la secuencia evolutiva de las estrellas de acuerdo a diferentes características físicas que presentan. En ella se grafican su temperatura (la cuál se clasifica en diferentes tipos espectrales dependiendo de su valor), luminosidad, Color y magnitud.

### 2.4.1. Enanas blancas

La detección de enanas blancas es difícil, ya que son objetos con un brillo muy débil. Hay ciertas diferencias en las enanas blancas según su masa. Las menos masivas sólo alcanzan a quemar hidrógeno en helio. Es decir, el núcleo de la estrella nunca se comprime lo suficiente como para alcanzar la temperatura necesaria para quemar helio en carbono. Las enanas blancas más masivas sí llevan a cabo reacciones nucleares de elementos más pesados, es decir, en su núcleo podemos encontrar carbono y oxígeno.

Las enanas blancas son estrellas calientes y pequeñas, generalmente su masa cambia en el tiempo entre las  $0.5M_{\odot}$  y  $0.6M_{\odot}$ , por lo que su luminosidad es muy baja. Son los residuos presentes en el centro de las nebulosas planetarias. Dicho de otra manera, se cree que las enanas blancas son el núcleo de las estrellas de baja masa que quedan después de que la envoltura se ha convertido en una nebulosa planetaria.

El núcleo de una enana blanca consiste de material constituido por electrones degenerados. Sin la posibilidad de tener nuevas reacciones nucleares, y probablemente después de haber perdido sus capas externas debido a las partículas cargadas expulsadas de la atmósfera de la estrella y la expulsión de una nebulosa planetaria, la enana blanca se contrae debido a la fuerza de gravedad. La contracción hace que la densidad en el núcleo aumente hasta que se den las condiciones necesarias para tener un material de electrones degenerados. Este material genera presión de degeneración, el cual contraresta la contracción gravitacional.

Después de que una estrella se ha convertido en enana blanca, lo más probable es que su destino sea enfriarse y perder brillo. Debido a que las enanas blancas tienen una baja luminosidad, pierden energía lentamente, por lo que pueden permanecer en esta etapa por tiempo en el orden de millones de años.

Al ser estudiadas más a fondo las propiedades de las enanas blancas se encuentra que al aumentar su masa, su radio disminuye. A partir de esto es que se encuentra que hay un límite superior para su masa, el cual se encuentra alrededor de  $1.4M_{\odot}$ . Si la masa es superior a  $1.4M_{\odot}$  la presión de degeneración del núcleo no es suficiente para detener la contracción gravitacional. A este se le llama el límite de Chandrasekhar, y se dará una breve explicación a continuación. Para más detalles se puede consultar [9].

### Límite de Chandrasekhar

El límite superior de la masa de una enana blanca fue calculado por Chandrasekhar el cual se calcula de la siguiente manera. La energía de la enana blanca se escribe como

$$E_{tot} = E_c + E_p \quad (2.45)$$

donde  $E_c$  es la energía cinética y  $E_g$  la energía potencial gravitacional. Suponiendo que la densidad es uniforme en toda la estrella y sin usar unidades generalizadas

$$E_p = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (2.46)$$

Suponiendo el gas de electrones degenerado, lo que equivale a tomar el límite cuando  $T \rightarrow 0$ , el momento de Fermi se escribe como

$$p_F = \Lambda \left( \frac{N}{V} \right)^{1/3} \quad (2.47)$$

donde  $\Lambda = (3\pi^2)^{1/3} \hbar$  y  $V = 4\pi R^3/3$  es el volumen de la estrella y  $N$  el número total de electrones contenidos en la estrella. Por otro lado, el número de electrones contenidos entre  $p$  y  $p + dp$  es

$$dN = \frac{3V}{\Lambda^3} p^2 dp \quad (2.48)$$

La energía cinética del gas se puede escribir entonces como

$$E_c = \frac{3V}{\Lambda^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m_e} p^2 dp = \frac{3V p_F^5}{5\Lambda^3 2m_e} \quad (2.49)$$

donde  $m_e$  es la masa del electrón. De tal forma que obtenemos finalmente

$$E_c = \frac{3N\Lambda^2}{10m_e} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \quad (2.50)$$

El interior de la estrella esta compuesta en su mayor parte por  $C^{12}$  y  $O^{16}$  que contienen igual número de protones, neutrones y electrones, por lo que consideraremos

$$M = 2Nm_p \quad (2.51)$$

donde  $m_p$  es la masa del protón. Sustituyendo (2.46) y (2.50) en la ecuación (2.45) tenemos

$$E_{tot} = \frac{3}{20R^2} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \frac{\hbar}{m_e} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{5/3} - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (2.52)$$

El radio de equilibrio para la estrella  $R_{eq}$  es aquel en el cual la energía es mínima, calculando, obtenemos que

$$R_{eq} = \frac{(9\pi)^{2/3} \hbar^2}{8 m_e G m_p^{5/3} M^{1/3}} \quad (2.53)$$

que escrito de otra forma en terminos de  $R_\odot$  y  $M_\odot$  se reduce a

$$\frac{R_{eq}}{R_\odot} \simeq 0.01 \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^{1/3} \quad (2.54)$$

si tomamos la masa  $M$  como del Sol ( $M_\odot$ ), el radio de nuestra enana blanca sería alrededor de los  $7000km$ , aproximadamente el radio de la Tierra. De esta ecuación también podemos notar que conforme la masa incrementa el radio decrece.

Si tomamos  $M$  lo suficientemente grande los electrones se vuelven relativistas, y el análisis anterior necesita ser modificado. Entonces consideraremos ahora el caso relativista, por lo que la energía total de los electrones esta dada por

$$E_c = \frac{3V}{\Lambda^3} \int_0^{p_F} (p^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2} p^2 dp \quad (2.55)$$

que se puede aproximar mediante la serie a

$$E_c \simeq \frac{3Vc}{\Lambda^3} \int_0^{p_F} \left( p^3 + \frac{m_e^2 c^2 p}{2} + \dots \right) dp \quad (2.56)$$

de donde se obtiene

$$E_c \simeq \frac{3}{4} \frac{Vc}{\Lambda^3} (p_F^4 + m_e^2 c^2 p_F^2 + \dots) \quad (2.57)$$

De esta manera la energía total de la estrella en el caso relativista es

Cuadro 2.1: Tabla con datos observacionales de enanas blancas, en ella se muestra el nombre de la estrella así como su masa en términos de masas solares, radio comparado con el radio del sol y sus densidades centrales usando la ecuación  $\rho_0 = 3M/4\pi R^3$ .

Enana Blanca	Masa( $M_\odot$ )	Radio( $R_\odot$ )	$\rho_0$
Sirius B	1.034	0.0084	10.59
CD-38 10980	0.74	0.01245	2.3298
40 Eri B	0.501	0.0136	1.21009
Stein 2051 B	0.48	0.0111	2.1302

$$E_{tot} \simeq \frac{3}{8R} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \hbar c \left(\frac{M}{m_p}\right)^{4/3} - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} + \frac{3R}{4} \frac{1}{(9\pi)^{1/3}} \frac{m_e^2 c^3}{\hbar} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{2/3} \quad (2.58)$$

Calculando el valor de  $R_{eq}$  de manera análoga encontramos que para el caso relativista  $\frac{3}{8R} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \hbar c \left(\frac{M}{m_p}\right)^{4/3} - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} > 0$  dado que cuando es menor que cero la presión debida a la degeneración de los electrones es incapaz de detener el colapso de la estrella por la gravedad, entonces

$$\frac{\frac{3}{8} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \hbar c \left(\frac{M}{m_p}\right)^{4/3}}{\frac{3}{5} GM^2} > 1 \quad (2.59)$$

Este criterio se puede reescribir como

$$M < M_c \quad (2.60)$$

donde

$$M_c = \frac{15}{64} (5\pi)^{1/2} \frac{(\hbar c)^{1/2}}{G^{1/2} m_p^2} = 1.72 M_\odot \quad (2.61)$$

si se quiere encontrar una masa crítica mas realista no se toma en cuenta que la densiad sea constante de forma se puede demostrar que

$$M_c = 1.44 M_\odot \quad (2.62)$$

Debido a la existencia de este límite es que las estrellas de entre  $1.4 M_\odot$  y  $11 M_\odot$  deben perder masa para poder convertirse en enanas blancas, dos medios de pérdida de masa son los vientos estelares y la expulsión de nebulosas planetarias. De otro modo si esta no pierde esas cantidades el gas pasa a convertirse en un gas de neutrones y por ende una estrella de neutrones. En la tabla 2.1 se muestran enanas blancas que han sido observadas así como su masa, radio y densidad.

### 2.4.2. Estrellas de Neutrones

Una estrella de neutrones nace en las últimas etapas de una estrella masiva como consecuencia de una explosión de supernova. La implosión se da después de que se lleva a cabo la formación de partículas alfa y neutrones a partir del hierro en el núcleo de la estrella con rayos gamma, y los electrones se unen a los protones formando neutrones y neutrinos.

Una vez que la presión de degeneración que brindaban los electrones presentes en el núcleo desaparece, el núcleo de la estrella empieza a contraerse nuevamente. La contracción se puede detener si la masa de la estrella está por debajo de  $3M_{\odot}$ . En este caso la densidad es comparable a la densidad de un núcleo atómico, y una nueva forma de presión de degeneración se presenta, producida por neutrones (en vez de electrones).

Cuando la estrella termina de contraerse y llega al equilibrio, lo que queda es una estrella de neutrones que es un objeto muy compacto y muy masivo; tiene una masa de un par de masas solares contenidas en una esfera de 10 km de radio. Debido a la gran masa y el radio tan pequeño que tienen, la gravedad en la superficie de una estrella de neutrones es enorme.

#### Límite de Oppenheimer-Volkoff

Al igual que en el caso de las enanas blancas, existe un límite para el máximo de masa de una estrella de neutrones y a este se le conoce como el límite de Oppenheimer-Volkoff. El desarrollo que se lleva a cabo para encontrar dicha masa es el mismo que se desarrolló para la enana blanca modificando ahora que  $m_p \rightarrow m_p/2$  y  $m_e \rightarrow m_p$ . De manera que para el caso no relativista obtenemos que

$$\frac{R_{eq}}{R_{\odot}} \simeq 0.000011 \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right)^{1/3} \quad (2.63)$$

si la masa de la estrella es la masa del sol, es decir,  $M = M_{\odot}$  entonces el radio de la estrella sería de alrededor de  $10Km$ .

Tomando en cuenta el caso relativista la masa crítica es de alrededor de

$$M_c \simeq 6.9M_{\odot} \quad (2.64)$$

y mediante calculos mas realistas tomando la densidad no constante, los neutrones no como partículas puntuales y tomando en cuenta la relatividad general se obtiene que

$$M_c \simeq 3M_{\odot}. \quad (2.65)$$

En resumen cuando una estrella continúa contrayéndose la presión de degeneración

Cuadro 2.2: Tabla con datos observacionales de pulsares, en ella se muestra la velocidad de rotación

Pulsar	Velocidad de rotación (ms)	Radio(km)
0531+21 Cangrejo	33.40	10.01
0833-45 Vela	89.29	8 - 15
1951+32 SNR CTB80	39.53	Sin determinar
0630+18 Geminga	237.09	Sin determinar

provocada por los electrones es sustituida por la presión de degeneración provocada por los neutrones. Si se hacen los cálculos que realizó Chandrasekhar, en este caso también se encuentra que hay una masa máxima que puede tener una estrella de neutrones. Estos cálculos nos dicen que esta masa es de  $1.7M_{\odot}$ . Sin embargo, si se estudia la ecuación de estado de una estrella de neutrones con más cuidado, la masa resulta ser de  $3M_{\odot}$ . La evidencia observacional que se tiene hasta el momento confirma este último resultado, por lo que la masa crítica para estrellas de neutrones se toma como  $3M_{\odot}$ . Si la masa de la estrella está por encima de éste número, la gravedad se impone a la presión de degeneración haciendo que la estrella se contraiga sin que exista algo que pueda detener esta contracción. Es aquí cuando la creación de un agujero negro es inevitable. El gran campo magnético en rotación de la estrella de neutrones crea un fuerte campo eléctrico, el cual hace que los electrones en la superficie fluyan por los polos magnéticos. Estas partículas son aceleradas y producen una radiación electromagnética que sale de los polos magnéticos. Al rotar la estrella los rayos de radiación son enviados al espacio tal como si fuera un faro cuya luz podemos ver sólo si estamos en la dirección de los rayos. Desde la Tierra podemos ver la radiación como pulsos de la misma frecuencia de rotación de la estrella de neutrones, motivo por lo cual estas estrellas fueron identificadas como Pulsares. Algunos de estos se muestran en la tabla 2.2.

### 2.4.3. Estrellas de Quarks

Años después de la predicción de los quarks por Gell-Mann surge la idea de las estrellas de quarks, surgiendo a partir de una estrella de Neutrones. La identificación de una estrella de quarks requiere señales observacionales consistentes. Con esto nos referimos a propiedades físicas de la estrella, tales como su masa máxima, radio, periodo mínimo de rotación, enfriamiento por emisión de neutrinos, etc. Todas estas propiedades dependen de una única ecuación de estado para la materia densa de quarks que aún no ha sido completamente establecida. El rasgo distintivo más notable de las estrellas de quarks es que en ellas la materia no se mantendría unida por la atracción gravitacional, como ocurre en las demás estrellas, sino que sería consecuencia directa de la interacción fuerte entre los quarks. En este caso, la estrella se dice que es autoligada.

Algunas posibles estrellas observadas candidatas a ser este tipo de estrellas son la fuente RX J1856.5-3754 con temperatura de  $7 \times 10^5$  Celsius con un radio aproximado de  $11 \text{ km}$ , aunque se ha ido debilitando la idea de que fuese una estrella de neutrones. Otra candidata es la fuente 3C58 con periodo de rotación de  $65 \text{ ms}$ , con temperatura menor de un millón de grados Celsius, lo cuál no concuerda con la teoría pudiendo así ser una estrella de quarks.

#### 2.4.4. Agujeros Negros

Podemos pensar en un agujero negro como una cantidad de masa muy grande contenida en un solo punto, llamado comúnmente singularidad. Esta concentración de masa crea un campo gravitacional tan grande que nada puede escapar de él, ni siquiera la luz. La singularidad se encuentra envuelta por una superficie cerrada, llamada horizonte de sucesos. Dicho horizonte de sucesos separa la región del agujero negro del resto del universo y es la superficie límite del espacio a partir de la cual ninguna partícula puede salir.

El hecho de que ni siquiera la luz pueda escapar de un agujero negro se debe a que la velocidad de escape dentro del agujero es mayor a la velocidad de la luz y la relatividad especial nos dice que nada puede moverse más rápido que la luz. El horizonte de sucesos tiene un radio llamado el radio de Schwarzschild, en el cual la velocidad de escape es justamente igual a la velocidad de la luz, por lo que una vez que se entra al horizonte no se puede salir. El radio de Schwarzschild es proporcional a la masa del agujero; es decir, si duplicamos la masa del agujero negro, su radio también se duplicará.

Como se mencionó anteriormente, matemáticamente la forma de representar un objeto estático esféricamente simétrico es mediante la métrica

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + R(r)^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2) \quad (2.66)$$

donde  $r$  es la coordenada radial  $f$ ,  $h$  y  $R$  son funciones que dependen únicamente de  $r$ .

A esta métrica le podemos aplicar las ecuaciones de Einstein. Suponiendo el vacío ( $T_{\mu\nu} = 0$ ) y comparando con el límite Newtoniano obtenemos como solución final la métrica de Schwarzschild cuyo espacio-tiempo se ve de la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad (2.67)$$

observemos que cuando  $r \rightarrow \infty$  recuperamos la métrica de Minkosky. En la métrica existen dos singularidades, en  $r = 0$  y  $r = 2GM/c^2$ , la primera es una singularidad debido a la geometría y la segunda conocida como el radio de Schwarzschild que es el horizonte

de eventos antes mencionado y es una singularidad de coordenadas.

Para entender lo que pasa dentro de la singularidad es necesario conocer las leyes que rigen la unión de la relatividad general (escalas grandes) con la mecánica cuántica (escalas pequeñas). La unión de estas dos ramas de la física continúa abierta. Es por eso que sólo se tiene estudiado lo que pasa cerca de la singularidad del agujero negro.

A pesar de que los agujeros negros no son luminosos, su campo gravitacional es muy intenso, por lo que encontrar un agujero negro aislado es muy difícil, sin embargo si se encuentra cerca de otros objetos es posible inducir su presencia debido a la atracción gravitacional que siente el otro objeto. Es por eso que el estudio de sistemas binarios es de gran importancia para la detección de agujeros negros.

Todas estas ecuaciones que se han discutido pueden ser muy difíciles de solucionar, por lo que se requiere el uso de métodos numéricos y al hablar de estos métodos pueden complicarse los cálculos debido a la gran cantidad de pasos que se realizan por lo que se vuelve más simple usar un programa en algún lenguaje de programación que facilite la resolución de estas ecuaciones.

En el siguiente capítulo se dará un breve repaso a diferentes métodos numéricos con los cuales se podrán resolver las ecuaciones ya sean de hidrodinámica, de Einstein o TOV. Posteriormente se implementará un código numérico programado en FORTRAN que será capaz de resolver todas estas ecuaciones.





# Capítulo 3

## Métodos Numéricos

Los problemas físicos en general, y los astrofísicos en particular, se modelan a través de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Es por esto que la herramienta numérica ha jugado siempre un papel importante, debido a que la mayor parte de las ecuaciones que aparecen en los problemas prácticos no se pueden resolver exactamente y por tanto hay que recurrir a algún tipo de aproximación para tener idea del comportamiento de sus soluciones.

Para este trabajo se hizo uso de diferentes métodos numéricos para resolver los sistemas de ecuaciones que simulan los sistemas astrofísicos en los que estamos interesados, como lo son las ecuaciones TOV, las ecuaciones de Euler para la hidrodinámica de la estrella y las ecuaciones de Einstein para la evolución temporal.

### 3.1. Métodos Runge-Kutta

Dada una ecuación diferencial ordinaria  $dy/dx = f(x, y)$  con condición inicial  $y(x_0) = y_0$ , existen diferentes métodos numéricos para resolverla, pero nos concentraremos en uno específico llamado método Runge-Kutta. El método de Runge-Kutta posee un determinado número de etapas, que coincide con el número de evaluaciones de la función  $f$  donde discretizamos el dominio  $x$  de tal forma que  $x_j = j\Delta x$

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2 + \dots + b_qk_q) \quad (3.1)$$

en donde  $h = x_{j+1} - x_j$  y

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n), \\
k_2 &= f(x_n + c_2h, y_n + a_{2,1}hk_1), \\
k_3 &= f(x_n + c_3h, y_n + a_{3,1}hk_1 + a_{3,2}hk_2), \\
&\vdots \\
k_q &= f(x_n + c_qh, y_n + a_{q,1}hk_1 + a_{q,2}hk_2 + \cdots + a_{q,q-1}hk_{q-1})
\end{aligned}$$

Para  $q = 1$  simplemente tenemos el caso del método de Euler,  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ , pero para resolver nuestras ecuaciones usaremos el caso de Runge-Kutta de cuarto orden, es decir,  $q = 4$  para que los errores que se obtengan al solucionar las ecuaciones sean de cuarto orden. Existen una gran cantidad de formas para asignarle diferentes valores a las constantes, nosotros consideraremos la forma más usada que es de la forma

$$y_{n+1} = y_n + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \quad (3.2)$$

donde simplemente

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n), \\
k_2 &= f(x_n + h/2, y_n + hk_1/2), \\
k_3 &= f(x_n + h/2, y_n + hk_2/2), \\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3).
\end{aligned}$$

Este método será utilizado para resolver las ecuaciones TOV (2.43-2.44)

## 3.2. Método de Diferencias Finitas

Dada una ecuación diferencial parcial para una función  $f$ , éste método consiste esencialmente en definir una versión discreta de dicha ecuación que nos permita resolverla bajo un dominio discreto contenido en el dominio continuo original [1, 10].

Definimos nuestro dominio discreto, a través de una malla de puntos  $x_j = j\Delta x$  para el espacio y  $t^n = n\Delta t$  para el tiempo, donde  $j = 1, 2, \dots, N_x$  y  $n = 1, 2, \dots, N_t$ . La función  $f$  es la involucrada en la ecuación diferencial. Luego de considerar nuestra discretización,  $f$  estará definida exclusivamente en los puntos  $(t^n, x_j)$  de la malla, por lo que la denotaremos por  $f(t^n, x_j)$ .

Una vez que tenemos el dominio discreto es necesario redefinir la ecuación diferencial

parcial de tal forma que se pueda usar este dominio recurriendo a expansiones en serie de Taylor en torno a  $f(t^n, x_j)$ .

Consideremos por ejemplo la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.3)$$

para aproximar la segunda derivada con respecto a  $x$  y considerando la variable temporal  $t$  como una constante, recurrimos a los siguientes desarrollos de Taylor

$$f(x_{j-1}) = f(x_j) - \Delta x \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_j} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_j} - O(\Delta x^3) \quad (3.4)$$

$$f(x_j) = f(x_j) \quad (3.5)$$

$$f(x_{j+1}) = f(x_j) + \Delta x \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_j} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_j} - O(\Delta x^3) \quad (3.6)$$

donde los terminos  $O(\Delta x^3)$  hacen referencia a términos de la magnitud del orden de lo que se expresa dentro del paréntesis (en este caso a  $\Delta x^3$ ).

Haciendo una combinación lineal de las ecuaciones anteriores podemos eliminar las derivadas que no necesitamos, por ejemplo despejando la derivada de orden 2

$$\left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_j} = \frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1}))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (3.7)$$

De manera similar, para la variable  $t$ , dejando  $x$  constante

$$\left. \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right|_{t=t_n} = \frac{f(t^{n+1}) - 2f(t^n) + f(t^{n-1}))}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2) \quad (3.8)$$

y usando ambas aproximaciones tenemos que

$$O(\Delta x^2, \Delta t^2) = \frac{f(t^{n+1}, x_j) - 2f(t^n, x_j) + f(t^{n-1}, x_j)}{\Delta t^2} - \frac{f(t^n, x_{j+1}) - 2f(t^n, x_j) + f(t^n, x_{j-1}))}{\Delta x^2}. \quad (3.9)$$

De esta ecuación podemos determinar el valor en cierto punto de la malla usando los datos que conocemos de los alrededores. Por ejemplo, si conocemos todos los valores de

Cuadro 3.1: Coeficientes de la aproximación de la derivada de primer orden para diferentes puntos vecinos. Para las aproximaciones con segundo orden van como  $f' = 1/(2\Delta x)(\dots) + O(\Delta x^2)$  mientras que para los de cuarto orden  $f' = 1/(12\Delta x)(\dots) + O(\Delta x^4)$

	$x_{j-4}$	$x_{j-3}$	$x_{j-2}$	$x_{j-1}$	$x_j$	$x_{j+1}$	$x_{j+2}$	$x_{j+3}$	$x_{j+4}$
Segundo Orden				-1	0	1			
			1	-4	3				
					-3	4	-1		
Cuarto Orden	3	-16	36	-48	25				
		-1	6	-18	10	3			
			1	-8	0	8	-1		
				-3	-10	18	-6	1	
					-25	48	-36	16	-3

nuestra función en  $t^{n-1}$  y  $t^n$  los valores en  $t^{n+1}$  los determinamos despejando  $f(t^{n+1}, x_j)$ . Es necesario mencionar que para este tipo de solución es necesario dar o determinar los valores en la frontera.

De igual manera para encontrar la derivada de primer orden se busca la combinación de manera que se eliminen todas las demás derivadas que no sean de primer orden. Haciendo un poco de algebra tenemos

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_j} = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (3.10)$$

Es necesario saber que como estamos resolviendo la ecuación numéricamente los términos  $O$  nunca serán cero, y debemos tomarlos en consideración al realizar los cálculos. Existen las aproximaciones centradas, que son las que se mostraron anteriormente, ya que se evalúa en la misma cantidad de puntos del lado derecho e izquierda. Pero para las fronteras se pueden hacer aproximaciones únicamente que se tome puntos a la izquierda del valor que estamos calculando en la frontera derecha y puntos a la derecha del valor que queremos encontrar en la frontera izquierda de la malla. Estos valores se pueden observar en la Tabla (3.1)

### 3.3. Método de Líneas

Una vez que se tiene el método de diferencias finitas y Runge-Kutta, utilizamos el método líneas en el cual calcularemos los valores en el tiempo utilizando el método Runge-Kutta y en el espacio usaremos diferencias finitas [1]. Consideremos la siguiente ecuación

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \quad (3.11)$$

reescribimos en forma semi-discretizada, haciendo uso del método de diferencias finitas en el lado derecho

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3.12)$$

donde  $j = 1, \dots, N_x - 1$  que a diferencia de la ecuación en diferencias finitas únicamente se ha discretizado la parte espacial en  $x$  y que se suele etiquetar por  $rhs(f)$  por estar en la parte derecha (*right-hand-side* en inglés). Para evolucionar una función al tiempo  $t^{n+1}$  y lo único con lo que se cuenta son valores de  $x$  a tiempos previos. Para determinar el valor de  $f$  al tiempo  $t^{n+1}$  en cada valor de  $x_j$ , usando un resolvidor de ecuaciones diferenciales ordinaria para  $f$  en la variable  $t$ . En nuestro caso simplemente usaremos el método de Runge-Kutta de cuarto orden, para la parte temporal. Este método será esencial para resolver las ecuaciones de la hidrodinámica (B.4-B.6) y la ecuación de Einstein (2.38). Para una deducción completa de la implementación de los métodos a las ecuaciones ver el apéndice B.

### 3.4. Orden de Convergencia

Es bien sabido que cuando se trabaja en sistemas numéricos existen diferentes tipos de errores debido a la capacidad de almacenar números del ordenador. Existen diferentes tipos de errores que se pueden analizar en un programa de esta índole, tales como errores de redondeo, errores absolutos, entre otros, pero si en un sistema de ecuaciones en el que se está trabajando no tiene una solución absoluto se trabajan con otros métodos y en este caso especial se uso convergencia.

Se entiende por convergencia de un método numérico que al realizar cierto número de repeticiones a diferentes valores de el diferencial  $\Delta x$  (resoluciones), las aproximaciones obtenidas terminan por acercarse cada vez más al verdadero valor buscado o el valor más exacto posible si es que no se cuenta con una solución analítica.

En la medida en la que un método numérico requiera de un menor número de iteraciones que otro, para acercarse al valor numérico deseado, se dice que tiene una mayor rapidez de convergencia. La velocidad con la cual una sucesión converge a su límite es llamado orden de convergencia.

Por ejemplo si tomamos de la ecuación de onda  $Error_1 = O(\Delta x^2, \Delta t^2) = E\Delta x^2$  y usando una resolución mayor de forma  $\Delta x_k = \Delta x/k$  se obtiene que el  $Error_k = E\Delta x^2/k^2$  donde finalmente si tenemos

$$\frac{Error_1}{Error_k} = k^2 \quad (3.13)$$

de forma que simplificando podemos obtener que si refinamos en un valor de  $n$  tenemos  $k^n$ .

Una forma de comprobar la convergencia es usando el valor analítico, pero si no se tiene este valor analítico se recurre a la autoconvergencia que es comparar los diferentes valores encontrados para verificar si tienden a una solución de acuerdo a las resoluciones utilizadas.

En el próximo capítulo se muestran los resultados obtenidos al haber introducido en el código las diferentes configuraciones iniciales usando el método de diferencias finitas para las ecuaciones TOV y posteriormente la evolución numérica que se solucionan las ecuaciones de Einstein y Euler por el método de líneas. Así como el análisis de convergencia para verificar que se realizó de manera correcta.

# Capítulo 4

## Estabilidad y evolución de las TOV

Como se menciona al inicio de este trabajo, el objetivo es que para una estrella TOV estática esféricamente simétrica se evolucione el fluido y la geometría temporalmente, para ello es necesario partir de una configuración inicial de equilibrio hidrostático para un fluido con simetría esférica y que obedece a una ecuación de estado politrópica proporcionada por las ecuaciones TOV. Dadas diferentes densidades centrales se puede determinar para cuales de ellas habrá estabilidad.

### 4.1. Configuración Inicial

De acuerdo a las soluciones que se quieren encontrar se parte de la métrica en coordenadas de Schwarzschild, es decir, de la ecuación (2.27) donde el elemento de línea se puede particularizar de forma que la función métrica  $a^2(r)$  se exprese en términos de la masa encerrada por una esfera de radio  $r$  de forma que se obtiene

$$ds^2 = -\alpha(r)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m(r)}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.1)$$

donde se ha considerado el tiempo constante  $t = 0$ ,  $a$  y  $\alpha$  dependen únicamente de la coordenada  $r$ .

Otro elemento necesario para la evolución es el tensor de energía momento y como estamos considerando el caso de un fluido perfecto para modelar la estrella, el tensor se expresa de la forma

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 h u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \quad (4.2)$$



## Valores Iniciales

Considerando las expresiones mencionadas se deducen las ecuaciones TOV para una estrella esféricamente simétrica y en equilibrio, como se muestra en las ecuaciones (2.42-2.44).

De estas  $m(r)$  se interpreta como la masa interior al radio  $r$ , por lo que la masa total de la estrella, se obtiene simplemente integrando la ecuación, en forma que la masa total  $M_t$  es

$$M_t = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr \quad (4.3)$$

de manera similar la masa en reposo  $M_0$  se determina

$$M_0 = \int_0^R 4\pi r^2 \rho_0 (1 - 2M/r)^{-1/2} dr. \quad (4.4)$$

Por otro lado  $\rho$  y  $\rho_0$  están relacionados mediante la ecuación

$$\rho = \rho_0(1 + \epsilon) \quad (4.5)$$

notese que se tiene un sistema de tres ecuaciones diferenciales acopladas y cuatro incógnitas  $m$ ,  $p$ ,  $\phi$  y  $\rho$ , por lo que es necesario recurrir a una ecuación de estado, la cuál no sólo cierra el sistema de ecuaciones sino que también proporciona información física sobre la estrella. Es conveniente usar la ecuación de estado para un gas politrópico por lo que nuestra ecuación de estado es de la forma

$$p = K\rho_0^\Gamma \quad (4.6)$$

donde  $K$  es la constante politrópica y  $\Gamma = 1 + 1/n$  donde  $n$  es el índice politrópico en el cuál si  $1/2 < n < 1$  corresponde a una estrella de neutrones y un  $n$  mayor una enana blanca.

Otro dato importante es que las ecuaciones divergen en  $r = 0$  por lo que es necesario elaborar un método para que en valores de  $r$  muy pequeños no ocurran problemas numéricos, por lo que se introducen expansiones de Taylor de  $m$  en  $r = 0$  de tal forma que se tiene

$$m(r) = m(0) + r \left. \frac{dm}{dr} \right|_{r=0} + \frac{r^2}{2} \left. \frac{d^2m}{dr^2} \right|_{r=0} + \frac{r^3}{6} \left. \frac{d^3m}{dr^3} \right|_{r=0} + \dots \quad (4.7)$$

donde sustituyendo los resultados en las ecuaciones TOV se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\frac{dm}{dr} = \frac{4\pi r \rho / 3 + 4\pi r p}{1 - 8\pi r^2 / 3} \quad (4.8)$$

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{4\pi\rho r/3 + 4\pi r p}{1 - 8\pi r^2/3} \quad (4.9)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{4\pi\rho r/3 + 4\pi r p}{1 - 8\pi r^2/3}. \quad (4.10)$$

De acuerdo al valor de  $r$  se recurrirá a un sistema de ecuaciones específico, para el caso  $r \leq dr$  usaremos (4.8-4.10) y si  $r > dr$  entonces usamos (2.42-2.44)

Para poder integrar numéricamente, como se menciona antes se recurre a condiciones iniciales en  $r = 0$ , estas son:

- $m(0) = 0$  ya que en el origen el campo gravitacional debe ser cero, donde el espacio-tiempo corresponde al de Minkowski ( $a(r) = 1$ ).
- $p(0) = K\rho_c^{\Gamma}$  donde,  $\rho_c$  es la densidad central de la estrella y la cuál se mostrará mas adelante que es pieza clave en la estabilidad de la estrella.
- $\alpha(0) = \alpha_i$  corresponde al valor inicial del lapso, se puede elegir cualquier valor ya que se puede reescalar multiplicando por una constante de manera que fuera de la estrella nos quede la solución de Schwarzschild.

Algo muy importante que se debe mencionar es que para la solución exterior de la estrella se usa la métrica de Schwarzschild. La forma de resolver las ecuaciones es aplicando las ecuaciones (4.8,4.9 y 4.10) al resolvidor Runge-Kutta de cuarto orden en las ecuaciones (B.1,B.2 y B.3) aplicando las condiciones iniciales y usando estas únicamente para los valores  $r \leq dr$ . Posteriormente solucionamos con las ecuaciones TOV normales y obtenemos los siguientes resultados para una configuración en específico.

Cuando  $r$ , la coordenada radial tiende a  $R$  (el radio de la estrella) el valor de la densidad tiende a cero, por lo que es indispensable recurrir a un *floor* en la densidad (un valor que se introduce en el código para simular una atmósfera muy pequeña) para de esta manera evitar problemas de divergencia debido a que en las ecuaciones se dividen por la densidad al momento de la evolución. Para el caso de este trabajo se usa un *floor* o atmósfera de  $\rho = 10^{-12}$ .

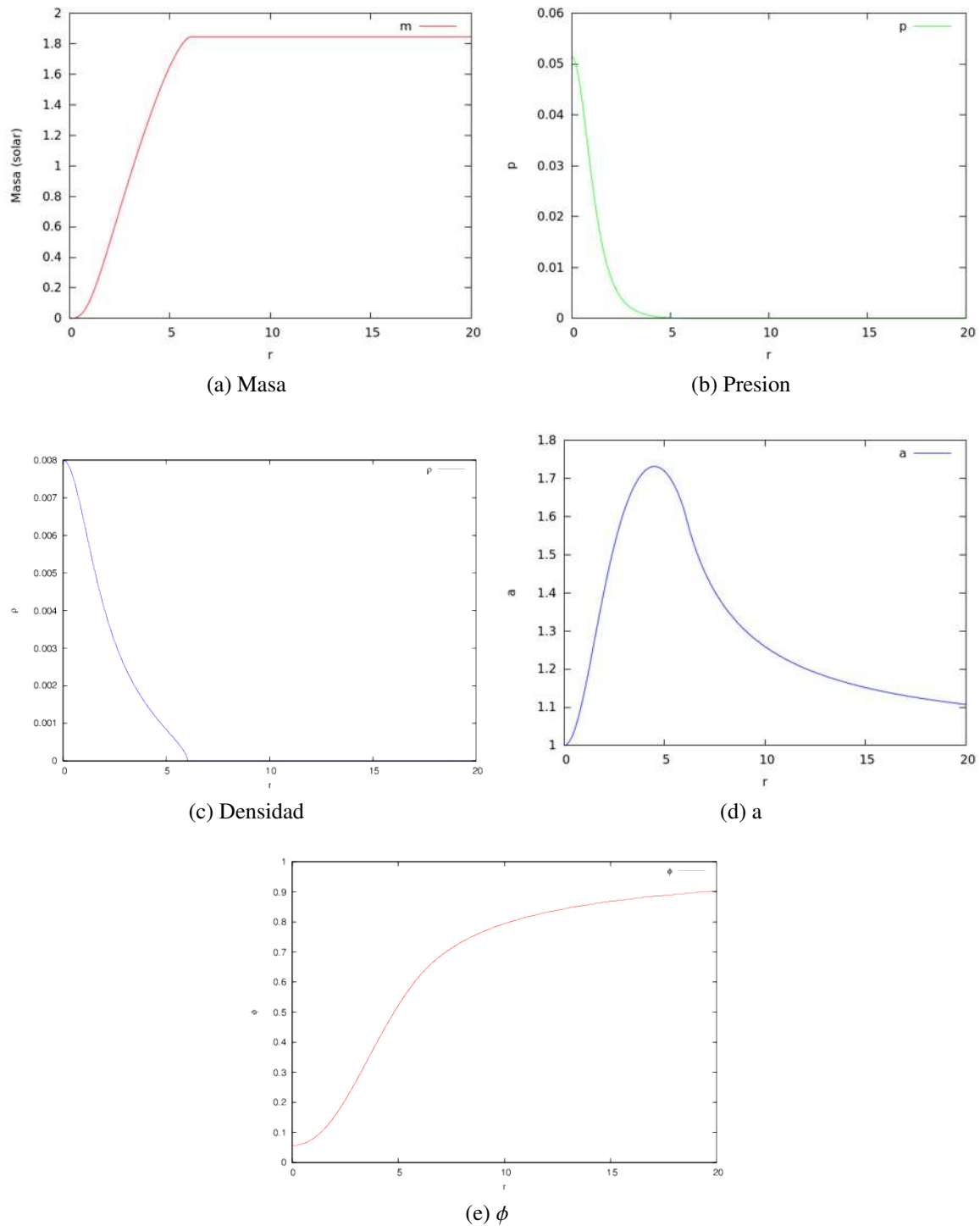


Figura 4.1: Gráficas con los valores de la configuración inicial para la Masa, la densidad central, la presión, el valor de  $\alpha$  donde dicho valor ya ha sido reescalado para poder observar una continuidad en la curva y el valor de  $a$  contra el radio de la estrella  $r(km)$  para el caso de  $K = 30000$ ,  $\Gamma = 2.75$  y con una densidad central de  $\rho = 0.008$  en unidades generalizadas.

## Estabilidad e inestabilidad

La ventaja de tener una configuración inicial es que se puede visualizar la estrella y a partir de un "barrido" en un rango de valores para la densidad central, donde se obtiene en cuales valores la estrella es estable o inestable. El proceso para determinar los valores estables o inestables se obtienen a través de los límites de Oppenheimer-Volkoff y de Chandrasekhar para las estrellas. Esencialmente los valores que se encuentran en las pendientes negativas corresponden a los valores para los cuales las densidades centrales corresponden a la rama inestable y los que se encuentran en las pendientes positivas corresponden a la rama estable.

Se usarán tres diferentes casos para realizar el análisis de la estabilidad de la estrella y en cada uno de ellos se cambiará la densidad central para verificar la masa máxima en cada uno de los casos:

- Valores de  $K = 1$  y  $\Gamma = 5/3$
- Valores de  $K = 100$  y  $\Gamma = 2$
- Valores de  $K = 30000$  y  $\Gamma = 2.75$

una vez ingresados estas condiciones y realizando el un análisis de los valores para la densidad central entre  $10^{-6}$  y 0.15 para el primer caso,  $10^{-6}$  y 0.01 para el segundo y tercer caso, se obtienen las figuras (4.2-4.4) para cada uno de los diferentes casos

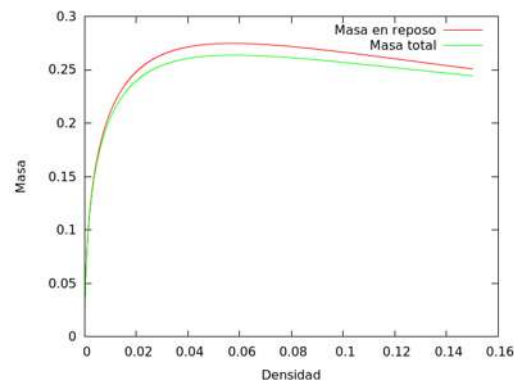


Figura 4.2: Gráfica de la masa en reposo y la masa total contra diferentes densidades centrales, donde la masa  $M = M/M_{\odot}$  para el caso  $K = 1$  y  $\Gamma = 5/3$

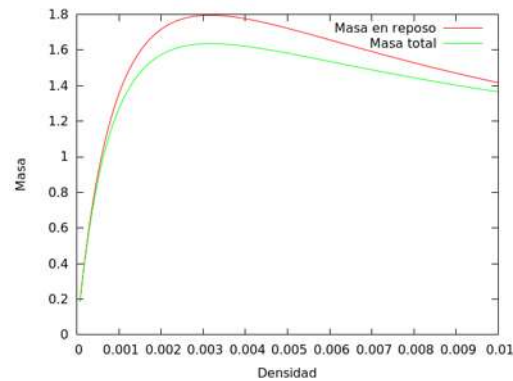


Figura 4.3: Gráfica de la masa en reposo y la masa total contra diferentes densidades centrales, donde la masa  $M = M/M_{\odot}$  para el caso  $K = 100$  y  $\Gamma = 2$

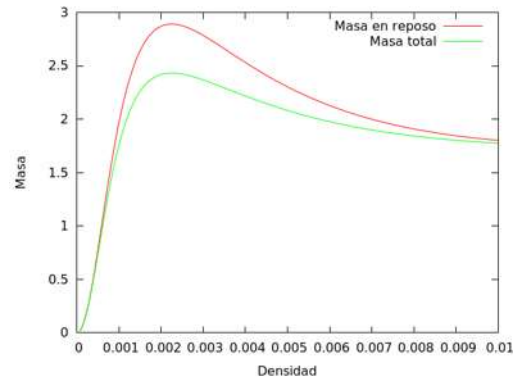


Figura 4.4: Gráfica de la masa en reposo y la masa total contra diferentes densidades centrales, donde la masa  $M = M/M_{\odot}$  para el caso  $K = 30000$  y  $\Gamma = 2.75$

En estas figuras también se observa el valor de la Masa en reposo, donde se puede encontrar la diferencia en como aumenta la masa introduciendo valores que se vuelven mas relativistas, es decir, entre más relativista se vuelve la estrella las masas dejan de coincidir.

## 4.2. Evolución

Una vez solucionado el problema de los valores iniciales y teniendo en cuenta las configuraciones de interés se procede a evolucionar estas estrellas TOV. En el problema de la evolución se recurren a seis ecuaciones, tres para la evolución de la geometría y otras tres para la evolución hidrodinámica. Estas ecuaciones involucran cinco variables primitivas a determinar.

Usando las ecuaciones de Einstein (2.38-2.39) y las ecuaciones de la hidrodinámica (B.4-B.6), de manera que la forma de ir resolviendo las ecuaciones paso a paso es de la siguiente manera:

- Se integra en el espacio  $\alpha(r^n, r)$  utilizando el resolvidor Runge-Kutta de cuarto orden tal como se encuentra en la sección del apéndice B.
- Se integran en el tiempo las ecuaciones, para las variables conservativas  $D$ ,  $S_r$  y  $\tau$  usando el método de líneas.
- Se integra en el tiempo  $a$  utilizando el métodos de líneas con un Runge-Kutta de cuarto orden
- Reconstrucción de las variables primitivas  $\rho$ ,  $v^r$  y  $p$  una vez que ya se tienen las variables conservativas
- Repetir para  $n$  pasos en el tiempo

Ya que se tratan de 5 ecuaciones con 6 incógnitas, por lo que la ecuación (2.39) únicamente se implementará como constricción para verificar la evolución de las soluciones. De manera que tenemos la siguiente ecuación

$$-\frac{\partial a}{\partial r} + a^3 \left[ 4\pi r (\tau + D) - \frac{m}{r^2} \right] = O = Ham(t, r) \quad (4.11)$$

Usando directamente las configuraciones iniciales que se obtienen a partir de las soluciones a las TOV y resolviendo únicamente con diferencias finitas las ecuaciones de hidrodinámica se observa un error en la evolución, este error se debe a las discontinuidades dadas por las ecuaciones de la hidrodinámica al momento de llegar a la atmósfera de la estrella que se les conocen como ondas de choque, una forma de solucionar este problema es recurriendo a un método conocido como viscosidad artificial. Para simular problemas de hidrodinámica, se requieren técnicas numéricas para permitir que los algoritmos sean capaces de modelar ondas de choque. Sin ello, la simulación desarrollará oscilaciones no físicas en los resultados numéricos alrededor de la región de choque. La aplicación de las leyes de conservación de la masa, del momento y de la energía a través de una onda de choque requiere la simulación de la transformación de energía cinética en energía calorífica. En otras palabras, la transformación de energía puede ser representada como una forma de disipación debido a una viscosidad del sistema. Esta idea llevó al desarrollo de la viscosidad artificial de Von Neumann-Richtmyer.

Usando una forma parecida a esta viscosidad artificial de Von Neumann-Richtmyer nos deshacemos de este problema y se prosigue a resolver con diferencias finitas (se muestra una deducción completa de la implementación anexando la viscosidad en el apéndice B), donde se obtienen los siguientes resultados:

### Caso $K = 1$ y $\Gamma = 5/3$

#### Resultados en la rama estable

Comenzamos usando una densidad central de  $\rho = 0.01$  que corresponde a la rama estable, con una atmósfera de  $\rho = 10^{-12}$ . El dominio espacial se fija entre  $0 < r < 5$  con 1000 puntos y con un total de 50000 puntos en el tiempo para la primera resolución (R1) y usando que  $\Delta t = \Delta x/4$ . Como se observa de la figura (4.5) el valor máximo de  $a$  en el tiempo con R1 hace un par de oscilaciones y luego decae muy rápido. Debido a esto es necesario recurrir a otras tres resoluciones mayores que llamaremos a partir de este momento "R2", "R3" y "R4" con 2000, 4000 y 8000 puntos respectivamente y 100000, 200000 y 400000 puntos temporales manteniendo que  $\Delta t = \Delta x/4$ . Una vez implementado en el código se puede observar como los valores máximos de  $a$  ya no decaen tan rápido y empiezan a tener un comportamiento oscilatorio.

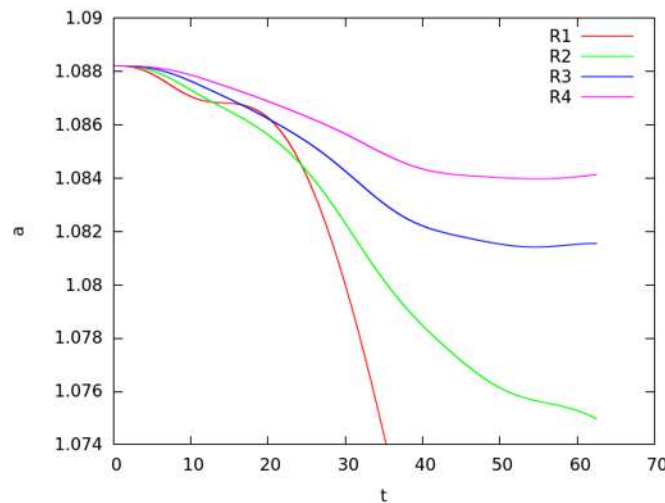


Figura 4.5: Valores máximos de  $a$  en el tiempo para cuatro resoluciones diferentes. Los máximos de  $a$  decaen, en el caso de R1 lo hace muy rápido mientras que se observa que conforme se aumenta la resolución las oscilaciones de  $a$  comienzan a aparecer.

Graficando la constricción Hamiltoniana se obtienen las figuras (4.6) donde en cada una de las resoluciones se comprueba que difieren en un factor de  $k^n$  es decir en 2, 4 y 8, los cuales multiplican a cada una de las resoluciones para observar que realmente convergen.

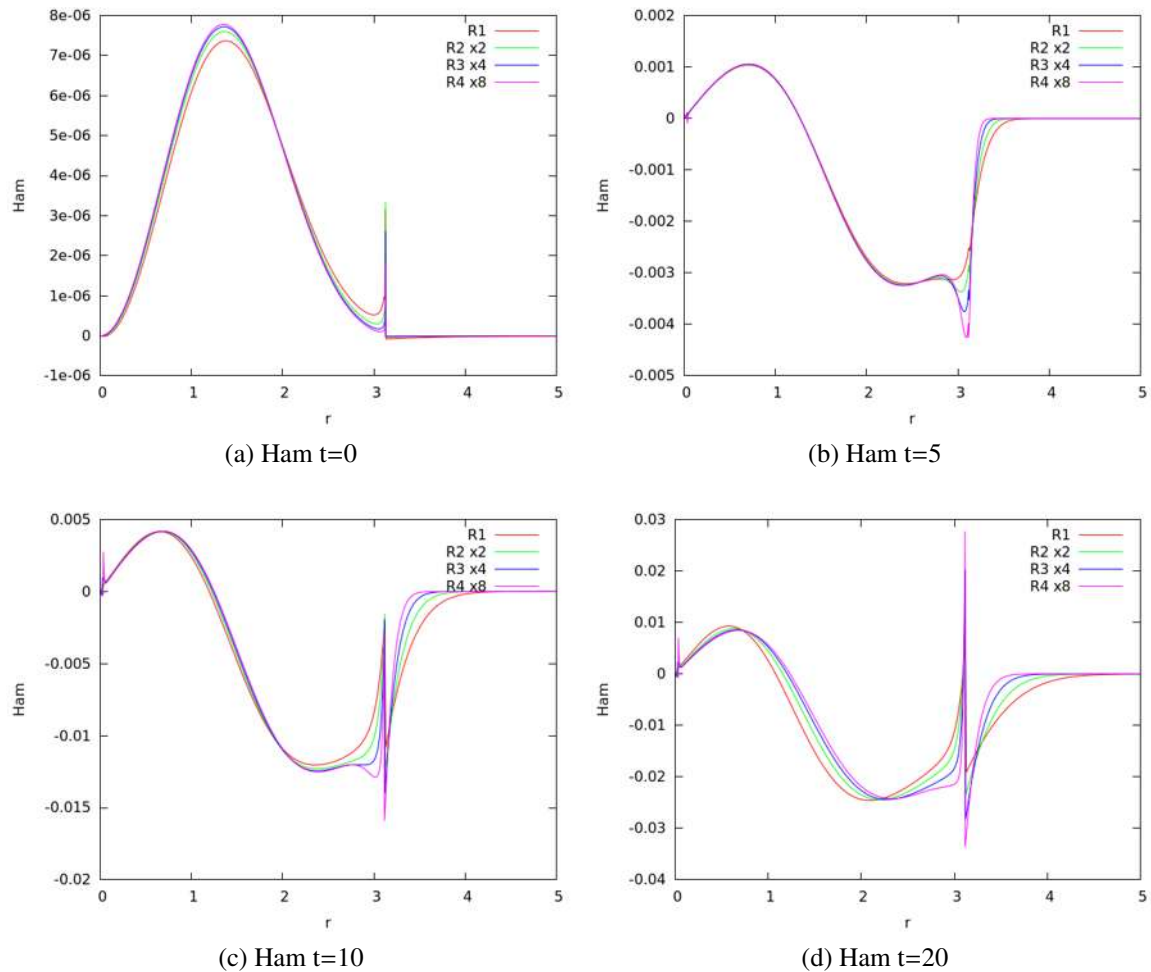


Figura 4.6: Gráficas de la constricción hamiltoniana a los tiempos  $t=0$ , 5, 10 y 20 respectivamente para el caso  $K = 1$ ,  $\Gamma = 5/3$  en un rango de  $0 < r < 5$  para las cuatro resoluciones diferentes. Se observa un comportamiento de acuerdo a lo esperado en  $t = 0$ , pero debido a la atmósfera de la estrella existe una "contaminación" que altera la convergencia.

Podemos observar también que no en todos los puntos converge, en especial en la superficie de la estrella, ya que existe un cambio en la densidad debido a la discontinuidad y sobre la cuál se empleó el método de viscosidad artificial. Esto no es de todo bueno, ya que debido a la superficie de la estrella se estarán observando estos cambios drásticos en los valores de las constricciones hamiltonianas, los cuales afectarán de manera inmediata al factor de convergencia que se está esperando.



### Resultados rama inestable

En el caso de la rama inestable el valor que usamos de densidad es  $\rho = 0.1$ , el valor de la atmósfera y los valores de la discretización se mantienen como en el caso estable al igual que las diferentes resoluciones. Como se podrá observar en la figura, para el valor de  $a$  crece rápidamente para R1, mientras que para las demás el valor de  $a$  decae.

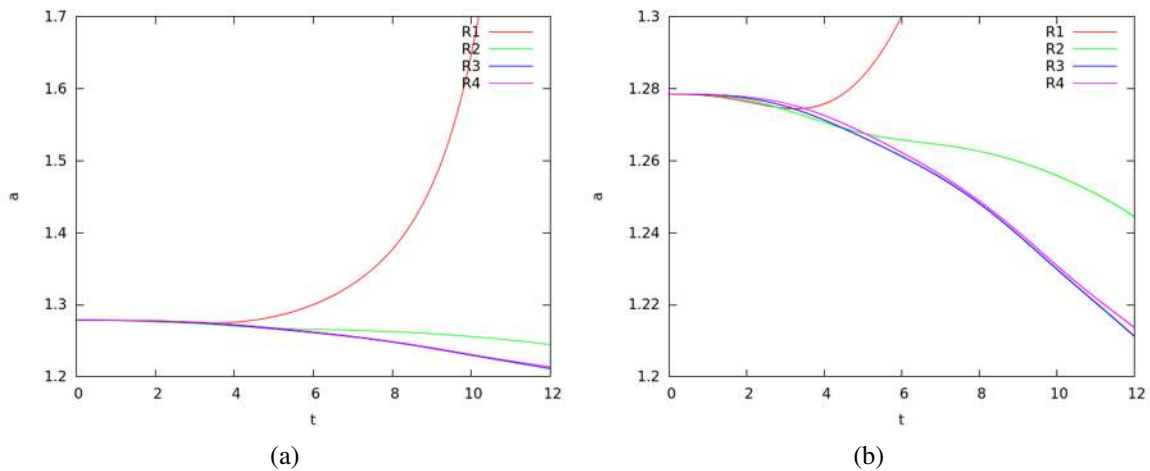


Figura 4.7: En (a) se muestra la gráfica completa de los valores máximos de  $a$  en el tiempo para las cuatro resoluciones diferentes en el caso de  $K = 1$  y  $\Gamma = 5/3$ , en ella se observa como el máximo de  $a$  en R1 crece muy rápido y en las demás decae, en (b) la misma gráfica pero haciendo un "zoom" a la región donde se encuentran R2, R3 y R4.

De primera instancia podría pensarse que en el caso de R1 aumenta debido a la acreción de materia que se va absorbiendo de la atmósfera, pero simplemente es un fallo del propio código, debido a que la resolución no es lo suficientemente buena para obtener algunos valores prometedores.

De igual manera al calcular la constricción hamiltoniana se observa en las gráficas (4.12) el factor de convergencia de segundo orden para  $t = 0$ , pero al aumentar el tiempo, para la primera resolución el código falla lo cual no permite dar mas información del hamiltoniano en esta, mientras que para las demás resoluciones se mantiene presente el factor de convergencia hasta que en  $t = 20$  observamos que nuevamente los resultados alrededor de la atmósfera empiezan a variar.

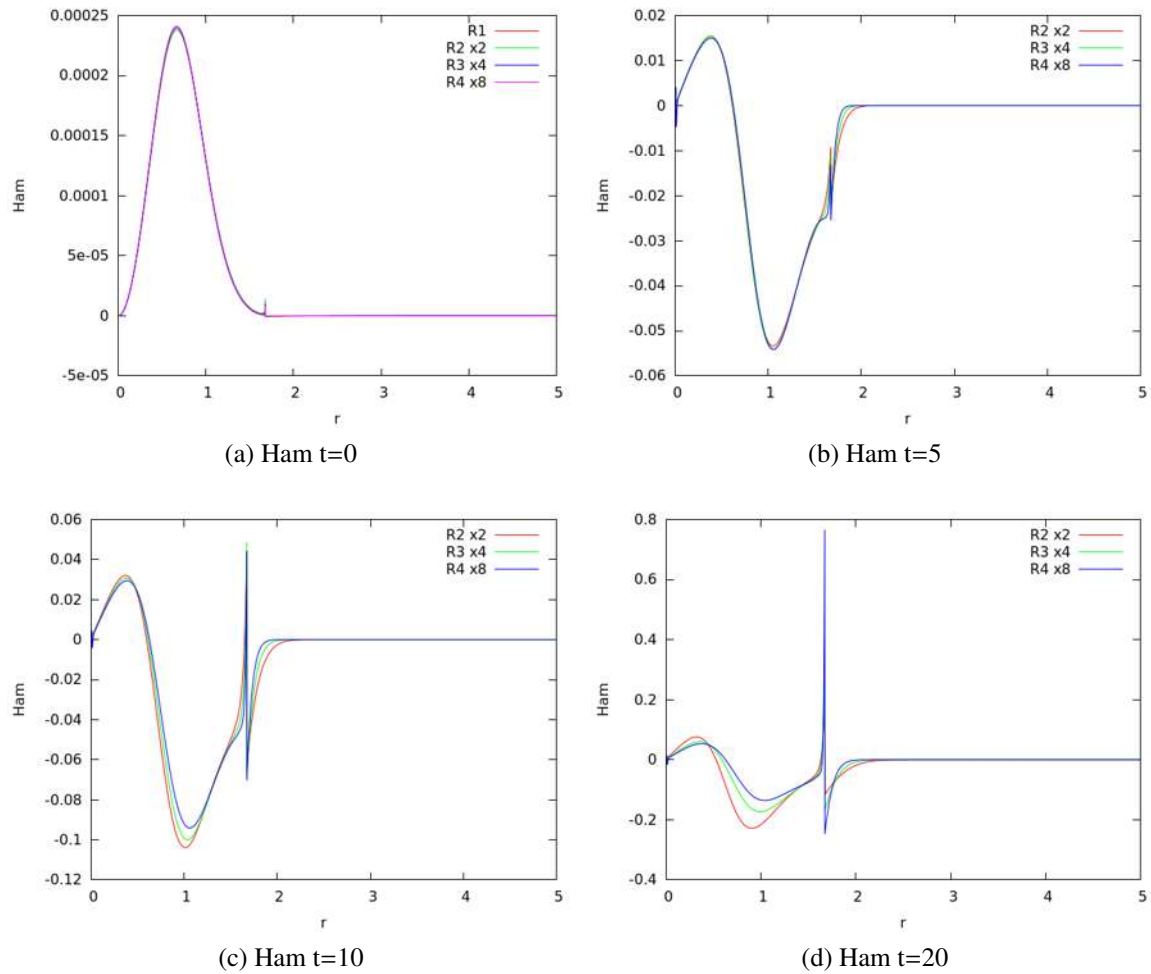


Figura 4.8: Gráficas de las constricciones Hamiltonianas para el caso  $K = 1$ ,  $\Gamma = 5/3$  donde (a) corresponde a  $t = 0$  donde se puede observar el factor de convergencia esperado. En (b) y (c) se conserva el factor de convergencia casi sin problemas pero en (d) correspondiente a  $t = 20$  se observa como se va perdiendo alrededor de la superficie.

Otra cosa que se debe pensar es que, a pesar de que se está usando el Runge-Kutta de cuarto orden, los errores serán de primer orden debido a que en el método de líneas al solucionarse las diferencias finitas únicamente se utilizan las derivadas a primer orden y se mantendrán los errores a orden más bajo.

## Caso $K = 100$ y $\Gamma = 2$

### Resultados en la rama estable

Para este caso la densidad central que usaremos será de  $\rho = 0.001$  y  $0 < r < 15$ , mientras que la atmósfera y las discretizaciones se mantendrán de la misma forma que el caso anterior al igual que las resoluciones R1, R2, R3 y R4. En la figuras (4.9) de igual manera al caso anterior, al presentar los máximos de  $a$  en la primera resolución esta tiende  $a$  crecer muy rápido, pero una vez usando mayor resolución esta empieza a comportarse de una manera en la que se ve que oscila en torno al valor de  $a$  inicial sobre una pendiente.

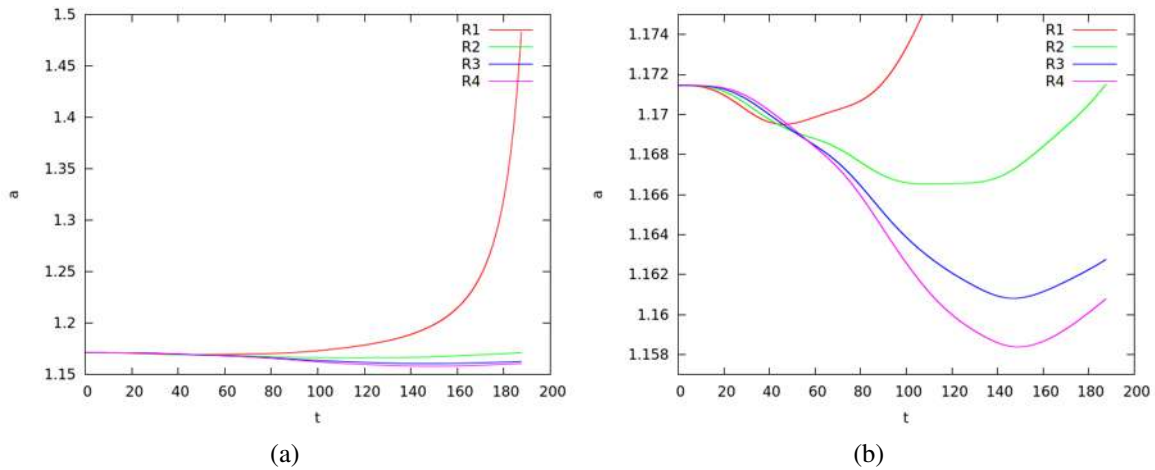


Figura 4.9: En (a) se muestra la gráfica completa de los valores máximos de  $a$  en el tiempo, en (b) un aumento sobre la sección de R2, R3 y R4 donde se observa como el valor de  $a$  en el tiempo cae y luego aumenta, lo que nos podría decir que  $a$  comenzaría a oscilar.

El que oscilen los valores máximos de  $a$  sobre una pendiente son debido a errores en la discretización, ya que no se hacen perturbaciones físicas, por lo que podría pensarse que aumentando la resolución se detendrían estas oscilaciones.

Al calcular la constricción hamiltoniana se observa de la figura (4.10) que el comportamiento con las cuatro resoluciones para tiempos pequeños la convergencia se cumple como se espera, pero para tiempos más grandes esta se va perdiendo debido a la "contaminación" derivada de la superficie de la estrella.

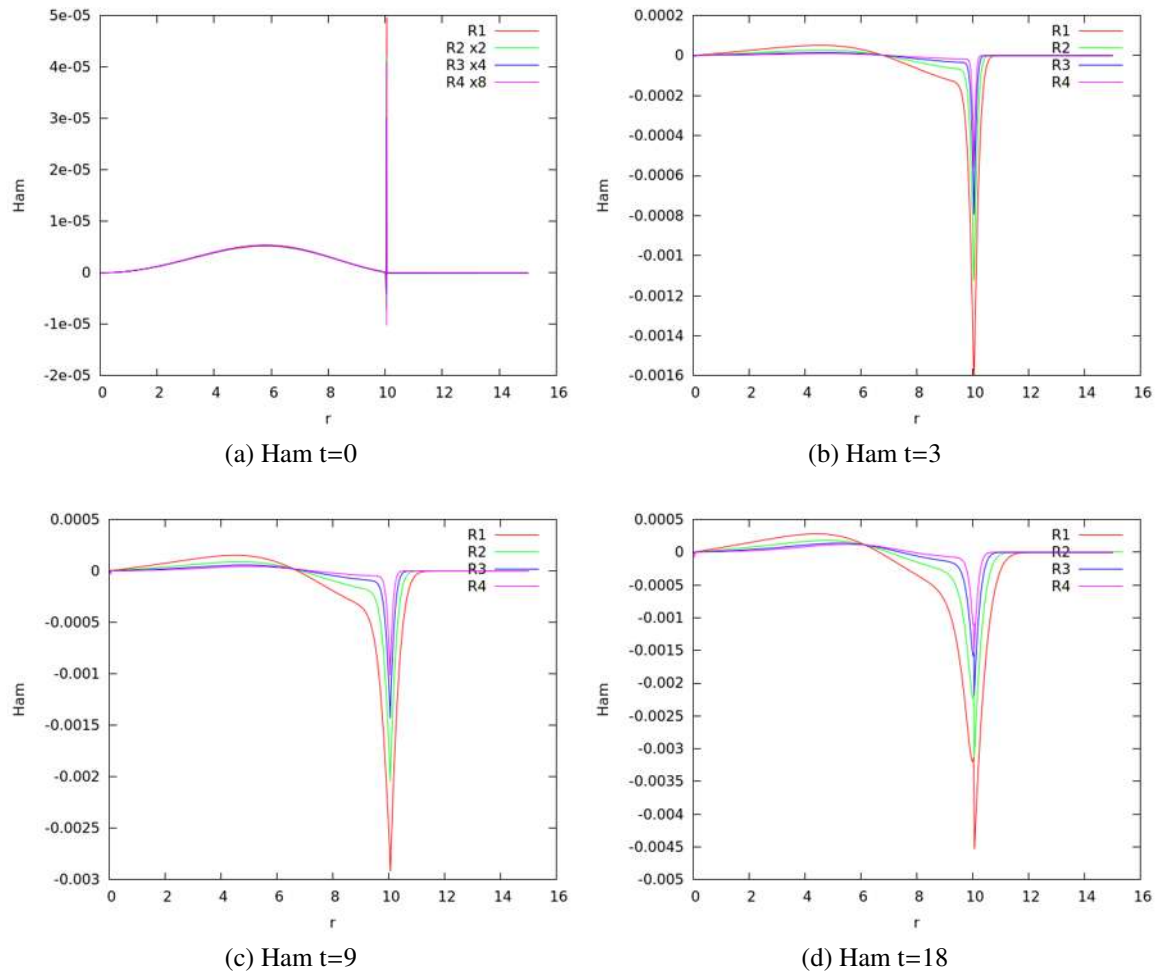


Figura 4.10: Constricción Hamiltoniana para  $t=0, 3, 9$  y  $18$  para las cuatro resoluciones en el caso de  $K = 2$ ,  $\Gamma = 100$  donde se puede observar que en  $t = 0$  se cumple lo esperado con el factor de convergencia, mientras que para los siguientes tiempo se empieza a perder nuevamente debido a la atmósfera que afecta a la superficie de la estrella.

### Resultados rama inestable

Para la rama inestable la densidad central que se usará será de  $\rho = 0.008$  y con cuatro resoluciones diferentes para comprobar el factor de convergencia de los datos que estamos obteniendo. En la figura (4.11) puede observarse como el máximo de  $a$  cae bruscamente, sin embargo, este al llegar a un punto bajo empiezan a haber oscilaciones muy pequeñas. Podría interpretarse como que en este punto se estabilizó debido a la pérdida de masa, o simplemente un error numérico debido a que se está usando viscosidad artificial, la cuál provoca que siga cayendo pero de una forma no tal acelerada.

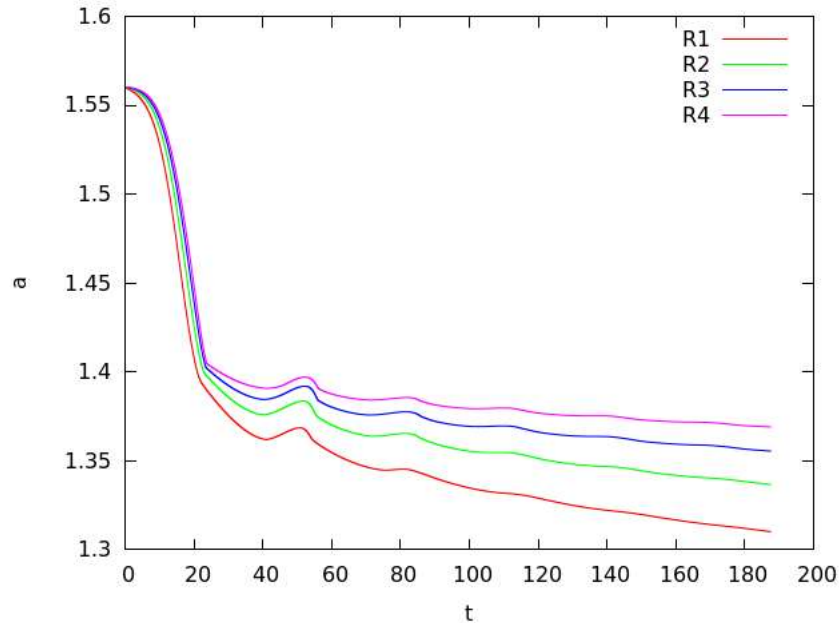


Figura 4.11: Valores máximos de  $a$  en el tiempo para el caso de  $K = 100$ ,  $\Gamma = 2$ , con una densidad central de  $\rho = 0.008$ . En la gráfica se observa como el valor de  $a$  decae muy rápido y posteriormente se estabiliza.

El porque ocurre de esta manera es debido a las viscosidades artificiales que se están usando, se puede pensar como una estrella que va perdiendo su masa de una forma progresiva hasta un punto donde se estabiliza, lo cuál no se esperaba ya que se esta trabajando sobre la rama inestable y se esperaba que la estrella procediera a convertirse un agujero negro de manera que quizá pueda pensarse que fuese a colapsar pero no ocurrió debido a estas viscosidades.

En la figura (4.12) puede observarse en el hamiltoniano un raro comportamiento, en el tiempo  $t = 0$  se observa lo que se esperaba de las cuatro resoluciones, un factor de convergencia de  $k^2 = 2$ , sin embargo, al aumentar el tiempo se observa que en  $r = 0$  crece mucho y al centro una diferencia significativa entre los valores de los hamiltonianos. Esto es debido a la viscosidad artificial que se esta usando. Otro dato importante es notar que debido a la "contaminación" que se presenta en la atmósfera de la estrella el valor del hamiltoniano para las diferentes resoluciones tiende a primer orden aumentando el tiempo tal como se observa en la figura (4.12d).

Debido a la inestabilidad de está se usaron valores aun mayores en la viscosidad artificial usada, lo cuál provocó que ocurriera problemas en las fronteras de la estrella, de ahí provienen esos incrementos en los valores de la constricción hamiltoniana en valores cercanos a  $r = 0$ .

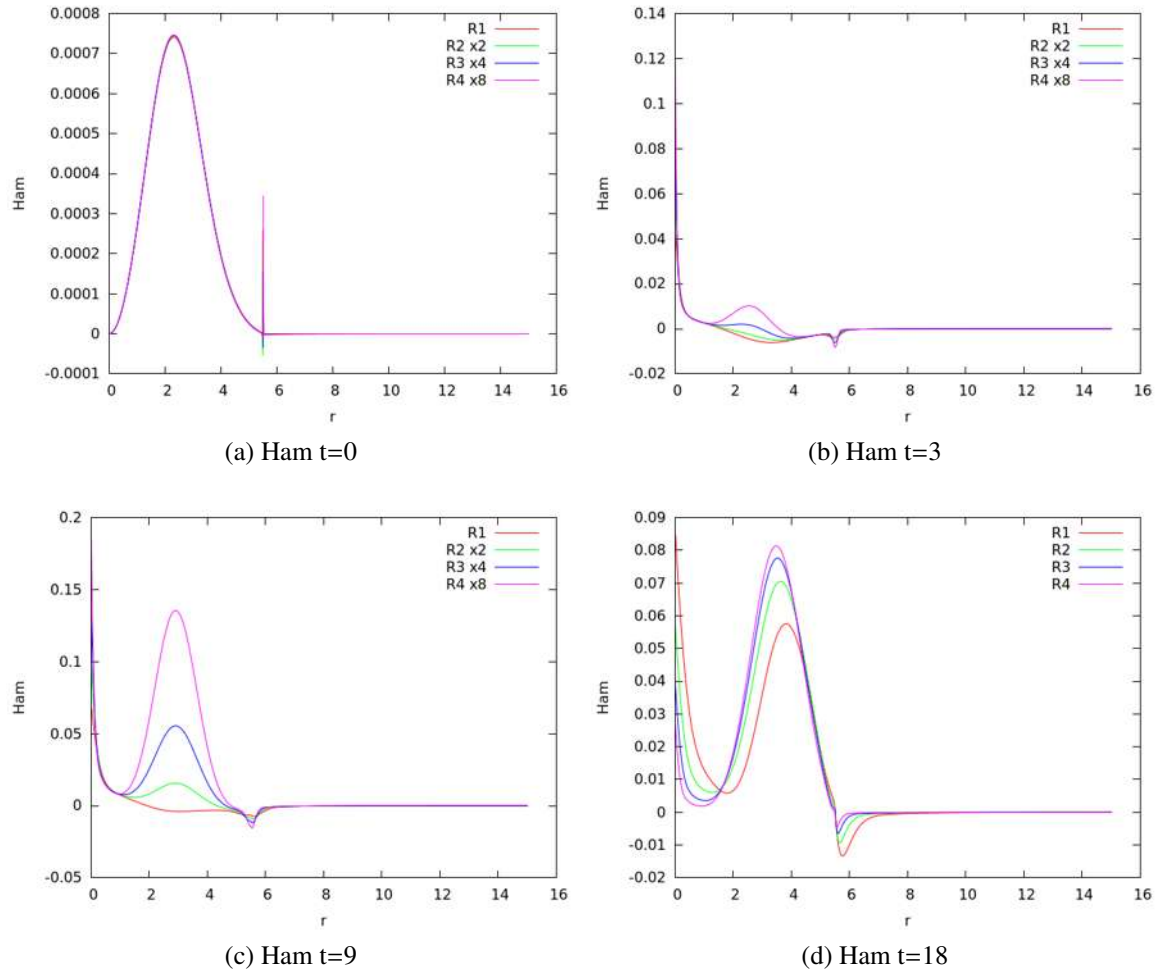


Figura 4.12: Constricción hamiltoniana para las cuatro resoluciones en  $t = 0, 3, 9$  y  $18$  para el caso  $k = 100$ ,  $\Gamma = 2$ , y densidad central de  $\rho = 0.008$ . En (a) se observa que se cumple con el valor esperado para el factor de convergencia. En (b) y (c) empieza a haber variaciones alrededor de la atmósfera y se empieza a "contaminar" el sistema. En (d) se pierde por completo el factor de convergencia, incluso los valores empiezan a parecerse.

### Caso $k = 30000$ y $\Gamma = 2.75$

#### Resultados en la rama estable

Para esta configuración y en la rama estable usaremos como densidad central  $\rho = 0.001$ ,  $0 < r < 20$  con 1000 puntos mientras que se presentan 50000 puntos temporales con valores de discretización de  $\Delta t = \Delta x/4$ . Como se puede observar en la figura (4.13), el máximo del valor de  $a$  crece rápidamente usando la primera resolución, mientras que para las demás empieza a obtener un comportamiento oscilatorio y alrededor de una pendiente, lo cuál podría deberse a una acreción de materia debida a la atmósfera.

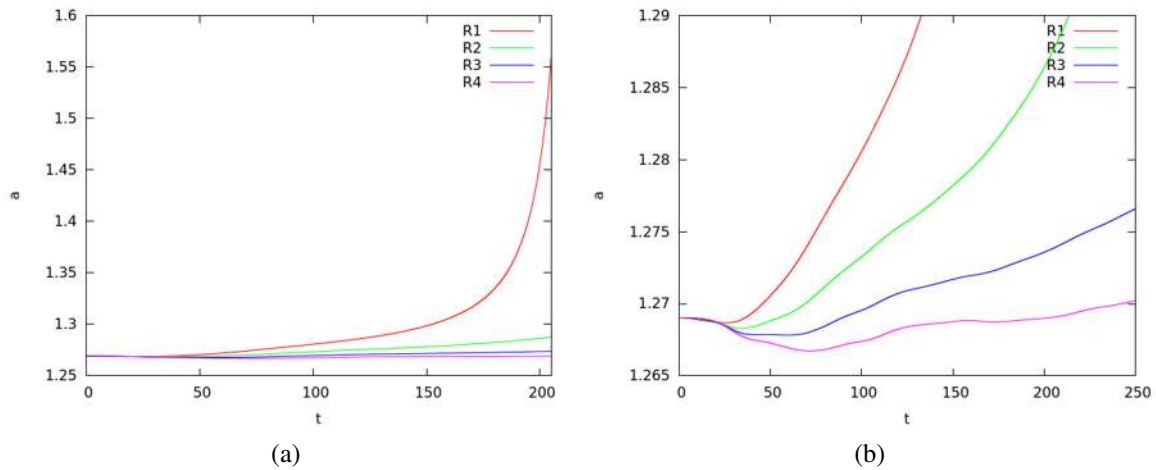


Figura 4.13: Gráficas de los valores máximos de  $a$  en el tiempo para el caso de  $K = 30000$ ,  $\Gamma = 2.75$  y con una densidad central de  $\rho = 0.001$ . En (a) la gráfica completa de las cuatro resoluciones usadas, se observa como en R1 el máximo de  $a$  se dispara conforme se avanza en el tiempo, esto debido a la mala resolución de los valores. En (b) un acercamiento a las resoluciones R3 y R4 donde se observa como el valor de  $a$  oscila sobre una pendiente alrededor del valor inicial.

En estas gráficas del valor máximo de  $a$  puede apreciarse la diferencia de usar mejores resoluciones al utilizar métodos numéricos ya que los resultados se van acercando cada vez más a los esperados. Estas oscilaciones presentes se interpretan como variaciones de la masa. Se esperaría que hacia tiempos muy largos los valores máximos de  $a$  se mantengan alrededor del valor inicial o si la resolución no es muy buena, alrededor de una pendiente proveniente del mismo.

Realizando el cálculo de la constricción hamiltoniana, puede observarse que al tiempo  $t = 0$  existe un factor de convergencia de 2, 4 y 8 para R2, R3 y R4 respectivamente, sin embargo, al aumentar el tiempo se observa como a pesar de ser mejores resoluciones éstas tienden a la primera resolución tal como se observa en la figura (4.14).

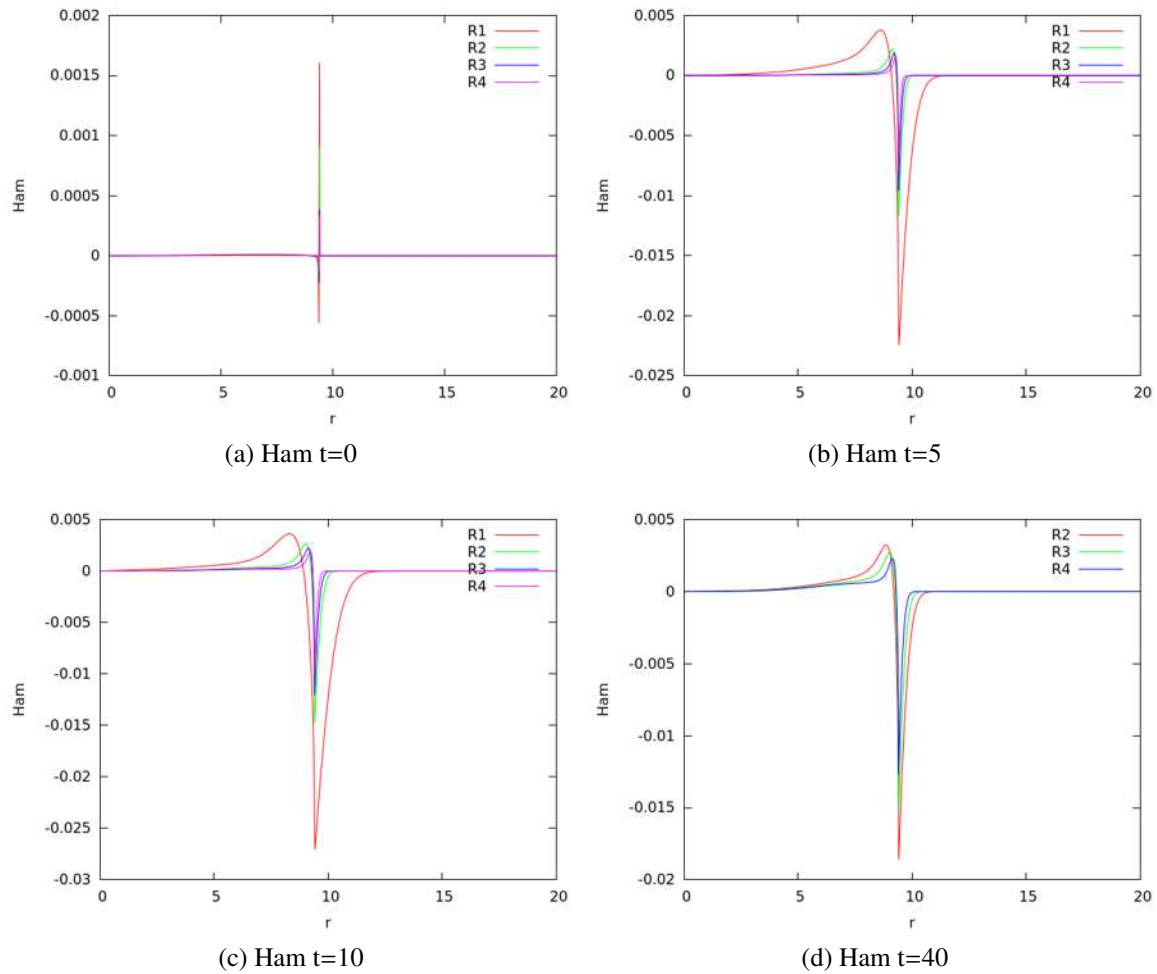


Figura 4.14: Constricciones hamiltonianas para las cuatro resoluciones para el caso  $K = 30000$ ,  $\Gamma = 2.75$  y densidad central de  $\rho = 0.001$ . En (a) se observa como se presenta nuevamente el factor de convergencia esperado. Mientras que en (b) y (c) nuevamente se va perdiendo debido nuevamente a la "contaminación" por la superficie de la estrella. En (d) falla la constricción hamiltoniana para la resolución R1.

El porque de esta forma en las que las constricciones hamiltonianas tienden a ser similares a las generadas por R1 es debido a que en la superficie los picos afectando a los alrededores de manera que se pierde el factor de convergencia.

### Resultados rama inestable

Para el caso de la rama inestable se usa la densidad central con un valor de  $\rho = 0.008$ , mientras que se preservan los valores para  $r$ , y las discretizaciones como en la rama estable. De los valores que se obtienen al implementar el código se puede observar en la figura (4.15) un efecto muy parecido en el segundo caso, pero en este al aumentar el la resolución



en el código lo único que ocurre es que antes de llegar a  $t = 30$  simplemente falla, esto debido a la inestabilidad de la estrella.

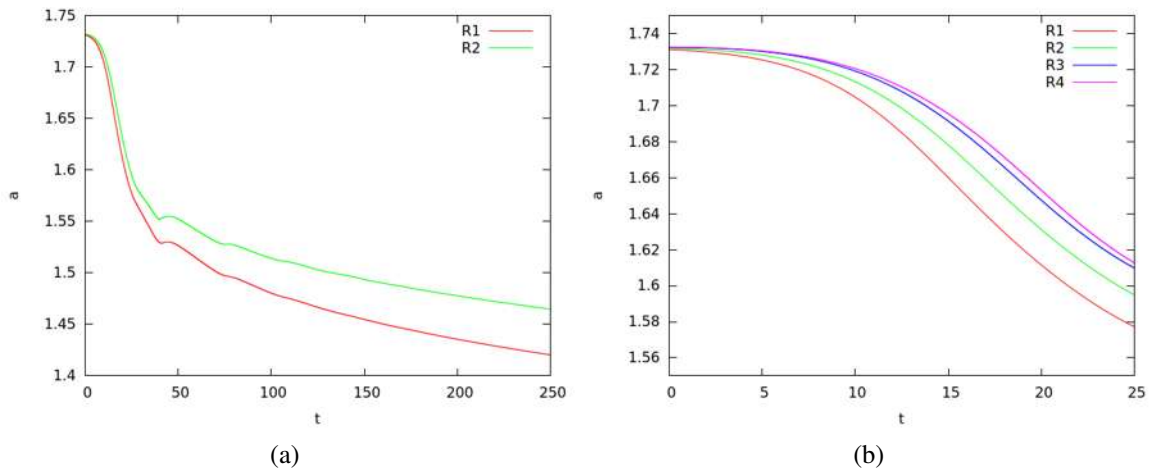


Figura 4.15: Gráficas de los valores máximos de  $a$  en el tiempo para el caso de  $K = 30000$ ,  $\Gamma = 2.75$  con densidad central de  $\rho = 0.008$ . En (a) se muestra la gráfica completa para las resoluciones R1 y R2 donde se observa como los valores de  $a$  decaen en el tiempo y se estabilizan. En (b) las cuatro resoluciones pero hasta  $t = 25$ , ya que debido a la inestabilidad de la estrella R3 y R4 fallan a tiempos más grandes.

Anteriormente se observó un caso muy parecido a este, donde los valores máximos de  $a$  decaen y posteriormente se estabilizan a pesar de encontrarnos en la rama inestable, pero en este caso las resoluciones mejores fallan. La interpretación es que para las primeras dos resoluciones R1 y R2 los valores de la masa se estabilizan debido a que se usaron viscosidades que le permitieron reducir su masa para no colapsar, pero para las resoluciones R3 y R4 debido a la inestabilidad el código simplemente falla.

De igual manera que en casos anteriores el hamiltoniano al tiempo  $t = 0$  se observa perfectamente como al aumentar la resolución disminuye su valor, pero a pesar de eso conforme avanza el tiempo estas se van juntado cada vez más hasta tener un comportamiento similar, figura (4.16).

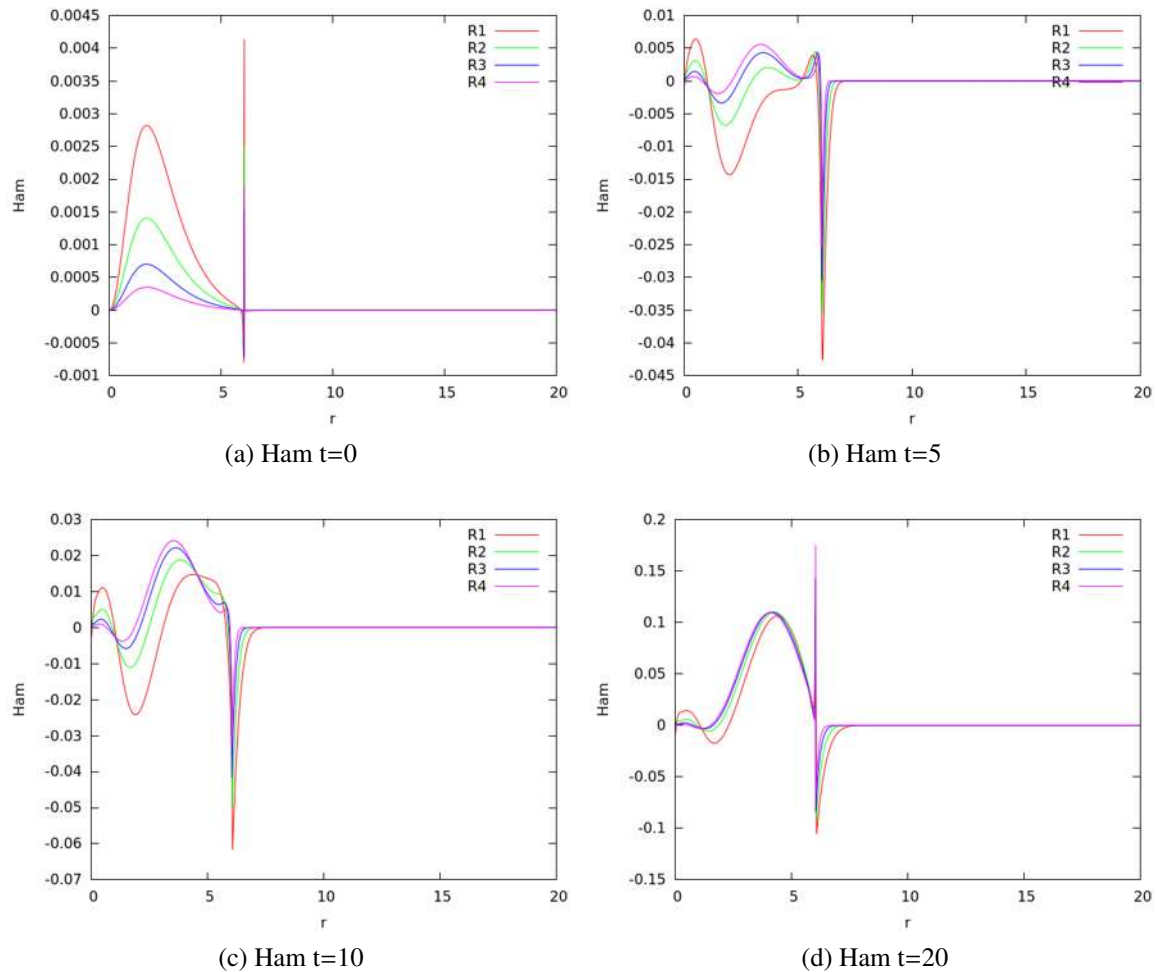


Figura 4.16: Constricciones hamiltonianas para las cuatro resoluciones para los tiempo  $t = 0, 5, 10$  y  $20$  respectivamente. En (a) se observa como para  $t = 0$  se cumple con el valor del factor de convergencia esperado. Mientras que para (b), (c) y (d) se observa como nuevamente debido a la superficie de la estrella nuevamente se ve afectada y empieza a tomar valores similares.

Este comportamiento similar a tiempos mas grandes es debido a que debido a esta contaminación generada por la superficie afecta a todas las resoluciones mas altas volviendo a un factor de convergencia de 1, lo que es normal en este tipo de soluciones donde se implementa una viscosidad artificial para evitar esas discontinuidades.

En general se puede apreciar como en los diferentes casos los valores máximos de  $a$  no eran los esperados usando resoluciones bajas, es decir, los resultados que daban eran poco servibles para la interpretación del sistema, por lo que se solucionó usando más resoluciones. Una vez que se mejoraron las resoluciones se empezaron a observar diferentes comportamientos dependiendo de las condiciones iniciales que se usaron.

De los resultados para las ramas inestables: en dos casos la estrella colapsaba o el código fallaba ya teniendo buenas resoluciones, lo cual era lo que se esperaba. Pero en un caso particular la estrella perdía masa rápidamente y posteriormente se estabilizaba, lo que era sumamente raro ya que se estaba trabajando en regímenes en los que la estrella debía colapsar o el código fallar. Esto se debió a las viscosidades artificiales que se usaron.

De los resultados para las ramas estables: todos presentaron fallas al usar resoluciones muy pequeñas, pero al usar mejores resoluciones empezaban a presentar movimientos oscilatorios debidos a la acreción de masa debido a la atmósfera y las discretizaciones usadas en el código, lo cuál era el resultado esperado, ya que las estrellas estables presentan oscilaciones en su masa debido a que si no presentan perturbaciones físicas se deben a las discretizaciones usadas en el código.

En la mayoría de las constricciones hamiltonianas se observa un cambio en los valores del factor de convergencia el cuál se debe a "contaminaciones" del sistema, ya que debido a la superficie de la estrella estos se ven afectados por estos cambios drásticos en la densidad, lo cual provoca que comiencen a interferir con los alrededores y finalmente las resoluciones mayores comiencen a comportarse en factor de convergencia 1. Una forma de evitar esto es usando resolvedores de captura de choques, los cuales toman estos picos debidos a los cambios drásticos y los discretizan de una forma que puedan asimilarlos como curvas grandes y no se suavizan las curvas. Este trabajo se basó en uno elaborado con volúmenes finitos y usando capturas de choques, por lo que queda claro que usar diferencias finitas no es precisamente el más adecuado.

# Capítulo 5

## Conclusiones

Usando un código en FORTRAN se logró analizar la estabilidad de varias estrellas bajo diferentes configuraciones iniciales usando las ecuaciones de TOV y evolucionándolas temporalmente usando las ecuaciones de Einstein y las ecuaciones de hidrodinámica. Los resultados fueron estrellas estables o inestables que de acuerdo con la teoría, se establecen a partir de los límites de la masa de una estrella por Tolman-Oppenheimer y de Chandrasekhar. Esencialmente estos indican debajo de la masa crítica las estrellas serían estables al evolucionarlas, contrario al tomar densidades por encima de la crítica.

La estabilidad o la inestabilidad se presentó más claramente al usar resoluciones más grandes, permitiendo tener así oscilaciones del lado estable y colapsos o fallas del lado inestable. Esto es muy importante ya que es necesario usar diferentes resoluciones para asegurar que los errores convergen de acuerdo con la cantidad de puntos con los cuales se realizaron las iteraciones.

Este trabajo es un buen ejemplo de la eficiencia del uso de simulaciones numéricas para resolver problemas de relatividad numérica, teniendo sus claras ventajas tal como una solución aproximada de las ecuaciones de relatividad general y algunas de sus desventajas como los errores numéricos que surgen al usar diferentes métodos numéricos.

En el trabajo se estableció la importancia de la relatividad general para entender algunas estrellas suponiéndolas estáticas y esféricamente simétricas, y por la hidrodinámica bajo efectos de un fluido perfecto suponiendo una ecuación de estado para un gas politrópico, la cuál permite tener una cantidad de ecuaciones para resolver las diferentes incógnitas que se presentaban.

Se habló de algunos métodos numéricos que se utilizaron para resolver las ecuaciones necesarias para la evolución donde se pudo presenciar un fallo en el método debido a la superficie de la estrella, por lo cuál fue necesario recurrir a una viscosidad artificial, la cuál

permite "suavizar" curvas bruscas en los sistemas cuando se presentan ondas de choque. Usando esta viscosidad fue claro que si bien el sistema ya no era el establecido originalmente este podía solucionarse evitando métodos más complejos.

Se analizó la convergencia de los diferentes sistemas donde se puede encontrar que los ordenes de convergencia a tiempos iniciales es mayor que a tiempos posteriores ya que para  $t = 0$  se encuentra un orden de convergencia a segundo orden y después únicamente lineal, esto debido a la superficie de la estrella.

De este trabajo se puede comparar con el que usó el método de volúmenes finitos y se corrobora que usar este método y técnicas de captura de choques facilitan el trabajo, por lo que es necesario y se trabajará mas adelante en métodos numéricos más elaborados para solucionar estas ecuaciones.

# Apéndice A

## Deducción de las ecuaciones TOV

De acuerdo al teorema de Birkhoff, la solución de Schwarzschild es la descripción mas general para el exterior de una estrella con simetría esférica sin rotación. Sin embargo, dentro de la estrella debemos considerar una métrica más general. La métrica para el interior de una estrella independiente del tiempo de la forma

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 \quad (\text{A.1})$$

Consideremos ahora un fluido perfecto con densidad de energía  $\epsilon$ , una presión isotrópica  $P$ , métrica  $g^{\mu\nu}$  y una cuatro-velocidad  $u^\mu$ . El tensor de energía-momento se escribe de la forma

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

$$\epsilon = \rho c^2 + \varepsilon \quad (\text{A.3})$$

$$h = \frac{\epsilon + P}{\rho} \quad (\text{A.4})$$

Para la métrica de la ecuación (A.1) y los métodos presentados en la sección de relatividad general, podemos calcular los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ , el tensor de curvatura  $R_{\mu\nu}$ , el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  y el tensor de energía-momento  $T^{\mu\nu}$  para un fluido perfecto.

Comenzamos entonces escribiendo los símbolos de Christoffel no cero a partir de la métrica (A.1)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tr}^t &= \frac{d\Phi}{dr} \\
\Gamma_{tt}^r &= \frac{d\Phi}{dr} e^{2\Phi} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \\
\Gamma_{rr}^r &= \frac{r \frac{dm}{dr} - m}{r^2 - 2m} \\
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{\theta\theta}^r &= \csc^2(\theta) \Gamma_{\varphi\varphi}^r = 2m - r \\
\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\csc^2(\theta) \Gamma_{\theta\theta}^\varphi = -\sin(\theta) \cos(\theta)
\end{aligned}$$

Una vez que tenemos estos símbolos de Christoffel podemos construir el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , de forma que los valores independientes no cero son

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= e^{2\Phi} \left[ \left( \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \left( \frac{d\Phi}{dr} \right)^2 \right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right) + \frac{d\Phi}{dr} \left( \frac{2r - 3m - r \frac{dm}{dr}}{r^2} \right) \right] \\
R_{rr} &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left[ \frac{\left( r \frac{dm}{dr} - m \right) \left( 2 + r \frac{d\Phi}{dr} \right)}{r^3} \right] - \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \left( \frac{d\Phi}{dr} \right)^2 \\
R_{\theta\theta} &= \csc^2(\theta) R_{\varphi\varphi} = (2m - r) \frac{d\Phi}{dr} + \frac{dm}{dr} + \frac{m}{r}
\end{aligned}$$

donde facilmente se puede encontrar que la escalar de Ricci viene dad por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 2 \left[ \frac{2}{r^2} \frac{dm}{dr} + \frac{d\Phi}{dr} \left( 3m - 2r + r \frac{dm}{dr} \right) - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left( \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \left( \frac{d\Phi}{dr} \right)^2 \right) \right] \quad (\text{A.5})$$

A continuación resolvemos las ecuaciones de Einstein  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R/2 = 8\pi T_{\mu\nu}$ , donde para el caso  $\mu\nu = 0$  tenemos que  $T_{tt} = \varepsilon e^{2\Phi}$ , por lo que obtenemos

$$G_{tt} = \frac{2e^{2\Phi}}{r^2} \frac{dm}{dr} = 8\pi \varepsilon e^{2\Phi} \quad (\text{A.6})$$

despejando  $dm/dr$  tenemos que

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon \quad (\text{A.7})$$

Para el caso de la ecuación radial con  $T_{rr} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} P$  tenemos que

$$G_{rr} = \frac{2}{r} \left( \frac{d\Phi}{dr} - \frac{m}{1 - \frac{2m}{r}} \right) = \frac{8\pi P}{1 - \frac{2m}{r}} \quad (\text{A.8})$$

para este caso despejamos  $d\Phi/dr$  y obtenemos que

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} \quad (\text{A.9})$$

Finalmente, nos falta encontrar una ecuación diferencial para la presión, para ello recurrimos a la ecuación de la conservación  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , utilizamos únicamente la parte radial.

Si  $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\varepsilon e^{-2\Phi}, (1 - 2m/r)P, r^{-2}P, r^{-1}csc^2(\theta)P)$  entonces tenemos que ecuación larga aquí

finalmente despejando  $dP/dr$  tenemos que

$$\frac{dP}{dr} = -(\varepsilon + P) \frac{d\Phi}{dr} \quad (\text{A.10})$$

de manera que las ecuaciones diferenciales que conforman las TOV son

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{dP}{dr} = -(\varepsilon + P) \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} \quad (\text{A.13})$$





# Apéndice B

## Aplicación de los métodos numéricos a las ecuaciones TOV y las ecuaciones de Euler acopladas a las ecuaciones de Einstein

Algo que se debe de tomar en cuenta es que método numérico se empleará para resolver cada una de las diferentes ecuaciones que se emplearán durante el proceso de evolución de la estrella

### Ecuaciones TOV

El método para resolver estas ecuaciones será el Runge-Kutta de cuarto orden que como son tres ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas se solucionan de la siguiente manera

$$f_1(m, p, \Phi, r) = \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho (1 + \epsilon/c^2) \quad (\text{B.1})$$

$$f_2(m, p, \Phi, r) = \frac{dp}{dr} = -G(\rho(1 + \epsilon/c^2) + p/c^2) \frac{m + 4\pi r^3 p/c^2}{r(r - 2Gm/c^2)} \quad (\text{B.2})$$

$$f_3(m, p, \Phi, r) = \frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p/c^2}{r(r - 2Gm/c^2)} \quad (\text{B.3})$$

donde si definimos a  $k_q^i$  donde  $q = 1, 2, 3, 4$  por el método Runge-Kutta y las  $i = 1, 2, 3$  se aplican a  $m, p$  y  $\Phi$  respectivamente

$$k_1^1 = f_1(m_i, p_i, \Phi_i, r_i)$$

$$k_1^2 = f_2(m_i, p_i, \Phi_i, r_i)$$

$$k_1^3 = f_3(m_i, p_i, \Phi_i, r_i)$$

–

$$k_2^1 = f_1(m_i + hk_1^1/2, p_i + hk_1^2/2, \Phi_i + hk_1^3/2, r_i + h/2)$$

$$k_2^2 = f_2(m_i + hk_1^1/2, p_i + hk_1^2/2, \Phi_i + hk_1^3/2, r_i + h/2)$$

$$k_2^3 = f_3(m_i + hk_1^1/2, p_i + hk_1^2/2, \Phi_i + hk_1^3/2, r_i + h/2)$$

–

$$k_3^1 = f_1(m_i + hk_2^1/2, p_i + hk_2^2/2, \Phi_i + hk_2^3/2, r_i + h/2)$$

$$k_3^2 = f_2(m_i + hk_2^1/2, p_i + hk_2^2/2, \Phi_i + hk_2^3/2, r_i + h/2)$$

$$k_3^3 = f_3(m_i + hk_2^1/2, p_i + hk_2^2/2, \Phi_i + hk_2^3/2, r_i + h/2)$$

–

$$k_4^1 = f_1(m_i + hk_3^1, p_i + hk_3^2, \Phi_i + hk_3^3, r_i + h)$$

$$k_4^2 = f_2(m_i + hk_3^1, p_i + hk_3^2, \Phi_i + hk_3^3, r_i + h)$$

$$k_4^3 = f_3(m_i + hk_3^1, p_i + hk_3^2, \Phi_i + hk_3^3, r_i + h)$$

finalmente

$$m_{i+1} = m_i + h(k_1^1 + 2k_2^1 + 2k_3^1 + k_4^1)/6$$

$$p_{i+1} = p_i + h(k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_3^2 + k_4^2)/6$$

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i + h(k_1^3 + 2k_2^3 + 2k_3^3 + k_4^3)/6$$

## Euler acopladas con Einstein

Las ecuaciones de Euler para la hidrodinámica del fluido son un tanto más complejas ya que involucraremos el método de líneas

$$\partial_t(aD) + \frac{1}{r^2} \partial_r(\alpha r^2 D v^r) = 0 \tag{B.4}$$

$$\partial_t(aS_r) + \frac{1}{r^2} \partial_r(\alpha r^2 (S_r v^r + p)) =$$

$$-\alpha a \frac{a^2 m}{r^2} (S_r v^r + \tau + p + D) + \alpha a \frac{2p}{r} \quad (\text{B.5})$$

$$\partial_t (a\tau) + \frac{1}{r^2} \partial_r (\alpha a r^2 (\tau + p) v^r) = -\alpha a \frac{m}{r^2} S_r \quad (\text{B.6})$$

donde las variables conservativas las definimos como

Llamando a  $aD = w_1$ ,  $aS_r = w_2$  y  $a\tau = w_3$  y desarrollando obtenemos

$$\partial_t (w_1) = - \left[ \alpha w_1 \partial_r v^r + \alpha v^r \partial_r w_1 + w_1 v^r \partial_r \alpha + \alpha w_1 v^r \partial_r r^2 / r^2 \right] \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \partial_t (w_2) = & - \left[ \alpha w_2 \partial_r v^r + \alpha v^r \partial_r w_2 + w_2 v^r \partial_r \alpha + \alpha a \partial_r p \right] \\ & - \left[ \alpha p \partial_r a + (w_2 v^r + ap) \partial_r \alpha + \frac{\alpha 2w_2 v^r}{r} + \frac{\alpha a^2 m}{r^2} (w_2 v^r + w_3 + ap + w_1) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \partial_t (w_3) = & - \left[ \alpha (w_3 + ap) \partial_r v^r + \alpha v^r (\partial_r w_3 + a \partial_r p + p \partial_r a) \right] \\ & - \left[ r^2 (w_3 + ap) v^r \partial_r \alpha + \frac{2\alpha (w_3 + ap) v^r}{r} + \frac{\alpha m w_2}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Ahora reescribamos las ecuaciones (2.38-2.40) usando estas variables

$$\partial_t a = -4\pi r \alpha w_1, \quad (\text{B.10})$$

$$\partial_r a = a^2 \left[ 4\pi r (w_3 + aD) - \frac{am}{r^2} \right], \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial_r \alpha}{\alpha} = a \left[ 4\pi r (w_2 v^r + ap) + \frac{am}{r^2} \right]. \quad (\text{B.12})$$

Lo que prosigues es elaborar un sistema de forma que se pueda solucionar por el método de líneas de forma que usando diferencias finitas y sustituyendo (B.11) y (B.12) en (B.10-B.12) a primer orden se obtiene lo siguiente, donde todos los valores que no presentan subíndices se encuentran en la posición  $i$ :

$$rhs(w_1) = - \left[ \alpha w_1 \frac{v_{i-1}^r + v_{i+1}^r}{2dr} + \alpha v^r \frac{(w_1)_{i-1} + (w_1)_{i+1}}{2dr} + w_1 v^r \alpha a \left[ 4\pi r (w_2 v^r + ap) + \frac{am}{r^2} \right] + \frac{2\alpha w_1 v^r}{r} \right] \quad (\text{B.13})$$

$$rhs(w_2) = - \left[ \alpha w_2 \frac{v_{i-1}^r + v_{i+1}^r}{2dr} + \alpha v^r \frac{(w_2)_{i-1} + (w_2)_{i+1}}{2dr} + (w_2 v^r + ap) w_2 v^r \alpha a \left[ 4\pi r (w_2 v^r + ap) + \frac{am}{r^2} \right] + \alpha a \partial_r p \right]$$

$$-\left[\alpha p a^2 \left[4\pi r (w_3 + aD) - \frac{am}{r^2}\right] + (w_2 v^r + ap) + \frac{\alpha 2w_2 v^r}{r} + \frac{\alpha a^2 m}{r^2} (w_2 v^r + w_3 + ap + w_1)\right] \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} rhs(w_3) = & -\left[\alpha(w_3 + ap) \frac{v_{i-1}^r + v_{i+1}^r}{2dr} + \alpha v^r \left[\frac{(w_3)_{i-1} + (w_3)_{i+1}}{2dr} + a\partial_r p + pa^2 \left(4\pi r (w_3 + aD) - \frac{am}{r^2}\right)\right]\right] \\ & -\left[r^2(w_3 + ap)v^r \alpha a \left[4\pi r (w_2 v^r + ap) + \frac{am}{r^2}\right] + \frac{2\alpha(w_3 + ap)v^r}{r} + \frac{\alpha m w_2}{r^2}\right] \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

simultaneamente con

$$rhs(a) = -4\pi r \alpha w_1 \quad (\text{B.16})$$

mientras que la ecuación (B.12) se resuelve independiente con un Runge-Kutta de cuarto orden tal como se resolvieron las ecuaciones TOV y la ecuación (B.11) será para monitorear la convergencia del sistema.

Como se puede observar estas ecuaciones ya son muy complicadas, se tratan de cuatro ecuaciones que se solucionan simultaneamente, estas se resuelven por medio del Runge-Kutta de cuarto orden, donde nuestras  $f$ 's ahora serán los  $rhs$ 's de (B.13-B.16) y se solucionan exactamente como se mostró la solución de las ecuaciones TOV por el método de Runge-Kuta.

# Bibliografía

- [1] F. S. Guzman, F. D. Lora-Clavijo, M. D. Morales. Revisiting spherically symmetric relativistic hydrodynamics *Rev. Mex. Fis. E* 58 (2012) 84-98.
- [2] A. Einstein. Zur allgemeinen relativitätstheorie. *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber* (1915) 778-786.
- [3] Miguel Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*, Oxford University Press, 2008.
- [4] Schutz, B. *A First Course in General Relativity*. 2da edición, Cambridge University Press, 2009.
- [5] José María Martí Puig. *Hidrodinámica Relativista Numérica: Aplicaciones al Colapso Estelar*, UMI 1991.
- [6] Christian D. Ott. *Static Spherically-Symmetric Stellar Structure in General Relativity*, California Institute of Technology 2013
- [7] Stuart L. Shapiro, Saul A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*. John Wiley and Sons Inc. (1983)
- [8] Ellen Egeland. *Compact Stars*, Institute of Physics NTNU (2007)
- [9] Chandrasekhar, S. The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs, *Astrophysical Journal*, vol. 74, p.81 (1931)
- [10] F. S. Guzmán, Solución de la ecuación de onda como un problema de valores iniciales usando diferencias finitas, *Rev. mex. de física* 56 (1) 51-68.