



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS
DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

**SOBRE LOS EIGENVALORES DE
TRANSMISIÓN DE LA ECUACIÓN
DISCRETA DE SCHRÖDINGER**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS

PRESENTA
GABRIELA SANCHEZ YEPEZ

ASESOR
DR. ABDON EDDY CHOQUE RIVERO

MORELIA, MICH. JUNIO 2017.



En memoria de Cristina Ruiz Aguilar.

A mi familia.

Agradecimientos

Agradezco a la vida y a Dios por permitirme llegar a este momento. A una persona muy especial, Cristina Ruiz, a quien le estaré eternamente agradecida por muchísimas cosas, a quien le debo la persona que soy ahora.

Agradezco a mi familia: a mis padres ya que sin su ayuda esto no habría sido posible, en especial quiero agradecer a mi madre por el apoyo que siempre me ha brindado, por estar al pendiente de cualquier cosa que pudiera necesitar y por animarme siempre a seguir adelante aún cuando la situación sea complicada; a mis hermanas Liz y Cristi porque sin ellas la vida sería muy aburrida y a Maria que siempre ha sido un ejemplo a seguir de dedicación y esfuerzo; a mi abuelito, a mis tíos y primos que de alguna u otra forma me han mostrado su apoyo.

Agradezco a todos los profesores de quienes tuve la oportunidad de adquirir un poco de sus conocimientos. En especial agradezco al Dr. Abdon por aceptar ser mi asesor de tesis, por las horas e infinita paciencia que dedicó para guiarme en el desarrollo de este trabajo, a los sinodales por aceptar ser revisores de la tesis y por sus valiosas observaciones. Gracias al Dr. Francisco por los años que fungió como mi tutor y por permitirme trabajar en algunos de sus proyectos.

Agradezco a Jesus Ortíz por apoyarme todas esas ocasiones en las que tenía dudas en tareas y por ayudarme a estudiar para esos exámenes que consideraba difíciles; a Luis Huerta por ayudarme cuando me sentía perdida en algún problema y por todos esos consejos que fueron de gran utilidad a lo largo de los años en fismat.

Agradezco a todos los compañeros y amigos que aún en los malos momentos hicieron que la vida en fismat fuera una excelente experiencia: Itza,

Miguel, Misha, Eduardo, Leti, Trino, Esteban, Isaac y Jorge (sabio Jorge, gracias por los consejos que me ayudaron a escribir esta tesis).

Miguel, Itza, Misha: ¡Gracias!, gracias por los años de amistad, por todas las experiencias y magníficos recuerdos, por todo el apoyo, no pude haber encontrado mejores amigos.

Abstract

The transmission eigenvalues λ are complex numbers for which there is a nontrivial solution to the system

$$\left\{ \begin{array}{l} -\psi_{n+1} + 2\psi_n - \psi_{n-1} + V_n\psi_n = \lambda\psi_n, \quad n \geq 1, \\ -\dot{\psi}_{n+1} + 2\dot{\psi}_n - \dot{\psi}_{n-1} = \lambda\dot{\psi}_n, \quad n \geq 1, \\ \psi_0 = 0, \quad \dot{\psi}_0 = 0, \\ \psi_b = \dot{\psi}_b, \quad \psi_{b+1} = \dot{\psi}_{b+1}, \end{array} \right.$$

with $V_n = 0$ for $n \geq b$.

In this thesis we study in a meticulous manner the work by T. Aktosun and V. Papanicolaou [4] where the following problem is considered: given a finite sequence of transmission eigenvalues $\{\lambda_n\}_{n=1}^{2b-2}$, find the sequence of potentials $\{V_n\}_{n=1}^b$. We use Marchenko and Gel'fand-Levitan methods.

Keywords: inverse problem, discrete Schrödinger equation, transmission eigenvalue, Marchenko method, Gel'fand-Levitan method.

Resumen

Los eigenvalores de transmisión λ , son números complejos para los cuales existe solución no trivial al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\psi_{n+1} + 2\psi_n - \psi_{n-1} + V_n\psi_n = \lambda\psi_n, \quad n \geq 1, \\ -\dot{\psi}_{n+1} + 2\dot{\psi}_n - \dot{\psi}_{n-1} = \lambda\dot{\psi}_n, \quad n \geq 1, \\ \psi_0 = 0, \quad \dot{\psi}_0 = 0, \\ \psi_b = \dot{\psi}_b, \quad \psi_{b+1} = \dot{\psi}_{b+1}, \end{array} \right.$$

con $V_n = 0$ para $n \geq b$.

En esta tesis estudiamos de manera minuciosa el trabajo de T. Aktosun y V. Papanicolaou [4], donde se considera el siguiente problema: dada una secuencia finita de eigenvalores de transmisión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{2b-2}$, encuentra la secuencia de potenciales $\{V_n\}_{n=1}^b$. Usamos los métodos de Marchenko y Gel'fand-Levitan.

Palabras clave: problema inverso, ecuación discreta de Schrödinger, eigenvalor de transmisión, método de Marchenko, método de Gel'fand-Levitan.

Índice general

Agradecimientos	III
Abstract	V
Resumen	VI
Lista de figuras	IX
Introducción	1
1. Preliminares	6
2. Métodos para recuperar el potencial V	32
2.1. Método de Marchenko	32
2.1.1. Algoritmo del método de Marchenko	36
2.2. Método de Gel'fand-Levitan	37
2.2.1. Algoritmo del método de Gel'fand-Levitan	40
3. Eigenvalores de transmisión. Problema inverso	42

4. Ejemplos	55
4.1. Ejemplo 1, $b=2$, $f_0(z)$ con un estado ligado.	55
4.2. Ejemplo 2, $b=2$, $f_0(z)$ sin estados ligados.	60
4.3. Ejemplo 3, $b=3$, $f_0(z)$ con un estado ligado.	63
4.4. Ejemplo 4. Caso inusual $b=3$	68
4.5. Ejemplo 5, $b=1$	71
4.6. Ejemplo 6. Método algebraico $b=2$	72
4.7. Ejemplo 7. Método algebraico $b=3$	75
Apéndice A	78
Bibliografía	81

Índice de figuras

1.	Esquema problema directo.	1
1.1.	Ejemplo de representación gráfica de V	7
1.2.	Mapeo $\lambda \mapsto z$	9

Introducción

Antecedentes

Los problemas directos son aquellos que, en general, contienen la información necesaria para obtener una solución única al problema planteado, en la figura 1 se muestra un esquema de los problemas directos.

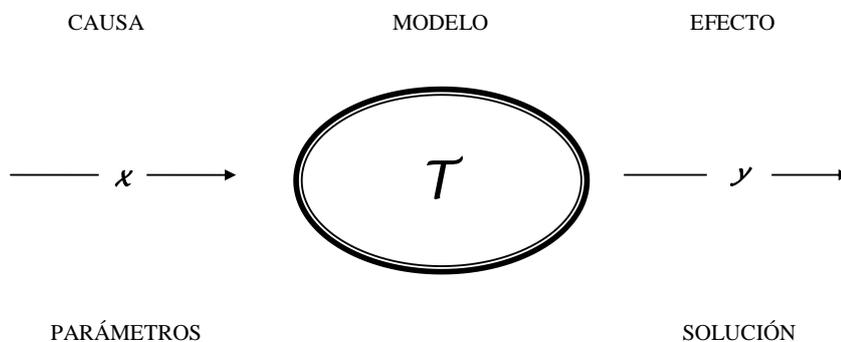


Figura 1: Esquema problema directo.

A cada problema directo se le pueden asociar dos problemas inversos. Uno de ellos consiste en determinar la causa dado el efecto y el modelo. Este es el tipo de problema inverso que se desea resolver. Cuando \mathcal{T} es un operador lineal de dimensión finita, este problema se reduce a resolver para x el sistema lineal

$$\mathcal{T}x = y.$$

El otro problema inverso consiste en determinar el operador \mathcal{T} dados x y y , [11, 12].

Históricamente se considera como primer problema inverso escrito, a la alegoría o mito de la caverna de Platón, presentado en su libro VII de La República. El problema consiste en determinar un objeto observando únicamente su sombra.

Como trabajo pionero en la investigación de problemas inversos se considera el resultado de Víktor Ambartsumián, quien demostró que para la ecuación de Sturm-Liouville

$$y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \quad (1)$$

con condiciones de frontera

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \quad (2)$$

si $\lambda_n = n^2$ son valores propios de (1)-(2), entonces $q(x) = 0$ casi por doquier.

Otro hito en el desarrollo de los problemas inversos es el trabajo de Mark Kac[13], donde se expone el trabajo del título “Can one hear the shape of a drum?”, en el cual el autor pregunta si podemos determinar la forma de una membrana conociendo las frecuencias en las cuales la membrana vibra. Cabe mencionar la respuesta negativa a esta pregunta en [10].

La importancia del estudio de los problemas inversos deriva en su aplicabilidad en diversas áreas de la actividad humana, entre las cuales se pueden mencionar geofísica, mecánica cuántica, procesamiento de imágenes, electrodinámica, electrónica, meteorología, entre otras [20].

Un número importante de modelos de problemas inversos se pueden describir mediante la ecuación continua de Schrödinger, por ejemplo ver [2]. Esta ecuación en la semirrecta real tiene la forma

$$-\psi''(E, x) + q(x)\psi(E, x) = E\psi(E, x), \quad x > 0. \quad (3)$$

Generalmente se añade la condición de frontera

$$\psi(E, 0) = 0.$$

El potencial $q(x)$ de (3), usualmente cumple con la siguiente condición

$$\int_0^\infty (1+x)|q(x)|dx < \infty.$$

Esta condición es equivalente a que el potencial $q(x)$ cumpla lo siguiente

$$q(x) \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty.$$

La discretización para (3) se obtiene usando la aproximación a la segunda derivada como sigue

$$\psi''(E, x) \approx \frac{\psi(E, x+h) - 2\psi(E, x) + \psi(E, x-h)}{h^2},$$

de esta manera, siendo $x = nh$, $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$-\psi(E, (n+1)h) + 2\psi(E, nh) - \psi(E, (n-1)h) + q(nh)\psi(E, nh)h^2 = E\psi(E, nh)h^2, \quad n \geq 1.$$

Escribimos $\psi_{n+1} := \psi(E, (n+1)h)$, $\lambda := Eh^2$ y $V(n) := q(nh)h^2$, entonces

$$-\psi_{n+1} + 2\psi_n - \psi_{n-1} + V_n\psi_n = \lambda\psi_n, \quad n \geq 1,$$

y la condición de frontera es $\psi_0 = 0$.

Objetivo de la tesis

El objetivo de este trabajo es estudiar los valores propios del siguiente sistema

$$-\psi_{n+1} + 2\psi_n - \psi_{n-1} + V_n\psi_n = \lambda\psi_n, \quad n \geq 1, \quad (4a)$$

$$-\dot{\psi}_{n+1} + 2\dot{\psi}_n - \dot{\psi}_{n-1} = \lambda\dot{\psi}_n, \quad n \geq 1, \quad (4b)$$

$$\psi_0 = 0, \quad \dot{\psi}_0 = 0, \quad (4c)$$

$$\psi_b = \dot{\psi}_b, \quad \psi_{b+1} = \dot{\psi}_{b+1}. \quad (4d)$$

Estos valores propios se llaman eigenvalores de transmisión. El sistema acopla las ecuaciones (4a) y (4b), las cuales se conocen por separado como ecuación discreta de Schrödinger perturbada y no perturbada, respectivamente. La notación $\dot{\psi}_n$ se usa para denotar el sistema no perturbado. Cabe señalar que se restringe al conjunto de potenciales de soporte compacto, es decir,

$$V_n = 0, \quad n \geq b+1,$$

donde b es el entero positivo que denota el soporte del potencial.

Los eigenvalores de transmisión de la ecuación continua de Schrödinger proveen información sobre las propiedades del material del medio de dispersión y pueden ser determinados de los datos de dispersión, lo que es de gran utilidad en el problema inverso. En [5, 14] se encuentran algunas aplicaciones de los eigenvalores de transmisión.

En adelante consideramos solamente la ecuación discreta de Schrödinger. Se pueden asociar dos problemas relacionados con los eigenvalores de transmisión: el problema directo y el problema inverso. A continuación describiremos estos dos problemas.

Problema directo

Dada la secuencia de valores del potencial $\{V_n\}_{n=1}^\infty$, se requiere hallar los eigenvalores de transmisión $\{\lambda_i\}$.

Por ejemplo, para $b = 2$, con V_1 arbitrario y $V_2 \neq 0$, después de un procedimiento descrito en el ejemplo 6, se tiene que los eigenvalores de transmisión λ_1, λ_2 son

$$\lambda_1 = 2 + \frac{V_1}{2} + \sqrt{\frac{V_1^2}{4} - \frac{V_1}{V_2}}, \quad \lambda_2 = 2 + \frac{V_1}{2} - \sqrt{\frac{V_1^2}{4} - \frac{V_1}{V_2}}.$$

Planteamiento del problema inverso

(P): Dados $\lambda_j, j = 1, \dots, 2b - 2$, eigenvalores de transmisión del sistema (4a)-(4d), hallar los valores del potencial $\{V_n\}_{n=1}^b$ de (4a).

Es decir, se considera el problema inverso de recuperar $\{V_n\}_{n=1}^b$ a partir de los eigenvalores de transmisión. En este problema nos podemos encontrar con dos casos: el caso inusual y el caso usual. En el caso usual, dados los eigenvalores de transmisión se puede recuperar la secuencia $\{V_n\}_{n=1}^b$ de manera única. En el caso inusual la solución al problema no es única, como veremos en el capítulo cuatro.

Metodología

La estrategia que se sigue para resolver el problema inverso mencionado, es la misma que en [4], es decir, seguir el método de Marchenko[18] o el método de Gel'fand-Levitan[9] en su versión discreta. Estos métodos reducen el problema inverso de la ecuación discreta de Schrödinger a un sistema lineal de ecuaciones.

Contribuciones de la tesis

En este trabajo no se proponen nuevas aportaciones a la teoría de eigenvalores de transmisión, más bien, analizamos de manera minuciosa el artículo [4], en el cual se considera el problema **(P)**.

En el capítulo cuatro mostramos varios ejemplos que ilustran el empleo de los métodos de Marchenko y Gel'fand-Levitan para resolver el problema inverso de recuperar los valores del potencial dados los eigenvalores de transmisión. Estos ejemplos no se encuentran en la literatura.

Organización de la tesis

El presente trabajo se divide en cinco capítulos. En el capítulo uno, se estudian algunas soluciones del operador discreto de Schrödinger y propiedades de las mismas que serán de utilidad para resolver el problema inverso. En el capítulo dos se abordan dos métodos para recuperar el potencial dados los eigenvalores de transmisión, el método de Marchenko y el método de Gel'fand-Levitan. En el tercer capítulo se definen los eigenvalores de transmisión y cómo obtenerlos, además se estudia el caso inusual. Finalmente en el capítulo cuatro se analizan diversos ejemplos que muestran cómo obtener los valores del potencial usando los métodos de Marchenko, Gel'fand-Levitan y el método algebraico.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se estudia el problema directo con el cual se introducen las secuencias $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ (ver definición 1.2) y $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$ (ver definición 1.3), soluciones de la ecuación de Schrödinger discreta (1.1), la función de Jost (ver definición 1.4), la matriz S (ver definición 1.6), entre otras. Además se estudian varias propiedades de las mismas que serán de gran utilidad al momento de resolver el problema inverso.

Se considera la ecuación discreta de Schrödinger

$$-\psi_{n+1} + 2\psi_n - \psi_{n-1} + V_n\psi_n = \lambda\psi_n, \quad n \geq 1, \quad (1.1)$$

donde $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$ es la solución buscada, λ es el parámetro espectral, n es la variable espacial independiente que solo toma valores enteros positivos y los subíndices son usados para denotar la dependencia de n . Aquí, ψ_n o $\psi(\lambda, n)$, denota el elemento n -ésimo de la secuencia $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$. V_n o $V(n)$, denota el valor del potencial en n . Se asume que el potencial $V = \{V_1, V_2, \dots\}$ es de clase \mathcal{A}_b . Además, se asocia a (1.1) la condición de frontera de Dirichlet

$$\psi_0 = 0. \quad (1.2)$$

Definición 1.1. *El potencial V es de clase \mathcal{A}_b si los valores del potencial V_n son reales y el soporte del potencial V es confinado a un conjunto finito $n \in 1, 2, \dots, b$ para algún entero positivo b , es decir, $V_n = 0$ para $n > b$.*

Dado que el potencial V en (1.1) es de clase \mathcal{A}_b , esto es, de soporte compacto, conocer el valor de V es equivalente a conocer el conjunto ordenado

$\{V_1, \dots, V_b\}$. En la figura 1.1 se muestra una representación gráfica de un ejemplo de valores del potencial para $b = 7$.

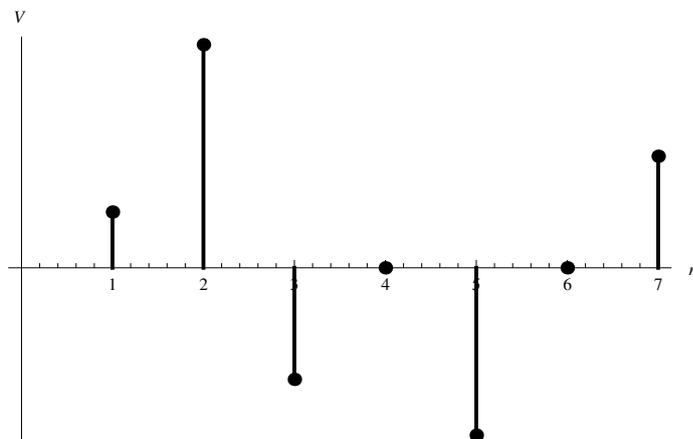


Figura 1.1: Ejemplo de representación gráfica de V .

Usando los operadores de traslación P^+ , P^- y el operador identidad I , los cuales están dados por

$$P^+\psi_n := \psi_{n+1}, \quad P^-\psi_n := \psi_{n-1}, \quad I\psi_n := \psi_n,$$

se escribe el operador de (1.1) como $\mathcal{L}\psi_n = \lambda\psi_n$, donde

$$\mathcal{L} := -P^+ + 2I - P^- + V_n. \quad (1.3)$$

El operador \mathcal{L} dado en (1.3) con condición de frontera (1.2) es un operador acotado, ya que la norma de los operadores P^+ , P^- e I es igual a uno y V_n está acotado. Además, \mathcal{L} es autoadjunto, ya que cumple la igualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^*(\mathcal{L}\psi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{L}\phi_n)^*\psi_n,$$

donde $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ son dos secuencias cuadrático sumables que satisfacen (1.2). Por lo tanto, su espectro es un subconjunto de \mathbb{R} .

Los estados ligados de \mathcal{L} corresponden al espectro discreto de \mathcal{L} que consiste en el conjunto de valores de λ para los cuales existen soluciones cuadrático sumables de (1.1) que satisfagan (1.2) y el espectro continuo son los valores $\lambda \in [0, 4]$, [23, pág 18].

En el caso $V_n \equiv 0$ en (1.1), se obtiene la ecuación discreta de Schrödinger no perturbada

$$-\psi_{n+1}^{\circ} + 2\psi_n^{\circ} - \psi_{n-1}^{\circ} = \lambda\psi_n^{\circ}, \quad n \geq 1. \quad (1.4)$$

Se usa ψ_n° para denotar al elemento n -ésimo de la sucesión $\{\psi_j^{\circ}\}_{j=0}^{\infty}$, solución de (1.4).

Observación 1.1. *Los polinomios de Chebyshev de primera y segunda especie se definen en el intervalo $x \in [-1, 1]$ y satisfacen la fórmula de recurrencia*

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

con $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$ para los polinomios de primera especie y $U_0(x) = 1$ y $U_1(x) = 2x$ para los polinomios de segunda especie.

Si hacemos el cambio $x = \frac{2-\lambda}{2}$, donde $\lambda \in [0, 4]$, entonces los polinomios de Chebyshev de primera y segunda especie satisfacen la ecuación discreta de Schrödinger no perturbada (1.4).

Con este cambio, los primeros cuatro polinomios son

<i>Primera especie</i>	<i>Segunda especie</i>
$T_0(\lambda) = 1$	$U_0(\lambda) = 1$
$T_1(\lambda) = (2 - \lambda)/2$	$U_1(\lambda) = 2 - \lambda$
$T_2(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} - 2\lambda + 1$	$U_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$
$T_3(\lambda) = -\frac{\lambda^3}{2} + 3\lambda^2 - \frac{9}{2}\lambda + 1$	$U_3(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4.$

En algunas ocasiones es conveniente usar otro parámetro espectral, usualmente denotado por z que se relaciona con λ de la siguiente manera

$$z := 1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda(\lambda - 4)}, \quad (1.5)$$

donde la raíz cuadrada denota la rama principal (ver apéndice) de la función raíz compleja.

Se usa \mathbf{T} para denotar el círculo unitario $|z| = 1$ en el plano complejo, \mathbf{T}^+ para la porción superior de \mathbf{T} dada por $z = e^{i\theta}$ con $\theta \in (0, \pi)$ y $\overline{\mathbf{T}^+}$ para la cerradura de \mathbf{T}^+ dada por $z = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, \pi]$.

Bajo la transformación $\lambda \mapsto z$, el intervalo $\lambda \in (-\infty, 0)$ es mapeado al intervalo $z \in (0, 1)$, el intervalo $\lambda \in (4, +\infty)$ es mapeado al intervalo real

$z \in (-1, 0)$ y el intervalo real $\lambda \in [0, 4]$ es mapeado a $\overline{\mathbf{T}^+}$. De esta manera el eje real λ es mapeado a la frontera de la mitad superior del disco unitario en el plano complejo z , como se muestra en la figura 1.2.

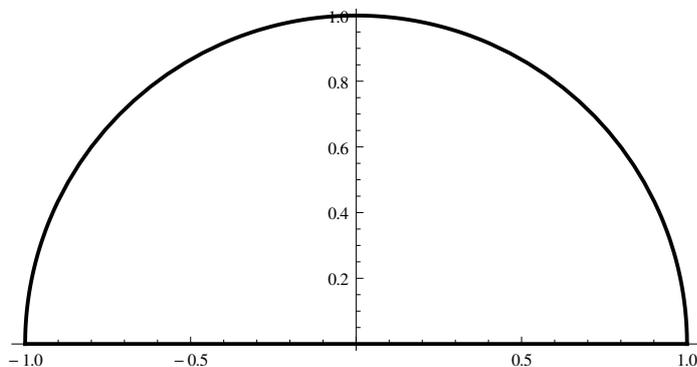


Figura 1.2: Mapeo $\lambda \mapsto z$.

De (1.5) se sigue que

$$z^{-1} = 1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda(\lambda - 4)}. \quad (1.6)$$

De (1.5) y (1.6) se tiene

$$\lambda = 2 - z - z^{-1}. \quad (1.7)$$

Siendo

$$z = e^{i\theta}, \quad (1.8)$$

mientras θ toma valores en el intervalo $[0, \pi]$, z mapea $\overline{\mathbf{T}^+}$ y λ se mueve en el intervalo $[0, 4]$. De esta forma, utilizando las igualdades dadas en (1.7) y (1.8) se obtiene λ en términos de θ

$$\lambda = 2 - 2 \cos \theta. \quad (1.9)$$

Usando (1.7) se escribe (1.1) en términos del parámetro espectral z como sigue

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = (z + z^{-1} + V_n)\psi_n, \quad n \geq 1. \quad (1.10)$$

De esta forma (1.4) puede ser reescrita como

$$\dot{\psi}_{n+1} + \dot{\psi}_{n-1} = (z + z^{-1})\dot{\psi}_n, \quad n \geq 1. \quad (1.11)$$

Hay ciertas soluciones relevantes de (1.10), de forma equivalente, soluciones de (1.1).

Definición 1.2. Se llama *solución regular* a la solución $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$ de (1.1) que satisface las condiciones iniciales

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 1. \quad (1.12)$$

Definición 1.3. Se llama *solución de Jost* a la solución $\{f_j\}_{j=0}^\infty$ de (1.1) que satisface la condición asintótica

$$f_n = z^n[1 + o(1)], \quad n \rightarrow +\infty. \quad (1.13)$$

La secuencia $\{g_j\}_{j=0}^\infty$, solución de (1.1) que satisface

$$g_n = z^{-n}[1 + o(1)], \quad n \rightarrow +\infty, \quad (1.14)$$

se llama *solución asociada de Jost*.

Nótese que de (1.10), (1.13) y (1.14) se sigue que g_n se obtiene de f_n al reemplazar z por z^{-1} .

Cuando $V_n \equiv 0$, se usan $\{\mathring{f}_j\}_{j=0}^\infty$ y $\{\mathring{g}_j\}_{j=0}^\infty$ para denotar la correspondiente solución de Jost f_n y su asociada g_n , respectivamente. De (1.11), (1.13) y (1.14) se observa que

$$\mathring{f}_n = z^n, \quad \mathring{g}_n = z^{-n}, \quad n \geq 1, \quad (1.15)$$

de manera que de (1.11) y (1.15) se obtienen los valores de \mathring{f}_n y \mathring{g}_n para $n = 0$

$$\mathring{f}_0 = 1, \quad \mathring{g}_0 = 1. \quad (1.16)$$

Se puede verificar directamente que los elementos de la solución regular $\{\mathring{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$ que satisface (1.11) y las condiciones iniciales (1.12) están dados por

$$\mathring{\varphi}_n = \frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}}, \quad n \geq 0. \quad (1.17)$$

Usando (1.8) en (1.17), se puede escribir $\mathring{\varphi}_n$ en términos del parámetro θ

$$\mathring{\varphi}_n = \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta}, \quad n \geq 0. \quad (1.18)$$

Ahora se analiza la forma de los términos de la solución de Jost $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$ cuando el potencial V es de clase \mathcal{A}_b . Usando el hecho de que $V_n = 0$ para $n \geq b + 1$ en (1.10), se puede observar que

$$f_n = z^n, \quad n \geq b. \quad (1.19)$$

Es conveniente definir

$$m_n := z^{-n} f_n, \quad (1.20)$$

así, usando (1.19) y (1.20) en la ecuación (1.10), se obtiene lo siguiente

$$m_{n-1} = -z^2 m_{n+1} + (z^2 + V_n z + 1) m_n, \quad n \geq 1. \quad (1.21)$$

Note que de (1.19) y (1.20) se tiene que

$$m_n = 1, \quad n \geq b. \quad (1.22)$$

En la siguiente proposición se establece la forma que tienen los primeros $(b - 1)$ elementos de la secuencia $\{m_j\}_{j=0}^{\infty}$, solución de (1.21).

Proposición 1.1. *Sea el potencial V de clase \mathcal{A}_b para algún $b \geq 1$ y $V_b \neq 0$. Entonces:*

a) *Para $0 \leq n \leq b - 1$, los elementos m_n de la secuencia $\{m_j\}_{j=0}^{\infty}$, solución de (1.21), con condición asintótica (1.22), son polinomios en z de grado $(2b - 2n - 1)$ con coeficientes determinados de manera única por el conjunto ordenado de valores del potencial $\{V_{n+1}, V_{n+2}, \dots, V_b\}$ como*

$$m_n = \sum_{j=0}^{2b-2n-1} K_{n(n+j)} z^j, \quad 0 \leq n \leq b - 1. \quad (1.23)$$

En particular, para $0 \leq n \leq b - 1$ se tiene

$$K_{nn} = 1, \quad K_{n(n+1)} = \sum_{j=n+1}^b V_j, \quad K_{n(n+2)} = \sum_{n+1 \leq j < l \leq b} V_j V_l, \quad (1.24)$$

$$K_{n(2b-n-2)} = V_b \sum_{j=n+1}^{b-1} V_j, \quad K_{n(2b-n-1)} = V_b. \quad (1.25)$$

b) Para $0 \leq n \leq b-1$, los elementos f_n de la solución de Jost, son polinomios en z de grado $(2b - 2n - 1)$ con el término de la menor potencia siendo z^n y el término de la mayor potencia siendo $V_b z^{2b-n-1}$, y están dados por

$$f_n = \sum_{j=0}^{2b-2n-1} K_{n(n+j)} z^{n+j}. \quad (1.26)$$

c) Para $0 \leq n \leq b-1$, los elementos g_n de la solución asociada de Jost están dados por

$$g_n = \sum_{j=0}^{2b-2n-1} K_{n(n+j)} z^{-n-j}. \quad (1.27)$$

d) Los coeficientes K_{nm} son reales y para cada par de enteros no negativos n, m se tiene

$$K_{nm} = 0, \quad n \geq 2b - m \quad \text{o} \quad n \geq m + 1. \quad (1.28)$$

Demostración. a) La expresión para m_n dada en (1.23) se obtiene resolviendo (1.21) de forma iterativa y usando (1.22)

$$\begin{aligned} m_{b-1} &= 1 + zV_b = K_{(b-1)(b-1)} + zK_{(b-1)b}, \\ m_{b-2} &= 1 + z(V_b + V_{b-1}) + z^2V_bV_{b-1} + z^3V_b \\ &= K_{(b-2)(b-2)} + zK_{(b-2)(b-1)} + z^2K_{(b-2)b} + z^3K_{(b-2)(b+1)}. \end{aligned}$$

Se supone que (1.23) se cumple para $n = b - a$ y $n = b - a - 1$, donde $1 \leq a \leq b - 2$. Esto es

$$\begin{aligned} m_{b-a} &= K_{(b-a)(b-a)} + zK_{(b-a)(b-a+1)} + z^2K_{(b-a)(b-a+2)} + \dots \\ &\quad + z^{2a-2}K_{(b-a)(b+a-2)} + z^{2a-1}K_{(b-a)(b+a-1)}, \\ m_{b-a-1} &= K_{(b-a-1)(b-a-1)} + zK_{(b-a-1)(b-a)} + z^2K_{(b-a-1)(b-a+1)} + \dots \\ &\quad + z^{2a}K_{(b-a-1)(b+a-1)} + z^{2a+1}K_{(b-a-1)(b+a)}. \end{aligned}$$

Demostramos que (1.23) se cumple para m_{b-a-2} , donde

$$m_{b-a-2} = -z^2m_{b-a} + (z^2 + V_{b-a-1}z + 1)m_{b-a-1},$$

entonces

$$\begin{aligned}
m_{b-a-2} = & - \left[z^2 K_{(b-a)(b-a)} + z^3 K_{(b-a)(b-a+1)} + z^4 K_{(b-a)(b-a+2)} + \dots \right. \\
& \left. + z^{2a} K_{(b-a)(b+a-2)} + z^{2a+1} K_{(b-a)(b+a-1)} \right] \\
& + \left[z^2 K_{(b-a-1)(b-a-1)} + z^3 K_{(b-a-1)(b-a)} + z^4 K_{(b-a-1)(b-a+1)} + \dots \right. \\
& \left. + z^{2a+2} K_{(b-a-1)(b+a-1)} + z^{2a+3} K_{(b-a-1)(b+a)} \right] \\
& + V_{b-a-1} \left[z K_{(b-a-1)(b-a-1)} + z^2 K_{(b-a-1)(b-a)} + z^3 K_{(b-a-1)(b-a+1)} \right. \\
& \left. + \dots + z^{2a+1} K_{(b-a-1)(b+a-1)} + z^{2a+2} K_{(b-a-1)(b+a)} \right] + \left[K_{(b-a-1)(b-a-1)} \right. \\
& \left. + z K_{(b-a-1)(b-a)} + z^2 K_{(b-a-1)(b-a+1)} + \dots + z^{2a} K_{(b-a-1)(b+a-1)} \right. \\
& \left. + z^{2a+1} K_{(b-a-1)(b+a)} \right].
\end{aligned}$$

Al reunir los coeficientes correspondientes a z^{b+a+2} , z^{b+a+1} , z^2 , z y el término independiente, se tiene

$$\begin{aligned}
m_{b-a-2} = & z^{2a+3} K_{(b-a-1)(b+a)} + z^{2a+2} \left[K_{(b-a-1)(b+a-1)} + V_{b-a-1} K_{(b-a-1)(b+a)} \right] \\
& + \dots + z^2 \left[K_{(b-a-1)(b-a+1)} + V_{b-a-1} K_{(b-a-1)(b-a)} + K_{(b-a-1)(b-a-1)} \right. \\
& \left. - K_{(b-a)(b-a)} \right] + z \left[V_{b-a-1} K_{(b-a-1)(b-a-1)} + K_{(b-a-1)(b-a)} \right] \\
& + K_{(b-a-1)(b-a-1)}.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Se sustituyen en (1.29) los valores de los coeficientes K_{nm} , así

$$\begin{aligned}
m_{b-a-2} = & z^{2a+3} V_b + z^{2a+2} \left[V_b \sum_{j=b-a}^{b-1} + V_{b-a-1} V_b \right] + \dots \\
& + z^2 \left[\sum_{b-a \leq j < l \leq b} V_j V_l + V_{b-a-1} \sum_{j=b-a}^b V_j + 1 - 1 \right] \\
& + z \left[V_{b-a-1} + \sum_{j=b-a-1}^b V_j \right] + 1.
\end{aligned}$$

Simplificando términos tenemos

$$\begin{aligned}
m_{b-a-2} = & z^{2a+3} V_b + z^{2a+2} \left[V_b \sum_{j=b-a-1}^{b-1} V_j \right] + \dots + z^2 \left[\sum_{j=b-a-1}^b V_j \right] \\
& + z \left[\sum_{j=b-a-1}^{b-1} V_j \right] + 1 \\
= & \sum_{j=0}^{2a+3} K_{(b-a-2)(b-a-2+j)} z^j.
\end{aligned}$$

b) Para obtener (1.26), se sustituye (1.23) en (1.20), entonces

$$z^{-n} f_n = \sum_{j=0}^{2b-2n-1} K_{n(n+j)} z^j, \quad 0 \leq n \leq b-1,$$

de esta manera

$$f_n = \sum_{j=0}^{2b-2n-1} K_{n(n+j)} z^{n+j}, \quad 0 \leq n \leq b-1.$$

c) Si en esta última expresión se sustituye z por z^{-1} , se obtiene g_n .

d) Los coeficientes K_{nm} para $n \geq 2b - m$ o $n \geq m + 1$, no se encuentran en la expansiones de f_n y g_n , dadas en (1.26) y (1.27) respectivamente, por tanto su valor es cero.

Finalmente, el que los valores K_{nm} sean reales se sigue del hecho que f_n y g_n son complejas conjugadas una de la otra para $z \in \mathbf{T}$. \square

El siguiente corolario muestra que en el caso del problema inverso, se pueden recuperar los valores del potencial V_n dados los coeficientes K_{nm} .

Corolario 1.2. *Sea V de clase \mathcal{A}_b para algún $b \geq 1$. Entonces, el conjunto ordenado $\{V_1, V_2, \dots, V_b\}$ de valores del potencial es determinado de manera única por el conjunto ordenado $\{K_{01}, K_{12}, \dots, K_{(b-1)b}\}$, donde las cantidades K_{nm} son los coeficientes dados en (1.26), mediante*

$$V_n = K_{(n-1)n} - K_{n(n+1)}, \quad 1 \leq n \leq b, \quad (1.30)$$

con $K_{b(b+1)} = 0$ que se sigue de (1.28).

Definición 1.4. *Se llama función de Jost, al primer término de la secuencia $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$, es decir, f_0 .*

Definición 1.5. a) *Se llama función positiva a la función que es analítica en z cuando $|z| = 1$, continua cuando $|z| \leq 1$ y que se comporta como $O(z)$ para $z \rightarrow \infty$ en $|z| \leq 1$.*

b) *Se llama función negativa a la función que es analítica en z para $|z| > 1$, continua cuando $|z| \geq 1$ y que se comporta como $O(1/z)$ para $z \rightarrow \infty$ en $|z| \geq 1$.*

En el siguiente teorema se estudian algunas propiedades relativas a la función de Jost f_0 .

Teorema 1.3. *Sea el potencial V de clase \mathcal{A}_b para algún $b \geq 1$ y $V_b \neq 0$. Entonces, la función de Jost f_0 es un polinomio en z de grado $2b - 1$, y es igual a m_n dada en (1.23) con $n = 0$*

$$f_0 = \sum_{j=0}^{2b-1} K_{0j} z^j \quad (1.31)$$

donde los coeficientes K_{0j} son unívocamente determinados por el conjunto ordenado de valores del potencial $\{V_1, \dots, V_b\}$. En particular se tiene

$$K_{00} = 1, \quad K_{01} = \sum_{j=1}^b V_j, \quad K_{02} = \sum_{1 \leq j < l \leq b} V_j V_l, \quad (1.32)$$

$$K_{0(2b-2)} = V_b \sum_{j=1}^{b-1} V_j, \quad K_{0(2b-1)} = V_b. \quad (1.33)$$

De este modo $f_0 - 1$ es una función positiva. Similarmente, la cantidad g_0 está dada por

$$g_0 = \sum_{j=0}^{2b-1} K_{0j} z^{-j}, \quad (1.34)$$

por consiguiente $g_0 - 1$ es una función negativa.

Demostración. De (1.23) para $n = 0$ se obtiene

$$m_0 = f_0 = \sum_{j=0}^{2b-1} K_{0j} z^j.$$

Los coeficientes en (1.32) y (1.33), se obtienen de forma directa de los coeficientes en (1.24) y (1.25) con $n = 0$.

Finalmente, para obtener g_0 se evalúa f_0 en z^{-1} . □

Definición 1.6. *Sean f_0 y g_0 como en (1.31) y (1.34), respectivamente. La función*

$$S(z) := \frac{g_0(z)}{f_0(z)}, \quad f_0(z) \neq 0, \quad (1.35)$$

se llama matriz de dispersión, asociada a (1.1) con condición de frontera de Dirichlet (1.2).

De (1.16) se sigue que la matriz de dispersión $\mathring{S}(z)$ para el sistema no perturbado es

$$\mathring{S}(z) \equiv 1.$$

Se desea escribir los elementos φ_n de la solución regular como combinación lineal de los elementos f_n y g_n , para lo cual se introduce el Wronskiano.

Se define el Wronskiano de cualesquiera elementos ψ_n y ϕ_n que satisfacen (1.1), o de forma equivalente (1.10), como

$$[\psi_n, \phi_n] := \begin{vmatrix} \psi_n & \phi_n \\ \psi_{n+1} & \phi_{n+1} \end{vmatrix}. \quad (1.36)$$

Observación 1.2. a) *El Wronskiano es independiente de n .*

b) *Los elementos f_n y g_n son linealmente independientes.*

Demostración. a) Sean ψ_n y ϕ_n , elementos de $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$, soluciones de (1.10), respectivamente. De (1.10) se obtienen ψ_{n+1} , ϕ_{n+1} y se sustituyen en (1.36)

$$\begin{aligned} [\psi_n, \phi_n] &= \begin{vmatrix} \psi_n & \phi_n \\ -\psi_{n-1} + (z + z^{-1} + V_n)\psi_n & -\phi_{n-1} + (z + z^{-1} + V_n)\phi_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \psi_n & \phi_n \\ -\psi_{n-1} & -\phi_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \psi_n & \phi_n \\ (z + z^{-1} + V_n)\psi_n & (z + z^{-1} + V_n)\phi_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \psi_n & \phi_n \\ -\psi_{n-1} & -\phi_{n-1} \end{vmatrix} + (z + z^{-1} + V_n) \begin{vmatrix} \psi_n & \phi_n \\ \psi_n & \phi_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \psi_n & \phi_n \\ -\psi_{n-1} & -\phi_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_{n-1} & \phi_{n-1} \\ \psi_n & \phi_n \end{vmatrix} = [\psi_{n-1}, \phi_{n-1}]. \end{aligned}$$

b) Ya que el Wronskiano es independiente de n , usando (1.19) y (1.14) en (1.36) se obtiene

$$[f_n, g_n] = \begin{vmatrix} z^n & z^{-n} \\ z^{n+1} & z^{-n-1} \end{vmatrix} = z^{-1} - z. \quad (1.37)$$

□

Ejemplo 1.1. *Se ha demostrado que los polinomios de Chebyshev de primera y segunda especie son solución de (1.1) con $V_n \equiv 0$. Entonces, calculamos el*

Wronskiano de $T_0(\lambda)$ y $U_0(\lambda)$

$$[T_0(\lambda), U_0(\lambda)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2-\lambda}{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} = \frac{2-\lambda}{2}.$$

Calculamos el Wronskiano de $T_1(\lambda)$ y $U_1(\lambda)$

$$\begin{aligned} [T_1(\lambda), U_1(\lambda)] &= \begin{vmatrix} \frac{2-\lambda}{2} & 2-\lambda \\ \frac{1}{2}(\lambda^2 - 4\lambda + 3) & \lambda^2 - 4\lambda + 3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{2-\lambda}{2}(\lambda^2 - 4\lambda + 3 - \lambda^2 + 4\lambda - 2) = \frac{2-\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Calculamos el Wronskiano de $T_2(\lambda)$ y $U_2(\lambda)$

$$\begin{aligned} [T_2(\lambda), U_2(\lambda)] &= \begin{vmatrix} (\lambda^2 - 4\lambda + 2)/2 & \lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ -\frac{\lambda^3}{2} + 3\lambda^2 - \frac{9}{2}\lambda + 1 & -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [-\lambda^5 + 10\lambda^4 - 36\lambda^3 + 56\lambda^2 - 36\lambda + 8 \\ &\quad - (-\lambda^5 + 10\lambda^4 - 36\lambda^3 + 56\lambda^2 - 35\lambda + 6)] \\ &= \frac{2-\lambda}{2}. \end{aligned}$$

De los resultados se observa que efectivamente el Wronskiano es independiente de n .

Ya que $[f_n, g_n] \neq 0$, los elementos f_n y g_n son linealmente independientes, para $z \neq \pm 1$, los elementos φ_n de la solución regular pueden ser expresados como una combinación lineal de éstas, entonces

$$\varphi_n = \alpha f_n + \beta g_n, \quad (1.38)$$

$$\varphi_{n+1} = \alpha f_{n+1} + \beta g_{n+1}, \quad (1.39)$$

donde α y β son constantes a determinar.

Reescribimos (1.38) y (1.39) como

$$\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \\ f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Se resuelve el sistema usando la regla de Cramer, de manera que

$$\varphi_n = \frac{[g_n, \varphi_n]}{[g_n, f_n]} f_n + \frac{[f_n, \varphi_n]}{[f_n, g_n]} g_n. \quad (1.41)$$

Dado que el Wronskiano es independiente de n , se evalúan los numeradores de la ecuación anterior en $n = 0$, así con la ayuda de (1.12) se tiene

$$\begin{aligned} [g_n, \varphi_n] &= \begin{vmatrix} g_0 & \varphi_0 \\ g_1 & \varphi_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_0 & 0 \\ g_1 & 1 \end{vmatrix} = g_0 \\ [f_n, \varphi_n] &= \begin{vmatrix} f_0 & 0 \\ f_1 & 1 \end{vmatrix} = f_0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, (1.41) puede reescribirse como

$$\varphi_n = \frac{1}{z - z^{-1}} (g_0 f_n - f_0 g_n). \quad (1.42)$$

Observe que si se reemplaza z por z^{-1} , el valor de φ_n no cambia.

Definición 1.7. a) Se dice que ψ_n , elemento de la secuencia $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$, solución de (1.1), en $\lambda = \mu$ corresponde al caso genérico si crece linealmente en n para $n \rightarrow \infty$.

b) Se dice que ψ_n , elemento de la secuencia $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$, solución de (1.1), en $\lambda = \mu$ corresponde al caso excepcional si permanece acotada.

Observación 1.3. Sean \mathring{f}_n y $\mathring{\varphi}_n$ elementos de solución de Jost y solución regular de (1.4), respectivamente. Los elementos φ_n , de la solución regular, en $\lambda = 0$ y $\lambda = 4$, admiten la siguiente representación

$$\varphi_n = \gamma_n \mathring{\varphi}_n + \epsilon_n \mathring{f}_n, \quad (1.43)$$

con

$$\gamma_n := \gamma_1 + \frac{1}{[\mathring{\varphi}_{n-1}, \mathring{f}_{n-1}]} \sum_{j=1}^{n-1} \mathring{f}_j \tau_j, \quad \epsilon_n := \epsilon_1 - \frac{1}{[\mathring{\varphi}_{n-1}, \mathring{f}_{n-1}]} \sum_{j=1}^{n-1} \mathring{\varphi}_j \tau_j, \quad (1.44)$$

donde $\tau_n := -V_n \varphi_n$.

Demostración. La igualdad (1.1) se reescribe aislando la perturbación en el lado derecho de la ecuación como

$$\varphi_{n+1} + 2\varphi_n - \varphi_{n-1} - \lambda\varphi_n = \tau_n, \quad n \geq 1, \quad (1.45)$$

donde se define $\tau_n := -V_n\varphi_n$, $n \geq 1$.

Se sustituye (1.43) en (1.45)

$$\begin{aligned} & -(\gamma_{n+1}\overset{\circ}{\varphi}_{n+1} + \epsilon_{n+1}\overset{\circ}{f}_{n+1}) + 2(\gamma_n\overset{\circ}{\varphi}_n + \epsilon_n\overset{\circ}{f}_n) \\ & -(\gamma_{n-1}\overset{\circ}{\varphi}_{n-1} + \epsilon_{n-1}\overset{\circ}{f}_{n-1}) - \lambda(\gamma_n\overset{\circ}{\varphi}_n + \epsilon_n\overset{\circ}{f}_n) = \tau_n. \end{aligned} \quad (1.46)$$

$\overset{\circ}{\varphi}_n$ y $\overset{\circ}{f}_n$ cumplen (1.4), esto es

$$\begin{aligned} -\overset{\circ}{\varphi}_{n+1} + 2\overset{\circ}{\varphi}_n - \overset{\circ}{\varphi}_{n-1} &= \lambda\overset{\circ}{\varphi}_n, \\ -\overset{\circ}{f}_{n+1} + 2\overset{\circ}{f}_n - \overset{\circ}{f}_{n-1} &= \lambda\overset{\circ}{f}_n, \end{aligned}$$

de donde se obtienen $\overset{\circ}{\varphi}_{n+1}$ y $\overset{\circ}{f}_{n+1}$, que son sustituidos en (1.46) para obtener

$$\begin{aligned} & -\gamma_{n+1}(-2\overset{\circ}{\varphi}_n + \overset{\circ}{\varphi}_{n-1} + \lambda\overset{\circ}{\varphi}_n) + \epsilon_{n+1}(-2\overset{\circ}{f}_n + \overset{\circ}{f}_{n-1} + \lambda\overset{\circ}{f}_n) \\ & + 2(\gamma_n\overset{\circ}{\varphi}_n + \epsilon_n\overset{\circ}{f}_n) - (\gamma_{n-1}\overset{\circ}{\varphi}_{n-1} + \epsilon_{n-1}\overset{\circ}{f}_{n-1}) \\ & - \lambda(\gamma_n\overset{\circ}{\varphi}_n + \epsilon_n\overset{\circ}{f}_n) = \tau_n. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Se impone una condición para γ_n y ϵ_n , de la forma

$$(\lambda\overset{\circ}{\varphi}_n - 2\overset{\circ}{\varphi}_n)(\gamma_{n+1} - \gamma_n) + (\lambda\overset{\circ}{f}_n - 2\overset{\circ}{f}_n)(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n) = 0, \quad n \geq 0 \quad (1.48)$$

y se sustituye en (1.47). De manera que

$$\overset{\circ}{\varphi}_{n-1}(\gamma_{n+1} - \gamma_{n-1}) + \overset{\circ}{f}_{n-1}(\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n-1}) = \tau_n.$$

Se suma y resta ϵ_n y γ_n . Al reagrupar términos se obtiene

$$\begin{aligned} & \overset{\circ}{\varphi}_{n-1}(\gamma_{n+1} - \gamma_n) + \overset{\circ}{f}_{n-1}(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n) \\ & + \overset{\circ}{\varphi}_{n-1}(\gamma_n - \gamma_{n-1}) + \overset{\circ}{f}_{n-1}(\epsilon_n - \epsilon_{n-1}) = \tau_n. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Para $\lambda = 0$ y $\lambda = 4$ en (1.48) se tiene

$$\begin{aligned} -2\overset{\circ}{\varphi}_n(\gamma_{n+1} - \gamma_n) - 2\overset{\circ}{f}_n(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n) &= 0, \quad n \geq 1, \\ 2\overset{\circ}{\varphi}_n(\gamma_{n+1} - \gamma_n) + 2\overset{\circ}{f}_n(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n) &= 0, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

respectivamente. Lo que es equivalente a

$$\overset{\circ}{\varphi}_n(\gamma_{n+1} - \gamma_n) + \overset{\circ}{f}_n(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n) = 0, \quad n \geq 1. \quad (1.50)$$

La igualdad (1.50) se reescribe para $n - 1$ como

$$\mathring{\varphi}_{n-1}(\gamma_n - \gamma_{n-1}) + \mathring{f}_{n-1}(\epsilon_n - \epsilon_{n-1}) = 0$$

y se sustituye en (1.49), así se tiene

$$\mathring{\varphi}_{n-1}(\gamma_{n+1} - \gamma_n) + \mathring{f}_{n-1}(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n) = \tau_n. \quad (1.51)$$

Con (1.50) y (1.51) se obtiene un sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \mathring{\varphi}_n & \mathring{f}_n \\ \mathring{\varphi}_{n-1} & \mathring{f}_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{n+1} - \gamma_n \\ \epsilon_{n+1} - \epsilon_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_n \end{pmatrix},$$

el cual se resuelve usando la regla de Cramer, así

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = -\frac{\mathring{f}_n \tau_n}{\begin{vmatrix} \mathring{\varphi}_n & \mathring{f}_n \\ \mathring{\varphi}_{n-1} & \mathring{f}_{n-1} \end{vmatrix}}, \quad \epsilon_{n+1} - \epsilon_n = \frac{\mathring{\varphi}_n \tau_n}{\begin{vmatrix} \mathring{\varphi}_n & \mathring{f}_n \\ \mathring{\varphi}_{n-1} & \mathring{f}_{n-1} \end{vmatrix}}$$

o lo que es igual

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = -\frac{\mathring{f}_n \tau_n}{[\mathring{\varphi}_{n-1}, \mathring{f}_{n-1}]}, \quad \epsilon_{n+1} - \epsilon_n = \frac{\mathring{\varphi}_n \tau_n}{[\mathring{\varphi}_{n-1}, \mathring{f}_{n-1}]}, \quad n \geq 2.$$

Iterando sobre las ecuaciones anteriores se obtienen γ_n y ϵ_n

$$\gamma_n = \gamma_1 + \frac{1}{[\mathring{\varphi}_{n-1}, \mathring{f}_{n-1}]} \sum_{j=1}^{n-1} \mathring{f}_j \tau_j, \quad \epsilon_n = \epsilon_1 - \frac{1}{[\mathring{\varphi}_{n-1}, \mathring{f}_{n-1}]} \sum_{j=1}^{n-1} \mathring{\varphi}_j \tau_j.$$

□

En el próximo teorema se describe el comportamiento de los elementos φ_n de la solución regular, para $n \rightarrow \infty$ cuando $\lambda = 0$ y $\lambda = 4$. Se muestra que la ecuación (1.1) con condición de frontera de Dirichlet $\psi_0 = 0$ no puede tener un estado ligado en $\lambda = 0$ y $\lambda = 4$.

Teorema 1.4. *Sea el potencial V de clase \mathcal{A}_b para algún $b \geq 1$. Sean λ y z los parámetros espectrales dados en (1.1) y (1.10) respectivamente y sean φ_n y f_n elementos de las soluciones regular y de Jost de (1.1), respectivamente. Sean $\mathring{f}_n, \mathring{\varphi}_n$ elementos de la solución de Jost y regular, correspondientes al caso $V_n \equiv 0$, como en (1.15) y (1.17) respectivamente. Entonces,*

- a) En $\lambda = 0$ o equivalentemente en $z = 1$, el elemento φ_n corresponde al caso genérico (ver definición 1.7), o corresponde al caso excepcional (ver definición 1.7). En consecuencia, $\lambda = 0$ nunca corresponde a un estado ligado para (1.1) con condición de frontera de Dirichlet (1.2).
- b) En $\lambda = 4$ o de forma equivalente en $z = -1$, el elemento φ_n corresponde al caso genérico, o corresponde al caso excepcional. Por tanto, $\lambda = 4$ nunca corresponde a un estado ligado para (1.1) con condición de frontera (1.2).
- c) La función de Jost f_0 y la cantidad g_0 no pueden anularse simultáneamente en ningún valor de z , con la posible excepción de $z = \pm 1$.
- d) Si f_0 tiene un cero en $z = 1$, entonces debe ser un cero simple. Si f_0 tiene un cero en $z = 1$, entonces g_0 también tiene un cero simple en $z = 1$.
- e) Si f_0 tiene un cero en $z = -1$, entonces debe ser un cero simple. Si f_0 tiene un cero en $z = -1$, entonces g_0 también tiene un cero simple en $z = -1$.
- f) El caso excepcional en $z = 1$ ocurre cuando $f_0 = 0$ en $z = 1$ y el caso excepcional en $z = -1$ ocurre cuando $f_0 = 0$ en $z = -1$. Puede ser que f_0 se anule en $z = 1$ pero no en $z = -1$, que f_0 se anule en $z = -1$ pero no en $z = 1$ o que f_0 se anule en ambos $z = 1$ y $z = -1$.

Demostración. Se resuelve el sistema no perturbado (1.4), de donde se obtienen dos soluciones linealmente independientes.

a) Para $\lambda = 0$, se resuelve la ecuación en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes[24]

$$-\psi_{n+1} + 2\psi_n - \psi_{n-1} = 0,$$

la ecuación característica asociada es

$$\begin{aligned} -r^{n+1} + 2r^n - r^{n-1} &= 0, \\ r^2 - 2r + 1 &= (r - 1)^2 = 0, \quad \text{entonces } r = 1, \end{aligned}$$

así, las soluciones son $\tilde{\psi} = \{\mathring{f}_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\hat{\psi} = \{\mathring{\varphi}_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde

$$\mathring{f}_n = 1, \quad \mathring{\varphi}_n = n, \quad n \geq 0. \quad (1.52)$$

Con (1.52) se evalúa $[\mathring{\varphi}_{n-1}, \mathring{f}_{n-1}]$

$$[\mathring{\varphi}_{n-1}, \mathring{f}_{n-1}] = \begin{vmatrix} n-1 & 1 \\ n & 1 \end{vmatrix} = (n-1) - n = -1.$$

Se sustituyen $[\mathring{\varphi}_{n-1}, \mathring{f}_{n-1}] = -1$ y (1.52) en (1.44), entonces

$$\gamma_n = \gamma_1 + \sum_{j=1}^{n-1} V_j \varphi_j, \quad \epsilon_n = \epsilon_1 - \sum_{j=1}^{n-1} j V_j \varphi_j.$$

Por tanto, φ_n se puede escribir de la siguiente forma

$$\varphi_n = n \left[\gamma_1 + \sum_{j=1}^{n-1} V_j \varphi_j \right] + \left[\epsilon_1 - \sum_{j=1}^{n-1} j V_j \varphi_j \right], \quad (1.53)$$

La expresión para φ_n en (1.53) debe ser consistente con (1.12), es por esto que $\epsilon_1 = 0$ y $\gamma_1 = 1$. Así

$$\varphi_n = n \left[1 + \sum_{j=1}^{n-1} V_j \varphi_j \right] - \sum_{j=1}^{n-1} j V_j \varphi_j, \quad n \geq 2.$$

Usando la compacidad de V

$$\varphi_n = n \left[1 + \sum_{j=1}^b V_j \varphi_j \right] - \sum_{j=1}^b j V_j \varphi_j, \quad n \geq b+1. \quad (1.54)$$

De (1.54), se concluye que φ_n en $\lambda = 0$ crece linealmente en n para $n \rightarrow \infty$, a menos que ocurra el caso excepcional

$$\sum_{j=1}^b V_j \varphi_j = -1,$$

si esto pasa, entonces

$$\sum_{j=1}^b j V_j \varphi_j \neq 0,$$

ya que si esto no se cumpliera se tendría que $\varphi_n = 0$ para $\lambda = 0$ y $n \geq b + 1$, lo que significa que $\varphi_n = 0$ con $\lambda = 0$ para toda $n \geq 0$, que contradice la condición inicial $\varphi_1 = 1$. Por consiguiente, en cualquier caso, se concluye que $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $\lambda = 0$ no puede ser cuadrática sumable y por tanto no puede haber un estado ligado en $\lambda = 0$ para (1.1) con condición de frontera (1.2).

b) De forma análoga para $\lambda = 4$ se resuelve

$$-\psi_{n+1} + 2\psi_n - \psi_{n-1} = 4\varphi_n,$$

cuyas soluciones son $\tilde{\psi} = \{\mathring{f}_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\hat{\psi} = \{\mathring{\varphi}_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde

$$\mathring{f}_n = (-1)^n, \quad \mathring{\varphi}_n = (-1)^n n.$$

En este caso (1.54) es reemplazada por

$$\varphi_n = (-1)^{n-1} n \left[1 + \sum_{j=1}^b V_j \varphi_j \right] + (-1)^n \sum_{j=1}^b j V_j \varphi_j, \quad n \geq b + 1,$$

de donde se concluye que φ_n en $\lambda = 4$ crece linealmente en n para $n \rightarrow \infty$ a menos que ocurra el caso excepcional

$$\sum_{j=1}^b (-1)^j V_j \varphi_j = -1,$$

si esto pasa, entonces

$$\sum_{j=1}^b (-1)^j j V_j \varphi_j \neq 0,$$

si esto no se cumpliera se tendría que $\varphi_n = 0$ para $\lambda = 4$ y $n \geq b + 1$, lo que significa que $\varphi_n = 0$ con $\lambda = 4$ para toda $n \geq 0$, que contradice la condición inicial $\varphi_1 = 1$. Por consiguiente, en cualquier caso, se concluye que $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $\lambda = 4$ no puede ser cuadrática sumable y por tanto no puede haber un estado ligado en $\lambda = 4$.

c) f_0 y g_0 no pueden anularse simultáneamente para algún z , con $z \neq 1$, de lo contrario $\varphi_n(z) = 0$, para toda $n \geq 1$, lo que contradice la condición $\varphi_1 = 1$.

d) Ya que g_0 se obtiene de f_0 reemplazando z por z^{-1} , se sigue que g_0 se anula en $z = 1$ si $f_0 = 0$ en este valor.

En la proposición 1.1b) se ha visto que f_n es un polinomio en z , lo que se cumple también cuando $V_n \equiv 0$, de ahí que se pueda expandir f_n en serie de Taylor alrededor de $z = 1$ como

$$f_n(z) = f_n(1) + (z - 1)\dot{f}_n(1) + O((z - 1)^2), \quad z \rightarrow 1 \in \mathbb{C}. \quad (1.55)$$

Dado que g_n se obtiene al reemplazar z por z^{-1} en f_n , de la igualdad anterior se obtiene la expansión de g_n alrededor de $z = 1$

$$g_n(z) = f_n(1) + \left(\frac{1}{z} - 1\right)\dot{f}_n(1) + O\left(\left(\frac{1}{z} - 1\right)^2\right), \quad z \rightarrow 1 \in \mathbb{C}. \quad (1.56)$$

Expandiendo $\frac{1}{z} - 1$ alrededor de $z = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} - 1 &= \frac{1 - z}{z} = \left(\frac{1 - z}{z}\right)_{z=1} + (z - 1)\left(-\frac{1}{z^2}\right)_{z=1} + O((z - 1)^2) \\ &= -(z - 1) + O((z - 1)^2), \end{aligned}$$

sustituyendo en (1.56) se tiene

$$g_n(z) = f_n(1) + (z - 1)\dot{f}_n(1) + O((z - 1)^2), \quad z \rightarrow 1 \in \mathbb{C}. \quad (1.57)$$

Así se obtiene el Wronskiano asociado a (1.55) y (1.57)

$$\begin{aligned} [f_n(z), g_n(z)] &= \begin{vmatrix} f_n(z) & g_n(z) \\ f_{n+1}(z) & g_{n+1}(z) \end{vmatrix} \\ &= 2(z - 1) \begin{vmatrix} \dot{f}_n(1) & f_n(1) \\ \dot{f}_{n+1}(1) & f_{n+1}(1) \end{vmatrix} + O((z - 1)^2) \end{aligned} \quad (1.58)$$

Expandiendo $z - \frac{1}{z}$ alrededor de $z = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} z - \frac{1}{z} &= z - z^{-1} = \left(\frac{z^2 - 1}{z}\right)_{z=1} + (z - 1)\left(\frac{z^2 + 1}{z}\right)_{z=1} + O((z - 1)^2) \\ &= 2(z - 1) + O((z - 1)^2). \end{aligned} \quad (1.59)$$

Se ha visto en (1.37) que $[f_n(z), g_n(z)] = z^{-1} - z$, por lo tanto

$$[f_n(z), g_n(z)] = -2(z - 1) + O((z - 1)^2),$$

al comparar este resultado con (1.58) se obtiene

$$\left| \begin{array}{cc} \dot{f}_n(1) & f_n(1) \\ \dot{f}_{n+1}(1) & f_{n+1}(1) \end{array} \right| = -1 \quad \text{o} \quad \left| \begin{array}{cc} f_n(1) & \dot{f}_n(1) \\ f_{n+1}(1) & \dot{f}_{n+1}(1) \end{array} \right| = 1, \quad (1.60)$$

de donde se concluye que $f_n(1)$ y $\dot{f}_n(1)$ no pueden anularse simultáneamente. Por esto, $z = 1$ sólo puede ser un cero simple de $f_n(z)$.

e) Análogo al anterior para $z = -1$.

f) Finalmente, para demostrar *f*) primero se muestra que φ_n en $z = 1$ permanece acotada para $n \rightarrow \infty$ si y sólo si $f_0(1) = 0$.

Para $n = 0$, de (1.55) y (1.57) se obtienen

$$\begin{aligned} f_0(z) &= f_0(1) + (z-1)\dot{f}_0(1) + O((z-1)^2), \\ g_0(z) &= f_0(1) - (z-1)\dot{f}_0(1) + O((z-1)^2). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Se sustituyen las expresiones en (1.55), (1.57), (1.59) y (1.46) en (1.42), de esta manera

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{f_0(1)\dot{f}_n(1) - \dot{f}_0(1)f_n(1) + O((z-1)^2)}{1 + O((z-1)^2)} \\ &= f_0(1)\dot{f}_n(1) - \dot{f}_0(1)f_n(1) + O(z-1), \end{aligned}$$

Se considera $n \rightarrow \infty$, entonces

$$\varphi_n = nf_0(1) - \dot{f}_0(1) + O(z-1), \quad z \rightarrow 1 \in \mathbb{C},$$

donde el término $O(z-1)$ permanece acotado para $n \rightarrow \infty$. De esto se concluye que φ_n en $z = 1$ permanece acotada si y sólo si $f_0(1) = 0$, demostrando que el caso excepcional con $z = 1$ ocurre si y sólo si $f_0(1) = 0$. Un argumento similar prueba que el caso excepcional con $z = -1$ ocurre si y sólo si $f_0(-1) = 0$. En el ejemplo 5 se muestra que f_0 puede anularse en $z = 1$ pero no en $z = -1$ y viceversa. \square

En el próximo teorema se estudia en qué intervalo ocurren los estados ligados y qué pasa con φ_n , f_n y f_0 al evaluarse en éstos valores.

Teorema 1.5. *Sea el potencial V de clase \mathcal{A}_b para algún $b \geq 1$. Sean λ y z los parámetros espectrales dados en (1.1) y (1.10) respectivamente y sean φ_n , f_n elementos de la solución regular y solución de Jost, respectivamente. Sea f_0 la función de Jost. Entonces:*

- a) Un estado ligado sólo puede ocurrir cuando $\lambda \in (-\infty, 0)$ o $\lambda \in (4, +\infty)$. De forma equivalente, un estado ligado sólo puede ocurrir cuando $z \in (-1, 0)$ o $z \in (0, 1)$.
- b) El valor de φ_n evaluada en un λ que corresponda a un estado ligado debe ser real. Similarmente, la función de Jost evaluada en un estado ligado debe ser real.
- c) En un estado ligado, la función de Jost f_0 tiene un cero simple en λ y z , y $f_1 \neq 0$.
- d) El número de estados ligados, N , es finito. Se tiene que $0 \leq N \leq 2b - 1$, donde b es el número positivo que denota el soporte del potencial. En particular, se tiene que $N = 0$ cuando $V_n \equiv 0$.
- e) En un estado ligado, la cantidad g_0 no puede anularse. Esto es, la matriz de dispersión definida en (1.35) tiene un polo simple en λ y z para cada estado ligado.

Demostración. a) En un estado ligado, (1.1) debe tener una solución cuadrático sumable que satisfaga (1.2). Ya que $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisface esta condición, cualquier solución que corresponda a un estado ligado debe ser linealmente dependiente de la solución regular.

Dado que el operador \mathcal{L} es autoadjunto, un estado ligado sólo puede ocurrir cuando λ es real.

Recuérdese que bajo la transformación $\lambda \mapsto z$, el intervalo $\lambda \in (0, 4)$ corresponde a $z \in \mathbf{T}^+$, pero para esos valores de z no puede ocurrir un estado ligado porque los f_n y g_n no se anulan en esos valores para $n \rightarrow \infty$. Además del teorema 1.4 se sabe que un estado ligado no puede ocurrir en $z = \pm 1$. De (1.5) se sigue que $z = 0$ corresponde a $\lambda = \infty$, por lo que en $z = 0$ tampoco puede ocurrir un estado ligado, esto porque las soluciones deben ser cuadrático sumables.

b) Ya que los estados ligados ocurren cuando $z \in (-1, 0)$ o $z \in (0, 1)$, esto es, z real, entonces se concluye que f_n y g_n dadas en (1.26) y (1.27), respectivamente, evaluadas en un estado ligado son reales para $n \geq 0$. Como resultado de la expresión para φ_n en (1.42), se concluye que φ_n también es real-valuada en los estados ligados.

c) En un estado ligado, el coeficiente de g_n en el lado derecho de la igualdad (1.42) debe ser cero porque de no ser así con (1.12), φ_n no puede ser cuadrática sumable para un estado ligado que ocurra en $z \in (-1, 0)$ o $z \in (0, 1)$. Por tanto, $f_0 = 0$.

De (1.1) se obtiene

$$\begin{aligned} f_{n+1} + f_{n-1} &= (2 - \lambda + V_n)f_n, \\ \frac{df_{n+1}}{d\lambda} + \frac{df_{n-1}}{d\lambda} &= -f_n + (2 - \lambda - V_n)\frac{df_n}{d\lambda}, \end{aligned} \quad (1.62)$$

donde la segunda igualdad es la derivada respecto de λ de la primera. Multiplicando la primera igualdad en (1.62) por $df_n/d\lambda$, la segunda por f_n y restando se tiene

$$f_{n+1}\frac{df_n}{d\lambda} - f_n\frac{df_{n+1}}{d\lambda} + f_{n-1}\frac{df_n}{d\lambda} - f_n\frac{df_{n-1}}{d\lambda} = f_n^2.$$

Expandiendo esta expresión en un λ que corresponda a un estado ligado y tomando la suma en ambos lados desde $n = 1$ se tiene

$$f_0\frac{df_1}{d\lambda} - f_1\frac{df_0}{d\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2.$$

Se sabe que en un estado ligado $f_0 = 0$, $f_1 \neq 0$ y que los valores de f_n son reales. Así, la expresión anterior implica que

$$\frac{df_0}{d\lambda} = -\frac{1}{f_1} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2,$$

con el lado derecho distinto de cero. Por tanto, el cero de f_0 como función de λ en un estado ligado, debe ser un cero simple. Usando (1.7) se tiene que

$$\frac{d\lambda}{dz} = -1 + z^{-2},$$

de donde se concluye, a partir del inciso a) de este teorema, que $d\lambda/dz > 0$ para $z \in (-1, 0)$ o $z \in (0, 1)$. Por consiguiente, un cero simple de f_0 en λ corresponde a un cero simple de f_0 en z .

Además en un estado ligado $f_1 \neq 0$ ya que si $f_1 = 0$, la única solución a (1.1) con $f_0 = 0$ y $f_1 = 0$ sería $\{f_j\}_{j=0}^{\infty} \equiv 0$ lo que no es compatible con (1.13).

d) Por el teorema 1.2 se sabe que f_0 es un polinomio en z de grado $2b - 1$. Dado que los estados ligados corresponden a los ceros de f_0 se concluye que en número de estados ligados no puede ser mayor que $2b - 1$. Además del hecho que $\mathring{f}_0 = 1$, se sigue que la función de Jost \mathring{f}_0 , no tiene ceros, así $N = 0$. Se ha usado \mathring{f}_0 para denotar la función de Jost correspondiente a $V_n \equiv 0$.

e) Recuérdense que los estados ligados son ceros de f_0 y que no pueden ocurrir en $z = \pm 1$. Por tanto, de (1.42) se observa que si g_0 se anula en un valor correspondiente a un estado ligado implica que $\varphi_n \equiv 0$ para toda n , lo que contradice la condición $\varphi_1 = 1$. Entonces, de (1.35) y del hecho que $f_0 = 0$ en cada estado ligado, se concluye que la matriz S debe tener un polo simple en cada estado ligado. \square

En (1.42) φ_n se expresa en términos del parámetro espectral z . Es posible expresar φ_n en términos del parámetro espectral λ , tal y como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.6. *Sea el potencial V es de clase \mathcal{A}_b para $b \geq 1$. Entonces, para $n \geq 1$, φ_n es un polinomio en λ de grado $n - 1$ y está dada por*

$$\varphi_n = \sum_{j=0}^{n-1} B_{nj} \lambda^j, \quad (1.63)$$

donde los coeficientes B_{nj} son reales y unívocamente determinados por el conjunto ordenado de valores del potencial $\{V_1, V_2, \dots, V_{n-1}\}$. En particular, se tiene

$$B_{n(n-1)} = (-1)^{n-1}, \quad B_{n(n-2)} = (-1)^{n-2} \left[2(n-1) + \sum_{j=1}^{n-1} V_j \right], \quad (1.64)$$

$$B_{n(n-3)} = (-1)^{n-3} \left[(n-2)(2n-3) + 2(n-2) \sum_{j=1}^{n-1} V_j + \sum_{1 \leq k < l \leq n-1} V_j V_k \right]. \quad (1.65)$$

Demostración. Ya que φ_n es elemento de la solución regular de (1.1), ésta satisface

$$\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} = (2 - \lambda + V_n) \varphi_n, \quad n \geq 1. \quad (1.66)$$

La ecuación (1.66) se resuelve de forma iterativa usando las condiciones iniciales dadas en (1.12).

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= 2 + V_1 - \lambda = B_{20} + B_{21}\lambda, \\ \varphi_3 &= [3 + 2(V_1 + V_2) + V_1V_2] - \lambda[4 + (V_1 + V_2)] + \lambda^2 \\ &= B_{30} + B_{31}\lambda + B_{32}\lambda^2, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Se asume que (1.63) se cumple para $n - 1$ y $n - 2$. Se demuestra que se cumple para n :

$$\begin{aligned}\varphi_n &= (2 - \lambda + V_{n-1})\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2} \\ &= 2 [B_{(n-1)(n-2)}\lambda^{n-2} + B_{(n-1)(n-3)}\lambda^{n-3} + B_{(n-1)(n-4)}\lambda^{n-4} + \dots] \\ &\quad - [B_{(n-1)(n-2)}\lambda^{n-1} + B_{(n-1)(n-3)}\lambda^{n-2} + B_{(n-1)(n-4)}\lambda^{n-3} + \dots] \\ &\quad + V_{n-1} [B_{(n-1)(n-2)}\lambda^{n-2} + B_{(n-1)(n-3)}\lambda^{n-3} + B_{(n-1)(n-4)}\lambda^{n-4} + \dots] \\ &\quad - [B_{(n-2)(n-3)}\lambda^{n-3} + B_{(n-2)(n-4)}\lambda^{n-4} + B_{(n-2)(n-5)}\lambda^{n-5} + \dots].\end{aligned}$$

Al agrupar términos y sustituir los valores de las constantes B_{ij} se obtiene

$$\begin{aligned}\varphi_n &= -\lambda^{n-1}B_{(n-1)(n-1)} + \lambda^{n-2}[2B_{(n-1)(n-1)} - B_{(n-1)(n-3)} \\ &\quad + V_{n-1}B_{(n-1)(n-1)}] + \lambda^{n-3}[2B_{(n-1)(n-3)} - B_{(n-1)(n-4)} \\ &\quad + V_{n-1}B_{(n-1)(n-3)} - B_{(n-2)(n-3)}] + \dots \\ &= \lambda^{n-1}(-1)^{n-1} + \lambda^{n-2}(-1)^{n-2} \left[2(n-1) + \sum_{j=1}^{n-1} V_j \right] \\ &\quad + \lambda^{n-3}(-1)^{n-3} \left[(n-2)(2n-3) + (2n-2) \sum_{j=1}^{n-1} V_j \right. \\ &\quad \left. + \sum_{1 \leq k < l \leq n-1} V_j V_k \right] + \dots\end{aligned}$$

Así

$$\varphi_n = \lambda^{n-1}B_{n(n-1)} + \lambda^{n-2}B_{n(n-2)} + \lambda^{n-3}B_{n(n-3)} + \dots = \sum_{j=0}^{n-1} B_{nj}\lambda^j.$$

Ya que las condiciones iniciales son reales, al igual que los coeficientes de φ_{n-1} y φ_n en (1.66) para cada valor de λ , se sigue que los coeficientes B_{nj} en (1.63) también lo son. \square

Corolario 1.7. Para $n \geq 1$, $\mathring{\varphi}_n$, elemento de la solución regular de (1.4) con condiciones iniciales (1.12), es un polinomio en λ de grado $n - 1$ y está dado por

$$\mathring{\varphi}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \mathring{B}_{nj} \lambda^j, \quad n \geq 1, \quad (1.67)$$

donde los coeficientes \mathring{B}_{nj} son reales. En particular, se tiene

$$\mathring{B}_{n(n-1)} = (-1)^{n-1}, \quad \mathring{B}_{n(n-2)} = 2(-1)^{n-2}(n-1), \quad (1.68)$$

$$\mathring{B}_{n(n-3)} = (-1)^{n-3}(n-2)(2n-3). \quad (1.69)$$

Ahora se considera el problema de expresar φ_n en términos de los elementos en el conjunto $\{\mathring{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Teorema 1.8. Sea el potencial V de clase \mathcal{A}_b para algún $b \geq 1$. Sea $\mathring{\varphi}_n$, elemento de la solución regular de (1.4) que satisface las condiciones iniciales dadas en (1.12). Entonces, para $n \geq 1$, φ_n puede ser escrita como una combinación lineal de elementos en el conjunto $\{\mathring{\varphi}_n\}_{j=1}^n$, de esta forma se tiene que

$$\varphi_n = \mathring{\varphi}_n + \sum_{j=1}^{n-1} A_{nj} \mathring{\varphi}_j, \quad n \geq 1, \quad (1.70)$$

con los coeficientes A_{nj} para $j = 1, \dots, n-1$ determinados de forma única por el conjunto ordenado de valores del potencial $\{V_1, V_2, \dots, V_{n-1}\}$. En particular, se tiene

$$A_{n(n-1)} = \sum_{j=1}^{n-1} V_j, \quad n \geq 2, \quad (1.71)$$

con

$$\begin{aligned} A_{n0} &= 0, \quad A_{(n+1)(n+1)} = 1, \quad n \geq 0, \\ A_{nm} &= 0, \quad 0 \leq n < m. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Demostración. En el teorema 1.6 se ha demostrado que φ_n es un polinomio en λ de grado $n - 1$. Del corolario 1.7 se sabe que para $j \geq 1$, la cantidad $\mathring{\varphi}_n(\lambda)$ es un polinomio de grado $j - 1$. Así, se puede usar el conjunto $\{\mathring{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty}$ como base para polinomios en λ de grado $n - 1$ y expresar φ_n como

$$\varphi_n = A_{nn} \mathring{\varphi}_n + \sum_{j=1}^{n-1} A_{nj} \mathring{\varphi}_j, \quad n \geq 1. \quad (1.73)$$

Con la ayuda de (1.63) y (1.67), se comparan los coeficientes en ambos lados de la ecuación (1.73), de donde se obtiene que $A_{nn} = 1$. Se puede usar A_{n0} para $n \geq 1$ como el coeficiente de $\dot{\varphi}_0$ ya que $\dot{\varphi}_0 = 0$ como resultado de la primera condición inicial dada en (1.12). Con esto, se cumple (1.72).

Usando (1.63), (1.67) y (1.74)

$$\dot{\varphi}_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-2} \dot{B}_{(n-1)j} \lambda^j, \quad (1.74)$$

análogo a (1.67) con $n-1$ en lugar de n , se comparan los coeficientes correspondientes a λ^{n-2} en ambos lados de (1.73), con lo que se obtiene

$$B_{n(n-2)} = A_{nn} \dot{B}_{n(n-2)} + A_{n(n-1)} \dot{B}_{(n-1)(n-2)}, \quad n \geq 2.$$

Se sustituyen los valores de A_{nn} , $B_{n(n-2)}$, $\dot{B}_{n(n-2)}$ y $\dot{B}_{(n-1)(n-2)}$, así

$$\begin{aligned} (-1)^{n-2} \left[2(n-1) + \sum_{j=1}^{n-1} V_j \right] &= 2(-1)^{n-2}(n-1) + A_{n(n-1)}(-1)^{n-2} \\ (-1)^{n-2} \sum_{j=1}^{n-1} V_j &= (-1)^{n-2} A_{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Entonces

$$A_{n(n-1)} = \sum_{j=1}^{n-1} V_j, \quad n \geq 2.$$

□

De (1.71) y la primera igualdad en (1.72) se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 1.9. *Sea el potencial V de clase \mathcal{A}_b para algún $b \geq 1$. Entonces, V se determina de manera única por el conjunto ordenado $\{A_{21}, A_{32}, \dots, A_{(b+1)b}\}$ de los correspondientes coeficientes dados en (1.70), mediante*

$$V_n = A_{(n+1)n} - A_{n(n-1)}, \quad n \geq 1, \quad (1.75)$$

con $A_{10} = 0$.

Capítulo 2

Métodos para recuperar el potencial V

2.1. Método de Marchenko

En este capítulo se presentan de forma resumida, el método de Marchenko y el método de Gel'fand-Levitan, dos métodos para recuperar el potencial a partir de la función de Jost (1.31) o sus ceros.

Definición 2.1. Sea f_n como en (1.26). Definimos las constantes de norma de Marchenko como

$$c_s := \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2|_{z=z_s}}}, \quad (2.1)$$

donde los valores $z = z_s$ con $s = 1, \dots, N$ son los estados ligados que corresponden a los ceros de la función de Jost.

Ya que el potencial es de soporte compacto, las constantes de Marchenko definidas en (2.1) pueden ser evaluadas usando $S(z)$ mediante el residuo de $\frac{S}{z}$ en el polo $z = z_s$, entonces

$$c_s = \sqrt{\operatorname{Res} \left[\frac{S}{z}, z_s \right]}, \quad s = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

Se procede a deducir el sistema de Marchenko. En (1.42), se ha visto que

$$\varphi_n = \frac{1}{z - z^{-1}}(g_0 f_n - f_0 g_n),$$

lo cual se puede reescribir como

$$f_0 g_n - g_0 f_n = -(z - z^{-1})\varphi_n, \quad z \in \mathbf{T}.$$

Se divide esta expresión por f_0 y se usa (1.35) para obtener

$$g_n - S f_n = -\frac{z - z^{-1}}{f_0}\varphi_n, \quad z \in \mathbf{T}.$$

Esta relación puede escribirse también de la siguiente forma

$$(g_n - z^{-n}) + (1 - S)z^n + (1 - S)(f_n - z^n) = H_n, \quad z \in \mathbf{T}, \quad (2.3)$$

donde

$$H_n = f_n - z^{-n} - \frac{z - z^{-1}}{f_0}\varphi_n.$$

Multiplicando (2.3) por $\frac{1}{2\pi i}$ e integrando sobre el círculo unitario \mathbf{T} en el sentido opuesto a las manecillas del reloj, con

$$\oint [\dots] z^{m-1} dz, \quad m \geq n + 1,$$

se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint (g_n - z^n) z^{m-1} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint (1 - S) z^{n+m-1} dz \\ + \frac{1}{2\pi i} \oint (1 - S)(f_n - z^n) z^{m-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint H_n z^{m-1} dz. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Se evalúa el tercer término del lado izquierdo de (2.4), usando la igualdad

para f_n dada en (1.26)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \oint (1 - S) (f_n - z^n) z^{m-1} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint (1 - S) \left(\sum_{j=0}^{2b-2n-1} K_{n(n+j)} z^{n+j} - z^n \right) z^{m-1} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint (1 - S) \left(\sum_{j=n}^{2b-n-1} K_{nj} z^j - z^n \right) z^{m-1} dz \\
&= \sum_{j=n+1}^{2b-n-1} K_{nj} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint (1 - S) \right] z^{j+m-1} dz. \tag{2.5}
\end{aligned}$$

La integral del término del lado derecho de la ecuación (2.4) es

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint H_n z^{m-1} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint \left[f_n - z^{-n} - \frac{z - z^{-1}}{f_0} \varphi_n \right] z^{m-1} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint (f_n - z^{-n}) z^{m-1} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z - z^{-1}}{f_0} \varphi_n z^{m-1} dz,
\end{aligned}$$

donde la integral $\frac{1}{2\pi i} \oint (f_n - z^{-n}) z^{m-1} dz = 0$ porque $m \geq n + 1$ y

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z - z^{-1}}{f_0} \varphi_n z^{m-1} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint \left(\frac{z - z^{-1}}{z f_0} \right) \left(\frac{g_0 f_n - f_0 g_n}{z - z^{-1}} \right) z^m dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{g_0 f_n - f_0 g_n}{z f_0} z^m dz.
\end{aligned}$$

Esta integral tiene N polos simples que corresponden a los estados ligados $z = z_s$ con $s = 1, \dots, N$. De manera que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{g_0 f_n - f_0 g_n}{z f_0} z^m dz &= \sum_{s=0}^N \text{Res} \left[\frac{g_0 f_n - f_0 g_n}{z f_0} z^m, z_s \right] \\
&= \sum_{s=0}^N \left. \frac{(g_0 f_n - f_0 g_n) z^m}{f_0 + z \dot{f}_0} \right|_{z=z_s} \\
&= \sum_{s=0}^N \left. \frac{g_0 f_n z^m}{z \dot{f}_0} \right|_{z=z_s}.
\end{aligned}$$

Recuérdese que los estados ligados corresponden a los ceros de f_0 .

Con lo analizado en (2.2) y la igualdad para f_n dada en (1.26) se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^N \frac{g_0 f_n z^m}{z \dot{f}_0} \Big|_{z=z_s} &= \sum_{s=0}^N c_s^2 z_s^m f_n(z_s) \\
&= \sum_{s=0}^N c_s^2 z_s^m \sum_{j=n}^{2b-n-1} K_{nj} z_s^j \\
&= \sum_{j=n}^{2b-n-1} \sum_{s=0}^N c_s^2 z_s^{m+j} K_{nj} \\
&= \sum_{j=n+1}^{2b-n-1} \sum_{s=0}^N c_s^2 z_s^{m+j} K_{nj} + \sum_{s=0}^N c_s^2 z_s^n.
\end{aligned}$$

Recuérdese que $K_{nn} = 1$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint H_n z^{m-1} dz = - \sum_{j=n+1}^{2b-n-1} \sum_{s=0}^N c_s^2 z_s^{m+j} K_{nj} - \sum_{s=0}^N c_s^2 z_s^n. \quad (2.6)$$

Se sustituyen los resultados obtenidos en (2.5) y (2.6) en (2.4)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint (g_n - z^n) z^{m-1} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint (1 - S) z^{n+m-1} dz \\
+ \sum_{j=n+1}^{2b-n-1} K_{nj} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint (1 - S) \right] z^{j+m-1} dz \\
= - \sum_{j=n+1}^{2b-n-1} \sum_{s=0}^N c_s^2 z_s^{m+j} K_{nj} - \sum_{s=0}^N c_s^2 z_s^n.
\end{aligned}$$

Finalmente, se escribe

$$K_{nm} = \frac{1}{2\pi i} \oint (g_n - z^n) z^{m-1} dz, \quad (2.7)$$

y definiendo

$$M_n := \frac{1}{2\pi i} \oint (1 - S) z^{n-1} dz + \sum_{s=1}^N c_s^2 z_s^n, \quad (2.8)$$

se obtiene el sistema lineal de Marchenko

$$K_{nm} + M_{n+m} + \sum_{j=n+1}^{2b-n-1} K_{nj} M_{j+m} = 0, \quad 0 \leq n < m, \quad (2.9)$$

donde M_n se llama núcleo de Marchenko.

Como consecuencia de (1.26), se considera el sistema (2.9) sólo para $m \leq 2b - n - 1$ para cada $n = 0, 1, \dots, b - 1$.

Teorema 2.1. *Sea V de clase \mathcal{A}_b para $b \geq 1$. Entonces, la función de Jost f_0 al igual que la matriz de dispersión S , determinan de forma única el potencial. Una vez que se resuelve el sistema de Marchenko para K_{nm} con $0 \leq n < m \leq 2b - n - 1$ para cada $n = 0, 1, \dots, b - 1$, se recupera el potencial mediante (1.30).*

Demostración. Se ha analizado que g_0 se obtiene de f_0 al sustituir en f_0 z por z^{-1} , entonces dada f_0 como función de z se tiene g_0 en función de z . Por consiguiente, se tiene la matriz S como función de z .

Luego, dada S se tienen las constantes de norma de Marchenko. De manera que se puede construir el núcleo de Marchenko, con esto, se resuelve el sistema de Marchenko y se usa (1.30) para obtener el conjunto ordenado de valores del potencial $\{V_1, V_2, \dots, V_b\}$. \square

2.1.1. Algoritmo del método de Marchenko

Dada la función de Jost $f_0(z)$ en términos del parámetro espectral z :

1. Obtener $g_0(z)$ reemplazando z por z^{-1} en $f_0(z)$.
2. Construir la matriz $S(z)$ como en (1.35).
3. Calcular los ceros de $f_0(z)$.
4. Calcular las constantes de norma de Marchenko mediante (2.1) o (2.2).
5. Construir el núcleo de Marchenko M_n usando la igualdad en (2.8).
6. Construir y resolver el sistema de Marchenko (2.9).
7. Usar K_{nm} para obtener $\{V_1, \dots, V_b\}$ mediante (1.30), considerando (1.28).

2.2. Método de Gel'fand-Levitan

Se usa $\dot{\rho}$ para denotar la función espectral[1, pág. 142][7] asociada con el operador discreto de Schrödinger no perturbado (1.4) y ρ para denotar la función espectral asociada con el operador discreto de Schrödinger perturbado (1.1), ambos con condición de frontera (1.2).

Se emplean $d\dot{\rho}$ y $d\rho$ para denotar las medidas espectrales[1, pág. 142][7] asociadas a (1.4) y (1.1) respectivamente, con condición de frontera (1.2).

La medida espectral $d\dot{\rho}$ en términos de λ es

$$d\dot{\rho} = \begin{cases} 0, & \lambda < 0 \\ \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda(4-\lambda)} d\lambda, & 0 \leq \lambda \leq 4, \\ 0, & \lambda > 4. \end{cases} \quad (2.10)$$

Como función de z , $d\dot{\rho}$ está dada por

$$d\dot{\rho} = \begin{cases} 0, & z \in (0, 1) \\ \frac{1}{2\pi i} (z - z^{-1}) \frac{dz}{z}, & z \in \overline{\mathbf{T}^+}, \\ 0, & z \in (-1, 0). \end{cases} \quad (2.11)$$

La parte distinta de cero de $d\dot{\rho}$ en términos de θ es

$$d\dot{\rho} = \frac{2}{\pi} \sin^2 \theta d\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (2.12)$$

Observación 2.1. *Nótese que la medida espectral (2.10) de los elementos $\dot{\psi}_n$ que satisfacen (1.4), es similar a la medida espectral de los polinomios de Chebyshev de segunda especie,*

$$d\rho_U(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \sqrt{1-x^2} dx, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \quad (2.13)$$

Esto se verifica haciendo el cambio de variable $x = \frac{2-\lambda}{2}$ en la igualdad

(2.13), entonces

$$d\rho_U(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < 0, \\ -\frac{\sqrt{\lambda(4-\lambda)}}{4}d\lambda, & 0 \leq \lambda \leq 4, \\ 0, & \lambda > 4. \end{cases} \quad (2.14)$$

Cada elemento $\dot{\varphi}_n$ de la secuencia $\{\dot{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty}$, es un polinomio en λ de grado $n - 1$. Entonces, forman un conjunto ortonormal con respecto a la medida espectral $d\dot{\rho}$, esto es

$$\int d\dot{\rho} (\dot{\varphi}_j \dot{\varphi}_l) = \delta_{jl}, \quad (2.15)$$

donde δ_{jl} es la delta de Kronecker. Se omiten los límites de integración con el entendimiento que la integral es sobre $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 2.2. Sea φ_n elemento de la solución regular. Se definen las constantes de norma de Gel'fand-Levitan como

$$C_s := \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2|_{\lambda=\mu_s}}}, \quad (2.16)$$

donde $\lambda = \mu_s$ corresponde a un estado ligado, con $s = 1, \dots, N$.

Al comparar la constante de norma de Gel'fand-Levitan con la constante de norma de Marchenko se obtiene una relación entre ambas. En un estado ligado, φ_n y f_n son linealmente dependientes. Entonces, si se evalúa (1.42) en el estado ligado $\lambda = \mu_s$ se tiene

$$\varphi_n|_{\lambda=\mu_s} = \left(\frac{g_0}{z - z^{-1}} \Big|_{\lambda=\mu_s} \right) f_n|_{\lambda=\mu_s}.$$

Ya que la cantidad entre paréntesis es independiente de n , al elevar al cuadrado y tomando la suma sobre n se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2|_{\lambda=\mu_s} = \left(\frac{g_0}{z - z^{-1}} \Big|_{\lambda=\mu_s} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2|_{\lambda=\mu_s}.$$

Teniendo en cuenta (2.1) y (2.16), la relación entre ambas constantes de norma es

$$c_s = \left| \frac{g_0}{z - z^{-1}} \Big|_{\lambda=\mu_s} \right| C_s. \quad (2.17)$$

Dado V , asumiendo que los estados ligados ocurren en $\lambda = \mu_s$ para $s = 1, \dots, N$, se tiene que la medida espectral $d\rho$ en términos del parámetro λ es

$$d\rho = \begin{cases} \sum_{s=1}^N C_s^2 \delta(\lambda - \mu_s) d\lambda, & \lambda < 0 \text{ o } \lambda > 4, \\ \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda(4-\lambda)} \frac{d\lambda}{|f_0|^2}, & 0 \leq \lambda \leq 4, \end{cases} \quad (2.18)$$

donde f_0 es la función de Jost.

En términos de z , la parte continua de la medida espectral $d\rho$ está dada por

$$d\rho = -\frac{1}{2\pi i} (z - z^{-1})^2 \frac{dz}{z|f_0|^2}, \quad z \in \overline{\mathbf{T}^+}, \quad (2.19)$$

y en términos de θ

$$d\rho = \frac{2}{\pi} \sin^2 \theta \frac{d\theta}{|f_0|^2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (2.20)$$

Los elementos φ_n de la secuencia $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, son polinomios en λ de grado $n-1$, tal y como se ha demostrado en el teorema 1.6. Así los términos en la secuencia $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ son ortonormales respecto a la medida espectral $d\rho$, por lo que se tiene

$$\int d\rho (\varphi_j \varphi_l) = \delta_{jl}.$$

Por simplicidad, nuevamente se omiten los límites de integración.

El conjunto $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ forma una base ortonormal para polinomios en λ de grado $n-1$ con respecto a la medida espectral $d\rho$. Nótese que se puede escribir cualquier polinomio en λ de grado $n-2$ o menor como combinación lineal de los elementos en el conjunto $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n-1}$. Así, φ_n con respecto a la medida espectral $d\rho$, es ortogonal a cualquier polinomio de grado $n-2$ o menor.

Cada elemento $\mathring{\varphi}_m$ en el conjunto $\{\mathring{\varphi}_m\}_{m=1}^{n-1}$ es un polinomio que depende de λ de grado $m-1$ y ya que $m < n$, se puede concluir que φ_n es ortogonal a $\mathring{\varphi}_m$ con respecto de la medida $d\rho$, esto es,

$$\int d\rho (\varphi_n \mathring{\varphi}_m) = 0, \quad 1 \leq m < n. \quad (2.21)$$

Se reemplaza $d\rho$ con $(d\rho - d\hat{\rho}) + d\hat{\rho}$ y φ_n con el lado derecho de (1.70), entonces, para $1 \leq m < n$ se tiene

$$0 = \int \hat{\varphi}_n \hat{\varphi}_m (d\rho - d\hat{\rho}) + \sum_{j=1}^{n-1} \int (A_{nj} \hat{\varphi}_j) \hat{\varphi}_m (d\rho - d\hat{\rho}) \\ + \int \hat{\varphi}_n \hat{\varphi}_m d\hat{\rho} + \sum_{j=1}^{n-1} \int (A_{nj} \hat{\varphi}_j) \hat{\varphi}_m d\hat{\rho}$$

Se aplica la ortonormalidad dada en (2.15) al tercer y cuarto término de la ecuación anterior y se define

$$G_{nm} := \int \hat{\varphi}_n \hat{\varphi}_m (d\rho - d\hat{\rho}) \quad (2.22)$$

para obtener

$$G_{nm} + \sum_{j=1}^{n-1} A_{nj} G_{jm} + \sum_{j=1}^{n-1} A_{nj} \delta_{jm} = 0, \quad 1 \leq m < n.$$

Nótese por la definición que $G_{nm} = G_{mn}$.

Al simplificar esta expresión se obtiene el sistema de ecuaciones lineales de Gel'fand-Levitan

$$A_{nm} + G_{nm} + \sum_{j=1}^{n-1} A_{nj} G_{jm} = 0, \quad 1 \leq m < n. \quad (2.23)$$

Al analizar (1.75) se observa que es suficiente considerar (2.23) sólo para $n = 2, 3, \dots, b+1$.

2.2.1. Algoritmo del método de Gel'fand-Levitan

Dada la función de Jost $f_0(z)$:

1. Obtener $g_0(z)$ reemplazando z por z^{-1} en $f_0(z)$.
2. Calcular los ceros de $f_0(z)$.

3. En caso de ser necesario, calcular las constantes de norma de Gel'fand-Levitan, ya sea usando (2.16) o (2.17).
4. Calcular los coeficientes G_{nm} usando la igualdad (2.22).
5. Construir y resolver el sistema de Gel'fand-Levitan (2.23).
6. Usar los coeficientes A_{nm} para obtener $\{V_1, V_2, \dots, V_b\}$ mediante (1.75), con $A_{10} = 0$.

Capítulo 3

Eigenvalores de transmisión. Problema inverso

En este capítulo se introducen los eigenvalores de transmisión (ver definición 3.1) para la ecuación discreta de Schrödinger y cómo determinarlos, además de su relación con los valores del potencial. También se analiza el caso usual e inusual (ver definición 3.2).

Definición 3.1. *Un eigenvalor de transmisión es el valor de λ para el cual existen soluciones no triviales $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\dot{\psi}_n\}_{n=0}^{\infty}$ al siguiente sistema*

$$\begin{cases} -\psi_{n+1} + 2\psi_n - \psi_{n-1} + V_n\psi_n = \lambda\psi_n, & n \geq 1, \\ -\dot{\psi}_{n+1} + 2\dot{\psi}_n - \dot{\psi}_{n-1} = \lambda\dot{\psi}_n, & n \geq 1, \\ \psi_0 = 0, & \dot{\psi}_0 = 0, \\ \psi_b = \dot{\psi}_b, & \psi_{b+1} = \dot{\psi}_{b+1}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Observación 3.1. *Los eigenvalores de transmisión corresponden a los ceros de D , donde*

$$D := \begin{vmatrix} \dot{\varphi}_b & \varphi_b \\ \dot{\varphi}_{b+1} & \varphi_{b+1} \end{vmatrix}. \quad (3.2)$$

Demostración. De la primera ecuación y la primera igualdad en la tercera línea en (3.1) se observa que ψ_n es linealmente dependiente de φ_n , elemento

de la solución regular. Lo que se verifica al calcular el Wronskiano $[\psi_n, \varphi_n]$ para $n = 0$, recordando las condiciones en (1.12)

$$[\psi_0, \varphi_0] = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \psi_1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.3)$$

De manera análoga, de la segunda ecuación y la segunda igualdad en la tercera línea en (3.1) se tiene que ψ_n es linealmente dependiente de φ_n , elemento de la solución regular del sistema no perturbado.

Las últimas dos igualdades en (3.1), son equivalentes a decir que los vectores

$$\begin{bmatrix} \psi_b \\ \psi_{b+1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \psi_b \\ \psi_{b+1} \end{bmatrix},$$

son linealmente dependientes. Por consiguiente el determinante formado por los mismos debe ser nulo. Entonces, los eigenvalores de transmisión son los valores λ para los cuales los vectores

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_b \\ \dot{\varphi}_{b+1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varphi_b \\ \varphi_{b+1} \end{bmatrix},$$

son linealmente dependientes. Esto es, los eigenvalores de transmisión corresponden a los ceros de D , donde D está determinada por (3.2). \square

Cuando $V_n \equiv 0$, de (3.1) se sigue que cualquier λ es un eigenvalor de transmisión. Cuando $b = 1$ no hay valor de λ que sea eigenvalor de transmisión (ver ejemplo 5). Por consiguiente, se puede asumir que $b \geq 2$.

Teorema 3.1. *Sea el potencial V de clase \mathcal{A}_b con $V_b \neq 0$, además sea $b \geq 2$, donde b es el entero positivo que denota el soporte del potencial. Entonces, D es un polinomio en λ de grado $2b - 2$ y está dada de la siguiente forma*

$$D = \sum_{s=0}^{2b-2} D_s \lambda^s, \quad (3.4)$$

donde los coeficientes D_s con $s = 0, 1, \dots, 2b - 2$ son unívocamente determinados por el potencial V . En particular,

$$D_{2b-2} = V_b, \quad D_{2b-3} = -V_b \left(4(b-1) + \sum_{j=1}^{b-1} V_j \right). \quad (3.5)$$

Demostración. Se sustituyen en (3.2), los valores de φ_b , φ_{b+1} , $\dot{\varphi}_b$ y $\dot{\varphi}_{b+1}$ usando las igualdades dadas en (1.63) y (1.67), así

$$D = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{b-1} \dot{B}_{bi} \lambda^i & \sum_{i=0}^{b-1} B_{bi} \lambda^i \\ \sum_{k=0}^b \dot{B}_{(b+1)k} \lambda^k & \sum_{k=0}^b B_{(b+1)k} \lambda^k \end{vmatrix},$$

Al calcular el determinante, se tiene

$$\begin{aligned} D &= \left(\sum_{i=0}^{b-1} \dot{B}_{bi} \lambda^i \right) \left(\sum_{k=0}^b B_{(b+1)k} \lambda^k \right) - \left(\sum_{i=0}^{b-1} B_{bi} \lambda^i \right) \left(\sum_{k=0}^b \dot{B}_{(b+1)k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^b \sum_{i=0}^{b-1} \dot{B}_{bi} B_{(b+1)k} \lambda^{i+k} - \sum_{k=0}^b \sum_{i=0}^{b-1} B_{bi} \dot{B}_{(b+1)k} \lambda^{i+k} \\ &= \sum_{k=0}^b \sum_{i=0}^{b-1} \lambda^{i+k} (\dot{B}_{bi} B_{(b+1)k} - B_{bi} \dot{B}_{(b+1)k}). \end{aligned}$$

Se escriben los términos de la suma sobre i , con $i = b - 1, b - 2$ y $b - 3$

$$\begin{aligned} D &= \sum_{k=0}^b \left\{ (-1)^{b-1} \lambda^{(b-1)+k} \left[B_{(b+1)k} - \dot{B}_{(b+1)k} \right] \right. \\ &\quad + (-1)^{b-2} \lambda^{(b-2)+k} \left[2(b-1) B_{(b+1)k} - \left(2(b-1) + \sum_{i=1}^{b-1} V_i \right) \dot{B}_{(b+1)k} \right] \\ &\quad + (-1)^{b-3} \lambda^{(b-3)+k} \left[(b-2)(2b-3) B_{(b+1)k} - \left((b-2)(2b-3) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(b-2) \sum_{i=1}^{b-1} V_i + \sum_{1 \leq j < l \leq b-1} V_j V_l \right) \dot{B}_{(b+1)k} \right] + \dots \left. \right\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Se escriben los términos para $k = b, b - 1$ y $b - 2$. Al sustituir los valores

de $B_{(b+1)k}$ y $\dot{B}_{(b+1)k}$ en (3.6), se reducen varios términos, así

$$\begin{aligned}
D &= \lambda^{2b-1}(-1)^{b-1} [(-1)^b - (-1)^b] + \lambda^{2b-2}(-1)^{2b-2} \left[-\sum_{i=1}^{b-1} V_i \right] \\
&+ \lambda^{2b-3}(-1)^{2b-3} \left[-2(b-2) \sum_{i=1}^{b-1} V_i - \sum_{1 \leq j < l \leq b-1} (-1)^b V_j V_l \right] + \dots \\
&+ \lambda^{2b-2}(-1)^{2b-2} \left(\sum_{i=1}^b V_i \right) + \lambda^{2b-3}(-1)^{2b-3} \left(2bV_b - 2 \sum_{i=1}^b V_i \right) \\
&+ \dots + \lambda^{2b-3}(-1)^{2b-3} \left(2(b-1) \sum_{i=1}^b V_i + \sum_{1 \leq j < l \leq b} V_j V_l \right) + \dots
\end{aligned}$$

Agrupando términos obtenemos

$$\begin{aligned}
D &= \lambda^{2b-2} \left(\sum_{i=1}^b V_i - \sum_{i=1}^{b-1} V_i \right) + \lambda^{2b-3} \left(-2(b-2) \sum_{i=1}^{b-1} V_i - \sum_{1 \leq j < l \leq b-1} V_j V_l \right. \\
&\left. + 2bV_b - 2 \sum_{i=1}^b V_i + 2(b-1) \sum_{i=1}^b V_i + \sum_{1 \leq j < l \leq b} V_j V_l \right) + \dots
\end{aligned}$$

Finalmente, al simplificar, se tiene que

$$\begin{aligned}
D &= \lambda^{2b-2} V_b + \lambda^{2b-3} \left[V_b \left(4(b-1) + \sum_{i=1}^b V_i \right) \right] + \dots \\
&= \sum_{s=0}^{2b-2} D_s \lambda^s.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.2. *Sea V de clase \mathcal{A}_b con $V_b \neq 0$, además asúmase que $b \geq 2$, donde b es el entero positivo que denota el soporte del potencial. Entonces, la cantidad D definida en (3.2), como función de λ , tiene exactamente $2b - 2$ ceros y por lo tanto el número de eigenvalores de transmisión para (3.1) es $2b - 2$. En términos de los eigenvalores de transmisión $\lambda_1, \dots, \lambda_{2b-2}$, se tiene*

$$D = V_b \prod_{j=1}^{2b-2} (\lambda - \lambda_j). \quad (3.7)$$

$$\sum_{j=1}^{2b-2} \lambda_j = 4(b-1) + \sum_{j=1}^{b-1} V_j. \quad (3.8)$$

Se define la cantidad E como

$$E := \frac{D}{V_b}, \quad (3.9)$$

así, los eigenvalores de transmisión corresponden a los ceros de E .

Demostración. En el teorema 3.1 se ha demostrado que los ceros de D corresponden a los eigenvalores de transmisión y que $D(\lambda)$ es un polinomio de grado $2(b-1)$, siendo el término principal $V_b \lambda^{2b-2}$. Dado esto se establece (3.7).

Al comparar los coeficientes correspondientes a λ^{2b-2} en las igualdades (3.4) y (3.7) se obtiene (3.8).

Finalmente, de manera directa, de la definición (3.9) se sigue que conocer E , es equivalente a conocer los eigenvalores de transmisión. \square

Definición 3.2. Se dice que ocurre el caso inusual para (3.1) cuando se cumple que

$$\sum_{j=1}^{2b-2} \lambda_j = 4(b-1), \quad (3.10)$$

donde λ_j denota los eigenvalores de transmisión para $j = 1, \dots, (2b-2)$.

En el siguiente teorema se estudia como expresar el polinomio D en términos del parámetro espectral z en lugar del parámetro λ .

Teorema 3.3. Sea el potencial V de clase \mathcal{A}_b con $V_b \neq 0$, además sea $b \geq 2$, donde b es el entero positivo que denota el soporte del potencial. Entonces:

a) D puede ser expresado en términos del parámetro espectral z mediante

$$D = \frac{1}{z - z^{-1}}(f_0 - g_0), \quad (3.11)$$

donde f_0 es la función de Jost y g_0 es la función dada en (1.34). Esta igualdad se cumple también para $b = 1$.

b) La cantidad $(f_0 - 1)/V_b$ es unívocamente determinada por los eigenvalores de transmisión para (3.1). La cantidad K_{01}/V_b también es determinada de manera única por los eigenvalores de transmisión, donde K_{01} es el coeficiente de z en la expansión polinomial de la función de Jost f_0 en términos de z .

c) La identidad (3.8) es equivalente a

$$\sum_{j=1}^{2b-2} \lambda_j = 4(b-1) + \left(\frac{K_{01}}{V_b} - 1 \right) V_b. \quad (3.12)$$

d) A menos que $K_{01}/V_b = 1$, donde este caso corresponde al caso inusual (ver definición 3.2), V_b se determina de manera única por los eigenvalores de transmisión al resolver (3.12) para V_b .

e) A menos que se encuentre en el caso inusual, los eigenvalores de transmisión determinan de manera única la función de Jost f_0 . Esto es, a menos que se encuentre en el caso inusual, los eigenvalores de transmisión determinan de manera única el conjunto ordenado de valores del potencial $\{V_1, \dots, V_b\}$.

Demostración. a) Se sustituyen en (3.2) las expresiones en términos de z para φ_n y $\dot{\varphi}_n$. Recuérdese que

$$\dot{\varphi}_n = \frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}}, \quad \varphi_n = \frac{1}{z - z^{-1}}(g_0 f_n - f_0 g_n),$$

entonces

$$\begin{aligned} D &= \dot{\varphi}_b \varphi_{b+1} - \varphi_b \dot{\varphi}_{b+1} \\ &= \left(\frac{z^b - z^{-b}}{z - z^{-1}} \right) \left(\frac{g_0 f_{b+1} - f_0 g_{b+1}}{z - z^{-1}} \right) - \left(\frac{g_0 f_b - f_0 g_b}{z - z^{-1}} \right) \left(\frac{z^{b+1} - z^{-(b+1)}}{z - z^{-1}} \right) \\ &= \frac{(z^b - z^{-b})(g_0 f_{b+1} - f_0 g_{b+1}) - (g_0 f_b - f_0 g_b)(z^{b+1} - z^{-(b+1)})}{(z - z^{-1})^2}. \end{aligned}$$

Cuando el potencial es de clase \mathcal{A}_b , se cumple (1.19), por lo que

$$f_{b+1} = z^{b+1} = z f_b, \quad g_{b+1} = z^{-(b+1)} = z^{-1} g_b.$$

Al sustituir esto en la expresión para D se obtiene

$$\begin{aligned} D &= \frac{(z^b - z^{-b})(zg_0f_b - z^{-1}f_0g_b) - (g_0f_b - f_0g_b)(z^{b+1} - z^{-(b+1)})}{(z - z^{-1})^2} \\ &= \frac{g_0f_b(z^{b+1} - z^{b-1}) - f_0g_b(z^{-(b+1)} - z^{-b+1})}{(z - z^{-1})^2} \\ &= \frac{(f_0 - g_0)(z - z^{-1})}{(z - z^{-1})^2} = \frac{1}{(z - z^{-1})}(f_0 - g_0). \end{aligned}$$

b) En (3.9) se definió que $E = D/V_b$, sustituyendo en (3.11) se tiene

$$EV_b = \frac{f_0 - g_0}{z - z^{-1}},$$

entonces

$$\begin{aligned} (z - z^{-1})E &= \frac{(f_0 - g_0)}{V_b} \\ &= \frac{f_0 - 1}{V_b} - \frac{g_0 - 1}{V_b}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

En el teorema 3.2, se ha visto que los eigenvalores de transmisión determinan de manera única a E . Además, como resultado del teorema 1.3 se sabe que $f_0 - 1$ es un polinomio en z de grado $2b - 1$ y que la cantidad $g_0 - 1$ es un polinomio en z^{-1} también de grado $2b - 1$.

Entonces dado $(z - z^{-1})E$ se puede determinar de manera única la cantidad $(f_0 - 1)/V_b$. Del teorema 1.3, se sigue que $(f_0 - 1)/V_b$ es una función positiva (ver definición 1.5) y que $(g_0 - 1)/V_b$ es una función negativa (ver definición 1.5) de forma que si se escribe $(z - z^{-1})E$ en términos de z se observa que los términos correspondientes a las potencias positivas de z forman $(f_0 - 1)/V_b$ y que de los términos correspondientes a las potencias negativas de z se obtiene $(g_0 - 1)/V_b$.

Conociendo el polinomio $(f_0 - 1)/V_b$, se obtiene K_{01}/V_b , ya que es el coeficiente correspondiente a z . También se puede usar la expresión en (2.7) con $n = 0$ y $m = 1$ para determinar este valor.

c) En la segunda igualdad de (1.32) se ha establecido que $K_{01} = \sum_{j=1}^b V_j$,

lo cual puede escribirse también como

$$\frac{K_{01}}{V_b} = 1 + \frac{1}{V_b} \sum_{j=1}^{b-1} V_j, \quad (3.14)$$

lo que es igual a

$$\left(\frac{K_{01}}{V_b} - 1 \right) V_b = \sum_{j=1}^{b-1} V_j. \quad (3.15)$$

Se sustituye este resultado en (3.8) y se obtiene lo establecido en (3.12).

d) En el inciso b) se demostró que K_{01}/V_b puede ser determinado de manera única mediante los eigenvalores de transmisión. Por consiguiente, V_b se puede determinar unívocamente al resolver (3.12), siempre y cuando la desigualdad

$$\frac{K_{01}}{V_b} \neq 1$$

se cumpla.

e) De los resultados en b) y f) se tiene que $(f_0 - 1)/V_b$ y V_b se pueden determinar de manera única mediante los eigenvalores de transmisión, con la excepción del caso inusual. Esto es, en el caso usual, los eigenvalores de transmisión determinan unívocamente a f_0 . Finalmente, del teorema 2.1 se tiene que f_0 determina de manera única a V_b . \square

El siguiente resultado muestra que un eigenvalor de transmisión no puede ocurrir en un cero de f_0 .

Proposición 3.4. *Sea el potencial V de clase \mathcal{A}_b para algún $b \geq 2$. Sea f_0 la función de Jost, g_0 la cantidad dada en (1.34) y D la cantidad definida en (3.2). Sea z el parámetro espectral dado en (1.5). Entonces, D y f_0 no pueden anularse simultáneamente para ningún valor de z .*

Demostración. De lo establecido en (3.11) puede observarse que si D y f_0 se anulan en el mismo valor de z con $z \neq \pm 1$, entonces g_0 también debe anularse en ese valor, lo que contradice lo establecido en el teorema 1.4e). Por tanto, D y f_0 no pueden anularse simultáneamente en ningún z con $z \neq \pm 1$.

Por otro lado, usando las expansiones para f_0 , g_0 y $z - z^{-1}$ alrededor de $z = 1$, se obtiene la expansión de D alrededor de $z = 1$, esto es,

$$D = \frac{f_0 - g_0}{z - z^{-1}} = \frac{2(z-1)\dot{f}_0(1)}{2(z-1) + O((z-1)^2)} = \dot{f}_0(1)(1 - O(z-1)),$$

entonces

$$D = \dot{f}_0(1) + O(z-1), \quad z \rightarrow 1 \in \mathbf{C}. \quad (3.16)$$

Como resultado de (1.60) se sabe que $\dot{f}_0(1) \neq 0$ si $f_0(1) = 0$. Así, D y f_0 no pueden anularse simultáneamente para $z = 1$. De forma análoga, se establece que D y f_0 tampoco pueden anularse simultáneamente para $z = -1$. \square

El próximo teorema estudia la conexión entre los eigenvalores de transmisión y las energías en las cuales la matriz de dispersión del sistema perturbado (1.1) y el sistema no perturbado (1.4) coinciden. Se muestra que en un eigenvalor de transmisión, la matriz de dispersión S del sistema perturbado vale uno. Con la posible excepción de $\lambda = 0$ y $\lambda = 4$, se presenta que para cualquier valor de λ en el cual $S = 1$ es un eigenvalor de transmisión. También se dan algunas condiciones necesarias y suficientes para que $\lambda = 0$ y $\lambda = 4$ sean eigenvalores de transmisión del sistema (3.1).

Teorema 3.5. *Sea el potencial V de clase \mathcal{A}_b con $V_b \neq 0$, además sea $b \geq 2$. Entonces,*

- a) *En un eigenvalor de transmisión λ , la matriz de dispersión S definida en (1.35) toma el valor de 1. Esto es, en un eigenvalor de transmisión λ , la dispersión del sistema perturbado (1.1) con condición de frontera de Dirichlet (1.2) coincide con la dispersión del sistema no perturbado (1.4) con condición de frontera de Dirichlet (1.2).*
- b) *Con la posible excepción de $z = 1$ y $z = -1$, correspondientes a $\lambda = 0$ y $\lambda = 4$ respectivamente, cada valor de λ en el cual la matriz de dispersión toma el valor de 1, es un eigenvalor de transmisión para (3.1).*
- c) *Si $S = 1$ en $\lambda = 0$, entonces $\lambda = 0$ es un eigenvalor de transmisión si y sólo si f_0 es distinto de cero y \dot{f}_0 es cero en $\lambda = 0$.*
- d) *Si $S = 1$ en $\lambda = 4$, entonces $\lambda = 4$ es un eigenvalor de transmisión si y sólo si $f_0 \neq 0$ y $\dot{f}_0 = 0$ en $\lambda = 4$.*

Demostración. a) Como resultado de (1.5), se tiene que $\lambda = 0$ corresponde $z = 1$ y $\lambda = 4$ corresponde a $z = -1$, mediante una relación uno a uno. Con la igualdad en (1.35), se reescribe (3.11) como

$$\frac{D}{f_0} = \frac{1}{z - z^{-1}} \left(1 - \frac{g_0}{f_0} \right),$$

entonces

$$(z - z^{-1}) \frac{D}{f_0} = 1 - S. \quad (3.17)$$

Es conocido que los eigenvalores de transmisión corresponden a los ceros de D . Sea \tilde{z} un cero de D . Como resultado de la proposición 3.4 se tiene que $f_0(\tilde{z}) \neq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} (z - z^{-1}) \frac{D}{f_0} \Big|_{\tilde{z}} &= 1 - S \Big|_{\tilde{z}} \\ 0 &= 1 - S(\tilde{z}) \\ S(\tilde{z}) &= 1. \end{aligned}$$

b) Si $S = 1$ para algún \tilde{z} , con $\tilde{z} \neq \pm 1$ se tiene

$$(z - z^{-1}) \frac{D}{f_0} = 0,$$

por lo tanto $D = 0$ para \tilde{z} . De manera que \tilde{z} es un cero de D , por consiguiente un eigenvalor de transmisión.

c) Se usan las expansiones de f_0 y g_0 alrededor de $z = 1$ dadas en (1.61) para obtener una expresión de la expansión de S alrededor de $z = 1$, así

$$S(z) = \frac{f_0(1) + (z-1)\dot{f}_0(1) + O((z-1)^2)}{f_0(1) - (z-1)\dot{f}_0(1) + O((z-1)^2)}, \quad z \rightarrow 1 \in \mathbb{C},$$

de donde

$$S(z) = \begin{cases} 1 - 2(z-1)\frac{\dot{f}_0(1)}{f_0(1)} + O((z-1)^2), & f_0(1) \neq 0 \\ -1 + O((z-1)^2), & f_0(1) = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

de este modo, $S(1) = 1$ si $f_0(1) \neq 0$ y $S(-1) = -1$ si $f_0(1) = 0$.

Por otro lado, de la expresión en (3.18) se tiene que $D = 0$ en $z = 1$ si y sólo si $\dot{f}_0(1) = 0$. Por lo tanto, en $z = 1$ se tiene que $S = 1$ y $D = 0$ si y sólo si $f_0(1) \neq 0$ y $\dot{f}_0(1) = 0$.

d) Se sigue un procedimiento análogo para demostrar que en $z = -1$ se tiene que $S = 1$ y $D = 0$ si y sólo si $f_0(-1) \neq 0$ y $\dot{f}_0(-1) = 0$. \square

En el siguiente teorema se muestran varias formas de caracterizar el caso inusual.

Teorema 3.6. *Sea el potencial V de clase \mathcal{A}_b con $V_b \neq 0$, además sea $b \geq 2$. Entonces, el caso inusual para el problema de eigenvalores de transmisión de (3.1) ocurre si y sólo si una de las siguientes condiciones equivalentes se satisface:*

a) *Los eigenvalores de transmisión cumplen (3.10).*

b) *El potencial V satisface*

$$\sum_{j=1}^{b-1} V_j = 0. \quad (3.19)$$

c) *El coeficiente K_{01} correspondiente a z en la expresión dada en (1.31) es igual a V_b .*

d) *El coeficiente $K_{0(2b-2)}$ correspondiente a z^{2b-2} en la expresión (1.31) es cero.*

e) *Los coeficientes de z y z^{2b-1} en la expansión polinomial en z de $(f_0 - 1)/V_b$ son iguales a 1.*

f) *El coeficiente de z^{2b-2} en la expansión polinomial en z de $f_0 - 1/V_b$ es cero.*

g) *El coeficiente D_{2b-3} correspondiente a λ^{2b-3} es $-4(b-1)V_b$.*

h) *El coeficiente de λ^{2b-3} en la expresión para la cantidad E definida en (3.9) es $-4(b-1)$.*

Demostración.

a) \rightarrow b) De (3.12) para el caso inusual y de (3.15) se tiene que

$$0 = \left(\frac{K_{01}}{V_b} - 1 \right) = \sum_{j=1}^{b-1} V_j.$$

b) \rightarrow c) Usando (3.10) en segunda igualdad dada en (1.32)

$$K_{01} = \sum_{j=1}^b V_j = V_b + \sum_{j=1}^{b-1} V_j = V_b.$$

c) \rightarrow d) Se reescribe la primera igualdad en (1.33) para obtener

$$K_{0(2b-2)} = V_b \sum_{j=1}^{b-1} V_j = V_b \left(\sum_{j=1}^b V_j - V_b \right) = V_b(K_{01} - V_b),$$

usando el resultado anterior se tiene $K_{0(2b-2)} = 0$.

d) \rightarrow e) De (1.31) se tiene

$$\frac{f_0 - 1}{V_b} = \left(\frac{K_{01}}{V_b} \right) z + \dots + \left(\frac{K_{0(2b-2)}}{V_b} \right) z^{2b-2} + \left(\frac{K_{0(2b-1)}}{V_b} \right) z^{2b-1}. \quad (3.20)$$

Por lo tanto, los coeficientes correspondientes a z y z^{2b-1} son $\frac{K_{01}}{V_b}$ y $\frac{K_{0(2b-1)}}{V_b}$ respectivamente. De la segunda igualdad en (1.33) se tiene que

$$K_{0(2b-1)} = V_b,$$

por consiguiente

$$\frac{K_{0(2b-1)}}{V_b} = 1 \quad \text{siempre.}$$

Por otro lado, de (3.14), se tiene

$$\frac{K_{01}}{V_b} = 1 + \frac{1}{V_b} \sum_{j=1}^{b-1} V_j = 1 + \frac{K_{0(2b-2)}}{V_b} = 1.$$

e) \rightarrow f) De la expresión (3.20), se tiene que el coeficiente correspondiente a z^{2b-2} es $\frac{K_{0(2b-2)}}{V_b}$, así, usando la primera igualdad en (1.33) se obtiene

$$\frac{K_{0(2b-2)}}{V_b} = \sum_{j=1}^{b-1} V_j = \frac{K_{0(2b-1)}}{V_b} \left(\frac{K_{01}}{V_b} - 1 \right) V_b = 0.$$

$f) \rightarrow g)$ En (3.5) se ha establecido que $D_{2b-3} = -V_b \left(4(b-1) + \sum_{j=1}^{b-1} V_j \right)$, lo cual se puede reescribir como

$$D_{2b-3} = -V_b \left(4(b-1) + \frac{K_{0(2b-2)}}{V_b} \right) = -V_b [4(b-1)].$$

$g) \rightarrow h)$ De (3.7) se obtiene de manera directa que el coeficiente de λ^{2b-3} es

$$\frac{D_{2b-3}}{V_b} = -4(b-1).$$

$h) \rightarrow a)$ Usando (3.4) se tiene que

$$E = \frac{D_{2b-2}}{V_b} \lambda^{2b-2} + \frac{D_{2b-3}}{V_b} \lambda^{2b-3} + \dots + D_0.$$

Por otro lado, de (3.7) la expresión para E es la siguiente

$$E = \lambda^{2b-2} + \left(\sum_{j=1}^{2b-2} \lambda_j \right) \lambda^{2b-3} + \dots + \prod_{j=1}^{2b-2} \lambda_j.$$

Al comparar los coeficientes correspondientes al término λ^{2b-3} se tiene

$$\frac{D_{2b-3}}{V_b} = -4(b-1) = \sum_{j=1}^{2b-2} \lambda_j.$$

□

Capítulo 4

Ejemplos

El objetivo principal de este capítulo es mostrar cómo recuperar el potencial dados los eigenvalores de transmisión, mediante el método de Marchenko y el método de Gel'fand-Levitan e ilustrar el caso inusual. Adicionalmente, se muestra cómo determinar los valores del potencial usando el método algebraico.

En el problema inverso, los datos conocidos son los eigenvalores de transmisión. En los próximos ejemplos veremos cómo recuperar los valores del potencial a partir de los eigenvalores de transmisión, mediante el método de Marchenko y el método de Gel'fand-Levitan.

4.1. Ejemplo 1, $b=2$, $f_0(z)$ con un estado ligado.

En este ejemplo se obtiene la expresión para f_0 en términos de los eigenvalores de transmisión. Se ilustra cómo recuperar los valores del potencial para el caso $b = 2$.

Sea $b = 2$. Sean dados λ_1 y λ_2 , eigenvalores de transmisión. Determinar V_1 y V_2 .

Primero veremos en general, cómo obtener $f_0(z)$ en el caso $b = 2$ dados los eigenvalores de transmisión.

Dados λ_1 y λ_2 , se construye E en términos de z usando la relación (1.7)

$$\begin{aligned} E &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (2 - z - z^{-1} - \lambda_1)(2 - z - z^{-1} - \lambda_2) \\ &= z^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 - 4)z + (6 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2 - 4)z^{-1} + z^{-2} \end{aligned}$$

se multiplica por $(z - z^{-1})$ para obtener

$$\begin{aligned} (z - z^{-1})E &= z^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 - 4)z^2 + (5 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)z \\ &\quad - (5 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)z^{-1} - (\lambda_1 + \lambda_2 - 4)z^{-2} - z^{-3} \\ &= \frac{f_0 - 1}{V_2} - \frac{g_0 - 1}{V_2}. \end{aligned}$$

De manera que

$$\frac{f_0 - 1}{V_2} = z^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 - 4)z^2 + (5 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)z,$$

entonces

$$f_0 = V_2[z^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 - 4)z^2 + (5 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)z] + 1. \quad (4.1)$$

Ahora veremos un caso particular. Sean

$$\lambda_1 = \frac{5}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{2}. \quad (4.2)$$

Sustituyendo los valores de λ_1 y λ_2 en (4.1) se obtiene f_0 . Así

$$f_0 = V_2 \left(z^3 + z^2 + \frac{5}{4}z \right) + 1.$$

Para obtener V_2 se usa la relación en (3.12), entonces

$$5 = 4 + \left(\frac{5}{4} - 1 \right) V_2,$$

al resolver se tiene que $V_2 = 4$. Por lo tanto

$$f_0(z) = 4z^3 + 4z^2 + 5z + 1. \quad (4.3)$$

Método de Marchenko

Dado $f_0(z)$ como en (4.3) y los eigenvalores de transmisión (4.2), se usa el método de Marchenko para determinar V_1 y V_2 .

Siguiendo el algoritmo del método, el primer paso es obtener $g_0(z)$ reemplazando z por z^{-1} en (4.3), de esta forma

$$g_0(z) = 4z^{-3} + 4z^{-2} + 5z^{-1} + 1. \quad (4.4)$$

Usamos (4.3) y (4.4) para construir la matriz $S(z)$ mediante (1.35), así

$$S(z) = \frac{4z^{-3} + 4z^{-2} + 5z^{-1} + 1}{4z^3 + 4z^2 + 5z + 1} = \frac{4 + 4z + 5z^2 + z^3}{z^3(1 + 5z + 4z^2 + 4z^3)}.$$

Se calculan los ceros de $f_0(z)$, los cuales son

$$\begin{aligned} z_1 &\approx -0.233412, & z_2 &\approx -0.383294 + 0.96133i, \\ z_3 &\approx -0.383294 - 0.96133i. \end{aligned}$$

Para los siguientes cálculos, sólo nos interesan los ceros de $f_0(z)$ en $|z| = 1$, por lo que trabajaremos únicamente con z_1 . Una observación importante es que z_1 corresponde a un estado ligado ya que $z_1 \in (-1, 0)$.

En general para $b = 2$, el sistema de Marchenko está dado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} K_{01} + M_1 + K_{01}M_2 + K_{02}M_3 + K_{03}M_4 &= 0 \\ K_{02} + M_2 + K_{01}M_3 + K_{02}M_4 + K_{03}M_5 &= 0 \\ K_{03} + M_3 + K_{01}M_4 + K_{02}M_5 + K_{03}M_6 &= 0 \\ K_{12} + M_3 + K_{12}M_4 &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

El próximo paso es construir el núcleo de Marchenko, donde

$$M_n = \frac{1}{2\pi i} \oint (1 - S)z^{n-1} + c_1^2 z_1^n,$$

observe que, la contribución de la integral correspondiente al polo z_1 se anula con el término de la suma, por lo tanto $M_n = 0$ para $n \geq 3$. Así, la

contribución a M_n depende solamente del residuo en el polo $z = 0$, entonces

$$\begin{aligned}M_1 &= -\text{Res}[S, 0] = -69 \\M_2 &= -\text{Res}[zS, 0] = 16 \\M_3 &= -\text{Res}[z^2S, 0] = -4.\end{aligned}$$

Así, el sistema de Marchenko a resolver es

$$\begin{aligned}K_{01} - 69 + 16K_{01} - K_{02} &= 0, \\K_{02} + 16 - 4K_{01} &= 0, \\K_{03} - 4 &= 0, \\K_{12} - 4 &= 0.\end{aligned}$$

De la tercera y última ecuación del sistema se obtienen $K_{03} = 4$ y $K_{12} = 4$. De la segunda ecuación, se tiene $K_{02} = 4K_{01} - 16$, se sustituye en la primera ecuación, entonces

$$K_{01} - 69 + 16K_{01} - 16K_{01} + 64 = 0.$$

Resolviendo, $K_{01} = 5$, por lo tanto $K_{02} = 4$.

Finalmente, de (1.30) y (1.28), se tiene

$$\begin{aligned}V_1 &= K_{01} - K_{12} = 5 - 4 = 1, \\V_2 &= K_{12} - K_{23} = 4 + 0 = 4.\end{aligned}$$

Método de Gel'fand-Levitan.

Dado $f_0(z)$ como en (4.3) y los eigenvalores de transmisión (4.2), se usa el método de Gel'fand-Levitan para determinar V_1 y V_2 .

Siguiendo el algoritmo del método, los primeros dos puntos los hemos calculado anteriormente.

En general, el sistema de Gel'fand-Levitan para $b = 2$ está dado por

$$\begin{aligned}A_{21} + G_{21} + A_{21}G_{11} &= 0, \\A_{31} + G_{31} + A_{31}G_{11} + A_{32}G_{21} &= 0, \\A_{32} + G_{32} + A_{31}G_{12} + A_{32}G_{22} &= 0.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Procedemos a calcular los coeficientes G_{nm} , donde

$$G_{nm} = \int_{-\infty}^0 \dot{\varphi}_n \dot{\varphi}_m C_1^2 \delta(\lambda - \mu_1) d\lambda + \int_0^4 \dot{\varphi}_n \dot{\varphi}_m (d\rho - d\dot{\rho}) \\ + \int_4^{\infty} \dot{\varphi}_n \dot{\varphi}_m C_1^2 \delta(\lambda - \mu_1) d\lambda.$$

Para esto se han usado las medidas espectrales $d\rho$ y $d\dot{\rho}$ dadas en (2.18) y (2.10) respectivamente.

Ya que $z_1 \in (-1, 0)$, o de forma equivalente, μ_1 se encuentra en el intervalo $(4, \infty)$, se tiene

$$G_{nm} = C_1^2 \dot{\varphi}_n(z_1) \dot{\varphi}_m(z_1) + \int_0^4 \dot{\varphi}_n \dot{\varphi}_m (d\rho - d\dot{\rho}),$$

al reescribir la integral en la expresión anterior en términos del parámetro θ usando (2.20) y (2.12), se obtiene

$$G_{nm} = C_1^2 \dot{\varphi}_n(z_1) \dot{\varphi}_m(z_1) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\theta) \sin(m\theta) \left(\frac{1}{f_0 g_0} - 1 \right) d\theta,$$

donde f_0 y g_0 como en (4.3) y (4.4) respectivamente.

Usando la relación en (2.17) obtenemos el valor de la constante de norma de Gel'fand-Levitan $C_1^2 = 0.070990$.

Por otro lado, en (1.17) se expresa la forma de los elementos de la solución regular de (1.4) en términos del parámetro z . Así,

$$\dot{\varphi}_2 = -4.51768, \quad \dot{\varphi}_3 = 19.4094.$$

Por lo tanto los valores de los coeficientes G_{nm} son

$$G_{11} = 0, \quad G_{12} = -1, \quad G_{22} = 0.999995, \\ G_{31} = 0.999995, \quad G_{32} = -5.99997.$$

Se sustituyen estos valores en (4.6) y se resuelve el sistema. De ahí se obtiene que

$$A_{21} = 1, \\ A_{31} = 4.000005, \\ A_{32} = 5.$$

Finalmente, usamos los valores de A_{nm} para obtener los valores del potencial. Siguiendo la igualdad (1.75) obtenemos

$$\begin{aligned} V_1 &= A_{21} - A_{10} = 1, \\ V_2 &= A_{32} - A_{21} = 5 - 1 = 4. \end{aligned}$$

4.2. Ejemplo 2, $b=2$, $f_0(z)$ sin estados ligados.

En este ejemplo se ilustra cómo recuperar los valores del potencial para el caso $b = 2$, mediante el método de Marchenko y el método de Gel'fand-Levitan, cuando ningún cero de la función de Jost corresponde a un estado ligado.

Sea $b = 2$. Sean dados λ_1 y λ_2 , eigenvalores de transmisión. Determinar V_1 y V_2 .

Sean

$$\lambda_1 = \frac{9 + \sqrt{17}}{4} \quad \lambda_2 = \frac{9 - \sqrt{17}}{4}. \quad (4.7)$$

La función de Jost para este problema es

$$f_0(z) = -\frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{4}z^2 + 1. \quad (4.8)$$

Método de Marchenko

Dada la función de Jost (4.8) y los eigenvalores de transmisión (4.7), se usa el método de Marchenko para determinar los valores del potencial.

Siguiendo el algoritmo del método, construimos $g_0(z)$ al reemplazar z por z^{-1} en (4.8)

$$g_0(z) = -\frac{1}{2}z^{-3} - \frac{1}{4}z^{-2} + 1. \quad (4.9)$$

Con la ayuda de (1.35) se obtiene la expresión para la matriz $S(z)$

$$S(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-3} - \frac{1}{4}z^{-2} + 1}{-\frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{4}z^2 + 1} = \frac{4z^3 - z - 2}{z^3(4 - z^2 - 2z^3)}.$$

Calculamos los ceros de $f_0(z)$, los cuales son

$$\begin{aligned} z_1 &\approx 1.11339, & z_2 &\approx -0.806693 + 1.07031i, \\ z_3 &\approx -0.806693 - 1.07031i. \end{aligned}$$

Ninguno de ellos corresponde a un estado ligado ni se encuentra en el círculo unitario $|z| = 1$. Por lo tanto el núcleo de Marchenko no contendrá términos que se sumen. En este caso está dado por

$$M_n = \frac{1}{2\pi i} \oint (1 - S)z^{n-1} dz,$$

donde $M_n = 0$ para $n \geq 4$, ya que la única contribución es la del residuo en el polo $z = 0$. Así,

$$\begin{aligned} M_1 &= -\text{Res}[S, 0] = \frac{1}{8} \\ M_2 &= -\text{Res}[zS, 0] = \frac{1}{4} \\ M_3 &= -\text{Res}[z^2S, 0] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Entonces, el sistema de Marchenko tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} K_{01} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}K_{01} + \frac{1}{2}K_{02} &= 0, \\ K_{02} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}K_{01} &= 0, \\ K_{03} + \frac{1}{2} &= 0, \\ K_{12} + \frac{1}{2} &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución es

$$K_{01} = 0, \quad K_{02} = -\frac{1}{4}, \quad K_{03} = -\frac{1}{2}, \quad K_{12} = -\frac{1}{2}.$$

El último punto del algoritmo es calcular los valores del potencial utilizando los K_{nm} . De (1.30) y (1.28), se tiene

$$\begin{aligned} V_1 &= K_{01} - K_{12} = 0 - \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \\ V_2 &= K_{12} - K_{23} = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Método de Gel'fand-Levitan

Ahora se usa el método de Gel'fand-Levitan para encontrar el potencial. Siguiendo el algoritmo del método, la función de Jost y su relativa están dadas como en (4.8) y (4.9), respectivamente.

Usando las medidas espectrales (2.11) y (2.19), los coeficientes G_{nm} se determinarán mediante

$$G_{nm} = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \oint \left(1 - \frac{1}{f_0 g_0}\right) (z^n - z^{-n})(z^m - z^{-m}) \frac{dz}{z},$$

o usando las medidas espectrales (2.20) y (2.12)

$$G_{nm} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(n\theta) \sin(m\theta) \left(\frac{1}{f_0 g_0} - 1\right) d\theta.$$

Así,

$$\begin{aligned} G_{11} &= 0, & G_{12} &= -\frac{1}{2}, & G_{22} &= \frac{1}{4}, \\ G_{31} &= \frac{1}{4}, & G_{32} &= -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, al resolver el sistema (4.6) se tiene

$$\begin{aligned} A_{21} &= \frac{1}{2}, \\ A_{31} &= -\frac{9}{16}, \\ A_{32} &= 0. \end{aligned}$$

De manera que los valores del potencial son

$$\begin{aligned} V_1 &= A_{21} - A_{10} = \frac{1}{2} + 0, \\ V_2 &= A_{32} - A_{21} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4.3. Ejemplo 3, $b=3$, $f_0(z)$ con un estado ligado.

En este ejemplo se encuentra una expresión para f_0 , con sus coeficientes en términos de los eigenvalores de transmisión, para $b=3$. Además ilustra cómo recuperar el potencial mediante el método de Marchenko y el método de Gel'fand-Levitan.

Sea $b = 3$. Sean dados $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 , eigenvalores de transmisión. Determinar V_1, V_2 y V_3 .

Primero nos interesa encontrar una expresión para la función de Jost f_0 , donde sus coeficientes dependan de los datos dados, en este caso, los eigenvalores de transmisión.

Entonces, usando los eigenvalores de transmisión, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 se construye E mediante la relación (3.9), de esta forma

$$\begin{aligned} E &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) \\ &= \lambda^4 - \left(\sum_{i=1}^4 \lambda_i \right) \lambda^3 + \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j \right) \lambda^2 + \left(\sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \right) \lambda + \prod_{i=1}^4 \lambda_i. \end{aligned}$$

Reescribimos en términos del parámetro z para obtener

$$\begin{aligned} E &= z^4 + \left(\sum_{i=1}^4 \lambda_i - 8 \right) z^3 + \left(28 - 6 \sum_{i=1}^4 \lambda_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j \right) z^2 \\ &+ \left(\sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \lambda_i \lambda_j \lambda_k - 4 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j + 15 \sum_{i=1}^4 \lambda_i - 56 \right) z \\ &+ \left(70 - 20 \sum_{i=1}^4 \lambda_i + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \lambda_i \lambda_j \lambda_k + \prod_{i=1}^4 \lambda_i \right) \\ &+ \left(\sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \lambda_i \lambda_j \lambda_k - 4 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j + 15 \sum_{i=1}^4 \lambda_i - 56 \right) z^{-1} \\ &+ \left(28 - 6 \sum_{i=1}^4 \lambda_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j \right) z^{-2} + \left(\sum_{i=1}^4 \lambda_i - 8 \right) z^{-3} + z^{-4}. \end{aligned}$$

De manera que, al multiplicar por $(z - z^{-1})$ obtenemos

$$\begin{aligned}
(z - z^{-1})E = & z^5 + \left(\sum_{i=1}^4 \lambda_i - 8 \right) z^4 + \left(27 - 6 \sum_{i=1}^4 \lambda_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j \right) z^3 \\
& + \left(\sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \lambda_i \lambda_j \lambda_k - 4 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j + 14 \sum_{i=1}^4 \lambda_i - 48 \right) z^2 \\
& + \left(70 - 20 \sum_{i=1}^4 \lambda_i + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \lambda_i \lambda_j \lambda_k + \prod_{i=1}^4 \lambda_i \right) z \\
& - \left(70 - 20 \sum_{i=1}^4 \lambda_i + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \lambda_i \lambda_j \lambda_k + \prod_{i=1}^4 \lambda_i \right) z^{-1} \\
& - \left(\sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \lambda_i \lambda_j \lambda_k - 4 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j + 14 \sum_{i=1}^4 \lambda_i - 48 \right) z^{-2} \\
& - \left(27 - 6 \sum_{i=1}^4 \lambda_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j \right) z^{-3} - \left(\sum_{i=1}^4 \lambda_i - 8 \right) z^{-4} - z^{-5}.
\end{aligned}$$

Finalmente, la expresión para f_0 en términos de los eigenvalores de transmisión es

$$\begin{aligned}
f_0 = & V_3 \left[z^5 + \left(\sum_{i=1}^4 \lambda_i - 8 \right) z^4 + \left(27 - 6 \sum_{i=1}^4 \lambda_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j \right) z^3 \right. \\
& + \left(\sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \lambda_i \lambda_j \lambda_k - 4 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j + 14 \sum_{i=1}^4 \lambda_i - 48 \right) z^2 \\
& \left. + \left(70 - 20 \sum_{i=1}^4 \lambda_i + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \lambda_i \lambda_j \lambda_k + \prod_{i=1}^4 \lambda_i \right) z \right] + 1. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Veamos un ejemplo particular. Sean

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = \frac{9 + \sqrt{17}}{4}, \quad \lambda_4 = \frac{9 - \sqrt{17}}{4}. \quad (4.11)$$

Primero obtenemos V_3 mediante la relación (3.12)

$$V_3 = \frac{\sum_{i=1}^4 \lambda_i - 8}{\frac{K_{01}}{V_3} - 1} = \frac{\frac{15}{2} - 8}{\frac{1}{2} - 1} = 1, \quad (4.12)$$

Sustituyendo (4.11) en (4.10) se tiene

$$f_0(z) = V_3 \left(z^5 - \frac{1}{2}z^4 - \frac{1}{2}z^3 - z^2 + \frac{1}{2}z \right) + 1.$$

Al reemplazar el valor de V_3 obtenido en (4.12), obtenemos $f_0(z)$

$$f_0(z) = z^5 - \frac{1}{2}z^4 - \frac{1}{2}z^3 - z^2 + \frac{1}{2}z + 1. \quad (4.13)$$

Dada la función de Jost como en (4.13) y los eigenvalores de transmisión (4.11), se determinan los valores del potencial.

Método de Marchenko

Siguiendo el algoritmo del método, se determina $g_0(z)$ al reemplazar z por z^{-1} en la función de Jost.

$$g_0(z) = z^{-5} - \frac{1}{2}z^{-4} - \frac{1}{2}z^{-3} - z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-1} + 1. \quad (4.14)$$

Así, con (4.13) y (4.14), obtenemos la matriz $S(z)$ mediante (1.35). Después de simplificar, se tiene

$$S(z) = \frac{2z^5 + z^4 - 2z^3 - z^2 - z + 2}{z^5(2z^5 - z^4 - z^3 - 2z^2 + z + 2)}.$$

Se calculan los ceros de $f_0(z)$, los cuales son

$$z_1 \approx -0.713904, \quad z_2 \approx -0.466528 + 0.953896i,$$

$$z_3 \approx -0.466528 - 0.953896i, \quad z_4 \approx 1.07348 + 0.299864i,$$

$$z_5 \approx 1.07348 - 0.299864i,$$

ya que se requiere que los ceros se encuentren en $|z| = 1$, sólo se trabajará con z_1 . Se observa que z_1 corresponde a un estado ligado ya que $z_1 \in (-1, 0)$.

En general, sistema de Marchenko a resolver para $b = 3$ es:

$$\begin{aligned}
K_{01} + M_1 + K_{01}M_2 + K_{02}M_3 + K_{03}M_4 + K_{04}M_5 + K_{05}M_6 &= 0 \\
K_{02} + M_2 + K_{01}M_3 + K_{02}M_4 + K_{03}M_5 + K_{04}M_6 + K_{05}M_7 &= 0 \\
K_{03} + M_3 + K_{01}M_4 + K_{02}M_5 + K_{03}M_6 + K_{04}M_7 + K_{05}M_8 &= 0 \\
K_{04} + M_4 + K_{01}M_5 + K_{02}M_6 + K_{03}M_7 + K_{04}M_8 + K_{05}M_9 &= 0 \\
K_{05} + M_5 + K_{01}M_6 + K_{02}M_7 + K_{03}M_8 + K_{04}M_9 + K_{05}M_{10} &= 0 \quad (4.15) \\
K_{12} + M_3 + K_{12}M_4 + K_{13}M_5 + K_{14}M_6 &= 0 \\
K_{13} + M_4 + K_{12}M_5 + K_{13}M_6 + K_{14}M_7 &= 0 \\
K_{14} + M_5 + K_{12}M_6 + K_{13}M_7 + K_{14}M_8 &= 0 \\
K_{23} + M_5 + K_{23}M_6 &= 0.
\end{aligned}$$

Se calcula el núcleo de Marchenko usando (2.8). Observe que el valor de la integral se obtiene al calcular los residuos en los polos $z = 0$ y $z = z_1$, entonces de (2.8) y (2.2) se concluye que el término de la suma se anula con la contribución del residuo en el polo $z = z_1$ por lo que el valor de M_n se tiene al calcular el residuo en el polo $z = 0$.

$$\begin{aligned}
M_1 &= -\text{Res}[S, 0] = -\frac{5}{2}, \\
M_2 &= -\text{Res}[zS, 0] = 2, \\
M_3 &= -\text{Res}[z^2S, 0] = -1, \\
M_4 &= -\text{Res}[z^3S, 0] = 1, \\
M_5 &= -\text{Res}[z^4S, 0] = -1, \\
M_n &= 0, \quad n \geq 6.
\end{aligned}$$

De esta forma el sistema de Marchenko (4.15) se reduce a

$$\begin{aligned}
K_{01} - \frac{5}{2} + 2K_{01} - K_{02} + K_{03} - K_{04} &= 0 \\
K_{02} + 2 - K_{01} + K_{02} - K_{03} &= 0 \\
K_{03} - 1 + K_{01} - K_{02} &= 0 \\
K_{04} + 1 - K_{01} &= 0 \\
K_{05} - 1 &= 0 \\
K_{12} - 1 + K_{12} - K_{13} &= 0 \\
K_{13} + 1 - K_{12} &= 0 \\
K_{14} - 1 &= 0 \\
K_{23} - 1 &= 0,
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} K_{01} &= \frac{1}{2}, & K_{02} &= -1, & K_{03} &= -\frac{1}{2}, & K_{04} &= -\frac{1}{2} \\ K_{05} &= 1, & K_{12} &= 0, & K_{13} &= -1, & K_{14} &= 1, & K_{23} &= 1. \end{aligned}$$

Finalmente, usando la igualdad en (1.30) se recuperan los valores del potencial

$$\begin{aligned} V_1 &= K_{01} - K_{12} = \frac{1}{2}, \\ V_2 &= K_{12} - K_{23} = -1, \\ V_3 &= K_{23} - K_{34} = 1. \end{aligned}$$

Método de Gel'fand-Levitan

Sean $f_0(z)$ y $g_0(z)$ como en (4.13) y (4.14), respectivamente. Seguimos los pasos restantes del algoritmo del método para determinar los valores del potencial.

En general, el sistema de Gel'fand-Levitan a resolver para $b = 3$ es

$$\begin{aligned} A_{21} + G_{21} + A_{21}G_{11} &= 0 \\ A_{31} + G_{31} + A_{31}G_{11} + A_{32}G_{21} &= 0 \\ A_{32} + G_{32} + A_{31}G_{12} + A_{32}G_{22} &= 0 \\ A_{41} + G_{41} + A_{41}G_{11} + A_{42}G_{21} + A_{43}G_{31} &= 0 \\ A_{42} + G_{42} + A_{41}G_{12} + A_{42}G_{22} + A_{43}G_{32} &= 0 \\ A_{43} + G_{43} + A_{41}G_{13} + A_{42}G_{23} + A_{43}G_{33} &= 0. \end{aligned}$$

De manera análoga a lo establecido en el ejemplo 1, se calculan los coeficientes G_{nm} usando las medidas espectrales (2.18) y (2.10), así tenemos

$$G_{nm} = C_1^2 \dot{\varphi}_n(z_1) \dot{\varphi}_m(z_1) + \int_0^4 \dot{\varphi}_n \dot{\varphi}_m (d\rho - d\dot{\rho})$$

Se reescribe la integral en la expresión anterior en términos del parámetro θ usando (2.20) y (2.12), entonces

$$G_{nm} = C_1^2 \dot{\varphi}_n(z_1) \dot{\varphi}_m(z_1) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(n\theta) \sin(m\theta) \left(\frac{1}{f_0 g_0} - 1 \right) d\theta.$$

Usando la relación (2.17) se obtiene el valor de la constante de norma de Gel'fand-Levitan $C_1^2 = 0.0272378$.

Los valores de las soluciones regulares en el estado ligado z_1 son $\dot{\varphi}_2 = -2.114653$, $\dot{\varphi}_3 = 3.471756$ y $\dot{\varphi}_3 = -5.226905$.

Así

$$\begin{aligned} G_{11} &= 0, & G_{12} &= -0.499999, & G_{13} &= 0.249999, \\ G_{21} &= -0.499999, & G_{22} &= 0.249999, & G_{31} &= 0.249999, \\ G_{32} &= 0.375000, & G_{33} &= 0.312499, & G_{41} &= 0.875000, \\ G_{42} &= 0.312499, & G_{43} &= 0.093751. \end{aligned}$$

Al resolver el sistema se obtiene

$$\begin{aligned} A_{21} &= 0.5, & A_{31} &= -0.5, & A_{32} &= -0.5 \\ A_{41} &= -1.5, & A_{42} &= -1, & A_{43} &= 0.5. \end{aligned}$$

Finalmente, los valores del potencial son

$$\begin{aligned} V_1 &= A_{21} - A_{10} = 0.5, \\ V_2 &= A_{32} - A_{21} = -1, \\ V_3 &= A_{43} - A_{32} = 1. \end{aligned}$$

4.4. Ejemplo 4. Caso inusual $b=3$.

En este ejemplo se ilustra el caso inusual para $b = 3$. Veremos que no es posible determinar de forma única el valor de V_3 .

Sea $b = 3$. Sean dados $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 , eigenvalores de transmisión. Determinar V_1, V_2 y V_3 .

Sean

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3, \quad \lambda_4 = 3. \quad (4.16)$$

Ya que los eigenvalores de transmisión son los ceros de E , obtenemos

$$E = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3)^2 = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 22\lambda^2 - 24\lambda + 9.$$

Reescribimos E , en términos de z

$$E = z^4 + 2z^2 + 3 + z^{-2} + z^{-4},$$

y multiplicamos por $(z - z^{-1})$

$$(z - z^{-1})E = z^5 + z^3 + z - z^{-1} - z^{-3} - z^{-5}. \quad (4.17)$$

Así, usando la relación (3.13) obtenemos

$$\frac{f_0 - 1}{V_3} = z^5 + z^3 + z,$$

por lo que

$$f_0 = V_3[z^5 + z^3 + z] + 1. \quad (4.18)$$

De la definición (3.2) se observa que para este ejemplo nos encontramos en el caso inusual, ya que se cumple que

$$\sum_{j=1}^4 \lambda_j = 8 = 4(b - 1).$$

Lo cual no nos permite resolver (3.12) para determinar V_3 y por consiguiente no podemos determinar los valores del potencial de forma única.

Sin embargo, si la información dada es $f_0(z)$, se puede usar el método de Marchenko o el método de Gel'fand-Levitan para determinar el potencial.

Por ejemplo, sea

$$f_0(z) = z^5 + z^3 + z + 1. \quad (4.19)$$

Método de Marchenko

Seguimos el algoritmo del método y calculamos $g_0(z)$, así

$$g_0(z) = z^{-5} + z^{-3} + z^{-1} + 1. \quad (4.20)$$

Usando (4.19) y (4.20) se determina $S(z)$ mediante (1.35)

$$S(z) = \frac{z^{-5} + z^{-3} + z^{-1} + 1}{z^5 + z^3 + z + 1} = \frac{1 + z^2 + z^4 + z^5}{z^5(z^5 + z^3 + z + 1)}.$$

Calculamos los ceros de la función de Jost (4.19), los cuales son

$$\begin{aligned} z_1 &\approx -0.636883, & z_4 &\approx 0.707729 - 0.841955i, \\ z_2 &\approx -0.389287 - 1.070668i, & z_5 &\approx 0.707729 + 0.841955i, \\ z_3 &\approx -0.389287 + 1.070668i. \end{aligned}$$

Recuérdese que sólo nos interesa trabajar con los ceros dentro del círculo unitario $|z| = 1$, por lo que para futuros cálculos únicamente se trabajará con z_1 . Además, nótese que en este caso sólo z_1 corresponde a un estado ligado.

Procedemos a calcular el núcleo de Marchenko. En este caso

$$M_n = \frac{1}{2\pi i} \oint (1 - S)z^{n-1} + c_1^2 z_1^n.$$

La contribución de la integral correspondiente al polo z_1 se anula con el término de la suma, por lo tanto $M_n = 0$ para $n \geq 6$. Así, M_n depende solamente del residuo en el polo $z = 0$, entonces

$$\begin{aligned} M_1 &= -\text{Res}[S, 0] = -5 \\ M_2 &= -\text{Res}[zS, 0] = 3 \\ M_3 &= -\text{Res}[z^2S, 0] = -2 \\ M_4 &= -\text{Res}[z^3S, 0] = 1 \\ M_5 &= -\text{Res}[z^4S, 0] = -1. \end{aligned}$$

Luego de resolver el sistema de Marchenko se obtiene que

$$\begin{aligned} K_{01} &= 1, & K_{02} &= 0, & K_{03} &= 1, \\ K_{04} &= 0, & K_{05} &= 1, & K_{12} &= 1, \\ K_{13} &= 0, & K_{14} &= 1, & K_{23} &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto los valores del potencial son

$$\begin{aligned} V_1 &= K_{01} - K_{12} = 1 - 1 = 0, \\ V_2 &= K_{12} - K_{23} = 1 - 1 = 0, \\ V_3 &= K_{23} - K_{34} = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

En el problema directo se conocen los valores del potencial $\{V_1, \dots, V_b\}$, por consiguiente podemos calcular las cantidades que estén dadas en términos

de estos valores. Por ejemplo, la función de Jost f_0 , elementos de la solución de Jost, elementos de la solución regular, la cantidad D y por lo tanto los eigenvalores de transmisión, entre otras. Todo esto con la ayuda de la teoría estudiada en el primer y tercer capítulo.

En los siguientes tres ejemplos veremos cómo obtener algunas de las cantidades mencionadas usando el método algebraico.

4.5. Ejemplo 5, b=1.

En este ejemplo obtendremos f_0 y los eigenvalores de transmisión. Veremos con un ejemplo particular, lo establecido en el teorema 1.4f): " f_0 puede anularse en ambos valores $z = 1$ y $z = -1$ ".

Sea $b = 1$. Obtener $f_0(z)$ y los eigenvalores de transmisión.

Ya que $b = 1$, $V_n = 0$ para $n \geq 2$. Usando (1.31) se obtiene la función de Jost

$$f_0(z) = V_1 z + 1. \quad (4.21)$$

Dado V_1 se pueden obtener los elementos de la solución regular del problema perturbado y no perturbado. De esta forma

$$\begin{array}{ll} \varphi_0 = 0 & \dot{\varphi}_0 = 0 \\ \varphi_1 = 1 & \dot{\varphi}_1 = 1 \\ \varphi_2 = -\lambda + 2 + V_1 & \dot{\varphi}_2 = -\lambda + 2 \\ \varphi_3 = \lambda^2 - \lambda(4 + V_1) + 3 + 2V - 1 & \dot{\varphi}_3 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Entonces obtenemos D , mediante (3.2)

$$D = \begin{vmatrix} \dot{\varphi}_1 & \varphi_1 \\ \dot{\varphi}_2 & \varphi_2 \end{vmatrix} = \lambda + 2 - (-\lambda + 2 + V_1) = V_1.$$

Los eigenvalores de transmisión son los ceros de D . Si $V_1 \neq 0$, para $b = 1$ no hay eigenvalores de transmisión y si $V_1 = 0$, entonces $D = 0$ por lo que cualquier λ es eigenvalor de transmisión.

Finalmente, si $V_1 = -1$ se tiene que $f_0(1) = 0$ y $f_0(-1) = 2$, en cambio si $V_1 = 1$, $f_0(-1) = 0$ y $f_0(1) = 2$. Con este sencillo ejemplo, se ha verificado que f_0 puede anularse en $z = 1$ pero no en $z = -1$ o viceversa.

4.6. Ejemplo 6. Método algebraico $b=2$.

En este ejemplo se ilustra que los eigenvalores de transmisión pueden ser de multiplicidad mayor a uno, reales o complejos. Veremos, con un ejemplo particular lo establecido en el teorema 1.4f): " f_0 puede anularse en ambos valores $z = 1$ y $z = -1$ ". Ilustramos también cómo obtener los valores del potencial para el caso $b = 2$ usando el método algebraico.

I) Sea $b = 2$. Dados V_1 y V_2 , obtener la función de Jost y los eigenvalores de transmisión.

Dados V_1 y V_2 se pueden calcular $f_0(z)$ y $f_1(1)$ usando (1.31) y (1.26), respectivamente, entonces

$$f_0(z) = 1 + (V_1 + V_2)z + (V_1V_2)z^2 + V_2z^3, \quad f_1(z) = z + V_2z^2, \quad (4.22)$$

así, de $f_0(z)$ se puede obtener $g_0(z)$ al sustituir z por z^{-1} . Entonces

$$g_0(z) = 1 + (V_1 + V_2)z^{-1} + (V_1V_2)z^{-2} + V_2z^{-3}.$$

Usando $f_0(z)$ y $g_0(z)$ se construye D , como en (3.11)

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{z - z^{-1}} [1 + (V_1 + V_2)z + (V_1V_2)z^2 + V_2z^3 - 1 - (V_1 + V_2)z^{-1} \\ &\quad - (V_1V_2)z^{-2} - V_2z^{-3}] \\ &= \frac{1}{z - z^{-1}} [V_2(z^3 - z^{-3}) + (V_1V_2)(z^2 - z^{-2}) + (V_1 + V_2)(z - z^{-1})] \\ &= V_2(z^2 + 1 + z^{-2}) + (V_1V_2)(z - z^{-1}) + (V_1 + V_2). \end{aligned}$$

Se expresa D en términos de λ usando la igualdad en (1.7)

$$\begin{aligned} D &= V_2(\lambda^2 - 4\lambda + 3) + (V_1V_2)(2 - \lambda) + (V_1 + V_2) \\ &= V_2\lambda^2 - (4V_2 + V_1V_2)\lambda + (3V_2 + 2V_1V_2 + V_1 + V_2) \\ &= \lambda^2V_2 - \lambda V_2(4 + V_1) + (V_1 + 4V_2 + 2V_1V_2), \end{aligned}$$

o podemos usar (3.2). En este caso

$$\begin{array}{ll}
\varphi_0 = 0 & \dot{\varphi}_0 = 0 \\
\varphi_1 = 1 & \dot{\varphi}_1 = 1 \\
\varphi_2 = -\lambda + 2 + V_1 & \dot{\varphi}_2 = -\lambda + 2 \\
\varphi_3 = \lambda^2 - \lambda(4 + V_1 + V_2) + (3 + 2V_1 + 2V_2 + V_1V_2) & \dot{\varphi}_3 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

entonces

$$\begin{aligned}
D &= \dot{\varphi}_2 \varphi_3 - \varphi_2 \dot{\varphi}_3 \\
&= -\lambda^3 + \lambda^2(6 + V_1 + V_2) - \lambda(11 + 4V_1 + 4V_2 + V_1V_2) \\
&\quad + (6 + 4V_1 + 4V_2 + V_1V_2) - [-\lambda^3 + \lambda^2(6 + V_1) - \lambda(11 + 4V_1) \\
&\quad + (6 + 3V_1)] \\
&= V_2\lambda^2 - \lambda V_2(4 + V_1) + (V_1 + 4V_2 + 2V_1V_2).
\end{aligned}$$

De manera que

$$E = \lambda^2 - \lambda(4 + V_1) + \left(4 + 2V_1 + \frac{V_1}{V_2}\right). \quad (4.23)$$

Ya que los eigenvalores de transmisión corresponden a los ceros de E, se tiene

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{(4 + V_1) \pm \sqrt{(4 + V_1)^2 - 4(4 + 2V_1 + V_1/V_2)}}{2} \\
&= \frac{(4 + V_1) \pm \sqrt{16 + 8V_1 + V_1^2 - 16 - 8V_1 - 4V_1/V_2}}{2},
\end{aligned}$$

por lo tanto los eigenvalores de transmisión en relación con los valores del potencial están dados por

$$\lambda = 2 + \frac{V_1}{2} \pm \sqrt{\frac{V_1^2}{4} - \frac{V_1}{V_2}}. \quad (4.24)$$

Por consiguiente, dependiendo del potencial $V = \{V_1, V_2\}$, se tendrán dos eigenvalores de transmisión reales distintos, un eigenvalor de transmisión real de multiplicidad dos o un par de eigenvalores de transmisión complejos conjugados.

Por ejemplo, si $V_1 = 1$ y $V_2 = 4$

$$\lambda = 2 + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{5}{2},$$

se tiene un eigenvalor de transmisión de multiplicidad dos.

Si $V_1 = 2$ y $V_2 = \frac{1}{2}$

$$\lambda = 2 + 1 \pm \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{2}{1/2}} = 3 \pm \sqrt{3}i,$$

se tienen dos eigenvalores de transmisión complejos.

Si $V_1 = -\frac{4}{3}$ y $V_2 = 1$

$$\lambda = 2 - \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{16/9}{4} + \frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}},$$

se tienen dos eigenvalores de transmisión reales distintos, $\lambda = \frac{8}{3}$ y $\lambda = 0$.

Por otro lado, si $V_1 = \sqrt{2}$ y $V_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}z^3 - z^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1,$$

de donde $f_0(1) = 0$ y $f_0(-1) = 0$. Se observa que $f_0(z)$ puede anularse en ambos valores $z = \pm 1$.

II) Sea $b = 2$. Usar el método algebraico para determinar V_1 y V_2 .

En el método algebraico se comparan los coeficientes de la función de Jost en términos de los valores del potencial y en términos de los eigenvalores de transmisión, para encontrar una relación entre ellos, que ayude a determinar los valores del potencial.

Para el caso $b = 2$, la función de Jost, con coeficientes en términos de los eigenvalores de transmisión está dada mediante (4.1) y de la primera igualdad en (4.22) obtenemos $f_0(z)$ con coeficientes en términos de los valores del potencial. Al comparar los coeficientes de ambas expresiones obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} V_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 - 4 \\ V_2 &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 4}{4 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2} \end{aligned} \tag{4.25}$$

Veamos un ejemplo particular. Sean λ_1 y λ_2 como en (4.2), entonces

$$V_1 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 4 = 5 - 4 = 1,$$

$$V_2 = \frac{1}{4 - 2\left(\frac{5}{2}\right) - 2\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{25}{4}} = \frac{1}{-6 + \frac{25}{4}} = 4.$$

4.7. Ejemplo 7. Método algebraico b=3.

En este ejemplo ilustramos cómo obtener los valores del potencial para el caso $b = 3$ usando el método algebraico.

I) Sea $b = 3$. Dados V_1, V_2 y V_3 , obtener la función de Jost.

Dados V_1, V_2 y V_3 , se pueden obtener los elementos φ_3, φ_4 de la soluciones regular del problema perturbado (1.1) y los elementos $\dot{\varphi}_3$ y $\dot{\varphi}_4$ de la solución regular del problema no perturbado (1.4). De esta forma usando (1.63) y (1.67) se tiene

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= \lambda^2 - \lambda [4 + (V_1 + V_2)] + [3 + 2(V_1 + V_2) + V_1 V_2], \\ \varphi_4 &= -\lambda^3 + \lambda^2 [6 + (V_1 + V_2 + V_3)] - \lambda [10 + 4(V_1 + V_2 + V_3) \\ &\quad + (V_1 V_2 + V_1 V_3 + V_2 V_3)] + [4(V_1 + V_2 + V_3) + 2(V_1 V_2 + V_1 V_3 + V_2 V_3) \\ &\quad + 4 - (V_1 + V_3) + V_1 V_2 V_3], \\ \dot{\varphi}_3 &= \lambda^2 - 4\lambda + 3, \\ \dot{\varphi}_4 &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4,\end{aligned}$$

Dados estos valores, se obtiene D mediante (3.2)

$$\begin{aligned}D &= \dot{\varphi}_3 \varphi_4 - \varphi_3 \dot{\varphi}_4 \\ &= V_3 \lambda^4 - V_3 [8 + (V_1 + V_2)] \lambda^3 + [V_3 (22 + 6(V_1 + V_2) + V_1 V_2) + V_2] \lambda^2 \\ &\quad - [11V_3 (V_1 + V_2) + 4(V_2 + 6V_3) + V_1 V_2 + 4V_1 V_2 V_3] \lambda \\ &\quad + [V_1 + 4V_2 + 9V_3 + 6(V_1 V_3 + V_2 V_3) + 2V_1 V_2 + 3V_1 V_2 V_3].\end{aligned}$$

Usando (3.9), se calcula E en términos de z

$$\begin{aligned}E &= z^4 + (V_1 + V_2)z^3 + \left[2 + V_1 V_2 + \frac{V_2}{V_3}\right] z^2 + \left[2(V_1 + V_2) + \frac{V_1 V_2}{V_3}\right] z \\ &\quad + \left[3 + V_1 V_2 + \frac{V_1}{V_3} + \frac{2V_2}{V_3}\right] + \left[2(V_1 + V_2) + \frac{V_1 V_2}{V_3}\right] z^{-1} + \left[2 + V_1 V_2 + \frac{V_2}{V_3}\right] z^{-2} \\ &\quad + (V_1 + V_2)z^{-3} + z^{-4}.\end{aligned}$$

Se multiplica por $(z - z^{-1})$ para obtener la relación (3.13)

$$\begin{aligned} (z - z^{-1})E = & z^5 + (V_1 + V_2)z^4 + \left[1 + V_1V_2 + \frac{V_2}{V_3}\right]z^3 + \left[V_1 + V_2 + \frac{V_1V_2}{V_3}\right]z^2 \\ & + \left[1 + \frac{V_1}{V_3} + \frac{V_2}{V_3}\right]z - \left[1 + \frac{V_1}{V_3} + \frac{V_2}{V_3}\right]z^{-1} - \left[V_1 + V_2 + \frac{V_1V_2}{V_3}\right]z^{-2} \\ & - \left[1 + V_1V_2 + \frac{V_2}{V_3}\right]z^{-3} - (V_1 + V_2)z^{-4} - z^{-5}. \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned} \frac{f_0 - 1}{V_3} = & z^5 + (V_1 + V_2)z^4 + \left(1 + V_1V_2 + \frac{V_2}{V_3}\right)z^3 + \left(V_1 + V_2 + \frac{V_1V_2}{V_3}\right)z^2 \\ & + \left(1 + \frac{V_1}{V_3} + \frac{V_2}{V_3}\right)z, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f_0(z) = & V_3 \left[z^5 + (V_1 + V_2)z^4 + \left(1 + V_1V_2 + \frac{V_2}{V_3}\right)z^3 + \left(V_1 + V_2 + \frac{V_1V_2}{V_3}\right)z^2 \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{V_1}{V_3} + \frac{V_2}{V_3}\right)z \right] + 1, \\ f_0(z) = & V_3 z^5 + (V_1V_3 + V_2V_3)z^4 + (V_2 + V_3 + V_1V_2V_3)z^3 \\ & + (V_1V_2 + V_1V_3 + V_2V_3)z^2 + (V_1 + V_2 + V_3)z + 1. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Al comparar los coeficientes en (4.26) y (4.10), se obtiene el método algebraico para calcular V_1 y V_2

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= \alpha, \\ \frac{V_2}{V_3} + V_1V_2 &= \beta - 1, \\ \frac{V_1V_2}{V_3} + (V_1 + V_2) &= \gamma, \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde V_3 se obtiene de (3.12) y

$$\begin{aligned}\alpha &= \left(\sum_{i=1}^4 \lambda_i - 8 \right), \\ \beta &= \left(27 - 6 \sum_{i=1}^4 \lambda_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j \right), \\ \gamma &= \left(\sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \lambda_i \lambda_j \lambda_k - 4 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j + 14 \sum_{i=1}^4 \lambda_i - 48 \right).\end{aligned}$$

II) Sea $b = 3$. Dados $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 , eigenvalores de transmisión, usar el método algebraico para determinar los valores del potencial.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 como en (4.11). Entonces

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}, \\ \beta &= \frac{1}{2}, \\ \gamma &= -1.\end{aligned}$$

Con estos valores, se resuelve (4.27)

$$\begin{aligned}V_1 + V_2 &= -\frac{1}{2} \\ V_2 + V_1 V_2 &= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \\ V_1 V_2 + (V_1 + V_2) &= -1,\end{aligned}$$

de donde

$$V_1 = \frac{1}{2}, \quad V_2 = -1. \quad (4.28)$$

Si bien el método algebraico es aparentemente más directo, para b suficientemente grande, las ecuaciones equivalentes a (4.27) se complican considerablemente. Por esta razón es preferible usar el método de Marchenko o el método de Gel'fand-Levitan, que pretenden reducir el problema inverso a un sistema lineal de ecuaciones.

Apéndice A

Citamos algunos conceptos y teoremas importantes.

Definición 4.1. [17]

a) Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio normado X es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\epsilon > 0$ existe un entero N_ϵ tal que

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon, \quad \text{para todo } m, n > N_\epsilon.$$

b) El espacio X es **completo** si cada sucesión de Cauchy en X converge.

c) Sea X un espacio vectorial y \mathbb{K} un campo. Se define el **producto interno** el mapeo $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \mapsto \mathbb{K}$ que cumple las siguientes condiciones para todo $x, y, z \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

1) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$

2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

4) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$

d) Un espacio con producto interno X , es un espacio vectorial X con un producto interno definido en X .

e) El producto interno en X , define una norma en X dada por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (4.29)$$

y una métrica en X dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Por consiguiente, los espacios con producto interno son espacios normados.

f) Un **espacio de Hilbert** es un espacio con producto interno completo con respecto a la norma (4.29).

Definición 4.2. [15] Un operador \mathcal{L} , que mapea un espacio de Hilbert en otro espacio de Hilbert, $\mathcal{L} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$, es **lineal** si para todo $u, v \in \mathcal{K}$ y todo $a, b \in \mathbb{C}$ si

$$\mathcal{L}(au + bv) = a\mathcal{L}u + b\mathcal{L}v.$$

Definición 4.3. [15] Sean \mathcal{K}, \mathcal{H} espacios de Hilbert. Un operador \mathcal{L} es **acotado** si existe una constante $M \geq 0$, tal que

$$\|\mathcal{L}u\|_{\mathcal{K}} \leq M\|u\|_{\mathcal{H}}$$

Definición 4.4. [17] Sean \mathcal{K}, \mathcal{H} espacios de Hilbert. Un operador lineal acotado $\mathcal{L} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$, se dice que es **autoadjunto** si $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$, es decir, si

$$\langle \mathcal{L}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{L}y \rangle$$

para todo $x \in \mathcal{K}$, $y \in \mathcal{H}$

Definición 4.5. [22] Sea \mathcal{L} un operador lineal en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . El plano complejo \mathbb{C} se descompone en dos partes, el espectro de \mathcal{L} que denotamos como $\sigma(\mathcal{L})$ y el conjunto resolvente.

El espectro de \mathcal{L} se descompone en el espectro discreto, espectro continuo y espectro residual.

El **espectro discreto**, es el conjunto de eigenvalores de \mathcal{L} , esto es, los λ para los cuales $\mathcal{L}x = \lambda x$ para $x \neq 0$. De forma equivalente, el espectro discreto son los λ para los cuales $\mathcal{L} - \lambda I$ no tiene inversa.

El **espectro continuo** es el conjunto de valores λ para los cuales $\mathcal{L} - \lambda I$ tiene inversa pero no acotada con un dominio denso en \mathcal{H} .

El **espectro residual** es el conjunto de valores λ para los cuales $\mathcal{L} - \lambda I$ tiene inversa con un dominio no denso en \mathcal{H} .

Teorema 4.1. [17] El espectro residual de un operador lineal autoadjunto \mathcal{L} en un espacio de Hilbert, es vacío.

Teorema 4.2. [17] El espectro $\sigma(\mathcal{L})$ de un operador autoadjunto $\mathcal{L} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, en un espacio complejo de Hilbert \mathcal{H} , es real.

Definición 4.6. [8] La **rama principal** de la función bivaluada $z^{\frac{1}{2}}$, se obtiene tomando el valor principal de $\log z$, es decir

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}, \quad (r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi).$$

Definición 4.7. [19] Si f es analítica en una región A que contiene una ϵ -vecindad agujerada de z_0 , entonces z_0 es llamada singularidad aislada y $f(z)$ admite la expansión en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n. \quad (4.30)$$

El **residuo** de $f(z)$ en $z = z_0$ es el coeficiente del término $\frac{1}{z-z_0}$:

$$\text{Res}[f(z), z_0] = b_1.$$

Si z_0 es una singularidad aislada de f y si todos los b_n excepto un número finito, en (4.30) son cero, entonces z_0 es llamado **polo** de f .

Si k es el mayor entero tal que $b_k \neq 0$, z_0 es llamado polo de orden k . Si z_0 es un polo de primer orden, también decimos que es un polo simple.

Bibliografía

- [1] N. I. Akhiezer. *The classical moment problem and some related questions in analysis*, volume 1. Oliver & Boyd, 1965.
- [2] T. Aktosun. *Inverse scattering to determine the shape of a vocal tract*. Birkhäuser, 2005.
- [3] T. Aktosun, A. E. Choque, and V. G. Papanicolaou. Inverse problem with transmission eigenvalues for the general jacobi system. <http://www.ifm.umich.mx/Matematicas/Academicos/ACPjacobi2017.pdf>.
- [4] T. Aktosun and V. G. Papanicolaou. Inverse problem with transmission eigenvalues for the discrete Schrödinger equation. *J. Math Phys.*, 56:082101, 2015.
- [5] J. An and J. Shen. Spectral approximation to a transmission eigenvalue problem and its applications to an inverse problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 69:1132–1143, 2015.
- [6] F. V. Atkinson. *Mathematics in science and engineering VIII: Discrete and continuous boundary problems*. Academic Press, Inc., 1964.
- [7] K. M. Case and M. Kac. A discrete version of the inverse scattering problem. *J. Math Phys.*, 14:594–603, 1973.
- [8] R. V. Churchill and J. W. Brown. *Variable compleja y aplicaciones*. McGraw-Hill, 1992.
- [9] I. M. Gel'fand and B. M. Levitan. On the determination of a differential equation from its spectral function. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 15:309360, 1951.
- [10] C. Gordon, D. L. Webb, and S. Wolpert. One cannot hear the shape of a drum. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 27:134–138, 1992.

-
- [11] C. W. Groetsch. *Inverse problems in the mathematical sciences*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1993.
- [12] C. W. Groetsch. Inverse problems: the other two-thirds of the story. *Quaestiones Mathematicae*, Suppl. I:89–93, 2001.
- [13] M. Kac. Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly*, 73:1–23, 1966.
- [14] A. Kirsch. On the existence of transmission eigenvalues. *Inverse Problems and Imaging*, 3:155 – 172, 2009.
- [15] E. Koelink. Spectral theory and special functions. *Laredo Lectures on Orthogonal Polynomials and Special Functions*, Nova Sci. Publ., pages 45–84, 2004.
- [16] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin. *Introductory real analysis*. Dover publications, Inc., 1970.
- [17] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons, 1978.
- [18] V. A. Marchenko. *Sturm-Liouville operators and applications*. Ams Chelsea publications, 1986.
- [19] J. E. Marsden and M. J. Hoffman. *Análisis básico de variable compleja*. Trillas, 1996.
- [20] A. G. Ramm. *Inverse problems : mathematical and analytical techniques with applications to engineering*. New York : Springer, 2004.
- [21] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics I: functional analysis*. Academic Press, Inc., 1972.
- [22] R. D. Richtmyer. *Principles of advanced mathematical physics*. Springer-Verlag, 1978.
- [23] B. Simon. *Szegő's Theorem and Its Descendants: Spectral Theory for L^2 Perturbations of Orthogonal Polynomials*. Princeton University Press, 2011.
- [24] T. Takahashi. *Ecuaciones en diferencias con aplicaciones*. Grupo editorial iberoamérica, 1990.