



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

**APROXIMACIÓN NUMÉRICA Y
GRÁFICA PARA
ENTENDER LA INTEGRAL**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Presenta:

Carlos Humberto Ruiz Pineda

Asesor: Dr. José Carlos Cortés Zavala

Morelia, Michoacán

Mayo de 2017

Agradecimientos

Agradezco a mis padres Alfonso y Elvia, hermanos Ponchín y JuanPi y toda mi familia (es demasiada para nombrar a cada uno) por apoyarme en todo momento cuando tomé decisiones importantes que me dieron la oportunidad de crecer como persona en muchos aspectos de mi vida personal y académica. Y sobre todo por mostrarme que la familia es lo más importante que un ser humano puede tener.

A mi muy selecto grupo de amigos, ustedes saben quiénes son.

A mi asesor de tesis, el Dr. José Carlos Cortés Zavala por haber compartido conmigo sus conocimientos, por su apoyo académico y dedicación.

A mis asesores sinodales, por tomarse el tiempo de revisar mi tesis y por sus correcciones y críticas constructivas.

A mis profesores, por mostrarme que las matemáticas y la física son bellas; en particular al M.C. Gabriel Arroyo, por mostrarme que la física se aprende imaginando; a la Dra. Lourdes Guerrero por enseñarme a amar las demostraciones matemáticas y por supuesto a la Dra. Malú, por sus enseñanzas y sabios consejos que a lo largo de la carrera me permitieron tomar decisiones académicas importantes y, sobre todo, porque me mostró que un matemático debe relajarse de vez en cuando.

Tabla de Contenido

Lista De Tablas	i
Lista De Figuras	iii
Resumen.....	v
Abstract	vi
Capítulo 1 Introducción	1
1.1 Problema de Investigación	4
1.2 Preguntas de Investigación	4
1.3 Objetivos	5
Capítulo 2 Marco Teórico.....	6
2.1 Registros de Representación Semiótica	6
2.2 Uso de Geogebra como Medio de Enseñanza.....	9
2.3 Ideas Conceptuales del Cálculo a través de los tiempos.....	11
Capítulo 3 Exposición de la Propuesta	13
3.1 Caso I: Acumulaciones de una Función Polinomial $f(x) = 6$	13
3.1.1 Apartado I: Incremento $\Delta x = 1$	13
3.1.2 Apartado II: Incremento $\Delta x = 0.5$	15
3.1.3 Apartado III: Incremento $\Delta x = 0.1$	17
Tabla 22. Comparación de la 1ª, 2ª y 3ª acumulaciones e integrales respectivas de la función $f(x) = 6$ para diferentes incrementos	20
Observaciones 1:	21
Observaciones 2:	23
3.2 Caso II: Acumulaciones de una Función Polinomial $f(x)=3$	25
3.2.1 Apartado I. Incremento $\Delta x = 1$	25
3.2.2 Apartado II. Incremento $\Delta x = 0.1$	31
Tabla 29. Comparación de la 1ª, 2ª y 3ª acumulaciones e integrales respectivas de la función $f(x) = 3$ para diferentes incrementos	37
Observaciones:.....	38
Análisis de las Acumulaciones Vs Sumas de Riemann para $f(x) = 3$	41
3.3 Caso III: Acumulaciones de una Función no Polinomial	43
3.3.1 Apartado I. Incremento $\Delta x = 1$	43
3.3.2 Apartado II. Incremento $\Delta x = 0.1$	50
3.4 Caso IV: Acumulaciones de una Función Exponencial.....	63
3.5 Exposición de la Propuesta a los Estudiantes	69
Capítulo 4 Experimentación y Análisis de los Resultados	70
4.1 Hojas de Prácticas	71
4.1.1 Hoja de Práctica #1	71
4.1.2 Hoja de Práctica #2	72
4.1.3 Hoja de Práctica #3	72
4.2 Hojas de Preguntas.....	73
Al iniciar y durante las prácticas:.....	73
4.2.1 ¿Qué pasa si cambiamos el valor inicial en cada acumulación?	73
4.2.2 ¿Por qué utilizamos sumas y no restas para calcular acumulaciones?.....	73

4.2.3 Si el incremento se hace más pequeño, ¿afectará a la ecuación de la acumulación? ¿Por qué?.....	74
4.2.4 ¿Consideras que la acumulación se aproximará a la integral con incrementos más pequeños? ¿Sí o no y por qué?.....	74
Al terminar las prácticas:	75
4.2.5 ¿Por qué consideras que el haber usado Geogebra te ayudó en el proceso de calcular las acumulaciones?.....	75
4.2.6 En el proceso de calcular la forma explícita de la acumulación, como lo fue encontrar la expresión algebraica de la función, ¿encontraste difícil o tedioso el proceso? ¿Por qué?	75
4.2.7 ¿De qué manera el proceso utilizado para calcular las acumulaciones se parece a la definición de la integral de Riemann?	76
4.2.8 ¿Cuál de las tres prácticas te pareció más difícil? ¿Por qué?.....	76
4.3 Escenario de la Experimentación.....	77
4.4 Inicio de la Práctica.....	78
4.4.1 Resultados de la hoja de Práctica #1.....	81
4.4.2 Resultados de la hoja de Práctica #2.....	87
4.4.3 Resultados de la hoja de Práctica #3.....	93
4.5 Al finalizar la Práctica	97
4.6 Análisis Final	101
4.6.1 Estudiante CB	101
4.6.2 Estudiante LP	102
Capítulo 5 Conclusiones	105
5.1 Respuestas a las preguntas de Investigación.....	105
5.2 Reflexiones finales en las prácticas con los Estudiantes	116
Bibliografía	120
Apéndice	I
A1. Solución de sistemas de ecuaciones lineales con Geogebra	I
A2. Graficar una lista de puntos en Geogebra usando la hoja de cálculo.....	II
A3. Ajuste de curvas con Geogebra.....	IV
A4. Hojas De Trabajo	V
A4.1 Hojas de trabajo Tipo 1.....	V
A4.2 Hojas de trabajo Tipo 2.....	IX
A4.3 Hojas de trabajo Tipo 3.....	XIII
A5. Hoja de preguntas a los Estudiantes.....	XV

Lista De Tablas

Tabla 1. Tabla de valores de la función $f(x) = 6, \Delta x = 1$	13
Tabla 2. Cálculo de la 1ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 1$	13
Tabla 3. 1ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 1$	14
Tabla 4. Cálculo de la 2ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 1$	14
Tabla 5. 2ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 1$	14
Tabla 6. Cálculo de la 3ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 1$	15
Tabla 7. 3ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 1$	15
Tabla 8. Tabla de valores de la función $f(x) = 6, \Delta x = 0.5$	15
Tabla 9. Cálculo de la 1ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 0.5$	16
Tabla 10. 1ª acumulación de la función $f(x) = 6, \Delta x = 0.5$	16
Tabla 11. Cálculo de la 2ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 0.5$	16
Tabla 12. 2ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 0.5$	16
Tabla 13. Cálculo de la 3ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 0.5$	17
Tabla 14. 3ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 0.5$	17
Tabla 15. Tabla de valores de la función $f(x) = 6, \Delta x = 0.1$	17
Tabla 16. Cálculo de la 1ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 0.1$	18
Tabla 17. 1ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 0.1$	18
Tabla 18. Cálculo de la 2ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 0.1$	18
Tabla 19. 2ª acumulación de la función $f(x) = 6, \Delta x = 0.1$	18
Tabla 20. Cálculo de la 3ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 0.1$	19
Tabla 21. 3ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 0.1$	19
Tabla 22. Comparación de la 1ª, 2ª y 3ª acumulaciones e integrales respectivas de la función $f(x) = 6$ para diferentes incrementos	20
Tabla 23. Cálculo de la 1ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 1$	25
Tabla 24. Cálculo de la 2ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 1$	27
Tabla 25. Cálculo de la 3ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 1$	29
Tabla 26. Cálculo de la 1ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 0.1$	31
Tabla 27. Cálculo de la 2ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 0.1$	33
Tabla 28. Cálculo de la 3ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 0.1$	35
Tabla 29. Comparación de la 1ª, 2ª y 3ª acumulaciones e integrales respectivas de la función $f(x) = 3$ para diferentes incrementos	37
Tabla 30. Tabla de valores de la función no polinomial, $\Delta x = 1$	43
Tabla 31. Cálculo de la 1ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 1$	44
Tabla 32. Cálculo de la 2ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 1$	46
Tabla 33. Cálculo de la 3ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 1$	48
Tabla 34. Tabla de valores de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$	50
Tabla 35. Cálculo de la 1ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$	51
Tabla 36. Valores de la 1ª acumulación de $f(x)$ usando Geogebra	52
Tabla 37. Cálculo de la 2ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$	55
Tabla 38. Valores de la 2ª acumulación de $f(x)$ usando Geogebra	56
Tabla 39. Cálculo de la 3ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$	59
Tabla 40. Valores de la 3ª acumulación de $f(x)$ usando Geogebra	60
Tabla 41. Algunos valores de la función exponencial obtenidos con Geogebra	64

Tabla 42. 1ª acumulación de la función obtenida con ayuda de Geogebra, parte 1.....	65
Tabla 43. 1ª acumulación de la función obtenida con ayuda de Geogebra, parte 2.....	66
Tabla 44. Cálculo de la 1ª acumulación de la función $f(x) = 6$ cuando $B(0) = 2$	78
Tabla 45. Cálculo de la 1ª acumulación de la función $f(x) = 6$ cuando $B(0) = 5$	78
Tabla 46. Cálculo de la 1ª acumulación de la función $f(x) = 6$ cuando el valor inicial de las abscisas es diferente de 0	79
Tabla 47. 1ª acumulación de la función definida a trozos cuando el incremento es 1.....	109
Tabla 48. 1ª acumulación de la función definida a trozos cuando el incremento es 0.5.....	110
Tabla 49. 1ª acumulación de la función definida a trozos cuando el incremento es 0.1.....	111
Tabla 50. Comparación de los diferentes valores obtenidos de la integral definida de la función definida a trozos	112

Lista De Figuras

Figura 1. Representación semiótica gráfica del número real $1/2$ ó 0.5	8
Figura 2. Función $f(x) = 3, \Delta x = 1$	25
Figura 3. Construcción y visualización de la 1ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 1$, paso a paso .	26
Figura 4. Zoom a la gráfica de la 1ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 1$	26
Figura 5. Construcción y visualización de la 2ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 1$, paso a paso .	27
Figura 6. Zoom a la gráfica de la 2ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 1$	28
Figura 7. Construcción y visualización de la 3ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 1$, paso a paso .	29
Figura 8. Zoom a la gráfica de la 3ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 1$	30
Figura 9. Función $f(x) = 3, \Delta x = 0.1$	31
Figura 10. Construcción y visualización de la 1ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 0.1$	32
Figura 11. Zoom a la gráfica de la 1ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 0.1$	32
Figura 12. Construcción y visualización de la 2ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 0.1$	33
Figura 13. Zoom a la gráfica de la 2ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 0.1$	34
Figura 14. Construcción y visualización de la 3ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 0.1$	35
Figura 15. Zoom a la gráfica de la 3ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 0.1$	36
Figura 16. Función no polinomial, $\Delta x = 1$	43
Figura 17. Gráfica de la 1ª integral y algunos puntos de la 1ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 1$	45
Figura 18. Gráfica de la 1ª y 2ª integral, así como algunos puntos de la 2ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 1$	47
Figura 19. Gráfica de la 1ª, 2ª y 3ª integrales, así como algunos puntos de la 3ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 1$	49
Figura 20. Gráfica de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$	50
Figura 21. Gráfica de la 1ª integral y de la aproximación obtenida con Geogebra de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$	53
Figura 22. Zoom de cómo la aproximación de la 1ª acumulación obtenida con Geogebra, se aproxima a la 1ª integral de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$	54
Figura 23. Gráfica de la 2ª integral y de la aproximación de la 2ª acumulación obtenida con Geogebra de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$	57
Figura 24. Zoom de cómo la aproximación de la 2ª acumulación obtenida con Geogebra se aproxima a la 2ª integral de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$	58
Figura 25. Gráfica de la 3ª integral y de la aproximación obtenida con Geogebra de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$	61
Figura 26. Zoom de cómo la aproximación de la 3ª acumulación obtenida con Geogebra, se aproxima a la 3ª integral de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$	62
Figura 27. Gráfica de la función	65
Figura 28. Gráfica de la 1ª integral de la función con su respectiva aproximación a la gráfica de la 1ª acumulación	67
Figura 29. Zoom de cómo la aproximación de la 1ª acumulación de la función se aproxima a la 1ª integral de tal función	68
Figura 30. Tabla de Valores de $f(x) = -2$ llenada por el estudiante CB	81
Figura 31. Cálculo de la 1ª acumulación de $f(x) = -2$ por el estudiante CB.....	81
Figura 32. 1ª acumulación de $f(x) = -2$ encontrada por el estudiante CB	82

Figura 33. Comando utilizado por KS y LP para encontrar la 1ª acumulación de $f(x) = -2$	83
Figura 34. Cálculo de la 2ª acumulación de $f(x) = -2$ por el estudiante CB.....	83
Figura 35. Comando utilizado por KS y LP para encontrar la 2ª acumulación de $f(x) = -2$	83
Figura 36. Cálculo de la 3ª acumulación de $f(x) = -2$ por el estudiante CB.....	84
Figura 37. Comando utilizado por KS y LP para encontrar la 3ª acumulación de $f(x) = -2$	84
Figura 38. Tabla de valores de $f(x) = 12$ llenada por el estudiante LP	87
Figura 39. Cálculo de la 1ª acumulación de $f(x) = 12x$ por el estudiante LP.....	88
Figura 40. Cálculo de la 2ª acumulación de $f(x) = 12x$ por el estudiante LP.....	89
Figura 41. Gráfica de la función $f(x) = 12x$ y de sus 1ª, 2ª y 3ª acumulaciones	90
Figura 42. Tabla de valores de $f(x) = 7x$ llenada por el estudiante CB.....	94
Figura 43. Cálculo de la 1ª acumulación de $f(x) = 7x$ por el estudiante AR.....	94
Figura 44. Comando utilizado por AR para encontrar la 1ª acumulación de $f(x) = 7x$	94
Figura 45. Cálculo de la 2ª acumulación de $f(x) = 7x$ por el estudiante AR.....	95
Figura 46. Comando utilizado por AR para encontrar la 2ª acumulación de $f(x) = 7x$	95
Figura 47. Cálculo de la 3ª acumulación de $f(x) = 7x$ por el estudiante AR.....	96
Figura 48. Comando utilizado por AR para encontrar la 3ª acumulación de $f(x) = 7x$	96
Figura 49. Comando para graficar una función definida a trozos usando Geogebra.....	107
Figura 50. Gráfica de una función definida a trozos usando Geogebra.....	107
Figura 51. Comando para calcular la integral definida de la función $f(x)$ usando Geogebra	108
Figura 52. Área bajo la curva de la función $f(x)$ definida a trozos usando Geogebra	108

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo el presentar acercamientos gráficos y numéricos, mediante sumas, que permitirá a los estudiantes realizar transferencias entre representaciones semióticas, para la aprehensión de los procesos matemáticos asociados al concepto de integral. A este tipo particular de sumas, las llamaremos acumulaciones o funciones de acumulación. Se utilizará el potencial del ajuste de puntos con funciones de GeoGebra como medio enseñanza, así como de otras herramientas del software como la hoja de cálculo y la vista de CAS.

Palabras clave: Integral·Acumulación·GeoGebra·Noesis·Semiosis

Abstract

The present work aims to present graphical and numerical approaches, using sums, that will allow students to make transfers between semiotic representations, for the apprehension of the mathematical processes associated to the concept of integral. We will call this particular type of sums accumulations or accumulation functions. It will be used the potential of point adjustment with GeoGebra functions as a teaching tool, as well as other software tools such as spreadsheet and CAS view will be used.

Keywords: Integral·Accumulation·GeoGebra·Noetic·Semiotic

Capítulo 1

Introducción

El curso de Cálculo Integral que se imparte en los diferentes bachilleratos y escuelas de nivel medio superior se centra principalmente en el uso de algoritmos que propician únicamente el desarrollo de habilidades mecánicas (donde entendemos como habilidades mecánicas a la secuencia de pasos algebraicos necesaria para llegar al resultado deseado), es decir, existe una tendencia a privilegiar el aspecto algebraico y se da poca importancia a la adquisición de los conceptos fundamentales del curso como entender lo que es una integral. Este esquema de enseñanza ha producido, entre otras cosas, una tendencia al uso de algoritmos por parte de los estudiantes.

Pese a que en el programa del curso se menciona que “dada la importancia que tienen las definiciones y conceptos es conveniente que se introduzcan a un nivel intuitivo”, en la práctica únicamente se parte de estas ideas para llegar a la manipulación algebraica, es decir, que la enseñanza del Cálculo parte de una concepción estructural del mismo, lo anterior según menciona Duval (1993) “los aprendizajes de base en matemáticas no pueden solamente ser la automatización de ciertas técnicas operatorias (cálculo), sino que deben también ser la coordinación de los diferentes registros de representación que son ahí utilizados”.

Las investigaciones educativas realizadas, ponen de manifiesto la dificultad de aprehensión, por parte del estudiante, de los conceptos y resaltan la importancia que tiene la articulación de los diferentes registros de representación del mismo, para lograr una aprehensión conceptual de los objetos matemáticos. Por ejemplo: Hitt (1992) considera que “un conocimiento asociado a un concepto es estable en un alumno, si él puede reconocer éste en sus diferentes representaciones”.

Es importante señalar que algunas de las causas de la ausencia de la utilización de diferentes registros de representación por los estudiantes en los cursos de Cálculo Integral, se pueden deber a:

1. La complejidad en su utilización: Al respecto, Eisenberg y Dreyfus (1986) mencionan que “siempre que es posible, los estudiantes parecen escoger una estructura simbólica para procesar información matemática más que visual”, lo cual nos lleva a pensar que el uso de diferentes registros de representación puede ser un problema de aprendizaje.

2. Una pérdida de tiempo para usarlos: Por lo que es importante subrayar que con el advenimiento de las nuevas tecnologías, tales como super-calculadoras y computadoras, se puede tener acceso a diferentes registros de representación con gasto reducido de tiempo.
3. Que los profesores no consideran que es un proceso significativo por el que tienen que transitar los estudiantes, además de no encontrarles el valor didáctico en su incorporación, dando como resultado que no sean parte esencial de su trabajo en el aula. Esta causa la podemos considerar como un problema de enseñanza.
4. Que en los libros de texto que son normalmente utilizados se resalta, únicamente, la utilización de técnicas de manipulación algebraicas.

Resumiendo, la enseñanza del cálculo integral en el nivel medio superior es puramente algebraica, lo cual oculta información muy importante para el estudiante.

En el año 2002 el Dr. José Carlos Cortés Zavala en su tesis de doctorado mostró con ayuda de un software didáctico diseñado por él, que la enseñanza de la derivada podía darse a través de diferencias (restas) y cómo éstas podían aproximar a la derivada. En cambio, en esta tesis, se pretende mostrar que la integral puede ser aproximada mediante simples sumas, que llamaremos acumulaciones.

En el capítulo 1 “Introducción” se establecen cinco preguntas que serán pilares para iniciar la investigación y que se tratarán de responder una vez que se haya desarrollado la propuesta y después que se haya experimentado con algunos estudiantes. Además, se establecen los objetivos que se pretenden alcanzar con esta tesis. Y, sobre todo, se menciona el problema de investigación que esta tesis aborda.

En el capítulo 2 “Marco Teórico” se desarrolla la parte conceptual que sustenta esta tesis, la cual está apoyada en las teorías propuestas por Raymond Duval sobre los registros de representación semiótica. Ya que como menciona Hitt (1992) en el cálculo integral, los conceptos pueden ser comprendidos mejor por el estudiante si éste es capaz de reconocerlo en sus diferentes representaciones, como lo pueden ser gráficas, algebraicas, etc. También se explica la importancia del uso de GeoGebra como medio de enseñanza, ya que promueve la visualización matemática, el cual es un concepto clave para que el aprendizaje de las matemáticas sea eficaz. Y posteriormente, se hace una breve reseña de las diferentes ideas conceptuales del cálculo integral

desde la época antigua hasta Newton y Leibniz, que es cuando se considera que el Cálculo como lo conocemos actualmente, es inventado.

En el capítulo 3 “Exposición de la propuesta” se desarrolla el tema de las acumulaciones; para una mejor comprensión, se calculan acumulaciones para diferentes tipos de funciones: polinomiales, no polinomiales e incluso funciones exponenciales. En la mayoría de los casos se apoya con el uso de la tecnología, que permite una mejor comprensión de la aproximación a la integral mediante acumulaciones. Y, además, se plantea cómo se llevará a cabo la experimentación con los estudiantes.

En el capítulo 4 “Experimentación y análisis de los resultados” se menciona el cómo se llevó a cabo la experimentación con los estudiantes; la creación de hojas de prácticas para poner a prueba los conocimientos recién adquiridos de los estudiantes y se explica cada una de ellas y sus propósitos didácticos; también se muestra la importancia de cuestionar a los estudiantes mientras realizan las hojas de prácticas, con apoyo de una hoja de preguntas. También se presentan los resultados obtenidos para cada práctica (de algunos estudiantes), y las respuestas de algunos de los estudiantes con sus respectivos análisis. Y finalmente, se presentan análisis finales de dos de los cuatro estudiantes con los que se practicó, en los que se profundizan las respuestas y resultados obtenidos.

En el capítulo 5 “Conclusiones” se dan respuestas a las preguntas de investigación que se plantearon en el capítulo y también se hace una reflexión final de la experimentación que el tesista realizó, en la cual se plasman ciertos detalles de interés que surgieron.

1.1 Problema de Investigación

Un problema de investigación que esta tesis tiene como propósito resolver es:

¿Cómo pueden las acumulaciones ayudar a un estudiante a que comprenda mejor lo que es la integral?

1.2 Preguntas de Investigación

En este trabajo de tesis se pretende dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Qué tan pequeño o grande es el error de aproximación de las acumulaciones a la integral?
- ¿Podemos obtener acumulaciones de cualquier función? ¿Deben ser continuas?
- ¿Cómo GeoGebra, un software de geometría dinámica, puede ayudar al estudiante a entender mejor el concepto de acumulación?
- ¿Se puede obtener una forma explícita para cualquier función de acumulación?
- ¿Por qué se debe dar un valor inicial en cada acumulación?

1.3 Objetivos

El presente trabajo tiene como objetivo que los estudiantes conozcan las acumulaciones mucho antes de conocer las integrales, porque con las acumulaciones, los estudiantes pueden llegar a profundizar el concepto de integral. Por lo que se pretende:

- Que los estudiantes aprendan a usar GeoGebra para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Que los estudiantes aprendan usar GeoGebra para hacer el ajuste de curvas a una lista de puntos.
- Que los estudiantes aprendan a calcular acumulaciones de cualquier función.
- Que los estudiantes comprendan la importancia de trabajar con incrementos pequeños para obtener una mejor aproximación a la integral definida.
- Que los estudiantes dejen de ver a la integral definida como algo mecánico y rutinario.
- Que los estudiantes comprendan realmente lo que es la integral.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Registros de Representación Semiótica

En la actualidad se ha publicado una gran cantidad de investigaciones educativas acerca del diseño de propuestas metodológicas desde diversos paradigmas para la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial e integral, tanto en el nivel medio superior como en el superior. En estas exploraciones se han señalado los problemas que enfrenta la enseñanza formal del cálculo, considerando que privilegia a una cantidad enorme de algoritmos carente de significados para su aplicación en otras disciplinas o profesiones.

Por otro lado, existen publicaciones que presentan resultados obtenidos, tanto en innovaciones que responden a las demandas institucionales de aplicar el conocimiento a problemas reales (Modelo educativo por competencias), como en las innovaciones que responden a la Reforma del cálculo definida en los Estados Unidos desde 1986, con el propósito de presentar al cálculo “más esbelto y lleno de vida”. También se han publicado resultados de prácticas y estrategias didácticas, con o sin la implementación de recursos tecnológicos e innovaciones para la enseñanza del cálculo en diferentes ambientes y escenarios educativos, para promover la asignación de significados a la integral de una función como objeto matemático.

Respecto a las dificultades presentes en el aprendizaje del cálculo integral, Muñoz (2000) afirmó que existe un desequilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico. Según él, en los planes de estudio actuales se hace un énfasis excesivo en calcular antiderivadas e integrales indefinidas, haciendo a un lado el concepto de integral definida. En esa misma dirección, se ha identificado que los problemas que los estudiantes deben resolver en los que se aplica la integral, están muy estereotipados, haciendo que la mecanización de técnicas de integración sea el objetivo principal en el curso de cálculo integral, con una excesiva orientación algebraica, en descuido de lo geométrico y del significado del proceso de integración (Artigue, 2002).

Las ideas teóricas en las que se basa esta tesis es explicada a través de la teoría de Registros semióticos de representación, la cual fue propuesta por Duval (1988, 2003, 2005). “Para las matemáticas las representaciones juegan un papel importante, ya que permiten transformar ideas tangibles en imágenes u objetos reales, que pueden ser apreciados por nuestros sentidos (vista, tacto, etc.) (Cortés, 2002). Conjuntamente, según lo expuesto por Duval (1993),

éste menciona que “los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción o a una experiencia intuitiva inmediata y es necesario entonces poder proporcionar representaciones”. Con base en esto, Ferrara, Pratt & Robutti (2006) citan que:

“Es importante construir un entendimiento de las funciones a través de representaciones múltiples y problemas contextuales antes de poner énfasis en las definiciones estáticas. Una aportación de la tecnología es el ofrecer el acceso a varios tipos de representaciones de función. Esta aportación ha sido importante en la investigación PME a lo largo de las tres décadas pasadas”.

Las representaciones pueden ser consideradas en dos sentidos: por un lado, están las representaciones mentales y por el otro, las representaciones semióticas; Dupuis (1997) dice que “las representaciones semióticas son conscientes (notorias en el sujeto) y externas (directamente visibles y observables) y las representaciones mentales son conscientes e internas”.

Duval (1993) hace una diferenciación de la aprehensión de las representaciones semióticas y la aprehensión conceptual del objeto matemático, denominando semiosis a la primera y noesis a la segunda. Además, afirma que hay una necesidad de utilizar las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático en el aprendizaje ya que considera que toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa y que de una representación a otra existen diferentes aspectos de contenido que son representados, y también alerta sobre la posibilidad de confundir los objetos matemáticos con alguna de sus representaciones y menciona que una de las posibilidades que existen para no hacerlo, es usar múltiples representaciones semióticas.

Una manera de ver las distintas representaciones semióticas de un mismo concepto, lo podemos analizar en el siguiente ejemplo. Para esto, Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen & Gorrochategui (2012) proponen la siguiente simbología para denotar los registros semióticos y las representaciones semióticas:

Llamémosle:

r^m =registro semiótico m-ésimo, con $m=1,2,3, \dots$

$R^m_i(A)$ =representación semiótica i-ésima ($i=1,2, 3, \dots$) de un objeto A en el registro semiótico r^m .

Concepto: **Número fraccionario.**

Registro semiótico r^1 : **lenguaje común**

Representación semiótica R^1_1 : un medio

Representación semiótica R^1_2 : la mitad de uno

Registro semiótico r^2 : **lenguaje aritmético**

Representación semiótica R^2_1 : $\frac{1}{2}$ (escritura en forma de fracción)

Representación semiótica R^2_2 : 0.5 (escritura en forma decimal)

Representación semiótica R^2_3 : 50×10^{-2} (escritura en forma exponencial)

Registro semiótico r^3 : **lenguaje algebraico**

Representación semiótica R^3_1 : $\{x \in \mathbb{Q} \mid 2x - 1 = 0\}$ (escritura en forma de conjuntos)

Representación semiótica R^3_2 : $y = f(x): x \rightarrow \frac{x}{2}$ (escritura en forma de función)

Registro semiótico r^4 : **esquemas gráficos**

Representación semiótica R^4_1 :

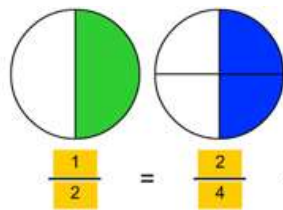


Figura 1. Representación semiótica gráfica del número real $1/2$ ó 0.5

Es de relevante importancia mencionar que “la coordinación de varios registros de representación semiótica es fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos matemáticos” (Duval, 1993). Es decir, que para lograr la aprehensión del objeto matemático (noesis) debemos, entre otras cosas, lograr primero la aprehensión de los diferentes registros de representación (semiosis).

Basado en experimentaciones hechas con nueve profesores de enseñanza media, Hitt (2003) reporta que el utilizar diferentes representaciones permite a los investigadores abordar problemas de una manera eficaz. Aunque los estudiantes estén acostumbrado a manejar las representaciones algebraicas, si llegan a cometer un error, son incapaces de saber dónde lo cometieron. Y dado que su uso de representaciones gráficas es poco usual, no cuentan con las herramientas suficientes para tener seguridad al manejar sus procesos algebraicos o para saber encontrar el error.

De las investigaciones sobre el aprendizaje medido con el uso de la tecnología en la enseñanza del cálculo, se ha señalado que no es suficiente enfocar el significado geométrico del concepto de integral de una función como área bajo la curva, para comprender la definición de la

integral como sumas de Riemann. Por otra parte, Gordon & Gordon (2007), plantearon la idea de ajustes de funciones con datos numéricos y de un recurso computacional discreto para favorecer el descubrimiento del Teorema Fundamental de Cálculo por parte de los estudiantes, con el apoyo de recursos tecnológicos.

Se coincide con Thompson & Silverman (2007), quienes realizaron una investigación de índole cognitiva, considerando algunas dificultades sobre la concepción de función como proceso: plantearon que, para comprender la definición formal de la integral como el límite de sumas de Riemann, los estudiantes deben conceptualizar primero la función de acumulación, como una conceptualización auxiliar. Y afirmaron que “la mayor fuente de problemas cognitivos para la comprensión matemática de la acumulación, se da porque es raro que dicha idea se enseñe en los cursos de Cálculo Integral, o si se enseña, es raro que se tenga intención de que se aprenda”.

Yerushalmy & Swidan (2011) señalan que pocos estudios identificaron la acumulación como un elemento central en el entendimiento del concepto de integral, análogo a la centralidad del concepto de la pendiente para la función derivada y un concepto clave en el entendimiento del Teorema Fundamental del Cálculo. También menciona que entender la gráfica de acumulación requiere estar consciente de que cada valor específico asignado como un límite inferior determina una única función de acumulación en una familia de funciones de acumulación

Por lo anterior, es que en este trabajo se pretende abordar conceptos de cálculo integral a través de un acercamiento numérico y éstos serán tratados con diferentes registros de representación semiótica.

2.2 Uso de Geogebra como Medio de Enseñanza

Para Hitt (2003) es necesario que se promueva la visualización matemática, la cual se puede suscitar al utilizar diferentes representaciones, apoyándose también del uso de la tecnología que permita dar un significado clave a los conocimientos matemáticos. Por lo que, en este trabajo, se utilizará GeoGebra, un software de geometría libre que ayudará a los estudiantes obtener esa visualización matemática que Hitt menciona.

Geogebra, o GeoGebra, es un software de geometría dinámica que nos permite a los usuarios realizar diferentes construcciones geométricas como el trazo de puntos, segmentos, rectas, parábolas, hipérbolas (secciones cónicas), cualquier tipo de función, vectores, resolver

sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, encontrar la derivada de una función, encontrar la integral de una función, así como poder visualizar el área bajo la curva, crear tablas de valores, listas, etc.

Arias & Leiva (2013), mencionan algunas ventajas del uso del software Geogebra:

- 1) Es libre. Es decir, es un software que todos pueden descargar en su pc, iMac, iPad, iPhone, etc., de forma gratuita.
- 2) Es multiplataforma. Puede ser descargado en Windows, Ubuntu, Mac y Android.
- 3) Es multitarea. Se dice que es un software de geometría dinámica, pero también se puede usar para estudiar Álgebra básica, álgebra superior, cálculo diferencial e integral, probabilidad y estadística, trigonometría, etc.
- 4) Es Visual. Permite al estudiante poder realizar demostraciones visuales y dinámicas, por medio de botones, tablas, deslizadores, etc.

En particular, en este trabajo, se hará uso de herramientas que GeoGebra ofrece como: la vista de Cálculo Simbólico (CAS) para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante un simple comando; la vista de Hoja de Cálculo que servirá para crear tablas de valores de una función, obtener funciones de acumulación para aquellas funciones que es difícil estar evaluando “a mano” como las funciones trascendentales; se utilizará la vista gráfica para visualizar las funciones y sus acumulaciones, así como las integrales respectivas, esto con el fin de hacer un contraste de la función con sus respectivas integrales y aproximaciones a ellas; cuando no se sepa con certeza cómo obtener la ecuación de alguna curva pero sí se den algunos puntos, se podrá hacer uso, junto con la vista de Hoja de Cálculo y la vista gráfica, del Ajuste de Curvas.

El ajuste de curvas es una herramienta interesante que ofrece GeoGebra porque permite aproximar mediante una lista de puntos, cualquier tipo de función. Si se tienen algunos puntos y se sabe con certeza que una función es polinomial, es fácil obtener la expresión algebraica de la curva, pero si no se sabe qué tipo de curva es, la lista de puntos la da, el ajuste de curvas permitirá una aproximación a ella.

Como GeoGebra es un software no muy utilizado por muchas personas, en esta tesis se tratará de proveer también pequeños tutoriales para que los estudiantes y cualquiera que esté interesado en usar muchas de las herramientas matemáticas que ofrece, pueda aprender por su cuenta a utilizar el GeoGebra.

2.3 Ideas Conceptuales del Cálculo a través de los tiempos

A fines del siglo XVII, Newton y Leibniz casi al mismo tiempo y de manera independiente inventaron el cálculo. Grabiner (1983) menciona que este invento trajo consigo tres cosas. El primero es que inventaron los conceptos generales de cociente diferencial e integral (los cuales son términos que Leibniz acuñó, porque Newton los llamó “fluxion” y “fluent”, que en español sería “fluxión” y “fluido”, respectivamente). Segundo, ambos crearon una notación para estos conceptos, los cuales hicieron del cálculo un algoritmo, porque no únicamente los métodos funcionaban, sino que eran muy fáciles de usar. A Leibniz le debemos la notación $\frac{dy}{dx}$ y $\int ydx$ y a Newton $\dot{x}$. Y, por último, los dos se dieron cuenta que los procesos simples de encontrar tangentes y áreas, es decir, la diferenciación e integración, eran procesos mutuamente inversos, que es lo que ahora llamamos el Teorema Fundamental del Cálculo.

A pesar que desde Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz el Cálculo se dice que nació, lo cierto es que estos dos personajes sentaron las bases formales del cálculo. Cabe señalar que, según menciona Kallio (1961) en su tesis de maestría, desde tiempos antiguos los griegos ya trabajaban con conceptos que involucraban el cálculo como lo fue el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de figuras geométricas curvilíneas.

Foresta & Goldman (s.f.), mencionan que una de las primeras civilizaciones en sistematizar el estudio de áreas fueron, sin duda alguna, los griegos. El primer griego en considerar el problema de las áreas fue Antifón (nacido cerca del 430 a. C.). Este matemático fue el primero en introducir el “método de exhaustión”. En este método, polígonos simples eran usados para aproximar el área de curvas más complicadas. Desafortunadamente, no formuló el método rigurosamente, sin embargo, Eudoxo sí lo hizo.

Eudoxo (nació aproximadamente en el 400 a. de C), según Allen (s.f.) estableció métodos rigurosos para encontrar áreas y volúmenes de figuras curvilíneas como conos y esferas. Y creó la teoría de las proporciones, que le permitió estudiar los números irracionales, que en ese tiempo él los llamaba inconmensurables. Por otro lado, Euclides, como menciona Kallio (1961) introdujo el método de exhaustión en su famoso libro llamado “Los Elementos”. Foresta & Goldman (s.f.) señalan que Euclides aplicó el Método a varias figuras geométricas, tales como conos, pirámides, cilindros y esferas. Otro matemático que extendió el trabajo de encontrar el área y volúmenes de figuras geométricas fue Arquímedes (287-212 a. de C), al suplementar el método de exhaustión y

crear el método heurístico, pudo anticipar muchos de los resultados del cálculo integral, menciona Kallio (1961).

De manera general, el trabajo que los griegos aportaron al método de exhaustión fue excepcional, pero como exterioriza Foresta & Goldman (s.f.), el método tenía dos fallas: la primera es que no era un método general, porque para cada problema diferente, se debían ingeniar maneras de dibujar los triángulos y polígonos para aproximar el área y la segunda falla, quizá la más importante, es que no era un método riguroso ya que no incluía para nada el concepto de límite.

Uno de los que aportaron al cálculo integral durante los siglos XVII y siglos XVIII fue Johannes Kepler (1571-1630), conocido por sus leyes sobre el movimiento de los planetas, también hizo aportaciones al cálculo integral, menciona Currie (2007) que Kepler se interesó en el cálculo gracias a los escritos de Arquímedes, pero también porque quería mejorar los métodos utilizados para medir los barriles de vino. Por tanto, desarrolló métodos precisos para calcular el tamaño de áreas dentro de líneas curvas.

Los historiadores Saul Foresta y Lawrence Goldman (s.f.), mencionan que Galileo Galilei (1564-1642) demostró que, bajo aceleración uniforme, el área bajo la curva velocidad-tiempo es la distancia, un resultado que el TFC respalda. Por otro lado, estos mismos autores señalan que Bonaventura Cavalieri (1598-1647) incorporó las ideas de Kepler y Galilei en su trabajo. Estudió los indivisibles al estipular en un principio (que lleva su nombre) que: “si dos figuras tienen la misma altura, entonces sus volúmenes serán proporcionales a las áreas de sus bases” y usó ese principio para encontrar áreas de cuadriláteros, círculos y otras figuras planas. Y además, estos mismos autores afirman que todos los matemáticos antes mencionados, realmente no captan el alcance y la generalidad de los métodos que estaban empleando en problemas específicos. Es aquí donde Newton y Leibniz llegar a poner todo en todo, quizá no formalizado, pero es cuando se considera que el cálculo nace.

Capítulo 3

Exposición de la Propuesta

En el capítulo 3, se presenta la propuesta de aproximación de la integral mediante acumulaciones y se presenta al final la propuesta de práctica con los estudiantes.

A continuación, se presentan cuatro casos de funciones de acumulación: primero de una función $f(x) = 6$ en la que se expone la manera de calcular las acumulaciones “a mano”. Después de la función $f(x) = 3$ en la que se utiliza la ayuda de Geogebra para expresar gráficamente las funciones de acumulación. Posteriormente de una función no polinomial $f(x) = \sqrt{x+1}$, en la que también se utilizan las herramientas que el software de Geometría dinámica Geogebra nos proporciona. Finalmente, de la función $f(x) = 2e^{2x}$ en la que se usa al 100% el uso de la tecnología para encontrar la función acumulación.

3.1 Caso I: Acumulaciones de una Función Polinomial $f(x) = 6$.

3.1.1 Apartado I: Incremento $\Delta x = 1$.

Sea $f(x) = 6$. Pongamos su tabla de valores para valores desde 1 hasta 10, con incremento 1.

Tabla 1. Tabla de valores de la función $f(x) = 6, \Delta x = 1$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Para encontrar la primera acumulación, cuya función llamaremos $B(x)$ se debe dar un valor inicial, $B(0) = 2$. Sea: $B(1) = B(0) + 6 = 2 + 6 = 8$

$$B(2) = B(1) + 6 = 8 + 6 = 14$$

Tabla 2. Cálculo de la 1ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B(x)	2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62
f(x)	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Por tanto, obtenemos la siguiente tabla

Tabla 3. 1ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B(x)	2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62

Esto nos da una función del tipo lineal, por lo que se necesitan 2 puntos para obtener la expresión algebraica. Tomemos $P_1(0,2)$ y $P_2(1,8)$

$B(x) = mx + b$, donde $2 = b$, el intercepto en y.

Sustituyendo valores $8 = m(1) + 2, 8 - 2 = m = 6$

De donde, $B(x) = 6x + 2$

Para obtener la segunda acumulación, que llamaremos $C(x)$, teniendo la primera acumulación $B(x)$, se necesita un valor inicial $C(0) = 1$

Tabla 4. Cálculo de la 2ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C(x)	1	3	11	25	45	71	103	141	185	235	291
B(x)	2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	

Por lo tanto, se obtiene la tabla

Tabla 5. 2ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C(x)	1	3	11	25	45	71	103	141	185	235	291

El comportamiento de esta función es de la forma $C(x) = ax^2 + bx + c$ se toman 3 puntos y se determina su expresión algebraica. $P_0(0,1)$, $P_1(1,3)$ y $P_2(2,11)$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con 3 incógnitas, se encuentra que $a = 3, b = -1$ y $c = 1$, por lo tanto, $C(x) = 3x^2 - x + 1$

Una vez obtenida la segunda acumulación, se puede calcular la tercera acumulación que llamaremos $D(x)$. Siendo $D(0) = 0$. Por lo tanto,

Tabla 6. Cálculo de la 3ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D(x)	0	1	4	15	40	85	156	259	400	585	820

C(x)	1	3	11	25	45	71	103	141	185	235
------	---	---	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----

Por lo tanto, se obtiene la tabla

Tabla 7. 3ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D(x)	0	1	4	15	40	85	156	259	400	585	820

El comportamiento de esta función es cúbica de la forma

$D(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Para calcular su expresión algebraica necesitamos 4 puntos de la tabla. $P_0(0,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(2,4)$ y $P_3(3,15)$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con 4 incógnitas, se llega que:

$a = 1, b = -2, c = 2, d = 0$. Por lo tanto, $D(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$

3.1.2 Apartado II: Incremento $\Delta x = 0.5$

Sea $f(x) = 6$. Pongamos su tabla de valores para valores desde 1 hasta 10, con incremento 0.5.

Tabla 8. Tabla de valores de la función $f(x) = 6, \Delta x = 0.5$

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Para encontrar la primera acumulación, cuya función llamaremos $B(x)$ se debe dar un valor inicial $B(0) = 0.5$ Sea: $B(0.5) = B(0) + 6 = 0.5 + 6 = 6.5$

$B(1) = B(0.5) + 6 = 6.5 + 6 = 12.5$ y así sucesivamente.

Tabla 9. Cálculo de la 1ª acumulación de $f(x) = 6$, $\Delta x = 0.5$

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
B(x)	0.5	6.5	12.5	18.5	24.5	30.5	36.5	42.5	48.5	54.5	60.5

f(x)	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Por tanto, obtenemos la siguiente tabla

Tabla 10. 1ª acumulación de la función $f(x) = 6$, $\Delta x = 0.5$

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
B(x)	0.5	6.5	12.5	18.5	24.5	30.5	36.5	42.5	48.5	54.5	60.5

Esto nos da una función del tipo lineal, por lo que se necesitan 2 puntos para obtener la expresión algebraica. Tomemos $P_1(0,0.5)$ y $P_2(0.5,6.5)$

$B(x) = mx + b$, donde $0.5 = b$, el intercepto en y.

Sustituyendo valores $6.5 = m(0.5) + 0.5 \rightarrow 13 = m + 1 \rightarrow m = 12$

De donde, $B(x) = 12x + \frac{1}{2}$

Para obtener la segunda acumulación, que llamaremos $C(x)$, teniendo la primera acumulación $B(x)$, se necesita un valor inicial $C(0) = 0$

Tabla 11. Cálculo de la 2ª acumulación de $f(x) = 6$, $\Delta x = 0.5$

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
C(x)	0	0.5	7	19.5	38	62.5	93	129.5	172	220.5	275

B(x)	0.5	6.5	12.5	18.5	24.5	30.5	36.5	42.5	48.5	54.5	
------	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	--

Por lo tanto, se obtiene la tabla

Tabla 12. 2ª acumulación de $f(x) = 6$, $\Delta x = 0.5$

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
C(x)	0	0.5	7	19.5	38	62.5	93	129.5	172	220.5	275

El comportamiento de esta función es de la forma $C(x) = ax^2 + bx + c$, se toman 3 puntos y se determina su expresión algebraica. $P_0(0.5,0.5)$, $P_1(1,7)$ y $P_2(1.5,19.5)$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con 3 incógnitas, se encuentra que $a = 12$, $b = -5$ y $c = 0$, por lo tanto, $C(x) = 12x^2 - 5x$.

Una vez obtenida la segunda acumulación, se puede calcular la tercera acumulación que llamaremos $D(x)$.

Siendo $D(0) = 1$. Por lo tanto,

Tabla 13. Cálculo de la 3ª acumulación de $f(x) = 6$, $\Delta x = 0.5$

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
D(x)	1	1	1.5	8.5	28	66	128.5	221.5	351	523	743.5
C(x)	0	0.5	7	19.5	38	62.5	93	129.5	172	220.5	

Por lo tanto, se obtiene la tabla:

Tabla 14. 3ª acumulación de $f(x) = 6$, $\Delta x = 0.5$

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
D(x)	1	1	1.5	8.5	28	66	128.5	221.5	351	523	743.5

El comportamiento de esta función es cúbica de la forma $D(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Para calcular su expresión algebraica necesitamos 4 puntos de la tabla. $P_0(0,1)$, $P_1(0.5,1)$, $P_2(1,1.5)$ y $P_3(2,28)$. Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con 4 incógnitas, se llega que: $a = 8$, $b = -11$, $c = 3.5$, $d = 1$. Por lo tanto, $D(x) = 8x^3 - 11x^2 + 3.5x + 1$.

3.1.3 Apartado III: Incremento $\Delta x = 0.1$

Sea $f(x) = 6$. Pongamos su tabla de valores para valores desde 1 hasta 10, con incremento 0.1.

Tabla 15. Tabla de valores de la función $f(x)$, $\Delta x = 0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Para encontrar la primera acumulación, cuya función llamaremos $B(x)$ se debe dar un valor inicial, $B(0) = 1$.

Sea: $B(0.1) = B(0) + 6 = 1 + 6 = 7$.

$B(0.2) = B(0.1) + 6 = 7 + 6 = 13$ y así sucesivamente.

Tabla 16. Cálculo de la 1ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
B(x)	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61
f(x)	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Por tanto, obtenemos la siguiente tabla:

Tabla 17. 1ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
B(x)	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61

Esto nos da una función del tipo lineal, por lo que se necesitan 2 puntos para obtener la expresión algebraica. Tomemos $P_1(0,1)$ y $P_2(0.1,7)$. $B(x) = mx + b$, donde $1=b$, el intercepto en y.

Sustituyendo valores $7 = m(0.1) + 1 \rightarrow \frac{7-1}{0.1} = m \rightarrow m = 60$. De donde, $B(x) = 60x + 1$.

Para obtener la segunda acumulación, que llamaremos $C(x)$, teniendo la primera acumulación $B(x)$, se necesita un valor inicial $C(0) = 2$

Tabla 18. Cálculo de la 2ª acumulación de $f(x) = 6, \Delta x = 0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
C(x)	2	3	10	23	42	67	98	135	178	227	282
B(x)	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	

Por lo tanto, se obtiene la tabla:

Tabla 19. 2ª acumulación de la función $f(x) = 6, \Delta x = 0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
C(x)	2	3	10	23	42	67	98	135	178	227	282

El comportamiento de esta función es de la forma $C(x) = ax^2 + bx + c$, se toman 3 puntos y se determina su expresión algebraica. $P_0(0,2)$, $P_1(0.1,3)$ y $P_2(0.2,10)$. Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con 3 incógnitas, se encuentra que $a = 300$, $b = -20$ y $c = 2$.

Por lo tanto, $C(x) = 300x^2 - 20x + 2$.

Una vez obtenida la segunda acumulación, se puede calcular la tercera acumulación que llamaremos $D(x)$. Siendo $D(0) = 3$. De donde:

Tabla 20. Cálculo de la 3ª acumulación de $f(x) = 6$, $\Delta x = 0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
D(x)	3	5	8	18	41	83	150	248	383	561	788

C(x)	2	3	10	23	42	67	98	135	178	227
------	---	---	----	----	----	----	----	-----	-----	-----

Por lo tanto, se obtiene la tabla:

Tabla 21. 3ª acumulación de $f(x) = 6$, $\Delta x = 0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
D(x)	3	5	8	18	41	83	150	248	383	561	788

El comportamiento de esta función es cúbica de la forma $D(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Para calcular su expresión algebraica necesitamos 4 puntos de la tabla. $P_0(0,3)$, $P_1(0.1,5)$, $P_2(0.2,8)$ y $P_3(0.3,18)$. Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con 4 incógnitas, se llega que:

$a = 1000$, $b = -250$, $c = 35$, $d = 3$. Por lo tanto, $D(x) = 1000x^3 - 250x^2 + 35x + 3$.

Tabla 22. Comparación de la 1ª, 2ª y 3ª acumulaciones e integrales respectivas de la función $f(x) = 6$ para diferentes incrementos

Función $f(x) = 6$				
Acumulaciones	Incrementos			
	Incremento $\Delta x = 1$	Incremento $\Delta x = 0.5$	Incremento $\Delta x = 0.1$	
1ª Acumulación	$6x + 2$	$12x + \frac{1}{2}$	$60x + 1$	$\int 6dx = 6x + c_1$
2ª Acumulación	$3x^2 - x + 1$	$12x^2 - 5x$	$300x^2 - 20x + 2$	$\int (6x + c_1)dx = 3x^2 + c_1x + c_2$
3ª Acumulación	$x^3 - 2x^2 + 2x$	$8x^3 - 11x^2 + \frac{7}{2}x + 1$	$1000x^3 - 250x^2 + 35x + 3$	$\int (3x^2 + c_1x + c_2) = x^3 + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3$

Observaciones 1:

1ª acumulación.

- Si se multiplica la primera acumulación por el incremento Δx , se ve que se aproxima a la primera integral, es decir, a $\int 6dx = 6x + c_1$, principalmente con el coeficiente del término de grado 1.

$$(6x + 2) * (1) = 6x + 2$$

$$\left(12x + \frac{1}{2}\right) * \left(\frac{1}{2}\right) = 6x + \frac{1}{4}$$

$$(60x + 1) * \left(\frac{1}{10}\right) = 6x + \frac{1}{10}$$

- El término constante de la 1ª acumulación es el valor inicial de la función $B(x)$. Así que éste dependerá del valor que le asignemos.

2ª acumulación.

- Si se multiplica la segunda acumulación por el incremento Δx al cuadrado, es decir, Δx^2 , se ve que se aproxima a la segunda integral, es decir, a

$$\int (6x + c_1)dx = 3x^2 + c_1x + c_2$$

Multiplicando por el incremento Δx^2

$$(3x^2 - x + 1) * (1) = 3x^2 - x + 1$$

$$(12x^2 - 5x) * \left(\frac{1}{4}\right) = 3x^2 - \frac{5}{4}x$$

$$(300x^2 - 20x + 2) * \left(\frac{1}{100}\right) = 3x^2 - \frac{2}{10}x + \frac{2}{100}$$

- El término constante de la 2ª acumulación es el valor inicial de la función $C(x)$. Así que éste dependerá del valor arbitrario que le asignemos.

3ª acumulación.

- Si se multiplica la tercera acumulación por el incremento Δx al cubo, es decir, Δx^3 , se ve que se aproxima a la tercera integral, es decir, a

$$\int (3x^2 + c_1x + c_2) = x^3 + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3$$

Multiplicando por el incremento Δx^3

$$(x^3 - 2x^2 + 2x) * (1) = x^3 - 2x^2 + 2x$$

$$\left(8x^3 - 11x^2 + \frac{7}{2}x + 1\right) * \left(\frac{1}{8}\right) = x^3 - \frac{11}{8}x^2 + \frac{7}{16}x + \frac{1}{8}$$

$$(1000x^3 - 250x^2 + 35x + 3) * \left(\frac{1}{1000}\right) = x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{200}x + \frac{3}{1000}$$

- El término constante de la 3ª acumulación coincide con el valor inicial de la función $D(x)$ que fue asignado arbitrariamente, por lo que cambiará cada que asignemos nuevos valores iniciales.

Observaciones 2:

1ª acumulación.

Se observa que las primeras acumulaciones obtenidas para los incrementos $\Delta x = 1, \Delta x = 0.5$ y $\Delta x = 0.1$, se aproximan a la primera integral de la función $f(x) = 6$, es decir, se aproximan a $6x + c_1$; se sabe que, para lograr esa aproximación, se deben de multiplicar las acumulaciones obtenidas por el incremento correspondiente, ya que hay que recordar que $\frac{dy}{dx} = y'$ y por lo tanto $dy = y'dx$, en este caso, nuestra y' está haciendo el papel de la primera acumulación. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(6x + 2) * (1) &= 6x + 2 \\ \left(12x + \frac{1}{2}\right) * (0.5) &= 6x + \frac{1}{4} \\ (60x + 1) * (0.1) &= 6x + \frac{1}{10}\end{aligned}$$

Se aproximan particularmente en el coeficiente del término del primer grado.

2ª acumulación.

Se observa que las segundas acumulaciones obtenidas para los incrementos $\Delta x = 1, \Delta x = 0.5$ y $\Delta x = 0.1$, se aproximan a la segunda integral de la función $f(x) = 6$, es decir, se aproximan a $3x^2 + c_1x + c_2$; se sabe que para lograr esta aproximación, se deben multiplicar las acumulaciones obtenidas por el incremento al cuadrado, ya que hay que recordar que $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$ y por lo tanto, la segunda integral $d^2y = y''dx^2$, en esta caso, nuestra y'' está haciendo el papel de la segunda acumulación. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(3x^2 - x + 1) * (1^2) &= 3x^2 - x + 1 \\ (12x^2 - 5x) * (0.5^2) &= 3x^2 - 1.25x \\ (300x^2 - 20x + 2) * (0.1^2) &= 3x^2 - 0.2x + 0.02\end{aligned}$$

Se aproximan particularmente al coeficiente del término cuadrático (grado 2).

3ª acumulación.

Se observa que las terceras acumulaciones obtenidas para los incrementos $\Delta x = 1, \Delta x = 0.5$ y $\Delta x = 0.1$, se aproximan mucho a la tercera integral de la función $f(x) = 6$, es decir, se

aproximan a $x^3 + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3$; para lograr esta aproximación, se deben multiplicar las acumulaciones obtenidas por el incremento al cubo, ya que hay que recordar que $\frac{d^3y}{dx^3} = y'''$ y por lo tanto, la tercera integral $d^3y = y'''dx^3$, en este caso, nuestra y''' está haciendo el papel de la tercera acumulación. Por lo tanto,

$$(x^3 - 2x^2 + 2x) * (1^3) = x^3 - 2x^2 + 2x$$

$$(8x^3 - 11x^2 + \frac{7}{2}x + 1) * (0.5^3) = x^3 - 1.375x^2 + 0.438 + \frac{1}{8}$$

$$(1000x^3 - 250x^2 + 35x + 3) * (0.1^3) = x^3 - 0.25x^2 + 0.035x + 0.003$$

Se aproximan particularmente al coeficiente del término cúbico (de grado 3).

3.2 Caso II: Acumulaciones de una Función Polinomial $f(x)=3$

3.2.1 Apartado I. Incremento $\Delta x = 1$

Sea la función $f(x) = 3$, representemos gráficamente la primera, la segunda y la tercera acumulación, en este caso, cuando el incremento es $\Delta x = 1$. La función $f(x) = 3$, se puede ver en la Figura 2.

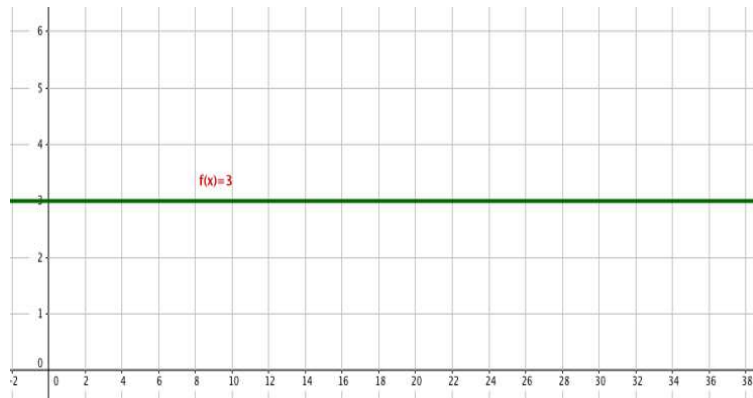


Figura 2. Función $f(x) = 3, \Delta x = 1$

1ª acumulación.

Para calcular la primera acumulación o para obtener una aproximación de la primera integral de la función $f(x) = 3$, cuya función llamaremos $B(x)$, necesitamos dar un valor inicial $B(0) = -5$, y con la función $f(x)$, obtenemos la primera acumulación del siguiente modo:

Cuando x vale 0 (valor inicial), $B(0) = -5$, después incrementando en una unidad a x , $x = 1$, $B(0)$ se incrementa en 3 unidades (porque $f(x) = 3$) obteniéndose que $B(1) = -5 + 3 = -2$. Y así sucesivamente. En la tabla 23 se ven los resultados para x desde 0 a 10.

Tabla 23. Cálculo de la 1ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B(x)	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19	22	25
f(x)	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Tomando 2 puntos, se encuentra que la función $f(x)$ representa a la recta $B(x) = 3x - 5$.

El proceso que se realizó para obtener la primera acumulación, se puede representar gráficamente así:

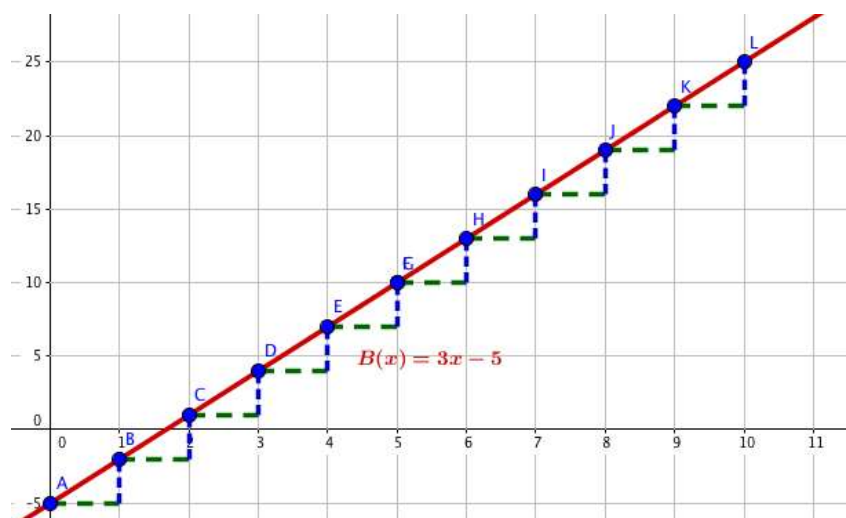


Figura 3. Construcción y visualización de la 1ª acumulación de $f(x) = 3$, $\Delta x = 1$, paso a paso

Para otros valores de x , la Figura 4 muestra el comportamiento de la función lineal $B(x)$.

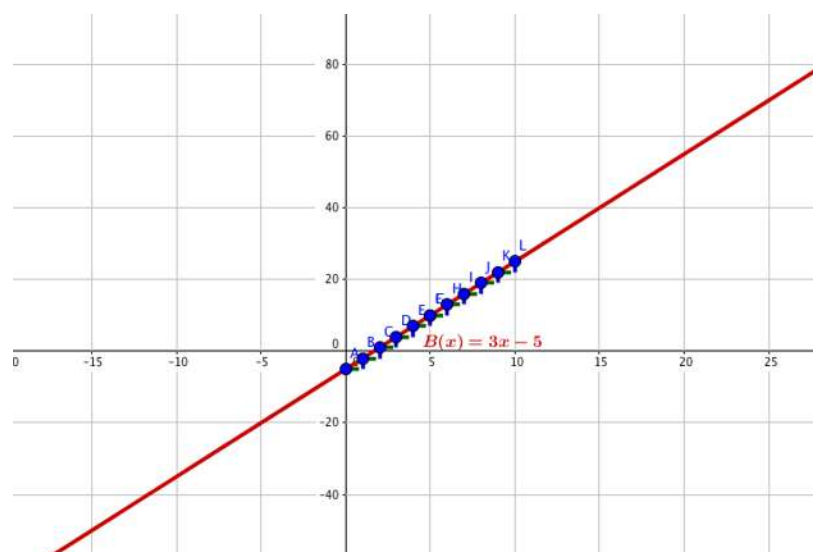


Figura 4. Zoom a la gráfica de la 1ª acumulación de $f(x) = 3$, $\Delta x = 1$

2ª acumulación.

Tomando los valores obtenidos de $B(x)$, construyamos la segunda acumulación, que llamaremos $C(x)$. Para esto, se necesita dar un valor inicial $C(0) = -3$. Y elaboremos la tabla del modo siguiente.

Tabla 24. Cálculo de la 2ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C(x)	-3	-8	-10	-9	-5	2	12	25	41	60	82
B(x)	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19	22	

Con ayuda de la función de la forma $B(x) = a_1x + a_0$, se ha construido una función de segundo grado, de la forma $C(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Tomando tres puntos, se tiene que la ecuación de esta curva es $C(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x - 3$. Donde $a_2 = \frac{3}{2}, a_1 = -\frac{13}{2}$ y $a_0 = -3$.

El proceso que se realizó para obtener la segunda acumulación, se puede observar en la Figura 5 :

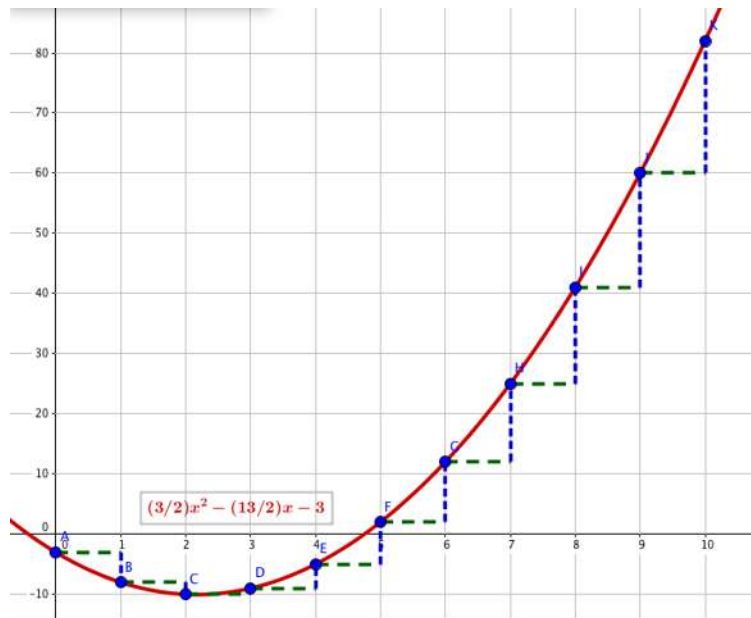


Figura 5. Construcción y visualización de la 2ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 1$, paso a paso

La Figura 5 muestra sólo una parte de la función $C(x)$, en la Figura 6 se muestra la gráfica para otros valores de x .

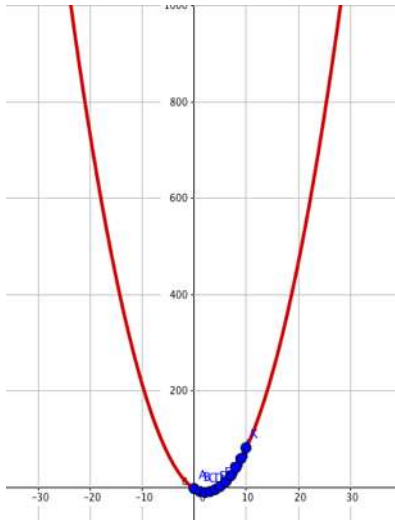


Figura 6. Zoom a la gráfica de la 2ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 1$

3ª acumulación.

Tomando los valores obtenidos de $C(x)$, construyamos la tercera acumulación, que llamaremos $D(x)$. Para esto, necesitamos un valor inicial $D(0) = -1$. Elaboremos su tabla:

Tabla 25. Cálculo de la 3ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D(x)	-1	-4	-12	-22	-31	-36	-34	-22	3	44	104
C(x)		-3	-8	-10	-9	-5	2	12	25	41	60

Con la ayuda de la función cuadrática de la forma $C(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, se ha construido una función de tercer grado de la forma $D(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Tomando 4 puntos, se tiene que la ecuación de esta curva es:

$$D(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 1, \text{ donde } a_3 = \frac{1}{2}, a_2 = -4, a_1 = \frac{1}{2} \text{ y } a_0 = -1.$$

En la Figura 7 se observa el procedimiento usado para obtener la tercera acumulación, partiendo de la segunda acumulación.

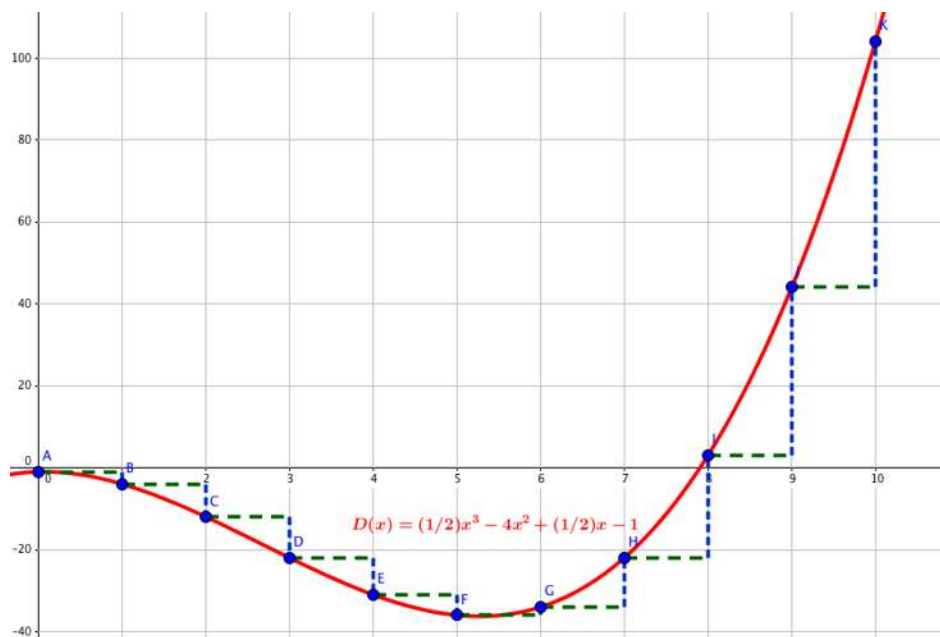


Figura 7. Construcción y visualización de la 3ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 1$, paso a paso

La Figura 7 sólo nos muestra el intervalo $[0,10]$ cuando $\Delta x = 1$. Ahora, haremos un zoom a la gráfica de la curva $D(x)$ para ver cómo se comporta tal función.

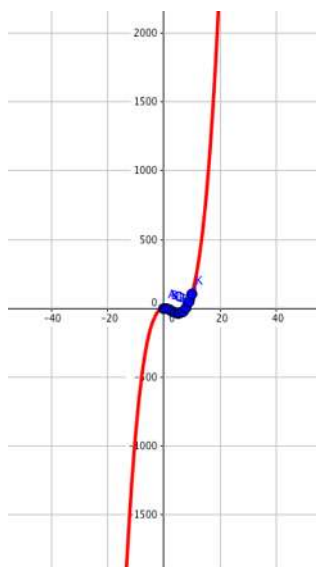


Figura 8. Zoom a la gráfica de la 3ª acumulación de $f(x) = 3$, $\Delta x = 1$

3.2.2 Apartado II. Incremento $\Delta x = 0.1$

Sea la función constante $f(x) = 3$, representemos gráficamente su primera, segunda y tercera acumulación, cuando el incremento es $\Delta x = 0.1$. Primero, veamos cómo se ve la gráfica de la función constante 3 con incrementos de 0.1 en las abscisas.

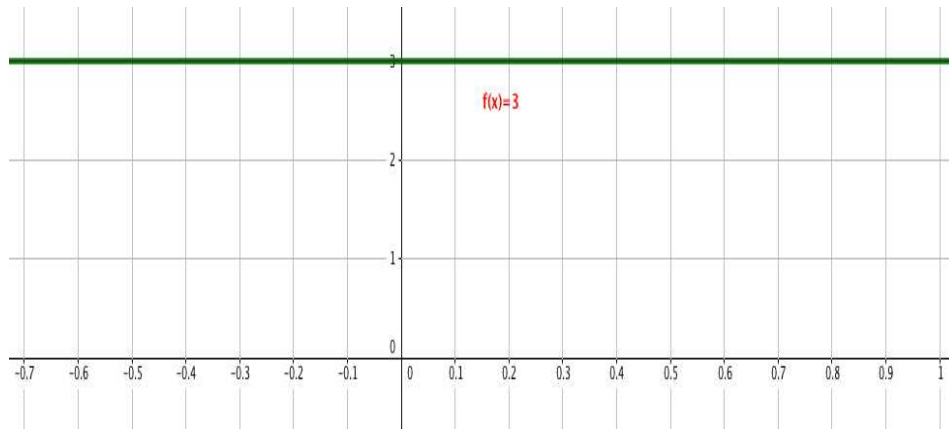


Figura 9. Función $f(x) = 3, \Delta x = 0.1$

1ª Acumulación.

Para calcular la primera acumulación, digamos la función $B(x)$, demos un valor inicial $B(0) = 0$.

Cuando x vale 0 (nuestro valor inicial), $B(0) = 0$, después incrementando en 0.1 unidades, $x=0.1$, $B(0)$ se incrementa en 3 unidades (ya que $f(x) = 3$) obteniéndose que $B(0.1) = 0 + 3 = 3$. Y, así sucesivamente. Se hace lo mismo para x hasta 1. En la tabla 26 se puede observar el procedimiento.

Tabla 26. Cálculo de la 1ª acumulación de $f(x) = 3, \Delta x = 0.1$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
B(x)	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
f(x)	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Tomando dos puntos de la tabla, se encuentra que la recta $B(x)$ obtenida con $B(0) = 0$ y $f(x) = 3$, es $B(x) = 30x + 0$. Gráficamente, esto se representa del siguiente modo en la Figura 10:

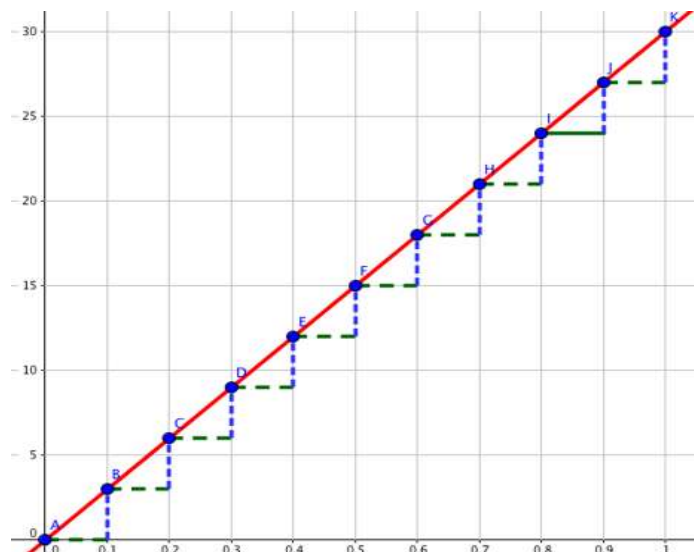


Figura 10. Construcción y visualización de la 1ª acumulación de $f(x) = 3$, $\Delta x = 0.1$

En la Figura 11 se hace un zoom de la gráfica de $B(x)$.

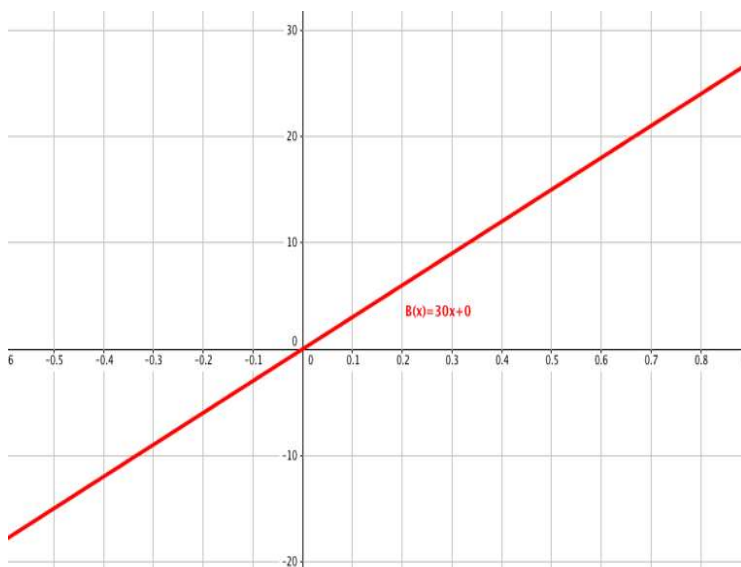


Figura 11. Zoom a la gráfica de la 1ª acumulación de $f(x) = 3$, $\Delta x = 0.1$

2ª Acumulación.

Tomando los valores obtenidos de $B(x)$ con valor inicial $B(0) = 0$, construyamos la segunda acumulación, que llamaremos $C(x)$. Para esto, se necesita dar un valor inicial $C(0) = 0.5$. Cuya tabla se muestra abajo:

Tabla 27. Cálculo de la 2ª acumulación de $f(x) = 3$, $\Delta x = 0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
C(x)	0.5	0.5	3.5	9.5	18.5	30.5	45.5	63.5	84.5	108.5	135.5

B(x)	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
------	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----

Tomando tres puntos, se tiene que la ecuación de esta curva es

$$C(x) = 150x^2 - 15x + \frac{1}{2}$$

Cuya gráfica se puede observar en la Figura 12:

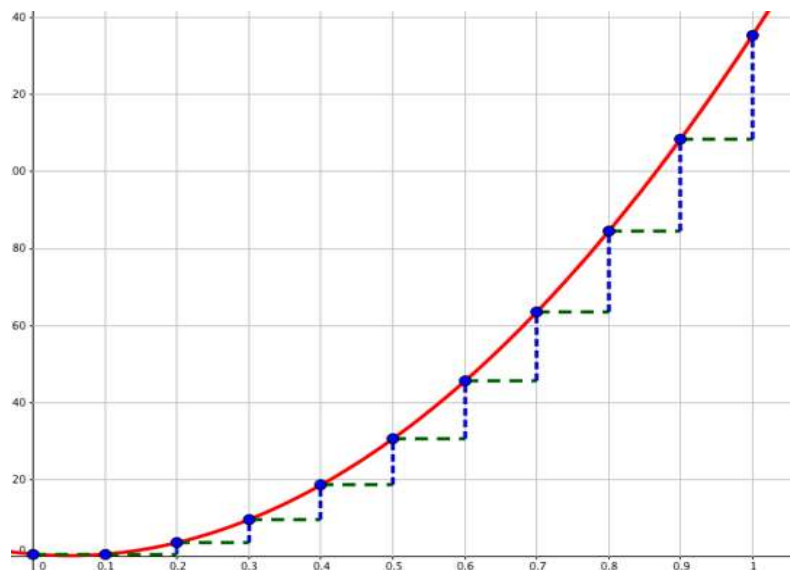


Figura 12. Construcción y visualización de la 2ª acumulación de $f(x) = 3$, $\Delta x = 0.1$

Haciéndole un zoom a la gráfica de $C(x)$, podemos ver cómo se comporta esta función cuadrática.

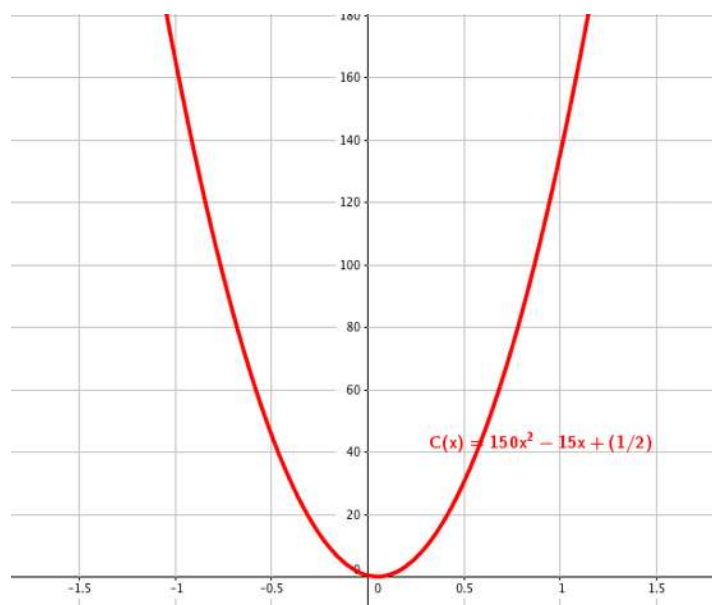


Figura 13. Zoom a la gráfica de la 2ª acumulación de $f(x) = 3$, $\Delta x = 0.1$

3ª Acumulación.

Tomando los valores obtenidos de $C(x)$ con valor inicial $C(0) = 0.5$, construyamos la tercera acumulación que llamaremos $D(x)$.

Para hacer esto, necesitamos un valor inicial, $D(0) = 1$.

Cuya tabla está dada por:

Tabla 28. Cálculo de la 3ª acumulación de $f(x) = 3$, $\Delta x = 0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
D(x)	1	1.5	2	5.5	15	33.5	64	109.5	173	257.5	366
C(x)	0.5	0.5	3.5	9.5	18.5	30.5	45.5	63.5	84.5	108.5	

Tomando 4 puntos, se tiene que la ecuación de esta curva es

$$D(x) = 500x^3 - 150x^2 + 15x + 1$$

Cuya gráfica se puede ver en la Figura 14:

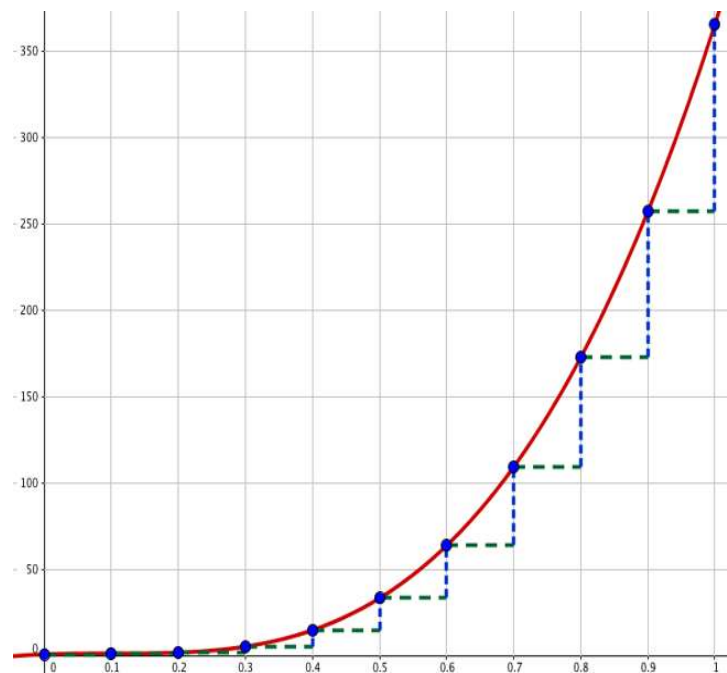


Figura 14. Construcción y visualización de la 3ª acumulación de $f(x) = 3$, $\Delta x = 0.1$

En la Figura 15, se ilustra mejor la tercera acumulación $D(x)$.

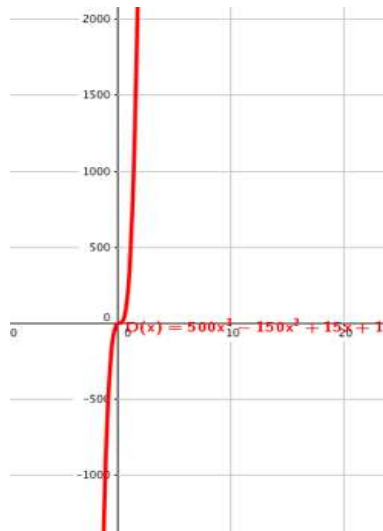


Figura 15. Zoom a la gráfica de la 3ª acumulación de $f(x) = 3$, $\Delta x = 0.1$

Tabla 29. Comparación de la 1ª, 2ª y 3ª acumulaciones e integrales respectivas de la función $f(x) = 3$ para diferentes incrementos

Función $f(x) = 3$			
Acumulaciones	Incrementos		General
	Incremento $\Delta x = 1$	Incremento $\Delta x = 0.1$	
1ª acumulación	$3x - 5$	$30x + 0$	$\int 3dx = 3x + c_1$
2ª acumulación	$\frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x - 3$	$150x^2 - 15x + \frac{1}{2}$	$\int (3x + c_1)dx = \frac{3}{2}x^2 + c_1x + c_2$
3ª acumulación	$\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 1$	$500x^3 - 150x^2 + 1$	$\int (\frac{3}{2}x^2 + c_1x + c_2)dx = \frac{1}{2}x^3 + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3$

Observaciones:

1ª acumulación.

Se observa que las primeras acumulaciones obtenidas para los incrementos $\Delta x = 1$ y $\Delta x = 0.1$, se aproximan a la primera integral de la función $f(x) = 3$, es decir, se aproximan a $3x + c_1$; se sabe que, para lograr esa aproximación, se deben de multiplicar las acumulaciones obtenidas por el incremento correspondiente, ya que hay que recordar que $\frac{dy}{dx} = y'$ y por lo tanto $dy = y'dx$, en este caso, nuestra y' está haciendo el papel de la primera acumulación.

Por lo tanto,

$$(3x - 5) * (1) = 3x - 5$$

$$(30x + 0) * (0.1) = 3x + 0$$

Se aproximan particularmente en el coeficiente del término del primer grado.

Cabe señalar que las integrales correspondientes con valor inicial son:

$$\int 3dx = 3x - 5, \text{ con } B(0) = -5$$

$$\int 3dx = 3x + 0, \text{ con } B(0) = 0$$

2ª acumulación.

Se observa que las segundas acumulaciones obtenidas para los incrementos $\Delta x = 1, \Delta x = 0.5$ y $\Delta x = 0.1$, se aproximan a la segunda integral de la función $f(x) = 6$, es decir, se aproximan a $3x^2 + c_1x + c_2$; se sabe que para lograr esta aproximación, se deben multiplicar las acumulaciones obtenidas por el incremento al cuadrado, ya que hay que recordar que $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$ y por lo tanto, la segunda integral $d^2y = y''dx^2$, en esta caso, nuestra y'' está haciendo el papel de la segunda acumulación.

Por lo tanto,

$$\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x - 3\right) * (1^2) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x - 3$$
$$\left(150x^2 - 15x + \frac{1}{2}\right) * (0.1^2) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{20}x + \frac{1}{200}$$

Se aproximan particularmente al coeficiente del término cuadrático (grado 2).

Cabe señalar que las integrales correspondientes con valor inicial son:

$$\int (3x - 5)dx = \frac{3}{2}x^2 - 5x - 3, \text{ con } C(0) = -3$$
$$\int (3x + 0) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}, \text{ con } C(0) = \frac{1}{2}$$

3ª acumulación.

Se observa que las terceras acumulaciones obtenidas para los incrementos $\Delta x = 1, \Delta x = 0.5$ y $\Delta x = 0.1$, se aproximan mucho a la tercera integral de la función $f(x) = 6$, es decir, se aproximan a $x^3 + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3$; para lograr esta aproximación, se deben multiplicar las acumulaciones obtenidas por el incremento al cubo, ya que hay que recordar que $\frac{d^3y}{dx^3} = y'''$ y por lo tanto, la tercera integral $d^3y = y'''dx^3$, en este caso, nuestra y''' está haciendo el papel de la tercera acumulación.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 1\right) * (1^3) &= \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 1 \\ (500x^3 - 150x^2 + 1) * (0.1^3) &= \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{20}x^2 + \frac{1}{1000}\end{aligned}$$

Se aproximan particularmente al coeficiente del término cúbico (de grado 3).

Cabe señalar que las integrales correspondientes con valor inicial son:

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{3}{2}x^2 - 5x - 3\right) dx &= \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x - 1, \text{ con } D(0) = -1 \\ \int \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) dx &= \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x + 1, \text{ con } D(0) = 1\end{aligned}$$

Análisis de las Acumulaciones Vs Sumas de Riemann para $f(x) = 3$

Como se ha observado, cuando estamos calculando las acumulaciones de la función, estamos sumando cantidades a partir de otras anteriores, por ejemplo, cuando calculamos la 1ª acumulación, tomando el incremento $\Delta x = 1$, decimos que primero, damos un valor inicial $B(0) = c$.

Posteriormente, para $B(1) = B(0) + f(0)$.

Para $B(2) = B(1) + f(1)$.

Para $B(3) = B(2) + f(2)$.

Y así sucesivamente hasta llegar a $B(n) = B(n - 1) + f(n - 1)$.

Ahora, si trabajamos “al revés” o recursivamente, decimos que, por ejemplo:

$B(2) = B(1) + f(1)$. Entonces sabemos que $B(1) = B(0) + f(0) = c + f(0)$.

Sustituyendo en $B(2)$, se tiene que $B(2) = B(1) + f(1) = B(0) + f(0) + f(1) = c + f(0) + f(1)$. Entonces si partimos desde $B(n)$ tenemos:

$B(n) = c + f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n - 1)$.

Esto a su vez, puede representarse como una sumatoria.

$$B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} c + f(i)$$

Donde c es el valor inicial y f la función.

Para el caso cuando $\Delta x \neq 1$, es importante señalar que la acumulación resultante estará acompañada del incremento, es decir, en la sumatoria anterior, no fue necesario multiplicar por el incremento $\Delta x = 1$, ya que no altera en nada la ecuación, pero si $\Delta x \neq 1$ sí la afectará. Por lo tanto, la ecuación se convierte en:

$$B(n)\Delta x = \left(\sum_{i=0}^{n-1} c + f(i) \right) \Delta x$$

Si recordamos un poco de nuestros cursos de cálculo, si nuestro incremento Δx tiende a cero (en símbolos si $\Delta x \rightarrow 0$) entonces el

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} c + f(i) \right) \Delta x$ es una aproximación a la definición de integral definida que expone James Stewart en su libro Cálculo de una Variable:

La **integral definida** de f , de a a b es

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

si existe este límite.

Por lo que mientras más pequeño sea nuestro incremento, nuestra 1ª acumulación se acercará más a la integral definida de f .

3.3 Caso III: Acumulaciones de una Función no Polinomial

$$f(x) = \sqrt{x + 1}$$

3.3.1 Apartado I. Incremento $\Delta x = 1$

Sea la función $f(x) = \sqrt{x + 1}$, representemos gráficamente la primera, la segunda y la tercera acumulación, en este caso, cuando el incremento es $\Delta x = 1$.

En la Tabla 30 se puede apreciar la función evaluada en algunos puntos.

Tabla 30. Tabla de valores de la función no polinomial, $\Delta x = 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	1.41	1.73	2	2.23	2.44	2.64	2.82	3	3.16	3.31

La función $f(x) = \sqrt{x + 1}$, se puede ver graficada para algunos puntos en la Figura 16.

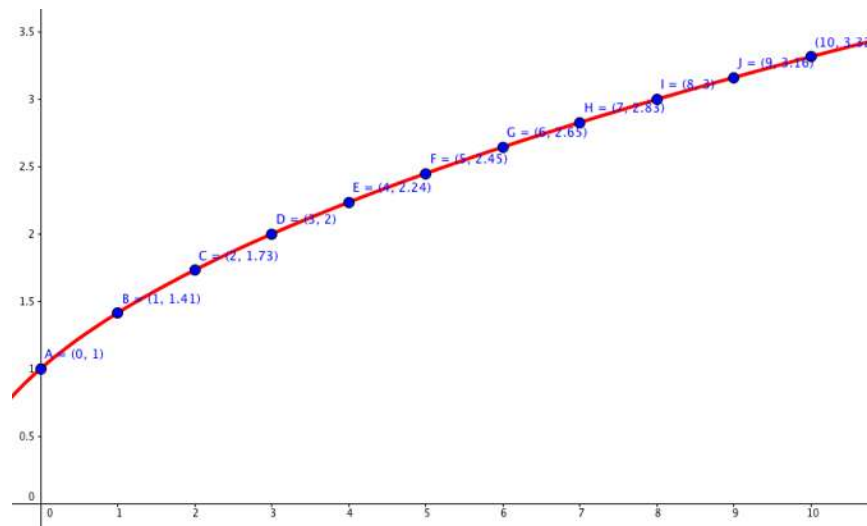


Figura 16. Función no polinomial, $\Delta x = 1$

Comencemos a construir la 1ª, 2ª y 3ª acumulación.

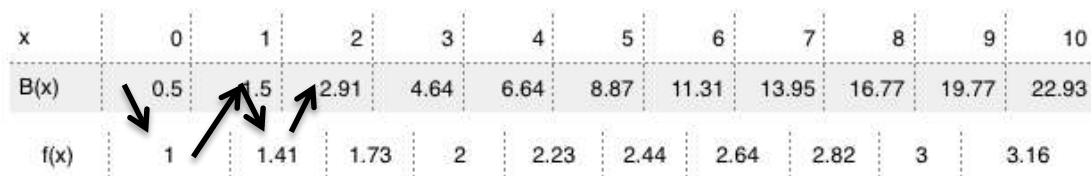
1ª acumulación.

Para calcular la primera acumulación o, mejor dicho, para obtener una aproximación de la primera integral de la función $\sqrt{x+1}$ llamemos a esta primera acumulación, la función $B(x)$. Primero, necesitamos dar un valor inicial $B(0) = 0.5$. Con la función $f(x)$, obtenemos la primera acumulación del siguiente modo: Cuando x vale 0(valor inicial), $B(0) = 0.5$, después incrementado en una unidad las x , $x = 1$, por lo que $B(0)$ se incrementa en el valor de $f(0)$, es decir, nuestro siguiente punto $B(1)$ es igual a $B(1) = B(0) + f(0) = 0.5 + 1 = 1.5$; Incrementando a x en una unidad, $x = 2$, por lo que $B(2)$ en este caso es igual a $B(2) = B(1) + f(1) = 1.5 + 1.41 = 2.91$, es decir, los demás términos siguen la siguiente fórmula general:

$B(x_n) = B(x_n - \Delta x) + f(x_n - \Delta x)$, $n = 1, 2, \dots, n$ como se muestra en la Tabla 31.

Tabla 31. Cálculo de la 1ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B(x)	0.5	1.5	2.91	4.64	6.64	8.87	11.31	13.95	16.77	19.77	22.93
f(x)	1	1.41	1.73	2	2.23	2.44	2.64	2.82	3	3.16	



En la Figura 17 se pueden ver graficados algunos puntos de la 1ª acumulación, así como el comportamiento general de la gráfica $\sqrt{x+1}$; también se ha graficado la 1ª integral de la función $f(x)$, la cual es:

$$\int \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}, \text{ con } B(0) = \frac{1}{2}$$

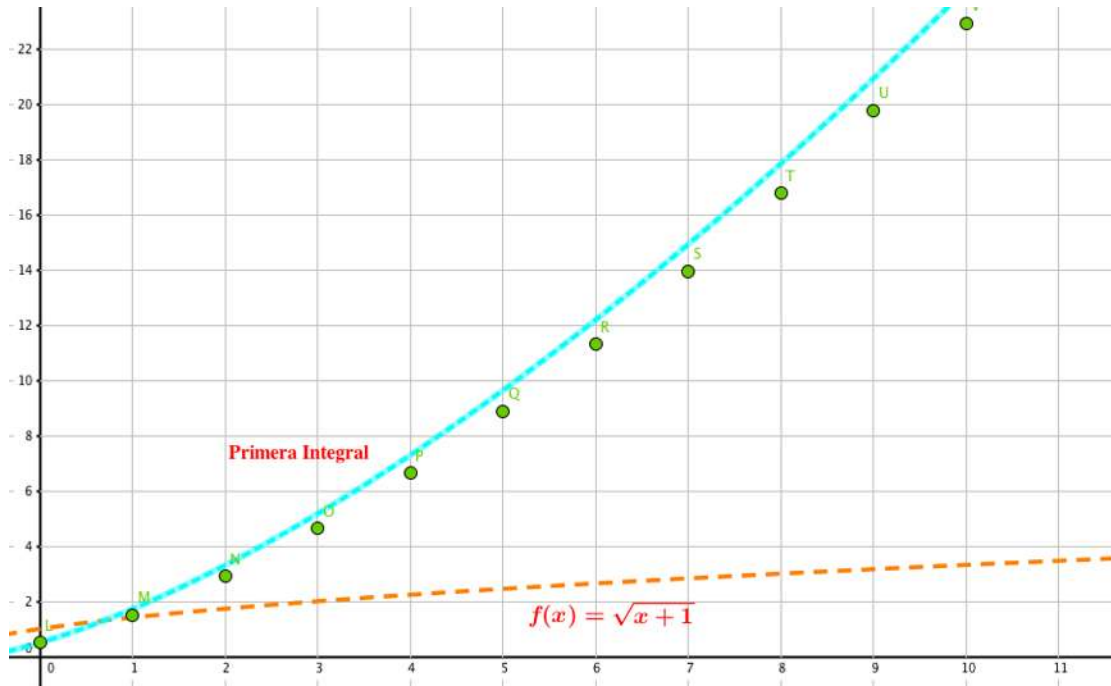


Figura 17. Gráfica de la 1ª integral y algunos puntos de la 1ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 1$

2ª acumulación.

Para obtener la segunda acumulación o en este caso, una aproximación de la segunda integral de $f(x)$, utilizando la función acumulación $B(x)$, se forma la segunda acumulación, que llamaremos $C(x)$, de la siguiente manera:

Se da un valor inicial arbitrario, de $C(0) = 1$. Se incrementa en una unidad a las x , llegando a $x = 1$, para obtener $C(1)$, incrementamos $C(0)$ en $B(0)$ unidades, es decir, $C(1) = C(0) + B(0) = 1 + 0.5 = 1.5$. Para $x = 2$, incrementamos $C(1)$ en $B(1)$ unidades: $C(2) = C(1) + B(1) = 1.5 + 1.5 = 3$, es decir, los demás términos siguen la siguiente fórmula general:

$$C(x_n) = C(x_n - \Delta x) + B(x_n - \Delta x), n = 1, 2, \dots, n \text{ como se muestra en la Tabla 32.}$$

Tabla 32. Cálculo de la 2ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C(x)	1	1.5	3	5.91	10.55	17.19	26.06	37.37	51.32	68.09	87.86
B(x)	0.5	1.5	2.91	4.64	6.64	8.87	11.31	13.95	16.77	19.77	

En la Figura 18, se puede apreciar el comportamiento de algunos de los puntos de la 2ª acumulación y de cómo éstos, se van aproximando a la 2ª integral de la función $\sqrt{x+1}$, la cual algebraicamente se expresa cómo:

$$\int \left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \right) dx = \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{x}{6} + \frac{11}{15}, \text{ con } C(0) = 1$$

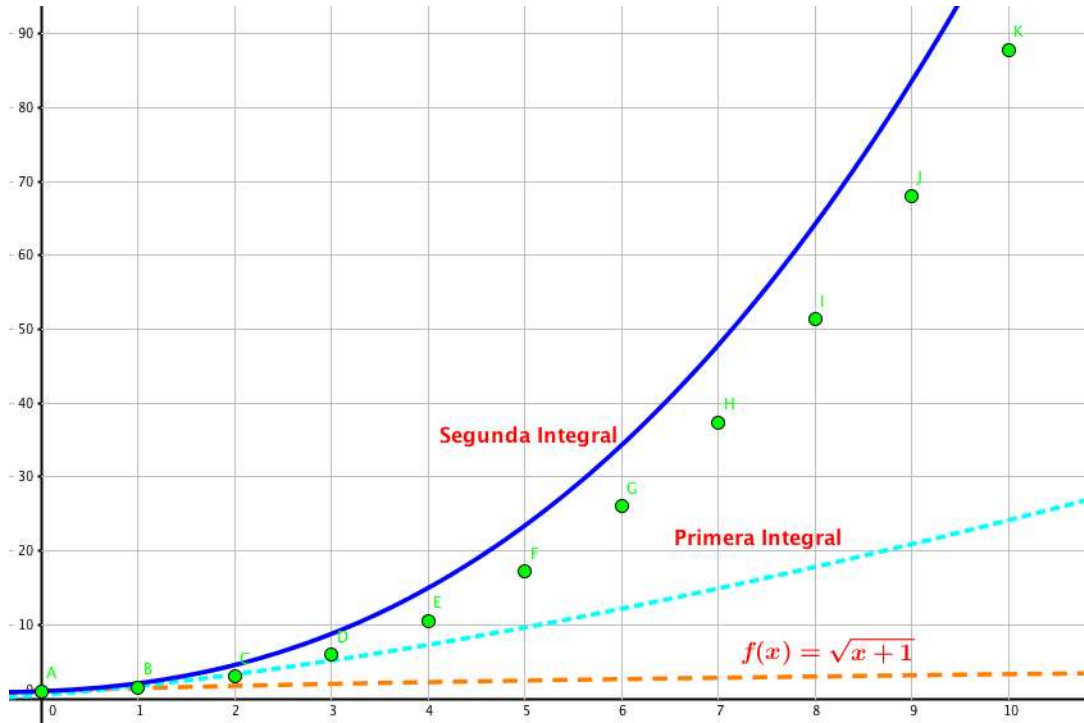


Figura 18. Gráfica de la 1ª y 2ª integral, así como algunos puntos de la 2ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 1$

Observaciones:

- Se puede ver que los puntos de la 2ª acumulación de $f(x)$, es decir, de $C(x)$ se aproximan a la 2ª integral de la función $f(x)$, i.e., a $\frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{x}{6} + \frac{11}{15}$.

3ª acumulación.

Para obtener la tercera acumulación o en este caso, una aproximación de la tercera integral de $f(x)$, utilizando la función acumulación $C(x)$, se forma la tercera acumulación, que llamaremos $D(x)$, de la siguiente manera:

Se da un valor inicial arbitrario, de $D(0) = 1.5$. Se incrementa en una unidad a las x , llegando a $x = 1$, para obtener $D(1)$, incrementamos $D(0)$ en $C(0)$ unidades, es decir, $D(1) = D(0) + C(0) = 1.5 + 1 = 2.5$. Para $x = 2$, incrementamos $D(1)$ en $C(1)$ unidades: $D(2) = D(1) + C(1) = 2.5 + 1.5 = 4$, es decir, los demás términos siguen la siguiente fórmula general:

$D(x_n) = D(x_n - \Delta x) + C(x_n - \Delta x)$, $n = 1, 2, \dots, n$ como se muestra en la Tabla 33.

Tabla 33. Cálculo de la 3ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D(x)	1.5	2.5	4	7	12.91	23.46	40.65	66.71	104.08	155.4	223.49
C(x)	1	1.5	3	5.91	10.55	17.19	26.06	37.37	51.32	68.09	

En la Figura 19, se puede apreciar el comportamiento de algunos de los puntos de la 3ª acumulación y de cómo éstos, se van aproximando a la 3ª integral de la función $\sqrt{x+1}$, la cual algebraicamente se expresa cómo:

$$\int \left(\left(\frac{4}{15} (x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}x + \frac{11}{15} \right) dx \right) = \frac{8}{105} (x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{12}x^2 + \frac{11}{15}x + \frac{299}{210}, \text{ con } D(0) = 1.5$$

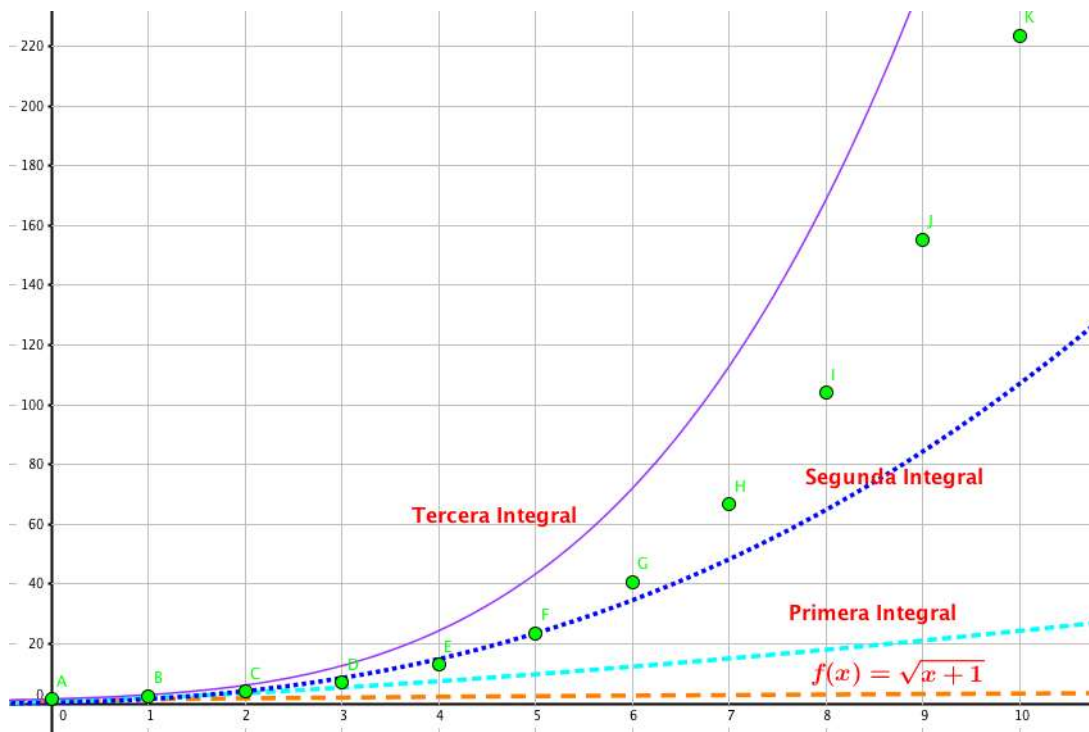


Figura 19. Gráfica de la 1ª, 2ª y 3ª integrales, así como algunos puntos de la 3ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 1$

3.3.2 Apartado II. Incremento $\Delta x = 0.1$

Sea la función $f(x) = \sqrt{x+1}$, representemos gráficamente la primera, la segunda y la tercera acumulación, en este caso, cuando el incremento es $\Delta x = 0.1$.

En la Tabla 34 se puede apreciar la tabla de valores de la función $\sqrt{x+1}$.

Tabla 34. Tabla de valores de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y	1	1.048	1.095	1.140	1.183	1.224	1.264	1.303	1.341	1.378	1.414	1.449	1.483	1.516	1.549	1.581	1.612	1.643	1.673	1.702	1.732

La función $f(x) = \sqrt{x+1}$, se puede ver graficada para algunos puntos en la Figura 20.

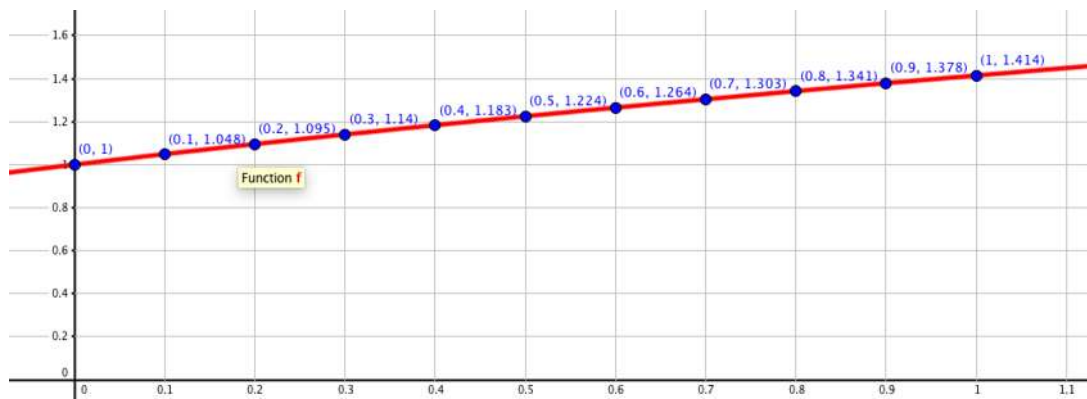


Figura 20. Gráfica de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$

Comencemos a construir la 1ª, 2ª y 3ª acumulación.

1ª acumulación.

Para calcular la primera acumulación o, mejor dicho, para obtener una aproximación de la primera integral de la función $\sqrt{x+1}$ llamemos a esta primera acumulación, la función $B(x)$. Primero, necesitamos dar un valor inicial $B(0) = 0$. Con la función $f(x)$, obtenemos la primera acumulación del siguiente modo:

Cuando x vale 0(valor inicial), $B(0) = 0$, después incrementado en 0.1 unidades las x , $x = 0.1$, por lo que $B(0)$ se incrementa en el valor de $f(0)$, es decir, nuestro siguiente punto $B(0.1)$ es igual a $B(0.1) = B(0) + f(0) = 0 + 1 = 1$; Incrementando a x en 0.1 unidades, $x = 0.2$, por lo que $B(0.2)$ en este caso es igual a $B(0.2) = B(0.1) + f(0.1) = 1 + 1.048 = 2.048$, es decir, los demás términos siguen la siguiente fórmula general:

$B(x_n) = B(x_n - \Delta x) + f(x_n - \Delta x), n = 1, 2, \dots, n$ como se muestra en la tabla.

Tabla 35. Cálculo de la 1ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
B(x)	0	1	2.048	3.143	4.283	5.466	6.69	7.954	9.257	10.59	11.97	13.39	14.83	16.32	17.83	19.38	20.96	22.58	24.25	25.95
f(x)	1	1.048	1.095	1.140	1.183	1.224	1.264	1.303	1.341	1.378	1.414	1.449	1.483	1.516	1.549	1.581	1.612	1.673	1.702	

En la Figura 21 se ha graficado la 1ª integral de la función $f(x)$ (aparece en línea continua), la cual es:

$$\int \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}, \text{ con } B(0) = 0$$

Usando la ayuda de Geogebra, con la tabla de valores obtenida de la 1ª acumulación, hacemos otra tabla, la cual deberá llevar los valores de $B(x)$, multiplicada por el incremento; en el caso anterior cuando $\Delta x = 1$, no fue necesario hacer esto, ya que la multiplicación de los datos por el valor 1, es el mismo, pero en este caso sí es importante, ya que la $\Delta x = 0.1$, cuyos valores se deberán aproximar en efecto, a la 1ª integral. En la Tabla 36 se muestran los valores nuevos. También se han graficado los puntos de esta

aproximación (en verde). Cabe señalar que se ha utilizado el apoyo de Geogebra para obtener un Ajuste de curvas¹, la cual, al ingresar la lista de puntos, así como las funciones a las que nos queremos aproximar (en este caso la función $(x + 1)^{\frac{3}{2}}$ y el polinomio constante de grado 0, es decir, x^0 , nos dio como resultado una ecuación que es en efecto una aproximación muy precisa de la 1ª integral (gráfica en línea punteada).

Tabla 36. Valores de la 1ª acumulación de $f(x)$ usando Geogebra

x	B(x)dx
0	0
0.1	0.1
0.2	0.2048
0.3	0.3143
0.4	0.4283
0.5	0.5466
0.6	0.669
0.7	0.7954
0.8	0.9257
0.9	1.059
1	1.197
1.1	1.339
1.2	1.483
1.3	1.632
1.4	1.783
1.5	1.938
1.6	2.096
1.7	2.258
1.8	2.425
1.9	2.595

¹ En el apéndice, en un pequeño tutorial llamado “Ajuste de curvas con Geogebra” se muestra cómo obtener una aproximación de la ecuación de una función dada una lista de puntos.

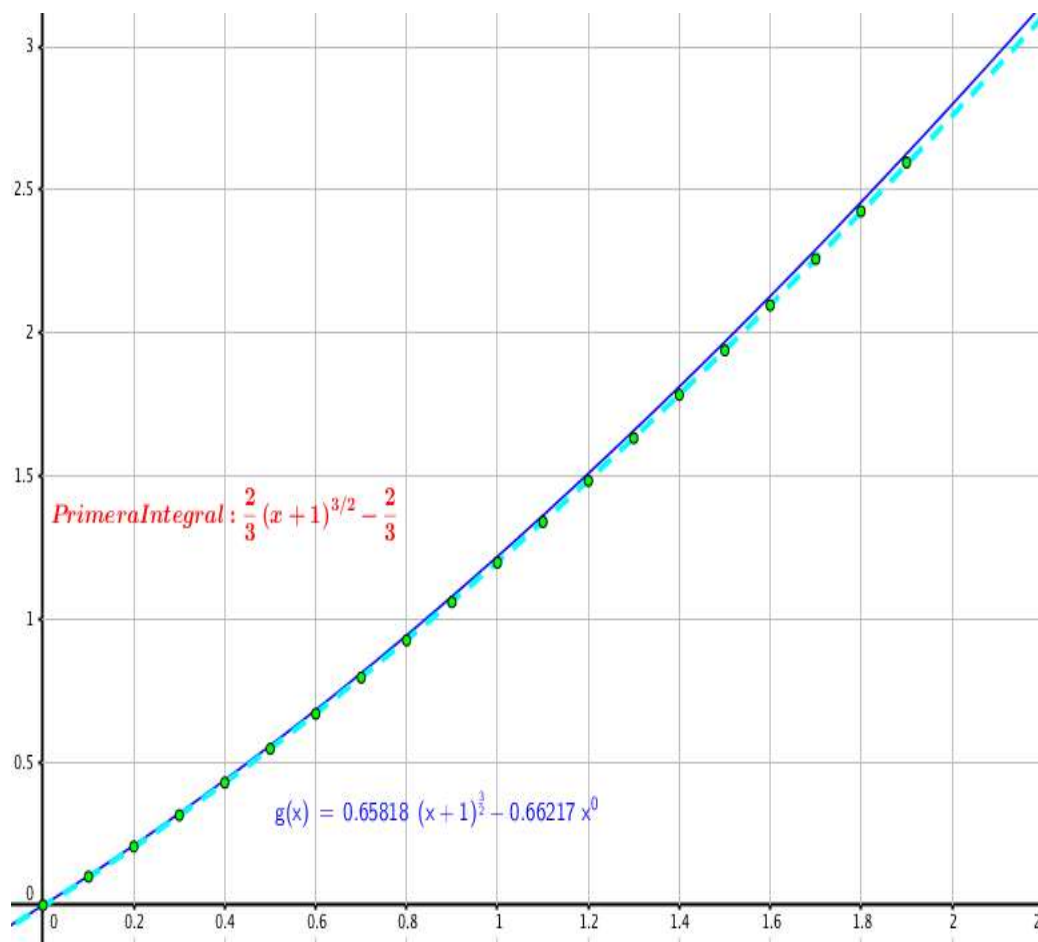


Figura 21. Gráfica de la 1ª integral y de la aproximación obtenida con Geogebra de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$

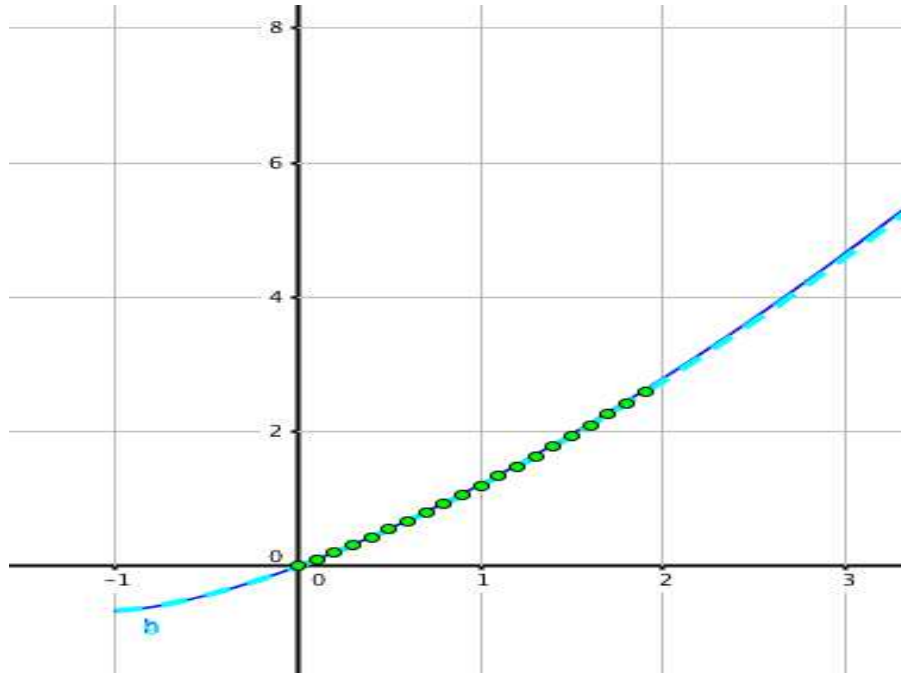


Figura 22. Zoom de cómo la aproximación de la 1ª acumulación obtenida con Geogebra, se aproxima a la 1ª integral de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$

Observaciones:

- Se puede ver que la 1ª función acumulación es una muy buena aproximación de la 1ª integral, ya que tanto los coeficientes del término $(x + 1)^{\frac{3}{2}}$ como los términos constantes, son “casi” idénticos.
- Haciendo un zoom a las gráficas (Ver Figura 22), se observa que la gráfica de la 1ª función acumulación “casi” se traslapa con la gráfica de la 1ª integral. Es decir, para números muy grandes de las abscisas, ambas funciones tienen “casi” la misma gráfica.

2ª acumulación.

Para obtener la segunda acumulación o en este caso, una aproximación de la segunda integral de $f(x)$, utilizando la función acumulación $B(x)$, se forma la segunda acumulación, que llamaremos $C(x)$, de la siguiente manera:

Se da un valor inicial arbitrario, de $C(0) = 0.1$. Se incrementa en 0.1 unidades a las x , llegando a $x = 0.1$, para obtener $C(0.1)$, incrementamos $C(0)$ en $B(0)$ unidades, es decir, $C(0.1) = C(0) + B(0) = 0.1 + 0 = 0.1$. Para $x = 0.2$, incrementamos $C(0.1)$ en $B(0.1)$ unidades: $C(0.2) = C(0.1) + B(0.1) = 0.1 + 1 = 1.1$, es decir, los demás términos siguen la siguiente fórmula general: $C(x_n) = C(x_{n-1}) + B(x_n - x_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots, n$ como se muestra en la tabla.

Tabla 37. Cálculo de la 2ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
C(x)	0.1	0.1	1.1	3.148	6.291	10.574	16.04	22.73	30.68	39.941	50.53	62.509	75.899	90.729	107.049	124.879	144.259	165.219	187.799	212.049
B(x)	0	1	2.048	3.143	4.283	5.466	6.69	7.954	9.257	10.598	11.97	13.39	14.83	16.32	17.83	19.38	20.96	22.58	24.25	

En la Figura 23 se ha graficado la 2ª integral de la función $f(x)$ (aparece en línea continua), la cual es:

$$\int \left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \right) dx = \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}, \text{ con } C(0) = 0.1$$

Usando la ayuda de Geogebra, con la tabla de valores obtenida de la 2ª acumulación, hacemos otra tabla, la cual deberá llevar los valores de $C(x)$, multiplicada por el incremento al cuadrado; en el caso anterior cuando $\Delta x = 1$, no fue necesario hacer esto, ya que la multiplicación de los datos por el valor 1 al cuadrado, es el mismo, pero en este caso sí es importante, ya que la $\Delta x^2 = (0.1)^2 = 0.01$, cuyos valores se deberán aproximar en efecto, a la 2ª integral. En la Tabla 38 se muestran los valores nuevos. También se han graficado los puntos de esta aproximación (en verde). Cabe señalar que

se ha utilizado el apoyo de Geogebra para obtener un Ajuste de curvas², el cual, al ingresar la lista de puntos, así como las funciones a las que nos queremos aproximar (en este caso la función $(x + 1)^{\frac{5}{2}}$, el polinomio de grado 1 y el polinomio constante de grado 0, es decir, x^0 , nos dio como resultado una ecuación que es en efecto una aproximación muy precisa de la 2ª integral (gráfica en línea punteada).

Tabla 38. Valores de la 2ª acumulación de $f(x)$ usando Geogebra

x	$C(x)dx^2$
0	0.001
0.1	0.001
0.2	0.011
0.3	0.03148
0.4	0.06291
0.5	0.10574
0.6	0.1604
0.7	0.2273
0.8	0.3068
0.9	0.39941
1	0.5053
1.1	0.62509
1.2	0.75899
1.3	0.90729
1.4	1.07049
1.5	1.24879
1.6	1.44259
1.7	1.65219
1.8	1.87799
1.9	2.12049

² En el apéndice, en la sección “Ajuste de curvas con Geogebra” se muestra cómo obtener una aproximación de la ecuación de una función dada una lista de puntos.

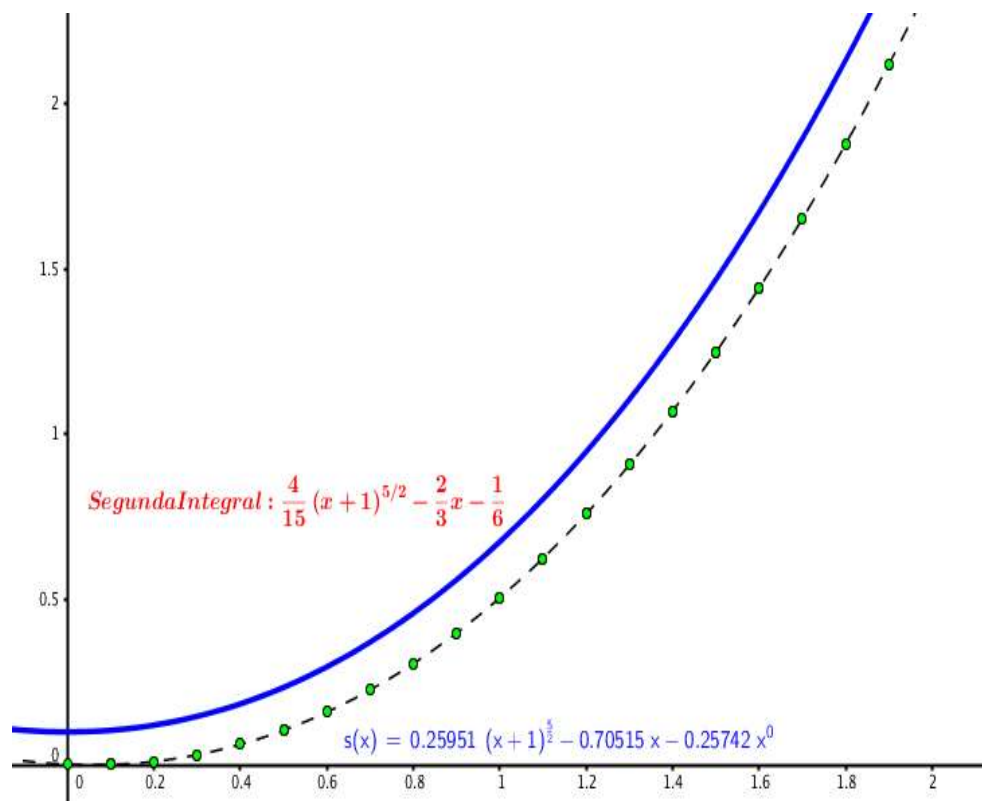


Figura 23. Gráfica de la 2ª integral y de la aproximación de la 2ª acumulación obtenida con Geogebra de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$

Haciendo un zoom a las gráficas:

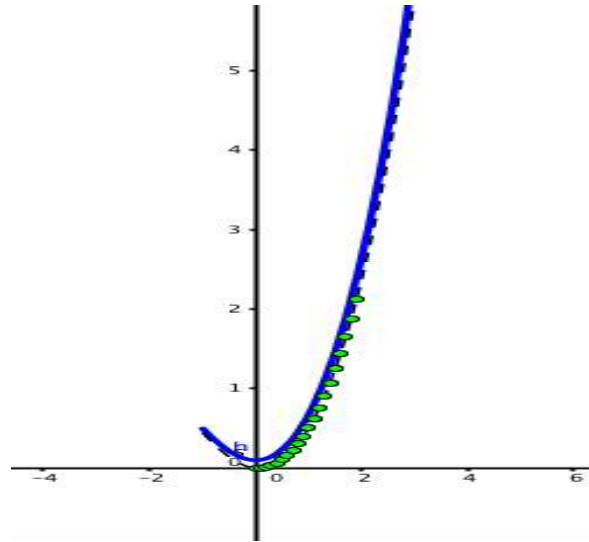


Figura 24. Zoom de cómo la aproximación de la 2ª acumulación obtenida con Geogebra se aproxima a la 2ª integral de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$

Observaciones:

- Se puede ver que la 2ª función acumulación es una muy buena aproximación de la 2ª integral, ya que tanto los coeficientes del término $(x + 1)^{\frac{5}{2}}$ como los términos de los polinomios de grado 1 y 0, son “casi” idénticos.

Es decir, $\frac{4}{15} = 0.26666 \approx 0,25951$; $-\frac{2}{3} = -0.66666 \approx -0.70515$; $-\frac{1}{6} = -0.16666 \approx -0.26742$

- Haciendo un zoom a las gráficas (Ver Figura 24), se observa que la gráfica de la 2ª función acumulación “casi” se traslapa con la gráfica de la 2ª integral.

3ª acumulación.

Para obtener la tercera acumulación o en este caso, una aproximación de la tercera integral de $f(x)$, utilizando la función acumulación $C(x)$, se forma la tercera acumulación, que llamaremos $D(x)$, de la siguiente manera:

Se da un valor inicial arbitrario, de $D(0) = 0.2$. Se incrementa en 0.1 unidades a las x , llegando a $x = 0.1$, para obtener $D(0.1)$, incrementamos $D(0)$ en $C(0)$ unidades, es decir, $D(0.1) = D(0) + C(0) = 0.2 + 0.1 = 0.3$. Para $x = 0.2$, incrementamos $D(0.1)$ en $C(0.1)$ unidades: $D(0.2) = D(0.1) + C(0.1) = 0.3 + 0.1 = 0.4$, es decir, los demás términos siguen la siguiente fórmula general: $D(x_n) = D(x_{n-1}) + C(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots, n$ como se muestra en la Tabla 39.

Tabla 39. Cálculo de la 3ª acumulación de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
D(x)	0.2	0.3	0.4	1.5	4.648	10.935	21.513	37.553	60.283	90.906	130.906	181.4	243.94	319.831	410.552	517.593	642.464	786.715	951.926	1139.717
C(x)	0.1	0.1	1.1	3.148	6.291	10.574	16.04	22.73	30.684	39.941	50.531	62.501	75.891	90.721	107.041	124.871	144.251	165.211	187.791	

En la Figura 25 se ha graficado la 3ª integral de la función $f(x)$ (aparece en línea continua), la cual es:

$$\int \left(\left(\frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \right) dx \right) = \frac{8}{105}(x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{13}{105}, \text{ con } D(0)=0.2$$

Usando la ayuda de Geogebra, con la tabla de valores obtenida de la 3ª acumulación, hacemos otra tabla, la cual deberá llevar los valores de $D(x)$, multiplicada por el incremento al cubo; en el caso anterior cuando $\Delta x = 1$, no fue necesario hacer esto, ya que la multiplicación de los datos por el valor 1 al cubo, es el mismo, pero en este caso sí es importante, ya que la $\Delta x^3 = (0.1)^3 = 0.001$, cuyos valores se deberán aproximar en efecto, a la 3ª integral. En la Tabla 40 se muestran los valores nuevos. También se han graficado los puntos de esta aproximación (en verde). Cabe señalar que se ha utilizado el

apoyo de Geogebra para obtener un Ajuste de curvas³, el cual, al ingresar la lista de puntos, así como las funciones a las que nos queremos aproximar (en este caso la función $(x + 1)^{\frac{7}{2}}$ y los polinomios de grado 2, 1 y constante de grado 0, es decir, x^0 , nos dio como resultado una ecuación que es en efecto una aproximación muy precisa de la 3ª integral (gráfica en línea punteada).

Tabla 40. Valores de la 3ª acumulación de $f(x)$ usando Geogebra

x	D(x)(dx ³)
0	0.0002
0.1	0.0003
0.2	0.0004
0.3	0.0015
0.4	0.004648
0.5	0.010939
0.6	0.021513
0.7	0.037553
0.8	0.060283
0.9	0.0909
1	0.1309
1.1	0.1814
1.2	0.24394
1.3	0.319831
1.4	0.410552
1.5	0.517593
1.6	0.642464
1.7	0.786715
1.8	0.951926
1.9	1.139717

³ En el apéndice, en “Ajuste de curvas con Geogebra” se muestra cómo obtener una aproximación de la ecuación de una función dada una lista de puntos.

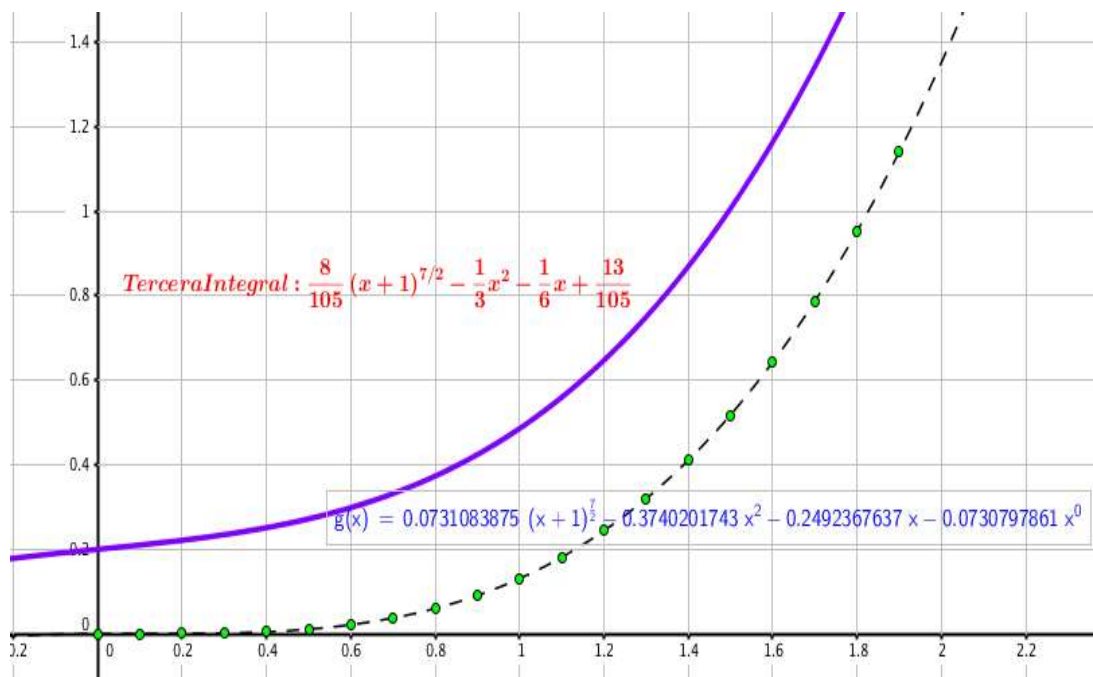


Figura 25. Gráfica de la 3ª integral y de la aproximación obtenida con Geogebra de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$

Haciendo un zoom a las gráficas:

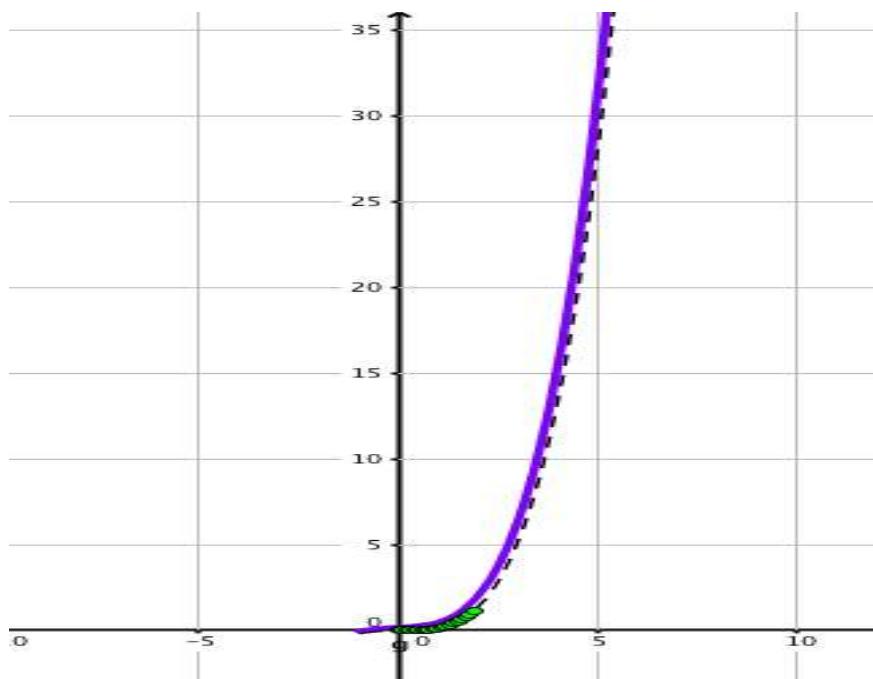


Figura 26. Zoom de cómo la aproximación de la 3ª acumulación obtenida con Geogebra, se aproxima a la 3ª integral de la función no polinomial, $\Delta x = 0.1$

Observaciones:

- Se puede ver que la 3ª función acumulación es una muy buena aproximación de la 3ª integral, ya que tanto los coeficientes del término $(x + 1)^{\frac{7}{2}}$ como los términos de los polinomios de grado 2, 1 y 0, son “casi” idénticos o muy cercanos.
- Haciendo un zoom a las gráficas, se observa que la gráfica de la 3ª función acumulación “casi” se traslapa con la gráfica de la 3ª integral.

3.4 Caso IV: Acumulaciones de una Función Exponencial

$$f(x) = 2e^{2x}$$

A diferencia de los otros casos, cuando la función era constante, polinomial y no polinomial, en las que se usaron tablas de valores que se llenaban “a mano”, en este caso de la función exponencial se utilizó al 100% la ayuda del software de Geometría dinámica Geogebra, el cual nos permite realizar cálculos y operaciones numéricas de una manera bastante rápida y eficaz.

En este caso, sólo se calculó la primera acumulación o la aproximación a la primera integral, esto debido a que la función exponencial tiene la característica de que $\int e^x dx = e^x + c$, por lo que, al sacar la primera acumulación es un proceso idéntico calcular la segunda y tercera acumulación.

Utilizando la Vista de Hoja de Cálculo de Geogebra, se introdujo en la primera columna de la hoja, el valor inicial que por elección se decidió que comenzara en 0, pero puede graficarse a partir de cualquier valor. En la segunda columna se introdujo el valor del incremento, que se decidió fuera $\Delta x = 0.1$ porque con valores pequeños de las abscisas, se puede visualizar mejor el comportamiento de la función. Con el incremento y el valor inicial, se introdujo una fórmula en las demás celdas, que permitió obtener valores automáticos de los demás puntos.⁴ En la siguiente columna, se introdujo la función que estaba evaluada en cada valor de x obtenido anteriormente. Ya que se tuvo la tabla de valores requerida, se creó una tabla y una lista de puntos, que Geogebra graficó. En la Tabla 41 se pueden observar los valores obtenidos.

⁴ En el apéndice, se explica cómo se puede graficar una función utilizando la hoja de cálculo de Geogebra

Tabla 41. Algunos valores de la función exponencial obtenidos con Geogebra

x	dx	f(x) = 2exp(2x)
0	0.1	2
0.1	0.1	2.44281
0.2	0.1	2.98365
0.3	0.1	3.64424
0.4	0.1	4.45108
0.5	0.1	5.43656
0.6	0.1	6.64023
0.7	0.1	8.1104
0.8	0.1	9.90606
0.9	0.1	12.09929
1	0.1	14.77811
1.1	0.1	18.05003
1.2	0.1	22.04635
1.3	0.1	26.92748
1.4	0.1	32.88929
1.5	0.1	40.17107

La función $2e^{2x}$ se puede ver en la siguiente Figura 27.⁵

⁵ La importancia de haber creado una tabla de valores con ayuda de la hoja de Cálculo se observará más tarde.

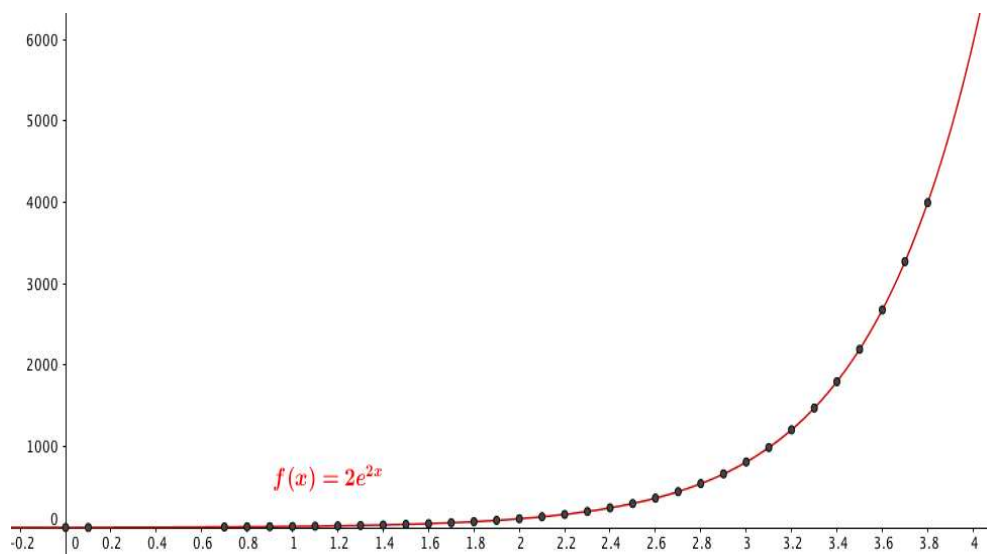


Figura 27. Gráfica de la función

Para calcular la primera acumulación o una aproximación de la primera integral, en la columna siguiente, llamada la función B(x), se puso en x=0, el valor inicial 1, para el valor siguiente, es decir, para x=0.1 se utilizó la fórmula

$$B(x_n) = B(x_{n-1}) + f(x_{n-1}), \text{ donde } n = 1, 2, 3, \dots n.$$

En la Tabla 42 se muestran los valores obtenidos para la “primera acumulación”.

Tabla 42. 1ª acumulación de la función obtenida con ayuda de Geogebra, parte 1

x	B(x)
0	1
0.1	3
0.2	5.44281
0.3	8.42645
0.4	12.07069
0.5	16.52177
0.6	21.95834
0.7	28.59857
0.8	36.70897
0.9	46.61504
1	58.71433
1.1	73.49244
1.2	91.54247
1.3	113.58882
1.4	140.5163
1.5	173.40559

Esta realmente no es la primera acumulación, ya que cabe señalar que el incremento es $\Delta x = 0.1$, por lo que, para obtener la verdadera primera acumulación, se

debe hacer otra tabla de valores en la que cada valor de $B(x)$, se multiplique por el incremento $\Delta x = 0.1$. En la Tabla 43 se muestran los valores de la 1ª acumulación.

Tabla 43. 1ª acumulación de la función obtenida con ayuda de Geogebra, parte 2

x	$B(x)dx$
0	0.1
0.1	0.3
0.2	0.54428
0.3	0.84265
0.4	1.20707
0.5	1.65218
0.6	2.19583
0.7	2.85986
0.8	3.6709
0.9	4.6615
1	5.87143
1.1	7.34924
1.2	9.15425
1.3	11.35888
1.4	14.05163
1.5	17.34056

Ahora, para encontrar una forma explícita (aproximación) de la primera acumulación, se utiliza el comando Ajusta de Geogebra⁶, el cual nos da como resultado que la forma explícita de la 1ª acumulación es: $0.90284e^{2x}$

En la Figura 28 se muestra la 1ª acumulación (línea punteada), así como la 1ª integral (línea sólida). La primera 1ª integral se expresa algebraicamente como:

⁶ En el apéndice, se muestra cómo hacer un Ajuste de Curvas con Geogebra; es decir, con una lista de puntos, encontrar una aproximación de la forma algebraica de la función.

$$\int 2e^{2x} dx = e^{2x}, \text{ con } B(0) = 1$$

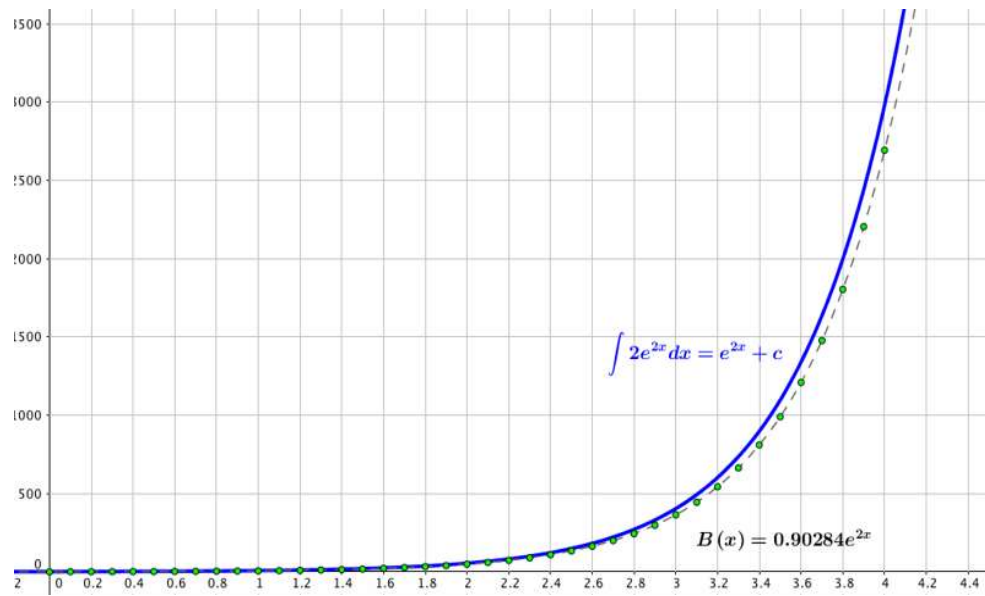


Figura 28. Gráfica de la 1ª integral de la función con su respectiva aproximación a la gráfica de la 1ª acumulación

Haciendo zoom a la gráfica anterior:

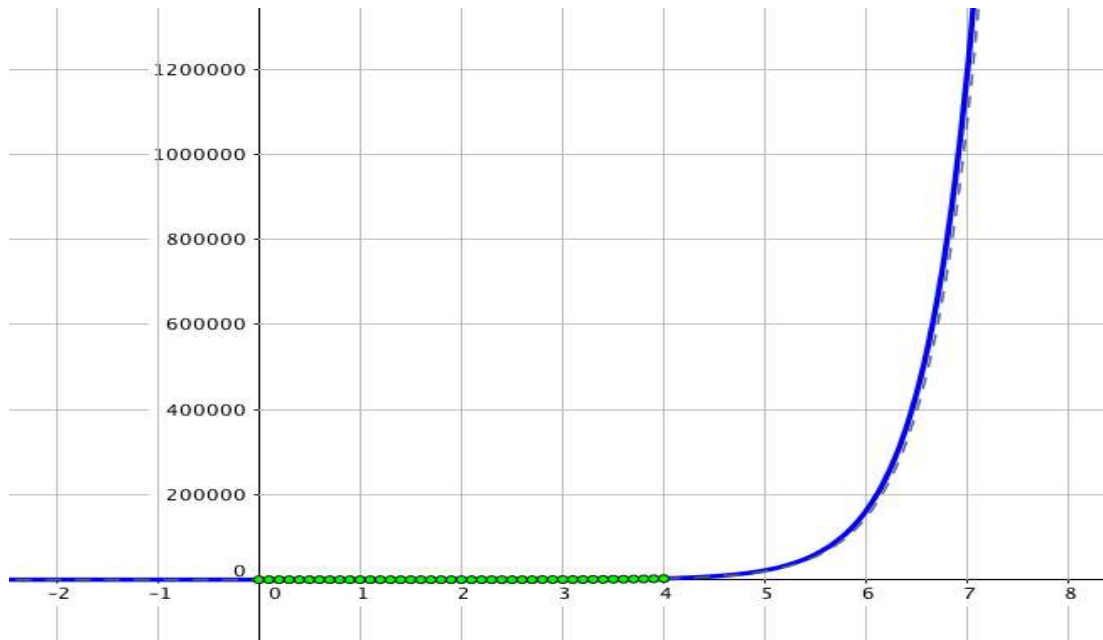


Figura 29. Zoom de cómo la aproximación de la 1ª acumulación de la función se aproxima a la 1ª integral de tal función

Observaciones:

- Se puede observar que es una aproximación “muy buena” ya que el coeficiente de la 1ª acumulación es 0.98284, “casi” 1, el coeficiente de la 1ª integral.
- En la 2ª gráfica (Ver Figura 29), haciéndole un zoom a ambas gráficas, en efecto, la 1ª integral (en línea sólida) y la 1ª acumulación (en línea punteada) se ve que están casi traslapadas.

3.5 Exposición de la Propuesta a los Estudiantes

En esta tesis se pretende enseñar a los estudiantes la propuesta de aproximarse a la integral mediante acumulaciones y que, mediante la aplicación de hojas de trabajo, éstos puedan corroborar su validez. Se busca experimentar con estudiantes que ya hayan cursado los cursos de cálculo diferencial e integral para que tengan un medio de comparación de los resultados que obtengan utilizando acumulaciones con los resultados del cálculo integral.

Se tiene el objetivo de mostrar a los estudiantes cómo obtener la 1ª, 2ª y 3ª acumulación de la función $f(x) = 6$. También se busca que los estudiantes comprendan que para diferentes valores del incremento Δx , se pueden obtener diferentes acumulaciones. Para comenzar a introducir el tema de acumulaciones, se tomará la función $f(x) = 6$, con el incremento $\Delta x = 1$. Cuando el estudiante esté calculando la forma algebraica de la acumulación, se le proveerá el uso de la tecnología como Geogebra para que obtenga resultados más precisos en un menor tiempo. Posteriormente, con la misma función $f(x) = 6$, pero ahora con el incremento $\Delta x = 0.5$. Y para finalizar la explicación con la función $f(x) = 6$ y el incremento $\Delta x = 0.1$. El objetivo de usar diferentes incrementos es que los estudiantes observen que se pueden obtener distintas formas algebraicas de la función de acumulación y de cómo al utilizar incrementos más pequeños se pueden aproximar a la integral definida de la función en cuestión.

Se elaborarán hojas de trabajo, con ejercicios de diferente grado de dificultad y diferentes incrementos, que permitirá a los estudiantes poner en práctica sus conocimientos sobre acumulaciones (después de que se les haya explicado el método). Es decir, el estudiante deberá de calcular las acumulaciones de cada función dada y cada incremento, así como calcular la forma algebraica de las funciones de acumulación. Junto con las hojas de trabajo, se tratará de estar cuestionando al estudiante sobre aspectos relacionados con la resolución de las hojas de trabajo, para analizar si le quedó claro el proceso, para ver si tiene dudas y para saber si comprendió eficazmente lo que es una acumulación y su relación con las integrales que ya conocen.

Capítulo 4

Experimentación y Análisis de los Resultados

Una vez que las hojas de prácticas estuvieron listas, se llevaron a revisión con el asesor el Dr. José Carlos Cortés, así como la lista de preguntas que se redactaron, las cuales iban dirigidas a los estudiantes. El asesor encontró que las hojas de trabajo estaban bien. A la lista de preguntas fue necesario que se le editaran algunas preguntas (en algunas era cuestión de reformular la pregunta) con el fin de evitar preguntas vacías cuya respuesta fuera un “sí” o un “no”, es decir, hacer preguntas con las cuales se pudiera conocer más el pensamiento matemático del estudiante. Se eliminaron algunas preguntas que carecían de contenido matemático.

Cabe señalar que las hojas de trabajo que se realizaron, fueron hechas con el debido cuidado para que se lograra guiar a los estudiantes a la construcción de los conceptos; como es algo novedoso, quizá sea un reto para el estudiante, pero si se le explica bien el procedimiento tanto del método como de las hojas de trabajo, se evitarán confusiones de los estudiantes, así como malos entendidos. Enseguida se explican las hojas de prácticas.

4.1 Hojas de Prácticas

Se elaboraron tres hojas diferentes de prácticas. Cada hoja de práctica, contenía tres ejercicios; el estudiante debía seleccionar únicamente un ejercicio de cada sección, es decir, en total tres ejercicios. Enseguida se explica el propósito de cada hoja de trabajo:

4.1.1 Hoja de Práctica #1

En la hoja de trabajo #1, en cada ejercicio, se da la función para calcular su 1ª, 2ª y 3ª acumulaciones. Se da el incremento que de acuerdo con James Stewart, es cuando x cambia de x_1 a x_2 , o matemáticamente hablando, $\Delta x = x_2 - x_1$. Se da también el valor inicial para las abscisas y los demás valores se calculan con el incremento y el valor inicial dado. Se provee también el valor inicial de la acumulación, el cual le servirá al estudiante para comenzar a sumar y calcular la tabla de la acumulación correspondiente. No hay nada en especial en los valores que se proveen, son números cualesquiera. Independientemente del ejercicio seleccionado, el estudiante debe seguir las indicaciones para comenzar a elaborar las hojas de trabajo.

Un detalle importante en la hoja de práctica #1, es que el estudiante recibe ayuda para llenar las tablas. Es decir, mediante flechas se le señala al estudiante el proceso: la flecha señalando para abajo simboliza un (+) y la flecha señalando para arriba simboliza un (=). Se le da al estudiante como datos ya conocidos, los primeros tres lugares de la tabla que posteriormente el estudiante debe seguir llenando según los ejemplos.

Una vez llena la tabla, el estudiante debe encontrar la forma explícita de la acumulación, para hacer esto, el estudiante puede hacer uso de sus conocimientos de solución de sistemas de ecuaciones lineales, así como del uso de tecnología como el software Geogebra. En el Apéndice se explica cómo utilizar Geogebra para resolver de una manera rápida y simple un sistema de ecuaciones lineales.

Este mismo proceso utilizado para encontrar la 1ª acumulación, puede ser utilizado para calcular la 2ª y 3ª acumulaciones.

4.1.2 Hoja de Práctica #2

En la hoja de trabajo #2, en cada ejercicio, se da la función y el incremento. A diferencia de la hoja de práctica #1 no se da ni un valor inicial para las abscisas ni tampoco un valor inicial para comenzar a calcular las acumulaciones el estudiante deberá proveer tales valores iniciales según su criterio e/o intuición, además, recibe instrucciones, pero no recibe ayuda por medio de flechas que se utilizaron en la hoja 1 para señalar qué valores sumar y qué valores igualar. Tampoco se le ayuda en cómo llenarla ni completando los primeros tres valores de la tabla. El estudiante debe poner en práctica lo aprendido en la hoja de práctica #1.

El estudiante al completar la tabla debe encontrar la forma explícita de la acumulación. Una vez más, el alumno puede hacer uso de sus conocimientos de solución de sistemas de ecuaciones lineales, así como del uso de tecnología como el software Geogebra. Si decide utilizar Geogebra, en el apéndice se explica cómo hacerlo de una manera bastante simple.

Este proceso se repite dos veces más, para calcular la 2ª acumulación y la 3ª acumulación.

4.1.3 Hoja de Práctica #3

En la hoja de trabajo #3, en cada ejercicio, se da únicamente la función. No se da el incremento, el estudiante debe poner el que más le convenga trabajar. No se da ningún valor inicial para las abscisas ni para la acumulación. El estudiante deberá proveer tales valores iniciales según vea la función que escogió, así como su criterio e/o intuición.

A diferencia de las prácticas anteriores, en esta no se da ningún tipo de ayuda, ni se explica el procedimiento a detalle y tampoco cómo puede obtener la forma explícita de la acumulación. Deberá resolver la práctica según sus conocimientos previos adquiridos.

4.2 Hojas de Preguntas

La finalidad de hacer preguntas al estudiante, es analizar qué está pensando al momento de realizar las hojas de prácticas, si está entendiendo o no el proceso de calcular acumulaciones, si está relacionando éste con el de integración, etc. Se realizaron ocho preguntas en dos etapas, cuatro preguntas al inicio y durante las prácticas y las otras cuatro al terminar las actividades. Enseguida se explica el propósito que tenía cada pregunta.

Al iniciar y durante las prácticas:

4.2.1 ¿Qué pasa si cambiamos el valor inicial en cada acumulación?

Esta pregunta se elaboró para que el estudiante se pusiera a pensar si el valor inicial es importante para calcular la acumulación, en cómo afecta a la forma explícita de la acumulación si se dan diferentes valores iniciales para una misma acumulación. Además, para que relacione a la acumulación obtenida con la integral correspondiente a ese valor inicial.

4.2.2 ¿Por qué utilizamos sumas y no restas para calcular acumulaciones?

Esta pregunta es clave para saber cuándo se está integrando y cuándo se está derivando; generalmente, se entiende a la integral de Riemann como una suma de la función multiplicada por el incremento respectivo. Por otro lado, si se usan restas o diferencias multiplicadas por el incremento, se llegaría a una aproximación de la derivada. Esto último puede ser corroborado en lo expuesto en el artículo “Construyendo funciones derivadas” (Cortés, 2012).

4.2.3 Si el incremento se hace más pequeño, ¿afectará a la ecuación de la acumulación? ¿Por qué?

El propósito de esta pregunta es que los estudiantes comiencen a cuestionarse la importancia del tamaño del incremento. Que en efecto, afecta la forma explícita de la acumulación si el incremento se hace más pequeño, pero también la afecta si el incremento es grande. La siguiente pregunta tiene el propósito de enfatizar la importancia de incrementos pequeños.

4.2.4 ¿Consideras que la acumulación se aproximará a la integral con incrementos más pequeños? ¿Sí o no y por qué?

Es similar a la anterior, pero en esta se pone a pensar al estudiante que, si hay incrementos pequeños es posible que se aproxime mejor a la integral. El propósito de esta pregunta, es recordarle al estudiante, que según la definición que da Marsden en su libro Calculus, la integral definida de una función f definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, donde se escoge para cada n una partición de $[a, b]$ en n subintervalos, tal que el máximo de Δx_i en la n -ésima partición se aproxime a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Si c_i es un punto escogido en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces se define la integral como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Al terminar las prácticas:

4.2.5 ¿Por qué consideras que el haber usado Geogebra te ayudó en el proceso de calcular las acumulaciones?

El propósito de esta pregunta es que los estudiantes vean que realmente es difícil solucionar sistemas de ecuaciones lineales de manera manual, como por eliminación gaussiana; Geogebra permite a los estudiantes no preocuparse por cálculos mecánicos, sino entender la parte conceptual sin necesidad de hacer cálculos difíciles.

4.2.6 En el proceso de calcular la forma explícita de la acumulación, como lo fue encontrar la expresión algebraica de la función, ¿encontraste difícil o tedioso el proceso? ¿Por qué?

El propósito de esta pregunta es que los estudiantes analicen que hay casos en los que la forma explícita de la acumulación puede ser muy fácil de obtener, pero en otros muy difícil. Si los estudiantes son capaces de entender la parte conceptual de las acumulaciones, la forma explícita de la acumulación es algo simple porque para eso se puede usar Geogebra.

4.2.7 ¿De qué manera el proceso utilizado para calcular las acumulaciones se parece a la definición de la integral de Riemann?

Esta pregunta es similar a la pregunta 4.2.3 y 4.2.4. El propósito de esta pregunta es que los estudiantes sean capaces de cuestionarse a sí mismos en qué momento el proceso para calcular las acumulaciones es lo que se define como calcular las sumas de Riemann. Una vez que se han percatado de ello, se darán cuenta que efectivamente una acumulación es una buena aproximación a la integral.

4.2.8 ¿Cuál de las tres prácticas te pareció más difícil? ¿Por qué?

El propósito de esta pregunta es analizar si el estudiante comprendió o no el proceso para calcular las acumulaciones. Es decir, si el estudiante mencionó que se le hizo difícil la práctica 1, le pareció tedioso el procedimiento o no comprendió nada. Si mencionó que fue la práctica 2, entendió el procedimiento y es capaz de calcular las acumulaciones por sí mismo. Si mencionó que fue la práctica 3, es muy entendible, porque no se le da ninguna tabla de apoyo, ningún valor inicial, ningún incremento, etc., por lo que es muy esperado que digan que la práctica 3 fue la difícil. Así que las respuestas esperadas son la práctica 2 o la práctica 3.

4.3 Escenario de la Experimentación

Las prácticas con los estudiantes se llevaron a cabo en la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, en el salón 13. Los estudiantes con los que se experimentó tenían conocimientos de cálculo diferencial e integral. Se buscaba que ya supieran cálculo integral, para que ellos mismos comprobaran los resultados que obtuvieran con lo que ya conocían sobre el cálculo de integrales. La experimentación se llevó a cabo con 4 estudiantes. Llamaremos al estudiante 1 como CB, al estudiante 2 como AR, al estudiante 3 como KS y al estudiante 4 como LP.

CB, KS y LP son estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas. Y el estudiante AR tiene estudios de ingeniería del Instituto Tecnológico de Morelia. Los estudiantes fueron seleccionados por ser personas dedicadas en su estudio, perspicaces y con mucha intuición.

Durante las prácticas se permitió el uso de calculadora, de Geogebra y de papel y lápiz para realizar operaciones.

La experimentación duró 4.5 horas, divididas en dos etapas: la primera etapa de 2 horas, un descanso de media hora y la segunda etapa de 2 horas.

El tesista se desempeñó como profesor al enseñarles algo nuevo ese día, a calcular las acumulaciones de una función, así como a usar la tecnología como medio de apoyo para su aprendizaje, pero al mismo tiempo también tuvo papel de asesor al resolverles sus dudas, apoyarlos en las hojas de prácticas, etc.

4.4 Inicio de la Práctica

Al comenzar las prácticas, se les expuso a los estudiantes el método para calcular las acumulaciones de la función $f(x) = 6$ (Ver Capítulo 3.1), con el incremento $\Delta x = 1$. Conforme se les iba explicando el método, a algunos estudiantes les surgían dudas como: “¿por qué se utilizó tal valor inicial?”

El profesor respondió:

“No hay una razón en particular, fue un número cualquiera”.

Cabe señalar que los valores iniciales que se proveyeron fue para la 1ª acumulación, $B(0) = 2$, para la 2ª acumulación $C(0) = 1$ y para la 3ª acumulación $D(0) = 0$.

En la Tabla 44 y Tabla 45 se puede observar la tabla de la 1ª acumulación para dos valores iniciales diferentes: la primera para $B(0) = 2$ y la segunda para $B(0) = 5$, respectivamente.

Tabla 44. Cálculo de la 1ª acumulación de la función $f(x) = 6$ cuando $B(0) = 2$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B(x)	2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62
f(x)	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Cuya forma algebraica es $B(x) = 6x + 2$.

Tabla 45. Cálculo de la 1ª acumulación de la función $f(x) = 6$ cuando $B(0) = 5$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B(x)	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65
f(x)	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Cuya forma algebraica es $B(x) = 6x + 5$. Los estudiantes observaron que la ecuación de la acumulación cambiaba (para este caso) según el valor inicial. Es decir que dependía del valor inicial.

Posteriormente, se les puso la misma función $f(x) = 6$ para los incrementos $\Delta x = 0.5$ y $\Delta x = 0.1$. Ahora les surgió la duda de por qué el valor inicial siempre comenzaba en $x=0$. La respuesta que se les dio fue que es por practicidad. El profesor, mediante un ejemplo, les mostró qué sucedía si la acumulación comenzaba con otro valor $x \neq 0$, digamos $x = -4$. En la tabla 46 se muestra la 1ª acumulación de $f(x) = 6$ con valor inicial $B(-4) = 2$.

Tabla 46. Cálculo de la 1ª acumulación de la función $f(x) = 6$ cuando el valor inicial de las abscisas es diferente de 0

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
B(x)	2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62
f(x)	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Cuya forma algebraica es: $B(x) = 6x + 26$.

Con este ejemplo, los estudiantes observaron que el término constante de la 1ª acumulación de cualquier función constante no es necesariamente el valor inicial que se les da; en realidad depende del valor que en la acumulación esté destinado a $x = 0$. Ya que, recordando de nuestros cursos de matemáticas básicas, la recta que pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tiene forma $y = mx + b$, donde m es la pendiente, la cual se puede calcular mediante la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y donde b es la ordenada al origen, es decir, $b = y(x=0)$ (haciendo un abuso en la notación).

Cuando se estaba calculando la 1ª acumulación de la función $f(x) = 6$ con valor inicial $B(0) = \frac{1}{2}$, cuando el incremento era $\Delta x = 0.5$, los estudiantes encontraron interesante que la ecuación de la 1ª acumulación fuera $B(x) = 12x + \frac{1}{2}$.

Me preguntaron:

“¿Por qué ahora el coeficiente del término de primer grado es 12? ¿Por qué no es 6 como “debe” salir?”

El profesor les respondió:

“Porque realmente falta multiplicar por Δx ”.

Es decir, se les explicó a los estudiantes que en el caso anterior en que $\Delta x = 1$, no fue necesario hacer la multiplicación por tal incremento porque el 1 es el neutro multiplicativo, pero para valores $\Delta x \neq 1$ sí se debe de multiplicar. Esto se debe a que, recordando de los cursos de cálculo diferencial e integral, la derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ puede ser vista como un cociente de incrementos. Cuando estamos calculando las acumulaciones, se calcula el dy ; por lo que de la ecuación anterior, se despeja dy :

$dy = y' dx$. Por lo tanto, $B(x)dx = 1^a$ acumulación o aproximación a la 1ª integral.

4.4.1 Resultados de la hoja de Práctica #1

Una vez que se les instruyó a los estudiantes para calcular las acumulaciones, se les puso la hoja de práctica #1; se les pidió escoger un ejercicio de los tres dados.

El estudiante CB realizó el ejercicio 1. Este estudiante fue el que preguntó anteriormente acerca de por qué en los ejemplos que se dieron para $f(x) = 6$ con $\Delta x = 1$ se comenzaba con $x=0$; en el ejercicio 1, se daba la función $f(x) = -2$, se iniciaba con $x = -5$ e incremento $\Delta x = 1$. Como se puede observar en la Figura 30 que el estudiante CB llenó:

Dada la función, $f(x) = -2$, encontremos sus acumulaciones. Primero, deberás llenar la tabla para los valores que se marcan, con incremento $\Delta x = 1$.

Tabla de valores

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-2	-2									

Figura 30. Tabla de Valores de $f(x) = -2$ llenada por el estudiante CB

Recordando, en la práctica #1 se le ayuda al estudiante en cómo debe sumar para llenar la tabla de acumulaciones, como se puede observar en la Figura 31:

inicial, $B(-5) = 0$.

Para los demás valores de $B(x)$, se obtienen del modo siguiente:

$B(-4) = B(-5) + f(-5) = 0 - 2 = -2$

$B(-3) = B(-4) + f(-4) = -2 - 2 = -4$ y así sucesivamente.

Completa la tabla.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
B(x)	0	-2	-4	-6	-8	-10	-12	-14	-16	-18	-20
f(x)	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2

Figura 31. Cálculo de la 1ª acumulación de $f(x) = -2$ por el estudiante CB

Cabe señalar, que la flechita que marca hacia abajo ($\downarrow$) significa el símbolo de + y la flechita que marca hacia arriba ($\uparrow$) representa el símbolo de =.

Por lo que, la tabla de la 1ª acumulación era:

Anota la tabla obtenida para la primera acumulación B(x).

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
B(x)	0	-2	-4	-6	-8	-10	-12	-14	-16	-18	-20

Figura 32. 1ª acumulación de $f(x) = -2$ encontrada por el estudiante CB

El estudiante CB y el estudiante AR preguntaron acerca de si existía una fórmula explícita para calcular las acumulaciones (ya sea la 1ª, la 2ª y la 3ª) porque observaron que estaban sumando siempre recursivamente, es decir, que para la 1ª acumulación usaban los valores anteriores de la 1ª acumulación y de la función; para la 2ª acumulación usaban los valores anteriores de la 2ª acumulación y de la 1ª acumulación; para la 3ª acumulación usaban los valores anteriores de la 3ª acumulación y de la 2ª acumulación.

Entre todos, llegamos a la conclusión que podrían usarse las fórmulas:

$$B(x_n) = B(x_n - \Delta x) + f(x_n - \Delta x) \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ acumulación.}$$

$$C(x_n) = C(x_n - \Delta x) + B(x_n - \Delta x) \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ acumulación.}$$

$$D(x_n) = D(x_n - \Delta x) + C(x_n - \Delta x) \rightarrow 3^{\text{a}} \text{ acumulación.}$$

Cabe señalar que los 4 estudiantes seleccionaron el ejercicio 1. Los estudiantes CB y AR no utilizaron ningún software para encontrar las ecuaciones de las acumulaciones, las resolvieron utilizando sus conocimientos de álgebra lineal, es decir, mediante sistemas de ecuaciones lineales que posteriormente podían ser resueltos usando matrices mediante la famosa Eliminación Gaussiana. Los estudiantes KS y LP utilizaron Geogebra.

Para calcular la forma algebraica de la 1ª acumulación, los estudiantes KS y LP utilizaron el siguiente comando en la vista de CAS de Geogebra (Ver Apéndice):

$$\text{Resuelve}\{-5m+b=0, -4m+b=-2\}, \{m,b\}$$

$$\rightarrow \{\{m = -2, b = -10\}\}$$

Figura 33. Comando utilizado por KS y LP para encontrar la 1ª acumulación de $f(x) = -2$

Por lo cual, la 1ª acumulación sigue la ecuación: $B(x) = -2x - 10$.

El procedimiento utilizado para calcular la 2ª acumulación de $f(x) = -2$, con valor inicial $C(-5) = 1$ se puede observar en la Figura 34:

Completa la tabla.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
C(x)		1	1	-1	-5	-11	-19	-29	-41	-55	-71
B(x)		0	-2	-4	-6	-8	-10	-12	-14	-16	-18

Figura 34. Cálculo de la 2ª acumulación de $f(x) = -2$ por el estudiante CB

Para calcular la forma algebraica de la 2ª acumulación, algunos de los estudiantes utilizaron Geogebra, con el siguiente comando:

$$\text{Resuelve}\{25a-5b+c=1, 16a-4b+c=1, 9a-3b+c=-1\}, \{a,b,c\}$$

$$\rightarrow \{\{a = -1, b = -9, c = -19\}\}$$

Figura 35. Comando utilizado por KS y LP para encontrar la 2ª acumulación de $f(x) = -2$

Por lo cual, la 2ª acumulación sigue la ecuación: $C(x) = -x^2 - 9x - 19$.

El procedimiento utilizado para calcular la 3ª acumulación de $f(x) = -2$, con valor inicial $D(-5) = 2$, se puede observar en la Figura 36:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
D(x)	2	3	4	3	-2	-13	32	-61	-92	-157	-168
C(x)		1	1	-1	-5	-11	-19	-29	-31	-49	-61

Figura 36. Cálculo de la 3ª acumulación de $f(x) = -2$ por el estudiante CB

Calculando la forma algebraica de esta 3ª acumulación con Geogebra:

Resuelve[{-125a+25b-5c+d=2, -64a+16b-4c+d=3, -27a+9b-3c+d=4, -8a+4b-2c+d=3}, {a,b,c,d}]

$$\rightarrow \left\{ \left\{ a = -\frac{1}{3}, b = -4, c = -\frac{44}{3}, d = -13 \right\} \right\}$$

Figura 37. Comando utilizado por KS y LP para encontrar la 3ª acumulación de $f(x) = -2$

Se concluye que la 3ª acumulación tiene como ecuación $D(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 - \frac{44}{3}x - 13$.

Cuando los estudiantes terminaron de realizar la práctica #1 y basándose en su experiencia recién adquirida con lo explicado por el profesor y la misma práctica, se les puso la pregunta 1 y 2 de la hoja de preguntas, aquí se muestran algunas de sus respuestas (en el Apéndice se muestra una tabla con todas las respuestas que dieron los 4 estudiantes):

1. ¿Qué pasa si se cambia el valor inicial de cada acumulación?

El estudiante LP respondió que si se cambia el valor inicial de cada acumulación “no afecta la función, sólo la recorre, dependiendo de si es positivo o negativo el valor inicial”.

Análisis de la(s) respuesta(s) a la pregunta 1:

El estudiante LP está pensando únicamente en el registro algebraico de la acumulación, la ve como una función que sufre una traslación; en la enseñanza y aprendizaje del cálculo es esencial entender los conceptos en los diferentes registros gráficos, algebraicos, esquemáticos y aritméticos.

Según Michal Yerushalmy & Osama Swidan (2011) en el proceso de calcular acumulaciones, es decir, en la función de acumulación, se debe tener en cuenta de que cada valor específico asignado como límite inferior, en este caso, cada valor inicial que demos, determina una única función acumulación dentro de una familia de funciones de acumulación.

2. ¿Por qué se utilizan sumas y no restas para calcular las acumulaciones?

El estudiante CB respondió que cree que se utilizan las sumas porque “es más fácil manejar la operación suma que la resta y tal vez por las sumas de Riemann”.

Análisis de la(s) respuesta(s) a la pregunta 2:

El estudiante CB no profundizó en por qué creía que el proceso de calcular las acumulaciones tenía que ver con las sumas de Riemann, pero acertó de un modo interesante. No se usan las restas porque las restas o “diferencias” se pueden usar para calcular las derivadas. En Cortés (2012) se propone un método similar con restas para aproximar a la derivada de una función.

Thompson & Silverman (2008) explican que si f es una función cuyos valores proveen medidas de una cantidad y x también es una medida de una cantidad, entonces el valor $f(c)\Delta x$, donde $c \in [x, x + \Delta x]$, es una medida de una cantidad derivada. Por lo que una suma de Riemann está formada por una suma de bits incrementales, donde cada bit se forma de dos cantidades multiplicadas, por lo tanto, tal suma de Riemann representa una cantidad total de la cantidad derivada cuyos bits están definidos por $f(c)\Delta x$.

También Thompson & Silverman (2008) afirman que, si los estudiantes quieren ver “el área bajo la curva” representando otra cantidad distinta del área, es imprescindible que conciben las cantidades acumuladas como siendo creadas al acumular bits incrementales que se forman multiplicativamente.

4.4.2 Resultados de la hoja de Práctica #2

Una vez que los estudiantes resolvieron la hoja de práctica #1 y respondieron a las dos preguntas de la hoja de preguntas, se les puso la práctica #2; en esta práctica se les dejó a los estudiantes que ellos, por sí solos, encontraran las acumulaciones de las funciones dadas. Al igual que en la práctica 1, se proveen tres ejercicios y el estudiante debió seleccionar uno de ellos.

De los 4 estudiantes que realizaron la práctica #2, el estudiante LP lo resolvió de una manera muy peculiar, hablando de la forma en que dio los valores iniciales y la forma como se le mostró que podía encontrarse la forma algebraica de las acumulaciones. El estudiante LP escogió el ejercicio 2. En el ejercicio 2, se da la función lineal $f(x) = 12x$ con incremento $\Delta x = \frac{1}{2}$ y se requieren obtener la 1ª, 2ª y 3ª acumulaciones. En esta práctica el estudiante tuvo que dar los valores iniciales tanto para las abscisas como los valores iniciales de las acumulaciones. Y no hubo flechitas ayudadoras ($\downarrow \uparrow$).

Para comenzar, el estudiante dio como valor inicial de las abscisas $x_0=0$, por lo que los demás valores de las x 's se llenaron según el incremento $\Delta x = \frac{1}{2}$. Y posteriormente la tabla de la ecuación $f(x) = 12x$ se fue llenando como se ve en la Figura 38.

Tabla de valores

... en cuenta que el incremento será de $\Delta x = \frac{1}{2}$.

x	$x_0=0$	$x_1=0.5$	$x_2=1$	$x_3=1.5$	$x_4=2$	$x_5=2.5$	$x_6=3$	$x_7=3.5$	$x_8=4$	$x_9=4.5$	$x_{10}=5$
f(x)	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60

Figura 38. Tabla de valores de $f(x) = 12x$ llenada por el estudiante LP

Una vez que se obtuvo la tabla de valores para la función $f(x) = 12x$, ésta se usó para calcular la 1ª acumulación, como se muestra en la tabla siguiente. Cabe señalar que como el estudiante necesitó dar un valor inicial, éste escogió el $B(0) = 0$.

Completa la tabla.

$6 = a(1)(c)$

x	$x_0=0$	$x_1=0.5$	$x_2=1$	$x_3=1.5$	$x_4=2$	$x_5=2.5$	$x_6=3$	$x_7=3.5$	$x_8=4$	$x_9=4.5$	$x_{10}=5$
B(x)	a, c_1	0	6	18	36	60	90	126	168	216	270
f(x)		0	6	12	18	24	30	36	42	48	54

Figura 39. Cálculo de la 1ª acumulación de $f(x) = 12x$ por el estudiante LP

Algo interesante sucedió con esta acumulación. Como se esperaba que la 1ª acumulación de una función de primer grado, fuera una ecuación de segundo grado y las raíces estaban por casualidad dadas, se le enseñó al estudiante cómo calcular la forma algebraica de un polinomio de grado 2 dadas sus dos raíces. Cabe señalar que el estudiante usó Geogebra para ver la gráfica de la ecuación una vez que se obtuvo su forma explícita.

Se tenía que para $x_0 = 0$ y $x_1 = 0.5$, $B(0) = 0$ y $B(0.5) = 0$, es decir, que 0 y 0.5 eran las raíces de $B(x)$ y también se conocía que la 1ª acumulación era de la forma $B(x) = ax^2 + bx + c$.

Para sacar la forma algebraica usando sus raíces, se le enseñó al estudiante que entonces, el polinomio de grado 2 puede ser descrito como $B(x) = \alpha x(x - \frac{1}{2})$, donde α es una constante que puede ser determinada por medio de otro punto de la curva, digamos $B(1) = 6$.

Entonces, $B(1) = \alpha(1)(\frac{1}{2}) = 6 \Rightarrow 6 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 12$. Por lo tanto, la 1ª acumulación era $B(x) = 12x(x - \frac{1}{2}) = 12x^2 - 6x$.

Algo similar sucedió cuando el estudiante LP calculó la 2ª acumulación. El valor inicial que el estudiante LP dio fue de $C(0) = 0$; usando este valor y los valores obtenidos para la 1ª acumulación, se pudo calcular la tabla de la 2ª acumulación, que aparece en la Figura 40:

Completa la tabla.

x	$x_0=0$	$x_1=0.5$	$x_2=1$	$x_3=1.5$	$x_4=2$	$x_5=2.5$	$x_6=3$	$x_7=3.5$	$x_8=4$	$x_9=4.5$	$x_{10}=5$
C(x)	0	0	0	6	24	60	120	210	336	504	720
B(x)	0	0	6	18	36	60	90	126	168	216	

Figura 40. Cálculo de la 2ª acumulación de $f(x) = 12x$ por el estudiante LP

Se tenía que para $x_0 = 0, x_1 = 0.5$ y $x_2 = 1$; $C(0) = 0, C(0.5) = 0$ y $C(1) = 0$, es decir que 0, 0.5 y 1 eran las raíces de $C(x)$ y también se sabía que $C(x)$ era de la forma $C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Para obtener la forma algebraica usando sus raíces, se le mostró al estudiante que entonces $C(x)$ puede ser descrito como $C(x) = \alpha x(x - \frac{1}{2})(x - 1)$, donde α es una constante que puede ser determinada con otro punto de la acumulación, digamos, $C(1.5) = 6$. Entonces, $C(1.5) = \alpha(1.5)(1)(0.5) = 0.75\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = \frac{6}{0.75} = 8$. Por lo tanto, la 2ª acumulación era $C(x) = 8x(x - \frac{1}{2})(x - 1)$.

Y un caso también similar fue encontrar la 3ª acumulación, en este caso también el estudiante puso como valor inicial a $D(0) = 0$. Por lo que las raíces fueron $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$ y $x_3 = 1.5$. Por lo tanto, haciendo el mismo proceso que se hizo en

las acumulaciones anteriores, se llegó a que la 3ª acumulación era $D(x) = 4x(x - \frac{1}{2})(x - 1)(x - \frac{3}{2})$.

En las Figura 41 se puede observar la función $f(x) = 12x$ así como las 1ª, 2ª y 3ª acumulaciones.

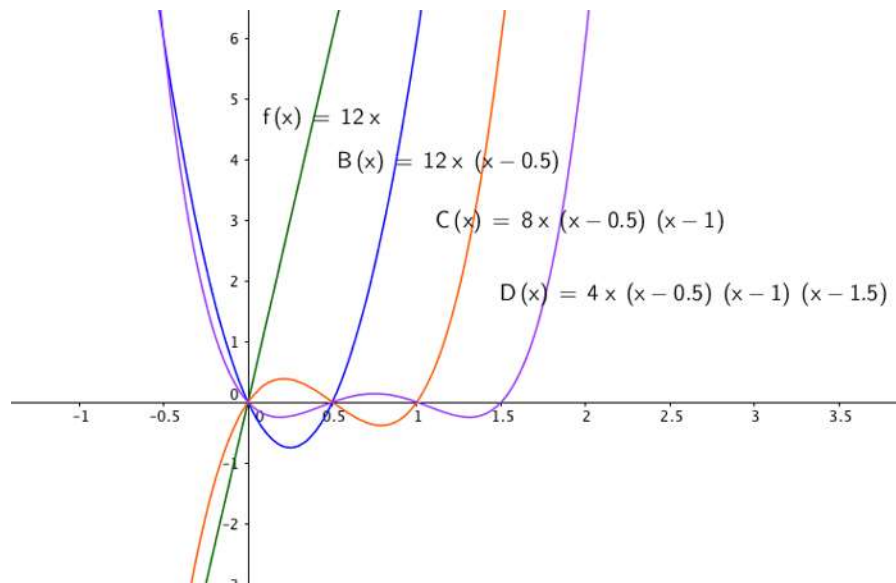


Figura 41. Gráfica de la función $f(x) = 12x$ y de sus 1ª, 2ª y 3ª acumulaciones

En la gráfica se puede observar a la función original $f(x)$; la 1ª acumulación $B(x)$; la 2ª acumulación $C(x)$ y la 3ª acumulación $D(x)$.

Cuando los estudiantes terminaron de realizar la práctica #2, se les puso la pregunta 3 y 4 de la hoja de preguntas, aquí se muestran algunas de sus respuestas (en el Apéndice se muestra una tabla con todas las respuestas que dieron los cuatro estudiantes):

**3. Si el incremento se hace más pequeño, ¿afectará a la ecuación de la acumulación?
¿Por qué?**

El estudiante LP respondió que si el incremento se hace más pequeño sí afectará a la ecuación de la acumulación “porque acumularía más rápido, entonces crece más”

Análisis de la(s) respuesta(s) a la pregunta 3:

El estudiante dio una respuesta algo extraña, menciona que se acumularía más rápido por lo que la acumulación crecería más. Al mencionar el término más rápido, esto implicaría nociones de velocidad o de tiempo, sin embargo, se supone que se refiere a que acumular más rápido es sinónimo de acumular en mayor cantidad. En efecto, la ecuación de la acumulación crece más en el sentido algebraico, porque como el estudiante observó en algunos ejercicios de las hojas de prácticas, con incrementos más pequeños, los coeficientes de la ecuación son mayores a comparación de cuando el incremento es mayor.

4. ¿Consideras que la acumulación se aproximará a la integral con incrementos más pequeños? ¿Sí o no y por qué?

El estudiante AR respondió que la acumulación sí se aproximaría a la integral con incrementos más pequeños, “porque al ser más pequeños los incrementos, la suma total se haría más cercana al área total marcada por la integral”.

Análisis de la(s) respuesta(s) a la pregunta 4:

El estudiante AR está pensando en la integral como el área bajo la curva. Entonces, está relacionando el concepto de diferencial dx con el incremento Δx y como en la integral de Riemann si $\Delta x \rightarrow 0$, entonces la suma de Riemann se aproxima a la integral.

Gordon & Gordon (2007) mencionan que, desde un punto de vista del análisis de datos, el que el paso (en este caso el Δx) sea más pequeño conlleva a que haya más puntos; y el hecho de que haya más puntos de datos, lo más exacto que se espera que la función de regresión resultante sea (en términos de ajuste de los datos). Aplicando este hecho a esta situación, el que el incremento Δx sea más pequeño conlleva a una mejor aproximación a la integral.

4.4.3 Resultados de la hoja de Práctica #3

Una vez que los estudiantes resolvieron la hoja de práctica #2 y que contestaron las preguntas 3 y 4 de la hoja de preguntas se les puso la hoja de práctica #3. En esta práctica, los estudiantes debían seleccionar un ejercicio de los tres ejercicios dados. Esta práctica tiene la peculiaridad que no hay ayuda de ningún tipo, es decir, no hay tablas con filas adicionales (como en el caso de la práctica #1 y la práctica #2 en las que había una fila adicional para que ahí mismo hicieran la suma y lo agregaran en el otro recuadro), por lo que el estudiante debía completar únicamente las tablas de acumulaciones basándose en experiencia previa para obtener las acumulaciones.

En la hoja de práctica #3 el estudiante debía dar su propio incremento Δx , dar el valor inicial de x_0 , así como el valor inicial de cada acumulación; es decir, debía dar los valores iniciales de $B(x_0)$, $C(x_0)$ y $D(x_0)$. Además, debía encontrar la forma algebraica de cada acumulación usando las herramientas que Geogebra ofrecía como lo son el ajuste de curvas, la solución de sistemas de ecuaciones lineales por medio de un comando de la vista de CAS, etc. o de los propios conocimientos que el estudiante tenía sobre solución de sistemas de ecuaciones lineales.

El estudiante AR escogió el ejercicio 2. Por lo que debía encontrar la 1ª, 2ª y 3ª acumulaciones de la función $f(x) = 7x$. El estudiante AR escogió como valor inicial $x_0 = 2$ y como incremento $\Delta x = 1$. Cabe señalar que el estudiante utilizó la Vista de Cálculo Simbólico (CAS) para encontrar la ecuación de la acumulación respectiva.

Para comenzar, el estudiante AR llenó la tabla de valores para la función $f(x) = 7x$, la cual se puede observar en la Figura 42.

Tabla de valores											
x	$x_0=2$	$x_1=3$	$x_2=4$	$x_3=5$	$x_4=6$	$x_5=7$	$x_6=8$	$x_7=9$	$x_8=10$	$x_9=11$	$x_{10}=12$
f(x)	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84

Figura 42. Tabla de valores de $f(x) = 7x$ llenada por el estudiante CB

Para calcular la 1ª acumulación, el estudiante AR dio como valor inicial $B(2) = 1$. No hay registro de cómo calculó cada valor de la tabla, si las llenó usando las fórmulas que se propusieron anteriormente (Ver 4.4.1) o si simplemente realizó sus cálculos en hoja aparte. Por lo que la tabla de la 1ª acumulación es:

Primera acumulación											
x	$x_0=2$	$x_1=3$	$x_2=4$	$x_3=5$	$x_4=6$	$x_5=7$	$x_6=8$	$x_7=9$	$x_8=10$	$x_9=11$	$x_{10}=12$
B(x)	1	15	36	64	99	141	190	246	309	379	456

Figura 43. Cálculo de la 1ª acumulación de $f(x) = 7x$ por el estudiante AR

De lo que sí se tiene registro es que para obtener la ecuación de la 1ª acumulación, el estudiante AR utilizó el siguiente comando en Geogebra:

Resuelve[{ $4a+2b+c=1$, $9a+3b+c=15$, $16a+4b+c=36$ }, {a,b,c}]

$$\rightarrow \left\{ \left\{ a = \frac{7}{2}, b = -\frac{7}{2}, c = -6 \right\} \right\}$$

Figura 44. Comando utilizado por AR para encontrar la 1ª acumulación de $f(x) = 7x$

Obteniéndose la ecuación $B(x) = \frac{7}{2}x^2 - \frac{7}{2}x - 6$.

Para calcular la 2ª acumulación, el estudiante AR dio como valor inicial $C(2) = 0$. Cuya tabla se puede observar en la Figura 45.

Segunda acumulación.

x	$x_0=2$	$x_1=3$	$x_2=4$	$x_3=5$	$x_4=6$	$x_5=7$	$x_6=8$	$x_7=9$	$x_8=10$	$x_9=11$	$x_{10}=12$
C(x)	0	1	16	52	116	215	356	546	792	1101	1498

Figura 45. Cálculo de la 2ª acumulación de $f(x) = 7x$ por el estudiante AR

Para obtener la ecuación de la 2ª acumulación el estudiante utilizó el siguiente comando:

`Resuelve[{8a+4b+2c+d=0, 27a+9b+3c+d=1, 64a+16b+4c+d=16, 125a+25b+5c+d=52}, {a,b,c,d}]`

$$\rightarrow \left\{ \left\{ a = \frac{7}{6}, b = -\frac{7}{2}, c = -\frac{11}{3}, d = 12 \right\} \right\}$$

Figura 46. Comando utilizado por AR para encontrar la 2ª acumulación de $f(x) = 7x$

Obteniéndose la ecuación $C(x) = \frac{7}{6}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{11}{3}x + 12$.

Y finalmente, para calcular la 3ª acumulación, el estudiante AR dio como valor inicial $D(2) = 2$. Cuya tabla es:

Tercera acumulación. $-3.5x^2 - 3.666x + 1$

x	$x_0=2$	$x_1=3$	$x_2=4$	$x_3=5$	$x_4=6$	$x_5=7$	$x_6=8$	$x_7=9$	$x_8=10$	$x_9=11$	$x_{10}=12$
D(x)	2	2	3	19	71	187	402	758	1304	2096	3,197

Figura 47. Cálculo de la 3ª acumulación de $f(x) = 7x$ por el estudiante AR

Para obtener la ecuación de la 3ª acumulación, el estudiante usó el comando:

Resuelve[{16a+8b+4c+2d+e=2, 81a+27b+9c+3d+e=2, 256a+64b+16c+4d+e=3, 625a+125b+25c+5d+e=19, 1296a+216b+36c+6d+e=71}, {a,b,c,d,e}]

→ $\left\{ \left\langle a = \frac{7}{24}, b = -\frac{7}{4}, c = \frac{5}{24}, d = \frac{53}{4}, e = -16 \right\rangle \right\}$

Figura 48. Comando utilizado por AR para encontrar la 3ª acumulación de $f(x) = 7x$

Cuya ecuación es $D(x) = \frac{7}{24}x^4 - \frac{7}{4}x^3 + \frac{5}{24}x^2 + \frac{53}{4}x - 16$.

4.5 Al finalizar la Práctica

Cuando los estudiantes terminaron de realizar la práctica #3, se les pusieron las preguntas 5, 6, 7 y 8 de la hoja de preguntas, aquí se muestran algunas de sus respuestas (en el Apéndice se muestra una tabla con todas las respuestas que dieron los cuatro estudiantes):

5. ¿Por qué consideras que el haber usado Geogebra te ayudó en el proceso de calcular las acumulaciones?

El estudiante CB respondió que el haber usado Geogebra le ayudó en el proceso de calcular las acumulaciones “porque es más fácil visualizar las cosas si las tenemos gráficamente”.

Análisis de la(s) respuesta(s) a la pregunta 5:

El estudiante CB consideró que Geogebra le ayudó a visualizar mejor una acumulación; la visualización matemática que CB mencionó es un concepto muy interesante porque, como Zimmemann y Cunningham (1991) y Rodríguez (2014) mencionan que, para que exista un enriquecimiento de la comprensión de un concepto matemático, se debe tomar en cuenta la visualización, que generalmente la asociamos con representaciones gráficas; es decir, no ocurre como un hecho aislado sino dentro de un contexto matemático en el que también se encuentran las representaciones numéricas y simbólicas.

Arcavi (2003) propone una definición de la visualización matemática, la cual acuñó basándose en los trabajos de Zimmerman & Cunningham (1991, p.3); Hershkowitz et al (1989, p.75): “La visualización es la habilidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión” (Arcavi, 2003, p. 217).

6. En el proceso de calcular la forma explícita de la acumulación, como lo fue encontrar la expresión algebraica de la función, ¿encontraste difícil o tedioso el proceso? ¿Por qué?

El estudiante AR respondió que, en el proceso de calcular la forma explícita de la acumulación, “es difícil el proceso no teniendo las herramientas para dar solución a ecuaciones de mayor grado, pero es más rápido y sin necesidad de fórmulas para integrales”.

Análisis de la(s) respuesta(s) a la pregunta 6:

El estudiante AR rectifica que sin ayuda de Geogebra, calcular la forma explícita de las acumulaciones puede ser un proceso complicado, pero no difícil. El uso de Geogebra le permite al estudiante mediante unas pequeñas líneas (comandos en la vista de Cálculo Simbólico (CAS)) resolver sistemas de ecuaciones lineales; también le permite encontrar una aproximación a la ecuación de la acumulación en caso de que se dé sólo una lista de puntos (mediante el ajuste de curvas); y sobretodo, le permite visualizar las gráficas de la función y acumulaciones.

7. ¿De qué manera el proceso utilizado para calcular las acumulaciones se parece a la definición de la integral de Riemann?

El estudiante KS respondió que el proceso utilizado para calcular las acumulaciones se parece a la definición de la integral de Riemann “en las sumas, pues la integral de Riemann indica sumas de pequeñas partes de una función y las acumulaciones también hacen la misma función”.

Análisis de la(s) respuesta(s) a la pregunta 7:

El estudiante KS considera que el proceso de calcular acumulaciones se asemeja al proceso de calcular las sumas de Riemann; en efecto, esto es verdad, porque la idea intuitiva que se tiene sobre la integral, es que es el área bajo la curva, la cual se calcula por aproximaciones con rectángulos de altura $f(x)$ y longitud Δx ; entonces, como mencionan Yerushalmy y Swidan (2011) que en la gráfica de la acumulación cada punto está representando un área acumulada hasta ese valor x . Por lo que ambos conceptos, si la función es “positiva” nos dan un área, que estamos calculando con sumas de productos, cuyos productos son de dimensiones de rectángulos.

En el experimento realizado por Yerushalmy y Swidan (2011) cada punto de la acumulación es una representación de una suma de Riemann (es decir, la suma de productos), la cual se puede expresar como: $\sum_{i=1}^n f(x_i) * \Delta x_i$.

8. ¿Cuál de las tres prácticas te pareció más difícil? ¿Por qué?

El estudiante LP respondió que la tercera práctica le pareció más difícil “por no dar valor inicial, ni tablas ni ayuda en el proceso”.

Análisis de la(s) respuesta(s) a la pregunta 8:

En efecto, la práctica 3 es una práctica difícil porque, como menciona el estudiante LP, no hay valores iniciales, no hay tablas de apoyo ni ningún tipo de ayudas como las hubo en las prácticas 1 y 2; pero, es esencial que el estudiante domine la hoja de práctica 3 ya que es realmente lo que uno haría si se encontrara con una integral tanto definida como indefinida y la tiene que resolver sin formulario: paso a paso, recordar ideas intuitivas como el área bajo la curva, buscar la antiderivada, resolverla y llegar a un resultado final, sin ayudas de ningún tipo.

La pregunta que el grupo de investigación de este trabajo se hace es de que, si algún día se logra implementar la enseñanza del cálculo integral por medio de acumulaciones, ¿se enseñaría como un algoritmo? Porque resolver una integral definida o indefinida es un algoritmo también; Ya que como menciona Muñoz (2000) existe un “...desequilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico en la enseñanza del Cálculo Integral, es decir, a los estudiantes se les enseñan procedimientos para calcular integrales con los llamados métodos de integración sólo a través de la ejercitación y de una manera separada de la parte conceptual. Es hasta que se abordan las llamadas aplicaciones cuando se estudian algunos aspectos de las nociones asociadas a la integral” (Muñoz, 2000, p. 132).

4.6 Análisis Final

El análisis de esta experimentación tendrá como principal propósito, de acuerdo a las hojas de prácticas que los estudiantes resolvieron y de las hojas de preguntas que contestaron, si fueron entendidas por los estudiantes las ideas de lo que es una acumulación y para qué sirve, el uso de la tecnología para ayudarlos a encontrar la forma explícita de la acumulación. Se tomarán las hojas de práctica y de preguntas de dos de los cuatro estudiantes para hacer un análisis profundo de sus resultados y respuestas.

4.6.1 Estudiante CB

El estudiante CB utilizó Geogebra para resolver los sistemas de ecuaciones lineales que se presentaron al calcular las ecuaciones de las acumulaciones.

En la hoja de práctica 1, no tuvo ningún problema al encontrar la 1ª, 2ª y 3ª acumulación de la función $f(x) = -2$. Fue ahí cuando, junto con el estudiante AR preguntaron si existía una forma para calcular la forma explícita, se llegó a una terna de ecuaciones; se considera que tener una ecuación para sólo calcular datos de la acumulación no dice mucho ni es relevante porque no ayuda para calcular la ecuación algebraica de la curva.

En la hoja de práctica 2, tampoco tuvo dificultades para encontrar las tres acumulaciones de la función $f(x) = 10$. El estudiante CB quiso evitarse dificultades para calcular las acumulaciones por lo que daba valores iniciales a las acumulaciones de cero. En efecto, le sirvió para hacer más rápido el cálculo de las ecuaciones porque tales 0's eran las raíces de las funciones de acumulación.

En la hoja de práctica 3, si tuvo dificultades para encontrar las acumulaciones de la función $f(x) = 5$ por lo que recurrió a las fórmulas que se propusieron para llenar la tabla de las acumulaciones. Y del mismo modo que al resolver la hoja de práctica 2, estableció como valores iniciales de las acumulaciones el valor de cero lo cual también facilitó el cálculo de la ecuación de las acumulaciones sin recurrir a la tecnología o a los algoritmos del álgebra lineal.

Respecto a la hoja de preguntas, en la pregunta 1 mencionó que se obtendría otra ecuación, pero no supo explicar el porque. En la pregunta 2, respondió que es más fácil manejar la operación suma que la operación resta y que posiblemente por las sumas de Riemann, lo cual es verdad.

En la pregunta 3 respondió que la acumulación se acercaría más a la integral de la función, pero nuevamente no ahondó en detalles. En la pregunta 4, respondió que no se aproximaría la acumulación con incrementos más pequeños, argumentando que porque son sumas; aquí es interesante ver que posiblemente no entendió la pregunta porque no respondió algo sensato.

En la pregunta 5 dijo que Geogebra le ayudó a visualizar las acumulaciones mejor, por medio de las gráficas. En la pregunta 6 respondió que fue difícil encontrar la forma explícita de las acumulaciones de la 2ª y 3ª acumulaciones, cabe señalar que en los tres ejercicios escogidos de las tres prácticas únicamente escogió aquellos con la función constante. En la pregunta 7 respondió que calcular acumulaciones se le asemejó a la integral de Riemann porque comparó que en ambos casos está sumando rectángulos debajo de la función. Y en la pregunta 8 no respondió lo que se le preguntó, porque mencionó que se le hizo difícil en las que la función no era constante (cuando el estudiante CB sólo resolvió los ejercicios con funciones constantes).

De manera general, el estudiante entendió qué es una acumulación, supo cómo calcular usando Geogebra las ecuaciones de las acumulaciones y también usando las raíces de un polinomio para encontrar su forma explícita y por sí solo pudo llenar las tablas sin dificultad.

4.6.2 Estudiante LP

El estudiante LP también utilizó Geogebra para resolver los sistemas de ecuaciones lineales que se presentaron al calcular las ecuaciones de las acumulaciones.

En la hoja de práctica 1, el estudiante no tuvo problema encontrando la 1ª, 2ª y 3ª acumulación de la función $f(x) = -2$.

En la hoja de práctica 2, el estudiante escogió el ejercicio 2, en el que debía encontrar la 1ª, 2ª y 3ª acumulación de $f(x) = 12x$ con incremento $\Delta x = \frac{1}{2}$. Como se mencionó anteriormente, este estudiante dio como valores iniciales a $B(x)$, $C(x)$ y $D(x)$, es decir a la 1ª, 2ª y 3ª acumulación respectivamente, el valor de cero. Esto ocasionó que fuera fácil calcular la forma algebraica de las acumulaciones con el método enseñado por el tesista. Cabe señalar que, al calcular la tabla de valores de la 3ª acumulación, el estudiante se equivocó en algunos datos: omitió un valor el cual le cambió los valores de los demás puntos, lo cual se le hizo notar al estudiante y lo tomó en cuenta para calcular los valores correctos.

En la hoja de práctica 3, el estudiante escogió el ejercicio 2, por lo que debía encontrar las acumulaciones de $f(x) = 7x$. El estudiante usó el incremento $\Delta x = 0.5$ de nuevo en esta ocasión, no les puso el valor de cero a todos los valores iniciales. Para la 1ª acumulación dio $B(0) = 0$; para la 2ª acumulación dio $C(0) = 1$; y para la 3ª acumulación dio $D(0) = 2$. Para calcular las tablas y ecuaciones de la 1ª y 2ª acumulaciones no tuvo dificultad ni error alguno, pero para calcular la 3ª acumulación se equivocó porque sumó mal. Afortunadamente para el estudiante, este valor no tuvo efecto alguno cuando encontró la ecuación de la acumulación porque era un valor de los últimos, pero sí le hice saber que se había equivocado al sumar. Cabe señalar que en este ejercicio sí uso a Geogebra.

En cuanto a la hoja de preguntas, en la pregunta 1 respondió que el valor inicial no afecta la función, sólo la recorre, dependiendo si es positivo o negativo el valor inicial, por lo que considero que sólo está pensando en la representación gráfica de la acumulación, como una acumulación que se traslada. En la pregunta 2 respondió que se usan las sumas para calcular las acumulaciones porque es la operación que sirve para acumular los datos anteriores (siendo redundante, pero en esencia correcto).

En la pregunta 3 el estudiante respondió que, si el incremento se hace más pequeño, acumularía más rápido y por tanto crecería más, sin dar una explicación a detalle, pero siendo correcta su respuesta. En la pregunta 4 respondió que con incrementos más pequeños se aproximaría, porque entre más pequeño sea el incremento

más exacto será la acumulación. Aquí el estudiante mencionó que estaba relacionando al incremento Δx con calcular la integral de una función, que entonces si $\Delta x \rightarrow 0$, la suma mencionada se aproximaría a la integral.

En la pregunta 5 respondió que con Geogebra es más fácil resolver las ecuaciones (los sistemas de ecuaciones lineales específicamente) para obtener la expresión algebraica, esto debido a que con un solo comando obtuvo su ecuación (ecuaciones). En la pregunta 6 el estudiante mencionó que en la 1ª acumulación fue sencillo el proceso, pero a partir de ahí la cantidad de incógnitas y ecuaciones lo hizo complejo (aún con la ayuda de Geogebra) porque la barra de comandos de la vista de Cálculo Simbólico del CAS se llenaba. En la pregunta 7 respondió que calcular acumulaciones es un proceso similar al de calcular la integral de Riemann porque los elementos sumados son el incremento que en el caso análogo sería el $(x_i - x_{i-1})$ y la función. En esta pregunta, cuando escribió $(x_i - x_{i-1})$ pudo referirse a lo que “mide” el intervalo. Y para la preguntó 8 respondió que fue difícil la práctica 3 porque no hubo valores iniciales, tablas de apoyo ni ayuda en el proceso.

De manera general, el estudiante LP entendió qué es una acumulación, supo cómo calcular usando Geogebra las ecuaciones de las acumulaciones y pudo obtener en algunos casos las ecuaciones de las acumulaciones usando sus raíces, aunque en algunas ocasiones tuvo errores de “dedo” lo cual no significa que no sepa o no haya entendido, simplemente significa distracción al traspasar datos.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1 Respuestas a las preguntas de Investigación

En el capítulo 1 se formularon 5 preguntas, las cuales servirían como pilar principal para iniciar la investigación. Una vez que el tema de tesis se desarrolló, que se propuso un marco teórico que sustentara las bases teóricas de las aproximaciones a la integral por medio de acumulaciones y que además se llevara a cabo una experimentación con estudiantes, con todo eso ya es posible responder las preguntas de investigación planteadas.

La primera pregunta a investigar fue:

1. ¿Qué tan pequeño o grande es el error de aproximación de las acumulaciones a la integral?

El error de aproximación cuando se calculan las integrales depende de dos factores: del número de dígitos usados para sumar, es decir si se redondea o se trunca y del incremento utilizado. Es decir, para incrementos más pequeños, como pudimos observar en los ejemplos mostrados, se obtiene una función de acumulación que es una buena aproximación a la integral de la función. También depende, como se mencionó anteriormente, de que al momento de sumar y de multiplicar por el incremento Δx , las cifras del número se redondeen o se trunquen, según sea el caso que más convenga.

La segunda pregunta a investigar era:

2. ¿Podemos obtener acumulaciones de cualquier función? ¿Deben ser las funciones continuas?

La respuesta para las preguntas es sí podemos obtener funciones de acumulación para cualquier función y no necesariamente tienen que ser continuas. Se sabe que toda función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ es integrable en el mismo intervalo $[a, b]$, además, toda función continua a trozos en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$.

Asimismo sabemos que una función f es continua a trozos si tiene un número de puntos de discontinuidad finito y que existen los límites laterales y que también son finitos.

En el siguiente ejemplo se observa cómo podemos calcular la 1ª acumulación de una función definida a trozos, la cual es también una función discontinua. Para ello, se hace uso de las herramientas que nos ofrece Geogebra. La función es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

la cual es una función discontinua en $x = 2$. Para ilustrar mejor la acumulación y su aproximación a la integral, se calculará la acumulación de la función para distintos incrementos: $\Delta x = 1, \Delta x = \frac{1}{2}$ y $\Delta x = \frac{1}{10}$.

Lo primero, será graficar la función en la Vista Gráfica de Geogebra, para darnos una idea de la situación. Para ello, se pone el siguiente comando en la barra de comandos de Geogebra:

$$f(x) = \text{Si}[x < 2, x^2, 1]$$

Figura 49. Comando para graficar una función definida a trozos usando Geogebra y se obtiene:

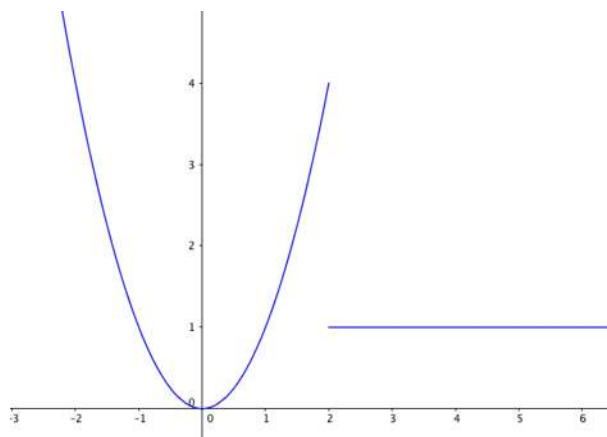


Figura 50. Gráfica de una función definida a trozos usando Geogebra

En teoría, no se podría calcular la integral de una función como la de arriba, pero con Geogebra y con las acumulaciones sí se puede obtener una aproximación a tal función, sobre todo para incrementos muy pequeños, en la que es posible hacer que el punto de discontinuidad de la función se pueda “aislar” o ignorar.

En este caso, calcular la integral de la función $f(x)$ definida a trozos o calcular la 1ª acumulación, sería lo mismo que calcular el área bajo la curva o aproximar a tal área bajo la curva que la función $f(x)$ sigue, respectivamente. Usando Geogebra, se puede calcular tal área con el siguiente comando:



Figura 51. Comando para calcular la integral definida de la función $f(x)$ usando Geogebra

Es decir, como ejemplo, se busca calcular la integral de $\int_0^4 f(x)dx$. Es decir, el área bajo la curva de $f(x)$ desde 0 hasta 4. Cuyo resultado Geogebra nos lo da numéricamente y gráficamente:

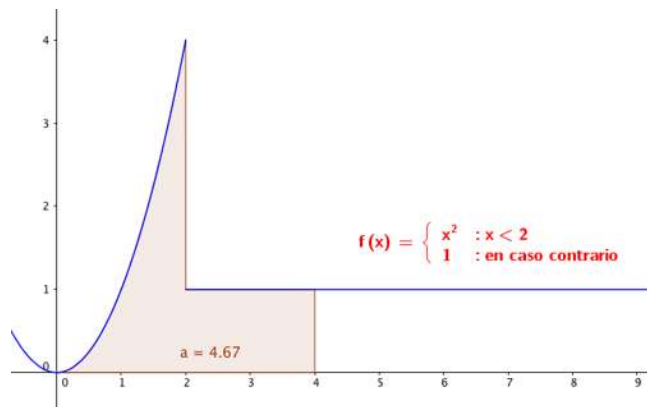


Figura 52. Área bajo la curva de la función $f(x)$ definida a trozos usando Geogebra

Es decir, $\int_0^4 f(x)dx = 4.67$

Posteriormente, se calcula la 1ª acumulación de la función $f(x)$ definida a trozos para el incremento $\Delta x = 1$, tomando en cuenta que para $x < 2$ la función es una parábola x^2 y para $x \geq 2$, es la función constante 1. La Tabla 47 también se obtiene con ayuda de la vista de Hoja de Cálculo:

Tabla 47. 1ª acumulación de la función definida a trozos cuando el incremento es 1

x	dx	f(x)	x	B(x)	x	B(x)dx
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1	0
2	1	1	2	1	2	1
3	1	1	3	2	3	2
4	1	1	4	3	4	3

En la Tabla 47, el valor de la primera columna llamada “x” son los valores de las abscisas; la segunda columna “dx” es el incremento, en este caso $\Delta x=1$; la tercera columna $f(x)$ es la función evaluada en la abscisa correspondiente; la cuarta columna es de nuevo los valores de las abscisas; la quinta columna nombrada $B(x)$ es la 1ª acumulación, en la que se está dando valor inicial $B(0)=0$ y además sirve para rellenar los demás valores de la tabla como se definió anteriormente: $B(1)=B(0)+f(0)$, $B(2)=B(1)+f(1)$, etc.; la última columna $B(x)dx$ es realmente la 1ª acumulación, en este caso, como el incremento es $\Delta x=1$, no afecta a la ecuación $B(x)dx$, pero en los casos en que $\Delta x \neq 1$ sí se deberá tomar en cuenta.

Después, se calcula la 1ª acumulación de la función $f(x)$ definida a trozos para el incremento $\Delta x = \frac{1}{2}$, tomando en cuenta de nuevo que para $x < 2$ la función es una parábola x^2 y para $x \geq 2$, es la función constante 1. La Tabla 48 también se obtiene con ayuda de la vista de Hoja de Cálculo:

Tabla 48. 1ª acumulación de la función definida a trozos cuando el incremento es 0.5

x	dx	f(x)	x	B(x)	x	B(x)dx
0	0.5	0	0	0	0	0
0.5	0.5	0.25	0.5	0	0.5	0
1	0.5	1	1	0.25	1	0.125
1.5	0.5	2.25	1.5	1.25	1.5	0.625
2	0.5	1	2	3.5	2	1.75
2.5	0.5	1	2.5	4.5	2.5	2.25
3	0.5	1	3	5.5	3	2.75
3.5	0.5	1	3.5	6.5	3.5	3.25
4	0.5	1	4	7.5	4	3.75

Los valores que nos interesan en esta tabla, son los valores que se han obtenido en la última columna etiquetada como “B(x)dx” que es la 1ª acumulación o una aproximación a la integral de la función $f(x)$.

Por último, se calcula la 1ª acumulación de la función $f(x)$ definida a trozos para el incremento $\Delta x = \frac{1}{10}$, tomando en cuenta que para $x < 2$ la función es una parábola x^2 y para $x \geq 2$, es la función constante 1. La Tabla 49 también se obtiene con ayuda de la vista de Hoja de Cálculo:

Tabla 49. 1ª acumulación de la función definida a trozos cuando el incremento es 0.1

2	0.1	1	2	24.7	2	2.47
2.1	0.1	1	2.1	25.7	2.1	2.57
2.2	0.1	1	2.2	26.7	2.2	2.67
2.3	0.1	1	2.3	27.7	2.3	2.77
2.4	0.1	1	2.4	28.7	2.4	2.87
2.5	0.1	1	2.5	29.7	2.5	2.97
2.6	0.1	1	2.6	30.7	2.6	3.07
2.7	0.1	1	2.7	31.7	2.7	3.17
2.8	0.1	1	2.8	32.7	2.8	3.27
2.9	0.1	1	2.9	33.7	2.9	3.37
3	0.1	1	3	34.7	3	3.47
3.1	0.1	1	3.1	35.7	3.1	3.57
3.2	0.1	1	3.2	36.7	3.2	3.67
3.3	0.1	1	3.3	37.7	3.3	3.77
3.4	0.1	1	3.4	38.7	3.4	3.87
3.5	0.1	1	3.5	39.7	3.5	3.97
3.6	0.1	1	3.6	40.7	3.6	4.07
3.7	0.1	1	3.7	41.7	3.7	4.17
3.8	0.1	1	3.8	42.7	3.8	4.27
3.9	0.1	1	3.9	43.7	3.9	4.37
4	0.1	1	4	44.7	4	4.47

Los valores que nos interesan en esta tabla, son los valores que se han obtenido en la última columna que sería el “ $B(x)dx$ ” que es la 1ª acumulación o una aproximación a la integral de la función $f(x)$.

Resumiendo, en la tabla siguiente se pueden observar los resultados obtenidos con los tres incrementos y usando Geogebra.

Tabla 50. Comparación de los diferentes valores obtenidos de la integral definida de la función definida a trozos

Valor de la 1ª acumulación o aproximación a la integral $\int_0^4 f(x)dx$			
Incrementos			Geogebra
$\Delta x = 1$	$\Delta x = 0.5$	$\Delta x = 0.1$	
3	3.75	4.47	4.67

Como se puede observar en la tabla de resultados obtenidos, cuando el incremento es $\Delta x = 0.1$, es decir, cuando el incremento es muy pequeño, el área bajo la curva de $f(x)$, se aproxima mejor al valor obtenido con ayuda del software GeoGebra.

Por lo tanto, para funciones continuas, sí se pueden calcular acumulaciones para cada función. Y para funciones no continuas o con puntos de discontinuidad (finitos), con incrementos pequeños, se puede obtener también una buena aproximación a la integral de la función por medio de acumulaciones.

La tercera pregunta a investigar fue:

3. ¿Cómo Geogebra, un software de Geometría dinámica, puede ayudar al estudiante a entender mejor el concepto de acumulación?

El software GeoGebra, a lo largo de la tesis, nos ayudó en primer lugar a graficar la función a la cual se buscaba calcular sus acumulaciones; sirvió para encontrar la forma explícita de las acumulaciones y en los casos en que no podía encontrarse una forma explícita, con el ajuste de curvas se logró una aproximación a la forma explícita de la acumulación, lo cual sucedió en funciones no polinomiales. Además, por medio de sus hojas de cálculo, se obtuvieron tablas de funciones de acumulación, en la que se ponía el incremento respectivo, los valores iniciales y los comandos necesarios y se obtenían tablas con las que era fácil encontrar la ecuación que seguía tal acumulación.

Por otro lado, cuando las funciones fueron polinomiales, usando ciertos puntos de las tablas de valores de las acumulaciones, era posible encontrar por medio de la solución de sistemas de ecuaciones lineales, las constantes que determinaban la ecuación algebraica de las acumulaciones. Porque si se hubiera utilizado la eliminación gaussiana para encontrar la solución de tales sistemas de ecuaciones lineales, habría sido un proceso eficaz también pero muy tedioso y cansado, porque en ocasiones se debieron encontrar soluciones a sistemas de ecuaciones con 5 ecuaciones y 5 incógnitas, que sería una matriz de 5×5 , por lo que GeoGebra ayudó a aligerar un poco el trabajo.

La cuarta pregunta a investigar era:

4. ¿Se puede obtener una forma explícita para cualquier función de acumulación?

Sí, si la función es una función polinomial como se mencionó en la respuesta de la pregunta 3, se puede utilizar el comando Resuelve que GeoGebra nos ofrece en su Vista de Cálculo Simbólico (CAS), para encontrar la solución de los sistemas de ecuaciones lineales que surjan al tomar algunos puntos y sustituirlos en la ecuación algebraica. (Ver Capítulo 3). Pero si la función no es polinomial, entonces se puede hacer uso del Ajuste de Curvas que GeoGebra ofrece también. Para usar el Ajuste de Curvas, se debe crear una lista de puntos, que en el Anexo A2 se da un tutorial de cómo crear lista de puntos con Geogebra y en el Anexo A3 se muestra cómo utilizar el Ajuste de Curvas. Por lo que se obtiene una aproximación a la ecuación que sigue la acumulación respectiva.

La quinta y última pregunta a investigar fue:

5. ¿Por qué se debe dar un valor inicial en cada acumulación?

Esta pregunta, es un tanto controversial. Porque muchos de los estudiantes estuvieron haciendo esta pregunta, de por qué debe darse un valor inicial para poder comenzar a calcular las acumulaciones de una función. La respuesta sería, según Yerushalmy y Swidan (2011) que su valor indica el comienzo de la acumulación del área, es decir, que cada valor que se asigne como valor inicial, determinará una función de acumulación única dentro de una familia de funciones de acumulación.

Además, de acuerdo a estudios que Yerushalmy y Swidan, realizaron cuando pusieron en práctica su software CUL, la gráfica de la función de acumulación se transforma verticalmente de acuerdo con los cambios que se le hagan al valor inicial. Todo esto es una interpretación que relaciona la parametrización del valor inicial o límite inferior de la acumulación con el signo c , la cual representa la integral indefinida como una familia de funciones que difieren por una constante c , o simbólicamente como $\int f(x)dx = h(x) + c$. Donde $h(x)$ es la antiderivada de la función $f(x)$.

5.2 Reflexiones finales en las prácticas con los Estudiantes

Una vez que se realizó la experimentación con los estudiantes, surgieron diferentes situaciones. La primera fue acerca del valor inicial, de por qué se debe dar un valor inicial o condición inicial. En matemáticas a nivel preparatoria, los estudiantes no están acostumbrados a usar condiciones iniciales hasta cuando llegan a la universidad y empiezan a estudiar el movimiento rectilíneo uniforme o comienzan algún curso de ecuaciones diferenciales e intentan resolver una ecuación diferencial con condición inicial. En la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, las condiciones iniciales del problema son valores que adquiere la función solución o algunas de sus derivadas en ciertos puntos. Por lo que los valores iniciales nos ayudan a determinar la función particular, de entre una familia de funciones solución, que representa mejor la situación.

En el caso de la integral, en el momento en que mencionamos la famosa c o constante de integración, realmente hablamos de una condición inicial, ya que cuando se define una condición inicial, se establece que no es una familia, sino una función en particular.

Por otro lado, en Física también son muy usados los valores iniciales. Por ejemplo, “si un cuerpo se está moviendo con una trayectoria de línea recta con una velocidad dada por la ecuación $v(t)$. Si en cierto instante, t_0 está situado en una posición inicial x_0 del origen. Calcular la posición x del móvil en cualquier instante.” En este problema, se debe integrar la función $v(t)$ y una vez que se obtenga tal integral, será necesario encontrar la constante de integración que surja con el valor inicial dado de t_0 usando la posición inicial x_0 . Dicho de otro modo, siempre que se busque hacer un estudio real o apegado a la realidad, se debe tomar en cuenta un punto de partida, desde dónde comenzar, etc. En el mundo real, no tendría sentido el análisis que se haga si no tienes por dónde comenzar.

Una función del tipo lineal, digamos la línea recta, está definida en todos los reales, es decir, en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Pero si se quiere aplicar un modelo lineal, este

debe estar acotado para que pueda aplicarse, y necesariamente este acotamiento inicia a partir de una condición inicial.

Algo curioso sucede si a los estudiantes que acaban de cursar las materias de cálculo diferencial a integral se les pregunta qué se les hace más complicado, resolver una integral definida o encontrar una integral indefinida. Los estudiantes responden que es más fácil resolver una integral definida, porque generalmente las integrales son más sencillas, las que se ponen en el curso y las indefinidas suelen ser complicadas. Por otro lado, a los estudiantes les queda más claro que a lo que tienen que llegar como resultado, es un número, que a pensar que tienen que llegar a una expresión algebraica, como lo es encontrar la antiderivada o integral indefinida. En las integrales definidas ya se les da a los estudiantes implícitamente la condición inicial, porque se establece que se da un inicio (condición inicial) y la condición final.

Una segunda situación que surgió en la experimentación digna de mención, es cuando se les estaba explicando a los estudiantes la forma de obtener las acumulaciones, mediante sumas. Los estudiantes comenzaron a observar que si se estaban sumando cantidades que eran sumas de otras cantidades, entonces se podría tener una fórmula con la cual calcular cualquier término n -ésimo de la acumulación. Para los estudiantes es más fácil usar una fórmula en la que sólo se deben sustituir valores, en cambio, si tienen espacios en blanco que deben ser rellenados con sumas y sumas, suelen interpretarlo como un proceso más difícil.

Algo que se mencionó anteriormente acerca de las fórmulas que se obtuvieron para calcular las acumulaciones es que hasta ese momento no fueron relevantes, ya que no se encontró la manera de usarlas para calcular la forma algebraica que uno está acostumbrado a usar para representar la acumulación. Pero cuando le planteé esta situación al asesor el Dr. José Carlos Cortés, me hizo ver que sí es posible de las fórmulas como $B(x_n) = B(x_n - \Delta x) + f(x_n - \Delta x)$, donde

$n = 1, 2, 3, \dots, n - 1$, obtener la fórmula algebraica, no obstante, implicaría un análisis matemático muy profundo que va más allá del propósito de esta tesis. Ya que, con la expresión iterativa, que es la expresión anterior en la que se están usando los valores

anteriores para calcular el valor “actual” se puede llegar a la expresión general algebraica, que también llamo expresión explícita, que es la que se obtiene por ejemplo al resolver los sistemas de ecuaciones lineales que involucran ciertos puntos de la acumulación o aquella obtenida mediante el ajuste de curvas.

Por lo que se considera que para los estudiantes, con el fin de lograr una mejor comprensión del tema, es aconsejable que comenzando con el método realicen las sumas “a mano”, para que vean los términos que se están sumando y por qué se están sumando tales términos; ya que si se les da una fórmula como la anterior $B(x_n) = B(x_n - \Delta x) + f(x_n - \Delta x)$, se está promoviendo la algoritmización, que es lo mismo que enseñarles a aprenderse fórmulas de integración en las que no se entiende de dónde salieron tales fórmulas (sobre todo en nivel preparatoria), sino que al sumar paso a paso, los estudiantes observen que están agregando pedacitos de la función que se van aproximando al área bajo la curva o a la integral definida de la función.

Por otro lado, las fórmulas como $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$, no surgieron de la nada ni son fórmulas simples porque sí, surgieron de la necesidad de evitarse cálculos iterativos como los usados para calcular las acumulaciones; los matemáticos tienen esa fama de siempre inventar nuevas fórmulas o nuevos métodos para evitar cálculos grandes y tediosos. De hecho, las acumulaciones, como se mencionó en el capítulo 3 (ver 3.2) se pueden ver como una sumatoria.

Pero, ¿cuál es la diferencia entre una sumatoria y una integral?, es decir, ¿qué diferencia hay entre los símbolos “ Σ ” y “ $\int$ ”? El límite es la única diferencia. A nivel preparatoria, el límite es un concepto muy complejo de comprender y de dominar. Es por eso, que se propone que si se enseñará cálculo integral, primero se estudien las sumatorias para analizar las acumulaciones. Una vez que se ha dominado ese tema se pueden estudiar las integrales y posteriormente analizar el límite. Similarmente, si se estudia cálculo diferencial, primero partir de razones de cambio (o diferencias), después el uso de la derivada y posteriormente el límite. De ese modo, el estudiante puede tener una mejor comprensión de por qué la derivada es un límite de un cociente de incrementos

y por qué la integral es el límite de un producto de pedazos de función con incrementos pequeños.

Sin embargo, para cualquier profesor de matemáticas esto no sería algo “normal” o natural, porque actualmente y durante mucho tiempo se ha enseñado el cálculo integral o el cálculo diferencial partiendo necesariamente del concepto de límite y posteriormente se enseña la derivada y la integral. Aunque la evidencia muestra que esta metodología no es 100% útil, ya que los estudiantes tienen muchas dificultades para aprender realmente lo que es la integral o la derivada y tienden a ver todo como un proceso rutinario y algorítmico.

Bibliografía

- Allen, D. (s.f.). *Lectures on the History of Mathematics*. Recuperado el Febrero de 2017, de <http://www.math.tamu.edu/~dallen/masters/>
- Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*(52), 215-241.
- Arias, R., & Leiva, L. (2013). Construcciones dinámicas con GeoGebra para el aprendizaje-enseñanza de la matemática. *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*.
- Artigue, M. (2002). Analysis. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 167-198). Nueva York: Kluwer Academic Publishers.
- Barahona, F., Barrera, O., Vaca, B., & Hidalgo, B. (Diciembre de 2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica ESPOL*, 28(5), 121-132.
- Camacho, M., Socas, M., & Depool, R. (2005). La integral definida. Una propuesta de enseñanza utilizando derive. En J. C. Cortés, & F. Hitt (Edits.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. México: Morevallado Editores.
- Cortés, J. C. (2002). *Desarrollo de software para la enseñanza del cálculo diferencial*. México: Cinvestav-IPN.
- Cortés, J. C. (2011). Diferencias y acumulaciones vs Derivada e Integral.
- Cortés, J. C. (Marzo de 2012). Construyendo funciones derivadas. *Revista UNION*(29), 23-34.
- Cortés, J. C., López, L., & Ruiz, C. H. (2016). Acumulaciones vs Integral. *Revista Pádi. Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería*(1).
- Currie, S. (2007). *Science Lives*. Recuperado el Febrero de 2017, de Johannes Kepler: "Mathematician of the Sky" : <http://www.sciencelives.com/kepler.html>
- Dupuis, C. (1997). Recuperado el Enero de 2017, de Uso de la computadora para modificar la aprehensión de figuras geométricas : <http://fractus.uson.mx/Papers/revista/Dupuis/Dupuis.html>
- Duval, R. (s.f.). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*(10), 5-53.
- Duval, R. (1988). Graphiques et equations: L'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*(1), 235-253.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales dide Didactique et de Sciences Cognitives*(5), 37-65.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (1ª edición ed.). (M. V. Restrepo, Trad.) Colombia: Artes Gráficas Univalle.
- Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy, *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual* (págs. 41-76). México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

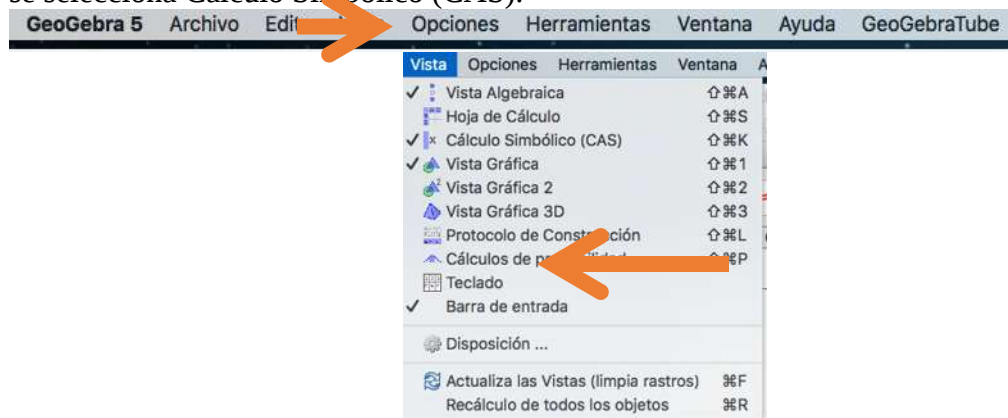
- Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1986). On visual versus analytical thinking in mathematics. *Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 153-158.
- Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti, O. (2006). The role and uses of technology for the teaching of algebra and calculus. (A. Gutierrez, & P. Boero, Edits.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 237-273.
- Foresta, S., & Goldman, L. (s.f.). *Principia Mathematica Historallis Integratus*. Recuperado el Febrero de 2017, de <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=F686F1617DC7E4B57F51919618B6C619?doi=10.1.1.127.5435&rep=rep1&type=pdf>
- Franco, Á. (s.f.). *Curso Interactivo de Física en Internet*. Recuperado el Febrero de 2017, de Cinemática. Estudio de los movimientos: http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica_/cinematica/rectilineo/rectilineo/rectilineo.html
- Gordon, S., & Gordon, F. (2007). Discovering the fundamental theorem of calculus. *Mathematics Teacher*, 100(9), 597-604.
- Grabiner, J. (Marzo de 1983). Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus . *The American Mathematical Monthly* , 90(3), 185-194.
- Hitt, F. (1992). Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Memorias del IV Simposio sobre Investigación en Matemática Educativa*.
- Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. C. Cortés, & F. Hitt (Edits.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. México: Morevallado Editores.
- International Geogebra Institute. (s.f.). *GeoGebra*. Recuperado el Agosto de 2016, de Comandos de la vista CAS: https://wiki.geogebra.org/es/Categor%C3%ADa:Comandos_CAS
- Kallio, B. (1961). A History of the Definite Integral. British Columbia, Canada: University of British Columbia.
- Muñoz Ortega, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral . *Revista Oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.* , 3(2).
- Oviedo, L., Kanashiro, A., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*(13), 29-36.
- Pluvinae, F. (1998). Los objetos matemáticos en la adquisición del razonamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (págs. 1-15). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Rodríguez, G. (2014). Implementación de Software en el aula de clases (Uso de GeoGebra como herramienta de aprendizaje). Morelia, Michoacán, México: UMSNH.

- Roger (Ed.). (s.f.). El GeoGebra como medio articulador del conocimiento matemático. *XVII Concurso Universitario FERIA de las Ciencias*.
- Stewart, J. (1998). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (3ª ed.). International Thomson Editores .
- Thompson, P. W., & Silverman, J. (2007). The concept of accumulation in calculus. En M. P. Carlson, & C. Rasummsen (Edits.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (págs. 117-131). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.
- Torres, S., González, A., & Vavilova, I. (2013). *La Cita y Referencia Bibliográfica: Guía basada en las normas APA* (3ª edición ed.). Buenos Aires: Biblioteca Central UCES.
- Unit 11 Applications of Integrals and the Integral as an Accumulation Function*. (s.f.). Recuperado el Enero de 2017, de Casio Education:
<http://www.casioeducation.com/resource/pdfs/unit11.pdf>
- Yerushalmy, M., & Swidan, O. (10 de Noviembre de 2011). Signifying the accumulation graph in a dynamic and multi-representation environment. *Educ Stud Math*(80), 287-306.

Apéndice

A1. Solución de sistemas de ecuaciones lineales con Geogebra

Primero, en Geogebra, se va uno a la barra de herramientas y se selecciona Vista, después se selecciona Cálculo Simbólico (CAS).



Para resolver un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas cuando se conocen tres puntos $P_1(x_1, C_1)$, $P_2(x_2, C_2)$ y $P_3(x_3, C_3)$ y se quiere encontrar la curva de la forma $C(x) = ax^2 + bx + c$; entonces, se tienen que sustituir tales puntos y así, encontrar las incógnitas o coeficientes a , b y c .

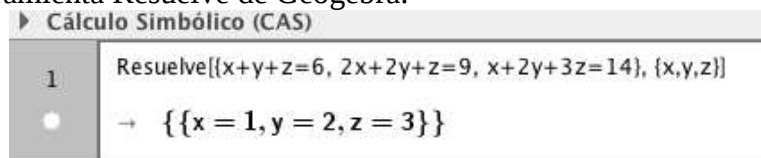
$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c &= C_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= C_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c &= C_3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en Geogebra se utilizará la herramienta Resuelve (español) o Solve (Inglés) (que la vista de Cálculo Simbólico nos permite).

Aplicado en un problema en particular, supongamos que se quiere resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x + 2y + z &= 9 \\ x + 2y + 3z &= 14 \end{aligned}$$

Usando la herramienta Resuelve de Geogebra:

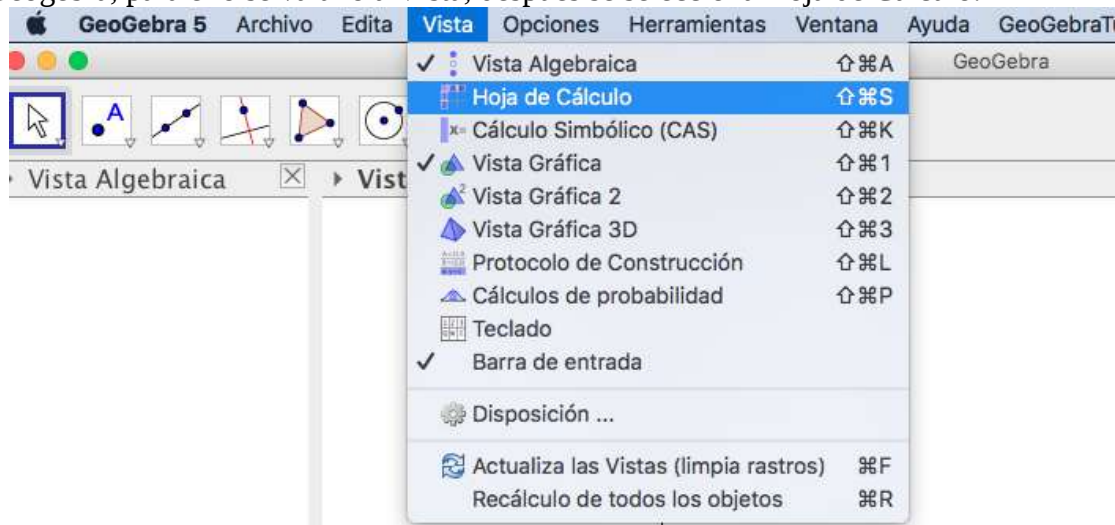


Y de manera general, para cualquier sistema de n ecuaciones con n incógnitas, la sintaxis en Geogebra es:

Resuelve[{ecuación 1, ecuación 2, ..., ecuación n }, {incógnita 1, ..., incógnita n }]

A2. Graficar una lista de puntos en Geogebra usando la hoja de cálculo

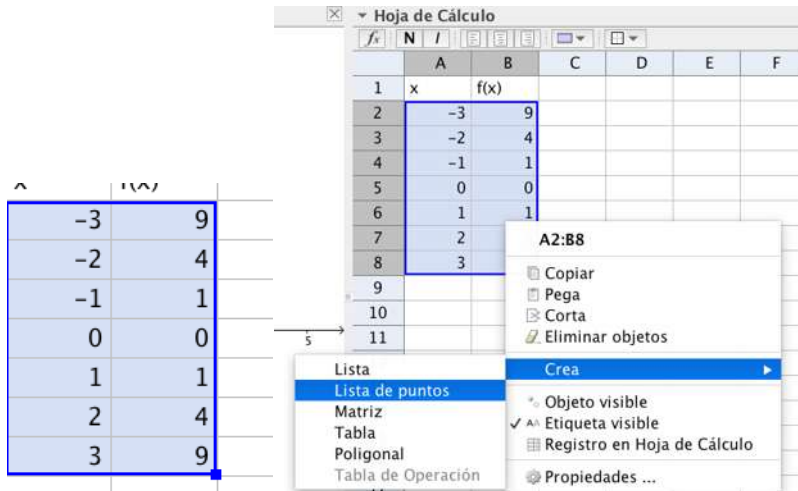
Se debe tener la lista de puntos que se quiere graficar, que puede ser de una función explícita o simplemente una tabla de valores. Se abre la Vista de Hoja de Cálculo de Geogebra, para ello se va uno a Vista, después se selecciona Hoja de Cálculo:



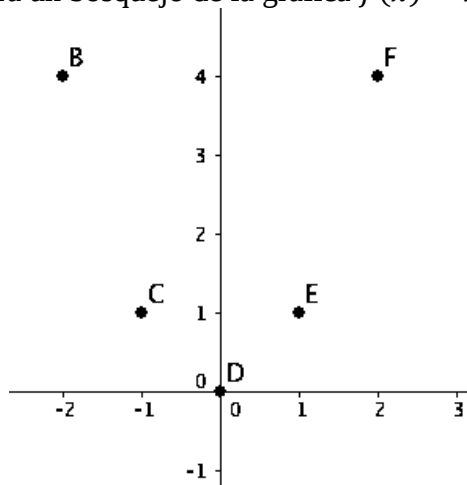
Una vez seleccionada la vista de Hoja de Cálculo, se introducen los valores en la hoja de cálculo. Se pondrá como ejemplo algunos puntos de la función $f(x) = x^2$. Los cuales pueden introducirse manualmente o mediante la fórmula que representa la función, en el ejemplo se hará de manera manual.

Hoja de Cálculo				
f_x	N	I		
	A	B	C	D
1	x	f(x)		
2	-3	9		
3	-2	4		
4	-1	1		
5	0	0		
6	1	1		
7	2	4		
8	3	9		
9				
10				
11				
12				

Posteriormente, se seleccionan las dos columnas: columna x de las abscisas y columna f(x) de las ordenadas y se oprime clic derecho en la sección que dice Crea: Lista de Puntos



Posteriormente, se obtendrá un bosquejo de la gráfica $f(x) = x^2$.



Cabe señalar que además del bosquejo de la función, se crea automáticamente una Lista de Puntos llamada “lista1”. Se hace hincapié en este detalle porque servirá como parte del ejemplo para explicar cómo funciona el Ajuste de Curvas con Geogebra.

A3. Ajuste de curvas con Geogebra

El procedimiento de encontrar la ecuación de la gráfica o, mejor dicho, una aproximación de la ecuación dada una lista de puntos, se conoce como un ajuste de curvas, por lo que se necesita una lista de puntos, en este caso, se usará la lista1 que se utilizó anteriormente en el A2. Si no se tiene, deberás leer A2 para crear tu lista de puntos.

Una vez que ya se tiene la lista de puntos “lista1”, se va uno a la barra de Comandos de Geogebra y se escribe:

Entrada: **Ajusta[<Lista de puntos>, <Lista de funciones>]**

Posteriormente, en la sección <Lista de puntos> se escribe: lista1

En la sección <Lista de funciones> se escribe: $\{x^2, x^0\}$, ya que se quiere aproximar a una ecuación de grado 2 (cuadrada) por tener forma de parábola; el término x^0 es simplemente un término constante. Como se ve en la figura:

Entrada: **Ajusta[lista1, {x^2,x^0}]**

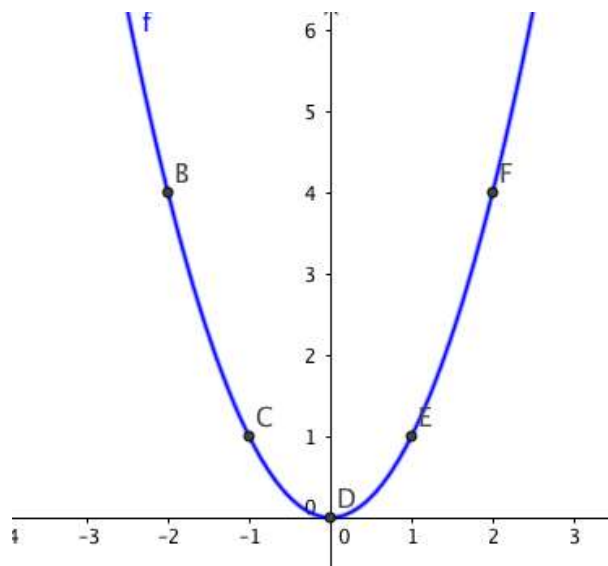
Función

● **$f(x) = 1x^2 + 0x^0$**

Cuyo resultado será:

Se esperaba que el resultado fuera $f(x) = x^2$, tal como Geogebra lo dio.

Y gráficamente:



A4. Hojas De Trabajo

Se les ha explicado a cuatro estudiantes el método propuesto en esta tesis de investigación sobre aproximarse a la integral definida mediante sumas. Con tal motivo, se elaboraron tres tipos de hojas de trabajo; en éstas, se presentan diversos tipos de ejercicios de calcular las acumulaciones de una función dada. Hay tres tipos, cada tipo tiene su propia explicación y manera de abordarse.

A4.1 Hojas de trabajo Tipo 1

En las hojas de trabajo de Tipo 1 se presentaron 2 ejercicios. Los estudiantes debían seleccionar 1 ejercicio para resolverlo. Esta hoja de trabajo estaba bastante explicada para su resolución, ya que se daba la función, el incremento con el que debían trabajar los valores de “x” y sobretodo se explicaba detalladamente el método para encontrar las acumulaciones.

Ejercicio 1

Dada la función, $f(x) = -2$, se encuentran sus acumulaciones. Primero, deberás llenar la tabla para los valores que se marcan, con incremento $\Delta x = 1$.

Tabla de valores

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-2	-2									

Con la tabla de valores de la función $f(x) = -2$, se construye la primera acumulación, que será una función que llamaremos $B(x)$. Para construirla necesitamos sumar, pero debemos tener un valor inicial, $B(-5) = 0$.

Para los demás valores de $B(x)$, se obtienen del modo siguiente:

$$B(-4) = B(-5) + f(-5) = 0 - 2 = -2$$

$$B(-3) = B(-4) + f(-4) = -2 - 2 = -4 \text{ y así sucesivamente.}$$

Completa la tabla.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
B(x)	0	-2	-4								
f(x)		-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2

Anota la tabla obtenida para la primera acumulación $B(x)$.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
B(x)											

Esto nos da una función del tipo lineal, por lo que se necesitan dos puntos para obtener la expresión algebraica. Se toman $P_1(x_1, B_1)$ y $P_2(x_2, B_2)$ y se calcula la función $B(x)$, la cual será de la forma $B(x) = mx + b$. De donde, $B(x) =$

Para obtener la segunda acumulación, es decir $C(x)$, teniendo la primera acumulación $B(x)$, se necesita un valor inicial $C(-5) = 1$

Sea: $C(-4) = C(-5) + B(-5) = 1 + 0 = 1$

$C(-3) = C(-4) + B(-4) = 1 - 2 = -1$ y así sucesivamente.

Completa la tabla.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
C(x)	1	1	-1	-5							
B(x)	0	-2	-4								

Anota la tabla obtenida para la segunda acumulación $C(x)$.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
C(x)											

El comportamiento de esta función es de la forma $C(x) = ax^2 + bx + c$ se toman tres puntos y se determina su expresión algebraica. Se toman tres puntos $P_1(x_1, C_1)$, $P_2(x_2, C_2)$ y $P_3(x_3, C_3)$. Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con 3 incógnitas y se encuentra el valor de a, b y c.

Por lo tanto, $C(x)$ =completar

Una vez obtenida la segunda acumulación, se puede calcular la tercera acumulación, que llamaremos $D(x)$. Demos un valor inicial $D(-5) = 2$

Sea: $D(-4) = D(-5) + C(-5) = 2 + 1 = 3$

$D(-3) = D(-4) + C(-4) = 3 + 1 = 4$ y así sucesivamente.

Completa la tabla.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
D(x)	2	3	4	3							
C(x)	1			-1	-5						

Anota la tabla obtenida para la tercera acumulación $D(x)$.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
D(x)											

El comportamiento de esta función es cúbica de la forma

$$D(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Para calcular su expresión algebraica se necesitan cuatro puntos de la tabla.

$P_1(x_1, D_1)$, $P_2(x_2, D_2)$, $P_3(x_3, D_3)$ y $P_4(x_4, D_4)$. Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con 4 incógnitas, se debe encontrar los valores de a, b, c y d.

Por lo tanto, $D(x)$ =completar

Ejercicio 2

Dada la función, $f(x) = 2x$, se calculan sus acumulaciones. Primero, deberás llenar la tabla para los valores que se marcan, con incremento $\Delta x = \frac{1}{2}$.

Tabla de valores

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
f(x)	-4	-3	-2						

Con la tabla de valores de la función $f(x) = 2x$, se construye la primera acumulación, que será una función que llamaremos $B(x)$. Para construirla necesitamos sumar, pero debemos tener un valor inicial, $B(-2) = -1$.

Para los demás valores de $B(x)$, se obtienen del modo siguiente:

$$B(-1.5) = B(-2) + f(-2) = -1 - 4 = -5$$

$$B(-1) = B(-1.5) + f(-1.5) = -5 - 3 = -8 \text{ y así sucesivamente.}$$

Completa la tabla.

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
B(x)	-1	-5	-8						
f(x)	-4	-3	-2						

Anota la tabla obtenida para la primera acumulación $B(x)$.

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
B(x)									

Esto nos da una función del tipo cuadrática, por lo que se necesitan tres puntos para obtener la expresión algebraica. Tomando $P_1(x_1, B_1)$, $P_2(x_2, B_2)$ y $P_3(x_3, B_3)$ y se calcula la función $B(x)$, la cual será de la forma $B(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

De donde, **$B(x)$ =completar**

Para obtener la segunda acumulación, es decir $C(x)$, teniendo la primera acumulación $B(x)$, se necesita un valor inicial $C(-2) = -0.5$

$$\text{Sea: } C(-1.5) = C(-2) + B(-2) = -0.5 - 1 = -1.5$$

$$C(-1) = C(-1.5) + B(-1.5) = -1.5 - 5 = -6.5 \text{ y así sucesivamente.}$$

Completa la tabla.

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
C(x)	-0.5	-1.5	-6.5						
B(x)	-1	-5	-8						

Anota la tabla obtenida para la segunda acumulación $C(x)$.

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
C(x)									

El comportamiento de esta función es de la forma $C(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Se toman cuatro puntos y se determina su expresión algebraica. Tomando cuatro puntos $P_1(x_1, C_1)$, $P_2(x_2, C_2)$, $P_3(x_3, C_3)$ y $P_4(x_4, C_4)$. Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con cuatro incógnitas y se encuentra el valor de a_3 , a_2 , a_1 y a_0 .

Por lo tanto, $C(x)$ = completar

Una vez obtenida la segunda acumulación, se puede calcular la tercera acumulación, que llamaremos $D(x)$. Demos un valor inicial $D(-2) = 0$

Sea: $D(-1.5) = D(-2) + C(-2) = 0 - 0.5 = -0.5$

$D(-1) = D(-1.5) + C(-1.5) = -0.5 - 1.5 = -2$ y así sucesivamente.

Completa la tabla.

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
D(x)	0	-0.5	-2						
C(x)	-0.5	-1.5	-6.5						

Anota la tabla obtenida para la tercera acumulación $D(x)$.

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
D(x)									

El comportamiento de esta función es de la forma

$$D(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Para calcular su expresión algebraica se necesitan cinco puntos de la tabla.

$P_1(x_1, D_1)$, $P_2(x_2, D_2)$, $P_3(x_3, D_3)$, $P_4(x_4, D_4)$ y $P_5(x_5, D_5)$. Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con 5 incógnitas, se debe encontrar los valores de a_4 , a_3 , a_2 , a_1 y a_0 .

Por lo tanto, $D(x) =$

A4.2 Hojas de trabajo Tipo 2

En las hojas de trabajo de Tipo 2 se presentaron dos ejercicios. Los estudiantes debían seleccionar un ejercicio para resolverlo. Esta hoja de trabajo estaba menos explicada que la hoja de trabajo de Tipo 1, ya que sólo se daba la función, ni se ayudaba a los estudiantes a llenar las tablas

Ejercicio 1

Dada la función, $f(x) = 10$, encontrar sus acumulaciones. Primero, se deberá llenar la tabla para algunos valores de x (tú deberás llenarlos, tomando en cuenta que el incremento será de $\Delta x = 1$).

Tabla de valores

x	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$x_4 =$	$x_5 =$	$x_6 =$	$x_7 =$	$x_8 =$	$x_9 =$	$x_{10} =$
f(x)											

Con la tabla de valores de la función $f(x) = 10$, se construye la primera acumulación, que será una función que llamaremos $B(x)$. Para construirla se necesita sumar, pero se debe tener un valor inicial, $BB(x_0) = c_1$. (Tu deberás darle un valor inicial).

Para los demás valores de $B(x)$, se obtienen del modo siguiente:

$$B(x_1) = B(x_0) + f(x_0) = c_1 + f(x_0)$$

$$B(x_2) = B(x_1) + f(x_1) \text{ y así sucesivamente.}$$

Completa la tabla.

x	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$x_4 =$	$x_5 =$	$x_6 =$	$x_7 =$	$x_8 =$	$x_9 =$	$x_{10} =$
B(x)	c_1										
f(x)											

Anota la tabla obtenida para la primera acumulación $B(x)$.

x	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$x_4 =$	$x_5 =$	$x_6 =$	$x_7 =$	$x_8 =$	$x_9 =$	$x_{10} =$
B(x)											

Siguiendo el proceso indicado en la práctica 1 (cuando la función es constante), se encuentra que la primera acumulación es de la forma $B(x) =$

Para obtener la segunda acumulación, es decir $C(x)$, teniendo la primera acumulación $B(x)$, se necesita un valor inicial $C(x_0) = c_2$. (Tú asígnalo)

$$\text{Sea: } C(x_1) = C(x_0) + B(x_0) = c_2 + B(x_0)$$

$$C(x_2) = C(x_1) + B(x_1) \text{ y así sucesivamente.}$$

Completa la tabla.

x	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$x_4 =$	$x_5 =$	$x_6 =$	$x_7 =$	$x_8 =$	$x_9 =$	$x_{10} =$
---	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	------------

C(x)	c_2										
B(x)											

Anota la tabla obtenida para la segunda acumulación C(x).

x	$x_0=$	$x_1=$	$x_2=$	$x_3=$	$x_4=$	$x_5=$	$x_6=$	$x_7=$	$x_8=$	$x_9=$	$x_{10}=$
C(x)											

En base a la tabla y al procedimiento realizado en la práctica 1, se encuentra que la segunda acumulación se comporta por medio de la ecuación $C(x) =$

Para obtener la tercera acumulación, es decir D(x), teniendo la segunda acumulación C(x), se necesita un valor inicial $D(x_0) = c_3$. (Tú asígnalo)

Sea: $D(x_1) = D(x_0) + C(x_0) = c_3 + C(x_0)$

$D(x_2) = D(x_1) + C(x_1)$ y así sucesivamente.

Completa la tabla.

x	$x_0=$	$x_1=$	$x_2=$	$x_3=$	$x_4=$	$x_5=$	$x_6=$	$x_7=$	$x_8=$	$x_9=$	$x_{10}=$
D(x)	c_3										
C(x)											

Anota la tabla obtenida para la tercera acumulación D(x).

x	$x_0=$	$x_1=$	$x_2=$	$x_3=$	$x_4=$	$x_5=$	$x_6=$	$x_7=$	$x_8=$	$x_9=$	$x_{10}=$
D(x)											

En base a la tabla y al procedimiento realizado en la práctica 1, se encuentra que la tercera acumulación se comporta por medio de la ecuación $D(x) =$

Ejercicio 2

Dada la función, $f(x) = 12x$, encontrar sus acumulaciones. Primero, se deberá llenar la tabla para algunos valores de x (tú deberás llenarlos, tomando en cuenta que el incremento será de $\Delta x = \frac{1}{2}$).

Tabla de valores

x	$x_0=$	$x_1=$	$x_2=$	$x_3=$	$x_4=$	$x_5=$	$x_6=$	$x_7=$	$x_8=$	$x_9=$	$x_{10}=$
f(x)											

Con la tabla de valores de la función $f(x) = 12x$, se construye la primera acumulación, que será una función que se llamará $B(x)$. Para construirla se necesita sumar, pero se debe tener un valor inicial, $B(x_0) = c_1$. (Tu deberás darle un valor inicial).

Los demás valores de $B(x)$ se obtienen del modo siguiente:

$$B(x_1) = B(x_0) + f(x_0) = c_1 + f(x_0)$$

$$B(x_2) = B(x_1) + f(x_1) \text{ y así sucesivamente.}$$

Completa la tabla.

x	$x_0=$	$x_1=$	$x_2=$	$x_3=$	$x_4=$	$x_5=$	$x_6=$	$x_7=$	$x_8=$	$x_9=$	$x_{10}=$
B(x)	c_1										
f(x)											

Anota la tabla obtenida para la primera acumulación $B(x)$.

x	$x_0=$	$x_1=$	$x_2=$	$x_3=$	$x_4=$	$x_5=$	$x_6=$	$x_7=$	$x_8=$	$x_9=$	$x_{10}=$
B(x)											

Siguiendo el proceso indicado en la práctica 1 (cuando la función es lineal o un polinomio de grado 1), se encuentra que la primera acumulación es de la forma $B(x) =$

Para obtener la segunda acumulación, es decir $C(x)$, teniendo la primera acumulación $B(x)$, se necesita un valor inicial $C(x_0) = c_2$. (Asígnalo tú)

$$\text{Sea: } C(x_1) = C(x_0) + B(x_0) = c_2 + B(x_0)$$

$$C(x_2) = C(x_1) + B(x_1) \text{ y así sucesivamente.}$$

Completa la tabla.

x	$x_0=$	$x_1=$	$x_2=$	$x_3=$	$x_4=$	$x_5=$	$x_6=$	$x_7=$	$x_8=$	$x_9=$	$x_{10}=$
C(x)	c_2										
B(x)											

Anota la tabla obtenida para la segunda acumulación $C(x)$.

x	$x_0=$	$x_1=$	$x_2=$	$x_3=$	$x_4=$	$x_5=$	$x_6=$	$x_7=$	$x_8=$	$x_9=$	$x_{10}=$
---	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	-----------

C(x)											
------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

En base a la tabla y al procedimiento realizado en la práctica 1, se encuentra que la segunda acumulación se comporta por medio de la ecuación $C(x) =$

Para obtener la tercera acumulación, es decir $D(x)$, teniendo la segunda acumulación $C(x)$, se necesita un valor inicial $D(x_0) = c_3$. (Asígnaselo tú).

Sea: $D(x_1) = D(x_0) + C(x_0) = c_3 + C(x_0)$

$D(x_2) = D(x_1) + C(x_1)$ y así sucesivamente.

Completa la tabla.

x	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$x_4 =$	$x_5 =$	$x_6 =$	$x_7 =$	$x_8 =$	$x_9 =$	$x_{10} =$
D(x)	c_3										
C(x)											

Anota la tabla obtenida para la tercera acumulación $D(x)$.

x	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$x_4 =$	$x_5 =$	$x_6 =$	$x_7 =$	$x_8 =$	$x_9 =$	$x_{10} =$
D(x)											

En base a la tabla y al procedimiento realizado en la práctica 1, se encuentra que la tercera acumulación se comporta por medio de la ecuación $D(x) =$

A4.3 Hojas de trabajo Tipo 3

En las hojas de trabajo de Tipo 3 se presentaron 2 ejercicios. Los estudiantes debían seleccionar 1 ejercicio para resolverlo. Esta hoja de trabajo pudo haber sido la más difícil, porque únicamente se daba la función, el estudiante debía dar el incremento, el valor inicial y sobretodo llenar por sí mismo las tablas.

Ejercicio 1

Dada la función, $f(x) = 5$, encontrar sus acumulaciones. Primero, deberás llenar la tabla para algunos valores de x .

Tabla de valores

x	$x_0=$	$x_1=$	$x_2=$	$x_3=$	$x_4=$	$x_5=$	$x_6=$	$x_7=$	$x_8=$	$x_9=$	$x_{10}=$
$f(x)$											

Primera acumulación

x	$x_0=$	$x_1=$	$x_2=$	$x_3=$	$x_4=$	$x_5=$	$x_6=$	$x_7=$	$x_8=$	$x_9=$	$x_{10}=$
$B(x)$											

La primera acumulación es de la forma: $B(x) =$

Segunda acumulación.

x	$x_0=$	$x_1=$	$x_2=$	$x_3=$	$x_4=$	$x_5=$	$x_6=$	$x_7=$	$x_8=$	$x_9=$	$x_{10}=$
$C(x)$											

La segunda acumulación es de la forma: $C(x) =$

Tercera acumulación.

x	$x_0=$	$x_1=$	$x_2=$	$x_3=$	$x_4=$	$x_5=$	$x_6=$	$x_7=$	$x_8=$	$x_9=$	$x_{10}=$
$D(x)$											

La tercera acumulación es de la forma: $D(x) =$

Ejercicio 2

Dada la función, $f(x) = 7x$, encontrar sus acumulaciones. Primero, deberás llenar la tabla para algunos valores de x .

Tabla de valores

x	x ₀ =	x ₁ =	x ₂ =	x ₃ =	x ₄ =	x ₅ =	x ₆ =	x ₇ =	x ₈ =	x ₉ =	x ₁₀ =
f(x)											

Primera acumulación

x	x ₀ =	x ₁ =	x ₂ =	x ₃ =	x ₄ =	x ₅ =	x ₆ =	x ₇ =	x ₈ =	x ₉ =	x ₁₀ =
B(x)											

La primera acumulación es de la forma: **$B(x)$** =

Segunda acumulación.

x	x ₀ =	x ₁ =	x ₂ =	x ₃ =	x ₄ =	x ₅ =	x ₆ =	x ₇ =	x ₈ =	x ₉ =	x ₁₀ =
C(x)											

La segunda acumulación es de la forma: **$C(x)$** =

Tercera acumulación.

x	x ₀ =	x ₁ =	x ₂ =	x ₃ =	x ₄ =	x ₅ =	x ₆ =	x ₇ =	x ₈ =	x ₉ =	x ₁₀ =
D(x)											

La tercera acumulación es de la forma: **$D(x)$** =

A5. Hoja de preguntas a los Estudiantes

Al iniciar y durante la práctica:

- ¿Qué pasa si cambiamos el valor inicial en cada acumulación?
- ¿Por qué utilizamos sumas y no restas para calcular las acumulaciones?
- ¿Si el incremento se hace más pequeño, afectará la ecuación de la acumulación?
¿Por qué?
- ¿Consideras que la acumulación se aproximará a la integral con incrementos más pequeños, sí o no y por qué?

Al terminar la práctica:

- ¿Por qué consideras que el haber usado Geogebra, te ayudó en el proceso de calcular las acumulaciones?
- En el proceso de calcular la forma explícita de la acumulación, como lo fue encontrar la expresión algebraica de la función, ¿encontraste difícil o tedioso el proceso? ¿por qué?
- ¿De qué manera el proceso utilizado para calcular las acumulaciones se parece a la definición de la integral de Riemann?

¿Cuál de las tres prácticas te pareció más difícil? ¿por qué?