UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

CONVERGENCIA PUNTUAL PARA LAS SERIES DE FOURIER-LEGENDRE

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE

LIC. EN CS. FÍSICO-MATEMÁTICAS

PRESENTA

URIEL DAVID TELLO PADILLA

ASESOR

DR. FERNANDO GARIBAY BONALES

MARZO 2017

Índice general

Resumen

Esta tesis fue realizada con el objetivo de investigar la convergencia puntual de series de Fourier-Legendre en el espacio $\mathcal{L}^2[a,b]$, que es un espacio de Hilbert dotado del producto interno $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int fgd\mu$. Como resultado de esta investigación se desprenden dos teoremas. En el primero de ellos se proporcionan las condiciones necesarias para la convergencia de la serie de Fourier-Legendre asociada una función en un punto de continuidad interior al intervalo. En el segundo teorema se plantean las condiciones para la convergencia puntual de la serie de Fourier-Legendre asociada a una función, en este caso, con una discontinuidad en el interior del intervalo.

Palabras clave: Fourier, Legendre, Convergencia puntual, Análisis, Polinomios.

Abstract

This thesis was carried out with the objective of investigating the pointwise convergence of Fourier-Legendre series in the space $\mathcal{L}^2[a,b]$, which is a Hilbert space with the inner product $\langle f,g\rangle = \int fg d\mu$. As a result of this research two theorems emerge. The first of these provides the necessary conditions for the convergence of the series of Fourier-Legendre associated to a function which is continuous in a point in the interval. The second theorem states the conditions for the pointwise convergence of the Fourier-Legendre series associated to a function, in this case, with a discontinuity within the interval.

Key words: Fourier, Legendre, Pointwise convergence, Analysis, Polynomials.

Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar condiciones para la convergencia de las series de Fourier-Legendre en el espacio de Hilbert para funciones de cuadrado integrable, denotado por $\mathscr{L}_2[-1,1]$. La series de Fourier-Legendre son un tipo de series que se asemejan a las series de Fourier en muchos aspectos, donde los senos y cosenos son reemplazados por un tipo de polinomios, llamados polinomios de Legendre.

No es muy común encontrar en la literatura una fuente en la que se aborde y discuta este tema de manera accesible para el estudiante de matemáticas. Por lo tanto, con este trabajo se pretende caminar en esa dirección y, al mismo tiempo, que pueda servir de apoyo para algún curso de Análisis Matemático de la Licenciatura en Matemáticas.

La teoría de los espacios de Hilbert proporciona un contexto general para muchos problemas en matemáticas puras y aplicadas. Mientras que muchos están familiarizados con espacios euclídeos de dimensión finita, el análisis funcional se ocupa del estudio de espacios de dimensión infinita. Los espacios vectoriales normados y completos sobre los números reales o complejos, llamados espacios de Banach, son la base de este campo de estudio. Un ejemplo importante es el espacio de Hilbert $\mathscr{L}_2[-1,1]$ cuya norma está dada por un producto interno, el cual juega un papel muy importante en aplicaciones, especialmente en el análisis de Fourier.

Se estudiará la estructura del espacio $\mathscr{L}_2[-1,1]$ con el fin de ver bajo qué condiciones las series de Fourier-Legendre asociada a una función en este espacio converge puntualmente a su función correspondiente.
Los primeros capítulos de este trabajo están basados en el libro *Real Analysis* de Norman B. Haaser y Joseph A. Sullivan. El Capítulo 10 se basa en el libro de Dunham Jackson, *Fourier Series and Orthogonal Polynomials.*

El siguiente es un breve resumen de la tesis. En el Capítulo 1 se comenzará con las definiciones y terminologías básicas que ayudarán al lector a entender el material presentado. En el Capítulo 2 se proporcionan resultados relativos a la ortogonalidad, así como varios ejemplos de espacios de Hilbert. En el Capítulo 3 se definen las bases ortogonales para un espacio con producto interno X. Se expone en el Capítulo 4 el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Luego en el Capítulo 5 se define el concepto de base ortogonal y base ortonormal para un espacio X. En el capítulo 6 se presenta la exponencial compleja y las sucesiones trigonométricas en el espacio $\mathscr{L}_2[-\pi, \pi]$. Se presentan en el Capítulo 7 los polinomios de Legendre, importantes en muchas aplicaciones en matemáticas y física. En el Capítulo 8 se definen los polinomios de Hermite. En el capítulo 9 se analiza la convergencia puntual para las series de Fourier en el espacio $\mathscr{L}_2[-\pi, \pi]$. En suma, en el Capítulo 10 se dan las condiciones necesarias para la convergencia de las series de Fourier-Legendre en el espacio $\mathscr{L}_2[-1, 1]$.

Finalmente, se ha agregado un Apéndice en el cual se incluyen ciertos Teoremas y otros resultados que solo se mencionan pues probarlos haría demasiado extenso el presente trabajo. En cualquier caso, el lector interesado en revisar dichos resultados puede consultar la bibliografía que se ha incluido.

Agradecimientos

A la conciencia suprema, que me ha dado fuerza para continuar cuando he estado a punto de caer; por ello, con toda la humildad y sinceridad que de mi corazón pueden emanar, dedico primeramente mi trabajo a Dios.

A mi asesor de tesis, Dr. Fernando Garibay Bonales, por su orientación, paciencia y experiencia. Ha continuado educándome a lo largo del desarrollo de este trabajo y me ha inspirado para continuar con mi búsqueda de una profunda y más amplia comprensión de las matemáticas.

A mi madre por todo el apoyo, amor y comprensión que siempre me ha dado.

A mis abuelos, Rosa y Uriel, a quienes debo en gran parte la persona que soy ahora y cuyo ejemplo de vida ha sido siempre una motivación para mi.

De manera muy especial agradezco a Noy, que es para mi una verdadera madre que con su apoyo incondicional, paciencia, comprensión y sabiduría ha sabido guiarme y darme ánimos en momentos de debilidad, gracias de todo corazón.

Por último y no menos importante a mi amigo Victor Perez Vera, por sus atenciones y su ayuda que siempre estuvo dispuesto a darme.

Capítulo 1

Espacios con producto interno.

Sea X un espacio lineal sobre el campo $\mathbb{F}$ donde $\mathbb{F}$ puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 1.1. Un **producto interno** en X es una función real-valuada en $X \times X$, cuyos valores son denotados por $\langle x, y\rangle$, con las siguientes propiedades:

$$\langle x, y\rangle \geq 0; \langle x, x\rangle = 0 \text{ si, y sólo, si } x = 0 \qquad \textit{(no negatividad y positividad)} \tag{1.1}$$

$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \qquad \textit{(Simetría Hermitiana)}; \tag{1.2}$$

$$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \qquad \textit{(aditividad)}; \tag{1.3}$$

$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle \qquad \textit{(homogeneidad)}; \tag{1.4}$$

Un espacio lineal con producto interno definido en el, es llamado un **espacio con producto interno**.

Las siguientes propiedades son consecuencias inmediatas de la definición de un producto interno.

$$\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \tag{1.5}$$

$$\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle \tag{1.6}$$

$$\langle x, 0\rangle = 0 = \langle 0, y\rangle \tag{1.7}$$

Otra importante propiedad del producto interno está dada por la desigualdad de la siguiente proposición.

Proposición 1.1 (**La Desigualdad de Schwartz.**). *Si X es un espacio con producto interno, entonces para todo $x, y \in X$*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle} \tag{1.8}$$

donde la igualdad se da si, y sólo, si x y y son linealmente dependientes.

Prueba. x y y son vectores linealmente independientes en X, si y solo si, para cada $\lambda \in \mathbb{F}$

$$0 < \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - \lambda\langle y, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle.$$

Si se hace $\lambda = \langle x, y\rangle/\langle y, y\rangle$, obtenemos:

$$0 < \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} - \frac{\langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2\langle y, y\rangle}{\langle y, y\rangle^2}$$

como $|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle}$,

$$0 < \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle}$$

Por lo tanto,

$$|\langle x, y\rangle|^2 < \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

Tomando raíz de ambos lados de la desigualdad anterior,

$$|\langle x, y\rangle| < \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

Ahora suponga que x y y son linealmente dependientes. Si $y = 0$, entonces es claro que

$$|\langle x, y\rangle| = 0 = \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Si $y \neq 0$, entonces $x = \lambda y$

$$\begin{aligned} |\langle x, y\rangle| = |\langle \lambda y, y\rangle| = |\lambda||\langle y, y\rangle| &= |\lambda|\sqrt{\langle y, y\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle} \\ &= \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}. \end{aligned}$$

■

Teorema 1.1. *Si X es un espacio con producto interno, entonces $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ define una norma en X.*

Prueba. Sólo se comprobará la desigualdad del triángulo, la verificación de que esta función cumple con las propiedades básicas de norma son consecuencia inmediata de la definición de producto interno.
La Desigualdad de Schwartz se usa para comprobar la desigualdad del triángulo. Sean $x, y \in X$

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2Re(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Así

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

. ■

Del Teorema 1.1 se desprende que un espacio con producto interno puede ser considerado un espacio lineal normado con la norma definida por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Esta norma está asociada al producto interno dado. Si un espacio con producto interno es completo con la norma asociada, es llamado **espacio de Hilbert.**

Si X es un espacio lineal normado, entonces se puede definir una norma en $X \times X$ como

$$\|(x, y)\|_\infty = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$$

cuya topología es la del producto en $X \times X$. También se pueden usar las normas

$$\|(x,y)\|_p = \left[\|x\|^p + \|y\|^p\right]^{1/p}, 1 \leq p \leq \infty$$

en $X \times X$. Además

$$\|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_p \leq 2^{1/2}\|(x,y)\|_\infty,$$

estas p-normas son todas equivalentes a la ∞-norma, con lo cual todas generan el mismo espacio topológico.

Una importante propiedad del producto interno en un espacio X es que éste es una función continua en el espacio producto $X \times X$.

Proposición 1.2. Si X es un espacio con producto interno, entonces el producto interno es una función continua en $X \times X$.

Prueba. Considere $(x_0, y_0) \in X \times X$. Entonces, para $(x, y) \in X \times X$, tenemos que

$$|\langle x,y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle| \leq |\langle x_0, y-y_0\rangle| + |\langle x-x_0, y_0\rangle| + |\langle x-x_0, y-y_0\rangle|$$

por la *Desigualdad de Schwartz*

$$\begin{aligned} |\langle x,y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle| \leq& \|x_0\|\|y-y_0\| + \|x-x_0\|\|y_0\| + \|x-x_0\|\|y-y_0\| \\ \leq& [\|x_0\| + \|y_0\|] \operatorname{máx}\{\|x-x_0\|, \|y-y_0\|\} + \operatorname{máx}\{\|x-x_0\|\|y-y_0\|\} \end{aligned}$$

Si hacemos $\|x-x_0\|\|y-y_0\| < 1$, entonces
$\operatorname{máx}\{\|x-x_0\|\|y-y_0\|\}^2 < \operatorname{máx}\{\|x-x_0\|\|y-y_0\}\| < 1$, con lo cual:

$$\begin{aligned} &\leq [\|x_0\| + \|y_0\|]\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_\infty + \|(x,y)-(x_0,y_0)\|_\infty^2 \\ &\leq ([\|x_0\| + \|y_0\|] + 1)\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_\infty \end{aligned}$$

Si $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_\infty < \delta$ con $\delta = \varepsilon/(([\|x_0\| + \|y_0\|] + 1))$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\le ([\|x_0\| + \|y_0\|] + 1)\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_\infty \\
&\le \delta \cdot ([\|x_0\| + \|y_0\|] + 1) \\
&= \frac{\varepsilon}{(([\|x_0\| + \|y_0\|] + 1))} \cdot ([\|x_0\| + \|y_0\|] + 1) = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el producto interno es una función continua en (x_0, y_0). ■

Algunos ejemplos de espacios con producto interno.

Ejemplos

1.1. Espacio de números complejos $\mathbb{C}$. El ejemplo más simple pero importante de un espacio con producto interno es el espacio de los números complejos $\mathbb{C}$. El producto interno está definido por

$$\langle x, y\rangle = x\overline{y}$$

1.2. El espacio unitario $\mathbb{C}^n$. El espacio $\mathbb{C}^n$ de las $n-$tuplas ordenadas $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$ de números complejos, con el producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{\eta}_j, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots), \quad x = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots)$$

1.3. Espacio euclideo $\mathbb{R}^n$**.** El espacio $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hilbert cuyo producto interno está dado por:

$$\langle x, y\rangle = \xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_n\eta_n$$

donde $x = (\xi_j) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ y $y = (\eta_j) = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$.

1.4. Espacio de Hilbert de sucesiones l^2**.** El espacio l^2 de todas las sucesiones infinitas de númeors complejos $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots)$ tales que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 < \infty$, con el producto interno dado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{\eta_j}, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots)$$

Es un espacio con producto interno de dimensión infinita.

1.5. El espacio $L^2[a, b]$. El espacio L^2 de todas las funciones de cuadrado integrable según ***Lebesgue*** en el intervalo $[a, b]$ con el producto interior definido por

$$\langle x, y\rangle = \int_{[a,b]} x(t)y(t)dt.$$

1.6. En el espacio complejo $\mathbf{L_2}(E)$. En este espacio E es un conjunto *Lebesgue*-medible en $\mathbb{R}^n$, sea

$$\langle f, g\rangle = \int_E f\overline{g}.$$

La desigualdad de *Hölder* muestra que si f y g están en $L^2(E)$, entonces $f\overline{g}$ es integrable sobre E.

Teorema 1.2 (**Ley del paralelogramo**). *Sea X un espacio con producto interno, para cualesquiera dos vectores x, y en X, tenemos que:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Prueba. Dados $x, y \in X$ tenemos que:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

de donde

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2. \tag{1.9}$$

Por otro lado

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \tag{1.10}$$

Sumando 1.9 y 1.10 obtenemos la ley del paralelogramo. ■

No todos los espacios lineales normados son espacios con producto interno; esto es, no siempre es posible definir un producto interno en un espacio lineal normado de tal manera que la norma asociada con el producto interno es la norma original del espacio. La norma asociada con el producto interno satisface la **ley del paralelogramo.** Se dice que la **identidad de polarización** es cualquiera de la familia de fórmulas que expresan el producto interno de dos vectores en términos de la norma de un espacio vectorial normado.

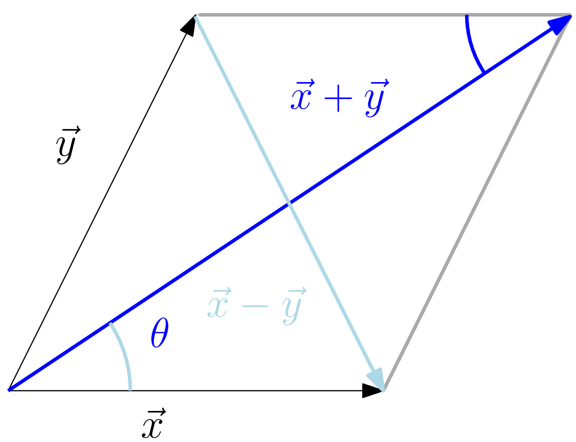

Figura 1.1: Vectores implicados en la identidad de polarización

Teorema 1.3. *Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno en en un espacio lineal X y sea $\| \cdot \|$ la norma inducida en X. Si $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio complejo con producto interno, entonces*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 \Big) \tag{1.11}$$

para cada $x, y \in X$.
Si $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio real con producto interno, entonces

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \tag{1.12}$$

para cada $x, y \in X$. Las dos expresiones anteriores son llamadas ***identidad de***

***polarización compleja y real**, respectivamente.*

Prueba. Para el caso complejo, tenemos que:

$$\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 = 2\langle x, iy\rangle + 2i\langle y, x\rangle \tag{1.13}$$

y

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2\langle x, y\rangle + 2\langle y, x\rangle \tag{1.14}$$

sustituyendo 1.13 y 1.14 en la ecuación 1.11, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2] \\
&= \frac{1}{4}[2\langle x, y\rangle + 2\langle y, x\rangle - (2i\langle x, iy\rangle + 2i\langle iy, x\rangle)] \\
&= \frac{1}{4}[2\langle x, y\rangle + 2\langle y, x\rangle - 2(-i^2\langle x, y\rangle + 2i^2\langle y, x\rangle)] \\
&= \frac{1}{4}[2\langle x, y\rangle + 2\langle y, x\rangle + 2\langle x, y\rangle - 2\langle y, x\rangle \\
&= \frac{1}{4}[4\langle x, y\rangle] = \langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

Por otra parte, para el caso real en la ecuación 1.12 tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) &= \frac{1}{4}[\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle] \\
&= \frac{1}{4}[\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle - (\langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle)] \\
&= \frac{1}{4}[2\langle x, y\rangle + 2\langle y, x\rangle] \\
&= \frac{1}{4}[4\langle x, y\rangle] \\
&= \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

■

El siguiente resultado provee condiciones necesarias y suficientes para que una norma sea inducida por un producto interno.

Teorema 1.4 (Von Neumann). *Sea X un espacio lineal. Una norma en X es inducida por un producto interno en X si, y sólo si, satisface la ley del paralelogramo.*

Más aún, si una norma en X satisface la ley del paralelogramo, entonces el único producto interno que la induce está dado por la identidad de polarización.

Prueba. El Teorema 1.3 garantiza que si una norma en X es inducida por un producto interno, entonces satisface la ley del paralelogramo, y el producto interno en X puede ser escrito en términos de esta norma de acuerdo a la identidad de polarización. Ahora, suponga que una norma $\|\cdot\|$ en X satisface la ley del paralelogramo y considere el mapeo $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ definido por la identidad de polarización. Tome x, y y z arbitrarios en X. Es claro que

$$x + z = \left(\frac{x+y}{2} + z\right) + \frac{x-y}{2} \qquad \text{y} \qquad y + z = \left(\frac{x+y}{2} + z\right) - \frac{x-y}{2}$$

Así, por la ley del paralelogramo,

$$\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 = 2\left(\left\|\frac{x+y}{2} + z\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2\right).$$

Suponga que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, de modo que $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ es el mapeo definido por la identidad de polarización(en el espacio real normado X). Por consiguiente

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle + \langle y, z\rangle &= \frac{1}{4}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2) \\
&= \frac{1}{4}[(\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2) - (\|x-z\|^2 + \|y-z\|^2)] \\
&= \frac{1}{2}[(\|\tfrac{x+y}{2} + z\|^2 + \|\tfrac{x-y}{2}\|^2) - (\|\tfrac{x+y}{2} - z\|^2 + \|\tfrac{x-y}{2}\|^2)] \\
&= \frac{1}{2}(\|\tfrac{x+y}{2} + z\|^2 - \|\tfrac{x+y}{2} - z\|^2) = 2\langle \tfrac{x+y}{2}, z\rangle.
\end{aligned}$$

La identidad de arriba es válida para $x, y, z \in X$ arbitrarios, y en particular para $y = 0$. Más aún, la identidad de polarización asegura que $\langle 0, z\rangle = 0$ para cada $z \in X$. Así, haciendo $y = 0$ en la parte de arriba, obtenemos $\langle x, z\rangle = 2\langle \frac{x}{2}, z\rangle$ para cada $x, z \in X$. Entonces

$$\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = \langle x + y, z\rangle \tag{1.3}$$

para arbitrarios x, y y z en X. Es fácil verificar(usando exactamente el mismo argumento) que tal identidad sigue siendo válida para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, donde el mapeo $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ ahora satisface la identidad de polarización compleja(en el espacio complejo normado X). Esto es la propiedad 1.3 de *aditividad* en la Definición 1.1. Para verificar la propiedad (1.4) de la Definición 1.1 (homogeneidad en el primer argumento) se procederá como sigue. Tome x y y arbitrarios en X. La identidad de polarización asegura que

$$\langle -x, y \rangle = -\langle x, y \rangle.$$

Como la propiedad (3) se cumple, se sigue por simple inducción que

$$\langle nx, y \rangle = n\langle x, y \rangle,$$

Y así $\langle x, y \rangle = \langle n\frac{x}{n}, y \rangle = n\langle \frac{x}{n}, y \rangle$ así que

$$\langle \tfrac{x}{n}, y \rangle = \tfrac{1}{n}\langle x, y \rangle,$$

para todo entero positivo n. Las tres expresiones de arriba implican que

$$\langle qx, y \rangle = q\langle x, y \rangle$$

para cada númuero racional q(como $\langle 0, y \rangle = 0$ por la identidad de polarización). Tome un $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario, luego $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Así existe una sucesión racional-valuada $\{q_n\}$ que converge en $\mathbb{R}$ a α. Más aún, de acuerdo a la propiedad (1.4) y teniendo en cuenta que $-\langle \alpha x, y \rangle = \langle -\alpha x, y \rangle$,

$$|\langle q_n x, y \rangle - \langle \alpha x, y \rangle| = |\langle (q_n - \alpha)x, y \rangle|,$$

La identidad de polarización garantiza que $|\langle \alpha_n x, y \rangle| \to 0$ siempre que $\alpha_n \to 0$ en $\mathbb{R}$ (por la continuidad de la norma). Así $|\langle (q_n - \alpha)x, y \rangle| \to 0$, y por lo tanto $|\langle q_n x, y \rangle - \langle \alpha x, y \rangle| \to 0$, lo que implica que $\langle q_n x, y \rangle \to \langle \alpha x, y \rangle$. Esto implica que $\langle \alpha x, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle q_n x, y \rangle = \lim_{n\to\infty} q_n \langle x, y \rangle = \alpha\langle x, y \rangle$. Resultando:

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha\langle x, y \rangle \tag{(4)a}$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, entonces la identidad de polarización compleja(en el espacio compleja X) asegura que

$$\langle ix, y\rangle = i\langle x, y\rangle.$$

Tome un $\lambda = \alpha + i\beta$ in $\mathbb{C}$ y observe que por (3) y por ((4)a) que $\langle \lambda x, y\rangle = \langle(\alpha + i\beta)x, y\rangle = \langle \alpha x, y\rangle + \langle i\beta x, y\rangle = (\alpha + i\beta)\langle x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$. En conclusión:

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \tag{4(b)}$$

para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Las propiedades (1.1) y (1.4) de la Definición 1.1 surgen como consecuencia inmediata de la identidad de polarización. Así el mapeo $\langle\cdot,\cdot\rangle \to \mathbb{F}$ definido por la identidad de polarización es, de hecho, un producto interno en X. Más aún, este producto interno induce una norma $\|\cdot\|$; esto es,

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= \frac{1}{4}(\|x + x\|^2 - \|x - x\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(\|2x\|^2 + 0)\\ &= \frac{1}{4}4\|x\|^2\\ &= \|x\|^2\end{aligned}$$

para cada $x \in X$(nuevamente la identidad de polarización). Finalmente, si $\langle\cdot,\cdot\rangle_0 : X \times X \to \mathbb{F}$ es un producto interno en X que induce la misma norma $\|\cdot\|$ en X, entonces debe coincidir con $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Esto es, $\langle x, y\rangle_0 = \langle x, y\rangle$ para cada $x, y \in X$(de nuevo la identidad de polarización). ■

El Teorema 1.4 puede sugerir que sólo pocos de los ejemplos clásicos de espacios de Banach son espacios con producto interno.

Ejemplos

Ejemplo 1.7. Considere el espacio lineal $C[0,1]$ equipado con cualquiera de las normas $\|\cdot\|_p (p \geq 1)$ o con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$. De estas normas, la única que es inducida por un producto interno en $C[0,1]$ es la norma $\|\cdot\|_2$. En efecto, tomando

x y y en $C[0,1]$ tal que $xy = 0$ y $\|x\| = \|y\| \neq 0$, donde $\|\cdot\|$ denota a $\|\cdot\|_p$ para algún $p \geq 1$ o $\|\cdot\|_\infty$. Esto es, suponga que x y y son funciones continuas en $[0,1]$ con las mismas normas y cuyos valores distintos de cero se dan en conjuntos disjuntos de $[0,1]$. Por ejemplo, observe que $\|x+y\|_p^p = \|x-y\|_p^p = 2\|x\|_p^p$ para cada $p \geq 1$ y

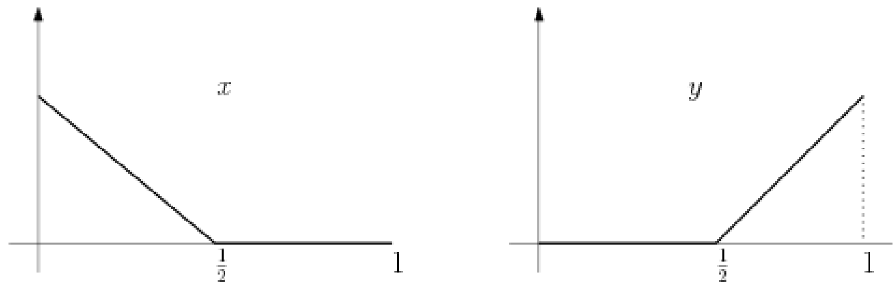

Figura 1.2:

$\|x+y\|_\infty = \|x-y\|_\infty = 2\|x\|_\infty$. Así $\|\cdot\|_p$ para $p \neq 2$ y $\|\cdot\|_\infty$ no satisfacen la ley del paralelogramo, y por lo tanto, estas normas no son inducidas por un producto interno en $C[0,1]$(Teorema 1.4). Ahora considere la función $\langle\cdot,\cdot\rangle : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{F}$ dada por

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$$

para cada $x, y \in C[0,1]$. Se puede verificar fácilmente que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en $C[0,1]$ que induce la norma $\|\cdot\|_2$. Así

$$(C[0,1], \langle\cdot,\cdot\rangle) \text{ es un espacio con producto interno.}$$

Sin embargo, $(C[0,1], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ no es un espacio de Hilbert(razón: $(C[0,1], \|\cdot\|_2)$ no es espacio de Banach). De hecho, entre los espacio normados $(C[0,1], \|\cdot\|_p)$ para cada $p \geq 1$ y $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, el único que es espacio de Banach es $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Esto lleva a una dicotomía: $C[0,1]$ equipado, ya sea con la norma $\|\cdot\|_2$ para obtener un espacio con producto interno que no es espacio de Banach, o equipado con $\|\cdot\|_\infty$ para obtener un espacio de Banach cuya norma no es inducida por un producto interno. En cualquier caso, $C[0,1]$ no puede hacerse un espacio de Hilbert. Por así decirlo, el conjuntos de funciones continuas en $[0,1]$ no es lo suficientemente grande para ser un espacio de Hilbert.

Ejemplo 1.8. Considere los espacios de Banach $(l^p, \|\cdot\|_p)$ para cada $p \geq 1$ y

$(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. No es difícil mostrar que, con excepción de $(l^2, \|\cdot\|_2)$, estos no son espacios de Hilbert: las normas $\|\cdot\|_p$ para todo $p \neq 2$ y $\|\cdot\|_\infty$ no cumplen con la ley del paralelogramo del Teorema 1.2, y por tanto no son inducidas por ningún posible producto interno en $l^p (p \neq 2)$ o en l^∞ (e.g., tome $x = e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$ y $y = e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ en $l^p \cap l^\infty$).Por otra parte, la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : l^2 \times l^2 \to \mathbb{F}$ dada por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{v}_k$$

para cada $x = \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $y = \{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en l^2 está bien definido (i.e., la serie de arriba converge en $\mathbb{F}$ para cada $x, y \in l^2$ por la desigualdad de Hölder $p = q = 2$ y del hecho de que *en un espacio de Banach toda sucesión absolutamente sumable es sumable*). Más aún, es de hecho un producto interno en l^2 (i.e., satisface las propiedades de la Definición 1.1), el cual induce la norma $\|\cdot\|_2$ en l^2. Así, como $(l^2, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach,

$$(l^2, \langle \cdot, \cdot \rangle) \text{ es un espacio de Hilbert.}$$

Similarmente, los espacios de Banach $(l^p, \|\cdot\|_p)$ para cualquier $1 \leq p \neq 2$ y $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ no son espacios de Hilbert. No obstante, la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : l^2 \times l^2 \to \mathbb{F}$ definida por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \overline{v}_k$$

para cada $x = \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $y = \{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en l^2 en un producto interno en l^2, el cual induce la norma $\|\cdot\|_2$ en l^2. De hecho, la sucesión de números no negativos $\{\sum_{k=-n}^{n} |\xi_k \overline{v}_k|_{n \in \mathbb{N}_0}\}$ converge en $\mathbb{R}$ si la sucesión $\{\sum_{k=-n}^{n} |\xi_k|^2\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ y $\{\sum_{k=-n}^{n} |v_k|^2\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de números no negativos converge en $\mathbb{R}$ (la desigualdad de Hölder para $p = q = 2$), y así $\{\sum_{k=-n}^{n} \xi_k \overline{v}_k\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge en $\mathbb{F}$ (*en un espacio de Banach toda sucesión absolutamente sumable es sumable*). Por lo tanto, la función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ está bien definida, es fácil verificar que satisface las propiedades de la Definición 1.1. Po lo tanto, como $(l^2, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de

Banach,

$$(l^2, \langle \cdot, \cdot \rangle) \text{ es un espacio de Hilbert.}$$

Capítulo 2

Ortogonalidad

Los vectores x y y en un espacio con producto interno X se dice que son **ortogonales** si $\langle x, y\rangle = 0$. Si un vector x es ortogonal a todo vector en un conjunto E, entonces decimos que x es ortogonal a E. El conjunto de todos los vectores ortogonales a un conjunto E es llamado **complemento ortogonal** de E, denotado por $E^{\perp}$.

Proposición 2.1. Si E es un conjunto en un espacio X con producto interno, entonces $E^{\perp}$ es un subespacio lineal y cerrado de X.

Prueba. Tome $x, y \in E^{\perp}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Entonces para todo $z \in E$,

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \langle \alpha x, z\rangle + \langle \beta y, z\rangle = 0.$$

Con lo cual $E^{\perp}$ es un subespacio lineal. Ahora queremos ver que $E^{\perp} = \overline{E^{\perp}}$.
$i)$Veamos $E^{\perp} \subset \overline{E^{\perp}}$:
Tenemos que $\overline{E^{\perp}} = E^{\perp} \cup (E^{\perp})'$, lo que prueba esta contención.
$ii)$Veamos $\overline{E^{\perp}} \subset E^{\perp}$
Sea $x \in \overline{E^{\perp}}$ y considere una sucesión (x_n) de puntos en $E^{\perp}$ tal que $(x_n) \to x$. Entonces, para todo $z \in E$,

$$\langle x, z\rangle = \lim\langle x_n, z\rangle = 0.$$

Así x está en $E^{\perp}$ ■

Definición 2.1. Un conjunto E en un espacio lineal X se dice *convexo* si, para cada par de puntos x y y en E, el segmento de línea $[x, y]$ que une a x y y pertenece a E; esto es, si $x, y \in E$ entonces $[x, y] = \{\tau x + (1 - \tau)y : \tau \in [0, 1]\} \subset E$.

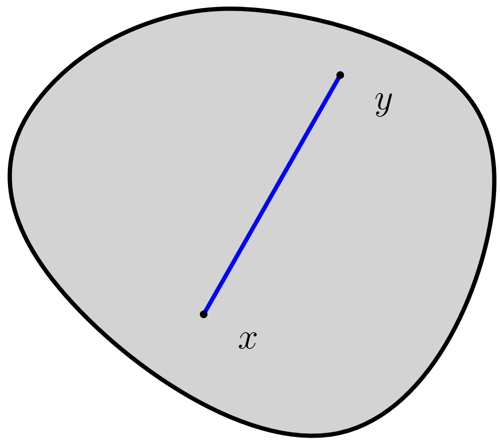

Figura 2.1: Conjunto convexo

Proposición 2.2. *Si E es un conjunto convexo y completo en un espacio con producto interno X y x cualquier punto en X, entonces existe un único punto $P_E(x)$ en E tal que*

$$\|x - P_E(x)\| = \text{ínf}\{\|x - y\| : y \in E\}.$$

Prueba. Sea $\delta = \text{ínf}\{\|x - y\| : y \in E\}$ y sea (y_n) una sucesión de puntos en E tal que

$$\text{lím}\, \|x - y_n\| = \delta.$$

Si se muestra que (y_n) es una sucesión de *Cauchy*, entonces (y_n) converge a algún punto en E, pues E es completo. Note que si y_m y y_n están en E, entonces $\frac{1}{2}(y_m + y_n) \in E$ pues E es convexo.
Tome $\varepsilon > 0$. Existe un entero positivo n_0 tal que

$$\|x - y_n\|^2 < \delta^2 + \frac{1}{4}\varepsilon$$

Usando la ley del paralelogramo, para $m, n \leq n_0$.

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 =& \|(y_m - x) + (x - y_n)\|^2 \\ =& 2\|y_m - x\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - \|y_m + y_n - 2x\|^2 \\ <& 2(\delta^2 + \frac{1}{4}\varepsilon) + 2(\delta^2 + \frac{1}{4}\varepsilon) - 4\|\frac{1}{2}(y_m + y_n) - x\|^2 \\ \leq& 4\delta^2 + \varepsilon^2 - 4\delta^2 = \varepsilon^2\end{aligned}$$

Así, (y_n) es una sucesión de *Cauchy* en E y, por lo tanto, converge a algún punto $y \in E$. Entonces $\|x - y_n\| = \delta$.
Para mostrar la unicidad, tome $y', y \in E$, de tal suerte que $\|x-y\| = \delta$ y $\|x-y'\| = \delta$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|y - y'\|^2 =& \|(y - x) + (x - y')\| \\ =& 2\|y - x\|^2 + 2\|x - y'\|^2 - \|y + y' - 2x|^2 \\ =& 4\delta^2 - 4\|\frac{1}{2}(y + y') - x\|^2 \leq 0\end{aligned}$$

Por lo tanto $y = y'$. ■

Sea Y un subespacio completo de X y x es cualquier punto en X. Es claro que Y es un subconjunto convexo y completo de X, entonces la Proposición 2.2 sostiene que existe un único punto $P_Y(x)$ en Y el cual es el más cercano a x. A $P_Y(x)$ se le conoce como la proyección ortogonal de x en Y. Ahora se mostrará que $x - P_Y(x)$ es ortogonal a Y.

Proposición 2.3. *Si Y es un subespacio completo de un espacio con producto interno X y x es cualquier punto en X, entonces $x - P_Y(x) \in Y^\perp$*

Prueba. Tome $y \in Y$. Entonces, para cada número real $\alpha, P_Y(x) + \alpha y \in Y$ y, así,

$$\begin{aligned}\|x - P_Y(x)\|^2 \leq \|x - P_Y(x) - \alpha y\| &= \langle x - P_Y(x) - \alpha y, x - P_Y(x) - \alpha y\rangle \\ &= \|x - P_Y(x)\|^2 - 2\alpha Re(\langle x - P_Y(x)\rangle) + \alpha^2\|y\|^2.\end{aligned}$$

Así,

$$Re(\langle x - P_Y(x), y\rangle) \leq \alpha^2\|y\|^2.$$

Para cada número positivo α, tenemos que

$$Re(\langle x - P_Y(x), y\rangle) \leq \frac{1}{2}\alpha\|y\|^2$$

y, por lo tanto, $Re(\langle x - P_Y(x), y\rangle) \leq 0$. Así, $Re(\langle x - P_Y(x), y\rangle) = 0$. Reemplazando α por $i\alpha$ en los cálculos de arriba, obtenemos :

$$\begin{aligned} \|x - P_Y(x)\|^2 \leq \|x - P_Y(x) - i\alpha y\| &= \langle x - P_Y(x) - i\alpha y, x - P_Y(x) - i\alpha y\rangle \\ &= \|x - P_Y(x)\|^2 - 2i^2\alpha(\langle x - P_Y(x)\rangle) + \alpha^2 i^2\|y\|^2. \\ &= \|x - P_Y(x)\|^2 + 2\alpha(\langle x - P_Y(x)\rangle) - \alpha^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\frac{\alpha}{2}\|y\| \leq \langle x - P_Y(x), y\rangle$$

Por lo tanto,

$$\langle x - P_Y(x), y\rangle = 0$$

■

Definición 2.2. Sean Z y X subespacios de un espacio lineal X con la propiedad que cada elemento x en X tiene una única representación de la forma:

$$x = y + z, \text{donde, } y \in Y \text{ y } z \in Z$$

entonces se dice que X es la **suma directa** de Y y Z y se escribirá $X = Y \oplus Z$.

Teorema 2.1. *Si Y es un subespacio completo del espacio con producto interno X, entonces*

$$X = Y \oplus Y^{\perp}$$

Prueba. En virtud de la Proposición 2.3 sabemos que si Y es un subespacio completo del espacio con producto interno X, entonces para cualquier x en X tenemos que

$$x = P_Y(x) + (x - P_Y(x)), \text{donde, } P_Y(x) \in Y \text{ y } x - P_Y(x) \in Y^{\perp}$$

Para ver que esta representación es única, suponga que

$$x = y + z, \text{ donde, } y \in Y \text{ y } z \in Y^{\perp}.$$

Entonces, $y - P_Y(x) = (x - P_Y(x)) - z$. Como $y - P_Y(x) \in Y$, $(x - P_Y(x)) - z \in Y^{\perp}$, y $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$, tenemos que $y = P_Y(x)$ y $z = x - P_Y(x)$. Así,

$$X = Y \oplus Y^{\perp}$$

■

Ahora si se tiene que X es un espacio de Hilbert y Y es un subespacio cerrado de X. Entonces Y es completo y, por consiguiente, $X = Y \oplus Y^{\perp}$. Además, $Y^{\perp}$ es un subespacio completo y $Y^{\perp\perp} = Y$. Consecuentemente, si $x = y + z$ donde $y \in Y$ y $z \in Y^{\perp}$, entonces $y = P_Y(x)$ y $z = P_{Y^{\perp}}(x)$.

Proposición 2.4. *Si Y es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert X, entonces la proyección P_Y de X sobre Y es una transformación lineal acotada de X sobre Y con las siguientes propiedades:*
(1) $P_Y^2 = P_Y \circ P_Y = P_Y$
(2) $P_{Y^{\perp}} \circ P_Y = 0$
(3) $\langle P_Y(x), y\rangle = \langle y, P_Y(y)\rangle$ *para todo* $x, y \in X$.

Prueba. Primero se probará la linealidad.
Para cualquier $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

$$\alpha x + \beta y = [\alpha P_Y(x) + \beta P_Y(y)] + [\alpha(x - P_Y(x)) + \beta(y - P_Y(y))]$$

donde $\alpha P_Y(x) + \beta P_Y(y) \in Y$ y $\alpha(x - P_Y(x) + \beta(x - P_Y(y))) \in Y^{\perp}$. Por lo tanto,

$$P_Y(\alpha x + \beta y) = \alpha P_Y(x) + \beta P_Y(y).$$

Además, como $P_Y(x)$ y $x-P_Y(x)$ son ortogonales, por el teorema de Pitágoras (A.1).

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = \|P_Y(x) + (x - P_Y(x))\|^2 &= \|P_Y(x)\|^2\| + \|x - P_Y(x)\|^2 \\ &\geq \|P_Y(x)\|^2\end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\|P_Y\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|P_Y(x)\|}{\|x\|} \leq 1$$

Así, $P_Y \in BL(X,Y)$[1]. Como para cada $x \in X$, $P_Y(x) = P_Y(x) + 0$ donde $P_Y(x) \in Y$ y $0 \in Y^{\perp}$, tenemos que $P_Y^2(x) = P_Y(x)$ y $P^{Y^{\perp}}(P_Y(x)) = 0$. Además, para cada $x, y \in X$,

$$\begin{aligned}\langle P_Y(x), y\rangle &= \langle (P_Y(x), P_Y(y)) + (y - P_Y(y))\rangle \\ &= \langle x - (x - P_Y(x), P_Y(y)\rangle = \langle x, P_Y(y)\rangle.\end{aligned}$$

■

Definición 2.3. Sea X un espacio normado. El espacio de todos los funcionales lineales acotados en X, $f : X \to \mathbb{C}$ o $\mathbb{F}$ con la norma $\|f\| := \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)|$ es llamado **espacio dual** de X y es denotado por X^*.

Proposición 2.5. Sea X un espacio de Banach. Entonces, X^* es un espacio de Banach

Prueba. Considere una sucesión de Cauchy $f_n \in X^*$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > N$ se tiene que $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$. Considere $x \in X$, entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n - f_m)(x)| \leq \|f_n - f_m\|\|x\| \leq \varepsilon\|x\|$$

así $(f_n(x)) \subset \mathbb{F}$ es una sucesión de Cauchy. Como $\mathbb{F}$ es completo, existe un único límite de $f_n(x)$. Como $x \in X$ es arbitrario se puede definir la función

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

[1] $BL(X,Y)$ denota el espacio de las transformaciones lineales y acotadas de X a Y

el objetivo es mostrar que f está en X^* y $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Sea $x_1, x_2 \in X$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ entonces

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) =$$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_1 f_n(x_1) + \alpha_2 f_n(x_2)) = \alpha_1 \lim_{n\to\infty} f_n(x_1) + \alpha_2 \lim_{n\to\infty} f_n(x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

con lo cual f es lineal. Como f_n es una sucesión de Cauchy, entonces está acotada en X^*, i.e. existe $M > 0$ tal que $\sup\{\|f\| : n \in \mathbb{N}\} \leq M$. Así, para todo $x \in X$ se tiene que

$$|f(x)| = |\lim_{n\to\infty} f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \sup \|f_n\|\|x\| \leq \|x\| \sup\{\|f\| : n \in \mathbb{N}\} \leq \|x\|M$$

así que $\|f\| \leq M$, y como ya se probó la linealidad de f, entonces $f \in X^*$. Recordando que se tomó $\varepsilon > 0$ y $x \in X$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > N$ implica que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\|x\|.$$

Ahora, tomando límite cuando $m \to \infty$. Se tiene que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\|x\|.$$

Como $x \in X$ es arbitrario, se ha probado entonces que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica que

$$\|f_n - f_m\| = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X, \quad \|x\| \leq 1\} \leq \varepsilon.$$

Con lo cual $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Como se ha probado que toda sucesión de Cauchy en X^* tiene límite, entonces X^* es completo y por lo tanto de Banach. ■

En un espacio de Hilbert, un funcional lineal acotado se puede representar en términos de un producto interno. En primera instancia, note que, dado un vector a en un espacio con producto interno X, definimos

$$f_a(x) = \langle x, a\rangle, \ x \in X,$$

entonces f_a es un funcional lineal en X. Además, como

$$|f_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \leq \|a\|\|x\||$$

y $|f_a(a)| = \|a\|^2$, f_a es un funcional lineal acotado con $\|f_a\| = \|a\|$. Así, si para cada $a \in X$ definimos

$$T(a) = f_a \text{ donde } f_a(x) = \langle x, a\rangle, \tag{2.1}$$

entonces T define una isometría de X a su dual X^*. Como

$$T(\alpha a + \beta b) = \overline{\alpha}T(a) + \overline{\beta}T(b),$$

T es lineal si X es un espacio real pero no lo es cuando X es un espacio complejo. El siguiente resultado muestra que si X es un espacio de Hilbert, entonces T es suprayectiva.

Teorema 2.2 (**Teorema de Representación de Riesz.**). *Si f es un funcional lineal continuo en un espacio de Hilbert X, entonces existe un único vector a en X tal que*

$$f(x) = \langle x, a\rangle, \text{ para todo } x \in X$$

Prueba. Si tenemos que $f = 0$, basta tomar $a = 0$. Ahora suponga que que $f \neq 0$ y sea N el espacio nulo de $f : N = \{x : f(x) = 0\}$. Entonces, en virtud de la Proposición 2.1. N es un subespacio cerrado de X y por lo tanto completo. Como $N^\perp$ es un subespacio que contiene un vector distinto de cero (Teorema 2.1), escogemos $a_1 \in N^\perp$ tal que $f(a_1) = 1$. Entonces, $f(x) = 0$ implica $\langle x, a_1\rangle = 0$. Para cada $x \in X$, $f(x - f(x)a_1) = f(x) - f(x)f(a_1) = 0$ y, por lo tanto, $\langle x - f(x)a_1, a_1\rangle = 0$. Esto es,

$$\langle x, a_1\rangle - f(x)\langle a_1, a_1\rangle = 0$$

y, así,

$$f(x) = \langle x, a_1/\|a_1\|^2\rangle.$$

Por lo tanto, si se hace $a = \|a_1\|^{-2}a_1$, entonces $f(x) = \langle x, a\rangle$ para todo $x \in X$. ■

En un espacio de Hilbert se ha mostrado que la transformación T definida en

(2.1) es una isometría de X hacia su dual X^*. Si para $f, g \in X^*$, se define

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle T^{-1}(f), T^{-1}(g) \rangle},$$

no es difícil ver que esto es un producto interno en X^*. Así X^* es un espacio de *Hilbert*.

Si X es un espacio de *Hilbert* real, entonces T es un isomorfismo isométrico de X sobre su dual X^* el cual conserva el producto interno. Por lo tanto, en este caso X y X^* pueden ser identificados.

Si X es un espacio de *Hilbert* complejo, entonces T es no lineal. En este caso se puede identificar X con su doble dual $X^{**} = (X^*)^*$. Como X^* es un espacio de *Hilbert* existe una isometría S de X^* sobre X^{**} tal que

$$S(\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha} S(f) + \overline{\beta} S(g).$$

Así, $S \circ T$ es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}. También, si se define un producto interno en X^{**} por

$$\langle F, G \rangle = \overline{\langle S^{-1}(F), S^{-1}(G) \rangle}$$

entonces $S \circ T$ preserva el producto interno y, consecuentemente, X y X^{**} pueden ser identificados.

Capítulo 3

Familias Ortogonales

Una familia $(x_s)_{s\in S}$ de elementos en X se dice que es una familia **ortogonal** de X si $x_s \neq 0$ para todo $s \in S$ y $\langle x_s, x_t\rangle = 0$ para $s \neq t$. Si, además, $\|x_s\| = 1$ para todo $s \in S$, entonces (x_s) es llamada una **familia ortonormal**. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ la tercia $\{i, j, k\}$, donde $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, y $k = (0, 0, 1)$, es ortonormal. Es claro que, una familia ortogonal puede hacerse ortonormal dividiendo cada elemento por su norma.

Proposición 3.1. Una familia ortogonal $(x_s)_{s\in S}$ en X es un conjunto linealmente independiente.

Prueba. Considere $(x_s)_{s\in S'}$ una subfamilia finita. Entonces $\displaystyle\sum_{s\in S'} \alpha^s x_s = 0$ implica que, para cualquier $t \in S'$,

$$\alpha^t\langle x_t, x_t\rangle = \sum_{s\in S'} \alpha^s\langle x_s, x_t\rangle = \left\langle \sum_{s\in S'} \alpha^s x_s, x_t \right\rangle = 0$$

con lo cual, $\alpha^t = 0$ ■

De la Proposición 3.1 se puede ver que si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una familia ortogonal en un espacio con producto interno X de dimensión n, entonces $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base de Hamel y por lo tanto, cualquier elemento x en X se puede expresar de la forma:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k x_k.$$

Entonces, para cualquier $j = 1, \ldots, n$,

$$\langle x, x_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha^k x_k, x_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \langle x_k, x_j \rangle = \alpha^j \langle x_j, x_j \rangle$$

y, así

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k x_k, \text{ donde } \alpha^k = \frac{\langle x, x_k \rangle}{\|x_k\|^2}$$

Si se hace $u_k = x_k / \|x_k\|$, entonces $(u_1, \ldots, u_n)$ es una n-tupla y

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle u_k.$$

El producto interno $\langle x, u_k \rangle$ es la componente de x en la dirección u_k y es llamado coeficiente de Fourier de x con respecto a u_k.
En general si $(u_s)_{s \in S}$ es una familia ortonormal en un espacio con producto interno X, entonces $\{\langle x, u_s \rangle : s \in S\}$ es llamado conjunto(generalizado) de **coeficientes de Fourier** de x con respecto a (u_s).

Proposición 3.2. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una familia ortonormal finita en un espacio con producto interno X y $x \in X$, entonces $\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha^k u_k\|$ toma su valor mínimo cuando $\alpha^k = \langle x, u_k \rangle$ y

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Prueba. Para cualesquiera números $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ en $\mathbb{F}$, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha^k u_k \right\|^2 &= \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \alpha^k u_k,\ x - \sum_{k=1}^{n} \alpha^k u_k \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \overline{\langle x, u_k \rangle} - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha^k} \langle x, u_k \rangle + \sum_{k=1}^{n} |\alpha^k|^2 \\ &= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_k \rangle - \alpha^k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Así, $\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha^k u_k\|$ toma su valor mínimo cuando $\alpha^k = \langle x, u_k\rangle$. Si se hace $\alpha^k = \langle x, u_k\rangle$ se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

■

Si Y es un subespacio lineal de X generado por $\{u_1, \ldots, u_n\}$, entonces se tiene que $\sum_{k=1}^{n}\langle x, u_k\rangle u_k$ es el punto en Y más cercano a x; esto es,

$$P_Y(x) = \sum_{k=1}^{n}\langle x, u_k\rangle u_k \quad \text{para todo } x \in X.$$

Por lo tanto, $x - \sum_{k=1}^{n}\langle x, u_k\rangle u_k$ está en $Y^{\perp}$, como se mostró en la Proposición 2.3. Ahora considere $(u_s)_{s\in S}$ una familia ortonormal en X cuyo rango es número cardinal arbitrario. Se mostrará que, para cualquier punto $x \in X$, el conjunto $\{\langle x, u_s\rangle : s \in S\}$ de coeficientes de Fourier de x contiene sólo una cantidad numerable de elementos distintos de cero.

Proposición 3.3. Considere $(u_s)_{s\in S}$ una familia ortonormal en un espacio con producto interno y sea x cualquier elemento en X. Entonces, el conjunto $\{s \in S : \langle x, u_s\rangle \neq 0\}$ es numerable

.

Prueba. Sea $T = \{s \in S : \langle x, u_s\rangle \neq 0\}$ y $T_n = \{s \in S : |\langle x, u_s\rangle| > 1/n\}$. Entonces $T = \cup_{n=1}^{\infty} T_n$. Si T' es un subconjunto de T_n que tiene m elementos, entonces

$$\sum_{s\in T'} |\langle x, u_s\rangle|^2 > \frac{m}{n^2}$$

En virtud de la Proposición 3.2

$$\sum_{s\in T'} |\langle x, u_s\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

de donde $m < n^2\|x\|^2$. Así, cada T_n es finito y consecuentemente T es numerable.■

Ya que dado un $x \in X$ el conjunto $\{\langle x, u_s\rangle : s \in T\}$ de coeficientes de Fourier distintos de cero es numerable, se puede atribuir un significado a $\sum_{s\in S} |\langle x, u_s\rangle|^2$. Si T es finita, entonces $\sum_{s\in S} |\langle x, u_s\rangle|^2$ es la suma finita $\sum_{s\in T} |\langle |x, u_s\rangle^2$. Si T es infinito numerable, tome una enumeración $\{s_k : k = 1, 2, \ldots\}$ de T y sea $\sum_{s\in S} |\langle x, u_s\rangle|^2$ las series $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, u_{s_k}\rangle|^2$. Por la Proposición 3.2 $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_{s_k}\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ para cualquier entero positivo n, esta serie converge y $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, u_{s_k}\rangle|^2 \leq \|x\|^2$. La suma de las series no depende de la enumeración en particular de T ya que esta serie es absolutamente convergente.
En la discusión de arriba se ha probado:

Proposición 3.4 (Desigualdad de Bessel). Sea $(u_s)_{s\in S}$ una familia ortonormal en un espacio con producto interno X. Entonces, para cualquier $x \in X$,

$$\sum_{s\in S} |\langle x, u_s\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Si X es un espacio de *Hilbert*, entonces razonando de modo análogo a la discusión anterior se asignará un significado a $\sum_{s\in S}\langle x, u_s\rangle u_s$ donde $(u_s)_{s\in S}$ es una familia ortonormal en X. Si, para cada $x \in X$, el conjunto $\{\langle x, u_s\rangle : s \in T\}$ de coeficientes de Fourier distintos de cero es finito, entonces esto denota una suma finita y no hay problema con ello. De lo contrario, sea $\{s_k : k = 1, 2, \ldots\}$ una enumeración de T y defina

$$\sum_{s\in S}\langle x, u_s\rangle u_s = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, u_{s_k}\rangle u_{s_k}.$$

Para asegurar esto está bien definido se debe mostrar que $\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, u_{s_k}\rangle u_{s_k}$ converge y que cualquier reordenamiento tiene la misma suma.

Tome $y_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_{s_k}\rangle u_{s_k}$. Entonces para $m > n$ se tiene que

$$\|y_m - y_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \langle x, u_{s_k}\rangle u_{s_k} \right\|^2 .$$
$$= \sum_{k=n+1}^{m} |\langle x, u_{s_k}\rangle|^2.$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, u_{s_k}\rangle|^2$ converge, (y_n) es una sucesión de Cauchy en el espacio de Hilbert X y, por lo tanto, converge. Sea $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, u_{s_k}\rangle u_{s_k} = y$.

Resta probar que cualquier rearreglo de $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, u_{s_k}\rangle u_{s_k}$ también converge a y. Si se toma otra enumeración $\{t_k : k = 1, 2, \ldots\}$ de T tal que $t_k = s_{f(k)}$. Sea $z_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_{t_k}\rangle u_{t_k}$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo n_0 tal que

$$\sum_{k=n_{0+1}}^{n_0+p} |\langle x, u_{s_k}\rangle|^2 < \varepsilon^2 \text{ para todo } p \geq 1.$$

Tome m_0 tal que $\{k : k \leq n_0\} \subset \{f(k) : k \leq m_0\}$. Entonces $m_0 \geq n_0$. Para cualquier $m, n \geq m_0$, existe un $p \geq 1$ tal que

$$\|y_m - z_n\|^2 \leq \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} |\langle x, u_{s_k}\rangle|^2 < \varepsilon^2.$$

Por lo tanto,

$$\|y - z_n\| \leq \varepsilon \text{ para todo } n \geq m_0$$

y, así, $\lim z_n = y$.

Consecuentemente, se ha probado que si $(u_s)_{s\in S}$ es una familia ortonormal en un espacio de Hilbert X y x es cualquier elemento de X, entonces la serie $\sum_{s\in S} \langle x, u_s\rangle u_s$ converge. Esta es conocida como la **serie de Fourier** de x con respecto ala familia ortogonal $(u_s)_{s\in S}$.

Proposición 3.5. Si $(u_s)_{s\in S}$ es una familia ortonormal en un espacio de Hilbert X y x es cualquier elemento en X, entonces $x - \sum_{s\in S}\langle x, u_s\rangle u_s$ es ortogonal a u_s para todo $s \in S$.

Prueba. Sea $T = \{s \in S : \langle x, u_s\rangle \neq 0\}$. Entonces,

$$\sum_{s\in S}\langle x, u_s\rangle u_s = \sum_{t\in T}\langle x, u_t\rangle u_t.$$

Si $s \in S \setminus T$, entonces $\langle x, u_s\rangle$ y $\langle u_t, u_s\rangle = 0$ para todo $t \in T$. Así,

$$\left\langle x - \sum_{t\in T}\langle x, u_t\rangle u_t, u_s \right\rangle = \langle x, u_s\rangle - \sum_{t\in T}\langle x, u_t\rangle\langle u_t, u_s\rangle = 0.$$

Si $s \in T$, entonces

$$\begin{aligned}\left\langle x - \sum_{t\in T}\langle x, u_t\rangle u_t, u_s \right\rangle &= \langle x, u_s\rangle - \sum_{t\in T}\langle x, u_t\rangle\langle u_t, u_s\rangle \\ &= \langle x, u_s\rangle - \langle x, u_s\rangle = 0.\end{aligned}$$

■

Si Y es la cerradura de un subespacio de X generado por $\{u_s : s \in S\}$, entonces la Proposición 3.5 implica que la proyección P_Y de X sobre Y está dada por la igualdad:

$$P_Y(x) = \sum_{s\in S}\langle x, u_s\rangle u_s;$$

esto es, la serie de Fourier de x con respecto a $(u_s)_{s\in S}$ es la proyección $P_Y(x)$ de x sobre Y.

Capítulo 4

El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ortogonal en en un espacio con producto interno X y sea Y el espacio sublineal de X generado por $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Si $u_k = x_k/\|x_k\|$ de la discusión subsecuente a la Proposición 3.2 se sabe que para cualquier $x \in X$ el punto $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle u_k$ está en $Y^{\perp}$. Así,

$$\left\langle x_j, x - \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle x, x_k \rangle}{\|x_k\|^2} x_k \right\rangle = 0 \text{ para } j = 1, \ldots, n \tag{4.1}$$

Esto proporciona una manera de obtener una familia ortogonal numerable a partir de una familia linealmente independiente numerable.

Proposición 4.1 (Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.). *Si $\{y_n\}$ es una familia linealmente independiente numerable en X, es posible construir una familia ortogonal (x_n) con el mismo número cardinal como sigue:*

$$x_1 = y_1$$
$$x_n = y_n - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^k x_k \textit{ donde } \alpha^k = \frac{\langle y_n, x_k \rangle}{\|x\|^2} \textit{ para } n > 1.$$

Para cada n, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ genera el mismo subespacio como $\{y_1, \ldots, y_n\}$.

Prueba. Supongamos que (y_n) tiene un número finito de elementos, digamos m, entonces por la construcción inductiva anterior, para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, m$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1 \\
x_2 &= y_2 - \frac{\langle y_2, x_1\rangle x_1}{\|x_1\|^2} \\
x_3 &= y_3 - \frac{\langle y_3, x_2\rangle x_2}{\|x_2\|^2} - \frac{\langle y_3, x_1\rangle x_1}{\|x_1\|^2} \\
x_4 &= y_4 - \frac{\langle y_4, x_3\rangle x_3}{\|x_3\|^2} - \frac{\langle y_4, x_2\rangle x_2}{\|x_2\|^2} - \frac{\langle y_4, x_1\rangle x_1}{\|x_1\|^2} \\
&\vdots \\
x_m &= y_m - \sum_{k=1}^{m} \alpha^k x_k
\end{aligned}$$

Si no hubiera un número finito de elementos, este proceso seguiría indefinidamente. Note que $x_n \neq 0$, de lo contrario, $\{y_1, \ldots, y_n\}$ sería linealmente independiente.
Es claro que $\{x_n\}$ tiene la misma cardinalidad que $\{y_n\}$. Además, de la definición de los x_n's, para cualquier n, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ genera el mismo subespacio que $\{y_1, \ldots, y_n\}$.
Ahora, en virtud de la ecuación 4.1:

$$\left\langle x_j, y_j - \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle y_j, x_k\rangle}{\|x_k\|^2} x_k \right\rangle = 0 \text{ para } j = 1, \ldots, n$$

con lo cual (x_n) es ortogonal. ■

Si se hace $u = \|x_n\|^{-1} x_n$; entonces el proceso de Gram-Schmidt provee un método para obtener una familia ortonormal $\{u_n\}$ a partir de una familia numerable y linealmente independiente dada $\{y_n\}$.

Ejemplo 4.1 Como ejemplo del proceso de Gram-Schmidt se darán los términos de la sucesión ortonormal en $C[-1, 1]$ obtenida de la sucesión linealmente independiente $(I^n)_0^\infty$, donde I es la función identidad en $[-1, 1]$:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1. & u_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}. \\
x_1 &= I - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I = I & u_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}}I. \\
x_2 &= I^2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I^2 - \frac{3}{2}I\int_{-1}^{1} I^3 = I^2 - \frac{1}{3} & u_2 &= \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(I^2 - \frac{1}{3}\right) \\
&\textit{etc.}
\end{aligned}
$$

La sucesión obtenida de esta manera es la sucesión de **Polinomios de Legendre normalizados**.

Otra sucesión ortonormal $(u_n)_0^\infty$ de polinomios puede ser obtenida aplicando este proceso a $(I^n)_0^\infty$ en espacios reales del tipo $\mathcal{L}_2^g(a,b) = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} / \int\limits_a^b f^2 dg(f) \text{ existe}\}$ donde g es una función no decreciente en el intervalo finito o infinito (a,b). Con el fin de llevar a cabo el proceso, las funciones I^n deben pertenecer a $\mathcal{L}_2^g(a,b)$ y debemos tener que

$$x_n = I^n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle I^n, u_k \rangle u_k \neq 0 \;\; \text{están en} \;\; \mathcal{L}_2^g(a,b).$$

Ahora se darán condiciones suficientes para que el proceso se pueda llevar a cabo en $\mathcal{L}_2^g(a,b)$.

Proposición 4.2. Si g tiene un número infinito de puntos de incremento[1] en (a,b) y, para algún $r > 0$, $\displaystyle\int_a^b e^{r|t|} dg(t)$ existe, entonces el proceso de Gram-Schmidt se puede aplicar a $(I^n)_0^\infty$ en $\mathcal{L}_2^g(a,b)$ para obtener una sucesión ortonormal de polinomios en $\mathcal{L}_2^g(a,b)$.

Prueba. Primero, se mostrará que, para cada n, $I^n \in \mathcal{L}_2^g(a,b)$. Si (a,b) es finito, es claro que $\displaystyle\int_a^b I^{2n} dg$ existe y, así, $I^n \in \mathcal{L}_2^g(a,b)$. Ahora supónga que (a,b) es infinito y $\displaystyle\int_a^b e^{r|t|} dg(t)$ existe. Como $e^{r|t|} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} r^k |t|^k / k!$, se tiene que

$$t^{2n} \leq \frac{(2n)!}{r^{2n}} e^{r|t|}.$$

[1] Si g es una función no decreciente en (a,b), un punto $t \in (a,b)$ es un punto de incremento de g si, para cualquier intervalo (c,d) tal que $t \in (c,d) \subset (a,b), g(d) - g(c) > 0$.

Esto muestra que la función Stieltjes-medible I^{2n} es menor o igual a la función integrable con respecto a g y, por lo tanto, ella misma es integrable con respecto a g; esto es, $I^n \in \mathcal{L}_2^g(a,b)$.

Ahora se mostrará que $x_n \neq 0$ en $\mathcal{L}_2^g(a,b)$ donde $x_n = I^n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle I^n, u_k \rangle u_k$. Como x_n es un polinomio d grado n, tiene a lo más n ceros en (a,b). Considere la siguiente lista en orden creciente: $t_1, \ldots, t_m$. Entonces,

$$\|x_n\|^2 = \int_a^b x_n^2 dg = \int_a^b x_n^2 dg + \sum_{i=2}^{m} \int_{t_i-1}^{t_i} x_n^2 dg + \int_{t_m}^{b} x_n^2 dg.$$

Como g tiene un número infinito de puntos de incremento en (a,b), al menos uno de estos subintervalos, digamos (t_{i-1}, t_i), debe tener medida positiva de Stieltjes. Y, como x_n^2 es continua y positiva en (t_{i-1}, t_i), tenemos que $\int_{t_{i-1}}^{t_i} x_n^2 dg > 0$ y, por lo tanto, $\|x_n^2\| \neq 0$; esto es, $x_n \neq 0 \in \mathcal{L}_2^g(a,b)$. ■

Ejemplo 4.2 Si $(a,b) = (-1,1)$ y $g(t) = t$, entonces el proceso de Gram-Schmidt puede ser aplicado a $(I^n)_0^\infty$ en $\mathcal{L}_2(-1,1)$ y la sucesión obtenida es la sucesión normalizada de polinomios de Legendre.

Suponga que $(a,b) = (-\infty, \infty)$ y $g(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau^2} d\tau$. Es claro que, g tiene un número infinito de puntos de incremento en $(-\infty, \infty)$. Considere

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{|t|} dg(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{|t|} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{|t|-t^2} dt$$

Como $|t| - t^2 \leq -|t|$ para $|t| \geq 2$ y $\int_2^\infty e^{-t} dt$ existe, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{|t|} dg(t)$ existe. Así, la Proposición.4.2 implica que el proceso de Gram-Schmidt se puede aplicar a $(I^n)_0^\infty$ en el espacio $\mathcal{L}_2^g(-\infty.\infty) = \mathcal{L}_2^g$. La sucesión ortonormal obtenida es la sucesión de **Polinomios Normalizados de Hermite**.

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}$$

los primeros términos de la sucesión (h_n) de polinomios normalizados de Hermite son:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1, & h_0 &= \pi^{-1/4} \\
x_1 &= I - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} I dg = I, & h_1 &= \pi^{-1/4}\sqrt{2}I, \\
x_2 &= I^2 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} I^2 dg - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} I^3 dg & & \\
&= I^2 - 1/2, & h_2 &= \pi^{-1/4}\sqrt{2}(I^2 - 1/2).
\end{aligned}
$$

En los ejemplos anteriores y otros ejemplos importantes, la función g es absolutamente continua. En tales casos la función g' es llamada **función de peso** y es denotada por w. Entonces el producto interno en $\mathcal{L}_2^g(a,b)$ se convierte en una integral de Lebesgue:

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_a^b f_1 f_2 dg = \int_a^b w f_1 f_2.$$

Ahora considere el caso general de una sucesión ortogonal $(p_n)_0^\infty$ de polinomios en el espacio real $\mathcal{L}_2^g(a,b)$ donde p_n es de grado n. La siguiente proposición muestra que p_n es ortogonal a cualquier polinomio de grado menor que n.

Proposición 4.3. Si $(p_n)_0^\infty$ es una sucesión de polinomios ortogonal en $\mathcal{L}_2^g(a,b)$ y q_m es un polinomio de grado m, entonces

$$\langle p_n, q_m\rangle = 0 \text{ para todo } n > m.$$

Prueba. Como $\{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$ es ortogonal, es linealmente independiente y, por lo tanto, es una base de Hamel de espacio $n-$dimensional de polinomios de grado $\leq n-1$. Entonces, como p_n es ortogonal a $\{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$, es ortogonal al subespacio generado por estos vectores. ∎

Ahora se puede mostrar el hecho de que $(p_n)_0^\infty$ es ortogonal en $\mathcal{L}_2^g(a,b)$ determina cada p_n hasta una constante multiplicativa.

Proposición 4.4. Si $(p_n)_0^\infty$ y $(q_n)_0^\infty$ son sucesiones ortogonales de polinomios en $\mathcal{L}_2^g(a,b)$, entonces

$$q_n = \alpha_n p_n \ \text{ para algún } \ \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Prueba. Como $(p_0, \ldots, p_n)$ es una base de Hamel del espacio de polinomios de grado $\leq n$,

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k p_k.$$

Entonces, para $k < n$,

$$\alpha_k = \|p_k\|^{-2} \langle q_n, p_k \rangle = 0$$

y, por lo tanto, $q_n = \alpha_n p_n$. ■

La proposición 4.4 que si la sucesión ortogonal de polinomios en $\mathcal{L}_2^g(a,b)$ es normalizada por $\|p_n\| = 1$, entonces la sucesión está únicamente determinada hasta el signo. En muchos otro tipo de normalización es más conveniente y se verán algunos ejemplos después.

Proposición 4.5. Si $(p_n)_0^\infty$ es una sucesión ortogonal de polinomios en $\mathcal{L}_2^g(a,b)$, entonces p_n tiene n raíces reales distintas y todas están en (a,b).

Prueba. Para $n \geq 1$, como p_0 es una función distinta de cero y constante,

$$\int_a^b p_n dg = \frac{1}{p_0} \int_a^b p_n p_0 dg = 0.$$

Así, existe al menos un punto en (a,b) donde p_n cambia de signo. Suponga que p_n cambia de signo en los puntos $x_1, \ldots, x_n$ en (a,b). Como $p_n(x_k) = 0$ para $k = 1, \cdots, m$ sabes que $m \leq n$. Suponga $m < n$ y sea

$$q(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - x_k).$$

Entonces, $q(x)$ es un polinomio de grado m y, por lo tanto,

$$\int_a^b q p_n dg = 0.$$

Sin embargo, esto no es posible pues qp_n es de signo constante en (a,b). Por lo tanto, $m = n$ y p_n tiene n raíces distintas en (a,b). ■

Capítulo 5

Bases Ortogonales

Una familia ortogonal $(x_s)_{s\in S}$ en un espacio con producto interno X. se dice que es **completa** si ninguna familia ortogonal en X es una extensión propia de $(x_s)_{x\in S}$. Así, si $E = \{x_s : s \in S\}$, entonces la familia ortogonal $(x_s)_{s\in S}$ es completa si y sólo si $E^{\perp} = \{0\}$. Note que este uso del término "completo"no mantiene relación con su uso en el contexto de espacios métricos o espacios lineales normados completos. Una familia ortogonal completa en X es llamada **base ortogonal** de X. Si una base ortogonal es normalizada de tal manera que cada uno des sus términos tenga norma 1, entonces es llamada una **base ortonormal** de X. En muchos casos es conveniente ultilizar bases ortonormales.
Una base ortogonal es maximal con respecto a la ortogonalidad mientras que una base de Hamel es maximal con respecto a la independencia lineal. Como se muestra en el siguiente ejemplo, una base ortogonal no es necesariamente una base de Hamel.

Ejemplo 5.1. En el espacio de sucesiones complejas I_2 considere la sucesión de puntos (e_k) donde $e_k = (\delta_k^j)$ y δ_k^j es la delta de Kronecker. Esta no es una base de Hamel para I_2 pues la sucesión $(\frac{1}{n})$ no puede ser escrita como una combinación lineal finita de términos de (e_k). Sin embargo, (e_k) es una base ortonormal para I_2. Es claramente una sucesión ortonormal. Para mostrar que es completa, tome $x = (\alpha^k) \in E^{\perp}$ donde $E = \{e_k : k = 1, 2, \ldots\}$. Entonces, para toda k

$$0 = \langle x, e_k \rangle = \alpha^k;$$

esto es, $x = 0$.
Así, una base ortonormal B puede no ser una base de Hamel para un espacio con producto interno X pues existe un vector en X que no se puede expresar como combinación lineal finita de términos de B. Esto pasa solo si B es infinita. Si B es infinita, entonces el siguiente teorema muestra que dado un espacio de Hilbert X cualquier vector $x \in X$ se puede escribir como combinación lineal infinita"de términos de B. Siendo más precisos, este teorema muestra que x es la suma de su serie de Fourier con respecto a B.

Teorema 5.1. *Si $E = \{u_s : s \in S\}$ donde $(u_s)_{s\in S}$ es una familia ortonormal en un espacio de Hilbert X, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$(u_s)_{s\in S}$ es completo*

2. *Para cada $x \in X$, $x = \sum_{s\in S} \langle x, u_s\rangle u_s$*

3. *Para cada $x \in X$, $\|x\|^2 = \sum_{s\in S} |\langle x, u_s\rangle|^2$ (Identidad de Parseval)*

4. *El espacio lineal generado por E es denso en X.*

Prueba. (1) $\Rightarrow$ (2). Tome $x \in X$. En virtud de la proposición 3.5, $x - \sum_{s\in S} \langle x, u_s\rangle u_s$ es ortogonal a E. Como $(u_s)_{s\in S}$ es completo, $E^{\perp} = \{0\}$ y, así,

$$x - \sum_{s\in S} \langle x, u_s\rangle u_s = 0;$$

esto es, $x = \sum_{s\in S} \langle x, u_s\rangle u_s$.
(2) $\Rightarrow$ (3). Tome $x \in X$. Entonces $x = \sum_{s\in S} \langle x, u_s\rangle u_s$ y

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \langle x, x\rangle = \left\langle \sum_{s\in S} \langle x, u_s\rangle u_s, x \right\rangle = \sum_{s\in S} \langle x, u_s\rangle \langle u_s, x\rangle \\ &= \sum_{s\in S} |\langle x, u_s\rangle|^2.\end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (4). Tome $x \in X$ y sea $T = \{s \in S : \langle x, u_s\rangle \neq 0\}$. Sea $\{s_k\}$ una enumeración de T. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo n tal que

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_{s_k}\rangle u_{s_k} \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_{s_k}\rangle|^2 < \varepsilon.$$

4 $\Rightarrow$ 1. Tome $x \in E^{\perp}$. Entonces x es ortogonal al generado de E pues para cualquier $u_{s_1}, \ldots, u_{s_n}$ en E y $\alpha^1, \cdots, \alpha^n$ en $\mathbb{F}$

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha^k u_{s_k}, x \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \langle u_{s_k}, x\rangle = 0.$$

Como el generado de E es denso en X existe una sucesión (y_n) en este generado tal que $\lim y_n = 0$.. Entonces

$$\langle x, x\rangle = \lim \langle y_n, x\rangle = 0$$

y así, $x = 0$. ■

Usando el lema de Zorn no es difícil ver que todo espacio con producto interno tiene una base ortonormal.

Teorema 5.2. *Si A es una familia ortonormal en un espacio con producto interno X, entonces existe una base ortonormal B la cual es una extensión de A.*

Prueba. Sea $\mathscr{A}$ el conjunto parcialmente ordenado que consiste de todas las familias ortonormales en X las cuales son una extensión de A. El orden parcial es el de la extensión: esto es, $A_1 \prec A_2$ si A_2 es una extensión de A_1. Para cualquier cadena $\{(x_s)_{s \in S_t} : t \in T\}$ en $\mathscr{A}$ la familia $(x_s)_{s \in S}$, donde $S = \cup_{t \in T} S_t$, es ortonormal y es una extensión de A. Así, cualquier cadena en $\mathscr{A}$ tiene una cota superior y, por lo tanto, $\mathscr{A}$ tiene elemento maximal por el Lema de Zorn. Este elemento maximal es una base ortonormal de X la cual es una extensión de A. ■

Si un espacio X con producto interno tiene una base de Hamel $B = (u_s)_{s \in S}$ que es ortonormal, entonces B es una base ortonormal de X. Pues si $x \in E^{\perp}$ donde $E = \{u_s : s \in S\}$, entonces existen vectores $u_{s_1}, \ldots, u_{s_n}$ en E y escalares $\alpha^1, \cdots, \alpha^n$

en $\mathbb{F}$ tal que $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k u_{s_k}$. Entonces,

$$\langle x, x\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha^k u_{s_k}, x \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle u_{s_k}, x\rangle = 0$$

y, por tanto, $x = 0$. Esto prueba que $E^{\perp} = 0$. En el caso que X tenga una base numerable de Hamel entonces la aplicación del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt produce una base numerable de Hamel que también es una familia ortonormal, y así, una base ortonormal numerable para X.

Proposición 5.1. *Un espacio separable con producto interno X tiene una base ortonormal numerable.*

Prueba. Sea $E = \{a_k\}$ un conjunto desnso numerable en X con $a_1 \neq 0$. Defina una familia numerable (x_n) inductivamente como sigue. Sea $x_1 = a_1$ y suponga que $x_1, \cdots, x_m$ han sido escogidas de E tal que $(x_1, \cdots, x_m)$ es linealmente independiente. Si $\{x_1, \cdots, x_m\}$ genera a E, la construcción termina. De otro modo, sea x_{m+1} el primer elemento en E que no está en el subespacio generado por $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Entonces, $(x_1, \cdots, x_{m+1})$ es linealmente independiente. Así, se obtiene una sucesión numerable linealmente independiente (x_n) tal que $\{x_n\}$ genera a E. Por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt se obtiene una familia ortonormal numerable (u_n) tal que $\{x_n\}$ genera a E. Para probar que (u_n) es completa, suponga que $\langle x, u_n\rangle = 0$ para toda n. Entonces x es ortogonal al conjuntos denso E y, así, $x = 0$.■

Capítulo 6

La exponencial compleja y sucesiones trigonométricas.

Puesto que el espacio del Hilbert $\mathscr{L}_2[-\pi, \pi]$ es separable, se sabe que tiene una base ortogonal numerable.

Teorema 6.1. *Si para cada entero n,*

$$E_n(t) = e^{int}, \; t \in [-\pi, \pi]$$

entonces $(E_n)_{-\infty}^{\infty}$ es una base ortogonal para $\mathscr{L}_2[-\pi, \pi]$.

Prueba. Puesto que, para $n \neq m$,

$$\langle E_n, E_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-int} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = 0,$$

(E_n) es ortogonal. Se mostrará que (E_n) es completa mostrando que su generado es denso en $\mathscr{L}_2[-\pi, \pi]$. Tome $f \in \mathscr{L}_2[-\pi, \pi]$ y $\varepsilon > 0$. Como las funciones continuas son densas en $\mathscr{L}_2[-\pi, \pi]$, entonces existe una función continua g tal que

$$\|f - g\| < \varepsilon/3.$$

Sea $t_n = \pi - 1/n^2$ y defina

$$f(x) = \begin{cases} g(t), & \text{para } t \in [-\pi, t_n) \\ g(t_n) + (g(-\pi) - g(t_n))\dfrac{t - t_n}{\pi - t_n} & \text{para } t \in [t_n, \pi] \end{cases}$$

Entonces, g_n es continua en $[-\pi, \pi]$ y, como $g_n(\pi) = g_n(-\pi), g_n$ se puede extender a una función continua en $\mathbb{R}$ con periodo 2π. También, si $M = max\{|g(t)| : t \in [-\pi, \pi]\}$, entonces

$$\|g - g_n\| = \left[\int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - g_n(t)|^2 dt\right]^{1/2} \leq \left[\int_{t_n}^{\pi} (2M)^2 dt\right]^{1/2} = \frac{2M}{n}.$$

Por lo tanto, tomando $n \geq 6M/\varepsilon$, tenemos que

$$\|g - g_n\| \leq \varepsilon/3.$$

Luego por el teorema de Weierstrass, existe un polinomio trigonométrico T, $T(t) = \sum_{k=-m}^{m} \alpha_k e^{ikt}$, tal que

$$|g_n(t) - T(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}} \text{ para todo } t \in [-\pi, \pi].$$

Entonces,

$$\|g_n - T\| = \left[\int_{-\pi}^{\pi} |g_n(t) - T(t)|^2 dt\right]^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

y, por lo tanto,

$$\|f - T\| \leq \|f - g\| + \|g - g_n\| + \|g_n - T\| < \varepsilon.$$

∎

Como

$$\langle E_n, E_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-int} dt = 2\pi,$$

si

$$u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int},$$

entonces $(u_n)_{-\infty}^{\infty}$ es una base ortonormal para $\mathbf{L}_2[-\pi, \pi]$ [1]. El teorema 5.1 implica que la serie de Fourier de cualquier función $f \in \mathscr{L}_2[-\pi, \pi]$ con respecto a esta base debe converger a f en $\mathscr{L}_2[-\pi, \pi]$; esto es,

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n u_n \text{ donde } \gamma_n = \langle f, u_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Se hace énfasis en que la convergencia de esta serie de Fourier a f es en la norma de $\mathscr{L}_2[-\pi, \pi]$. Esta no es una solución al problema clásico concerniente a la convergencia puntual de las series. Modificando la base ortonormal anterior para $\mathscr{L}_2[-\pi, \pi]$ se puede obtener una base ortonormal para $\mathscr{L}_2[a, b]$ donde $[a, b]$ es cualquier intervalo finito. De hecho,

$$u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{i2\pi nt/(b-a)}$$

entonces $(u_n)_{-\infty}^{\infty}$ es una base ortonormal para $\mathscr{L}_2[-\pi, \pi]$. Ahora considere el espacio real $\mathscr{L}_2[-\pi, \pi]$.

Teorema 6.2. *La sucesión* $(1, \cos t, \operatorname{sen} t, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t, \cdots)$ *es una base ortogonal para el espacio real* $\mathscr{L}_2[-\pi, \pi]$.

Prueba. El hecho de que sta sucesión es ortogonal no es difícil de ver. Para mostrar que la base ortogonal es completa, tome $f \in {}_2[-\pi, \pi]$ tal que, para toda $n = 1, 2, \cdots$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0, \int_{-\pi}^{\pi} f(t) cos(nt) dt = 0, \int_{-\pi}^{\pi} f(t) sen(nt) dt = 0.$$

Entonces, para $n = 0, 1, 2, \cdots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) cos(nt) dt + i \int_{-\pi}^{\pi} f(t) sen(nt) dt = 0$$

y también

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = 0.$$

[1] $\mathbf{L}_2[-\pi, \pi]$ es el espacio de las funciones complejo-valuadas en $[-\pi, \pi]$ de cuadrado integrable.

Así, $f = 0$ en $\mathscr{L}_2[-\pi, \pi]$; esto es, $f = 0$ c.d. en $[-\pi, \pi]$. Esto prueba que la sucesión es completa. ■

Como $(e^{iqnx})_{n=-\infty}^{\infty}$ donde $q = 2\pi/(b-a)$ es una base ortogonal para $\mathscr{L}_2[a, b]$ y

$$\int_a^b f(x)e^{-iqnx}dx = 0 \text{ para toda } n$$

entonces $f = 0$ en $\mathscr{L}_2[a, b]$ Ahora se generalizará esto al espacio real $\mathscr{L}_2^g$, dode g es una función acotada no decreciente.

Teorema 6.3. *Si $f \in \mathscr{L}_2^g$ donde g es una función acotada no decreciente en $\mathbb{R}$, y*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}dg(x) = 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

entonces $f = 0$ en $\mathscr{L}_2^g$.

Prueba. Si T es un polinomio trigonométrico de periodo p,

$$T(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{i2\pi kx/p}, \text{ entonces}$$

$$\langle f, T\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} fT dg = \sum_{k=-m} c_k \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i2\pi kx/p}dg = 0.$$

Así, si existe una sucesión (T_n) de polinomios trigonométricos tales que $\lim T_n = f$ en $\mathscr{L}_2^g$, entonces $\langle f, f\rangle = \lim\langle f, T_n\rangle = 0$ y, así, $f = 0$ en $\mathscr{L}_2^g$. En virtud de resultados del apéndice A(A.1 y A.3), para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función escalonada h_1 y una función continua h_2 tales que $\|f - h_1\| < \varepsilon$ y $\|h_1 - h_2\| < \varepsilon$. Suponga que $h_1(x) = 0$ para toda $x \in [c, d]$ donde $[c, d]$ es un intervalo y sea $M = \max |h_2(x)|^2 : x \in [c, d]$. Tome $a < c$ y $b > d$ tal que $g(a) - g(-\infty) < \varepsilon/M$ y $g(\infty) - g(b) < \varepsilon/M$. Además, como g es continua en c y en d, podemos tomar $c_1 \in (a, c)$ y $d_1 \in (d, b)$ tal que $g(c) - g(c_1) < \varepsilon/M$ y $g(d_1) - g(d) < \varepsilon/M$. Defina h una función continua de periodo $p = b - a$ tal que:

$$h(x) = h_2(x), x \in [c, d]; h(x) = 0, x \in [a, c_1] \cup [d_1, b];$$

y h es lineal en $[c_1, c]$ y en $[d, d_1]$. Note que $h^2(x) \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Escribiendo la integral $\int_{-\infty}^{\infty}(h(x)-h_1(x))^2 dg(x)$ como suma de integrales sobre $(-\infty, a]$, $[a, c_1]$, $[c_1, c]$, $[c, d]$, $[d, d_1]$, $[d_1, b]$ y $[b, \infty]$, se obtiene:

$$\|h - h_1\|^2 < \varepsilon + 0 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon + 0 + \varepsilon = 4\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Entonces h es una función continua en $\mathbb{R}$ de periodo p y $\|h - h_1\| < [4\varepsilon + \varepsilon^2]^{1/2}$.

El teorema de Aproximación de Weierstrass($A.3$) muestra que existe un polinomio trigonométrico T de periodo p tal que $|h(x) - T(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\|h - T\| = \left[\int_{-\infty}^{\infty}(h(x) - T(x))^2 dg(x)\right]^{1/2} < \varepsilon B \text{ donde } B = (g(\infty) - g(-\infty))^{1/2}.$$

Haciendo $\phi(\varepsilon) = \varepsilon + (4\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2} + \varepsilon B)$, se tiene que:

$$\|f - T\| \leq \|f - h_1\| + \|h_1 - h\| + \|h - T\| < \phi(\varepsilon) \text{ donde } \lim_{\varepsilon \to 0} T_n = f \text{ en } \mathscr{L}_2^g$$

■

Capítulo 7

Los Polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre son importantes en muchas aplicaciones en matemáticas y física por lo cual en esta sección se discutirán algunas de sus propiedades.

Definición 7.1. Los polinomios definidos por

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \text{ para } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Son llamados **Polinomios de Legendre.**

De la fórmula de esta definición, llamada **fórmula de Rodrigues**, se pueden escribir los primeros términos del polinomio de Legendre:

$$P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

Expandiendo $(x^2-1)^n$ se ve que P_n es un polinomio de grado n y que el coeficiente de x^n en $P_n(x)$ es $(2n)!/(2^n(n!)^2)$. También, $P_n(x)$ tiene potencias pares de x si n es par e impares si n es impar. Así,

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n.$$

Se mostrará que (P_n) es una base ortogonal del espacio real $\mathscr{L}_2[-1,1]$.

Primero note que si $f(x) = (x^2-1)^n$; entonces

$$f^{(k)}(x) = q_k(x)(x^2-1)^{n-k} \quad k \leq n$$

donde q_k es un polinomio de grado k. Esto puede ser probado mediante inducción como sigue:
Para $n = 1$, se tiene que con $k = 0, 1$

$$\begin{aligned}(x^2-1) = f^{(0)}(x) = q_0(x)(x^2-1)\\ 2x = f^1(x) = q_1(x^2-1)^0 = q_1(x)\end{aligned}$$

Ahora supóngase que es válido para $n = m$ y se probará para $m + 1$, entonces:

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x) = q_k(x)(x^2-1)^{(m+1)-k} = q_k(x)\left((x^2-1)^{(m+1)}\right)^{(k)}\\ =q_k(x)\left((x^2-1)^m(x^2-1)\right)^{(k)}\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}q_k(x)\left((x^2-1)^m(x^2-1)\right)^{(k)} = ((x^2-1)^m)^{(k)}(x^2-1)C_k+((x^2-1)^m)^{(k-1)}2xC_{k-1}+\\ ((x^2-1)^m)^{(k-2)}2C_{k-2}\end{aligned}$$

Donde C_k, C_{k-1} y C_{k-2} son los coeficientes binomiales de la regla de Leibnitz para la derivada n-ésima.
Ahora, por la hipótesis de inducción, se tiene que,

$$\begin{aligned}C_kq_k(x)\left((x^2-1)^m\right)^{(k)}(x^2-1)+C_{k-1}q_{k-1}(x)\left((x^2-1)^m\right)^{(k-1)}2x+\\ C_{k-2}q_{k-2}(x)\left((x^2-1)^m\right)^{k-2}2\end{aligned}$$

Agrupando términos

$$(q_k(x)C_k + 2xq_{k-1}(x)C_{k-1}+q_{k-2}(x)(x^2-1)C_{k-2}(x^2-1))(x^2-1)^{(m+1)-k}$$

pero, $q_k(x)C_k + 2xq_{k-1}(x)C_{k-1} + q_{k-2}(x)(x^2-1)C_{k-2}(x^2-1)$ es un polinomio $\hat{q}_k(x)$

de grado k, así

$$\hat{q}_k(x)(x^2-1)^{(m+1)-k}, \quad k \leq n+1.$$

Como se afirmaba.

También, si se aplica la integración por partes, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f dx = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx = x(x^2-1)^n\Big]_{-1}^{1} - 2n\int_{-1}^{1} x^2(x^2-1)^{n-1}dx \\
= -2n\int_{-1}^{1}(x^2(x^2-1)^{n-1} + (x^2-1)^{n-1} - (x^2-1)^{n-1})dx \\
= -2n\int_{-1}^{1}((x^2-1)(x^2-1)^{n-1} + (x^2-1)^{n-1})dx \\
= -2n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx - 2n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-1}dx.
\end{aligned}$$

Entonces se obtiene una fórmula de reducción

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = -\frac{2n}{2n+1}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-1}dx.$$

Usando repetidamente esta fórmula se obtiene

$$\int_{-1}^{1} f dx = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = (-1)^n 2\frac{2^n n!}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}.$$

Proposición 7.1. (P_n) es una sucesión ortogonal en $\mathscr{L}_2[-1,1]$ y

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Prueba. Si se hace $f(x) = (x^2-1)^n$ y se integra por partes repetidamente, entonces para $m \leq n$ se obtiene

$$\begin{aligned}
2^n n!\langle I^m, P_n\rangle = \int_{-1}^{1} x^m f^{(n)}(x)dx = -m\int_{-1}^{1} x^{m-1} f^{(n-1)}(x)dx \\
= \cdots = (-1)^m m!\int_{-1}^{1} f^{(n-m)}(x)dx.
\end{aligned}$$

Así, si $m < n$, entonces

$$2^n n! \langle I^m, P_n \rangle = (-1)^m m! f^{(n-m-1)}(x)]_{-1}^{1}$$

Esto es, $\langle I^m, P_n \rangle = 0$ y, entonces, $\langle P_m, P_n \rangle = 0$. Si $m = n$, entonces

$$\begin{aligned} \|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n \rangle &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \langle I^n, P_n \rangle = \frac{(2n)!}{[2^n \cdot n!]^2} (-1)^n \int_{-1}^{1} f dx \\ &= \frac{(2n)!}{[2^n \cdot n!]^2} 2 \frac{2^n n!}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} = \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

■

Como (P_n) es una sucesión ortogonal en $\mathscr{L}_2[-1,1]$ se sigue de la Proposición 4.4 que P_n tiene n ceros distintos en $(-1,1)$. También se sabe que $\{P_0, P_1, \cdots, P_m\}$ es una base de Hamel para el espacio $(m+1)-$dimensional de polinomios de grado $\leq m$

Teorema 7.1. *La sucesión (P_n) de polinomios de Legendre es una base ortogonal para $\mathscr{L}_2[-1,1]$*

Prueba. Para probar que la sucesión ortogonal (P_n) es completa se mostrará que su subespacio generado es denso en $\mathscr{L}_2[-1,1]$. Tome $f \in \mathscr{L}_2[-1,1]$ y $\varepsilon > 0$. Por el resultado(ver apéndice A.5), existe una función continua g tal que

$$\|f - g\| < \varepsilon/2.$$

Por el Teorema de aproximación de Weierstrass existe un polinomio Q tal que

$$|g(x) - Q(x)| < \varepsilon/4 \text{ para todo } x \in [-1,1] = 0;$$

Entonces,

$$\|g - Q\| = \left[\int_{-1}^{1} |g(x) - Q(x)|^2 dx \right]^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

y, por lo tanto,

$$\|f - Q\| \leq \|f - g\| + \|g - Q\| < \varepsilon.$$

Si el polinomio Q es de grado m, entonces es una combinación lineal de $P_0, \cdots, P_m$ y también lo es el generado de (P_n). ■.

Ahora se obtendrá una relación de recurrencia de tres términos que permitirá calcular P_{n+1} en términos de P_n y P_{n-1}.

Teorema 7.2. $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ *para* $n \geq 1$.

Prueba. Tome $n \leq 1$. Como IP_n es un polinomio de grado $n+1$ y $\{P_0, \cdots, P_{n+1}\}$ es una base de Hamel para el espacio lineal de polinomios de grado $\leq n+1$, tenemos que

$$IP_n = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k P_k, \text{ donde } \alpha_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} xP_n(x)P_k(x)dx.$$

Si $k < n-1$, entonces IP_k es de grado menor que n y P_n es ortogonal a IP_k(Proposición 4.3); esto es, $\alpha_k = 0$ para $k < n-1$. También, como IP_n^2 es una función impar,

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} xP_n^2(x)dx = 0.$$

Así,

$$xP_n(x) = \alpha_{n-1}P_{n-1}(x) + \alpha_{n+1}P_{n+1}(x).$$

Igualando los coeficientes de x^{n+1}, se tiene que

$$\frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{(2n)!}{n!} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{(n+1)!}\alpha_{n+1}$$

o

$$\alpha_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1}$$

Entonces

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n+1}(x)dx = \frac{2}{2n+3}\alpha_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(2n+3)(2n+1)} \text{ para } n \geq 0$$

y reemplazando n por $n-1$, se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} = \frac{2n-1}{2} \int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx &= \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n}{(2n+1)(2n-1)} \\ &= \frac{n}{2n+1}. \end{aligned}$$

Con estos valores para los coeficientes α_{n-1} y α_{n+1} se tiene que

$$(2n+1)xP_n(x) = nP_{n-1}(x) + (n+1)P_{n+1}(x).$$

■

Como conocemos P_1 y P_2 se puede usar la relación de recurrencia para obtener P_3 :

$$\begin{aligned} P_3(x) = \frac{5}{3}xP_2(x) - \frac{2}{3}P_1(x) &= \frac{5}{3}x\frac{1}{2}(3x^2-1) - \frac{2}{3}x \\ &= \frac{1}{2}(5x^3-3x). \end{aligned}$$

Entonces se puede obtener P_4 y así sucesivamente. Ahora se introducirá una función generadora de para los polinomios de Legendre. La función generadora facilita la obtención de algunas propiedades de los polinomios de Legendre.

Proposición 7.2. $(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$ *para* $|2xt-t^2|<1$.

Prueba. Sea $F(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-1/2}$. Entonces por la expansión binomial de series

$$(1-u)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!}u^k, \; |u|<1$$

se obtiene

$$\begin{aligned} F(x,t) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!}(2xt-t^2)^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)t^n \end{aligned}$$

donde g_n es un polinomio y la serie es absolutamente convergente y uniformemente convergente para $|2xt-t^2|<1$. Como

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = (x-t)(1-2xt+t^2)^{-3/2} = (x-t)(1-2xt+t^2)^{-1}F(x,t),$$

se tiene que

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial F(x,t)}{\partial t}+(t-x)F(x,t)=0.$$

Esto es

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} n g_n(x)t^{n-1}+(t-x)\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)t^n=0$$

o

$$g_1(x)-xg_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+1)g_{n+1}(x)-(2n+1)xg_n(x)+ng_n(x)+ng_{n-1}(x)\Big)t^n=0.$$

Así,

$$g_1(x)=xg_0(x),$$
$$(n+1)g_{n+1}(x)=(2n+1)xg_n(x)-ng_{n-1}(x), \quad n\geq 1.$$

Ahora, $g_0(x)=F(x,0)=1=P_0(x)$ y así $g_1(x)=x=P_1(x)$. Puesto que la fórmula de recursión para g_n es la misma que para P_n(Teorema 7.2) y los dos primeros términos son iguales, se tiene que $g_n=P_n$ para toda $n\geq 0$. ■

Corolario 7.1. $(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x),\ n\geq 1.$

Prueba. Sea $F(x,t)=(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n,\ |t|<1$, la función generadora para los polinomio de Legendre obtenida en la proposición 7.2. Derivando con respecto de t, se tiene

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}=\frac{t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n.$$

De lo anterior se obtiene que

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n-t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n=0.$$

de donde

$$P'_{n+1}(x)+P'_{n-1}(x)=2xP'_n(x)+P_n(x) \tag{1}$$

multiplicando ambos lados de esta ecuación por $(2n+1)$

$$(2n+1)[P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x)] = (2n+1)[2xP'_n(x) + P_n(x)] \tag{1.1}$$

Por el Teorema 7.2 se tiene que

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$$

si se deriva esta última ecuación, se multiplica por dos y luego se le sustrae (1.1):

$$2[(2n+1)[P_n(x) + xP'_n(x)]] = 2[(n+1)P'_{n+1}(x) + nP'_{n-1}(x)]$$

$$-$$

$$(2n+1)[2xP'_n(x) + P_n(x)] = (2n+1)[P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x)] \tag{1.1}$$

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x).$$

■

Ahora se probará que P_n es una solución para ciertas ecuaciones diferenciales de segundo orden, conocidas como **ecuaciones de Legendre**.

Proposición 7.3. $(1-x^2)P_n^{''}(x) - 2xP_n^{'}(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$

Prueba. Sea $f(x) = (x^2-1)^n$. Entonces

$$(1-x^2)f'(x) + 2nxf(x) = 0$$

Derivando $n+1$ veces y usando la regla de Leibnitz para la $(n+1)$-ésima derivada de un producto:

$$D^{n+1}[gf] = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} D^k g D^{n+1-k} f,$$

se tiene que

$$\binom{n+1}{0}(1-x^2)f^{(n+2)}(x) + \binom{n+1}{1}(-2x)f^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{2}(-2)f^{n}(x) \\ + 2n\left[\binom{n+1}{0}xf^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1}f^{(n)}(x)\right] = 0.$$

Dividiendo por $2^n n!$ y agrupando términos semejantes, se obtiene

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

■

Capítulo 8

Los Polinomios de Hermite

Definición 8.1. *Los polinomios definidos por*

$$\begin{aligned} &H_0(x) = 1, \\ &H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \text{ para } n > 0 \end{aligned}$$

Son llamados **Polinomios de Hermite**.

Los primeros términos de los polinomios de Hermite son fáciles de encontrar:

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2,\ H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

Es claro de la definición que H_n es un polinomio de grado n con coeficientes principales 2^n. También,

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

Así, $H_n(x)$ contiene solo potencias pares de x si n es par y solo potencias impares de x si n es impar. Sea

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt.$$

Se mostrará que (H_n) es una base ortogonal para el espacio real $\mathscr{L}_2^g(-\infty, \infty)$.

Proposición 8.1. (H_n) es una sucesión ortogonal en $\mathscr{L}_2^g$ y

$$\|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Prueba. Se integra por partes repetidamente, entonces para $m \leq n$ se obtiene

$$\begin{aligned}\langle H_m, H_n \rangle &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} H_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} dx\end{aligned}$$

Si $m < n$, entonces $\dfrac{d^n}{dx^n}\left[2^m p_m(x)\right] = 0$, con lo cual, $\langle H_m, H_n \rangle = 0$ mientras que si $m = n$, entonces

$$\|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} H_m(x) dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

■

Teorema 8.1. (H_n) *es una base ortogonal para* $\mathscr{L}_2^g$.

Prueba. Tome $f \in \mathscr{L}_2^g$ tal que $\langle f, H \rangle = 0$ para toda n. Entonces $\langle f, I^n \rangle = 0$ para toda n. Sea

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dg(x) \text{ para } t \in \mathbb{R}.$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{-ixt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} t^k x^k$$

donde la convergencia de esta serie es absoluta para toda $x \in \mathbb{R}$. Así,

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(x) e^{-x^2} \frac{(-i)^k}{k!} t^k x^k dx.$$

Como

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| e^{-x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|t|^k}{k!} |x^k| \right) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| e^{-x^2} e^{|t||x|} dx \\ &\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx \right]^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{2|t||x|} e^{-x^2} dx \right]^{1/2}\end{aligned}$$

Y $e^{2|t||x|-x^2}$ es integrable, por una forma del Teorema de Levi (A.2) se tiene que

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} t^k \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^k g(x) = 0.$$

Por el Teorema 6.3, $f = 0$ en $\mathscr{L}_2^g$. ■

Los polinomios de Hermite satisfacen la relación de recurrencia de tres términos.

Proposición 8.2. $H_{m+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ para $n \geq 1$

Prueba. Tome $n \geq 1$. Como $2IH_n$ es un polinomio de grado $n+1$ y $\{H_0, \cdots, H_{n+1}\}$ es una base de Hamel para el espacio lineal de polinomios de grado $\leq n+1$, se tiene que

$$2IH_n = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha^k H_k \text{ donde } \alpha^k = \frac{2}{\sqrt{\pi} k! 2^k} \int_{-\infty}^{\infty} x H_n(x) H_k(x) dg(x).$$

Si $k < n-1$, entonces IH_k es de grado menor que n y H_n es ortogonal a IH_k; esto es, $\alpha^k = 0$ para $k < n-1$. También, como IH_n^2 es una función impar

$$\alpha^n = \frac{2}{\sqrt{\pi} n! 2^n} \int_{-\infty}^{\infty} x H_n(x) e^{-x^2} dx = 0.$$

Así,

$$2xH_n(x) = \alpha^{n-1} H_{n-1}(x) + \alpha^{n+1} H_{n+1}(x)$$

e, igualando los coeficientes de x^{n+1}, se tiene que

$$2^{n+1} = 2^{n+1} \alpha^{n+1}.$$

Por lo tanto,

$$1 = \alpha^{n+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(n+1)! 2^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} x H_n(x) H_{n+1}(x) dg(x)$$

o

$$\int_{-\infty}^{\infty} x H_n(x) H_{n+1}(x) dg(x) = \sqrt{\pi}(n+1)! 2^n$$

se reemplaza n por $n-1$ en la última fórmula, se obtiene

$$\alpha^{n-1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(n-1)!2^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} xH_n(x)H_n(x)dg(x)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}(n-1)!2^{n-1}} \sqrt{\pi}n!2^{n-1} = 2n.$$

Así

$$2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x).$$

■

Ahora se introducirá una función generadora para los polinomios de Hermite.

Proposición 8.3. $e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$ *para* $|2xt - t^2| < c$ *para cualquier número* $c > 0$.

Prueba. Sea

$$F(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n(x)}{n!} t^n,$$

donde g_n es un polinomio y la serie es absolutamente y uniformemente convergente si $|2xt - t^2| < c$ para cualquier número $c > 0$. Como

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = (2x - 2t)e^{2xt-t^2} = 2xF(x,t) - 2tF(x,t),$$

se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2xg_n(x)}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2g_n(x)}{n!} t^{n+1}$$

o

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{n+1}(x)}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2xg_n(x)}{n!} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2ng_{n-1}(x)}{n!} t^n = 0.$$

Así,

$$g_1(x) - 2xg_0(x) = 0$$

y

$$g_{n+1}(x) - 2xg_n(x) + 2ng_{n-1}(x) = 0 \text{ para } n \geq 1.$$

Como

$$g_0(x) = F(x,0) = 1 = H_0(x)$$

y

$$g_1(x) = 2xg_0(x) = 2x = H_1(x)$$

y los $g_n's$ la misma relación de recurrencia que los polinomios de Hermite, $g_n = H_n$ para toda n. ∎

El polinomio de Hermite H_n es una solución para la ecuación diferencial lineal de segundo orden, conocida como la **ecuación de Hermite.**

Proposición 8.4. $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$.

Prueba. Si se diferencia H_n y se usa la relación de recurreancia 9.2, se obtiene

$$H_n'(x) = (-1)^n 2xe^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} + (-1)^n e^{x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2}$$

$$= 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

Así,

$$H_n''(x) = (-1)^{n-1}4nxe^{x^2}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2} + (-1)^{n-1}2ne^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

$$= 4nxH_{n-1}(x) - 2nH_n(x) = 2xH_n'(x) - 2nH_n(x).$$

∎

Capítulo 9

Convergencia puntual de las series de Fourier.

Recuerde que la sucesión trigonométrica $(u_k)_{-\infty}^{\infty}$, donde $u_k(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{ikx}$, es una base ortonormal para $\mathscr{L}_2[-\pi,\pi]$ y, así, para cada $f \in \mathscr{L}_2[-\pi,\pi]$

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k u_k \text{ donde } \gamma_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt.$$

Esto significa que la serie de Fourier $\sum \gamma_k u_k$ converge a f en la norma de $\mathscr{L}_2$; esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \right|^2 dx = 0 \text{ donde } c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt.$$

No se puede concluir a partir de esta relación que, para dado $x \in [-\pi,\pi]$, la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ de números complejos converge al número $f(x)$. En esta sección se considerarán condiciones bajo las cuales la series de números $\sum c_k e^{ikx}$ converge al número $f(x)$. Primero note que si $f \in \mathscr{L}[-\pi,\pi]$, entonces $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-itk}dt$ existe y, así, para cada $x \in \mathbb{R}$, la serie de Fourier $\sum c_k e^{ikt}$ está bien definida (pero no necesariamente es convergente). Puesto que cada término de la serie de Fourier tiene periodo 2π, entonces

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{y-\pi}^{y+\pi} f(t)e^{-ikt}dt \text{ para cada } y \in \mathbb{R};$$

esto es, c_k puede ser obtenida mediante la integración sobre cualquier intervalo de longitud 2π. Sea

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Entonces,

$$s_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}dt.$$

La suma parcial s_n puede ser expresada en términos del **Kernel de Dirichlet** D_n definido por

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

De hecho,

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt.$$

De la definición, es claro que D_n es una función par de periodo 2π y que $\displaystyle\int_0^{\pi} D_n = \pi$. También, ya que

$$(e^{ix/2} - e^{-ix/2})D_n(x) = e^{i(\pi+1/2)x} - e^{-i(\pi+1/2)x},$$

se obtiene la expresión

$$D_n(x) = \frac{sen(n+\frac{1}{2})}{sen\frac{1}{2}x}, \quad x \neq 2k\pi.$$

Se hace un cambio de variable $u = t - x$ y se usa que f y D_n ambas tienen periodo 2π y D_n es una función par, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)D_n(-u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+u)D_n(u)du + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+u)D_n(u)du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)D_n(-t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x+t)+f(x-t))D_n(t)dt. \end{aligned}$$

Así, $(s_n(x))$ converge al número $s(x)$ si y sólo si

$$0 = \lim_{n\to\infty}(s_n(x)-s(x)) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t)-2s(x))D_n(t)dt.$$

Con lo cual se ha probado el siguiente resultado.

Proposición 9.1. Si f es integrable en $(-\pi, \pi]$ y tiene periodo 2π, entonces la sucesión $(s_n(x))$ converge al número $s(x)$ si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} g(x,t)D_n(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{g(x,t)}{sen\frac{1}{2}t}sen(n+{}^1\!/_2)tdt = 0$$

donde $g(x,t) = f(x+t)+f(x-t)-2s(x)$.

El resultado básico en la convergencia puntual de series de Fourier es el teorema de Riemann-Lebesgue el cual se probará ahora.

Teorema 9.1 (Riemann-Lebesgue). *Si f es una función integrable, entonces*

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{irt}dt = 0.$$

Prueba. Primero, suponga que f es la función característica de un intervalo abierto

(a,b). Entonces,

$$\left|\int_a^b f(t)e^{irt}dt\right| = \left|\int_a^b e^{irt}dt\right| = \left|\frac{1}{ir}(e^{irb} - e^{ira})\right| \leq \frac{2}{r}$$

y, así,

$$\lim_{r\to\infty} \int f(t)e^{irt}dt = 0.$$

Puesto que el teorema es válido para la función característica en un intervalo abierto, también será válido para cualquier función escalonada. Ahora sea f una función integrable. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ entonces existe una función escalonada g tal que

$$\int |f - g| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\left|\int f(t)e^{irt}dt\right| &\leq \left|\int (f(t) - g(t))e^{irt}dt\right| + \left|\int g(t)e^{irt}dt\right| \\ &\leq \int |f - g|dt + \left|\int g(t)e^{irt}dt\right|.\end{aligned}$$

Por la primera parte de la prueba existe un r_0 tal que para $r \geq r_0$, $|\int g(t)e^{irt}dt| < \varepsilon/2$ y, así,

$$\left|\int f(t)e^{irt}dt\right| < \varepsilon \quad \text{para } r \geq r_0.$$

■

Del Teorema de Riemann-Lebesgue, se sigue que si f es integrable, entonces

$$\lim_{r\to\infty} \int f(t)cos(rt)dt = 0 \text{ y } \lim_{r\to\infty} \int f(t)sen(rt)dt = 0.$$

Se sigue que los coeficientes de la serie de Fourier tienden a cero:

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int f(t)\chi_{(-\pi,\pi)}(t)e^{-ikt}dt = 0.$$

Con la ayuda del teorema de Riemann-Lebesgue, se obtiene la siguiente versión del la Proposición 9.1.

Proposición 9.2. *Si f es integrable en $(-\pi, \pi]$ y tiene periodo 2π, entonces $(s_n(x))$ converge a $s(x)$ si y solo si para algún número $\delta \in (0, \pi)$*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \frac{g(x,t)}{sen\frac{1}{2}t} sen(n+\tfrac{1}{2})tdt = 0.$$

Prueba. Si $\delta \in (0, \pi)$, entonces $(sen\dfrac{1}{2}t)^{-1}$ es continua en $[\delta, \pi]$. así, $g(x,t)(sen\frac{1}{2}t)^{-1}$ es integrable en $([\delta, \pi])$ y el teorema de Riemann-Lebesgue implica que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\delta^\pi \frac{g(x,t)}{sen\frac{1}{2}t} sen(n+\tfrac{1}{2})tdt = 0.$$

Así, por la Proposición 9.1 se sigue que $(s_n(x))$ converge a $s(x)$ si y solo si para algún $\delta \in (0, \pi)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \frac{g(x,t)}{sen\frac{1}{2}t} sen(n+\tfrac{1}{2})tdt = 0.$$

■

Otro importante resultado es el siguiente:

Proposición 9.3. *Si f es integrable en $(-\pi, \pi]$y tiene periodo 2π, entonces $(s_n(x))$ converge a $s(x)$ converge a $s(x)$ si y solo si para algún $\delta \in (0, \pi)$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \frac{g(x,t)}{t} sen(n+\tfrac{1}{2})tdt = 0.$$

Prueba. Usando la regla de L'Hospital o la fórmula de Taylor, se tiene que

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{sen\frac{1}{2}t} - \frac{2}{t} \right) = 0.$$

Así, se hace $h(0) = 0$ y

$$h(t) = \frac{1}{sen\frac{1}{2}t} - \frac{2}{t} \quad \text{para } t \in (0, \pi]$$

entonces h es continua en $[0,\pi]$. Esto implica que todas siguientes integrales de Lebesgue existen para cada $\delta \in (0,\pi)$:

$$2\int_0^\delta \frac{g(x,t)}{t} sen(n+\tfrac{1}{2})tdt$$
$$= \int_0^\delta \frac{g(x,t)}{sen\frac{1}{2}t} sen(n+\tfrac{1}{2})tdt - \textstyle\int_0^\delta h(t)g(x,t)sen(n+\tfrac{1}{2})tdt.$$

También, como hg es integrable en $[0,\pi]$ para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo, entonces el Teorema de Riemann-Lebesgue implica

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta h(t)g(x,t)sen(n+\tfrac{1}{2})tdt = 0.$$

Así, por la Proposición 9.2 se tiene que $(s_n(x))$ converge a $s(x)$ si y solo si para algún $\delta \in (0,\pi)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \frac{g(x,t)}{t} sen(n+\tfrac{1}{2})tdt = 0.$$

■

De la Proposición 9.3 se pueden obtener fácilmente condiciones suficientes, debido a Dini, para la convergencia puntual de series de Fourier.

Proposición 9.4 (Dini). *Si f es integrable en $(-\pi,\pi]$ y tiene periodo 2π, entonces la serie de Fourier de f converge en el punto x a $s(x)$ si, para algún $\delta \in (0,\pi)$, $g(x,t)t^{-1}$ es integrable en $[0,\delta]$*

Prueba. Por el Teorema de Riemann-Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \frac{g(x,t)}{t} sen(n+\tfrac{1}{2})tdt = 0$$

y, así, la Proposición 9.3 implica que $(s_n(x))$ converge a $s(x)$. ■

Ahora se verá un tipo de funciones las cuales satisfarán las condiciones de Dini. Se dice que una función f es **casi diferenciable** en un punto x si $f(x+)$, $f(x-)$, y

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)-f(x+)}{t} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x-t)-f(x-)}{-t}$$

ambos existen; esto es, en x la gráfica de f no tiene tangentes verticales derechas e izquierdas.

Proposición 9.5. *Si f es integrable en $(-\pi, \pi]$ con periodo 2π y es casi diferenciable en x, entonces la serie de Fourier de f converge en x a $s(x)$ donde $s(x) = \dfrac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$.*

Prueba. Sea $g(x,t) = f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)$. Como f es casi diferenciable en x, existe un $\delta \in (0, \pi)$ y un número M tal que para cada $t \in (0, \delta)$

$$\left|\frac{g(x,t)}{t}\right| \leq \left|\frac{f(x+t) - f(x+)}{t}\right| + \left|\frac{f(x-t) - f(x-)}{t}\right| \leq M.$$

Puesto que en $(0, \delta)$ la función medible $g(x,t)t^{-1}$ es acotada por la función integrable M, es integrable. Entonces $g(x,t)t^{-1}$ es integrable en $[0, \delta]$ y por la Proposición 9.4 implica que

$$\text{lím}\, s_n(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$

■

En particular, si la función f de periodo 2π es derivable en x, entonces la serie de Fourier de f converge en x a $f(x)$.
Otro resultado útil en la convergencia puntual de las series de Fourier se debe a Dirichlet.

Teorema 9.2 (Dirichlet). *Si f es una función integrable de periodo 2π la cual es de variación acotada en $[a, b]$, entonces la serie de Fourier de f converge en x a*

$$s(x) = \frac{1}{2}(f(x+) - f(x-))$$

para cada $x \in\ (a, b)$.

Prueba. Tome $x \in (a, b)$ y considere un número positivo $\delta <\min\{x - a, b - x, \pi\}$. Entonces

$$g(x,t) = f(x+t) + f(x-t) - f(x+) - f(x-)$$

es de variación acotada en $[0, \delta]$ como función de t. Por lo tanto, para x fijo, g es diferencia de dos funciones monótonas crecientes f_1 y f_2 en $[0, \delta]$:

$$g(x, t) = f_1(t) - f_2(t), \quad t \in [0, \delta].$$

Como

$$g(x, 0+) = \lim_{t \to 0+} f(x + t) - \lim_{t \to 0-} f(x + t) - f(x+) - f(x-)$$
$$f(x+) + f(x-) - f(x+) - f(x-) = 0$$

Así,

$$0 = g(x, 0+) = f_1(0+) - f_2(0+)$$

se hace $h_i(t) = f_i(t) - f_i(0+)$ para $i = 1, 2$, entonces $h_i(0+) = 0$, h_i es no decreciente en $[0, \delta]$ y no negativa en $(0, \delta]$, y

$$g(x, t) = h_1(t) - h_2(t), \quad t \in [0, \delta].$$

De la Proposición 9.3 se sabe que $(s_n(x))$ converge a $s(x)$ si para algún $\delta \in (0, \pi)$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\delta \frac{g(x, t)}{t} sen(n + \tfrac{1}{2}) t dt = 0.$$

Así, $\lim s_n(x) = s(x)$ si

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\delta \frac{h_i(t)}{t} sen(n + \tfrac{1}{2}) t dt = 0 \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Tome $\varepsilon > 0$. Como $h_i(0+) = 0$ existe un $\eta \in (0, \delta)$ tal que

$$h_i(t) < \varepsilon \quad \text{para } t \in (0, \eta).$$

Se usa el Segundo Teorema del Valor Medio para Integrales (A.7) y por la Afirmación

8, entonces se obtiene: para algún $c \in [0, \eta]$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\eta \frac{h_i(t)}{t} sen(n+\tfrac{1}{2})tdt = \right| = \left| h_i(\eta-) \int_0^\eta \frac{sen(n+\frac{1}{2})t}{t} dt = \right| \\
< \varepsilon \left| \int_{(n+\frac{1}{2})c}^{(n+\frac{1}{2})\eta} \frac{\operatorname{sen} u}{u} du \right| \\
\leq 4\varepsilon \quad \text{para toda } n.
\end{aligned}$$

Por el Teorema de Riemann-Lebesgue, para toda n suficientemente grande

$$\left| \int_\eta^\delta \frac{h_i(t)}{t} sen(n+\tfrac{1}{2})tdt \right| < \varepsilon.$$

Así, para toda n suficientemente grande,

$$\left| \int_0^\delta \frac{h_i(t)}{t} sen(n+\tfrac{1}{2})tdt \right| < 5\varepsilon.$$

■

Capítulo 10

Convergencia puntual para las series de Fourier-Legendre.

Sea $s_n(x)$ la suma parcial de la serie para una función $f(x)$ cualquiera de términos de grado n-ésimo:

$$s_n(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + \cdots + a_nP_n(x) \tag{10.1}$$

Recordando que los coeficientes de la serie de Legendre están dados por:

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx \tag{10.2}$$

si ahora en 10.2 se escribe con t en lugar de x como variable de integración, las fórmulas para los coeficientes pueden ser sustituidas de manera explicita en 10.1:

$$s_n(x) = \frac{2(0)+1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)P_0(t)dt \cdot P_0(x) + \frac{2(1)+1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)P_1(t)dt \cdot P_1(x) + \cdots + \frac{2(n)+1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)P_n(t)dt \cdot P_n(x)$$

reagrupando términos

$$s_n(x) = \int_{-1}^{1} f(t)\left[\frac{2(0)+1}{2}P_0(t)P_0(x)dt + \frac{2(1)+1}{2}P_1(t)P_1(x)dt + \cdots + \frac{2(n)+1}{2}P_n(t)P_n(x)dt\right]$$

así se obtiene

$$s_n(x) = \int_{-1}^{1} f(t)K_n(x,t)dt \tag{10.3}$$

con

$$K_n(x,t) = K_n(t,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2}P_k(t)P_k(x)$$

De la fórmula de recurrencia del Teorema 7.2 , reemplazando n por k, transposición de términos, y multiplicando por $P_k(t)$,

$$\begin{aligned}(2k+1)xP_k(t)P_k(x)& \\ &= (k+1)P_k(t)P_{k+1}(x) + kP_k(t)P_{k-1}(x).\end{aligned} \tag{10.4}$$

Esto es válido, en particular, para $k = 0$, si $P_{-1}(x)$ es arbitrariamente definido de tal manera que $0 \cdot P_{-1} = 0$; por definición sea $P_{-1}(x) = 0$. Mediante la sustracción de las correspondientes identidades con t y x intercambiadas en la fórmula 10.4, se tiene que:

$$\begin{aligned}(2k+1)(t-x)P_k(t)P_k(x)& \\ &= (k+1)[P_{k+1}(t)P_k(x) - P_k(t)P_{k+1}(x)] \\ &- k[P_k(t)P_{k-1}(x) - P_{k-1}(t)P_k(x)].\end{aligned}$$

Sumando para los valores de $k = 1, \ldots, n$ resulta

$$(t-x)\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(t)P_k(x)$$
$$= (n+1)[P_{n+1}(t)P_n(x) - P_n(t)P_{n+1}(x)],$$

$$K_n(x,t) = \frac{n+1}{2}\frac{P_{n+1}(t)P_n(x) - P_n(t)P_{n+1}(x)}{t-x} \tag{10.5}$$

La ecuación 10.5 es conocida como la *identidad de Christoffel*. Sustituyendo en la ecuación 10.3:

$$s_n(x) = \frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\frac{P_{n+1}(t)P_n(x) - P_n(t)P_{n+1}(x)}{t-x}dt. \tag{10.6}$$

Si $f(x)$ es en particular un polinomio $\pi_n(x)$ de grado n o menor, $s_n(x)$ es idéntico a $\pi_n(x)$ y 10.6 es válida con $s_n(x)$ reemplazado por $\pi_n(x)$ y $f(t)$ reemplazado por $\pi_n(t)$. En particular es válida para $f(x) \equiv 1$, $s_n(x) \equiv 1$ para toda n y

$$\frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(t)P_n(x) - P_n(t)P_{n+1}(x)}{t-x}dt = 1. \tag{10.7}$$

10.1. Convergencia en un punto de continuidad interior al intervalo.

Sea $f(x) \in \mathscr{L}_2[-1,1]$, y sea $s_n(x)$ definida como en 10.1 la suma parcial de su desarrollo en series de Legendre. Entonces

$$\int_{-1}^{1} f(x)s_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1}a_k^2 = \int_{-1}^{1}[s_n(x)]^2dx,$$
$$0 \leq \int_{-1}^{1}[f(x)-s_n(x)]^2dx = \int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1}a_k^2;$$

el miembro derecho de la última ecuación es no negativo, la suma de a la derecha es acotada conforme n crece, la correspondiente serie infinita es convergente, y

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{2k+1}\right)^{1/2} a_k = 0,$$
$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{2k+1}{2}\right)^{1/2} \int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx = 0.$$

Y en diferente notación, si $\phi(t)$ y $[\phi(t)]^2$ son integrables sobre $(-1,1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} \int_{-1}^{1} \phi(t)P_n(t)dt = 0.$$

Una relación equivalente puede ser escrita de manera más simple con $[(2n+1)/2]^{1/2} = (n+\frac{1}{2})^{1/2}$ reemplazada por $n^{1/2}$, como $\lim_{n\to\infty}(n+\frac{1}{2})/n = 1$.

Lema 10.1. *Para un valor fijo x en el interior del intervalo $[-1,1]$, se tiene que*

$$\begin{aligned} s_n(x) - f(x) = & \frac{n+1}{2}P_n(x)\int_{-1}^{1}\phi(t)P_{n+1}(t)dt \\ & - \frac{n+1}{2}P_{n+1}(x)\int_{-1}^{1}\phi(t)P_n(t)dt. \end{aligned}$$

con $\phi(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$.

Prueba. Tome x en $(-1,1)$, multiplicando 10.7 por $f(x)$ resulta:

$$f(x)=\frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\frac{P_{n+1}(t)P_n(x)-P_n(t)P_{n+1}(x)}{t-x}dt.$$

Si esto se sustrae de la ecuación 10.6, y definiendo $\phi(t)$ como sigue:

$$\phi(t)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

entonces

$$\begin{aligned} s_n(x)-f(x)=&\frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\frac{P_{n+1}(t)P_n(x)-P_n(t)P_{n+1}(x)}{t-x}dt\\ &-\frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\frac{P_{n+1}(t)P_n(x)-P_n(t)P_{n+1}(x)}{t-x}dt \end{aligned}$$

de donde

$$s_n(x)-f(x)=\frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{f(t)-f(x)}{t-x}}_{\phi(t)}\Big(P_{n+1}(t)P_n(x)-P_n(t)P_{n+1}(x)\Big)dt$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned} s_n(x)-f(x)=&\frac{n+1}{2}P_n(x)\int_{-1}^{1}\phi(t)P_{n+1}(t)dt\\ &-\frac{n+1}{2}P_{n+1}(x)\int_{-1}^{1}\phi(t)P_n(t)dt. \end{aligned} \tag{10.8}$$

■

El siguiente Teorema da las condiciones necesarias para la convergencia de la serie de Legendre en el punto $t=x$ al valor fijo $f(x)$.

Teorema 10.1. *Sea f continua en el intervalo $[-1,1]$ excepto para una cantidad finita de saltos finitos. Si la derivada de $f(t)$ existe en el punto $t=x$ o, de manera más general, derivada izquierda y derivada derecha en el punto $t=x$, si son iguales* *o distintas, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x).$$

Prueba. El cociente $\phi(t)$ puede ser escrito de la siguiente forma

$$\phi(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

considerando a x fijo en $[-1,1]$.
La condición que $[f(x+t) - f(x)]/t$ se aproxime a un límite para $t = 0$ es la misma condición que $f(t)$ tenga derivada en el punto $t = x$. Si la derivada existe, i. e., si el cociente anterior se aproxima al mismo límite cuando t tiende a 0 desde cualquier lado $\phi(t)$ es continua en $t = 0$, siendo definida ahí por su valor límite. Si los límites por derecha o por izquierda son distintos, como en un punto donde la gráfica de $f(t)$ tiene una esquina, $\phi(t)$ tiene un salto finito en $t = 0$. En cualquier caso, si $f(t)$ es continua excepto para un número finito de saltos finitos, lo mismo será cierto para $\phi(t)$ en en el intervalo $[-1,1]$. Luego, de acuerdo a la acotación para $|P_n(x)|$, éste no excede una constante múltiplo de $1/n^{\frac{1}{2}}$(ver Apéndice C), por lo que el producto de la integral de la derecha en Lema 10.1 se aproxima a cero, cuando $n \to \infty$, así

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}[s_n(x) - f(x)] = \lim_{n\to\infty} \Bigg(& \frac{n+1}{2} P_n(x) \int_{-1}^{1} \phi(t) P_{n+1}(t) dt \\ & - \frac{n+1}{2} P_{n+1}(x) \int_{-1}^{1} \phi(t) P_n(t) dt. \Bigg) = 0.\end{aligned} \tag{10.9}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\tfrac{n+1}{2})^{1/2} P_n(x) \lim_{n\to\infty} (\tfrac{n+1}{2})^{1/2} \int_{-1}^{1} \phi(t) P_{n+1}(t) dt$$

$$- \lim_{n\to\infty} (\tfrac{n+1}{2})^{1/2} P_{n+1}(x) \lim_{n\to\infty} (\tfrac{n+1}{2})^{1/2} \int_{-1}^{1} \phi(t) P_n(t) dt = 0$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x).$$

■

10.2. Convergencia en un punto de discontinuidad en el interior del intervalo.

Teorema 10.2. *Suponga que $f(t)$ es una función continua en $[-1, 1]$ excepto para una cantidad finita de saltos finitos, y para la cual en $t = x_0$ se aproxima a los límites laterales*

$$\lim_{t \to x_0+} f(t) = f(x_0+), \ \ y \ \lim_{t \to x_0-} f(t) = f(x_0-).$$

Suponga que existe la derivada por derecha y por izquierda de x_0, entonces su serie de Legendre converge en $t = x_0$ al valor

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)].$$

Prueba. Sea $c \in (-1, 1)$ y considere la función discontinua $f(x)$ definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x < c \\ 0 & \text{si } c < x \leq 1 \end{cases}$$

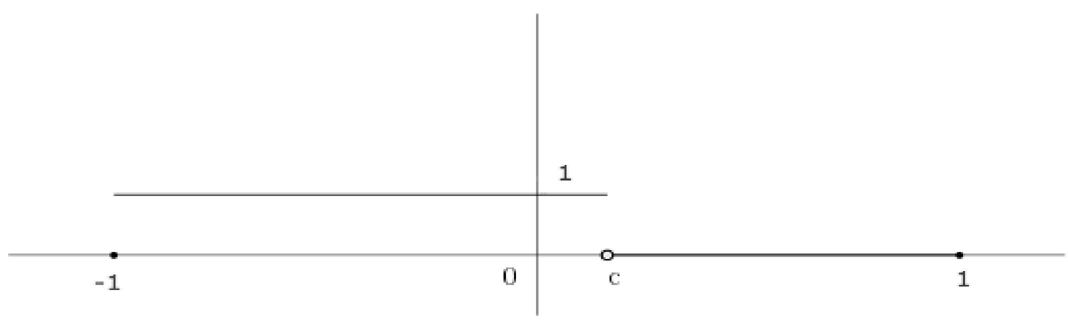

Figura 10.1: Gráfica de $f(x)$

el valor asignado para $x = c$ no es importante. En el capítulo anterior se vio que la serie de Legendre para $f(x)$ converge a $f(x)$ en cualquier punto interior del intervalo distinto de $x = c$. El tema en cuestión es la convergencia en el punto de discontinuidad.

El coeficiente general de la serie es

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{c} P_k(x)dx.$$

Por 7.1

$$(2k+1)\int_{-1}^{c} P_k(x)dx = P_{k+1}(x) - P_{k-1}(x)$$

para $k \geq 1$, excepto para una constante de integración, y como $P_{k+1}(-1) = P_{k-1}(-1) = (-1)^{k-1}$,

$$a_k = \frac{1}{2}[P_{k+1}(x) - P_{k-1}(x)]_{-1}^{c} = \frac{1}{2}[P_{k+1}(c) - P_{k-1}(c)].$$

Para $k = 0$, mediante integración explícita se tiene que

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{c} P_0(x)dx = \frac{1}{2}(c+1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_1(c).$$

La suma parcial de la serie para $x = c$ es

$$s_n(c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_1(c) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[P_{k+1}(c) - P_{k-1}(c)]P_k(c)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_{n+1}(c)P_n(c).$$

Ahora, en virtud de un resultado de acotación para $|P_n(x)|$(C.4), $|P_n(x)|$ está acotado por una constante múltiplo de $\frac{1}{n^{1/2}}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(c) = \lim\limits_{n\to\infty} P_{n+1}(c) = 0$, y consecuentemente

$$\lim_{n\to\infty} s_n(c) = \tfrac{1}{2}$$

la serie de Legendre para esta función en particular, como la serie de Fourier que tiene una discontinuidad similar, converge al promedio de los límites límites laterales $f(x+)$ y $f(x-)$.

El resultado obtenido proporciona los medios para su propia generalización. Aplicando 10.6 al caso en cuestión

$$s_n(c) = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{c} \frac{P_{n+1}(t)P_n(c) - P_n(t)P_{n+1}(c)}{t-c} dt, \tag{10.10}$$

y esto se aproxima a $\frac{1}{2}$ cuando n tiende a infinito. Es decir, con una x en lugar de c como notación para un número arbitrario en el interior del intervalo $(-1, 1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{x} \frac{P_{n+1}(t)P_n(x) - P_n(t)P_{n+1}(x)}{t-x} dt = \frac{1}{2}. \tag{10.11}$$

Además, mediante la diferencia de 10.11 menos 10.7

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} \int_{x}^{1} \frac{P_{n+1}(t)P_n(x) - P_n(t)P_{n+1}(x)}{t-x} dt = \frac{1}{2}. \tag{10.12}$$

Ahora, tome $x_0 \in [-1, 1]$ un punto de discontinuidad de f tal que se aproxima a los distintos límites $f(x_0+)$, $f(x_0-)$ cuando t se aproxima a x_0 por la derecha y por la izquierda. Considere las siguientes funciones $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ definidas de la siguiente manera:

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(x_0+)}{t - x_0} & \text{si } t \in (x_0, 1) \\ 0 & \text{si } t \in (-1, x_0) \end{cases}$$

y

$$\phi_2(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(x_0-)}{t - x_0} & \text{si } t \in (-1, x_0) \\ 0 & \text{si } t \in (x_0, 1) \end{cases}$$

Los límites de $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ existen cuando t se aproxima a x_0 por definición de derivada. Luego $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ son continuas en el intervalo $(-1, 1)$ excepto para una cantidad finita de saltos finitos. Considere $s_n(x_0)$ como en 10.10 expresada como la suma de dos partes $s_n^1(x_0)$ y $s_n^2(x_0)$ integrando de x a 1 para la primera y de -1 a x

para la segunda, esto es:

$$s_n^1(x_0) = \frac{n+1}{2} \int_{x_0}^{1} f(t) \frac{P_{n+1}(t)P_n(x_0) - P_n(t)P_{n+1}(x_0)}{t - x_0} dt,$$

$$s_n^2(x_0) = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{x_0} f(t) \frac{P_{n+1}(t)P_n(x_0) - P_n(t)P_{n+1}(x_0)}{t - x_0} dt.$$

Si se multiplica (10.12) por $f(x_0+)$ y (10.11) por $f(x_0-)$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} \int_{x_0}^{1} f(x_0+) \frac{P_{n+1}(t)P_n(x_0) - P_n(t)P_{n+1}(x_0)}{t - x_0} dt = \frac{1}{2} f(x_0+)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{x_0} f(x_0-) \frac{P_{n+1}(t)P_n(x_0) - P_n(t)P_{n+1}(x_0)}{t - x_0} dt = \frac{1}{2} f(x_0-).$$

Adaptando el razonamiento de la sección anterior al caso en cuestión, se observa que

$$s_n(x_0) - f(x_0) = [s_n^1(x_0) + s_n^2(x_0)] - f(x_0)$$

$$= \left(\frac{n+1}{2} \int_{x_0}^{1} f(t) \frac{P_{n+1}(t)P_n(x_0) - P_n(t)P_{n+1}(x_0)}{t - x_0} dt \right.$$
$$\left. - \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{x_0} f(t) \frac{P_{n+1}(t)P_n(x_0) - P_n(t)P_{n+1}(x_0)}{t - x_0} dt \right) - f(x_0)$$

En virtud de 10.7, $f(x_0)$ se puede escribir como

$$f(x_0) = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x_0) \frac{P_{n+1}(t)P_n(x_0) - P_n(t)P_{n+1}(x_0)}{t - x_0} dt$$

Dividiendo el intervalo de integración de -1 a x_0 y de x_0 a 1, se obtiene

$$\frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x_0)\frac{P_{n+1}(t)P_n(x_0)-P_n(t)P_{n+1}(x_0)}{t-x_0} = \frac{n+1}{2}\Bigg(\underbrace{\int_{-1}^{x_0} f(x_0-)\frac{P_{n+1}(t)P_n(x_0)-P_n(t)P_{n+1}(x_0)}{t-x_0}dt}_{\frac{1}{2}f(x_0-)}$$

$$+\underbrace{\int_{x_0}^{1} f(x_0+)\frac{P_{n+1}(t)P_n(x_0)-P_n(t)P_{n+1}(x_0)}{t-x_0}dt}_{\frac{1}{2}f(x_0+)}\Bigg)$$

Sustrayendo a $s_n^1(x_0)$ su integral correspondiente:

$$\frac{n+1}{2}\int_{x_0}^{1} f(t)\frac{P_{n+1}(t)P_n(x_0)-P_n(t)P_{n+1}(x_0)}{t-x_0}dt-\underbrace{\frac{n+1}{2}\int_{x_0}^{1} f(x_0+)\frac{P_{n+1}(t)P_n(x_0)-P_n(t)P_{n+1}(x_0)}{t-x_0}dt}_{\frac{1}{2}f(x_0+)}$$

$$=\frac{n+1}{2}\int_{x_0}^{1}\frac{f(t)-f(x_0+)}{t-x_0}P_{n+1}t-x_0(t)P_n(x_0)-P_n(t)P_{n+1}(x_0)dt$$

$$=\frac{n+1}{2}\int_{x_0}^{1}\phi_1(t)\Big(P_{n+1}(t)P_n(x_0)-P_n(t)P_{n+1}(x_0)\Big)dt$$

de donde se llega a que

$$s_n^1(x_0)-\tfrac{1}{2}f(x_0+)=\frac{n+1}{2}P_n(x_0)\int_{x_0}^{1}\phi_1(t)P_{n+1}(t)dt$$

$$-\frac{n+1}{2}P_{n+1}(x_0)\int_{x_0}^{1}\phi_1(t)P_n(t)dt.$$

Luego, en virtud de C.4, cada $|P_n(x_0)|$ no excede una constante múltiplo de $1/n^{\frac{1}{2}}$, así que

$$\lim_{n\to\infty}[s_n^1(x_0)-\tfrac{1}{2}f(x_0+)]=0$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n^1(x_0)=\tfrac{1}{2}f(x_0+).$$

Procediendo de manera análoga para $s_n^2(x_0)$ y $\frac{1}{2}f(x_0-)$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} s_n^2(x_0) = \tfrac{1}{2}f(x_0-).$$

Por lo que se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)].$$

$\blacksquare$

Apéndice A

Teoremas.

1.

Teorema A.1 (**Teorema de Pitágoras**). *Sea X un espacio con producto interno. Si x y y son ortogonales en X, entonces*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2.

Lema A.1. *Si f es una función escalonada en $[a, b]$, entonces existe una sucesión (g_n) de funciones continuas tales que*

$$\lim \|f - g_n\| = 0$$

con $\| \cdot \|$ la norma del supremo.

3.

Teorema A.2 (**Levi**). *Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones en $\mathscr{L}$ tal que $(\int \sum_{k=1}^{m} |f_k|)$ está acotada. Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge para casi todo x y si $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ para casi todo x, entonces $f \in \mathscr{L}$ y*

$$\int f = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k.$$

4.

Teorema A.3. *Si f es una función real-valuada en $\mathscr{L}_p[a,b]$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una función escalonada h y una función continua g tales que*

$$\|f-h\| < \epsilon \text{ y } \|f-g\| < \varepsilon.$$

5.

Teorema A.4 (Weierstrass). *Si la función compleja-valuada f es continua en $\mathbb{R}$ y tiene periodo 2π, entonces correspondiente a cada $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico T, $T(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$, tal que*

$$|f(t) - T(t)| \leq \varepsilon \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

6.

Teorema A.5. *El conjunto de funciones continuas $\mathscr{C}[a,b]$ es denso en $\mathscr{L}_2[a,b]$.*

7.

Teorema A.6 (Primer Teorema del Valor Medio para Integrales). *Suponga que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua. Entonces existe c en (a,b) tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Como el valor medio de f en $[a,b]$ está definido como

$$\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)dx,$$

Se puede interpretar el resultado como que f alcanza su valor medio en algún c en (a,b).
En general, si $f : [a,b] :\to \mathbb{R}$ es continua y g es una función integrable que no

cambia de signo en $[a, b]$, *entonces existe un* c *en* (a, b) *tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

8.

Teorema A.7 (**Segundo Teorema del Valor Medio para Integrales**). *Si* f *es Lebesgue integrable en* $[a, b]$ *y* g *es no decreciente en* $[a, b]$, *entonces existe un* $c \in [a, b]$ *tal que*

$$\int_a^b gf = g(a)\int_a^c f + g(b)\int_c^b f.$$

9.
- Si $1 \leq a < b$, entonces
$$\left|\int_a^b \frac{sen(x)}{x}\right| \leq 3$$
- $$\left|\int_0^1 \frac{sen(x)}{x}\right| \leq 1$$
- Si $0 \leq a < b$, entonces
$$\left|\int_a^b \frac{sen(x)}{x}\right| \leq 4$$

Apéndice B

Representación integral de $P_n(x)$.

Una expresión para $P_n(x)$ es la fórmula integral

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[x + (x^2-1)^{1/2}cos\phi]^n d\phi \tag{B.1}$$

Para la demostración, se denotará el miembro derecho de la ecuación anterior como $Y_n(x)$. Es necesario probar que $Y_n(x)$ es idéntico a $P_n(x)$. Mediante la integración explícita de $Y_0(x)$ se tiene que:

$$Y_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[x + (x^2-1)^{1/2}cos(\phi)]^0 d\phi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\phi = \frac{1}{\pi}\phi|_0^{\pi} = 1 = P_0(x).$$

Ahora, para $Y_1(x)$:

$$\begin{aligned} Y_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[x + (x^2-1)^{1/2}cos(\phi)]d\phi &= \frac{1}{\pi}\left(x\int_0^{\pi} d\phi + (x^2-1)^{1/2}\int_0^{\pi} cos\phi d\phi\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(x\phi|_0^{\pi} + (x^2-1)^{1/2} sen\phi|_0^{\pi}\right) \\ &= x = P_1(x). \end{aligned}$$

Se mostrará que $Y_n(x)$ satisface la relación de recurrencia como $P_n(x)$, y entonces se sigue que $Y_2(x) = P_2(x)$, y mediante el uso repetitivo de esta relación se tendrá que $Y_n(x) = P_n(x)$ para un n arbitrario.

Si el integrando en $B.1$ se expande por el teorema del binomio, cada potencia impar de $(x^2-1)^{1/2}$ es multiplicado por una potencia impar de $cos\phi$, la integral de 0 a π la cual se hace cero: por la sustitución $\theta = \pi - \phi$, $cos\theta = -cos\theta$,

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{\pi} cos^{2k+1}\phi d\phi &= -(-1)^{2k+1}\int_{\pi/2}^{0} cos^{2k+1}\theta d\theta \\ &= -\int_{0}^{\pi/2} cos^{2k+1}\theta d\theta,\end{aligned}$$

la integral sobre la segunda mitad del intervalo es el negativo de la primer parte del intervalo. Y cada potencia par de $(x^2-1)^{1/2}$ es multiplicado por una potencia par de $cos\phi$, la integral que contribuye de manera positiva al coeficiente de x^n, por lo que este coeficiente no puede anularse.
Sea $x + (x^2-1)^{1/2}cos\phi = Z$. Entonces

$$Y_{n-1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} Z^{n-1} d\phi,$$

$$Y_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [x + (x^2-1)^{1/2}cos\phi] Z^{n-1} d\phi,$$

$$Y_{n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [x + (x^2-1)^{1/2}cos\phi]^2 Z^{n-1} d\phi,$$

y

$$\begin{aligned}&(n+1)Y_{n+1}(x) - (2n+1)xY_n(x) + nY_{n-1}(x) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} W Z^{n-1} d\phi, \end{aligned} \tag{B.2}$$

donde

$$\begin{aligned}
W &= (n+1)[x^2 + 2x(x^2-1)^{1/2}cos\phi + (x^2-1)cos^2\phi] \\
&\quad - (2n+1)x[x + (x^2-1)^{1/2}cos\phi] + n \\
&= -nx^2 + x(x^2-1)^{1/"}cos\phi + (n+1)(x^2-1)cos^2\phi + n \\
&= -n(x^2-1)(1-cos^2\phi) + x(x^2-1)^{1/2}cos\phi \\
&\quad + (x^2-1)cos^2\phi \\
&= -n(x^2-1)sen^2\phi + (x^2-1)^{1/2}cos\phi[x + (x^2-1)^{1/2}cos\phi].
\end{aligned}$$

Sea $U = -n(x^2-1)sen^2\phi$ y el resto del último término se denotará por V, tal que $W = U + V$. Con Z^n y $cos\phi d\phi$ como factores para la integración por partes,

$$\int_0^\pi VZ^{n-1}d\phi = (x^2-1)^{1/2}\int_0^\pi Z^n cos\phi d\phi.$$

$$\begin{aligned}
&= (x^2-1)^{1/2}\Bigg([Z^n sen\phi]_0^\pi \\
&+ \int_0^\pi sen\phi\ nZ^{n-1}(x^2-1)^{1/2}sen\phi\ d\phi\Bigg) \\
&= n(x^2-1)\int_0^\pi Z^{n-1}sen^2\phi\ d\phi \\
&= -\int_0^\pi UZ^{n-1}d\phi.
\end{aligned}$$

Consecuentemente el miembro derecho de la ecuación $B.2$ desaparece, y esto significa que la relación de recurrencia de la Proposición **??** se satisface con $Y_n(x)$ en lugar de $P_n(x)$.

Apéndice C

Cotas para $P_n(x)$.

Para $x \in (-1, 1)$ sea $B.1$ escrita de la forma

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[x + i(1-x^2)^{1/2}cos\phi]^n d\phi. \tag{C.1}$$

Se vio en la sección anterior que las potencias impares de la raíz cuadrada, y así, en la presente representación, potencias impares de i, son multiplicadas por factores que se reducen a zero cuando la integral se calcula. Es decir, si el integrando es escrito en términos de sus partes real e imaginarias en la forma $F_1 + iF_2$,

$$\int_0^{\pi} F_2 d\phi = 0, \qquad P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F_1 d\phi.$$

Como $|F_1 + iF_2| = (F_1^2 F_2^2)^{1/2}$, y claramente $|F_1| \leq (F_1^2 + F_2^2)^{1/2}$,

$$\begin{aligned} |P_n(x)| &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |F_1 + iF_2| d\phi \\ &= \frac{1}{\pi}|x + i(1-x^2)^{1/2}cos\phi|^n d\phi. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Incluso sin el hecho de que $\int F_2 d\phi = 0$ se seguiría que de una propiedad fundamental de las integrales de funciones complejas que $|\int F_1 + iF_2| \leq \int |F_1 + iF_2| d\phi$.

Para $x \in (-1, 1)$,

$$\begin{aligned} |x + i(1-x^2)^{1/2}cos\phi| &= [x^2 + (1-x^2)cos^2\phi]^{1/2} \\ &= (cos^2\phi + x^2 sen^2\phi)^{1/2} \\ &< (cos^2\phi + sen^2\phi)^{1/2} = 1 \end{aligned}$$

si $\phi \in (0, \pi)$; el integrando en C.2 es menor que 1 excepto en las orillas del intervalo de integración. Así, $|P_n(x)| < 1$ *en todo el intervalo de integración* $(-1, 1)$.
Una desigualdad menos obvia para $|P_n(x)|$ sobre el mismo rango será necesaria para la convergencia. Como $cos^2\phi + x^2 sen^2\phi = 1 - (1-x^2)sen^2\phi$, se tiene que

$$|P_n(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [1 - (1-x^2)sen^2\phi]^{n/2} d\phi;$$

y como $sen(\pi - \phi) = sen\phi$, la integral de 0 a π es la misma que dos veces la integral de 0 a $\pi/2$. En el último intervalo, sabemos que $x/sen\ x$ es creciente en todo el intervalo $(0, \pi/2)$, y

$$\frac{x}{sen\ x} \leq \frac{\pi/2}{sen(\pi/2)} = \frac{\pi}{2}, \quad x \leq \frac{\pi}{2} sen\ x$$

entonces

$$\frac{2}{\pi}\phi \leq sen\phi$$

Si $z = (2/\pi)(1-x^2)^{1/2}$,

$$1 - (1-x^2)sen^2\phi \leq 1 - (2\pi)^2(1-x^2)\phi^2 = 1 - z^2\phi^2.$$

En virtud del teorema extendido del valor medio, si y es cualquier número real,

$$e^{-y} = 1 - y + \frac{1}{2}y^2 e^{-\theta y}$$

con $\theta \in (0, 1)$. Como la exponencial es positiva para todos los valores reales de la variable, $e^{-\theta y}$, y e$^{-y} \geq 1 - y$. Esto es, $1 - y \leq e^{-y}$, y en particular $1 - z^2\phi^2 \leq e^{-z^2\phi^2}$.

Consecuentemente

$$|P_n(x)| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} e^{-nz^2\phi^2/2}d\phi.$$

Con $t = n^{1/2}z\phi$ como nueva variable de integración, y con $n^{1/2}z\pi/2 = A$,

$$\int_0^{\pi/2} e^{-nz^2\phi^2/2}d\phi = \frac{1}{n^{1/2}z}\int_0^{A} e^{-t^2/2}dt < \frac{1}{n^{1/2}z}\int_0^{\infty} e^{-t^2/2}dt. \tag{C.3}$$

Con respecto a la última integral todo lo que es esencial para los presentes propósitos es que es un número independiente de n y x. Se sigue que existe un número independiente C de n y x tal que

$$|P_n(x)| < \frac{C}{n^{1/2}(1-x^2)^{1/2}} \tag{C.4}$$

para $x \in (-1,1)$. Para un valor fijo de x en el interior de $(-1,1)$. $|P_n(x)|$ no excede una constante múltiplo de $1/n^{1/2}$.
Con el valor $(\pi/2)^{1/2}$ para la última integral en $C.3$, la desigualdad $C.4$ se convierte en

$$|P_n(x)| < \frac{(\pi/2)^{1/2}}{n^{1/2}(1-x^2)^{1/2}}. \tag{C.5}$$

Bibliografía

[1] Norman B Haaser y Joseph A Sullivan. *Real analysis*. Courier Corporation, 1991.

[2] Dunham Jackson. *Fourier series and orthogonal polynomials*. Courier Corporation, 2012.

[3] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*, tomo 81. wiley New York, 1989.

[4] Carlos S Kubrusly. *Elements of operator theory*. Springer, 2001.