



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

**EFFECTO TALBOT Y USO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER
EXTENDIDA PARA LA RECONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES**

TESIS

Para obtener el grado de
LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:

JENNIFER LÓPEZ CHACÓN

ASESOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias con especialidad en Óptica
DR. MAURICIO ORTIZ GUTIÉRREZ

CO-ASESOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias en Física
RAFAEL GÓNZALEZ CAMPOS

Morelia Michoacán, enero 2017

Resumen

Cuando se proyecta un patrón de franjas paralelas y oscuras sobre una superficie con relieve aparece una modulación en las franjas que se puede relacionar con las coordenadas locales y con la altura de la superficie.

Existen diversas técnicas para proyectar franjas sobre superficies, una de las cuales es por medio del Efecto Talbot en el que se generan autoimágenes de objetos periódicos iluminados con luz coherente y monocromática en posiciones discretas a lo largo del eje en que viaja la luz. La distancia a la que aparecen estas imágenes es conocida como distancia de Talbot. En uno de los planos en que se forma una autoimagen de la rejilla binaria se coloca un objeto con relieve que deforma las líneas de la rejilla debido a su superficie, la imagen que se obtiene de esta manera se captura con una cámara CCD.

Por medio de la transformada de Fourier esta imagen es demodulada para obtener el mapa de fase envuelta. El proceso de desenvolvimiento de fase se puede llevar a cabo mediante el método de Itoh el que produce una nube de puntos que corresponden a las alturas locales de la superficie respecto a un plano de referencia.

En esta tesis se presenta la técnica anteriormente descrita con la implementación de la transformada de Fourier extendida (XFT) para la reconstrucción de superficies 3D. El uso de la XFT mejora los resultados que si se utiliza la transformada de Fourier de programas comerciales y no es necesario el uso de programas complejos para el desenvolvimiento de la fase. Además, los resultados obtenidos de las superficies con objetos simulados digitalmente y reales son presentados.

Palabras Clave: Efecto Talbot, transformada de Fourier, luz estructurada, desenvolvimiento de fase.

Abstract

When a pattern of parallel and dark fringes is projected onto a relief surface, there is a modulation in the fringes that can be related to the local coordinates and to the height of the surface.

There are several techniques for projecting fringes onto surfaces, one of which is by means of the Talbot Effect in which self-images of periodic objects illuminated with coherent and monochromatic light are generated in discrete positions along the axis in which light travels. The distance at which these images appear is known as Talbot distance. In one of the planes in which a self-image of the binary grating is formed an object with relief is placed that deforms the lines of the grating due to its surface, the image that is obtained in this way is captured with a CCD camera.

By means of the Fourier transform this image is demodulated to obtain the wrapped phase map. The unwrapped phase process can be carried out by the Itoh method which produces a cloud of points corresponding to the local heights of the surface with respect to a reference plane.

The technique described above with the implementation of the extended Fourier transform (XFT) for the reconstruction of 3D surfaces is presented in this thesis. The use of the XFT improves the results that if the Fourier transform of commercial programs is used and it is not necessary the use of complex programs for the development of the phase. In addition, the results obtained from surfaces with digitally simulated and real objects are presented.

Keywords: Talbot effect, Fourier transform, structured light, phase unwrapping.

*“En resumen, la luz es la forma más
refinada de la materia.”*

Louis De Broglie (1892-1987)

Agradecimientos

A Dios, por ser ese motor invisible que me ha dado una fuerza descomunal en los momentos más difíciles.

A mis padres por estar conmigo en todo momento, por darme su apoyo, su amor incondicional, por forjar mi carácter, por darme valores, por enseñarme que la vida no es sencilla pero que al final de cada lucha hay una recompensa. A mis hermanas Jeza, Jocy y Tete por que sin ustedes niñas mi vida sería muy aburrida. A mis abuelos Prisciliano, Teresa y María por dejarme un poco de su sabiduría, aunque ya no tengo la dicha de tener a todos junto a mi sé que desde donde estén, estarán felices por mi. A mis tías Mireya y Melania, por ser un apoyo y una motivación en mis planes.

A mi asesor Mauricio, por todos los conocimientos, por confiar en mi al iniciar este proyecto y sobre todo por la enorme paciencia durante estos años.

A mis profesores favoritos Campos, Cotti, Mendoza, Misael y Raya, por que gracias ustedes encontré el amor por la ciencia. Una mención especial para Joaquin, por ser un gran mentor y un segundo padre.

A mis grandes amigos Armando, Gabino, Gaby, Khépani, Juanito y Sonia, aunque ya no estén todos junto a mi, gracias por estar en todos esos momentos en que yo necesitaba quien me escuchara. A mis dos mejores amigas Adriana y Dulce, muchas gracias por estar conmigo, por apoyarme, por darme sus consejos, gracias por ser mis amigas cada una a su manera.

A esos recientes cómplices que han ido apareciendo en el camino Cinthya, Ene, Fabis, Julio,

Julio, Marco, Niño, Vega y Vite, gracias chicos por esos momentos divertidos.

A Rogelio por ocho años de complicidad, por crecer este tiempo conmigo, por esas charlas eternas, los viajes, las canciones, los momentos divertidos, los momentos tristes, las grandes recompensas, las grandes pérdidas, los libros nuevos, los libros viejos, por esa comida fina al mes y esa no tan saludable de los domingos, por estar en todo el proceso de cambio, por estar en el proceso de esta tesis, gracias por estar en mis recuerdos más felices.

Finalmente a mis mascotas favoritas, que tanta alegría me han dado desde que aparecieron en mi portal, yo sé que ellas no saben leer pero me da satisfacción darles un pequeño reconocimiento, a mi Kirara por pedir que la abrazara cada fin de semana y a mi Ranma por dejarme abrazarla cada fin de semana.

Contenido

Página

I. Introducción	1
I.1. Objetivo general	3
I.2. Objetivos específicos	3
II. Análisis de Fourier	4
II.1. Series de Fourier	4
II.2. Transformada de Fourier unidimensional	7
II.3. Transformada de Fourier bidimensional	10
II.4. XFT: Transformada de Fourier extendida	15
II.4.1. Comparación de la FFT vs XFT	16
III. Efecto Talbot	20
III.1. Series de Fourier de un campo óptico periódico	20
III.2. Serie de Fourier de un campo óptico periódico desplazado	22
III.3. Propagación de una onda plana	24
III.4. Formación de autoimágenes	27
III.5. Patrón de difracción de Fresnel a un medio de la distancia de Talbot	27
III.6. Patrón de difracción de Fresnel a un cuarto de la distancia de Talbot	29
IV. Proyección de luz estructurada	32
IV.1. Descripción del método integral	32
IV.2. Interferometría de medición de fase	32
IV.2.1. Método espacial para la medición de fase por transformada de Fourier	34
IV.3. Errores en el método de la transformada de Fourier	37
V. Desenvolvimiento de fase	40
V.1. Técnicas de desenvolvimiento de fase	42
V.2. Análisis y ejemplos sobre el desenvolvimiento de fase	43
V.3. Errores en el desenvolvimiento de fase: Ruido	46
V.4. Errores en el desenvolvimiento de fase: sub-muestreo	49
V.5. Efecto de la discontinuidad en el desenvolvimiento de la fase	52
VI. Diseño experimental y resultados	55
VI.1. Descripción del experimento	55
VI.2. Reconstrucción de superficies en 3D	57
VII. Conclusiones	65

Lista de Figuras

Figura	Página
1. Gráficas de funciones periódicas unidimensionales: (a) Rectangular $Rect(x)$; (b) Cosenoidal $\cos(x)$; (c) Peine de Dirac $Comb(x)$ y (d) Triangular.	6
2. a) Objeto original en 2D; b) Perfil unidimensional; c) Transformada de Fourier (FFT); d) Perfil de la transformada de Fourier (FFT); e) Transformada de Fourier (XFT); f) Perfil de la transformada de Fourier (XFT).	18
3. a) Objeto original en 2D; b) Perfil unidimensional; c) Transformada de Fourier (FFT); d) Perfil de la transformada de Fourier (FFT); e) Transformada de Fourier (XFT); f) Perfil de la transformada de Fourier (XFT).	19
4. Representación esquemática de la dirección de propagación de una onda.	21
5. Esquema del arreglo para la difracción de un campo periódico.	24
6. a) Rejilla cosenoidal (frecuencia 30 píxeles, tamaño 600x600 píxeles); b) Perfil de la rejilla cosenoidal; c) Autoimagen de la rejilla cosenoidal a la distancia de Talbot; d) Perfil de la autoimagen a la distancia de Talbot; e) Autoimagen de la rejilla cosenoidal a media distancia de Talbot; f) Perfil de la autoimagen a media distancia de Talbot; g) Autoimagen de la rejilla cosenoidal a un cuarto de la distancia de Talbot; h) Perfil de la autoimagen a un cuarto de la distancia de Talbot.	31
7. Espectro de Fourier separado de un patrón de franjas.	35
8. Proyección de una rejilla sobre un relieve.	37
9. Diferentes etapas de la transformada de Fourier; (a) Distribución de intensidad unidimensional; (b) Intensidad ponderada por la ventana de Hamming; (c) Módulo de la transformada de Fourier; (d) Función de fase envuelta; (e) Reconstrucción de la función de fase después del procedimiento de desenvolvimiento (capítulo 5). . . .	39
10. (a) Fase envuelta de la función “dientes de sierra”; (b) regla de adición del factor de 2π ; (c) función de fase continua obtenida por desenvolvimiento de (a).	41
11. Línea por escaneo secuencial de líneas.	43
12. a) Imagen de fase continua simulada por computadora y mostrada como un arreglo de intensidades; b) imagen de fase continua mostrada como una superficie; c) renglón 410 de la imagen de fase continua.	44
13. a) Renglón 410 de la imagen de fase envuelta; b) imagen de fase envuelta mostrada como una superficie; c) imagen de fase envuelta simulada por computadora y mostrada como un arreglo de intensidades.	45
14. Imagen de fase desenvuelta usando el algoritmo de Itoh; (a) y (b) primer método; (c) y (d) segundo método.	46

Figura	Página
15. (a) y (b) Imagen de fase continua con ruido; (c) y (d) imagen de fase envuelta con ruido; (e) y (f) desenvolvimiento de fase usando el algoritmo de Itoh: primer método; (g) y (h) desenvolvimiento de fase usando el algoritmo de Itoh: segundo método. La variación del ruido es de 0,4.	48
16. (a) y (b) Imagen de fase continua con ruido; (c) y (d) imagen de fase envuelta con ruido; (e) y (f) desenvolvimiento de fase usando el algoritmo de Itoh: primer método; (g) y (h) desenvolvimiento de fase usando el algoritmo de Itoh: segundo método. La variación del ruido es de 0,6.	49
17. (a) y (b) Imagen de fase continua; (c) y (d) cambio de fase en el eje x e y respectivamente.	51
18. (a) y (b) Imagen de fase envuelta; imagen de fase desenvuelta empleando el algoritmo de Itoh; (c) y (d) primer método; (e) y (f) sub-muestreo.	52
19. (a) y (b) Imagen de fase generada por computadora; (c) y (d) imagen de fase envuelta.	53
20. Imagen de fase desenvuelta empleando el algoritmo de Itoh (a) y (b) primer método; (c) y (d) segundo método.	54
21. Esquema del arreglo experimental empleado para generar autoimágenes de una rejilla binaria usando el efecto Talbot.	55
22. Fotografía del arreglo experimental compuesto por un láser, un colimador, una lente, una rejilla Ronchi (de período), un divisor de haz, una cámara CCD y una computadora.	57
23. Objetos utilizados durante el experimento.	58
24. Fotografía tomada del patrón de franjas sobre el objeto 1.	58
25. a) Perfil del objeto original; b) transformada de Fourier del objeto; c) imagen de la máscara binaria; d) producto de la transformada de Fourier; e) centrado de frecuencias; f) transformada inversa de Fourier (de la figura 24).	60
26. a) Mapa bidimensional de la fase envuelta; b) mapa 3D de la fase envuelta; c) perfil de la fase envuelta; d) mapa bidimensional de la fase envuelta; e) mapa 3D de la fase desenvuelta; f) perfil de la fase desenvuelta.	61
27. a) Perfil del objeto original; b) transformada de Fourier del objeto; c) imagen de la máscara binaria; d) producto de la transformada de Fourier; e) centrado de frecuencias; f) transformada inversa de Fourier (de la figura (24)).	62
28. a) Mapa bidimensional de la fase envuelta; b) mapa 3D de la fase envuelta; c) perfil de la fase envuelta; d) mapa bidimensional de la fase envuelta; e) mapa 3D de la fase desenvuelta; f) perfil de la fase desenvuelta.	63

Figura	Página
29. Resultado de fase desenvuelta situado sobre un plano inclinado mostrado como una superficie: a) imagen original; b) reconstrucción con la FFT; c) reconstrucción con la XFT.	64
30. Resultado de fase desenvuelta situado sobre un plano inclinado mostrado como una superficie: a) imagen original; b) reconstrucción con la FFT; c) reconstrucción con la XFT.	64

Lista de Tablas

Tabla	Página
1. Pares de transformadas de algunas funciones separables en coordenadas rectangulares.	9
2. Algunas funciones y sus transformadas de Fourier.	15

Capítulo I

Introducción

La óptica es la rama de la física que analiza las características y propiedades de la luz así como su interacción con la materia. Existen diferentes áreas dentro de la óptica entre las que se pueden mencionar la óptica geométrica [1], óptica física [2] y óptica cuántica [3]. En la óptica geométrica se trata la luz como rayos es decir, no importa si es partícula u onda y sólo importa la dirección en la que viaja; por otra parte, la óptica cuántica trata la luz como fotones y su interacción con la materia, de esta área se desprenden muchas sub-áreas de reciente importancia. La óptica física trata la naturaleza ondulatoria de la luz. Dentro de la óptica física se encuentran las sub-áreas tales como interferometría, polarimetría y metrología óptica, entre otras. La metrología óptica tiene como propósito efectuar medidas de alta precisión usando ondas de luz lo que permite realizar mediciones sin contacto; esta tesis está enmarcada dentro de esta área.

Una de las técnicas usadas en la metrología óptica para la reconstrucción de superficies tridimensionales es la proyección de franjas [4]. Para la proyección de franjas existen diversos métodos como lo son la interferometría, proyección geométrica o el efecto Talbot. Este último surge cuando una rejilla binaria es iluminada por un frente de onda plano, coherente y monocromático; el campo difractado por esta rejilla forma imágenes idénticas, llamadas autoimágenes, en planos ubicados a múltiplos de la distancia conocida como distancia de Talbot [5]. Es importante recalcar que éstas autoimágenes se forman sin necesidad de componentes ópticas, es decir por simple propagación libre.

En esta tesis se construyó un arreglo óptico para generar el efecto Talbot tal que permita colocar un objeto en uno de los planos donde se forma una autoimagen de una rejilla binaria; usando un divisor de haz y con una cámara CCD se captura la imagen de las franjas de la rejilla deformada por la superficie del objeto. La imagen capturada se procesa por el método de Takeda [6] que permite la extracción de la fase que proporciona información sobre la superficie del objeto. El método de Takeda emplea la transformada de Fourier para la extracción de la fase.

Ignacio García-Serrano et al [7] proponen reconstruir objetos usando el efecto Talbot y desvolviendo la fase mediante el método de Itoh mencionado anteriormente, sin embargo sus resultados obtenidos no son del todo óptimos.

R. Rodriguez-Vera et al [8] usan el efecto Talbot para reconstruir contornos en objetos 3D, sin embargo no usan el mismo método empleado en esta tesis, debido a que utilizan el algoritmo para la transformada de Fourier implementado en software comercial.

En este trabajo se usa una variante de la transformada de Fourier, llamada transformada de Fourier extendida (XFT) desarrollada por el Rafael G. Campos et al [9]. Este método tiene como ventaja realizar la transformada de Fourier con mayor velocidad y precisión sin necesidad de contar con un equipo de cómputo potente, lo que la vuelve una ventaja importante para el método usado en este trabajo, pues se optimiza el tiempo de ejecución del algoritmo para el análisis de las imágenes. La ventaja sobre los trabajos mencionados anteriormente es que al usar la XFT se reconstruye la superficie del objeto sin necesidad de algoritmos complejos para el procesamiento de la fase.

I.1. Objetivo general

Mejorar la reconstrucción digital de la superficie de diversos objetos macroscópicos mediante la proyección de una rejilla binaria usando el efecto Talbot y la transformada de Fourier extendida.

I.2. Objetivos específicos

1. Comprender el efecto Talbot.
2. Implementar el análisis de Fourier para envolver la fase.
3. Comprender la teoría de envolvimiento y desenvolvimiento de fase.
4. Desarrollar los códigos de desenvolvimiento en MatLab.
5. Reconstruir objetos en 3D.

Para llevar a cabo estos objetivos la estructura de la tesis es la siguiente. En el capítulo II se estudia la teoría de Fourier, la transformada de Fourier y algunas de sus propiedades. En el capítulo III se habla sobre el efecto Talbot. El capítulo IV comprende el estudio de la proyección de luz estructurada y además presenta el concepto de fase envuelta y desenvuelta. El proceso de fase desenvuelta, así como sus algoritmos y diversos errores presentes durante este proceso son contemplados en el capítulo V. En el capítulo VI se expone el arreglo experimental empleado en este trabajo, la toma de muestras, su análisis y la reproducción de los objetos de estudio. Finalmente, en el capítulo VII se presentan las conclusiones.

Capítulo II

Análisis de Fourier

El análisis de Fourier es una herramienta matemática de gran utilidad en el estudio de fenómenos lineales y no lineales. Esta herramienta es ampliamente utilizada en redes eléctricas, sistemas de comunicación y sistemas ópticos para procesamiento de información entre otras aplicaciones. Este análisis involucra series y transformadas de Fourier por lo que en este capítulo se da una descripción breve de cada una de ellas.

II.1. Series de Fourier

Se define una función periódica como una función para la cual

$$f(t) = f(t + T) \tag{1}$$

para todo valor de t . La constante T que satisface la relación (1) es el período de la función. Mediante la repetición de (1), se obtiene,

$$f(t) = f(t + nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{2}$$

Las series de Fourier son la base matemática del análisis de Fourier usado para estudiar funciones de comportamiento periódico, para ello se realiza una descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones sinusoidales cuyo comportamiento es más simple (formadas por una combinación de senos y cosenos de frecuencias enteras). Se puede escribir este tipo de funciones como:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n \frac{1}{T}x) + b_n \sin(2\pi n \frac{1}{T}x)], \quad (3)$$

en esta ecuación los coeficientes a_n y b_n son las amplitudes de cada una de las componentes sinusoidales. Si la función $g(x)$ es real, los coeficientes serán reales también. Si se multiplica la expresión (3) por $\cos(2\pi n \frac{1}{T}x)$, luego por $\sin(2\pi n \frac{1}{T}x)$ y se aplican identidades trigonométricas, se puede obtener después de integrar sobre un período completo una expresión analítica de los coeficientes, los cuales se calculan a partir de $g(x)$ como:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x) \cos(2\pi n f_x x) dx \quad (4)$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x) \sin(2\pi n f_x x) dx \quad (5)$$

Se puede observar que las componentes de la frecuencia tienen una separación constante e igual a la frecuencia fundamental $f_x = 1/T$. Ahora si la función es simétrica (es decir $g(x) = g(-x)$), entonces sólo los coeficientes a_n pueden ser diferentes de cero, en cambio si la función es anti-simétrica ($g(x) = -g(-x)$) entonces serán los coeficientes b_n los que pueden ser diferentes de cero.

Cuando la función es asimétrica ambos coeficientes pueden ser distintos de cero. En la figura (1) se muestran algunas de las funciones periódicas más comunes.

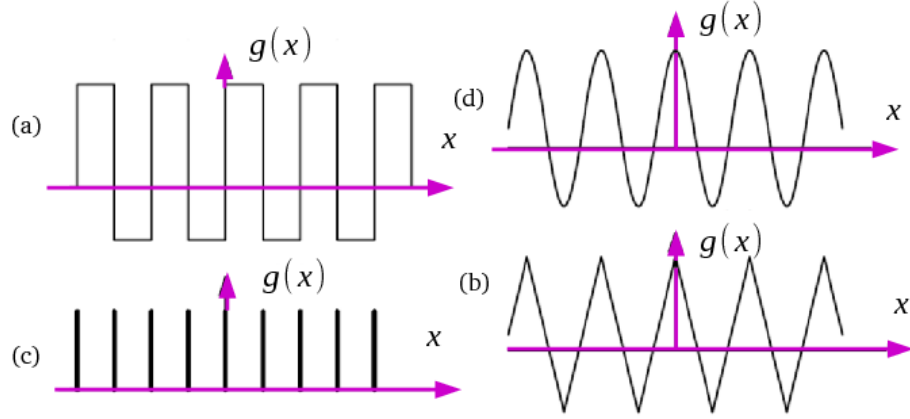


Figura 1. Gráficas de funciones periódicas unidimensionales: **(a)** Rectangular $Rect(x)$; **(b)** Cosenoidal $\cos(x)$; **(c)** Peine de Dirac $Comb(x)$ y **(d)** Triangular.

Otra forma en la que pueden ser representadas las series de Fourier es por medio de funciones complejas tal como:

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n f_x x} \quad (6)$$

en esta relación los coeficientes C_n pueden ser reales y/o imaginarios. Estas funciones exponenciales también son ortogonales pues son funciones trigonométricas. Se pueden calcular los coeficientes de la siguiente manera:

$$c_n = \int_{-x_0}^{x_0} g(x) \cos(2\pi n f_x x) dx. \quad (7)$$

Para este caso, los coeficientes C_n corresponden a valores positivos de amplitud.

II.2. Transformada de Fourier unidimensional

Si el período de la función $g(x)$ incrementa y la separación entre las componentes sinusoidales disminuye, en el límite cuando el período tiende a infinito, el intervalo de frecuencia entre armónicas tiende a cero. Cualquier función no periódica puede ser considerada como una función periódica con un período infinito, por lo tanto, una función continua no periódica se puede representar como una serie de Fourier, es decir, se puede representar por una suma infinita de funciones sinusoidales. Como consecuencia, la serie de la ecuación (3) se puede representar como una integral y esto nos lleva al concepto de transformada de Fourier.

Sea $g(x)$ una función continua dependiente de la variable real x . La transformada de Fourier de $g(x)$ se representa por $G(f)$ y está definida por:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-2\pi i f x} dx. \quad (8)$$

La transformada de Fourier $G(f)$ es el espectro de amplitud de la función $g(x)$ o espectro de Fourier y su amplitud es el módulo al cuadrado de este espectro. Un ejemplo de una transformada de Fourier se tiene al utilizar una función sinusoidal $g(x)$ la cual presenta un espectro de Fourier único con dos frecuencias características que se puede interpretar como su huella digital. Este espectro es un par de funciones delta de Dirac localizadas simétricamente con respecto al origen en el plano de frecuencia correspondiente. Dada $G(f)$, la función $g(x)$, puede ser obtenida a través de la transformada inversa de Fourier, definida por:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{2\pi i f x} df. \quad (9)$$

Aquí, x es la variable espacial y su dominio se refiere como dominio espacial. Por otro lado, f es una variable de frecuencia, por lo que su dominio es el de frecuencias espaciales o dominio de Fourier. Un par de Transformadas de Fourier está definido por las ecuaciones (8) y (9). Ambas funciones, $g(x)$ y $G(f)$, pueden ser reales o complejas. En la tabla (1) se muestran algunos pares de transformadas de Fourier.

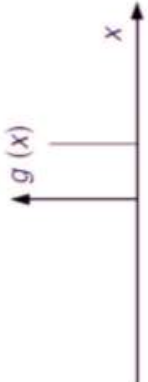
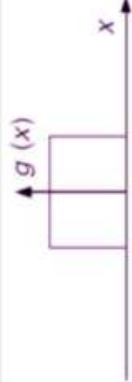
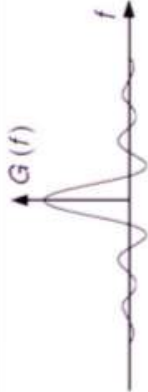
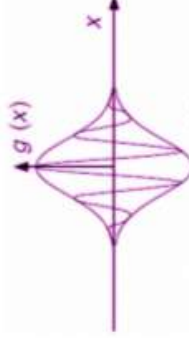
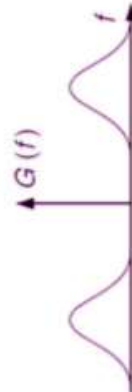
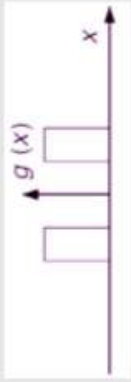
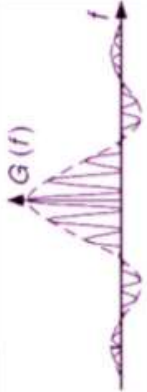
Funciones en el dominio espacial	Gráfica	Funciones en el espacio de frecuencias	Gráfica
Función delta de Dirac (pulso): $g(x) = \delta(x - x_0)$		Constante: $G(f) = Ae^{-2\pi i f x_0}$	
Función Rectángulo: $g(x) = \begin{cases} A & \text{si } x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$		Función Seno ciente (sinc): $G(f) = 2Aa \frac{\text{sinc}(2\pi f x_0)}{2\pi f x_0}$	
Onda Gaussiana modulada $g(x) = A \cos(2\pi f_0 x) e^{-\frac{x^2}{a^2}}$		Función Gaussiana: $G(f) = \frac{Aa\sqrt{\pi}}{4} e^{-\frac{2\pi a^2(f-f_0)^2}{4}} + \frac{Aa\sqrt{\pi}}{4} e^{-\frac{2\pi a^2(f+f_0)^2}{4}}$	
Par de funciones Rectángulo $g(x) = \begin{cases} A & \text{si } b-a \leq x \leq b+a \\ 0 & \text{si } x < b-a, x > b+a \end{cases}$		Onda Sinc Modulada: $G(f) = 4A \cos(2\pi f b) \frac{\text{sinc}(2\pi f a)}{2\pi f a}$	

Tabla 1. Pares de transformadas de algunas funciones separables en coordenadas rectangulares.

II.3. Transformada de Fourier bidimensional

La transformada de Fourier de una función g con dos variables independientes x e y representada por $\mathcal{F}\{g\}$, es definida por

$$\mathcal{F}\{g(x, y)\} = \int \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy \quad (10)$$

La transformada está definida como una función compleja de dos variables independientes f_x y f_y conocidas como frecuencias espaciales. De manera similar, la transformada inversa de Fourier de una función $G(f_x, f_y)$ es representada por $\mathcal{F}^{-1}\{G\}$ y se define como

$$\mathcal{F}^{-1}\{g(x, y)\} = \int \int_{-\infty}^{+\infty} G(f_x, f_y) e^{j2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y. \quad (11)$$

Se puede observar que la transformada de Fourier y su inversa son muy similares, diferenciándose sólo por un signo en la exponente del integrando.

Antes de discutir las propiedades de la transformada de Fourier y de su inversa, se debe primero decidir cuándo las ecuaciones (10) y (11) son significativas. Para ciertas funciones, estas integrales pueden no existir en un sentido matemático y, por lo tanto, esta discusión estaría incompleta sin al menos hacer una breve mención de las condiciones de existencia. Un conjunto de condiciones de suficiencia para la existencia de la ecuación (10) son las siguientes:

1. g debe ser absolutamente integrable sobre el plano infinito (x, y) .
2. g sólo debe tener un número finito de discontinuidades y un número finito de máximos y mínimos en un dominio rectangular finito del plano XY .

3. g no puede tener discontinuidades de manera infinita.

En general, una de estas condiciones pueden ser vulnerada para fortalecer una o dos de las otras condiciones.

La definición básica de la transformada de Fourier (10) conduce a una estructura matemática conocida con la operación de transformación lineal. A continuación se expone algunas de las propiedades básicas de la transformada. En los siguientes casos se considera que las transformadas de Fourier de las funciones $g(x)$ y $h(x)$ están dadas por $\mathcal{F}(g) = G(f_x, f_y)$ y $\mathcal{F}(h) = H(f_x, f_y)$, respectivamente.

1. **Teorema de Linealidad.** La transformada de una suma ponderada de dos o más funciones es idéntica a la suma ponderada de las transformadas individuales:

$$\mathcal{F}\{\alpha g + \beta h\} = \alpha \mathcal{F}\{g\} + \beta \mathcal{F}\{h\}. \quad (12)$$

2. **Teorema de Similitud.** La amplificación de las coordenadas en el dominio espacial (x, y) resulta en una contracción de las coordenadas en el dominio de las frecuencias espaciales (f_x, f_y) , además de un cambio en la amplitud total del espectro:

$$\mathcal{F}\{g(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} G\left(\frac{f_x}{a}, \frac{f_y}{b}\right). \quad (13)$$

3. **Teorema del Desplazamiento.** Una traslación de la función en el dominio espacial introduce un cambio de fase lineal en el espectro de frecuencias:

$$\mathcal{F}\{g(x - a, y - b)\} = G(f_x, f_y) e^{-i2\pi(f_x a + f_y b)}. \quad (14)$$

4. **Teorema de Rayleigh (Teorema de Parseval).** La integral del lado izquierdo del teorema puede ser interpretada como la energía contenida en un frente de onda $g(x, y)$. Lo que nos conduce a la idea de que la cantidad $|G(f_x, f_y)|^2$ puede ser interpretada como una densidad de energía en el dominio de las frecuencias, es decir:

$$\mathcal{F}^{-1}\{g(x, y)\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^2 dx dy = \int \int_{-\infty}^{\infty} |G(f_x, f_y)|^2 df_x df_y. \quad (15)$$

Esta ecuación también se conoce como el principio de conservación de la energía.

5. **Teorema de Convolución.** La transformada de Fourier de una convolución de dos funciones en el dominio espacial es equivalente a la de multiplicar sus transformadas individuales:

$$\mathcal{F}\left\{\int \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) * h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta\right\} = G(f_x, f_y) H(f_x, f_y). \quad (16)$$

6. **Teorema de Autocorrelación.** Este teorema puede ser considerado como un caso especial del teorema de convolución donde se realiza la convolución entre $g(x, y)$ con su compleja conjugada $g^*(-x, -y)$:

$$\mathcal{F}\left\{\int \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) * g(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta\right\} = |G(f_x, f_y)|^2. \quad (17)$$

Similarmente,

$$\mathcal{F} = \{|g(x, y)|^2\} \int \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \eta) G * (\xi - f_x, \eta - f - y) d\xi d\eta. \quad (18)$$

7. Teorema Integral de Fourier. En cada punto de discontinuidad de g , las dos transformadas sucesivas producen un promedio angular del valor de g en una vecindad pequeña de ese punto. Esto es, la transformada sucesiva y la transformada inversa de una función producen la función original, excepto en sus puntos de discontinuidad:

$$\mathcal{F} \mathcal{F}^{-1}\{g(x, y)\} = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}\{g(x, y)\} = g(x, y). \quad (19)$$

Estos teoremas no son sólo de interés teórico sino que tienen una gran aplicación práctica y son utilizados con frecuencia, además, de ser las herramientas indispensables para la manipulación de la transformada de Fourier y puede ahorrar grandes cantidades de trabajo al momento de realizar un análisis de Fourier.

Existe un conjunto de funciones matemáticas que son de gran importancia para el modelado de fenómenos físicos bajo el estudio de la Transformada de Fourier, por ello en esta sección se menciona un poco sobre esto. A continuación se definen dichas funciones:

1. Función Rectángulo

$$rect(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

2. Función Seno-Cociente

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

3. Función Signo

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

4. Función Triángulo

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

5. Función Peine de Dirac

$$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n).$$

En la tabla (2) se muestran algunas funciones con su respectiva transformada, cabe señalar que las funciones expuestas son separables en coordenadas rectangulares y se presentan con constantes de escala arbitraria.

Función	Transformada
$e^{(x^2a^2+b^2y^2)}$	$\frac{1}{ ab } e^{[-\pi(\frac{f_x^2}{a^2} + \frac{f_y^2}{b^2})]}$
$\text{rect}(ax)\text{rect}(by)$	$\frac{1}{ ab } \text{sinc}\left(\frac{f_x}{a}\right) \text{sinc}\left(\frac{f_y}{b}\right)$
$\Lambda(xa)\Lambda(yb)$	$\frac{1}{ ab } \text{sinc}^2\left(\frac{f_x}{a}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{f_y}{b}\right)$
$\delta(ax, by)$	$\frac{1}{ ab }$
$e^{i\pi(xa+by)}$	$\delta\left(f_x - \frac{a}{2}, f_y - \frac{b}{2}\right)$
$\text{sgn}(ax)\text{sgn}(by)$	$\frac{ab}{ ab } \frac{1}{j\pi f_x} \frac{1}{j\pi f_y}$
$\text{comb}(ax)\text{comb}(by)$	$\frac{1}{ ab } \text{comb}\left(\frac{f_x}{a}\right) \left(\frac{f_y}{a}\right)$
$e^{in(x^2a^2+b^2y^2)}$	$\frac{i}{ ab } e^{[-j\pi(\frac{f_x^2}{a^2} + \frac{f_y^2}{b^2})]}$
$e^{-(a x+b y)}$	$\frac{1}{ ab } \frac{2}{1 + \left(2\pi \frac{f_x}{a}\right)^2} \frac{2}{1 + \left(2\pi \frac{f_y}{b}\right)^2}$

Tabla 2. Algunas funciones y sus transformadas de Fourier.

II.4. XFT: Transformada de Fourier extendida

En este apartado se describe de manera breve el método de la XFT; una justificación más profunda sobre el tema de este algoritmo empleado para el cálculo de la FFT se encuentra en [9].

Mediante el uso de un enfoque espectral, se puede derivar una cuadratura de Gauss para la transformada fraccional de Fourier continua [9]. La cuadratura se obtiene de una forma bilineal de vectores propios de la matriz asociada a la ecuación de recurrencia de los polinomios de Hermite. Estos vectores propios son aproximaciones discretas de las funciones Hermite, que son funciones

propias de la transformada de Fourier fraccional. Esta nueva transformada discreta es unitaria y tiene una estructura de grupo. Mediante el uso de algunas fórmulas asintóticas, se escribe en términos de la transformada rápida de Fourier (FFT), produciendo una discretización rápida de la transformada de Fourier fraccional y su inversa, por ello este método se convierte en una versión más exacta de la FFT y se puede utilizar para las funciones no periódicas.

El código en ambiente Matlab para obtener la transformada de Fourier extendida, se presenta a continuación:

```

epsx=pi/sqrt(2*nx);
x=((1:nx)'-nx/2-1/2)*epsx;
alfax=pi*exp(-1i*2*pi*((nx-1)/2)^2/nx)/sqrt(2*nx);
epsy=pi/sqrt(2*ny);
y=((1:ny)'-ny/2-1/2)*epsy;
alfay=pi*exp(-1i*2*pi*((ny-1)/2)^2/ny)/sqrt(2*ny);
Ux=diag(exp(-1i*pi*(nx-1)*(0:nx-1)'/nx));
Uy=diag(exp(-1i*pi*(ny-1)*(0:ny-1)'/ny));

hp=alfax*nx*(Ux*fft((g*Ux)'))';
v=alfay*ny*Uy*(fft((hp*Uy)'))';

```

donde nx y ny son el tamaño de la imagen de entrada a la que se aplica la transformada de Fourier extendida. Las siglas *fft* es el comando de Matlab para obtener la transformada de Fourier de la función g .

II.4.1. Comparación de la FFT vs XFT

En esta sección se compara el resultado clásico de la FFT contra la XFT y se muestran dos ejemplos. El primer ejemplo se muestra en la figura (2) en la que se observan dos cuadros blancos

en un fondo negro que componen la imagen de entrada de la que se obtiene la transformada de Fourier, se procesa la imagen por ambos métodos y se puede apreciar la diferencia entre ambas. El segundo ejemplo se muestra en la figura (3) donde se aprecia el contorno de un gato en un fondo negro, de igual modo se procesó con ambas transformadas.

Aunque el algoritmo de la FFT es ampliamente utilizando en la mayoría de los programas computacionales y presenta una buena eficiencia, en esta tesis se emplea el reciente algoritmo conocido como XFT, cuyo resultado es más preciso debido a que proviene de una fórmula de cuadratura convergente [9]. Otra de sus ventajas de este algoritmo es que el costo computacional para su cálculo es similar al de la FFT. Además, para ciertas funciones la magnitud de la diferencia entre el error de la función exacta de su transformada de Fourier y la aproximada empleando la XFT tiende a cero en más puntos alrededor del origen a medida que N incrementa, mientras que la misma diferencia producida por la FFT mantiene prácticamente el mismo valor para el mismo intervalo.

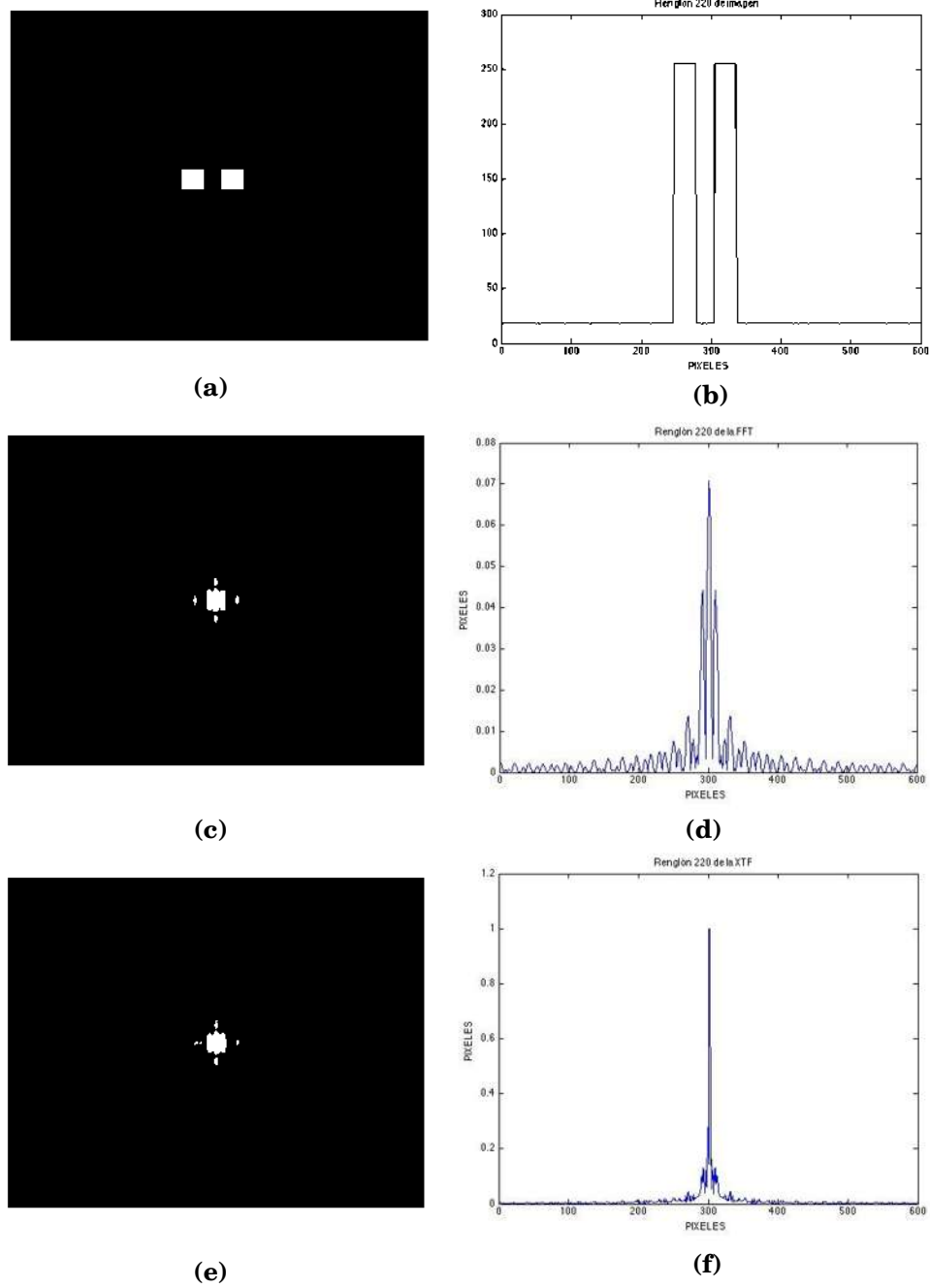


Figura 2. a) Objeto original en 2D; b) Perfil unidimensional; c) Transformada de Fourier (FFT); d) Perfil de la transformada de Fourier (FFT); e) Transformada de Fourier (XFT); f) Perfil de la transformada de Fourier (XFT).

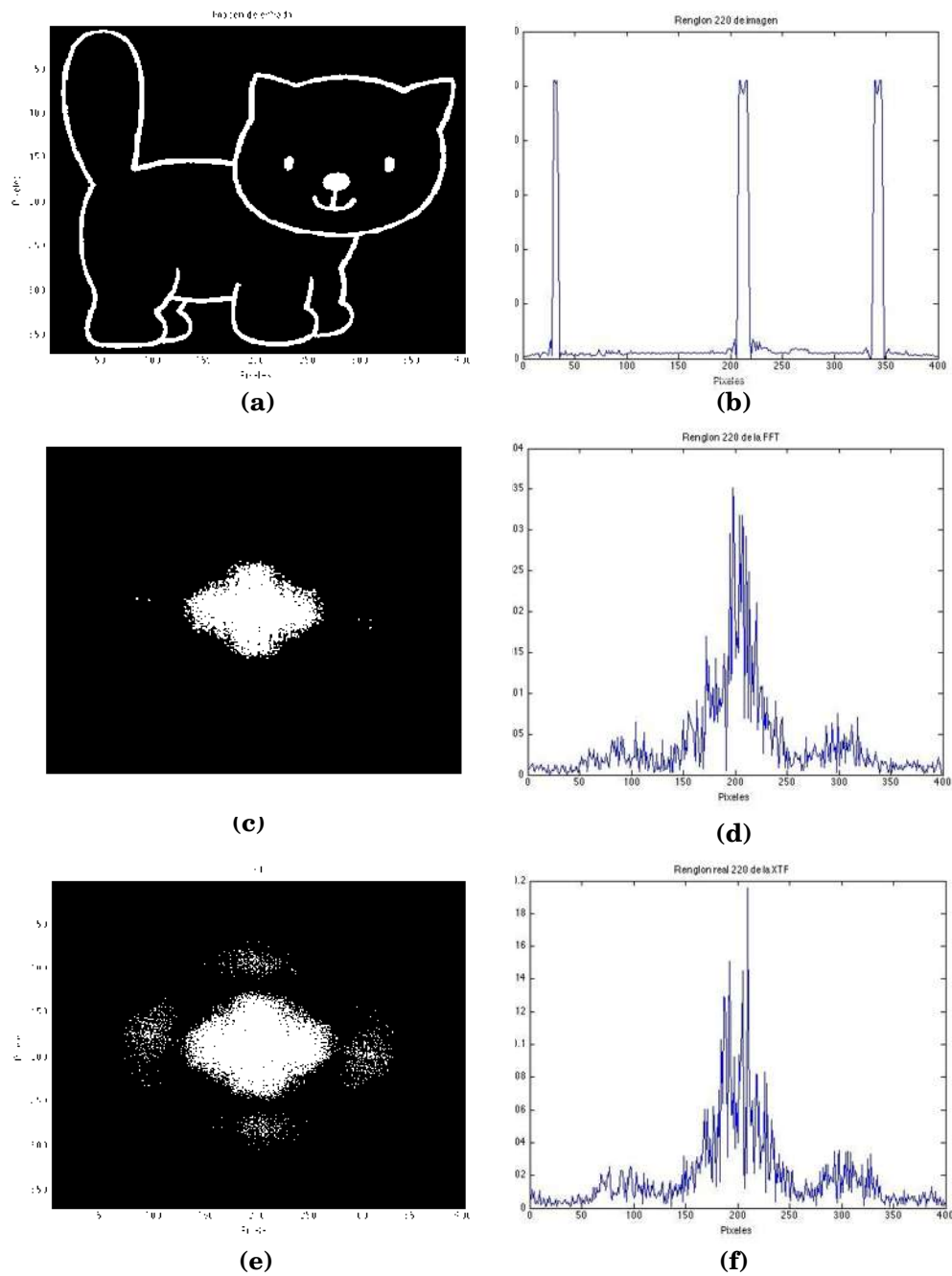


Figura 3. a) Objeto original en 2D; b) Perfil unidimensional; c) Transformada de Fourier (FFT); d) Perfil de la transformada de Fourier (FFT); e) Transformada de Fourier (XFT); f) Perfil de la transformada de Fourier (XFT).

Capítulo III

Efecto Talbot

Al iluminar un objeto periódico, con una función de transmitancia cualquiera, con un frente de onda plano, después de que la onda plana atraviesa al objeto se obtiene un campo de onda con modulación periódica. A una distancia posterior, conocida como distancia de Talbot, el campo de onda tendrá la misma distribución de amplitudes que tenía inmediatamente después del objeto periódico que se conoce como autoimagen y el plano donde se encuentra se conoce como distancia de Talbot. Para entender este concepto, es necesario recurrir a las series de Fourier que se utilizan en la siguiente sección.

III.1. Series de Fourier de un campo óptico periódico

En el capítulo 2 se analizaron aspectos de la serie de Fourier desde un punto de vista matemático, ahora se tratan como una suma de ondas planas, a continuación se analiza dicha afirmación.

Una onda plana puede ser representada por la siguiente expresión:

$$\Psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (20)$$

En la ecuación (20) $\vec{k}$ es el vector de propagación de la onda, y está dado por:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(L\hat{i} + M\hat{j} + N\hat{k}), \quad (21)$$

donde L , M y N son los cosenos directores del vector de propagación de la onda (ver figura 4), los cuales están dados por:

$$\begin{aligned} L &= \cos \alpha, \\ M &= \cos \beta, \\ N &= \cos \gamma, \end{aligned} \tag{22}$$

α , β , γ , los ángulos que forma $\vec{k}$ con los ejes x , y , z respectivamente. El vector $\vec{r}$ se denota por:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \tag{23}$$

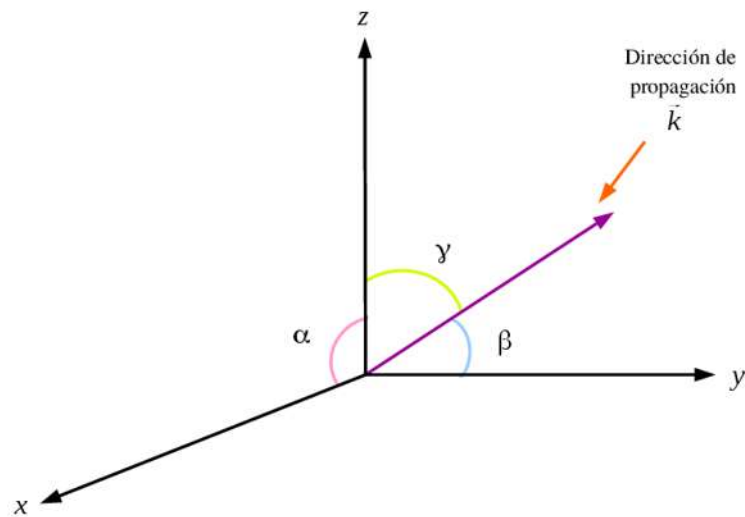


Figura 4. Representación esquemática de la dirección de propagación de una onda.

Por ello se puede representar la ecuación (20)

$$\Psi(x, y, z) = e^{[i\frac{2\pi}{\lambda}(Lx + My + Nz)]}. \tag{24}$$

Supóngase que el vector de propagación de la onda está inscrito en el plano xz , lo cual sólo es posible si $\beta = 90^\circ$ (es decir $M = 0$). En este caso, la distribución de la fase de la ecuación (24) se proyecta en el plano $z = 0$ como:

$$\Psi(x) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}Lx}. \quad (25)$$

La función $e^{2\pi i n f_x x}$ de la serie de Fourier en la ecuación (6) se puede interpretar como una onda plana del tipo de la ecuación (25), cuyo coseno director, respecto al eje x es:

$$L = \frac{n\lambda}{p}, \quad (26)$$

donde p es el período y $p = 1/f_x$ y f_x es la frecuencia.

Con esto se demuestra que, mientras la ecuación (25) representa una sola onda plana, la ecuación (6) representa una suma de ellas. Tratar las series de Fourier como una suma de ondas planas es muy importante al estudiar problemas de difracción.

III.2. Serie de Fourier de un campo óptico periódico desplazado

Para esta tesis es útil encontrar la serie de Fourier de un campo periódico desplazado lateralmente medio período.

Considérese un campo periódico $u_0(x)$ con período p , cuya serie de Fourier es:

$$u_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi nx/p}. \quad (27)$$

Puede representarse la ecuación (27) como subseries infinitas:

$$u_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} e^{i2\pi(2n)x/p} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n+1} e^{i2\pi(2n+1)x/p}. \quad (28)$$

Las ecuaciones (27) y (28), representan la serie de Fourier del mismo campo de ondas pero expresado de diferente forma.

Se puede considerar un campo periódico desplazado lateralmente medio período, el cual se representa por $u_0(x - p/2)$. La serie de Fourier para este campo, de acuerdo con (27), resulta ser:

$$u_0(x - p/2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi nx/p} e^{-inx}. \quad (29)$$

Con la ecuación (29), se observa que la exponencial puede tener dos posibles valores:

$$e^{-inx} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ par} \\ -1 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases} \quad (30)$$

Si se utiliza la ecuación (30) se puede representar la expresión (29) en dos subseries, con órdenes pares e impares como:

$$u_0(x - p/2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} e^{i2\pi(2n)x/p} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n+1} e^{i2\pi(2n+1)x/p}, \quad (31)$$

con ello, se obtiene una serie de Fourier para un campo de onda desplazado, en función de dos subseries infinitas.

III.3. Propagación de una onda plana

Una onda plana o un campo de ondas se puede propagar mediante la integral de Fresnel, sin embargo se tratará mediante un procedimiento heurístico. En la figura (5) se muestra un esquema para realizar dicho procedimiento.

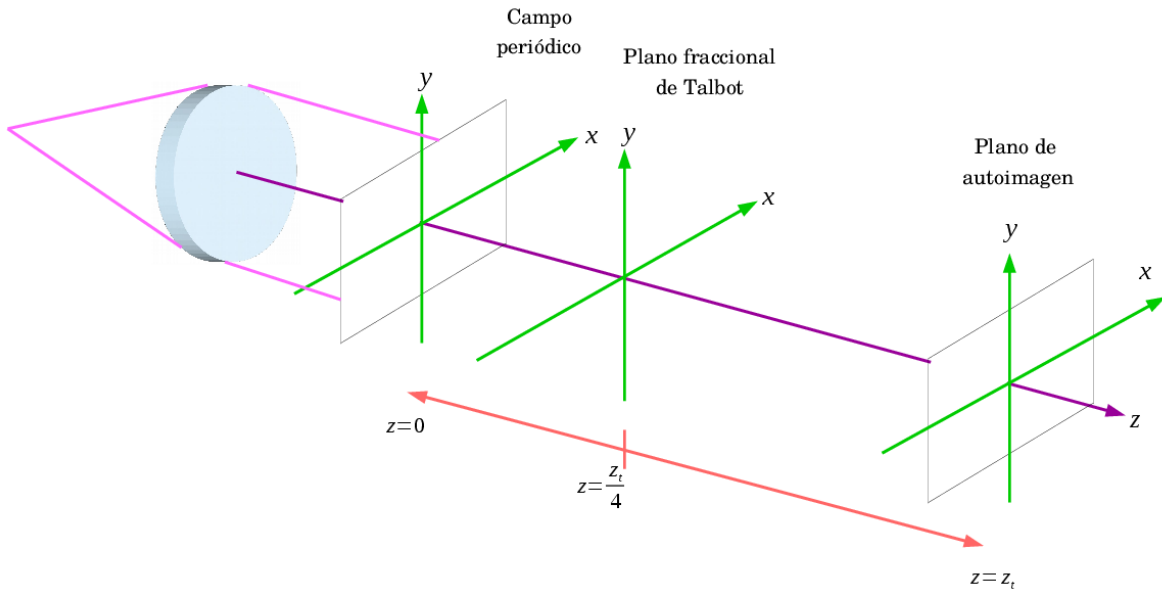


Figura 5. Esquema del arreglo para la difracción de un campo periódico.

Por simplicidad usemos la onda plana descrita por la ecuación (24), pero con su vector de propagación inscrito en el plano xz , es decir $M = 0$, en este caso:

$$\Psi(x, z) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(Lx+Nz)}, \quad (32)$$

donde

$$N = (1 - L^2)^{1/2}. \quad (33)$$

Se puede ver que la onda plana que en $z = 0$ se representa por la ecuación (25), en $z \neq 0$ se representa mediante la ecuación (32), que se puede escribir como:

$$\Psi(x, z) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(Nz)} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(Lx)}. \quad (34)$$

Nótese que $L/\lambda = \nu$ es frecuencia espacial, y si $|\nu| \ll 1/\lambda$ (caso paraxial o de Fresnel), el coseno director N , según la ecuación (32), se puede aproximar como:

$$N = (1 - \lambda^2 \nu^2)^{1/2} \approx 1 - \lambda^2 \nu^2 / 2. \quad (35)$$

Por tanto, la ecuación (34) se reduce a:

$$\Psi(x, z) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z} e^{i\pi\lambda z\nu^2} e^{i2\pi\nu x}. \quad (36)$$

Se puede definir el factor de propagación $F(z)$ de la ecuación (36) como:

$$F(z) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z} e^{-i\pi\lambda z\nu^2}. \quad (37)$$

En el caso de la onda plana, $e^{i2\pi nx/p}$ en la serie de Fourier de la ecuación (27), se tiene $\nu = n/p$ y su factor de propagación es:

$$F(z) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z} e^{-i\pi\lambda zn^2/p^2}, \quad (38)$$

por tanto, el campo periódico, de la ecuación (27), el cual se propaga en una distancia z es:

$$U(x, z) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i\pi\lambda zn^2/p^2} e^{i2\pi nx/p}. \quad (39)$$

Esta ecuación también representa una serie de Fourier pero con nuevos coeficientes. Nótese que si $z = 0$, la segunda exponencial de la ecuación (39) se reduce a:

$$e^{-i\pi\lambda zn^2/p^2} = 1, \quad (40)$$

con este resultado, la ecuación (39) es exactamente igual a la serie de Fourier de la expresión (27).

III.4. Formación de autoimágenes

Si $z \neq 0$, la ecuación (39) puede ser reducida (salvo por un factor de fase constante) a la ecuación (27), para ello es suficiente establecer la condición:

$$z_t = 2p^2/\lambda, \quad (41)$$

conocida como la distancia de Talbot.

Sustituyendo la ecuación (41) en la ecuación (39), se encuentra una réplica del campo periódico a la distancia z_t , es decir donde se halla su autoimagen. Este hecho se conoce como *Efecto Talbot*; es fácil darse cuenta que los planos nz_t también presentan autoimágenes del campo periódico.

III.5. Patrón de difracción de Fresnel a un medio de la distancia de Talbot

Usando la ecuación (41), el patrón de difracción de Fresnel de la ecuación (39) puede reescribirse, si se omite el factor de fase $e^{i2\pi nz/p}$, como:

$$U(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i2\pi n^2 z/z_t} e^{i2\pi nx/p}. \quad (42)$$

El factor donde aparece la distancia de Talbot lo expresaremos como:

$$F(n, z) = e^{-i2\pi n^2/z_t}, \quad (43)$$

este factor es muy importante, pues determina la forma que tendrá (42) con distintos valores de z , ahora se analizará el caso para un medio de la distancia de Talbot.

Supóngase que $z = z_t/2$, sustituyendo esto en la ecuación (43) se tiene:

$$F(n, z_t/2) = e^{-in^2\pi}, \quad (44)$$

con dos valores posibles:

$$F(n, z_t/2) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ par,} \\ -1 & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases} \quad (45)$$

Usando la ecuación (45) en la ecuación (42), se puede expresar mediante dos subseries como:

$$U(x, z) = z_t/2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} e^{i2\pi(2n)x/p} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n+1} e^{i2\pi(2n+1)x/p}. \quad (46)$$

Puede verse que la ecuación (46) es la misma expresión que la ecuación (31), es decir:

$$U(z, z = z_t/2) = u_0(z - p/2, z = 0). \quad (47)$$

Desde un punto físico, este resultado dice que, al analizar el patrón de difracción de Fresnel de un campo periódico, a la mitad de la distancia de Talbot, lo que se observa es la imagen del mismo campo, pero desplazado medio período lateralmente.

III.6. Patrón de difracción de Fresnel a un cuarto de la distancia de Talbot

Si en la ecuación (43) se hace $z = z_t/4$, se obtiene:

$$F(n, z_t/4) = e^{-in^2\pi/2}. \quad (48)$$

Es necesario distinguir los casos en los que n es par e impar, es decir:

$$F(n, z_t/4) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ par,} \\ -i & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases} \quad (49)$$

sustituyendo la ecuación (49) en la ecuación (41):

$$Z(x, z_t/4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} e^{i2\pi(2n)x/p} - i \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n+1} e^{i2\pi(2n+1)x/p}, \quad (50)$$

aplicando las ecuaciones (28) y (31), las subseries de la ecuación (50) se pueden escribir como:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} e^{i2\pi(2n)x/p} = \frac{1}{2} \left[u_0(x) + u_0\left(x - \frac{p}{2}\right) \right], \quad (51)$$

$$i \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n+1} e^{i2\pi(2n+1)x/p} = \frac{1}{2} \left[u_0(x) - u_0\left(x - \frac{p}{2}\right) \right]. \quad (52)$$

Las expresiones (51) y (52) permiten escribir la ecuación (50) de la siguiente forma:

$$U(x, z = z_t/4) = \frac{1}{2} \left[u_0(x) + u_0 \left(x - \frac{p}{2} \right) \right] - \frac{i}{2} \left[u_0(x) - u_0 \left(x - \frac{p}{2} \right) \right]. \quad (53)$$

Agrupando términos de la ecuación (53) se obtiene:

$$U(x, z = z_t/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4} \left[u_0(x) + i u_0 \left(x - \frac{p}{2} \right) \right]. \quad (54)$$

En la figura (6) se muestra cada uno de los casos para las distancias de Talbot descritas anteriormente.

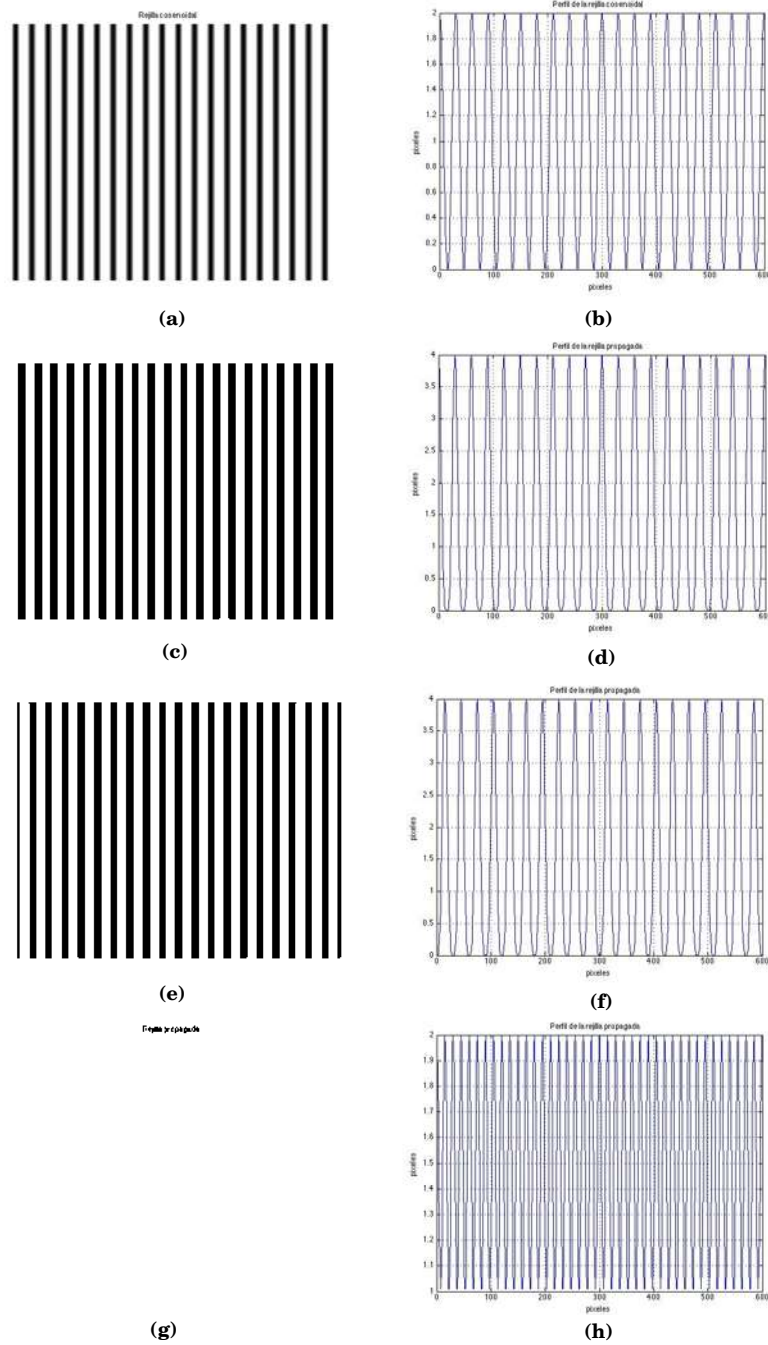


Figura 6. a) Rejilla cosenoidal (frecuencia 30 píxeles, tamaño 600x600 píxeles); b) Perfil de la rejilla cosenoidal; c) Autoimagen de la rejilla cosenoidal a la distancia de Talbot; d) Perfil de la autoimagen a la distancia de Talbot; e) Autoimagen de la rejilla cosenoidal a media distancia de Talbot; f) Perfil de la autoimagen a media distancia de Talbot; g) Autoimagen de la rejilla cosenoidal a un cuarto de la distancia de Talbot; h) Perfil de la autoimagen a un cuarto de la distancia de Talbot.

Capítulo IV

Proyección de luz estructurada

IV.1. Descripción del método integral

Distintos fenómenos de interferometría clásica, interferometría holográfica, moiré, speckle y la fotoelasticidad dan como resultado un conjunto de franjas denominadas interferogramas. Por mucho tiempo, lo tradicional en el análisis de estos interferogramas ha sido una cuestión de localización manual de la posición y el número de las franjas. Con el desarrollo y la disminución de los costos en equipo de procesamiento digital, se han logrado realizar avances en el desarrollo de técnicas de medición digital de patrones de franjas. Existen tres importantes razones para utilizar este tipo de análisis en lugar del tradicional: 1) mayor precisión, 2) incrementar la velocidad y 3) automatizar el proceso.

IV.2. Interferometría de medición de fase

Si se utiliza un sistema digital para el procesamiento de imágenes para analizar los interferogramas, se tiene la posibilidad de almacenar la imagen del interferograma dentro de la memoria de la computadora para manipular posteriormente los píxeles de manera individual. Considérese la expresión general de un interferograma, por ejemplo, el obtenido en el experimento de Young:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma| \cos \Delta\varphi, \quad (55)$$

en esta expresión, I , I_1 e I_2 son funciones de las coordenadas espaciales y son las intensidades de las ondas que interfieren, $|\gamma|$ es el grado de coherencia mutua y $\Delta\varphi$ es la diferencia de fase (φ) entre las ondas que interfieren. Imagínese, por ejemplo, que se toma una fotografía de este patrón de interferencia y se almacena digitalmente en una computadora. Cada píxel tiene una intensidad dada por la expresión en la ecuación (55).

En muchas de las aplicaciones de la interferometría se desea conocer a través de ella algún parámetro físico que se encuentra en la expresión de la fase, por tanto, si se resuelve la ecuación respecto a $\Delta\varphi$ se tiene la siguiente expresión:

$$\Delta\varphi = \cos^{-1} \frac{I - (I_1 + I_2)}{2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma|}. \quad (56)$$

Una vez calculada la fase en cada píxel y conociendo la geometría y configuración óptica del interferómetro se puede calcular el parámetro buscado en cada píxel de la imagen completa. Para hacer esto, se deben conocer las intensidades I_1 e I_2 y el grado de coherencia mutua de las ondas interferidas, además se debe conocer la intensidad de cada píxel. Esta suposición es irreal en la mayoría de los casos y aún si se supieran estas cantidades para el interferograma ideal, la distribución de intensidades de un sistema complejo de imágenes estará siempre acompañada por ruido intrínseco.

IV.2.1. Método espacial para la medición de fase por transformada de Fourier

Los métodos espaciales para la medición de fase están basados en la idea de superponer un patrón de franjas sobre una superficie. Dicho patrón está deformado y representado por la siguiente expresión:

$$h(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + 2\pi f_0 x], \quad (57)$$

donde f_0 es la frecuencia del patrón de franjas en la dirección x y $\phi(x, y)$ es la fase de la rejilla modulada por la superficie. Para obtener el valor de la fase $\phi(x, y)$ se emplea el método de la transformada de Fourier, el cual fue presentado originalmente por Takeda *et al.* (1982). Usando este método la ecuación (57) puede ser escrita como:

$$h(x, y) = a(x, y) + c(x, y)e^{i2\pi f_0 x} + c^*(x, y)e^{-i2\pi f_0 x}, \quad (58)$$

donde

$$c(x, y) = \frac{1}{2}b(x, y)e^{i\phi(x, y)}. \quad (59)$$

La transformada de Fourier del patrón de franjas con respecto a x da como resultado:

$$H(x, y) = A(f_x, y) + C(f_x - f_0, y) + C^*(f_x + f_0, y), \quad (60)$$

las letras mayúsculas representan el espectro de Fourier y f_x es la frecuencia espacial en la dirección x . Para que el método funcione, la variación espacial $\phi(x, y)$ debe ser tal que permita separar los órdenes en el espectro de Fourier como se muestra en la figura (7 a). Si se utiliza la función de filtro $F(f_x - f_0, y)$ en el plano de frecuencias, la función $C(f_x - f_0, y)$ puede ser aislada y trasladada por f_0 hacia el origen y obtener $C(f_x, y)$ como se muestra en la figura (7 b).

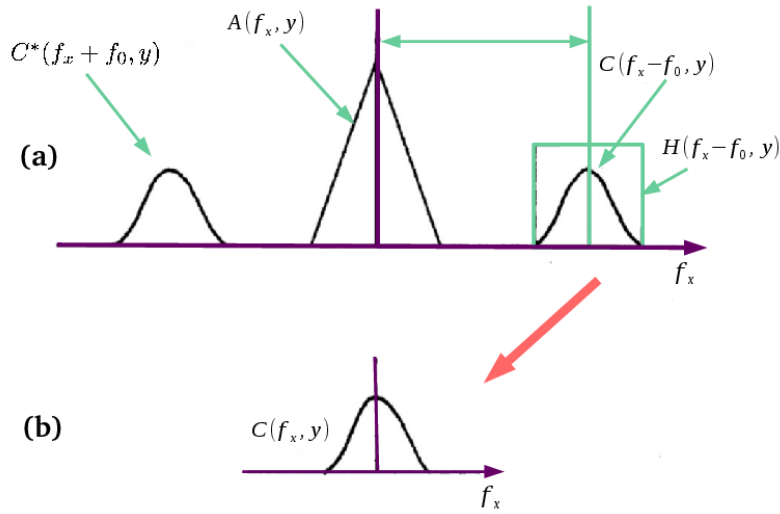


Figura 7. Espectro de Fourier separado de un patrón de franjas.

Ahora se debe tomar la transformada inversa de Fourier de esta función y como resultado se obtiene una función compleja ($c(x, y)$). La fase entonces puede ser determinada a través de dos operaciones equivalentes. La primera de ellas (usada en esta tesis) es calcular el logaritmo de $c(x, y)$ dada por la ecuación (61), obteniendo:

$$\log[c(x, y)] = \log \left[\frac{1}{2}b(x, y) \right] + i\phi(x, y). \quad (61)$$

La fase se encuentra en la parte imaginaria de dicha ecuación y está completamente separada de la variación de amplitud $b(x, y)$ en la parte real. Para el segundo método la fase se obtiene

usando la ecuación (59) por lo que obtenemos

$$\phi(x, y) = \arctan \frac{\text{Im}\{c(x, y)\}}{\text{Re}\{c(x, y)\}}, \quad (62)$$

donde Re e Im representan la parte real e imaginaria de $c(x, y)$.

Para obtener la rejilla modulada se debe proyectar un patrón de líneas claras y oscuras sobre la superficie como se muestra en la figura (8). El patrón de franjas se proyecta desde el ángulo θ_1 sobre una superficie y es observado por una cámara que se coloca a un ángulo θ_2 . En la figura (8) se aprecia que el punto P_1 de la rejilla será desplazado al punto P_2 ubicado sobre la superficie, lo que es equivalente a un desplazamiento U , el cual se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$U = U_1 + U_2 = z(\tan \theta_1 + \tan \theta_2), \quad (63)$$

donde z es la altura del punto P_2 a la rejilla. Dicho desplazamiento da como resultado una función de modulación:

$$\phi(x) = \frac{U}{d_x} = \frac{z(\tan \theta_1 + \tan \theta_2) \cos \theta_1}{d} = \frac{z [\sin(\theta_1 + \theta_2)]}{d \cos \theta_2} = G \frac{z}{d}, \quad (64)$$

donde $G = \frac{[\sin(\theta_1 + \theta_2)]}{\cos \theta_2}$, $d_x = \frac{d}{\cos \theta_1}$ y d es el período de la rejilla.

La moduladación de la rejilla proyectada sobre un objeto o superficie tiene la forma

$$h = 2 \left\{ 1 + \cos 2\pi \left[\frac{x}{dx} + \phi(x) \right] \right\} = 2 \left\{ 1 \cos \left(\frac{2\pi}{d} \right) [x \cos \theta_1 + Gz] \right\}. \quad (65)$$

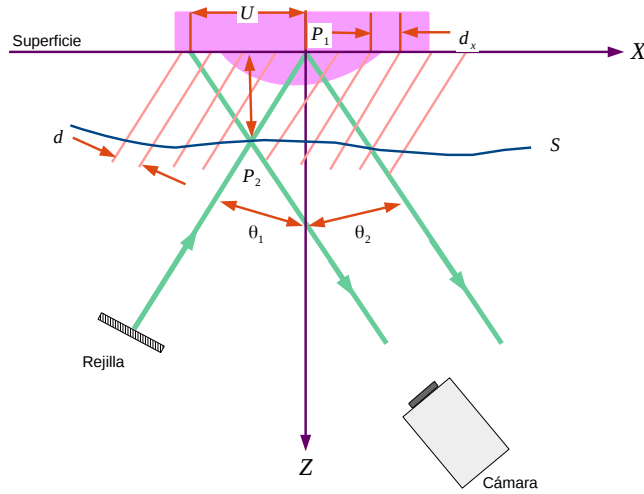


Figura 8. Proyección de una rejilla sobre un relieve.

De acuerdo a la ecuación (65) se tiene que la expresión para la altura z de la parte imaginaria de la ecuación (61)

$$z = \frac{\phi(x, y)d}{G}. \quad (66)$$

Con esta expresión se demuestra que conociendo la fase y los ángulos de incidencia y observación del experimento se puede calcular la altura z que corresponde a una nube de puntos de la superficie del objeto analizado; es decir, de esta manera se tiene una técnica para digitalizar la superficie de un objeto tridimensional.

IV.3. Errores en el método de la transformada de Fourier

La expresión (65) corresponde a una rejilla infinita modulada en fase (no acotada en x) y no a una rejilla real con un ancho finito lo que produce un error en la transformada de Fourier. Para corregir este inconveniente la rejilla debe ser computarizada sobre una ventana $W(x)$ con ancho

finito D conocido como ventana de Hamming, es decir, la función $h(x, y)$ de la ecuación (57) es de hecho multiplicada por una función rectángulo.

$$h_s(x, y) = h(x, y)W(x), \quad (67)$$

cuya transformada de Fourier está dada por:

$$H_s(f_x, y) = \mathcal{F}\{h_s(x, y)\} = H(f_x, y) * W(f_x). \quad (68)$$

De esta expresión se puede observar que el espectro $H(f_x, y)$ está en convolución con el espectro $W(x)$ de la ventana de Hamming dada por:

$$W(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{D} x \right) \text{rect} \left(\frac{x}{D} \right), \quad (69)$$

y su transformada de Fourier es:

$$W(f_s) = \frac{1}{2} \text{sinc}(Df_x) + \frac{1}{4} \text{sinc}(Df_x - 1) + \frac{1}{4} \text{sinc}(Df_x + 1). \quad (70)$$

Esta función ventana tiene menos lóbulos y por tanto su convolución con la función $H(f_x, y)$ produce menor error. La ventana de Hamming es la más usada, sin embargo, las ventanas de Hann, Bell y $\cos^4$ generan también buenos resultados. Por otro lado, el uso de estas ventanas, generan otra fuente de error. Esto debido a que la amplitud de las franjas se aproxima a cero al final de la

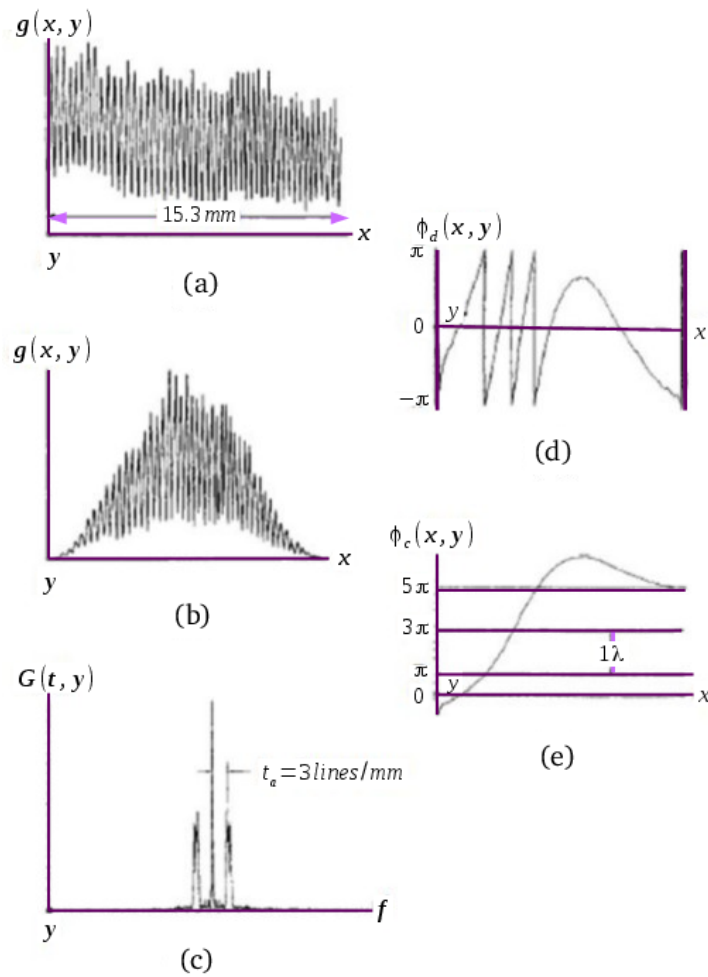


Figura 9. Diferentes etapas de la transformada de Fourier; **(a)** Distribución de intensidad unidimensional; **(b)** Intensidad ponderada por la ventana de Hamming; **(c)** Módulo de la transformada de Fourier; **(d)** Función de fase envuelta; **(e)** Reconstrucción de la función de fase después del procedimiento de desenvolvimiento (capítulo 5).

ventana, tal como se muestra en la figura (9), por lo que la determinación de la fase se sensibiliza al posible ruido existente en dichas regiones.

Capítulo V

Desenvolvimiento de fase

Al proyectar un patrón de franjas sobre una superficie que presenta relieve, las líneas del patrón se deforman de acuerdo a la superficie introduciendo así una modulación en la fase (ϕ) de la rejilla proyectada. La deformación de las franjas se relaciona con la altura z de la superficie por lo que la fase de la rejilla queda como función de z . Es claro que para tener una nube de puntos z que determinen la superficie se debe primero encontrar el valor de la fase de la rejilla.

En el capítulo anterior se presentaron diversas formas para extraer la fase de un patrón cosenoidal. La alternativa que se utiliza en esta tesis fue presentada en la sección IV.3, usando la transformada de Fourier para aislar la fase ϕ de un interferograma y con esta técnica se encuentran dos formas para extraer la fase, dadas en las ecuaciones (61) y (62). En estos casos los valores de la fase presentan discontinuidades como el caso mostrado en la figura (10) debido a que funciones como *arco tangente* y *coseno* no son inyectivas.

Si la fase presenta discontinuidades se dice que la fase está envuelta en el rango de 0 a 2π . Si la fase aumenta, la pendiente de la función es positiva y viceversa debido a la caída del valor de la fase. El término *fase desenvuelta* surge como resultado del proceso computacional en el cual se integra el valor de 2π a la fase, es decir, se suma o se resta este valor a lo largo de una trayectoria cuando se leen los datos en sentido de izquierda a derecha tal como se muestra en la figura (10)(b). La figura (10)(c) muestra la fase de la figura (10)(a) después de ser desenvuelta.

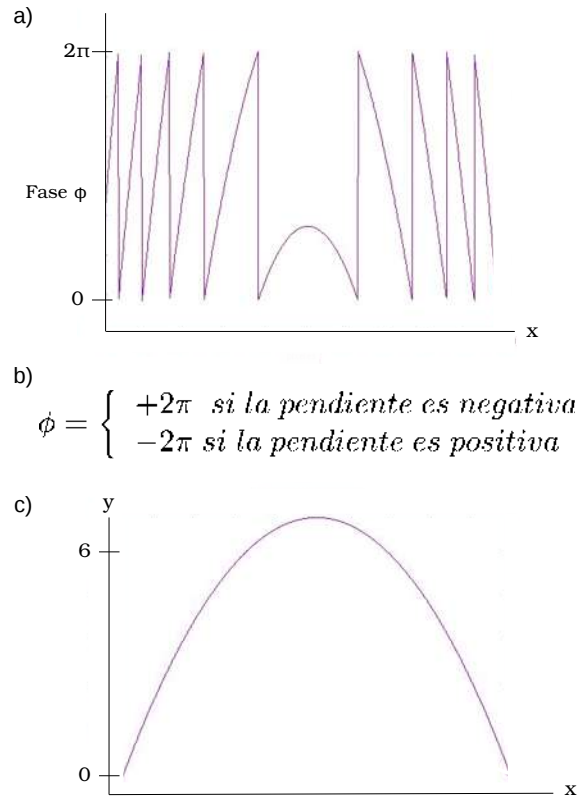


Figura 10. (a) Fase envuelta de la función “dientes de sierra”; (b) regla de adición del factor de 2π ; (c) función de fase continua obtenida por desenvolvimiento de (a).

La confiabilidad en los algoritmos de desenvolvimiento de fase es la habilidad de detectar con precisión los saltos de fase de 2π . En el caso de datos de fase envuelta sin ruido y donde estos datos son muestreados adecuadamente (es decir, los gradientes de fase significativos son menores de 2π), una aproximación simple de la fase desenvuelta será adecuada y todo lo que se requiere es un escaneo secuencial a través de los datos (línea por línea) para integrar la fase.

En métodos simples de desenvolvimiento de fase, los datos deben ser continuos a lo largo de todo el arreglo (sin agujeros en los datos). Una discontinuidad en la fase puede ser causada por un cambio rápido en el parámetro medido. Tales defectos pueden aparecer como un cambio repentino en el espaciamiento de las franjas o como un punto donde las franjas se detienen (conocido como ruptura de franjas). En estas circunstancias, los errores en el desenvolvimiento de la fase son

propagados desde el defecto al resto del arreglo. Si los datos estan siendo escaneados línea a línea en una dirección estos problemas se pueden volver complejos cuando la forma de la discontinuidad se complica. Existen métodos para la detección automática y compensación de estos problemas, sin embargo, no son tratados en esta tesis.

V.1. Técnicas de desenvolvimiento de fase

El principio del desenvolvimiento de fase es integrar la fase envuelta a lo largo de una trayectoria. El gradiente de fase para cada píxel se calcula por la diferencia entre el valor de la fase del píxel n con el píxel inmediato anterior $(n - 1)$, es decir:

$$\Delta\phi = \phi_n - \phi_{n-1}. \quad (71)$$

Si $|\Delta\phi| = \pm 2\pi$, entonces se asume una discontinuidad de fase en ese punto. El principio más común que es empleado para corregir este salto de fase de 2π está basado en el hecho de que la diferencia de fase entre cualesquiera dos puntos medidos por integración de fase a lo largo de una trayectoria es independiente de la ruta escogida mientras ésta no pase por una discontinuidad de fase. Por ello, los métodos de desenvolvimiento de fase son divididos en dos categorías: métodos dependientes de la trayectoria y métodos independientes de la trayectoria.

La forma más sencilla de desenvolver la fase consiste en escanear de manera secuencial a través de los datos, es decir línea por línea. Al final de cada línea, la diferencia de fase entre el último píxel y el píxel de la línea debajo es determinada, esta última línea es escaneada en dirección contraria (figura (11)). Ahora el arreglo de datos bidimensional es tratado como un plegado de datos unidimensional. Dicha aproximación es exitosa cuando se aplica a un conjunto de datos de alta calidad, la complejidad surge cuando existe ruido. Entre las técnicas aplicadas en estos casos se tiene el escaneo en varias direcciones, escaneo espiral y conteo alrededor de los defectos.

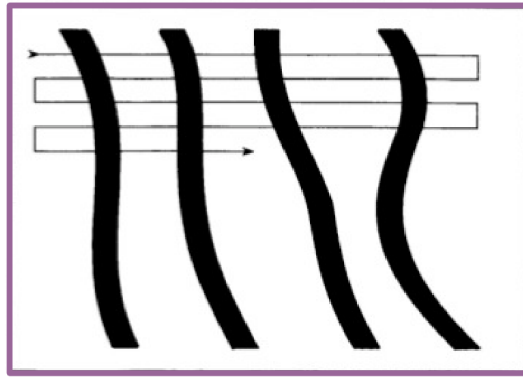


Figura 11. Línea por escaneo secuencial de líneas.

V.2. Análisis y ejemplos sobre el desenvolvimiento de fase

Para ejemplificar el proceso de desenvolvimiento de fase se analizará el siguiente caso. Considérese una imagen de fase continua generada por computadora, la cual no contiene ninguna fase envuelta (saltos), la imagen puede ser mostrada como un arreglo de intensidades tal y como se muestra en la figura (12) (a), su representación como una superficie en 3D se muestra en la figura (12) (b), finalmente la figura (12) (c) muestra un corte transversal de la superficie propuesta.

Aquí se envuelve la imagen de fase continua dando como resultado las imágenes mostradas en la figura (13). La fase envuelta aparece como saltos múltiples formando un frente de onda de dientes de sierra como se observa en la figura (13)(a). Para el caso 2D se tienen imágenes de fase envuelta que aparecen como curvas de contorno (figura (13)(b)). Es importante mencionar que si una curva abierta entra en la imagen de fase envuelta, esta también debe salir de ella. La figura (13)(c) muestra la fase envuelta en 3D.

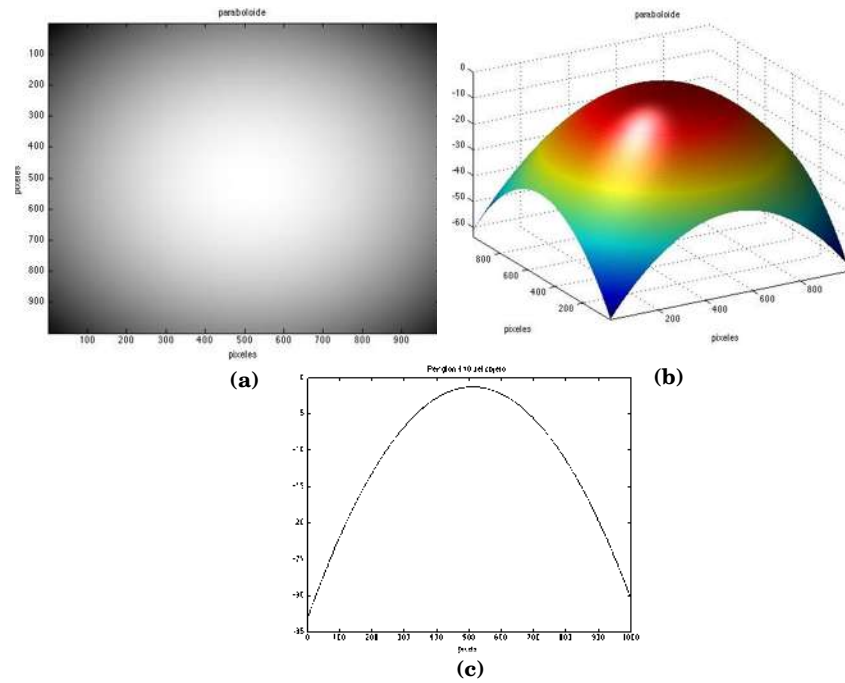


Figura 12. a) Imagen de fase continua simulada por computadora y mostrada como un arreglo de intensidades; b) imagen de fase continua mostrada como una superficie; c) renglón 410 de la imagen de fase continua.

Para desenvolver la imagen se puede utilizar el método de desenvolvimiento de fase 2D de Itoh [12]. Existen dos formas de implementar este método. La primera involucra desenvolver las filas de la imagen envuelta secuencialmente, esto produce una imagen intermedia la cual está solo parcialmente desenvuelta, luego se desenvuelve esta imagen intermedia, pero ahora comenzando por sus columnas. La imagen resultante corresponde a la imagen de fase desenvuelta y mostrada en la figura (14)(a) y (14)(b).

La segunda manera de implementar el método de Itoh es desenvolver la imagen de fase envuelta primero a través de sus columnas, generando una imagen intermedia la cual se usa para desenvolver todas sus filas. De esta manera se puede obtener una imagen de fase desenvuelta ((14)(c) y (14)(d)).

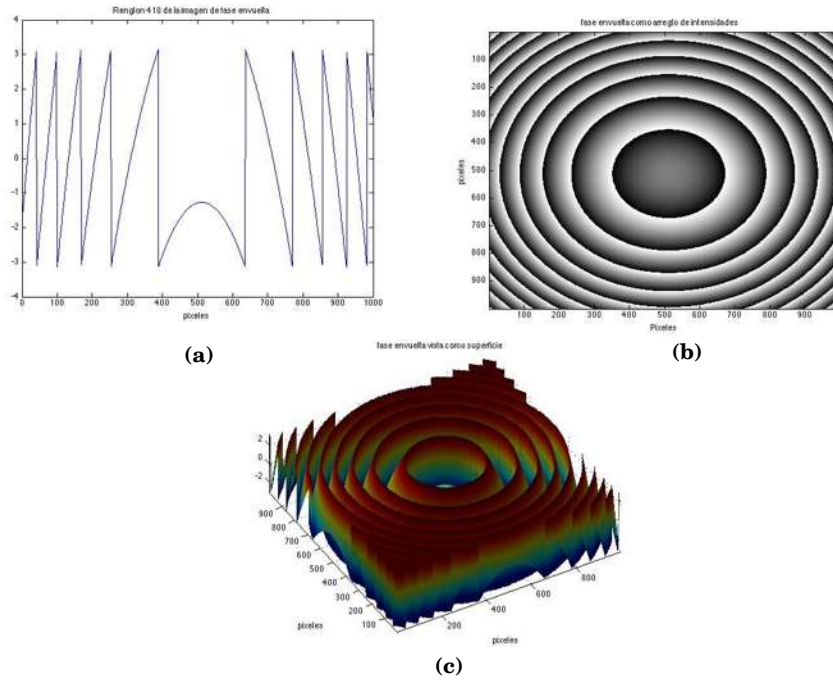


Figura 13. a) Renglón 410 de la imagen de fase envuelta; b) imagen de fase envuelta mostrada como una superficie; c) imagen de fase envuelta simulada por computadora y mostrada como un arreglo de intensidades.

Al ser una imagen artificial el método de Itoh produce un buen resultado. El algoritmo de Itoh es un algoritmo que provee el desenvolvimiento de fase, sin embargo solo funciona en los casos de trabajar con imágenes de fase virtualmente libre de errores. Aplicaciones reales producen imágenes de fase envuelta que si contienen errores. En el caso del desenvolvimiento de fase 2D, existen cuatro fuentes de errores las cuales complican los procesos de desenvolvimiento de fase. Estas fuentes de error son:

1. Ruido.
2. Sub – muestreo.
3. Cambios abruptos de fase.
4. Errores producidos por el algoritmo al extraer la fase.

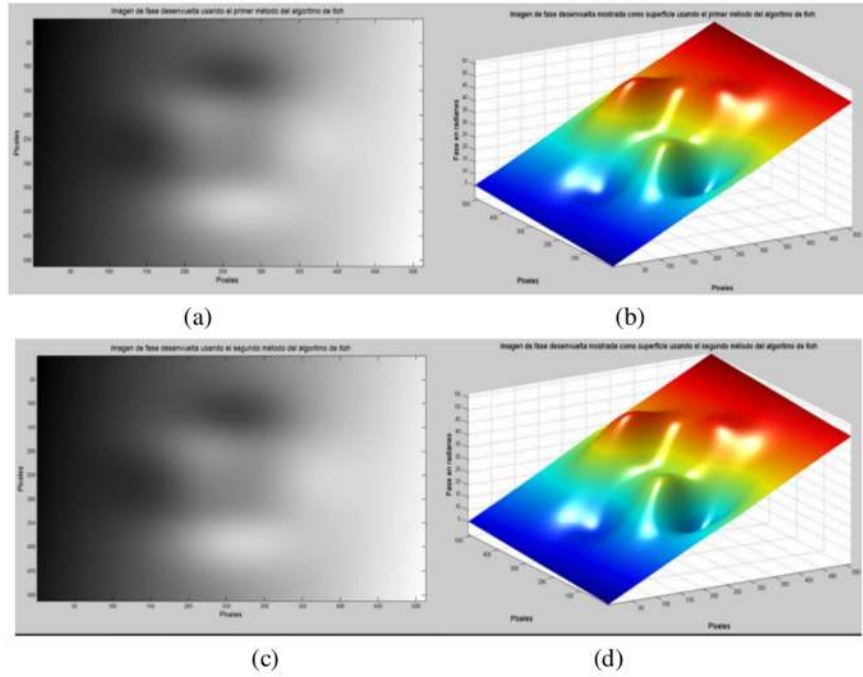


Figura 14. Imagen de fase desenvuelta usando el algoritmo de Itoh; (a) y (b) primer método; (c) y (d) segundo método.

V.3. Errores en el desenvolvimiento de fase: Ruido

En varios problemas de medición, el ruido en los datos muestreados es la más importante razón a la que se le atribuye la identificación falsa de saltos de fase.

Para el caso de datos unidimensionales, la única solución a este problema es el suavizado de la rejilla sinusoidal con un filtro pasa bajas. Sin embargo, este no siempre es satisfactorio y siempre existe la pérdida de información tras dicho proceso.

Si la diferencia entre dos puntos sucesivos es mayor que $+\pi$, el algoritmo de desenvolvimiento de fase considera que esa ubicación está envuelta. Esto puede representar una fase envuelta auténtica o bien puede ser debido a la presencia de ruido y por tanto ser una envoltura falsa. Para estudiar el efecto del ruido en el desenvolvimiento de fase 2D, se plantea como ejemplo la adición de ruido a una imagen de fase continua simulada, la cual se muestra en la figura (12) (a), se envuelve la imagen de fase con ruido, luego se intentará desenvolver la fase del objeto simulado. La variación del ruido se fija en un valor de 0,4. Como se ve en la figura (15) tal valor de ruido no

afecta la eficacia del algoritmo de desenvolvimiento de Itoh.

Al incrementar la variación del ruido a un valor de 0,6 empiezan a aparecer problemas. En este caso el algoritmo de desenvolvimiento de fase de Itoh falla por que aún se presentan discontinuidades de 2π . Además de que en esta ocasión el primer y segundo método de implementación genera resultados diferentes.

La acumulación de errores ocurre durante el proceso de desenvolvimiento de fase, la razón por la cual se complica el proceso de desenvolvimiento de imágenes de fase envuelta 2D con ruido. La figura 16(e) muestra una imagen que ha sido procesada usando el algoritmo de Itoh empleando el primer método. Este algoritmo desenvuelve primero las filas de la imagen una a la vez y después desenvuelve todas las columnas del mismo modo.

Una observación más detallada a la figura 16(e) revela que cierta información presenta errores. El algoritmo de Itoh para desenvolver la fase, implementado el primer método, produce un error de 2π que aparece como líneas horizontales en la imagen de fase desenvuelta resultante.

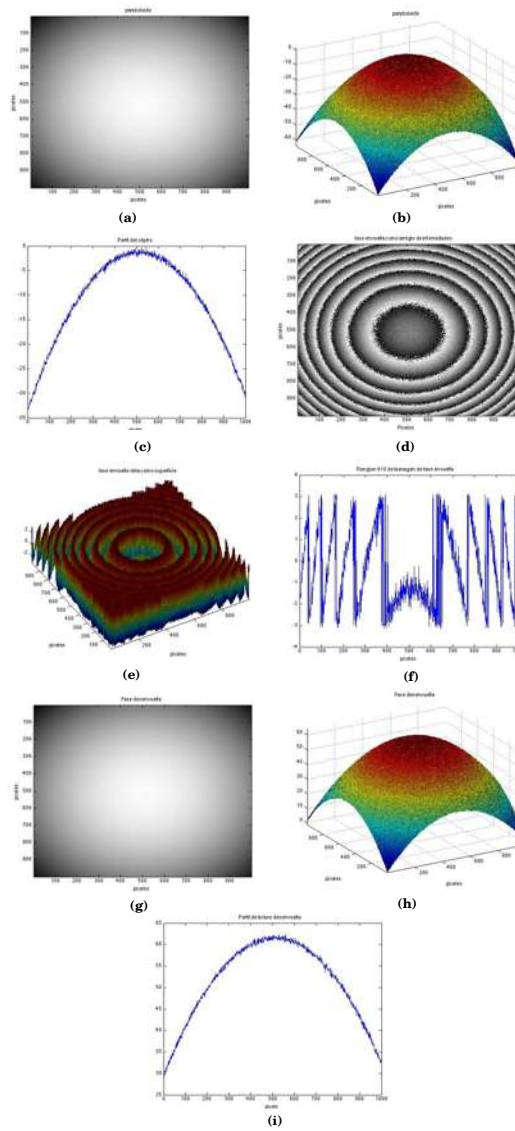


Figura 15. (a) y (b) Imagen de fase continua con ruido; (c) y (d) imagen de fase envuelta con ruido; (e) y (f) desenvolvimiento de fase usando el algoritmo de Itoh: primer método; (g) y (h) desenvolvimiento de fase usando el algoritmo de Itoh: segundo método. La variación del ruido es de 0,4.

La figura 16(g) muestra una imagen procesada utilizando el segundo método del algoritmo de Itoh, una inspección más profunda a la figura 16(g) revela que existen errores. Similarmente se observan errores los cuales ocurren durante el proceso de la imagen de fase desenvuelta. En este caso se producen errores de 2π que aparecen como líneas verticales en la imagen de fase desenvuelta.

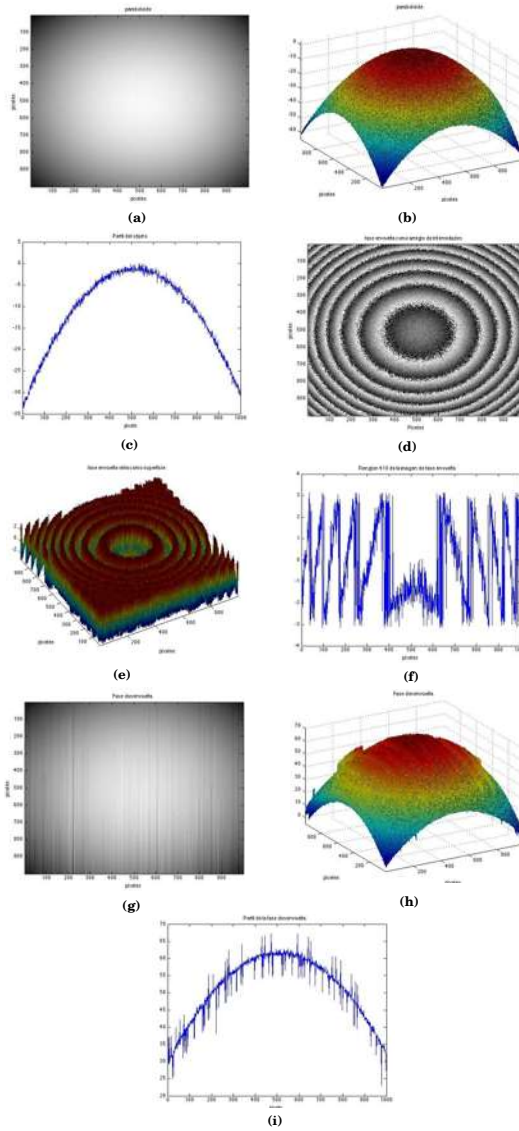


Figura 16. (a) y (b) Imagen de fase continua con ruido; (c) y (d) imagen de fase envuelta con ruido; (e) y (f) desenvolvimiento de fase usando el algoritmo de Itoh: primer método; (g) y (h) desenvolvimiento de fase usando el algoritmo de Itoh: segundo método. La variación del ruido es de 0,6.

V.4. Errores en el desenvolvimiento de fase: sub-muestreo

Un desenvolvedor de fase detecta la existencia de una envoltura en una imagen calculando la diferencia entre dos muestras sucesivas. Si la diferencia es mayor de $+\pi$ o menor de $-\pi$, así el algoritmo de desenvolvimiento de fase considera que existe una envoltura en esa posición. Puede

ser una fase envuelta genuina, o bien una fase envuelta falsa debido al ruido o sub-muestreo.

El desenvolvimiento de fase de imágenes que presentan sub-muestreo puede ser difícil e incluso imposible de realizar. Esto ocurre cuando la diferencia entre dos muestras sucesivas es mayor de $+\pi$ o a $-\pi$. Esta gran diferencia entre muestras adyacentes está presente debido a que la imagen de fase no contiene suficientes muestras y no por la existencia de una fase envuelta verdadera. Dicha situación genera una incorrecta fase envuelta.

Para comprender este fenómeno, se analiza su efecto en un proceso de desenvolvimiento de fase unidimensional. La teoría de desenvolvimiento de Nyquist, dice que si una función $f(x)$ contiene frecuencias no mayores de B Hertz, puede ser completamente determinada por muestreo en un rango de $2B$ o mayor, si $f(x)$ es una señal puramente sinusoidal, cada período de $f(x)$ debe ser muestreado al menos con dos muestras. Este principio también aplica a la señal de fase envuelta.

Para entender el problema del sub-muestreo se creará una imagen de fase artificial con sub-muestreo. Esta imagen será analizada para investigar el máximo permisible de muestras en la dirección x y y para la base de datos específica de acuerdo con la teoría de muestreo. El siguiente paso es envolver la imagen para procesarla utilizando los dos métodos de desenvolvimiento de fase. Finalmente, se compararán las imágenes producidas por estos dos métodos con el mapa de fase continua original. En la figura (17) se muestra una imagen digital.

Una vez más, se procede a determinar la fase envuelta de esta imagen, cuyo resultado se puede apreciar en la figura 18 (a) y (b) como un arreglo de intensidades y como una superficie 3D respectivamente. Una vez realizado esto, se procede a desenvolver dicha fase mediante el algoritmo de Itoh y el resultado se muestra en la figura (18) (c) y (d) por el primer método cuando se cumple el teorema de muestreo.

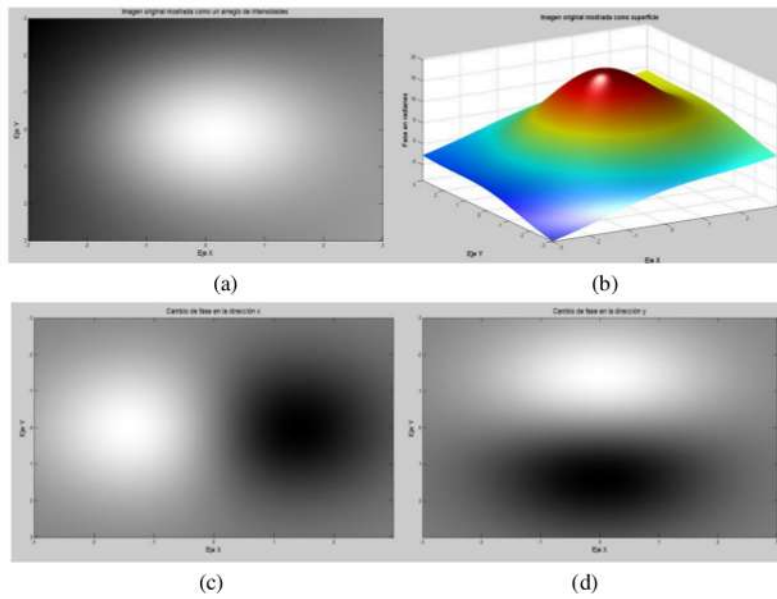


Figura 17. (a) y (b) Imagen de fase continua; (c) y (d) cambio de fase en el eje x e y respectivamente.

La figura (18) (e) y (f) muestra el resultado de desenvolvimiento cuando se presenta un sub-muestreo, estos dos últimos pares de figuras se puede corroborar la eficacia de este algoritmo siempre y cuando el teorema de muestreo se satisfaga.

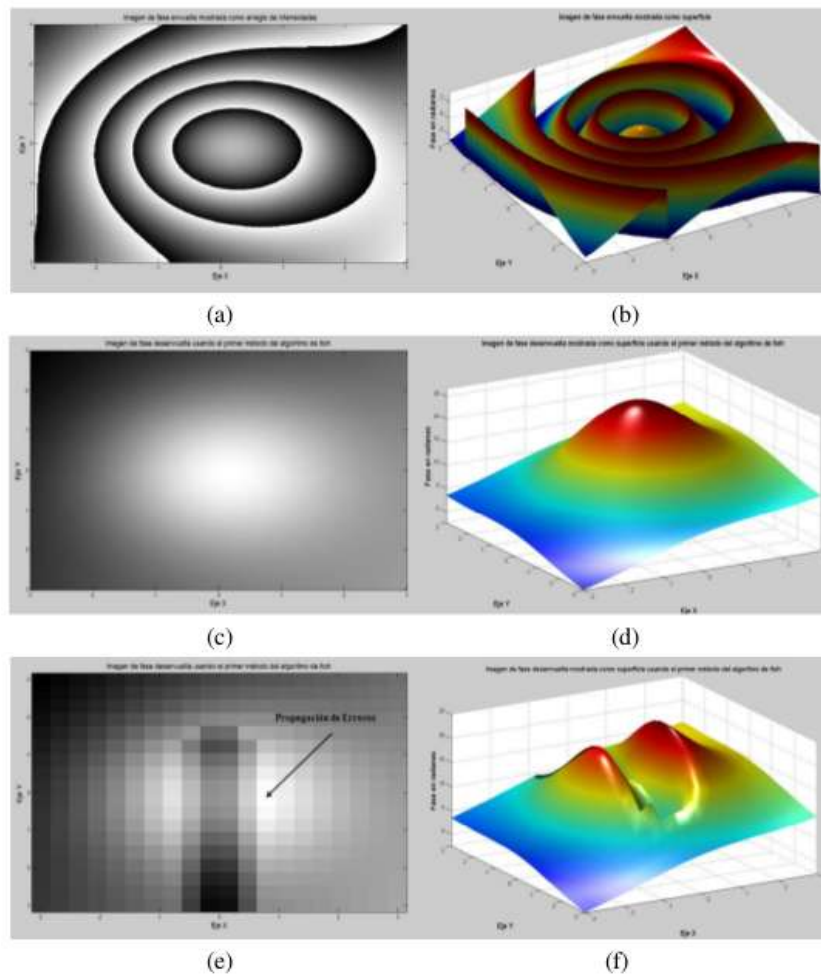


Figura 18. (a) y (b) Imagen de fase envuelta; imagen de fase desenvuelta empleando el algoritmo de Itoh; (c) y (d) primer método; (e) y (f) sub-muestreo.

V.5. Efecto de la discontinuidad en el desenvolvimiento de la fase

El desenvolvimiento de fase de una imagen que contiene cambios repentinos de fase puede ser difícil o incluso imposible de resolver. Esto ocurre cuando estos cambios de fase son mayores de $+\pi$ o menores de $-\pi$. Tales cambios de fase pueden ser vistos como envolturas reales, pero en realidad no lo son. Del mismo modo, pueden actuar como máscaras de envolturas de fase reales que pueden llevarlas a desaparecer. Se empleará una imagen de fase generada por computadora

para explicar este efecto en los algoritmos de desenvolvimiento de fase bidimensional.

Se presenta una simulación de imágenes de fase continua que se muestran como un arreglo de intensidades y como una superficie (figuras 19(a) y (b) respectivamente). Estas imágenes de fase contienen cambios repentinos de fase dentro de una región rectangular que abarca de la fila 100 hasta la 412 y de la columna 200 a la 300. Este cambio de fase tiene una magnitud de 10 radianes.

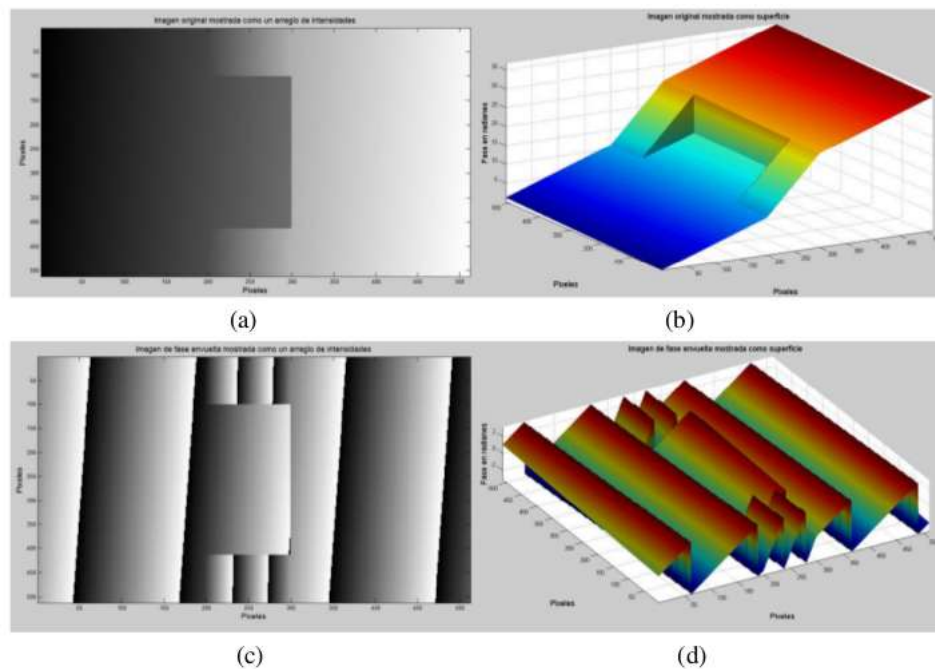


Figura 19. (a) y (b) Imagen de fase generada por computadora; (c) y (d) imagen de fase envuelta.

Se obtiene primero la fase envuelta de la imagen y entonces se desenvuelve aplicando el algoritmo de Itoh donde se observa claramente que esta falla en su objetivo de desenvolver la fase de la imagen.

En la figura (19) (c) se observa que existen envolturas falsas localizadas en las filas 100 y 412. Estas envolturas interrumpen la correcta implementación del primer método del algoritmo de Itoh como se aprecia en la figura (20) (b). Un número mayor de falsas envolturas están localizadas en la columna 300. Dichas envolturas son producidas por el repentino cambio de fase en 5 radianes que

ocurre en esa ubicación lo cual impide la correcta aplicación del segundo método del algoritmo de Itoh (figura (20) (d)).

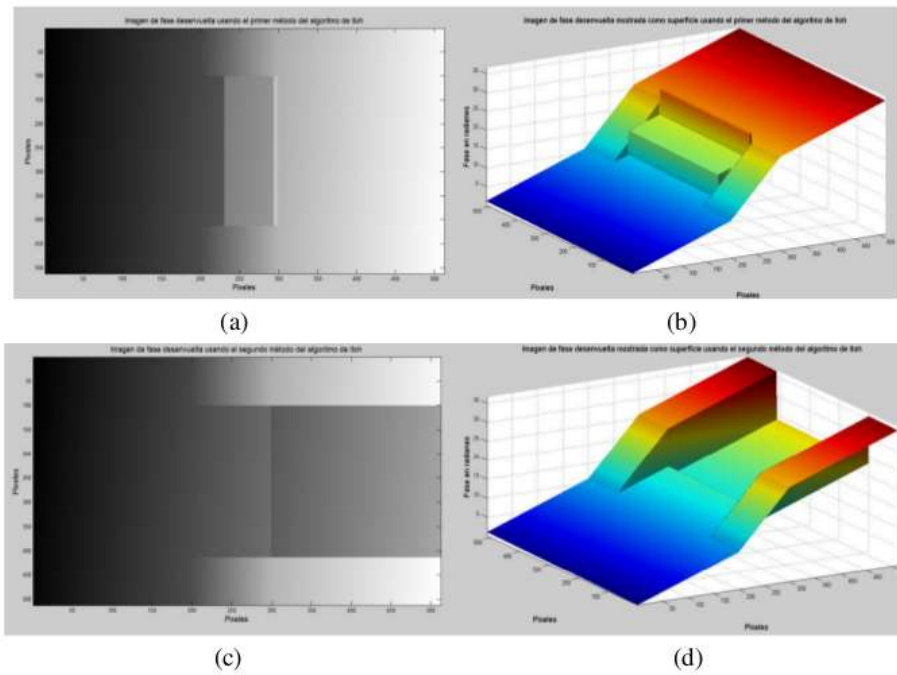


Figura 20. Imagen de fase desenvuelta empleando el algoritmo de Itoh (a) y (b) primer método; (c) y (d) segundo método.

Capítulo VI

Diseño experimental y resultados

En este capítulo se presentan los resultados experimentales que se obtuvieron en el desarrollo de esta tesis. Con la aplicación del algoritmo de la transformada de Fourier extendida se logran resultados satisfactorios para la reconstrucción de superficies de objetos en 3D sin la necesidad de sofisticados algoritmos como los que se necesitan si se emplea la transformada de Fourier rápida (FFT: Fast Fourier Transform) que viene implementada en la mayoría de los paquetes comerciales como MatLab, Mathematica, etc.

VI.1. Descripción del experimento

En el experimento realizado en este trabajo se proyectó una de las autoimágenes de una rejilla binaria producidas por medio del efecto Talbot sobre un objeto que presenta relieve en su superficie. El esquema utilizado para este propósito se muestra en la figura (21).

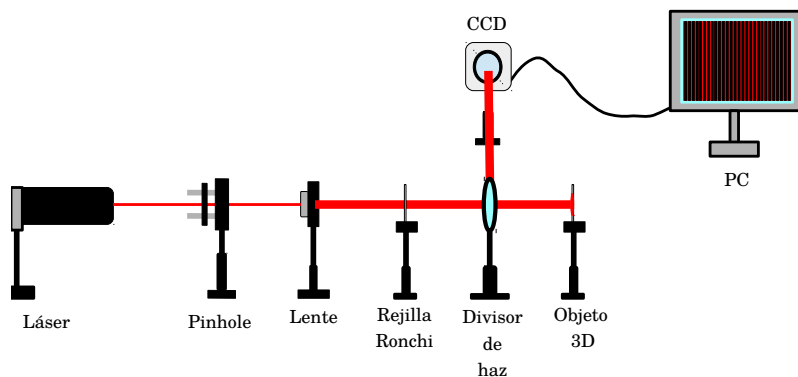


Figura 21. Esquema del arreglo experimental empleado para generar autoimágenes de una rejilla binaria usando el efecto Talbot.

En el esquema de la figura (21) se muestra un haz de luz proveniente de un láser que es expandido por un objetivo de microscopio y filtrado por un micro agujero (Pinhole) que generan, a la salida de estos dispositivos, un haz con frente de onda esférico divergente. Frente a estos elementos, se coloca una lente positiva (convergente) localizada en un plano a la distancia focal, f , de la lente para generar una onda plana que ilumina a una rejilla binaria. Por simple propagación libre, es decir, sin necesidad de usar algún sistema óptico formador de imágenes y a la distancia de Talbot, la distribución de amplitudes del campo óptico es similar a la que se localiza en el plano inmediato posterior a la rejilla binaria, esto es, en este plano se forma la autoimagen de la rejilla periódica. En este plano se coloca el objeto del que se desea reconstruir su superficie y con la ayuda de un divisor de haz colocado entre los planos de la rejilla y de su autoimagen se captura la imagen con una cámara. La imagen del objeto con las franjas de la rejilla proyectadas sobre su superficie es almacenada en una computadora para su posterior análisis. En la figura (22) se muestra la fotografía del arreglo experimental empleado, donde se muestra un láser de He-Ne de 5 mW de potencia que emite un haz de luz roja con longitud de onda de 632,8 nm, el cual fue expandido por un objetivo de microscopio 60 $\times$ y filtrado por un pinhole de 10 micras de diámetro. La lente positiva empleada es de 7 cm de distancia focal y la rejilla utilizada es una binaria del tipo Ronchi de transmisión de la marca Thorlabs con un periodo de 166,6 micras, por lo que la autoimagen se encuentra a 8,7 cm. Debido a que la distancia de la autoimagen era muy corta y no permitía colocar el divisor de haz (mostrado en la figura (22)) se decidió colocar el objeto en el siguiente plano de Talbot, es decir, en el plano $z = 2Z_T$ por lo que, de acuerdo a los parámetros del experimento, el objeto se colocó a 17,54 cm respecto del plano $z = 0$ (el plano de la rejilla binaria). La cámara CCD empleada es de la marca EdmundOptics que tiene una resolución de 640×480 pixeles y el área activa del sensor es de 1cm^2 . La lente amplificadora es de la marca Canon de 50 mm de diámetro que fue adaptada para su uso con la cámara CCD disponible en el laboratorio de óptica de la FCFM.

Para capturar las imágenes con la cámara CCD de las franjas proyectadas sobre el objeto se utilizó, además, una computadora con el software GigaPocket para la visualización de las imágenes



Figura 22. Fotografía del arreglo experimental compuesto por un láser, un colimador, una lente, una rejilla Ronchi (de período λ), un divisor de haz, una cámara CCD y una computadora.

y su almacenamiento. Estas fotografías fueron tomadas siempre bajo las mismas condiciones, con la luz del laboratorio apagada para evitar que la luz ambiental pudiera afectar el contraste de la rejilla y por tanto, afectar el resultado.

Los objetos utilizados fueron dos pequeños discos de plastilina con surcos en el centro. El tamaño de los objetos es de 3 cm de diámetro y los surcos fueron realizados con un palillo de dientes lo que produce una hendidura de 3 mm en su parte más profunda. En la figura (23) se muestra una fotografía de los objetos utilizados.

VI.2. Reconstrucción de superficies en 3D

En la figura (24) se puede observar la deformación que las franjas sufren al incidir sobre el objeto con relieve en su superficie.

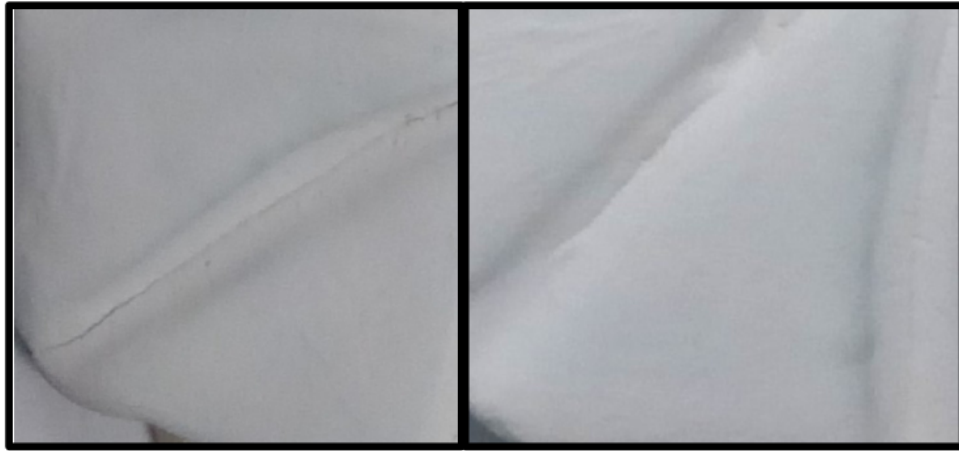


Figura 23. Objetos utilizados durante el experimento.

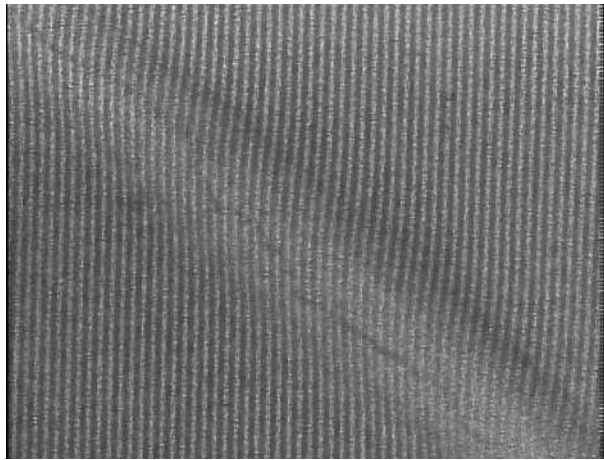


Figura 24. Fotografía tomada del patrón de franjas sobre el objeto 1.

Las imágenes se importan a la computadora con un formato *.bmp* y en RGB con dimensiones de 640×480 píxeles. Para analizarla se cambió su formato a escala de grises, puesto que el uso de escala de grises de 8 bits asegura que la matriz contenga en cada uno de sus registros solo el valor de intensidad de luz que le corresponde. Con ello, se puede determinar en primer lugar la fase envuelta y después la fase desenvuelta para las imágenes de referencia y de cuerpo del disco de plastilina.

De acuerdo con el algoritmo que se muestra en la figura (25) se aplica el filtro de ventana a nuestra imagen para eliminar los efectos de borde. El filtro está definido por la siguiente expresión:

$$Z(m, n) = 1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{n_x}\right), \quad (72)$$

la variable m tiene valores desde 1 hasta el número de total de píxeles.

; Después de aplicar el filtro a la imagen se calcula la Transformada de Fourier. El resultado de este cálculo es una función *sinc* acotada. Para el filtraje se localiza el orden 1 y permite determinar el tamaño del filtro a ser aplicado. Posteriormente se recorre dicho orden al origen del sistema. Ahora se procede a calcular la transformada inversa de Fourier de la cual se recupera solo la parte imaginaria tras el cálculo del logaritmo de esta imagen. El desenvolvimiento de esta imagen se realiza mediante la aplicación del segundo método del algoritmo de Itoh, es decir, desenvolvemos primero las columnas y después las filas.

En las figuras (25) y (26) se muestra el proceso de reconstrucción de la figura (24) usando el algoritmo de la XFT. Para comparar la eficiencia de la XFT contra la FFT también se reconstruyó usando esta última, dicho proceso se observa en las figuras (27) y (28).

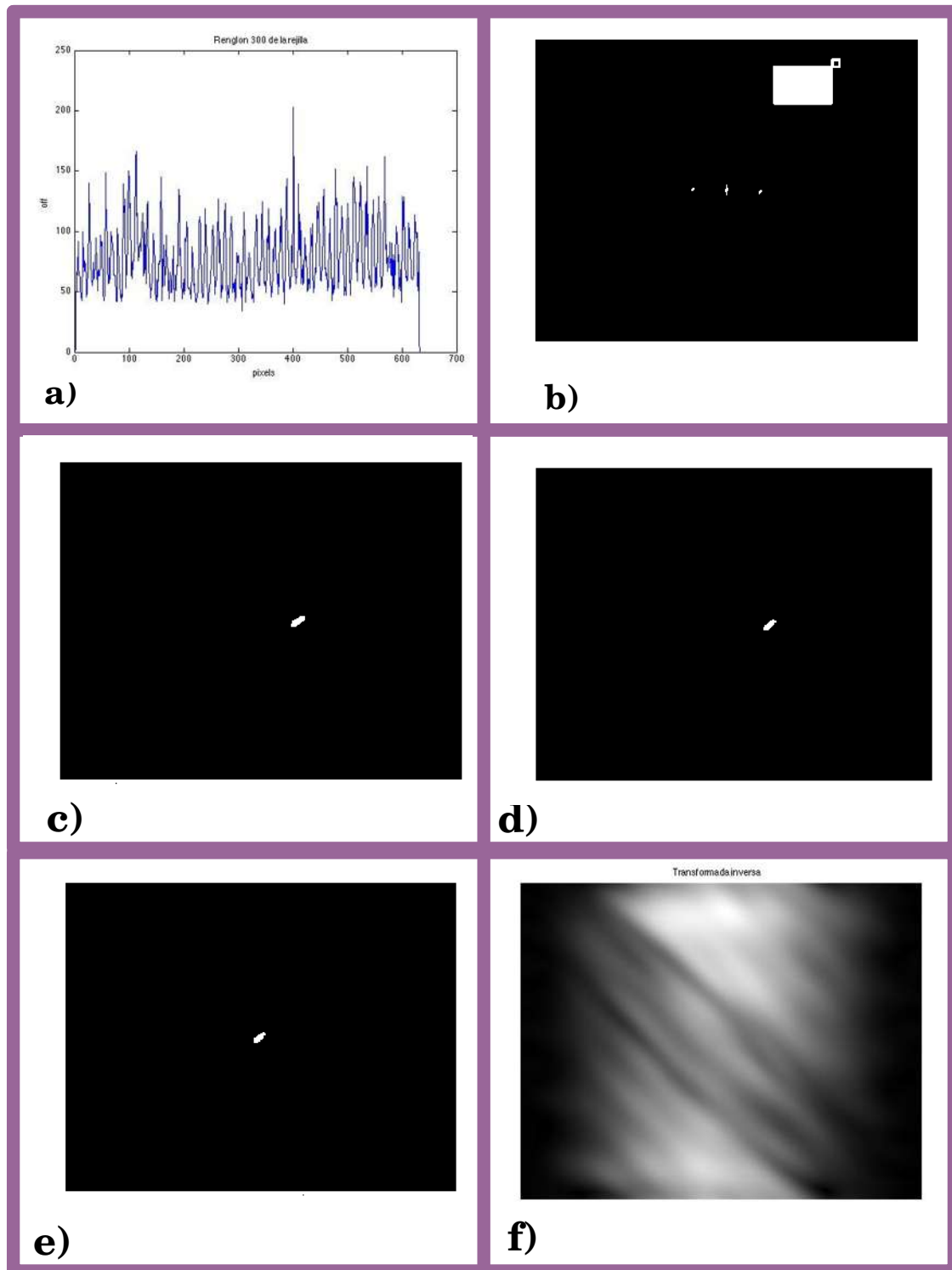


Figura 25. a) Perfil del objeto original; b) transformada de Fourier del objeto; c) imagen de la máscara binaria; d) producto de la transformada de Fourier; e) centrado de frecuencias; f) transformada inversa de Fourier (de la figura 24).

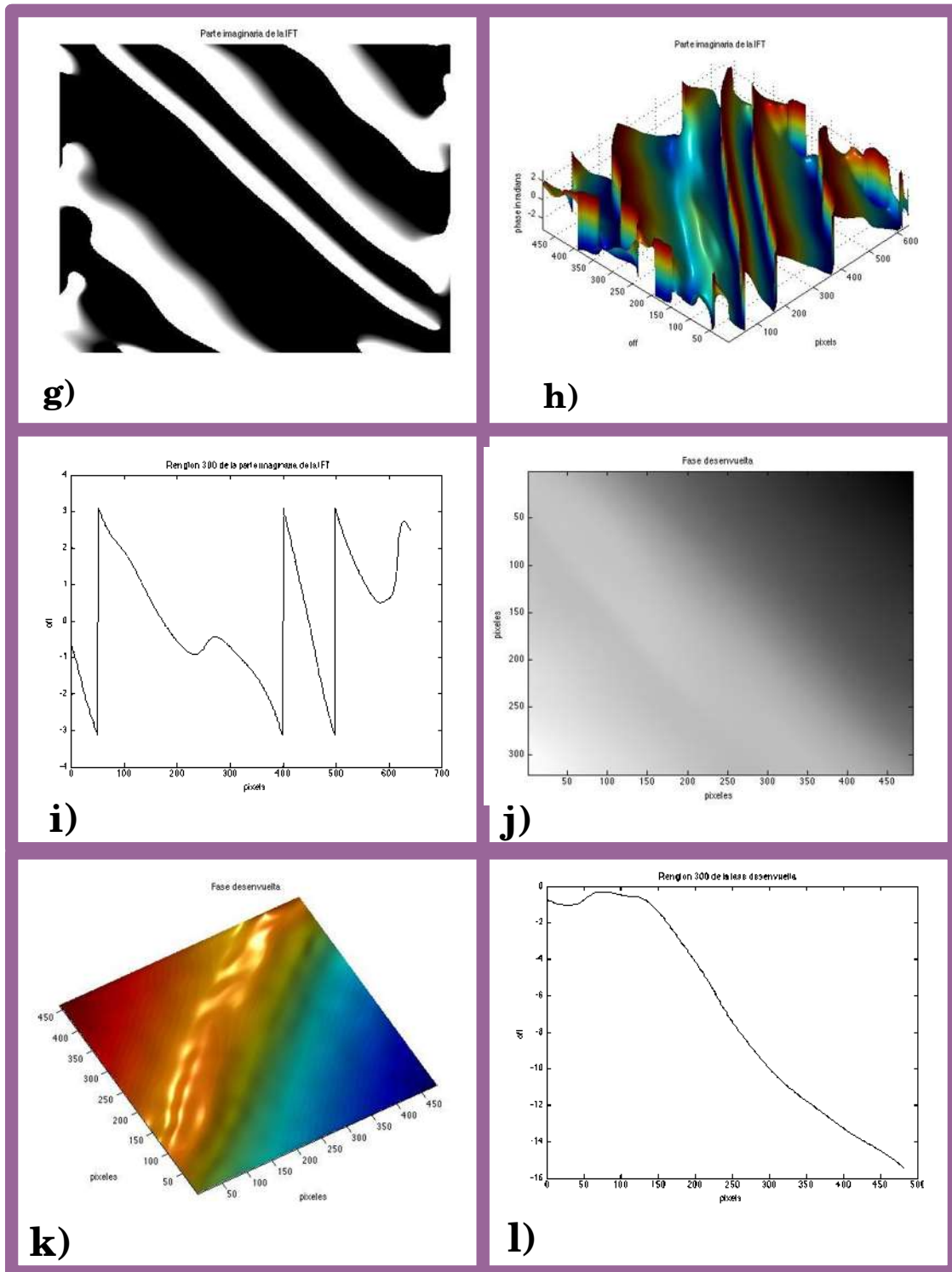


Figura 26. a) Mapa bidimensional de la fase envuelta; b) mapa 3D de la fase envuelta; c) perfil de la fase envuelta; d) mapa bidimensional de la fase envuelta; e) mapa 3D de la fase desenvuelta; f) perfil de la fase desenvuelta.

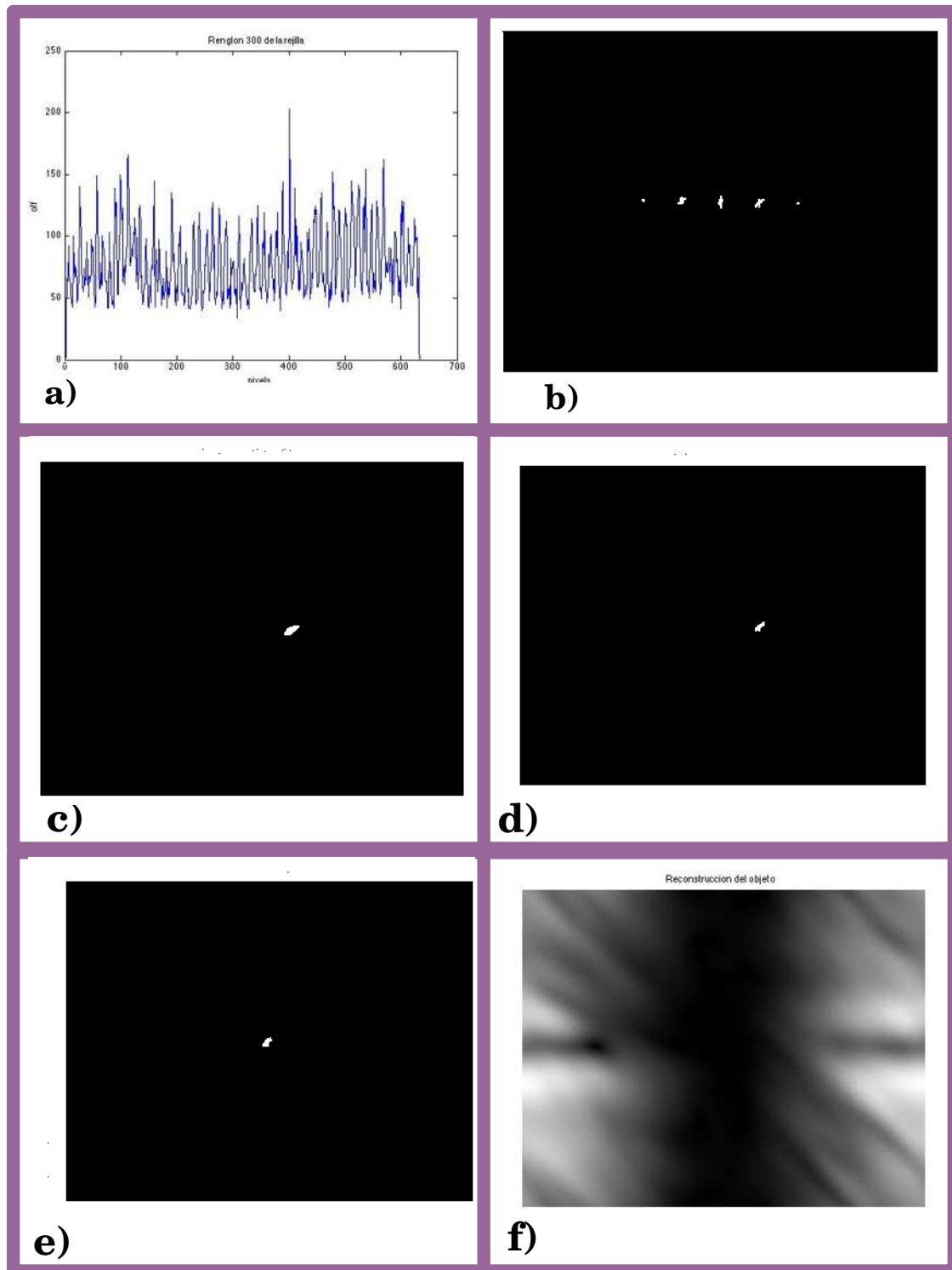


Figura 27. a) Perfil del objeto original; b) transformada de Fourier del objeto; c) imagen de la máscara binaria; d) producto de la transformada de Fourier; e) centrado de frecuencias; f) transformada inversa de Fourier (de la figura (24)).

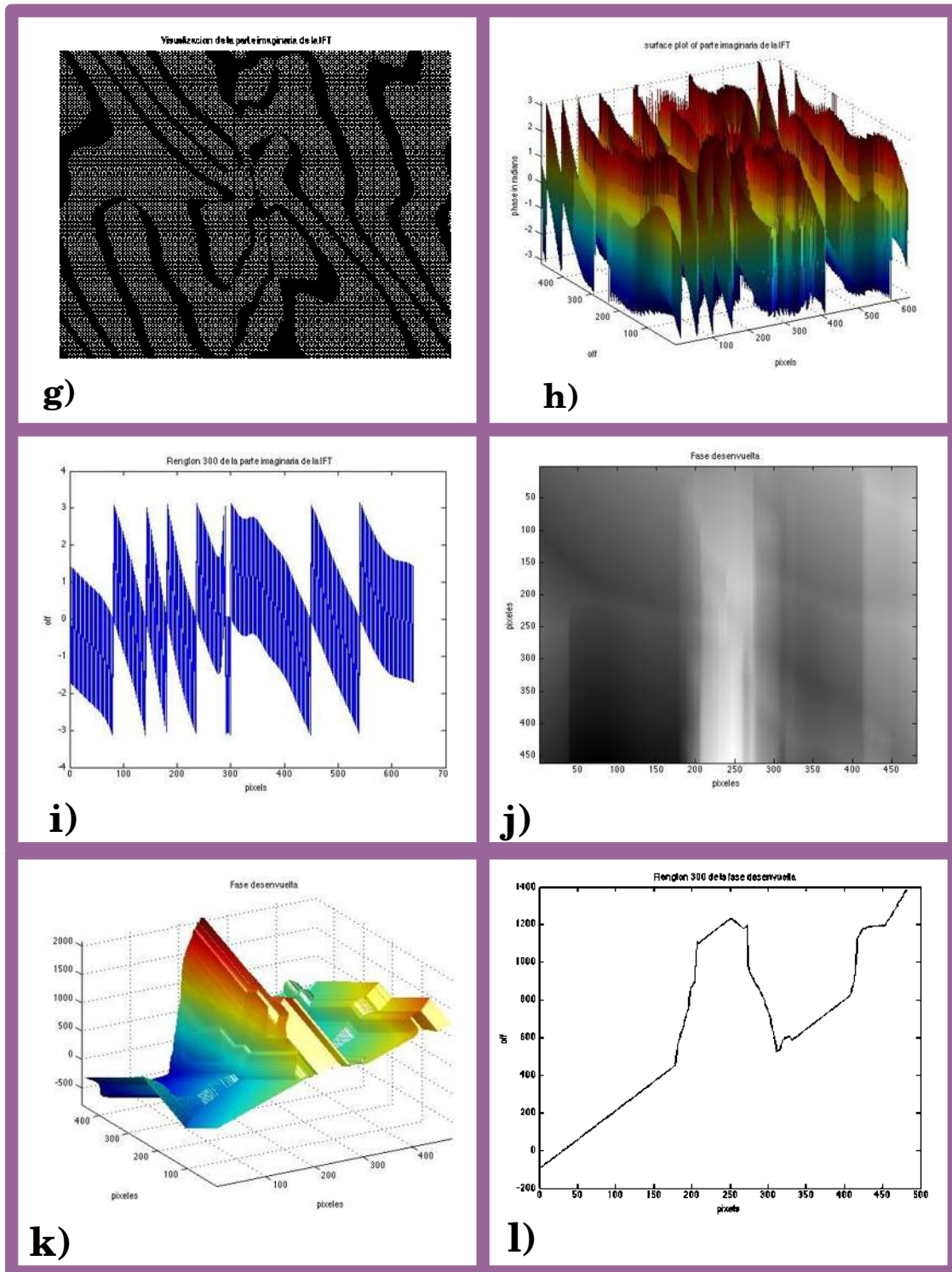


Figura 28. a) Mapa bidimensional de la fase envuelta; b) mapa 3D de la fase envuelta; c) perfil de la fase envuelta; d) mapa bidimensional de la fase envuelta; e) mapa 3D de la fase desenvuelta; f) perfil de la fase desenvuelta.

En la figura (29) y (30) se muestra solamente la reconstrucción final de dos objetos más reconstruidos y su comparación con la FFT.

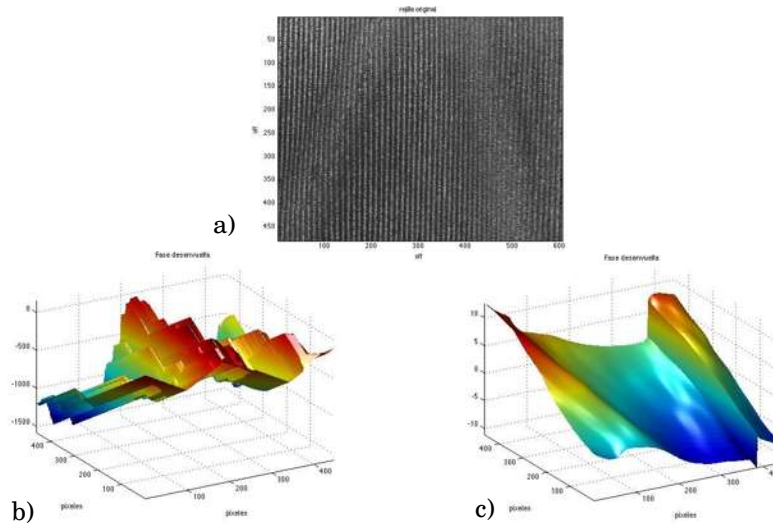


Figura 29. Resultado de fase desenvuelta situado sobre un plano inclinado mostrado como una superficie: a) imagen original; b) reconstrucción con la FFT; c) reconstrucción con la XFT.

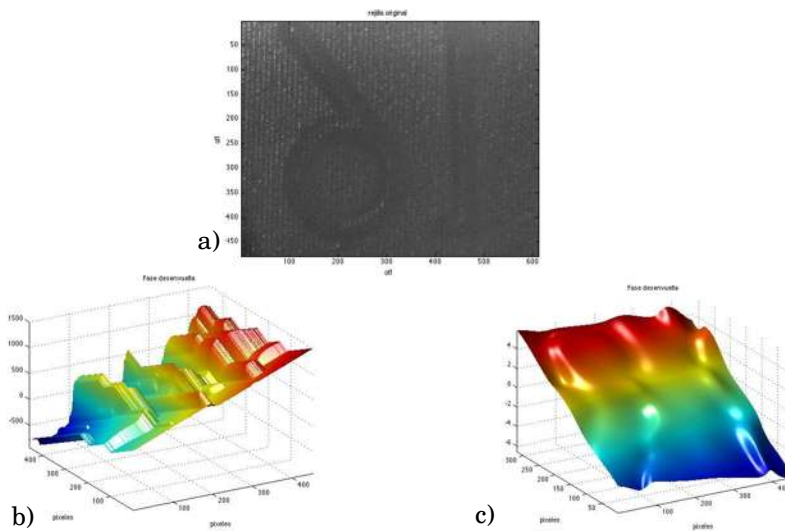


Figura 30. Resultado de fase desenvuelta situado sobre un plano inclinado mostrado como una superficie: a) imagen original; b) reconstrucción con la FFT; c) reconstrucción con la XFT.

Capítulo VII

Conclusiones

En este trabajo se utiliza la técnica de proyección de luz estructurada mediante el efecto Talbot para la reconstrucción tridimensional de la topografía de superficies. Con esta técnica se reconstruye la topografía de los objetos utilizados a partir de la deformación de las franjas proyectadas mientras es observado a través de un microscopio óptico. La imagen que se obtiene de las franjas deformadas es registrada por una cámara CCD. Mediante una aplicación de procesamiento de imágenes, además del uso del método de Takeda se implementa la forma que permite visualizar e interpretar la topografía de las superficies y proporciona información de los cambios superficiales que presentan.

Referencias

- [1] Alberdi Larrañaga, I., Sanz Baena, C., Díaz Cano, A., Marroquín Carrascosa, L., Fernández Herrero, V., Romero Erro, Á. M., ... & Martín Romero, J. I. (2014). Trabajos científico-técnicos del Ciemat publicados en el primer semestre de 2010.
- [2] Eugene Hecht, A. Z. (2000). *Óptica*. Pearson Educación,.
- [3] Bahaa, E. S., & Malvin, C. T. (1991). *Fundamentals of photonics*. New York/A WILEY-INTERSCIENCE PUBLICATION.
- [4] Gåsvik, K. J. (2003). *Optical metrology*. John Wiley & Sons.
- [5] Goodman, J. W. (2005). *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers.
- [6] Takeda, M., Ina, H., & Kobayashi, S. (1982). *Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry*. *JosA*,72(1), 156-160.
- [7] García, D. I. S. *Medición de Topografía de Superficies Difusas y Especulares por Técnicas de Proyección y Reflexión de Franjas*.
- [8] Rodriguez-Vera, R., Kerr, D., & Mendoza-Santoyo, F. (1991). *3-D contouring of diffuse objects by Talbot-projected fringes*. *Journal of Modern optics*, 38(10), 1935-1945.
- [9] Campos, R. G., Rico-Melgoza, J., & Chávez, E. (2012). *A new formulation of the fast fractional fourier transform*. *SIAM Journal on Scientific Computing*,34(2), A1110-A1125.
- [10] Goodman, J. W. (2005). *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers.
- [11] Malacara, D., Servín, M., & Malacara, Z. (2005). *Interferogram Analysis for Optical Testing*.
- [12] Mauricio Ortiz Gutiérrez., *Síntesis de rejillas anisotrópicas*. Tesis de Licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, 1995.
- [13] Itoh, K. (1982). *Analysis of the phase unwrapping algorithm*. *Appl. Opt*, 21(14), 2470.