



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS “Luis Manuel Rivera
Gutiérrez”

**Un modelo para estrellas de baja
masa**

TESIS

Presenta:

JORGE ANTONIO MORFIN ESTRADA

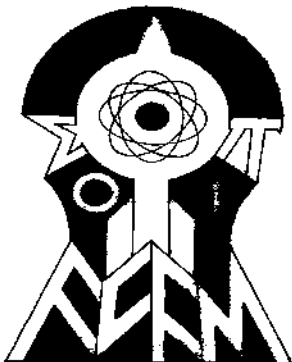
Para obtener el título profesional de

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS**

Asesor de tesis:

Dr. Joaquín Estevez Delgado

Morelia, Mich. Agosto de 2017



Agradecimientos

*No tengo trono ni reina ni nadie
que me comprenda pero sigo siendo el rey.
Jiménez Sandoval, José Alfredo.*

Sirva de ejemplo este trabajo para demostrar que se puede tener la capacidad de ser una mejor persona día a día y que la vía del estudio sugiere ser una de las mejores alternativas que se nos puede proporcionar, con cariño para mi gente de Sicuicho, para todos aquellos que creyeron en mí y para mis detractores, pero dedico esto en especial para mis hermanas, para las cuales es grato saber que siguen mis pasos.

Indudablemente este trabajo es un reconocimiento para mi familia y en especial para mis padres, con quienes estoy profundamente agradecido por el enorme esfuerzo que hacen con mis hermanos y en especial conmigo, por haberme brindado su apoyo y proporcionarme, a su manera, herramientas para poder enfrentar el cambiante mundo en donde vivimos y salir adelante en cada etapa de la vida.

Rindo un homenaje para todas esas personas con quienes el campo nos llevó a tener una buena relación de amistad, en especial para el señor Juan Valencia, por sus consejos y por animarme a seguir en el trabajo de la siembra del maíz. De igual manera, para aquellos que se nos adelantaron en el camino y que estoy seguro que estarían felices por lo que eh logrado, en especial para el señor Jerónimo Flores Rojas “ Tio Momo ”.

Agradecer a todos y cada unos de mis profesores con los cuales tuve la fortuna de poder ser su alumno y aprender de los mejores durante la

licenciatura, en especial quiero agradecer a Jaime Nieto, José Vega, Héctor Tejeda, Mario César Suárez, Alberto Mendoza, a cada uno de ellos gracias por haber obrado más allá de su profesión y saber dar consejos cuando se nublaban el panorama. A Francisco Mota, Gabriel Arroyo, Mauricio Ortiz y Mariano Hernández, por desempeñar el papel de sinodales y suplentes respectivamente.

También agradezco a mi profesor y asesor Dr. Joaquín Estevez Delgado, con quien durante este tiempo pude aprender, entre otras cosas, que no se necesita tener un doctorado para servir a las personas que te rodean y poder brindar ayuda cuando se necesite.

A cada uno de los amigos con quien pude convivir, en especial agradezco a los dos grupos con los cuales tuve la dicha de coincidir en esta facultad. A los Tatis; Ángel Rosas, Reyes Manuel García, Esaul González, Efrén Quintero, Juan Carlos Vargas, René Nateras y por supuesto, a mi villano favorito, Julio César Pérez; también agradecer a los Chamos: Esteban Chamonica, Azucena Moreno, María Otilia Segura, Roxana Reyes y Miguel Ángel Álvarez, sin dejar de lado a Josué Cohenete, Eduardo Vite, Manuel Vega, Rogelio Cuevas, Raúl Guitiérrez, Juan José Rivas, Armando Madrigal, Jeny López y Alondra Servin Velázquez, a quienes el “cubo” nos llevo a tener una grata convivencia, muchas gracias a las personas que me brindaron su ayuda sobre todo en circunstancias adversas.

Finalmente, agradezco a la casa de estudiante Camilo Torres Restrepo por haberme brindado las condiciones necesarias para poder haber terminado mi licenciatura; comida, techo y cama, ya que sin ello el camino para llegar hasta este lugar habria sido sumamente difícil.

A todos aquellos que en algún momento me brindaron su ayuda y su amistad.... Gracias.

Resumen

En este trabajo, presentamos la propuesta de una ecuación de estado politrópica acotada $P = H(c^2\rho^3 - S)$, el parámetro S , como veremos, está relacionado con la presión en la frontera y H con la presión y la densidad en el centro, la cual permite describir objetos con razón de compacidad $u \leq 0,07201352393$, suponiendo un espacio tiempo estático y esféricamente simétrico con fuentes de materia de un fluido perfecto. La densidad y presión que se obtienen para el modelo son funciones monótonas decrecientes, positivas y regulares, con velocidades del sonido radial y tangencial menores que la velocidad de la luz. Para el caso de un objeto con densidad central del orden de la densidad nuclear $\rho = 6,415023553 \cdot 10^{17} Kg/m^3$, el modelo nos da un valor de la densidad en la frontera $\rho = 5,929048499 \cdot 10^{17} Kg/m^3$, en donde el valor de la masa del objeto viene dado por $M = 0,3M_s$, donde M_s denota el valor de la masa solar y radio $R = 6153,307310$ m característico de las estrellas de neutrones, lo que muestra que el modelo propuesto es aplicable para este tipo de objetos.

Palabras Claves: Estrellas de Neutrones, Ecuaciones de Einstein, Ecuación de Estado, Objetos Compactos, Soluciones Exactas.

Abstract

In this paper, we present the proposal of a state equation polytropica dimensioned $P = H(c^2\rho^3 - S)$ the S parameter, as we will see, is related to the pressure at the border and H with the pressure and the density in the center, which allows to describe objects with reason of compactness $u \leq 0,07201352393$ assuming a static and spherically symmetrical time space with material sources of a perfect fluid. The density and pressure obtained for the model are decreasing, positive and regular monotonous functions, with radial and tangential sound velocities less than the speed of light. For the case of an object with central density of the order of the nuclear density $\rho = 6,415023553 \cdot 10^{17} Kg/m^3$, the model gives us a value of density at the border $\rho = 5,929048499 \cdot 10^{17} Kg/m^3$, where the value of the mass of the object is given by $M = 0,3M_s$, where M_s denotes the value of the solar mass and radio $R = 6153,307310$ m characteristic of neutron stars, which shows that the proposed model is applicable for this type of object.

Keywords: Neutron Stars, Einstein's Equations, State Equation, Compact Objctcs, Exact Solutions.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
Abstract	V
1. Descripción Estelar	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. ¿Qué son las estrellas de neutrones?	3
1.3. Modelos existentes	5
1.4. Descripción newtoniana	9
2. Teoría Básica	15
2.1. Relatividad general	16
2.2. Principio de equivalencia	17

2.3. Simetría estática y esférica	22
2.4. Fluido anisotrópico	25
2.5. Ecuación de estado	26
2.6. El sistema de ecuaciones	30
3. Modelo propuesto y su solución	35
3.1. Condiciones físicas de modelos estelares	35
3.2. Construcción de la solución	36
4. Resultados	43
4.1. Implicación de las condiciones	43
4.2. Análisis adimensional	52
5. Conclusiones	63
Bibliografía	66

Índice de figuras

1.1. Sección transversal de una estrella de neutrones.	5
1.2. Descripción empírica para varias masas.	7
1.3. Relación M contra R de modelos de estrella de neutrones usando varias ecuaciones del estado	8
1.4. Diagrama para la derivación de la mecánica Newtoniana. . . .	11
2.1. Elevador en caída libre hacia la tierra.	20
4.1. Comportamiento de la función densidad para $h=1.08565388$. . .	56
4.2. Comportamiento de la presión radial para $h=1.08565388$	57
4.3. Comportamiento de la presión tangencial para $h=1.08565388$. .	58
4.4. Comportamiento de la presión tangencial y presión radial para $z=3.000082352$ y $h=1.08565388$	59
4.5. Comportamiento de la velocidad del sonido radial para $h=1.08565$	60
4.6. Comportamiento de la velocidad del sonido tangencial para $h=1.08565388$	61

4.7. Razón de compacidad para $z \in (3,000082352, 8,447748418)$ y h=1.08565388	62
--	----

Capítulo 1

Descripción Estelar

1.1. Antecedentes

En 1934 Baade y Zwicky propusieron la idea de la existencia de estrellas de neutrones, señalando que éstas tendrían una densidad muy alta y un radio pequeño, las cuales tendrían una relación mucho mayor con la gravedad que las estrellas ordinarias. También dieron la sugerencia de que las estrellas de neutrones se formarían a partir de explosiones de supernova.

El primer cálculo sobre modelos referentes a estrellas de neutrones fue realizado por Oppenheimer y Volkoff hacia 1939, quienes asumieron que la materia se compone de un gas ideal de neutrones libres con una alta densidad. Así pues, el trabajo sobre las estrellas de neutrones en ese momento se centró principalmente en la idea de que los núcleos de las estrellas de neutrones en estrellas normales masivas podrían ser una fuente de energía estelar [1].

Pero la efervescencia que produjo esta información se desvaneció a medida que los detalles sobre la fusión termonuclear no se entendían claramente de manera que el estudio sobre las estrellas de neutrones trajo como consecuencia que fueran ignoradas por la comunidad astronómica alrededor de 30 años [1]. Una razón dada sugiere que tal abandono de la idea de la estrella

de neutrones es que debido a su área pequeña, su radiación termal residual sería demasiado débil para ser medida por los telescopios ópticos.

Sin embargo, los trabajos de Harrison, Wakano, y Wheeler (1958), Cameron (1959), Ambartsumyan y Saakyan (1960), y Hamada y Salpeter (1961), dieron un nuevo enfoque a este tipo de estudio al centrarse sus investigaciones en discusiones detalladas de la ecuación de estado de los modelos de las estrellas. Posteriormente Harrison, Thorne, Wakano, (1965) dan de nuevo una relevancia al estudio de este tipo de objetos estelares. La identificación del primer objeto cuasi estelar por Schmidt en el observatorio Mt. Palomar en 1963, acto que derivó en un interés adicional sobre las estrellas de neutrones [1].

Desde 1968, ha habido mucho trabajo teórico sobre las propiedades de las estrellas de neutrones. Se cree que las estrellas de neutrones son sistemas binarios cercanos, acrecentando el gas de sus estrellas compañeras. Con el descubrimiento de las fuentes de rayos X y cuasares, la comunidad científica centró su atención en las propiedades de equilibrio de las estrellas compactas y en el colapso estelar.

La primera evidencia concluyente para la periodicidad fue encontrada en las fuentes Cen X-3 y Her X-1. Los descubrimientos simultáneos cercanos a nebulosa del cangrejo y de los púlsares de vela a finales de la década de 1960, indican que son el resultado del remanente de la supernova, proporcionando así evidencia de que la formación de estrellas de neutrones surgen de explosiones de la supernova. La Nebulosa del cangrejo, por ejemplo, es el remanente de la explosión de supernova observada por los astrónomos chinos en 1054 d.c. [1].

Actualmente se conocen cerca de 350 púlsares, tres de los cuales están en sistemas binarios. Además de 300 fuentes compactas de rayos X, de las cuales alrededor de 19 muestran periodicidad, así que están probablemente en sistemas binarios.

1.2. ¿Qué son las estrellas de neutrones?

Comenzemos por dar información sobre la composición de las estrellas de neutrones, para lo cual partimos del concepto de estrellas compactas, pues la descripción referente a las estrellas de neutrones parten justamente de que forman parte de objetos compactos. Las estrellas compactas son objetos que poseen una densidad muy alta, esto sólo por debajo de los llamados agujeros negros. Algunas de sus características es que poseen una masa M de alrededor $1,4M_{\odot}$, donde M_{\odot} es la masa del sol; y tienen un radio R aproximado de 10Km [2]. La masa del sol tiene un valor aproximadamente a $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{33}gr$, la cual está concentrada en una esfera de radio 10^5 veces más pequeño que el del sol $R_{\odot} = 9,96 \cdot 10^5\text{Km}$. Aunque las observaciones más recientes muestran estrellas compactas con bajas masas, es decir, del orden de $0,2M_{\odot}$. Se estima que la densidad media de una estrella de neutrones es del orden

$$\rho \simeq 2,7 \cdot 10^{14}gcm^{-3} \quad (1.1)$$

la cual, es mas grande que la densidad nuclear ρ_n [2].

Con estas características, la imagen tradicional de una estrella compacta es que está compuesta en su mayoría por neutrones, por esta razón es llamada estrella de neutrones. Esto es a veces todavía el término preferido, incluso si uno habla de una estrella que contiene un núcleo de quark (que entonces se podría llamar estrella exótica del neutrones). Así pues, el término de estrella compacta es utilizado para referirse a contenido de materia exótica [2].

Con lo descrito anteriormente, los puntos característicos sobre las estrellas de neutrones es que son objetos estelares muy compactos, cuya masa tiene un valor $M \sim 1 - 2M_{\odot}$ y un radio del orden de 20Km [3]. Se producen en los núcleos de las estrellas que al final de su evolución sufren el colapso gravitacional y por consiguiente una explosión de supernova. Las estrellas de neutrones contienen densidades centrales acercándose a un orden de magnitud más allá de la densidad de materia nuclear $\rho_0 \simeq 0,16\text{bariones}/fm^3 \approx 2,8 \cdot 10^{14}gr/cm^3$. Las temperaturas interiores normalmente son relativamente frías $T \sim 1 - 100\text{Kev} \approx 10^7 - 10^9K$, dentro de una escala nuclear [3].

Así pues, desde el descubrimiento de los púlsares a finales de 1960, las estrellas de neutrones han llegado a ser los actores principales dentro de una variedad de sistemas astrofísicos energéticos compactos: estrellas aisladas de neutrones; fuentes de rayos X binarias compactadas y acrecentadas, en la que una estrella de neutrones orbita a una estrella compañera más normal; púlsares binarios de doble estrella de neutrones, repetidores gama que se encuentran en restos de supernova y la mayoría de las fuentes de explosión de rayos gamma. Un mayor número de datos observacionales sobre estrellas de neutrones se reunieron a partir del uso de una gran variedad de detectores de radio a rayos gamma, los cuales proporcionan restricciones cada vez más estrictas sobre las teorías de su constitución.

La temperatura de las estrellas de neutrones son bajas de acuerdo a una escala medida en Mev. Además, los procesos nucleares en los primeros momentos de una estrella de neutrones ocurren suficientemente rápido en comparación con el enfriamiento de la estrella que la materia esencialmente viene en su estado de masa. En la figura 1.1 mostramos un corte transversal del interior de una estrella de neutrones.

La densidad ρ aumenta con la profundidad en la estrella. Debajo de una atmósfera, comprimida por gravedad a menos de 1 cm de altura, es una corteza, típicamente de 1 km de espesor, consistente, excepto en las decenas de metros exteriores de un entramado de núcleos desnudos inmersos en un mar de electrones degenerados, como en un metal normal. La materia en la parte externa de la corteza se espera que sea principalmente Fe, el último producto final de la quema termonuclear. Con lo que el asunto se vuelve más abundantes en neutrones y se reorganiza en una secuencia, con creciente densidad, de núcleos cada vez más ricos en neutrones, debido a una serie de combinaciones de elementos químicos, tales como el Hierro, Níquel, Zinc. Con lo que, a través de estudios actuales de la ecuación de estado para la materia nuclear en las estrellas de neutrones se basan en interacciones Nucleón-Nucleón extraídas experimentos de dispersión con energías por debajo de 300 MeV, restringido a las propiedades del Deuterón [3].

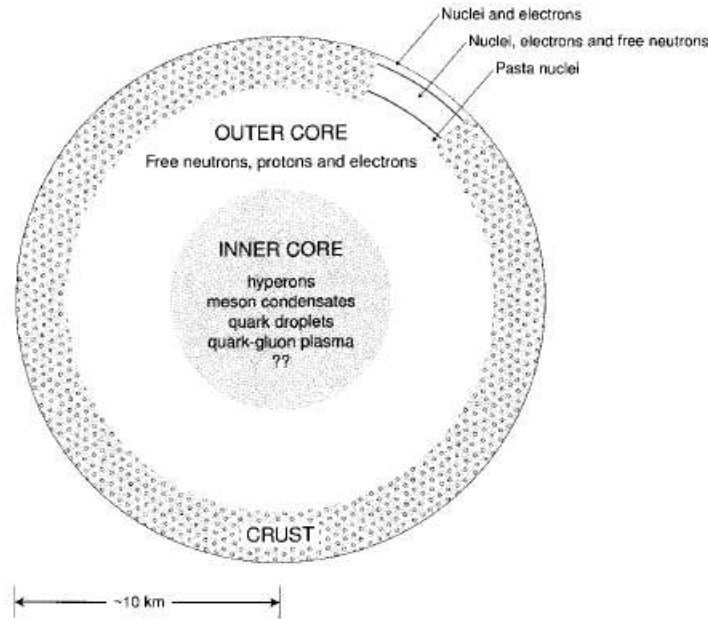


Figura 1.1: *Sección transversal de una estrella de neutrones.*

Fuente: Compact Stars: The Quest for New States of Dense Matter, Schmitt, Andreas.

1.3. Modelos existentes

Uno de los primeros pasos concernientes al descubrimiento de las estrellas nos hace retroceder al año 1934 cuando Baade y Zwicky predijeron el nacimiento de las estrellas de neutrones, las cuales se forman a partir de las explosiones de supernova, con lo cual uno de los primeros modelos fueron calculados por Oppenheimer y Volkoff, y con esto se abrió una etapa para los físicos de partículas, los cuales luchan con el problema de la materia para cuando se presentan densidades extremas [4].

Los radio-astrónomos encontraron accidentalmente el primer púlsar en 1967 [4]; el cual fue interpretado como una estrella de neutrones la cual rotaba rápidamente emitiendo radiación de Sincrotron sobre una señal estrecha

a lo largo del eje magnético. Además, las estrellas de neutrones fueron identificadas como fuentes de emisión de rayos X, resultando de la acumulación en sistemas binarios. Por ahora la existencia de las estrellas de neutrones está bien establecida. El número de púlsares alrededor de la galaxia es de aproximadamente 1,800 [4]. Sin embargo, éstas estrellas de neutrones conocidas constituyen sólo una pequeña fracción de una población tan grande, alrededor de 100,000,000. En algunos casos, sus masas podrían determinarse con bastante precisión porque forman parte de sistemas binarios o de efectos relativistas en su potencial gravitacional extremo como se puede ver en la figura 1.2.

Esto hace que todo sea extremo con las estrellas de neutrones; su estado interior (simulando un enorme núcleo), la velocidad del sonido (no lejano de c); su rotación ($1 - 1,000\text{Hz}$) y sus campos magnéticos (10^9 a 10^{15}gauss), por estas razones se puede estar lejos de un mejor entendimiento y tratamiento.

Para una determinada ecuación de estado de la forma $P = P(\rho)$ es fácil obtener mediante métodos numéricos los correspondientes modelos hidrostáticos para estrellas de neutrones. Haciendo uso de la ecuación de TOV y ecuaciones complementarias, empezando con una densidad central elegida ρ_c y dado que la ecuación de estado es independiente de T , estas dos ecuaciones son suficientes para obtener la estructura mecánica. Esto se ve después de reemplazar P por ρ en la ecuación de TOV, para que haya dos ecuaciones para las variables ρ y m . Cuando la integración llega a $\rho = P = 0$ se alcanza la superficie, es decir, hemos encontrado $r = R$ y $M = m(R)$. Repitiendo esta integración para una variedad de valores iniciales ρ_c se puede producir una secuencia de modelos para la ecuación de estado elegida. particularmente, se generan las siguientes relaciones $M = M(\rho_c)$, $R = R(\rho_c)$ y eliminado ρ_c tenemos también $R = R(M)$. Así pues, las relaciones resultantes $M(\rho_c)$ y $R(m)$ pueden cambiar considerablemente si reemplazamos la ecuación de estado por otra, como se puede ver en la figura 1.3 para $M(R)$, donde se trazan los resultados para varias ecuaciones de estado [4].

Correspondientemente Oppenheimer y Volkoff (1939) obtuvieron para esta ecuación de estado una masa máxima de sólo $M_{max} \approx 0,72M_{\odot}$. Normalmente el rango máximo varía entre $1M_{\odot}$ y $3M_{\odot}$ pero la figura 1.3 también demuestra que una ecuación de estado particularmente rígida, obtenida me-

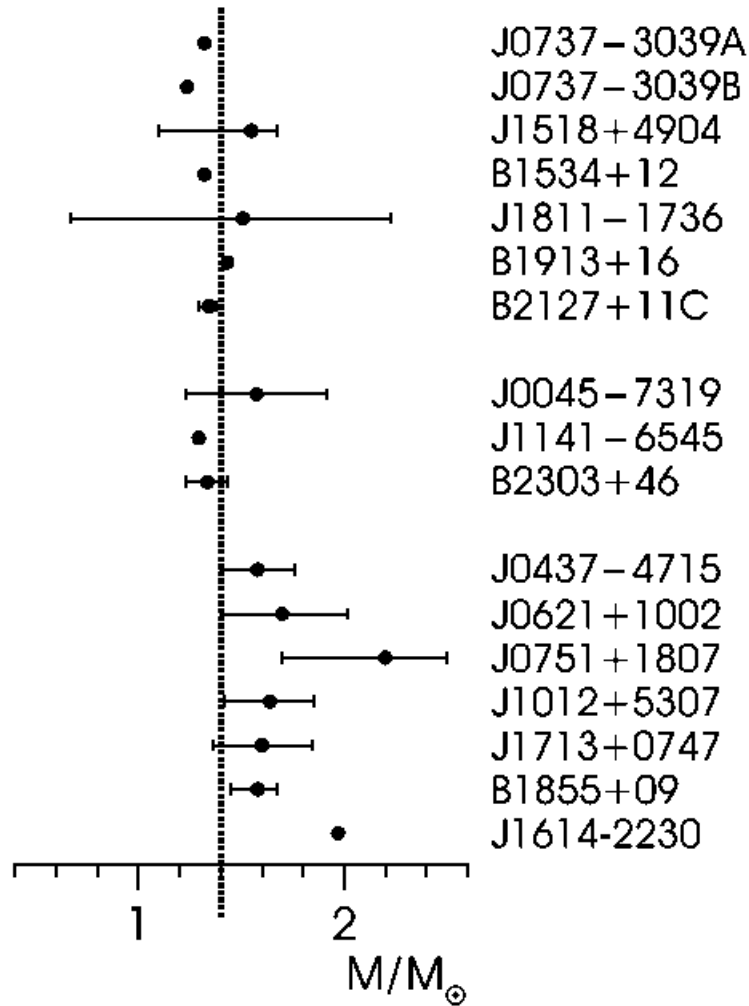


Figura 1.2: Descripción empírica para determinadas masas y de sus errores de las estrellas del neutrón (identificador a la derecha del punto de los datos). La línea vertical corresponde a la masa genérica de $1,4M_{\odot}$.

Fuente: Stellar structure and evolution, Rudolf Kippenhahn [4].

diante la inclusión de interacciones en la ecuación de Oppenheimer-Volkoff, puede conducir a masas máximas por encima $3M_{\odot}$.

La masa máxima para una estrella de neutrones es muy importante, no

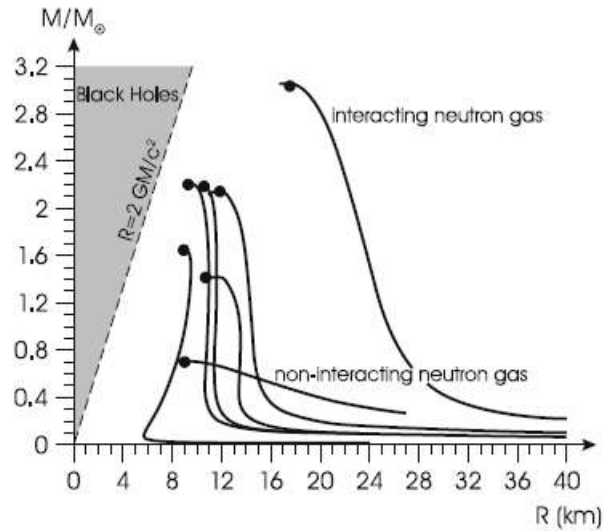


Figura 1.3: La relación M contra R de los modelos de estrella de neutrones calculados usando siete diversas ecuaciones del estado. La masa máxima se indica en cada caso por el punto sólido. Dos supuestos extremos se indican específicamente: un gas de neutrones no interactuando (Oppenheimer y Volkoff), que lleva a una ecuación de estado extremadamente blanda y una masa máxima muy baja, y una donde se incluyen las interacciones y que conduce a una masa máxima de neutrones de la estrella sobre $3M_{\odot}$.

Fuente: Stellar structure and evolution, Rudolf Kippenhahn [4].

sólo en relación a las consideraciones evolutivas, sino también en el intento de identificar objetos compactos con $M > M_{max}$ como agujeros negros.

1.4. Descripción newtoniana y necesidad de la implementación de la relatividad general

Una de las primeras formas de entendimiento sobre el comportamiento de las estrellas de neutrones es a través de los llamados púlsares. Los púlsares son por sí mismos bastante interesantes, pero tal vez la importancia está en la estructura de la estrella de neutrones. De modo que, una de las primeras formas de modelar el comportamiento de las estrellas de neutrones es a través de la teoría newtoniana.

Antes de tratar de resolver estas ecuaciones, se necesita solucionar la relación entre la densidad energética y la presión de la materia que constituye el interior estelar, es decir, una ecuación de estado.

Los primeros modelos para ecuaciones de estado surgen del modelo de gas de Fermi no interactuante, el cual contiene estadística cuántica, o sea conceptos basados en el principio de exclusión de Pauli y la relatividad especial. Las estrellas llamadas de neutrones, en realidad, también contienen algunos protones y electrones. Para mejorar este tratamiento debemos incluir interacciones nucleares además de la presión, la cual tiene parámetros que se ajustan a cantidades como la energía de unión por núcleo y la no tan bien conocida, compresibilidad nuclear. Con estas interacciones nucleares, además de la energía del gas de Fermi en la ecuación de estado, uno encuentra las masas y los radios (puros) de la estrella de neutrón que son absolutamente diferentes de los valores derivados de las ecuaciones de estado del gas de Fermi.

Como problema inicial, uno puede integrar las ecuaciones de Newton y aplicarlo sobre las estrellas enanas blancas. Además, uno impone condiciones propias de la relatividad general, de manera que uno puede entonces proceder de la misma manera para resolver la estructura de las estrellas puras de neutrones (es decir, reproduciendo los resultados de Oppenheimer y de Volkov). Es interesante en este punto comparar y ver lo importante que son las correcciones de relatividad general, es decir, lo diferente que es una estrella de neutrones de la que sería dada por los mecánica clásica de Newton.

Comenzamos entonces con la derivación de las ecuaciones de la estructura de la mecánica de Newton [5].:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\rho(r)M(r)}{r^2} = -\frac{G\epsilon(r)M(r)}{c^2r^2} \quad (1.2)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2\rho(r) = \frac{4\pi r^2\epsilon(r)}{c^2} \quad (1.3)$$

donde hemos expresado la densidad de masa a través de la densidad de energía $\epsilon(r) = \rho(r)$ (en unidades donde $c = 1$), y donde $G = 6,673 \cdot 10^{-8} \text{ dina-cm}^2/\text{g}^2$ es la constante gravitacional de Newton, $\rho(r)$ es la densidad de masa a una distancia r (en gm/cm^3) y ϵ corresponde a la densidad de energía (en ergs/cm^3). La cantidad $M(r)$ es la masa total contenida en la esfera de radio r . En la figura 1.4 se muestra una sugerencia para la derivación del sistema de ecuaciones antes descrito. Aquí, nos hemos apartado ligeramente de la física de Newton, definiendo la densidad de energía como $\epsilon(r)$ en términos de la densidad de masa $\rho(r)$ de acuerdo a la famosa ecuación de Einstein para la relatividad especial:

$$\epsilon(r) = c^2\rho(r) \quad (1.4)$$

Así pues, para resolver este conjunto de ecuaciones para $\rho(r)$ y $M(r)$ se puede integrar hacia el exterior desde el origen, $r = 0$ hasta el punto $r = R$ donde la presión decae hacia cero. Este punto R define el radio de la estrella; también es necesario un valor inicial para la presión en $r = 0$, al cual llamamos p_0 . Por supuesto, para poder realizar la integración, se necesita también conocer la densidad de energía $\epsilon(r)$ en términos de la presión $p(r)$. Esta relación es la ecuación de estado para la materia que compone a la estrella.

Ahora, seguimos con la argumentación del porque es necesario dar correcciones de tipo relativistas a las ecuaciones de la formulación newtoniana. Esto es, la formulación de Newton presentada anteriormente funciona bien mientras la masa de la estrella no sea tan grande de modo que “deforme” el espacio-tiempo. Es decir, integrar las ecuaciones (1.2) y (1.3) funcionará bien

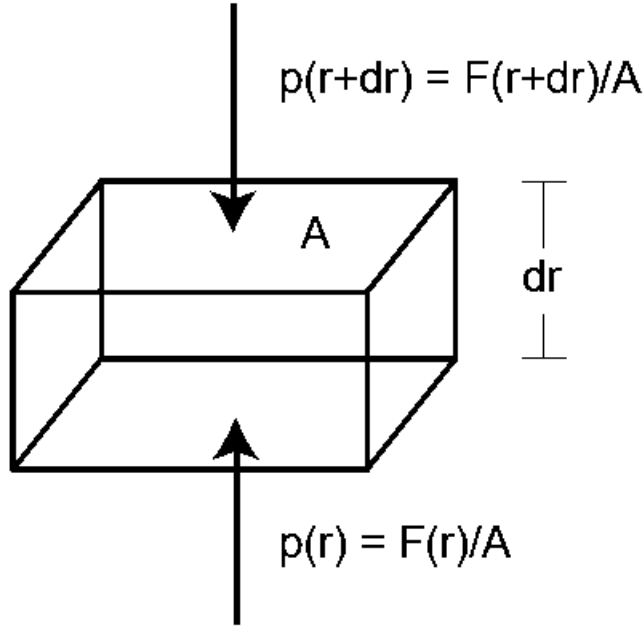


Figura 1.4: *Diagrama para la derivación de la mecánica Newtoniana.*
Fuente: *Stellar structure and evolution*, Rudolf Kippenhahn.

en los casos en que los efectos relativistas generales no sean importantes, por ejemplo, para las estrellas compactas conocidas como enanas blancas. Esto sucede cuando $GM/c^2R < 1$ se tiene que tomar en cuenta ya que este efecto se muestra de manera muy común en el caso de las estrellas típicas de neutrones. Para eso, uno puede mirar varias derivaciones de la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkov (TOV), de modo que basta con indicar simplemente las correcciones a la ecuación (1.3) en términos de tres factores adicionales (sin dimensiones), de la siguiente manera:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)M(r)}{c^2r^2} \left[1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)}\right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)c^2}\right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2r}\right]^{-1} \quad (1.5)$$

La ecuación diferencial para $M(r)$ permanece inalterada. Los dos prime-

ros factores en corchetes representan correcciones especiales de la relatividad del orden v^2/c^2 . Esto se puede ver en que la presión P va, en el límite no relativista, como $k_F^2/2m = mv^2/2$, donde k_F es la energía de Fermi, y además ϵ y Mc^2 va como mc^2 . Es decir, estos factores tienden a 1 en el límite no relativista. El último factor es una corrección relativista y el tamaño de GM/c^2r , determina si es importante (o no). Observemos que los factores de corrección son todos positivos definidos. Esto es la gravedad de Newton se hace más fuerte en cada r , es decir, ¡la relatividad especial y general fortalece la implacable atracción de la gravedad! [5].

Las ecuaciones acopladas no lineales para $p(r)$ y $M(r)$ pueden también en este caso ser integradas de $r = 0$ para un valor inicial de p_0 al punto donde $P(R) = 0$, para determinar la masa de la estrella $M = M(r)$ y el radio R para este valor de p_0 . Estas ecuaciones nos dan entonces un equilibrio entre las fuerzas gravitacionales y la presión interna. La presión es una función de las ecuaciones del estado, y para ciertas condiciones puede no ser suficiente para soportar la atracción gravitacional. Así, las ecuaciones de la estructura implican que hay una masa máxima que una estrella puede tener.

Como dijimos al inicio de este apartado, la aplicación del sistema de ecuaciones que hemos venido trabajando se verá reflejado al hablar de estrellas enanas blancas. Una estrella enana blanca es una estrella de masa baja o media que adquiere cerca del final de su vida, habiéndose quemado, a través de procesos nucleares, la mayor parte de su hidrógeno y helio formando carbono, silicio o (quizás) hierro. De modo que para estos objetos estelares, basta con resolver las ecuaciones de la estructura de Newton, ecuaciones (1.2)-(1.3).

Las estrellas enanas blancas fueron observadas por primera vez en 1844 por Friedrich Bessel. Notó que la estrella brillante Sirius se balanceaba hacia adelante y hacia atrás y luego dedujo que la estrella visible estaba siendo orbitada por algún objeto invisible, es decir, es un sistema binario. El objeto en sí se resolvió ópticamente unos 20 años más tarde y por lo tanto se ganó el nombre de “enana blanca”. Desde entonces las estrellas enanas blancas han sido observadas (o detectadas). Este tipo de estrellas típicamente tienen una masa menos de 1.4 veces respecto a la de nuestro sol, $M_\odot = 1,989 \cdot 10^{33}g$. También son mucho más pequeñas que nuestro sol, es decir, poseen radios del orden de 10^4 km comparado con el radio del sol $R_\odot = 6,96 \cdot 10^5 km$ [5].

Como resultado (y como también es el caso de las estrellas de neutrones), las dimensiones naturales para discutir las enanas blancas son que las masas estén en unidades de masa solar, M_{\odot} , y la distancia del radio en km. Así pues, surge una cuestión ¿Por qué es una buena aproximación tomar en cuenta las correcciones relativistas especiales para las enanas blancas? Esto se debe a que la estrella enana blanca habiendo quemado todo el combustible nuclear que pueda, ya no hay suficiente presión térmica para evitar que su gravedad lo aplaste. A medida que la densidad aumenta, los electrones en los átomos son empujados de manera que están muy juntos, esto provoca que los niveles de energía tienda a caer niveles bajos de los disponibles para ellos (la estrella empieza a hacerse más fría.) Eventualmente el principio de Pauli asume el control, y la presión de degeneración del electrón proporciona los medios para estabilizar la estrella contra su atracción gravitacional.

Capítulo 2

Teoría Básica

Sigamos ahora la sugerencia de Einstein al decir que la gravedad es una manifestación de la curvatura espacio-tiempo inducida por la presencia de la materia. Este hecho nos lleva a que debemos obtener un conjunto de ecuaciones que describen cuantitativamente cómo la curvatura del espacio-tiempo en cualquier evento está relacionado con la distribución de materia en ese evento. Estos serán las ecuaciones de campo gravitacional, o simplemente llamadas ecuaciones de Einstein, las cuales poseen una similitud con las ecuaciones de Maxwell que describen las leyes del electromagnetismo.

Esto es, por una parte, las Ecuaciones de Maxwell relacionan el campo electromagnético \vec{F} en cualquier caso con su fuente, que es la densidad de 4-corriente j en ese evento; mientras que de manera similar, las ecuaciones de Einstein relacionan la curvatura del espacio-tiempo con su fuente, el momento-energía de la materia. De manera similar ocurre una similitud para las ondas electromagnéticas y las ondas gravitacionales [6]. Einstein propone una forma de obtener las ecuaciones de campo en algunas situaciones a través de la teoría de la relatividad general.

2.1. Relatividad general

Antes de la relatividad especial, las nociones previas a esta referentes a las ideas del espacio y el tiempo estaban estrechamente relacionadas con la formulación de las leyes de la física newtoniana. Sin embargo, cuando estas nociones fueron eliminadas, hubo la necesidad de modificar y reformular las leyes físicas para que fueran coherentes con la estructura espacio-temporal dada por la teoría de la relatividad especial. La teoría del electromagnetismo de Maxwell ya era consistente con la relatividad especial, sin embargo su incompatibilidad con las nociones de pre-relatividad sobre la estructura del espacio-tiempo surge cuando fueron introducidos marcos inerciales preferidos, los cuales, condujeron directamente al descubrimiento de la relatividad especial.

Sin embargo la poderosa teoría de la gravitación de Newton no era consistente con la relatividad especial, pues refiere nociones sobre la influencia instantánea de un cuerpo sobre otro, aunque simplemente se vió en la necesidad de ser modificada para poder estar de acuerdo en el marco de la relatividad especial.

En contraparte, dos ideas claves motivaron a Einstein a no seguir este camino sino más bien a buscar una teoría completamente nueva referente al espacio-tiempo, dando nacimiento a la relatividad general [6].

La primer idea es que todos los cuerpos están influenciados por la gravedad y, de hecho, todos los cuerpos caen exactamente de la misma manera en un campo gravitacional. Este hecho, conocido como el **principio de equivalencia**, el cual se encuentra dentro de la teoría de la gravitación de Newton y el cual afirma que la fuerza gravitacional sobre un cuerpo es proporcional a su masa inercial. Debido a que el movimiento es independiente de la naturaleza de los cuerpos, los caminos de los cuerpos que caen libremente definen un conjunto preferido de curvas en el espacio-tiempo, al igual que en la relatividad especial los caminos en el espacio-tiempo de los cuerpos inerciales definen un conjunto preferido de curvas, independientemente de su naturaleza. Esto sugiere la posibilidad de atribuir propiedades al campo de la gravedad dentro de la estructura del espacio-tiempo.

La segunda idea que motivó la formulación de la relatividad general va bajo el nombre del principio de Mach, el cual afirma que la estructura del espacio-tiempo se ve influenciada por la materia [6]. En la relatividad especial como en las nociones de pre-relatividad del espacio-tiempo, la estructura del espacio-tiempo se da de una vez por todas y no se ve afectada por los cuerpos materiales que pueden estar presentes. En particular, el “movimiento inercial” no es influenciado por la materia en el universo. Einstein aceptó esta idea y estaba fuertemente motivado para buscar una teoría donde, a diferencia de la relatividad especial, la estructura del espacio-tiempo estuviese bajo el influjo de la presencia de la materia.

La nueva teoría del espacio, el tiempo y la gravitación, propuesta por Einstein declara lo siguiente: las propiedades intrínsecas, independientes de los observadores, del espacio-tiempo son descritas por una métrica espacio-temporal, como en la relatividad especial. Sin embargo, la métrica de espacio-tiempo no necesita tener la forma (plana) que tiene en la relatividad especial. De hecho, la curvatura, i. e., del espacio-tiempo explica los efectos físicos atribuidos generalmente a un campo gravitacional. Además, la curvatura del espacio-tiempo está relacionada con el tensor de energía y momentum de la materia en el espacio-tiempo a través de una ecuación postulada por Einstein. De esta manera, la estructura del espacio-tiempo (como se plasma en el espacio-tiempo métrico) está relacionada con el contenido de materia del espacio-tiempo, de acuerdo con algunas (pero no con todas) las ideas de Mach [6].

2.2. Principio de equivalencia

Comencemos nuestra discusión de la gravedad considerando la descripción de la fuerza gravitacional dentro de la teoría clásica, es decir, en la teoría de Newton. Dentro de esta teoría se tiene que la fuerza gravitacional \vec{f} sobre una partícula (de prueba) con masa gravitacional m_G para alguna posición es dada por

$$\vec{f} = m_G \vec{g} = -m_G \vec{\nabla} \Phi$$

donde \vec{g} es el campo gravitacional derivado del potencial gravitacional Φ para esa posición, el cual a su vez está determinado por la ecuación de Poisson

$$\vec{\nabla}\Phi = 4\pi G\rho \quad (2.1)$$

donde ρ es la densidad de materia gravitacional y G es la constante gravitacional de Newton. Tenemos entonces que ésta es la ecuación de campo de la gravedad Newtoniana. Así pues, la ecuación (2.1) no es consistente con la teoría especial de la relatividad, ya que no hay una dependencia explícita del tiempo, lo que significa que el potencial Φ (y por lo tanto la fuerza gravitacional sobre una partícula) responde instantáneamente a una perturbación hecha por la densidad de materia ρ ; pero este hecho viola el punto de la relatividad especial el cual refiere que las señales no pueden propagarse más rápidamente que c . Sin embargo, podríamos tratar de resolver esto, realizando un cambio sobre la fórmula (2.1), esto es, el operador laplaciano $\vec{\nabla}^2$ lo podemos reemplazar por el operador d'Alembertian \square^2 y haciendo el límite $c \rightarrow \infty$ y con ello construimos una ecuación de campo modificada, la cual queda como:

$$\square^2\Phi = -4\pi G\rho$$

Sin embargo, esta ecuación no produce una teoría relativista consistente. Dado que no es covariante bajo las transformaciones de Lorentz, pues la densidad de materia no se transforma en un escalar de Lorentz.

Además de la incompatibilidad de la gravedad de Newton con la relatividad especial, hay una segunda diferencia fundamental entre las fuerzas electromagnéticas y gravitacionales, la cual se describe como sigue. La ecuación de movimiento de una partícula de masa inercial m_I en un campo gravitacional es dado por

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{m_G}{m_I}\vec{\nabla}\Phi \quad (2.2)$$

Esto es un hecho experimental, pero un ligero análisis nos lleva a el cociente $\frac{m_G}{m_I}$ en la ecuación del movimiento es el mismo para todas las partículas. A partir de la ecuación (2.2) vemos que la trayectoria a través del espacio de una partícula en un campo gravitacional es independiente de la naturaleza de la partícula. Vemos pues, que esta equivalencia entre las masas gravitacionales e inerciales (lo que nos permite referirnos simplemente como 'masa'), es una coincidencia notable en la teoría de Newton. En esta teoría, no hay razón a priori por la cual la cantidad que determina la magnitud de la fuerza gravitacional sobre la partícula debe ser igual a la cantidad que determina la 'resistencia' de la partícula a una fuerza aplicada en general [7].

Esta coincidencia llevó a Einstein a su clásico experimento del elevador [7]. Este experimento consiste en tener a un observador en un elevador en descenso (caída libre, es decir, después de haber cortado los cables del elevador) y con esto tener cuerpos aislados del resto en relación a la cabina del ascensor, los cuales permanecen flotando (o en estado de ingravidez) dentro de la cabina. A su vez, un proyectil disparado a un lado del elevador, parece moverse en una línea recta a una velocidad constante, en lugar de seguir la trayectoria habitual, es decir, una curva. Todo esto se deriva del hecho de que la aceleración de cualquier partícula relativa al elevador es cero, se sigue entonces que la partícula y la cabina del elevador tienen la misma aceleración relativa a la tierra como resultado de la equivalencia de la gravedad y la masa inercial.

Todas estas observaciones se mantienen coherentes si el campo gravitacional de la tierra fuese verdaderamente uniforme. Pero esto no es así ya que el campo gravitacional de la tierra no es uniforme, pero actúa radialmente hacia adentro de su centro de masa, con una fuerza proporcional a $1/r^2$. Así, si el ascensor se dejó en caída libre durante mucho tiempo o si era muy grande (es decir, una fracción significativa del radio de la tierra), dos partículas liberadas del reposo cerca de las paredes del elevador se desviarían gradualmente hacia adentro, ya que ambos estarían cayendo a lo largo de las líneas radiales hacia el centro de la tierra. La figura (2.1) muestra un ejemplo.

Además, como resultado de la fuerza variable del campo gravitacional, las partículas liberadas del reposo cerca del suelo del elevador se desplazarían gradualmente hacia abajo, mientras que las cercanas al techo se desviarían hacia arriba. Lo que el observador en el elevador estaría experimentando sería

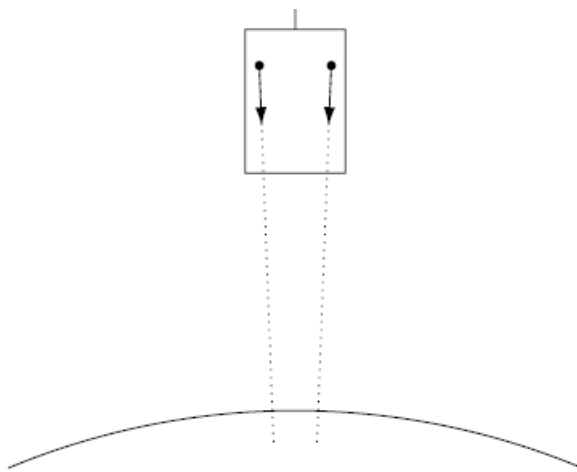


Figura 2.1: Elevador en caída libre hacia la tierra.

Fuente: *General relativity: an introduction for physicists*, Hobson, Michael.

las fuerzas de marea resultantes de la diferentes fuerzas. Debemos recordar que estas fuerzas de marea nunca pueden ser completamente anuladas en un elevador (laboratorio).

Ahora bien, como estamos considerando el elevador en caída libre en un corto período de tiempo y espacialmente podemos considerar, a un elevador en caída libre que tenga coordenadas marcadas en sus paredes (x, y, z) y un reloj que mida el tiempo t , entonces tendremos un marco inercial cartesiano que asemeja a uno de referencia, y por lo tanto las leyes de la relatividad especial se cumplen dentro del elevador.

Estas observaciones conducen al *principio de equivalencia*, el cual dice que en un laboratorio de caída libre (no rotativo), que ocupa una pequeña región del espacio-tiempo, las leyes de la física son las de la relatividad especial que en este caso fue nuestro elevador [7].

Estas observaciones llevaron a Einstein a hacer una propuesta profunda que proporciona al mismo tiempo una descripción relativista de la gravedad e incorpora de manera natural el principio de equivalencia (y consecuentemente la equivalencia de la masa gravitacional e inercial). La propuesta de Einstein

era que la gravedad ya no debería considerarse como una fuerza en el sentido convencional, sino más bien como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, esto significa que la curvatura es inducida por la presencia de la materia, la cual representa la idea central que sustenta la teoría de la relatividad general.

Con esta línea de pensamiento, si la gravedad se considera como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo y no como la acción de una 4-fuerza f , entonces la ecuación de movimiento de una partícula que se mueve sólo bajo la influencia de la gravedad debe ser la de una partícula “ libre ” en el espacio-tiempo curvo, es decir,

$$\frac{dp}{d\tau} = 0 \quad (2.3)$$

donde p es el 4-Momentum de la partícula y τ es el tiempo propio medido a lo largo de la línea de trabajo de la partícula [7].

El principio de equivalencia restringe la geometría a una posible del espacio-tiempo curvado pseudo-Riemanniano como sigue. El significado matemático del principio de equivalencia es que requiere que en cualquier evento P , se pueda definir un sistema de coordenadas X^ν tal que alrededor de P el elemento de línea del espacio-tiempo es dado por

$$ds^2 \approx \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.4)$$

donde la igualdad exacta tiene lugar en el evento P y η localmente es la métrica de Minkowski. Para lo cual podemos construir un sistema múltiple pseudo-Riemanniano en el espacio-tiempo el cual sea curvo y de cuatro dimensiones. Para el sistema de coordenadas arbitrario x^μ el elemento de línea toma la forma general

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.5)$$

Por lo tanto podemos escribir las ecuaciones de Einstein como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

Con $R_{\mu\nu}$, R y $T_{\mu\nu}$ las componentes del tensor de Ricci, el escalar de curvatura y el momento energía respectivamente. Al comparar esto con la gravedad newtoniana, en la que sólo hay una ecuación de campo gravitacional. Además, las ecuaciones de campo de Einstein no son lineales en $g_{\mu\nu}$ mientras que la gravedad newtoniana es lineal en el campo Φ . La teoría de Einstein implica así numerosas ecuaciones diferenciales no lineales, y por lo tanto no debería sorprender que la teoría sea complicada.

2.3. Simetría estática y esférica

La primera solución a las ecuaciones de Einstein se deben a los trabajos realizados por parte de Karl Schwarzschild y con esto, contemplamos la posibilidad de encontrar todas las soluciones posibles que describan el campo gravitacional exterior de un cuerpo estático y esféricamente simétrico [7], por lo que necesitamos encontrar una métrica cuatro dimensional, la cual tenga por características que el tensor de Ricci desaparezca y con esto lograr que se tenga simetría esférica y estática.

Nuestra primera tarea es definir más precisamente el significado de los términos estático y esférico simétrico y así elegir un sistema de coordenadas conveniente para el análisis de esta clase de espacio-tiempo. Un espacio-tiempo es estacionario si existe un grupo de un parámetro de isometrías, ϕ_t , cuyas órbitas son curvas de líneas de tiempo. Estos grupos de isometrías expresan la "simetría de traslación del tiempo" del espacio-tiempo [6]. Equivalente, un espacio-tiempo estacionario es uno que posee un vector de Killings ξ^a sobre la línea de tiempo. Un espacio-tiempo se dice que es estático si es estacionario y si, además, existe una hipersuperficie Σ que es ortogonal a las órbitas isométricas. Además, por el teorema de Frobenius, esto es equivalente a la exigencia de que el vector de Killings sobre la línea de tiempo ξ^a satisface

$$\xi_{[a}\nabla_b\xi_{c]} = 0 \quad (2.7)$$

El significado de esta condición adicional de la ortogonalidad de la hipersuperficie quizás se puede ver mejor introduciendo las coordenadas convenientes para los espacio-tiempo estáticos como sigue. Si $\xi^a \neq 0$ en todas partes en Σ , entonces en una vecindad de Σ , cada punto se encuentran en una órbita única de ξ^a que pasa a través de Σ . Suponiendo $\xi^a \neq 0$, elegimos coordenadas arbitrarias x^ν en Σ y etiquetamos cada punto p en la vecindad de Σ por el parámetro, t , de la órbita que comienza en Σ y termina en p , y las coordenadas x^1, x^2, x^3 de la órbita en Σ . Puesto que este sistema de coordenadas emplea el parámetro de Killings, t , como una de las coordenadas, los componentes métricos en esta base coordenada serán independientes de t .

Además, puesto que la superficie Σ_t definida como el sistema de puntos cuya coordenada de tiempo tiene el valor t es la imagen de Σ bajo la isometría ϕ_t y se sigue que cada Σ_t es también ortogonal a ξ^a . Por lo tanto, en estas coordenadas, los componentes de la métrica toman la forma:

$$ds^2 = -V^2(x^1, x^2, x^3)dt^2 + \sum_{\mu, \nu=1}^3 h_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3)dx^\mu dx^\nu, \quad (2.8)$$

donde $V^2 = -\xi_a \xi^a$ y la ausencia de dtx^μ en términos cruzados expresa la ortogonalidad de ξ^a con Σ . Una métrica estática no necesariamente debe tener términos dtx^μ cruzados en cualquier sistema de coordenadas que utilice el parámetro de Killings como una de sus coordenadas.

De la forma explícita de una métrica estática, la ecuación (2.8), se puede ver que el difeomorfismo definido por $t \rightarrow t$ (es decir, el mapeo que toma cada punto de Σ y lo lleva al punto con las mismas coordenadas espaciales en Σ_t) es una isometría.

Así, además de la simetría de la "traslación del tiempo", la simetría $t \rightarrow t + \text{constante}$, poseídos por todos los espacio-tiempo estacionarios, los espacio-tiempo estáticos también poseen una simetría de "reflexión temporal". Físicamente, los campos que son invariantes a la traslación del tiempo pueden dejar de ser invariante a la reflexión del tiempo cuando el movimiento rotatorio está implicado, puesto que la reflexión del tiempo cambiará la dirección de la rotación y así no restaurará la configuración original. Así, por ejemplo, una bola de fluido giratorio puede tener un tiempo independien-

te, pero no posee una simetría de la reflexión del tiempo. Se dice que un espacio-tiempo es esféricamente simétrico si su grupo isométrico contiene un subgrupo isomórfico al grupo $SO(3)$, y las órbitas de este subgrupo (i. e. , la colección de puntos resultantes de la acción del subgrupo en un punto dado) son esferas bidimensionales. Las isometrías de $SO(3)$ se pueden entonces interpretar físicamente como rotaciones, y así un espacio-tiempo esféricamente simétrico es aquel que tiene componentes de la métrica y sigue siendo invariante bajo rotaciones. La métrica del espacio-temporal induce una métrica para cada órbita de la 2-esfera, que, debido a la simetría rotacional, debe ser un múltiplo de la métrica de una unidad de la 2-esfera, y por lo tanto puede ser completamente caracterizado por el área total A , de la 2-esfera . El espacio-tiempo esféricamente simétrico, es conveniente introducir la función r , definida por

$$r = (A/4\pi)^{1/2} \quad (2.9)$$

Así pues, las coordenadas esféricas (θ, ϕ) , la métrica sobre cada órbita de la 2-esfera toma la forma

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2) \quad (2.10)$$

En el espacio euclidiano plano tridimensional, r también sería el valor del radio de la esfera, i. e. , la distancia desde la superficie de la esfera hasta su centro. Así pues, bajo estas coordenadas, la métrica es esférica, estática, arbitraria, espacio-tiempo simétrica y donde toma la forma sencilla de

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2) \quad (2.11)$$

La mayor parte del trabajo requerido para obtener el vacío estático, con simetría esférica para las soluciones de la ecuación de Einstein ya se han completado, ya que hemos reducido el problema general de determinar 10 funciones desconocidas (las componentes métricas, $g_{\mu\nu}$) de cuatro variables (las cuatro coordenadas) para determinar dos funciones (f y h) de una variable r .

2.4. Fluido anisotrópico

Para la mayoría de los sistemas en que la materia superdensa es localmente isotrópico dependen completamente de teorías gravitacionales relativistas, para las cuales son las interacciones fuertes las que dominan la física local. Esto se debe a que una de las primeras aproximaciones sugieren que las propiedades de la materia dependen de las fuerzas químicas. Por consiguiente, uno no puede concluir a priori si la materia que está interactuando fuertemente es o no localmente isotrópico. Esto trae por consiguiente un par de cuestiones: i) ¿La materia fuertemente interactuante es descrita por una ecuación de estado localmente anisotrópica? ii) Si es así, ¿Qué tan grande es la isotropía? La respuesta a ambas preguntas requiere cálculos detallados no relativistas del orden de $\rho < 10^{15} gcm^{-3}$ y relativistas del orden $\rho > 10^{15} gcm^{-3}$. En la actualidad hay razones para creer que isotropía puede ocurrir en un rango de $\rho < 10^{15} gcm^{-3}$ [9].

Se cree que las interacciones de neutrón-neutrón pueden llevar a un estado superfluido con un espacio anisotrópico. Aunque los efectos de este tipo pueden ser pequeños, aún no se han realizado cálculos detallados en la gama de densidad. Otra posible fuente de anisotropía local sería un núcleo sólido. Los cálculos recientes indican que un estado sólido puede ocurrir para la materia fría para un valor de densidad arriba de $4 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{15} gcm^{-3}$, sin embargo, la naturaleza exacta de tal estado es hasta ahora confuso. Aunque los ejemplos anteriores sugieren fuertemente que algún tipo de isotropía pueda estar presente, parece que el efecto sería grande. Sin embargo, en vista de las incertidumbres y los dificultades teóricas involucradas en el tratamiento de la materia superdensa, enfatizaremos los posibles efectos que se esperaría para las distribuciones esféricas simétricas de la materia.

Ahora consideramos una distribución de equilibrio estático de la materia que es esférica simétrica, pero con presiones que en general son localmente anisotrópicas. La simetría esférica implica que (en coordenadas canónicas) las componentes del tensor de energía T_{ν}^{μ} sea diagonal; esto es $T_{\nu}^{\mu} = diagonal(\rho, -p_r, -p_{\theta}, -p_{\phi})$. Y además $p_{\theta} = p_{\phi}$ que vamos a denotar por p_{\perp} . Sin más especificaciones sobre las relaciones entre presión radial, presión tangencial y densidad, tendremos las formulas de manera completamente general. Las cantidades p_{\perp} , p_r puede contener contribuciones de presión de

fluidos así como otras tensiones. Así pues, por conveniencia vamos a llamar p_r para referirnos a la presión radial y p_\perp para la presión tangencial [9].

Con estas aclaraciones, pasemos a describir la forma en la que vamos a describir el proceso.

La geometría espacio-tiempo y la distribución de la materia están determinadas por las ecuaciones de Einstein

$$G_\nu^\mu = \kappa T_\nu^\mu \quad (2.12)$$

dónde $\kappa = 8\pi$. En coordenadas de Schwarzschild la métrica puede escribirse como:

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.13)$$

con T_ν^μ dado por :

$$T_\nu^\mu = \text{diagonal}(-\rho, p_r, p_\perp, p_\perp) \quad (2.14)$$

Observamos que la única diferencia entre las ecuaciones anteriores y las que describen materia de un fluido perfecto y anisotrópico en simetría esférica es que $p_r \neq p_\perp$. Un análisis sobre las ecuaciones muestra que tenemos tres ecuaciones, por consiguiente, es necesario especificar además dos ecuaciones de estado, como $p_r = p_r(\rho)$ y $p_\perp = p_\perp(\rho)$. En el caso en que $p_r = p_\perp$ es evidente que el conjunto de ecuaciones reproduce las ecuaciones para materia isotrópica esféricamente simétrica.

2.5. Ecuación de estado

Para poder darnos una idea de la información que involucra la ecuación de estado, comencemos hablando sobre el concepto de equilibrio térmico local, debido que parte de este concepto nos hace tener una buena conexión al

momento de referirnos sobre la ecuación de estado. Así pues existe evidencia empírica la cual muestra que en una parte del espacio aislada del resto del universo, la materia y la radiación tienden hacia un estado de equilibrio termodinámico, en donde este estado de equilibrio se logra cuando se producen suficientes interacciones entre las partículas materiales (“colisiones”) y entre los fotones y las partículas de masa (dispersiones y absorciones). En tal estado del equilibrio termodinámico el campo de la radiación llega a ser isotrópico y la distribución de la energía del fotón es descrita por la función de Planck (radiación de cuerpo). Las funciones de distribución estadística tanto de las partículas de masa como de los fotones se caracterizan entonces por una sola temperatura T . Sabemos que las estrellas no son sistemas aislados, porque emiten radiación y generan energía (nuclear) en sus interiores. De hecho, la temperatura superficial del sol es aproximadamente $6000K$, mientras que se estima a través del teorema de Virial, que la temperatura interior debe del orden de 10^7K , por esta razón se sugiere que las estrellas no están en equilibrio térmico global. Sin embargo, resulta que localmente dentro de una estrella, un estado de equilibrio termodinámico puede ser alcanzado. Esto significa que dentro de una región mucho más pequeña que las dimensiones de una estrella, pero más grande que la distancia media entre las interacciones de las partículas (tanto las partículas de gas como los fotones), es decir, más grandes que la vía libre, existe una temperatura local bien definida que describe las distribuciones estadísticas de las partículas. Para un mejor entendimiento sobre el camino libre medio para los fotones, consideremos lo siguiente:

$$\iota_{ph} = 1/\kappa\rho \quad (2.15)$$

donde κ es el coeficiente de opacidad, es decir, la sección transversal efectiva por unidad de masa. La densidad media en el sol es $\bar{\rho} = 1,4g/cm^3$, con lo cual sugiere un camino libre medio del orden de $\iota_{ph} \approx 1cm$. En otras palabras, la materia estelar es muy opaca a la radiación. La diferencia de temperatura sobre una distancia ι_{ph} es decir, entre la emisión y la absorción, se puede estimar como

$$\Delta T \approx \frac{dT}{dr} \iota_{ph} \approx \frac{T_c}{R} \iota_{ph} \approx \frac{10^7}{10^{11}} \approx 10^{-4}K$$

que es una pequeña fracción (10^{-11}) de la temperatura típica interior que tiene un valor de $10^7 K$. Usando una estimación similar, puede ser demostrado que el camino libre medio para las interacciones entre las partículas ionizadas del gas (iones y electrones) es varias órdenes de la magnitud más pequeñas que ι_{ph} , por lo tanto una pequeña región puede ser definida (un 'punto' para todos los propósitos prácticos) el cual es $> \iota_{ph}$ pero mucho menor que la escala de longitud sobre la que ocurren cambios significativos de las cantidades termodinámicas. Esto se denomina equilibrio termodinámico local. Por lo tanto, podemos asumir una distribución de temperatura bien definida dentro de la estrella.

Además, el tiempo promedio entre las interacciones de las partículas (el tiempo libre medio) es mucho más corto que la escala temporal para los cambios de las propiedades macroscópicas. Por lo tanto un estado de *equilibrio termodinámico local* se asegura en todo momento en el interior estelar, lo que permite el cálculo de todas las propiedades termodinámicas del gas estelar en términos de los valores locales de temperatura, densidad y composición, a medida que cambian del centro a la superficie.

Prosiguiendo con la información, la ecuación de estado describe las propiedades microscópicas de la materia estelar, dada la densidad ρ , la temperatura T y la composición X_i . Con esto, generalmente se expresa como la relación entre la presión y estas cantidades, es decir

$$P = P(\rho, T, X_i) \quad (2.16)$$

Usando las leyes de la termodinámica y una ecuación similar para la energía interna $U(\rho, T, X_i)$, podemos derivar para la ecuación de estado las propiedades termodinámicas que son necesarias para describir la estructura de una estrella, tales como los calores específicos C_v y C_p el exponente adiabático γ_{ad} y el gradiente de temperatura adiabático ∇_{ad} . Un ejemplo es la ecuación de estado del gas ideal la cual hemos asumido que para las estrellas como el sol se tiene la relación:

$$P = nKT \quad P = \frac{k}{\mu m_u} \rho T \quad (2.17)$$

Esto puede ser tomado como punto de partida para poder cubrir todas las

condiciones físicas que pueden prevalecer dentro de una estrella. La ley del gas ideal pertenece a las partículas que se comportan según la física clásica. Sin embargo, tanto la mecánica cuántica y los efectos relativistas especiales pueden ser importantes bajo condiciones físicas extremas en interiores estelares. Además, los fotones (que pueden ser descritos como partículas extremadamente relativistas) pueden ser una fuente importante de presión. Podemos definir un gas ideal o perfecto como una mezcla de partículas libres y no interactuantes. Por supuesto las partículas en tal gas interactúan, así que más precisamente requerimos que sus energías de la interacción sean pequeñas comparadas a sus energías cinéticas.

De la mecánica estadística podemos derivar las propiedades de un gas tan perfecto, ambos en el límite clásico (recuperando la ley del gas ideal) y en el límite mecánico-cuántico (conduciendo a la degeneración del electrón), y en el no relativista y en el límite relativista (es decir, válido para la radiación).

Además, varios efectos no ideales pueden llegar a ser importantes. Las altas temperaturas ($> 10^6 K$) en interiores estelares aseguran que el gas será ionizado completamente, pero a temperaturas más bajas (en las capas externas) la ionización será de manera parcial, con efectos importantes sobre las características termodinámicas.

En las propuestas y deducciones de las ecuaciones de estado para objetos compactos Witten (estrellas de Quarks) propone una ecuación de estado de la forma:

$$P = \frac{1}{3}(\rho - B_g)$$

conocido como modelo de MIT - Bag resultado del efecto de la interacción de los quarks y su confinamiento. Mientras que en el caso de modelos clásicos de objetos compactos como es sabido se tiene ecuaciones de estado politropicas $P = \mu\rho^n$ y en particular para $n = 3$ es asociada a estrellas de neutrones. La ecuación de estado que proponemos es de la forma

$$P = H(\rho^3 - S)$$

considerando en efecto asociado con la presión de degeneración de los neu-

tronos.

2.6. El sistema de ecuaciones

El tipo de materia que deseamos estudiar corresponde a un fluido anisotrópico, es decir, un fluido con presiones radiales y tangenciales diferentes, en el cual, el comportamiento está dado de acuerdo a la teoría general de la relatividad de Einstein, en cuyo caso, el sistema de ecuaciones viene descrito de la siguiente manera.

Comenzamos escribiendo la métrica propuesta que hemos de utilizar y la cual viene dada de la siguiente manera.

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m(r)}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - y(r)^2 dt^2 \quad (2.18)$$

Donde $y(r)$ representa la función del corrimiento al rojo gravitacional y $m(r)$ representa la función de masa. De modo que Las ecuaciones de Einstein (2.12) sugieren el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.19)$$

con T_ν^μ dado por :

$$T_\nu^\mu = \text{diagonal}(-\rho, p_r, p_\perp, p_\perp) \quad (2.20)$$

A partir de esto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$kc^2\rho(r) = \frac{2m'}{r^2} \quad (2.21)$$

$$kP_r(r) = -\frac{2(-r + 2m)y'}{r^2y(r)} - \frac{2m}{r^3} \quad (2.22)$$

$$kP_t(r) = -\frac{(-r + 2m)y''}{ry} - \left(\frac{y'}{ry} + \frac{1}{r^2}\right)m' - \frac{(m-r)y'}{r^2y} + \frac{m}{r^3} \quad (2.23)$$

Donde $m(r)$ y $y(r)$ representan funciones correspondientes a la variable r y dónde las funciones primadas representan la primer y segunda derivada respecto a la variable r .

Adicional a esto, tenemos la ecuación de conservación

$$\frac{dP_r(r)}{dr} = -\frac{(c^2\rho + P_r)y'}{y} + \frac{2(P_r - P_t)}{r} \quad (2.24)$$

y la ecuación de estado

$$P_r(\rho) = H\rho^3 - S \quad (2.25)$$

Ahora, proponemos la ecuación de estado en el sentido de que es una variante de la conocida ecuación politrópica, dónde el parámetro S , como veremos, está relacionado con la presión en la frontera y H con la presión y la densidad en el centro.

Retomando el sistema de ecuaciones anterior, comenzaremos un algoritmo para dar solución a cada una de nuestras funciones hidroestáticas y encontrar los valores para $\rho(r)$, $P_r(r)$, y $P_t(r)$ respectivamente.

Para dar comienzo con nuestro análisis y para poder resolver el sistema mencionado anteriormente, comenzamos por indagar la forma general que debe tener nuestra función del corrimiento al rojo gravitacional $y(r)$ y para nuestro propósito lo haremos a través de la ecuación (2.25).

$$\frac{2(r-2m)y'}{kr^2y} - \frac{2m}{kr^3} - H \left(\frac{2m'}{kc^2r^2} \right)^3 + S = 0 \quad (2.26)$$

A partir de la ecuación anterior, y haciendo una ligera observación a la expresión resultante, distinguimos que la ecuación diferencial es de orden lineal para $y(r)$ mientras que $param(r)$ la ecuación toma una forma fraccionaria. Debido a esto, nos será más útil dar la forma correspondiente para la función de masa $m(r)$ y a partir de ahí tratar de encontrar $y(r)$. Resolviendo el sistema (2.26) llegamos a que $y(r)$ adquiere la siguiente forma:

$$y(r) = Ce^{\int \left(-\frac{1}{2} \frac{H \left(\frac{2m'}{kc^2r^2} \right)^3 r^3 k - Sr^3 k + 2m}{r(-r+2m)} dr \right)} \quad (2.27)$$

Donde C corresponde a la constante de integración.

Comezamos por construir la solución para la función $y(r)$ del sistema, como lo mencionamos anteriormente, suponemos una forma explícita de $m(r)$, esto en base a [8] y elegimos las funciones de $m(r)$ físicamente aceptables. Sustituimos entonces en (2.27) y luego integramos para conocer el valor de $y(r)$. Una vez que conocemos la forma $y(r)$ y $m(r)$ procedemos a encontrar los valores para la densidad, presión radial y presión tangencial respectivamente.

Para dicha finalidad, en principio, se puede hacer mediante el uso del sistema de ecuaciones (2.21-2.23) respectivamente, sin embargo haremos un cambio en el sentido que usaremos otras ecuaciones que son propiamente la ecuación de conservación y la ecuación de estado.

Continuando con nuestro procedimiento, una vez que conocemos los valores de nuestras funciones hidroestáticas, pasamos a encontrar los valores de nuestras constantes que surgen dentro de nuestro procedimiento. Estas constantes corresponden a S y H respectivamente.

Finalmente analizamos los valores que deben de tener nuestras funciones hidroestáticas para que cumplan con las condiciones físicamente aceptables, es decir, revisaremos las condiciones necesarias (intervalos) para que esto

suceda.

Capítulo 3

Modelo propuesto y su solución

A partir de ahora y con las ecuaciones expuestas en el capítulo anterior y con la finalidad de obtener y entender soluciones que sean analíticas, elegimos una forma específica de la masa, la cual nos permita integrar el sistema y sea físicamente aceptable. Tal solución la tomamos a partir de la selección de los valores para la masa $m(r)$ de acuerdo a [8].

3.1. Condiciones físicas de modelos estelares

Consideremos ahora la forma en cómo podemos dar solución a las ecuaciones de campo de Einstein y así encontrar las funciones de la métrica $g_{\mu\nu}$ para cualquier situación física dada. Como podemos notar, el hecho de que se tenga un carácter no lineal en las ecuaciones de campo, significa que una solución general para una distribución de la materia arbitraria es analíticamente difícil de manejar. El problema se hace más fácil si buscamos soluciones especiales, por ejemplo, aquellas que representan espacio-tiempos que poseen simetrías. La primera solución exacta a las ecuaciones de Einstein fue encontrada por Karl Schwarzschild en 1916 [7].

Schwarzschild buscó que la métrica $g_{\mu\nu}$ representará el campo gravita-

cional con simetría esférica estático en el espacio vacío que rodea algún objeto esférico masivo tal como una estrella. Por lo tanto, resolviendo las ecuaciones de Einstein en el vacío tenemos:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.1)$$

Donde:

$$A(r) = \alpha \left(1 + \frac{k}{r}\right) \quad y \quad B(r) = \left(1 + \frac{k}{r}\right)^{-1}$$

Notamos enseguida que la constante de integración k debe de alguna manera representar la masa del objeto que produce el campo gravitacional, de la siguiente manera. Podemos identificar k y α considerando el límite de campo débil, en el que requerimos que

$$\frac{A(r)}{c^2} \longrightarrow 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

donde Φ es el potencial gravitacional Newtoniano. Por otra parte, en el límite de campo débil, r puede ser identificado como la distancia radial en la que se considera una muy buena aproximación. Para una masa M en una simetría esférica tenemos $\phi = -GM/r$ con lo que se concluye $k = -2GM/c^2$ y $\alpha = c^2$. Por lo tanto, la métrica de Schwarzschild para el espacio-tiempo vacío fuera de un cuerpo esférico de masa M es

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (3.2)$$

Vamos a utilizar esta métrica para investigar la física en las cercanías de un objeto esférico de masa M [7].

3.2. Construcción de la solución

Para la asignación de la función de masa, podemos tomar algunas funciones que sabemos generan un comportamiento adecuado para la densidad.

En nuestro caso tomaremos esta como la función de masa de la solución isotrópica de Tolman IV [8]. Así que por propósitos de completitud describiremos la solución de Tolman, la cual tiene la métrica dada por:

$$ds^2 = -B^2 \left(1 + \frac{r^2}{A^2}\right) dt^2 + \frac{1 + 2\frac{r^2}{A^2}}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \left(1 + \frac{r^2}{A^2}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.3)$$

Comparando la parte radial de la métrica propuesta (2.18) y la métrica de Tolman IV, obtenemos el valor correspondiente para la función de masa e igualando entonces los términos correspondientes llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} = \frac{1 + 2\frac{r^2}{A^2}}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \left(1 + \frac{r^2}{A^2}\right)} \quad (3.4)$$

Resolviendo la ecuación anterior, se llega a que el valor para la masa es el siguiente:

$$m(r) = \frac{1}{2} \frac{r^3 (A^2 + B^2 + r^2)}{B^2 (A^2 + 2r^2)} \quad (3.5)$$

Para evitar confusiones, aquí hacemos un cambio de variable, ya que R es una variable asignada para referirnos a la frontera de la estrella. Así pues hacemos $R = B$.

Enseguida, con el valor que obtuvimos para la función de masa $m(r)$, procedemos a su substitución en la ecuación diferencial (2.27).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}y(r) &= \frac{1}{2} \frac{ry \left(\frac{3A^4+3A^2B^2+7A^2r^2+2B^2r^2+6r^4}{B^2(A^2+2r^2)^2kc^2} \right)^3 B^2k (A^2 + 2r^2) H}{(B^2 - r^2) (A^2 + r^2)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{ry (A^2B^2Sk + B^2Sk r^2 - A^2 - B^2 - r^2)}{(B^2 - r^2) (A^2 + r^2)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Integrando la expresión anterior llegamos a que $y(r)$ tiene la siguiente forma.

$$\begin{aligned} y(r) &= Ce^{\int \frac{1}{2} \frac{r \left(\frac{3A^4+3A^2B^2+7A^2r^2+2B^2r^2+6r^4}{B^2+(A^2+2r^2)^2kc^2} \right)^3 B^2k (A^2 + 2r^2) H}{(B^2 - r^2) (A^2 + r^2)} dr} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{(A^2B^2Sk + 2B^2Sk r^2 - A^2 - B^2 - r^2)}{(B^2 - r^2) (A^2 + r^2)} dr \end{aligned} \quad (3.7)$$

Aquí observamos que la integral puede ser separada en dos partes.

$$\begin{aligned} y(r) &= e^{-\frac{H}{24} \frac{f_1 r^6 + f_2 r^4 + f_3 r^2 + f_4}{c^6 B^4 k^2 (A^2 + 2r^2)^4 (A^2 + 2B^2) A^2}} \\ &\quad (A^2 + r^2)^{-\frac{1}{4} \frac{(2A^2 + B^2)^3 H - A^4 B^6 c^6 k^2 (A^2 Sk + 1)}{c^6 k^2 (A^2 + B^2) A^4 B^4}} \\ &\quad (A^2 + 2r^2)^{\frac{1}{16} \frac{H (113A^8 + 360A^6 B^2 + 344A^4 B^4 + 96A^2 B^6 + 16B^8)}{c^6 B^4 k^2 (A^2 + 2B^2)^2 A^4}} \\ &\quad (B^2 - r^2)^{-\frac{1}{4} \frac{(3A^2 + 4B^2)^3 H - (A^2 + 2B^2)^3 (B^2 Sk - 1) c^6 B^4 k^2}{c^6 B^4 k^2 (A^2 + B^2) (A^2 + 2B^2)^2}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Donde:

$$f_1 = 588A^6 + 948A^4B^2 - 48A^2B^4 - 96B^6$$

$$\begin{aligned}
f_2 &= 24A^2 (43A^6 + 85A^4B^2 + 20A^2B^4 - 4B^6) \\
f_3 &= A^4 (603A^6 + 1358A^4B^2 + 596A^2B^4 + 8B^6) \\
f_4 &= 2A^6 (60A^6 + 155A^4B^2 + 104A^2B^4 + 20B^6)
\end{aligned}$$

Una vez que tenemos determinada la forma de $y(r)$, proseguimos a determinar la forma de las funciones hidrostáticas. Para determinar la densidad hacemos uso de la ecuación 2.21, y para determinar el valor de la presión radial tenemos dos alternativas, las cuales son, haciendo uso de de la ecuación(2.25) o de la ecuación (2.22) y para la presión tangencial, de igual manera, podemos hacer uso de (2.23) y la otra es despejando el valor de $P_t(r)$ de la ecuación de conservación(2.24).

Como lo habiamos comentado anteriormente, la razón de que podamos usar la ecuación de estado y la ecuación de conservación es que nos ofrece una alternativa más facil de poder obtener los valores correspondientes para los valores de las presiones, ésta es la justificacion por la cual prescindimos de las ecuaciones (2.22) y (2.23).

Despejando entonces el valor de la presión tangencial $P_t(r)$ de la ecuación (2.24) obtenemos la siguiente expresión:

$$P_t(r) = -\frac{r}{2}P'_r(r) - \frac{r(c^2\rho(r) + P_r(r))y'}{2y} + P_r(r) \quad (3.9)$$

De esta expresión,observamos que necesitamos el valor de y' y tambien la derivada de la presión radial. Para determinar el valor requerido para y' hacemos uso de la ecuación (2.22) y luego de despejes obtenemos el valor requerido:

$$y' = -\frac{y(P_r(r)kr^3 + 2m)}{2r(-r + 2m)} \quad (3.10)$$

Sutituyendo la expresión anterior y la expresión de la derivada de la presión radial en (3.9) obtenemos la forma de la presion tangencial

$$\begin{aligned}
P_t(r) = & -\frac{1}{2} \frac{rH\rho^{\frac{1}{2}}4\rho'}{n\rho} + \frac{1}{4} \frac{\rho kr^3 H^2}{-r+2m} \\
& + \frac{1}{4} \frac{H\rho c^2 kr^3}{-r+2m} + \frac{1}{2} \frac{\rho^{\frac{1}{2}}(-Skr^3+5m-2r)H}{-r+2m} \\
& + \frac{1}{4} \frac{c^2(-Skr^3+2m)\rho}{-r+2m} - \frac{1}{4} \frac{S(-Skr^3+10m-4r)}{-r+2m}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Para la densidad tenemos:

$$\rho(r) = \frac{3A^4 + 2r^2(B^2 + 3r^2) + A^2(3B^2 + 7r^2)}{B^2(A^2 + 2r^2)^2 k c^2} \tag{3.12}$$

Para conocer el valor de presión radial hacemos uso de la ecuación de estado, quedando entonces de la siguiente manera:

$$P_r(\rho) = H\rho^3 - S \tag{3.13}$$

Substituyendo el valor obtenido de la densidad en (3.13) obtenemos la expresión siguiente:

$$P_r(\rho) = \frac{H(3A^4 + 2r^2(B^2 + 3r^2) + A^2(3B^2 + 7r^2))^3}{B^6(A^2 + 2r^2)^6 k^3 c^6} - S \tag{3.14}$$

El valor de la constante S lo obtenemos al imponer que la presión radial debe de anularse en la superficie, es decir, $P_r(R) = 0$. Luego, S tiene el valor siguiente:

$$S = \frac{H(3A^4 + 3A^2B^2 + 7A^2R^2 + 2B^2R^2 + 6R^4)^3}{B^6(A^2 + 2R^2)^6 k^3 c^6} \tag{3.15}$$

Substituyendo la expresión anterior en (3.14) obtenemos la forma completa para la presión radial

$$P_r(r) = \frac{H(3A^4 + 3A^2B^2 + 7A^2r^2 + 2B^2r^2 + 6r^4)^3}{B^6(A^2 + 2r^2)^6 k^3 c^6} - \frac{H(3A^4 + 3A^2B^2 + 7A^2R^2 + 2B^2R^2 + 6R^4)^3}{B^6(A^2 + 2R^2)^6 k^3 c^6} \quad (3.16)$$

Finalmente, el valor para la expresión de la presión tangencial queda de la siguiente manera:

$$P_t(r) = -\frac{3(rH\rho^2\rho')}{2} + \frac{H^2hr^8 + c^2r\rho(2m + Hkr^5 - kr^2S)}{-4 + 8m} + \frac{S(4 - 10m + kr^2S)2Hr^3\rho(2 - 5m + kr^2S)}{-4 + 8m} \quad (3.17)$$

Resumiendo, las variables hidrostaticas quedan expresados como:

$$\rho(r) = \frac{3A^4 + 2r^2(B^2 + 3r^2) + A^2(3B^2 + 7r^2)}{B^2(A^2 + 2r^2)^2 k c^2} \quad (3.18)$$

$$P_r(r) = \frac{H(3A^4 + 3A^2B^2 + 7A^2r^2 + 2B^2r^2 + 6r^4)^3}{B^6(A^2 + 2r^2)^6 k^3 c^6} - \frac{H(3A^4 + 3A^2B^2 + 7A^2R^2 + 2B^2R^2 + 6R^4)^3}{B^6(A^2 + 2R^2)^6 k^3 c^6} \quad (3.19)$$

$$P_t(r) = -\frac{3(rH\rho^2\rho')}{2} + \frac{H^2hr^8 + c^2r\rho(2m + Hkr^5 - kr^2S)}{-4 + 8m} + \frac{S(4 - 10m + kr^2S)2Hr^3\rho(2 - 5m + kr^2S)}{-4 + 8m} \quad (3.20)$$

Hasta el momento hemos determinado la forma precisa de la solución, lo que significa que conocemos analíticamente las funciones métricas (m, y) dadas por (3.5) y (3.8) así como la densidad, presión radial y presión tangencial, al ser esta cociente de polinomios uno espera que las constantes deban ser restringidas para que la solución no sea singular.

En el siguiente capítulo analizamos la solución de manera gráfica para determinar a partir de rangos de las constantes y valores específicos para la aplicación a estrellas de neutrones.

Capítulo 4

Resultados

Comenzamos por citar las condiciones con las cuales hemos de determinar los intervalos dónde deben estar nuestras soluciones.

4.1. Implicación de las condiciones

Hagamos entonces el análisis correspondiente sobre nuestras funciones hidrostáticas, para esto, partiremos de las siguientes premisas [10] :

- i) La densidad debe ser positiva en el interior $\rho(r) > 0$ y regular para $r \in [0, R]$
- ii) Las presiones P_r y P_t deben ser regulares y positivas para $r \in [0, R]$
- iii) La presión radial debe ser una función monótona decreciente con valor máximo en el centro, esto es, $P_r(R) = 0$, donde R denota el radio de la estrella.
- iv) $\frac{d\rho}{dr} |_{r=0} = 0$ y $\frac{d^2\rho}{dr^2} |_{r=0} < 0$, para $0 < r \leq R$
- v) $\frac{dP_r}{dr} = 0$ y $\frac{d^2P_r}{dr^2} < 0$, ambas condiciones para cuando $r = 0$, esto para que el gradiente de la densidad sea negativo para $0 < r \leq R$
- vi) La condición de causalidad $(dP_t/d\rho)^{\frac{1}{2}} < c$, i.e. la velocidad del sonido radial y tangencial debe ser menor que la velocidad de la luz en el interior.

Siguiendo con la cuestion del análisis sobre la velocidad del sonido, hacemos uso de la definicion para determinar las velocidades del sonido radial y tangencial respectivamente. Dicha definición viene dada de la siguiente manera:

$$v_r^2 = \frac{\partial P_r(\rho)}{\partial \rho} = \frac{dP_r}{dr} \bigg/ \frac{d\rho}{dr} \quad (4.1)$$

$$v_t^2 = \frac{\partial P_t(\rho)}{\partial \rho} = \frac{dP_t}{dr} \bigg/ \frac{d\rho}{dr} \quad (4.2)$$

vii) Otro punto deseable para que el modelo sea fisicamente aceptable es que se cumple la relación $v_t^2 - v_r^2 < 0$ [11].

Ahora bien, estamos en condiciones de poner a prueba nuestro modelo contruido en el apartado anterior.

Mencionamos que el procedimiento lo haremos en dos partes, a saber, analizaremos las condiciones en el origen de la estrella, es decir, en $r = 0$ y enseguida haremos el análisis en la frontera de la estrella, es decir, en $r = R$.

Primeramente hacemos el análisis en la parte central de la estrella, esto es, evaluamos en $r = 0$.

El sistema nos queda entonces de la siguiente manera.

$$\rho(0) = \frac{3A^4 + 3B^2}{B^2A^4kc^2} > 0 \quad (4.3)$$

$$P_r(0) = \frac{H(3A^4 + 3A^2 + 3A^2B^2)^3}{B^6A^{12}k^3c^6} - \frac{H(3A^4 + 3A^2B^2 + 7A^2R^2 + 2B^2R^2 + 6R^4)^3}{B^6(A^2 + 2R^2)^6k^3c^6} > 0 \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} P_t(0) &= \frac{2(5A^2 + 6R^2)R^2H(27A^8 + 126A^6R^2 + 280A^4R^4 + 312A^2R^6)}{A^6k^3c^6(A^2 + 2R^2)^6} \\ &+ \frac{144R^83(5A^2 + 6R^2)R^2H(45A^8 + 240A^6R^2 + 556A^4R^4)}{A^6k^3c^6(A^2 + 2R^2)^6} \\ &+ \frac{624A^2R^6 + 288R^83(5A^2 + 6R^2)R^2H(36A^8 + 240A^6R^2 + 556A^4R^4)}{A^6k^3c^6(A^2 + 2R^2)^6} \\ &+ \frac{(624A^2R^6 + 288R^85A^2 + 6R^2)R^2H(27A^8 + 171A^6R^2 + 439A^4R^4)}{k^3c^6(A^2 + 2R^2)^6B^6} \\ &+ \frac{528A^2R^6 + 252R^8}{k^3c^6(A^2 + 2R^2)^6B^6} > 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

A partir de este sistema, podemos verificar los puntos i) y ii) se satisfagan en el origen, pues notamos enseguida que las expresiones (4.3) y (4.4) son claramente positivas. Sin embargo para la expresión (4.5) no es fácil ver de manera algebraica si cumple con la condición solicitada. Para verificar tal condición, nos apoyaremos de un gráfico, el cual será expuesto más adelante.

Continuando con el análisis del sistema, obtenemos las expresiones de la primera derivada, esto, para verificar los puntos iv) y v) respectivamente.

$$\left. \frac{d\rho(r)}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (4.6)$$

$$\left. \frac{dP_r(r)}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (4.7)$$

$$\left. \frac{dP_t(r)}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (4.8)$$

Estas expresiones nos permiten verificar el resultado buscado.

Pasamos ahora al análisis de las segundas derivadas, así que el sistema queda de la siguiente manera:

$$\left. \frac{d^2 \rho(r)}{dr^2} \right|_{r=0} = -\frac{10(A^2 + 2B^2)}{A^4 B^2 k c^2} < 0 \quad (4.9)$$

$$\left. \frac{d^2 P_r(r)}{dr^2} \right|_{r=0} = -\frac{270H(A^2 + B^2)^2(A^2 + 2B^2)}{A^8 B^6 K^3 c^6} < 0 \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 P_t(r)}{dr^2} \right|_{r=0} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{A^{12} B^{12} c^{12} k^5 (A^2 + 2R^2)^{12}} [R^4 (5A^2 + 6R^2)^2 \\ &\quad (A^2 + 2B^2)^2 + (27A^{12} + 54A^{10}B^2 + 171A^{10}R^2 + 27A^8B^4 \\ &\quad + 297A^8B^2R^2 + 439A^8R^4 + 126A^6B^4R^2 + 694A^6B^2R^4 \\ &\quad + 528A^6R^6 + 280A^4B^4R^4 + 780A^4B^2R^6 + 252A^4 + 312A^2B^4R^6 \\ &\quad + 360A^2B^2R^8 + 144B^4R^8)^2 H^2] - \frac{1}{A^8 B^8 c^6 k^3 (A^2 + 2R^2)^6} \\ &\quad + [2(5A^2 + 6R^2)(A^2 + 2B^2)(A^2 + B^2)(27A^{12} + 54A^{10}B^2 \\ &\quad + 171A^{10}R^2 + 27A^8B^4 + 297A^8B^2R^2 + 439A^8R^4 + 126A^6B^4R^2 \\ &\quad + 694A^6B^2R^4 + 528A^6B^4R^4 + 280A^4B^4R^4 + 780A^4B^2R^6 \\ &\quad + 252A^4R^8 + 312A^2B^4R^6 + 360A^2B^2R^8 + 144B^4R^8)R^2 H] \\ &\quad - \frac{3(A^2 + B^2)^2}{2 B^4 k A^4} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Como se puede notar, el análisis realizado sobre las expresiones de la primer derivada como de las segundas derivadas, claramente nos muestra el comportamiento deseado, esto es, se verifica, en primer lugar, que nuestras funciones se anulan en el origen, además de que, las segundas derivadas son expresiones explícitamente negativas lo cual aseguramos que existe un máximo en el origen, a excepción de la segunda derivada de la presión tangencial.

Debemos mencionar que, como lo hemos venido citando, para la relación referente a la presión tangencial, no es fácil probar de manera algebraica que es una expresión negativa, así que para probar este punto, lo haremos de manera gráfica, la cual se expondrá en la sección referente a las gráficas.

Aunque para las demás condiciones que se deben de satisfacer, aseguramos de que estas funciones se comportan de manera monótona decreciente.

Para esto, analizamos las expresiones de la primer derivada y con esta herramienta nos aseguramos de tal comportamiento, en la vecindad del origen.

Para el análisis de las condiciones referentes a la velocidad del sonido, obtendremos las primeras derivadas de nuestras funciones y realizaremos el cociente entre las derivadas de la presiones radial y tangencial y la densidad para finalmente evaluar la expresion resultante en $r = 0$.

Primeramente lo hacemos entre la derivada de la presion radial y la densidad. Una vez evaluado en $r = 0$ obtenemos el siguiente resultado

$$v_r^2(0) = \left. \frac{dP_r}{d\rho} \right|_{r=0} = \frac{3H(3A^4 + 3A^2B^2)^2}{B^4c^4k^2A^8} \quad (4.12)$$

Continuamos ahora con el cociente de la derivada de la presion tangencial y la derivada de la densidad. De igual manera que en el caso anterior, evaluamos la expresion resultante en $r = 0$ obteniendo el siguiente resultado.

$$\begin{aligned} v_t^2(0) = \left. \frac{dP_t}{d\rho} \right|_{r=0} = & \frac{1}{20} \frac{1}{A^8B^{10}(A^2 + 2R^2)^{12}k^4c^{10}} [R^4(5A^2 + 6R^2)^2 \\ & (A^2 + 2B^2)(27A^{12} + 54A^{10}B^2 + 171A^{10}R^2 + 27A^8B^4 + 297A^8B^2R^2 \\ & + 439A^8R^4 + 126A^6B^4R^2 + 694A^6B^2R^4 + 528A^6R^6 + 280A^4B^4R^4 \\ & + 780A^2B^2R^6 + 252A^4R^8 + 312A^2B^2R^6 + 360A^2B^2R^8 \\ & + 144B^4R^8)^2 H^2] + \frac{1}{5} \frac{1}{B^6A^4k^2c^4(A^4 + 2R^2)^6} [R^2(5A^2 + 6R^2) \\ & (A^2 + B^2)(27A^{12} + 54A^{10}B^2 + 171A^{10}R^2 + 27A^8B^4 + 297A^8B^2R^2 \\ & + 439A^8R^4 + 126A^6B^4R^2 + 694A^6B^2R^4 + 528A^6R^6 + 280A^4B^4R^4 \\ & + 780A^4B^2R^6 + 252A^4R^8 + 312A^2B^4R^6 + 360A^2B^2R^8 \\ & + 144B^4R^8) H] + \frac{3}{20} \frac{c^2(A^2 + B^2)^2}{B^2(A^22B^2)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Tenemos entonces que las expresiones (4.12) y (4.13) nos han de ayudar a verificar el punto vi) y para ésto haremos dicho análisis mediante un gráfico,

el cual más adelante será expuesto, además de que nos apoyaremos del cambio de variables adimensional que mas adelante hemos de introducir, y con esto, simplificar los cálculos.

Como segunda parte dentro de nuestro análisis correspondiente sobre nuestras funciones hidroestáticas, veamos su comportamiento en la frontera de la estrella, es decir, para cuando se tiene la condición $r = R$.

Realizando la evaluacion en dicho punto,el sistema queda de la siguiente manera.

$$\rho(R) = \frac{3A^4 + 2R^2(B^2 + 3R^2) + A^2(3B^2 + 7R^2)}{B^2(A^2 + 2R^2)^2kc^2} \quad (4.14)$$

$$P_r(R) = 0 \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} P_t(R) = & \frac{1}{4k^3(A^2 + 2R^2)^7B^6} \left[R^2(3A^4 + 2R^2(B^2 + 3R^2)) \right. \\ & + A^2(3B^2 + 7R^2) \left[\frac{B^4k^2(A^2 + B^2R^2)(A^2 + 2R^2)^5}{(B^2 - r^2)(A^2 + R^2)} \right. \\ & + \frac{12(A^2 + 2B^2H(5A^2 + 2R^2))(3A^4 + 2R^2(B^2 + 3R^2))}{c^6} \\ & \left. \left. + \frac{A^2(3B^2 + 7R^2)}{c^6} \right] \right] \quad (4.16) \end{aligned}$$

De igual manera, analizamos las primeras y segundas derivadas en $r = R$.

$$\left. \frac{d\rho(r)}{dr} \right|_{r=R} = -\frac{2R(5A^2 + 2R^2)(A^2 + 2B^2)}{B^2(A^2 + 2R^2)^3kc^2} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dP_r(r)}{dr} \right|_{r=R} = & -\frac{6(A^2 + 2B^2)HR(5A^2 + 2R^2)(3A^4 + 2R^2(B^2 + 3R^2))}{B^6(A^2 + 2R^2)^7k^3c^6} \\ & + \frac{A^4(3B^2 + 7R^2)^2}{B^6(A^2 + 2R^2)^7k^3c^6} \quad (4.18) \end{aligned}$$

Seguimos con las expresiones para la segunda derivada.

$$\left. \frac{d^2 \rho(r)}{dr^2} \right|_{r=R} = - \frac{2(5A^4 - 44A^2R^2 - 12R^4)(A^4 + 2B^2)}{B^2(A^2 + 2R^2)^4 k c^2} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 P_r(r)}{dr^2} \right|_{r=R} = & - \frac{1}{B^6(A^2 + 2R^2)^8 k^3 c^6} \left[6H(3A^4 + 3A^2B^2 + 7A^2R^2 \right. \\ & + 2B^2R^2 + 6R^4)(A^2 + 2B^2) \left(15A^8 + 15A^6B^2 - 197A^6R^2 \right. \\ & - 322A^4B^2R^2 - 394A^4R^4 - 284A^2 - 364A^2R^6 \\ & \left. \left. - 56B^2R^6 - 72R^8 \right) \right] \quad (4.20) \end{aligned}$$

Analizando vemos que la expresión(4.15) nos ayuda a verificar el punto iii) , ademas de que, de manera análoga al de la primera parte, las expresiones relacionadas con la primer derivada y segunda derivada, en particular de la funcion densidad y presion radial, de donde se muestra el comportamiento deseado, es decir, son funciones monótonas decrecientes conforme se acerca a la frontera.

Ahora para la condicion del sonido, de igual manera que en la primera parte, realizamos el cociente entre cada una de las presiones y la densidad: Primero hacemos el cociente entre la presión radial y la densidad, obteniendo la siguiente expresión:

$$\left. \frac{dP_r(r)}{d\rho(r)} \right|_R = \frac{3(3A^4 + 3A^2B^2 + 7A^2R^2 + 2B^2R^2 + 6R^4)^2 H}{B^4 k^2 c^4 (A^2 + 2R^2)^4} \quad (4.21)$$

Ahora realizamos el cociente entre la presión tangencial y la densidad.

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dP_t}{d\rho} \right|_{r=R} = & -\frac{3}{20} \frac{1}{(5A^2 + 2R^2)(B^2 - R^2)(A^2 + R^2)(A^2 + 2R^2)^5 c^4 k^2 B^4} \\
& [R^2(3A^4 + 3A^2B^2 + 7A^2R^2 + 2B^2R^2 + 6R^4)(30A^{10} - 208A^8B^2 \\
& + 425A^8R^2 + 338A^6B^4 - 201A^6B^2R^2 + 1141A^6R^4 - 626A^4B^4R^2 \\
& + 22A^4B^2R^4 + 1392AA^4R^6 - 344A^2B^4R^4 + 20A^2B^2R^6 + 796A^2R^8 \\
& - 56B^4R^6 + 8B^2R^8 + 144R^{10})H] + \frac{1}{4} \frac{1}{(A^2 + R^2)^2(B - R)^2} \\
& \frac{1}{(A^2 + 2B^2)(5A^2 + 2R^2)} \left[c^2(3A^{10}B^2 + 6A^8B^2R^2 + 14A^8B^2R^2 \right. \\
& + 5A^8R^4 + 3A^6B^6 + 12A^6B^4R^2 + 55A^6B^2R^4 + 12A^6R^6 - 2A^4B^6R^2 \\
& + 25A^4B^4R^4 + 100A^4B^2R^6 + 9A^4R^8 - 10A^2B^6R^4 + 30A^2B^4R^6 \\
& \left. + 82A^2B^2R^8 + 2A^2R^{10} - 4B^6R^6 + 8B^4R^8 + 28B^2R^{10}) \right] \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Una vez realizado el análisis y verificar que cumplen con los puntos iniciales del apartado, queda buscar la forma de los cuadrados de las velocidades del sonido radial y tangencial respectivamente, para esto haremos uso de la definicion (4.1) y (4.2), de dónde luego de reemplazar S llegamos a los siguientes resultados:

$$v_r^2(R) = \frac{27(A^2 + B^2)^2 H}{A^4 B^4 k^2 c^6} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
v_t^2 = & \frac{1}{20} \frac{1}{A^{24} B^{12} (A^2 + 2R^2)^{12} k^4 c^{12}} [R^2 (5A^4 + 6A^2 R^2) (A^2 + 2B^2) (27A^{16} \\
& + 54A^{14} B^2 + 171A^{14} R^2 + 27A^{12} B^4 + 297A^{12} B^2 R^2 + 439A^{12} R^4 \\
& + 126A^{10} B^4 R^2 + 694A^{10} B^2 R^4 + 528A^{10} R^6 + 280A^8 B^4 R^4 + 780A^8 B^2 R^6 \\
& + 252A^8 R^8 + 312A^6 B^4 R^6 + 360A^6 B^2 R^8 + 144A^4 B^4 R^8) (135A^{24} B^2 R^2 \\
& + 270A^{22} B^4 R^2 + 1017A^{22} B^2 R^4 + 135A^{20} B^6 R^2 + 1809A^{20} B^4 R^4 \\
& + 3221A^{20} B^2 R^6 + 792A^{18} B^6 R^4 + 5252A^{18} B^4 R^6 + 5274A^{18} B^2 R^8 \\
& + 2156A^{16} B^6 R^6 + 8064A^{16} B^4 R^8 + 4428A^{16} B^2 R^{10} + 3240A^{14} B^6 R^8 \\
& + 6480A^{14} B^4 R^{10} + 1512A^{14} B^2 R^{12} + 2592A^{12} B^6 R^{10} + 2160A^{12} B^4 R^{12} \\
& + 864A^{10} B^6 R^{12}) H^2] + \frac{1}{10} \frac{1}{B^8 k^2 c^6 A^{16} (A^2 + 2R^2)^6} [(270A^{28} B^2 R^2 \\
& + 810A^{26} B^4 R^2 + 2034A^{26} B^2 R^4 + 810A^{24} B^6 R^2 + 5652A^{24} B^4 R^4 \\
& + 6442A^{24} B^2 R^6 + 270A^{22} B^8 R^2 + 5202A^{22} B^6 R^4 + 16946A^{22} B^4 R^6 \\
& + 10548A^{22} B^2 R^8 + 1584A^{20} B^8 R^4 + 14816A^{20} B^6 R^6 + 26676A^{20} B^4 R^8 \\
& + 8856A^{20} B^2 R^{10} + 4312A^{18} B^8 R^6 + 22608A^{18} B^6 R^8 + 21816A^{18} B^4 R^{10} \\
& + 3024A^{18} B^2 R^{12} + 6480A^{16} B^8 R^8 + 18144A^{16} B^6 R^{10} + 7344A^{16} B^4 R^{12} \\
& + 5184A^{14} B^8 R^{10} + 6048A^{14} B^6 R^{12} + 1728A^{12} B^8 R^{12}) H] + \frac{1}{10} \\
& \frac{1}{B^8 k^2 c^6 A^{16} (A^2 + 2R^2)^6} [(270A^{28} B^2 R^2 + 810A^{26} B^4 R^2 + 5652A^{24} B^4 R^4 \\
& + 6442A^{24} B^2 R^6 + 270A^{22} B^8 R^2 + 5202A^{22} B^6 R^4 + 16946A^{22} B^4 R^6 \\
& + 10548A^{22} B^2 R^8 + 1584A^{20} B^8 R^4 + 14816A^{20} B^6 R^6 + 26676A^{20} B^4 R^8 \\
& + 8856A^{20} B^2 R^{10} + 4312A^{18} B^8 R^6 + 22608A^{18} B^6 R^8 + 21816A^{18} B^4 R^{10} \\
& + 3024A^{18} B^2 R^{12} + 6480A^{16} B^8 R^8 + 18144A^{16} B^6 R^{10} + 7344A^{16} B^4 R^{12} \\
& + 5184A^{14} B^8 R^{10} + 6048A^{14} B^6 R^{12} + 1728A^{12} B^8 R^{12}) H] + \frac{1}{20} \\
& \frac{3A^{10} B^2 + 6A^8 B^4 + 3A^6 B^6}{A^6 B^6 (A^2 + 2B^2)} \tag{4.24}
\end{aligned}$$

En la siguiente seccion redefiniremos las constantes de manera que las nuevas variables sean adimensionales.

4.2. Análisis adimensional

Para este apartado, proponemos una transformación de la forma (4.25) en el sentido de que introducimos un sistema de variables adimensionales, el cual, propiamente nos permitiría eliminar las unidades de longitud y además nos permitirá reducir las expresiones y por consecuencia nos facilitará el análisis sobre nuestras funciones, ya que como vimos anteriormente, expresiones como la presión tangencial son, a primera vista, difícil de deducir si cumplen con el comportamiento que se desea tener. Proponiendo:

$$x = \frac{r}{R} \quad (4.25)$$

con x que se restringe en el intervalo $1 \geq x \geq 0$ y donde nuestra variable x como es fácil notar, nos ayudara a obtener una relación directa con el radio de la estrella y la cual estará conectada con el centro cuando sea $x = 0$ y cuando sea $x = 1$ lo hará para referirnos a la frontera de la misma.

Una vez hecho este cambio, proponemos la siguiente transformación hacia nuestras variables A , B y H :

$$A = yR \quad (4.26)$$

$$B = zR \quad (4.27)$$

$$H = hk^2 R^4 c^6 \quad (4.28)$$

Comenzamos por hacer este cambio en la ecuación (3.12) y para la cual obtenemos la siguiente expresión.

$$R^2 k c^2 \rho = \frac{6x^4 + 7x^2 y^2 + 2x^2 z^2 + 3y^4 + 3y^2 z^2}{z^2 (2x^2 + y^2)^2} \quad (4.29)$$

Asignando a $\rho(x, y, z) = R^2 k c^2 \rho$ se llega a la expresión de la densidad en forma adimensional.

$$\rho(x, y, z) = \frac{6x^4 + 7x^2 y^2 + 2x^2 z^2 + 3y^4 + 3y^2 z^2}{z^2 (2x^2 + y^2)^2} \quad (4.30)$$

Tenemos entonces que los cambios en la ecuación(3.14) nos dan como resultado la siguiente ecuación. En donde hemos realizado el cambio de variables $kR^2P_r = P_r(x, y, z, h)$. Mencionamos además que por cuestiones de practicidad, omitiremos la expresión algebraica para la presión tangencial, pero hemos de discutir su comportamiento más adelante mediante el gráfico de su expresión

$$\begin{aligned}
P_r(x, y, z, h) = & -\frac{1}{z^6(y^2 + 2)^6(2x^2 + y^2)^6} \left(h \left(y^2 + 2z^2(x^2 - 1) \right) (6x^2y^2 \right. \\
& + 5y^4 + 4x^2 + 6y^2) (252x^8y^8 + 360x^8y^6z^2 + 144x^8y^4z^4 + 528x^6y^{10} \\
& + 780x^6y^8z^2 + 312x^6y^6z^4 + 439x^4y^{12} + 694x^4y^{10}z^2 + 280x^4y^8z^4 \\
& + 171x^2y^{14} + 297x^2y^{12}z^2 + 126x^2y^{10}z^4 + 27y^{16} + 54y^{14}z^4 + 27y^{12}z^4 \\
& + 1416x^8y^6 + 1200x^8y^4z^2 + 192x^8y^2z^2 + 3004x^6y^8 + 2800x^6y^6z^2 \\
& + 496x^6y^4z^4 + 2562x^4y^{10} + 2832x^4y^8z^2 + 600x^4y^6z^4 + 1033x^2y^{12} \\
& + 1396x^2y^{10}z^2 + 388x^2y^8z^4 + 171y^{14} + 297y^{12}z^2 + 126y^{10}z^4 \\
& + 3328x^8y^4 + 1504x^8y^2z^2 + 64x^8z^4 + 7128x^6y^6 + 4032x^6y^4z^2 \\
& + 288x^6y^2z^4 + 6196x^4y^8 + 4912x^4y^6z^2 + 592x^4y^4z^4 + 2562x^2y^{10} \\
& + 2832x^2y^8z^2 + 600x^2y^6z^4 + 439y^{12} + 694y^{10}z^2 + 280y^8z^4 \\
& + 3744x^8y^2 + 576x^8z^2 + 8080x^6y^4 + 2368x^6y^2z^2 + 64x^6z^4 \\
& + 7128x^4y^6 + 4032x^4y^2z^2 + 3004x^2y^8 + 2800x^2y^6z^2 \\
& + 496x^2y^4z^4 + 528y^{10} + 780y^8z^2 + 312y^6z^4 + 1728x^8 \\
& + 3744x^6y^2 + 576x^6z^2 + 3328x^4y^4 + 1504x^4y^2z^2 + 64x^4z^4 \\
& + 1416x^2y^6 + 1200x^2y^4z^2 + 192x^2y^2z^4 + 252y^8 + 360y^6z^2 \\
& \left. + 144y^4z^4 \right) \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Continuando con la transformación de las expresiones a la forma adimensional, toca el turno de expresar el cuadrado de las velocidad del sonido, en donde analizamos las expresiones para el origen, es decir, evaluamos en $x = 0$. Además, realizamos un análisis particular en (4.33) con valores específicos correspondientes a $h_0 = 1,08565388$, $y_0 = 5$ de manera que obtenemos las siguientes expresiones:

$$v_r^2(0, y, z, h) = \frac{27h(R^2y^2 + R^2z^2)^2}{y^4R^4z^4} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
v_t^2(0, y_0, z, h_0) - c^2 = & -\frac{0,9826967795}{z^{10}(z^2 + 12,50000000)}(z^2 - 0,9140612702z \\
& + 0,7188300691)(z^2 + 8,2535542097)(z^2 + 10,84210312) \\
& (z^2 + 0,9140612702z + 0,7188300691)(z - 2,815098022) \\
& (z - 1,032830217)(z + 1,032830217)(z + 2,815098022) \leq 0. \quad (4.33)
\end{aligned}$$

En donde se observa que la relación (4.32) no genera restricción alguna sobre el parámetro z , salvo que sea finita, mientras que la desigualdad (4.33) implica que $z \geq 2,815098022$.

Asi pues, aunque las diferentes variables hidroestáticas y la velocidad del sonido tienen el comportamiento deseado, obtenemos que la presión tangencial es negativa para éste valor en la frontera, hecho que nos obliga entonces a que analizar la presión tangencial en la frontera, para esto, lo hacemos a través de la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
P_t(1, y_0, z, h_0) = & \frac{0,0005467154296}{(1,0 + z)(-1,0 + z)z^{10}}(z^2 + 0,00001660599513) \\
& (z^2 + 25,76999738)(z - 0,004075111229)(z^2 + 26,70129911) \\
& (z - 3,000082353)(z - 1,110940750)(z + 0,004075111229) \\
& (z + 1,110940750)(z + 3,000082353) \geq 0 \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Esta condición implica que se obtenga una cota tal que $z \geq 3,000082353$

Realizando el análisis en la frontera para la velocidad del sonido tangencial obtenemos

$$\begin{aligned}
v_t^2(1, y_0, z, h_0) = & -\frac{0,008422956785}{z^8(z^2 + 12,50000000)(z + 1,0)^2(z - 1,0)^2} \\
& (z^2 - 0,005480260899z + 0,00001501700349)(z^2 + 25,95156866) \\
& (z^2 + 30,74212792)(z^2 + 0,005480260899z + 0,00001501700349) \\
& (z - 8,447748418)(z - 1,091718267)(z - 0,6283805701) \\
& (z + 0,6283805701)(z + 1,091718267)(z + 8,447748418) \geq 0 \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Lo que implica que existe un valor máximo para z dado por $z \leq 8,447748418$. De manera que un análisis detallado para el resto de las funciones implica que el intervalo de validez de solución sea $z \in (3,000082352, 8,447748418)$

A continuación mostramos las gráficas obtenidas tomando en cuenta lo mencionado anteriormente y en términos de las variables adimensionales.

En primer lugar, aparece las gráfica de nuestras funciones hidroestáticas, es decir, la función de la densidad, presión radial y presión tangencial y enseguida mencionamos la gráfica para la velocidad del sonido. Finalmente, mostramos la razón de compacidad. La razón de compacidad nos permite determinar el tipo de objetos estelares que pueden representar nuestro modelo y es definida como $u = GM/Rc^2$ donde M es la masa y R es el radio de la estrella. En nuestro caso, la función de M viene dada por (3.5) : considerando ésta función, para nuestro modelo, la razón de compacidad viene dada por :

$$u = \frac{z^2 + 26}{54 z^2}$$

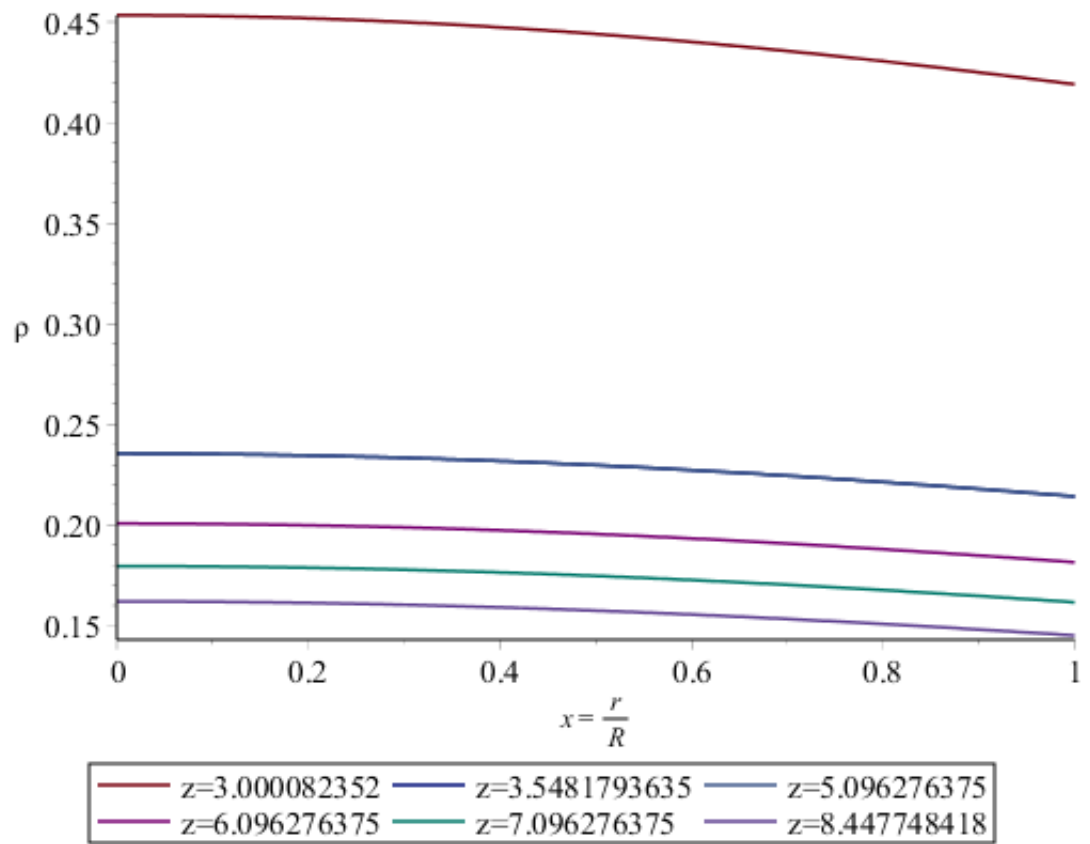
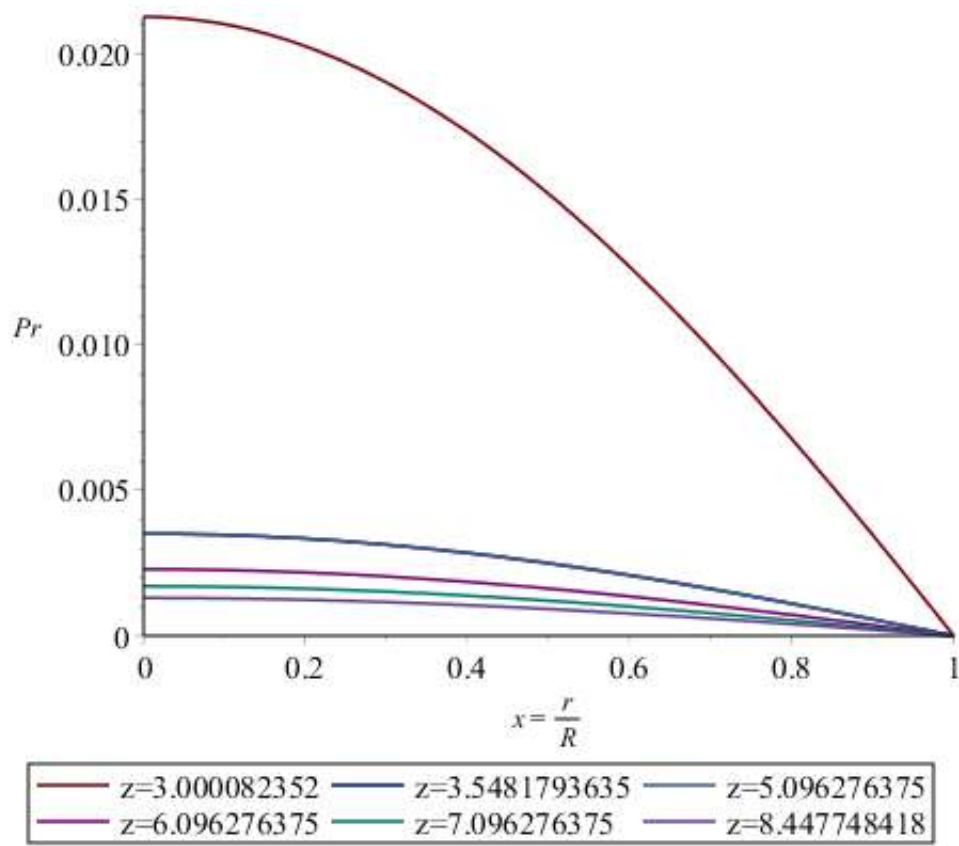
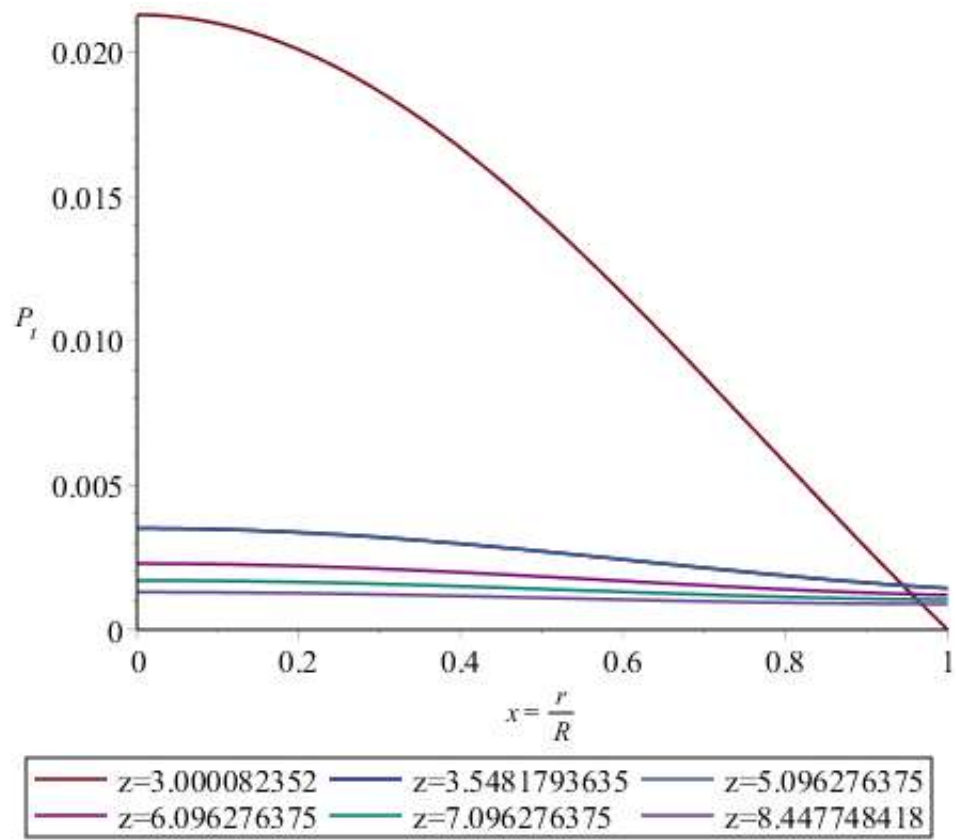


Figura 4.1: Comportamiento de la función densidad para $h=1.08565388$

Figura 4.2: Comportamiento de la presión radial para $h=1.08565388$

Figura 4.3: Comportamiento de la presión tangencial para $h=1.08565388$

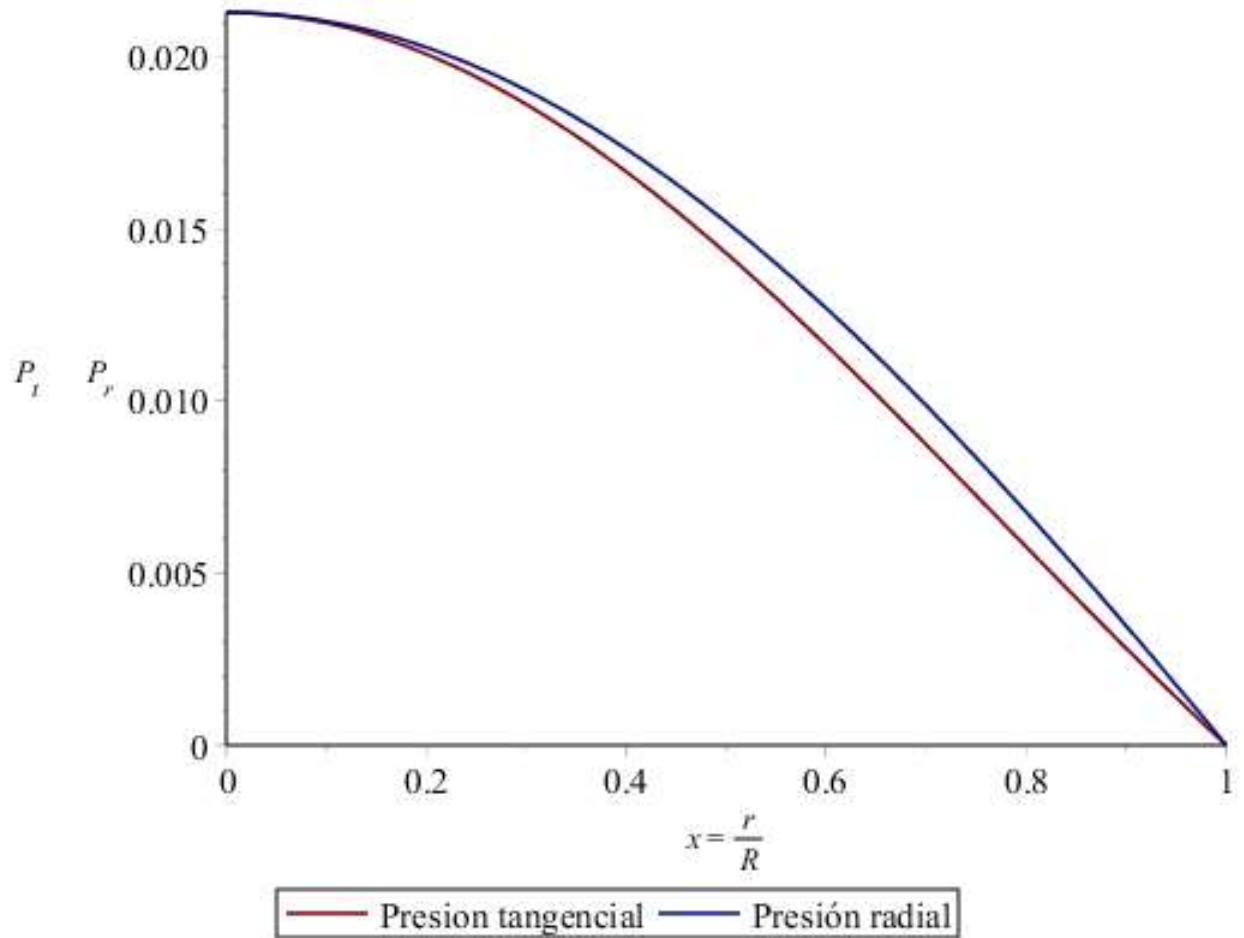


Figura 4.4: Comportamiento de la presión tangencial y presión radial para $z=3.000082352$ y $h=1.08565388$

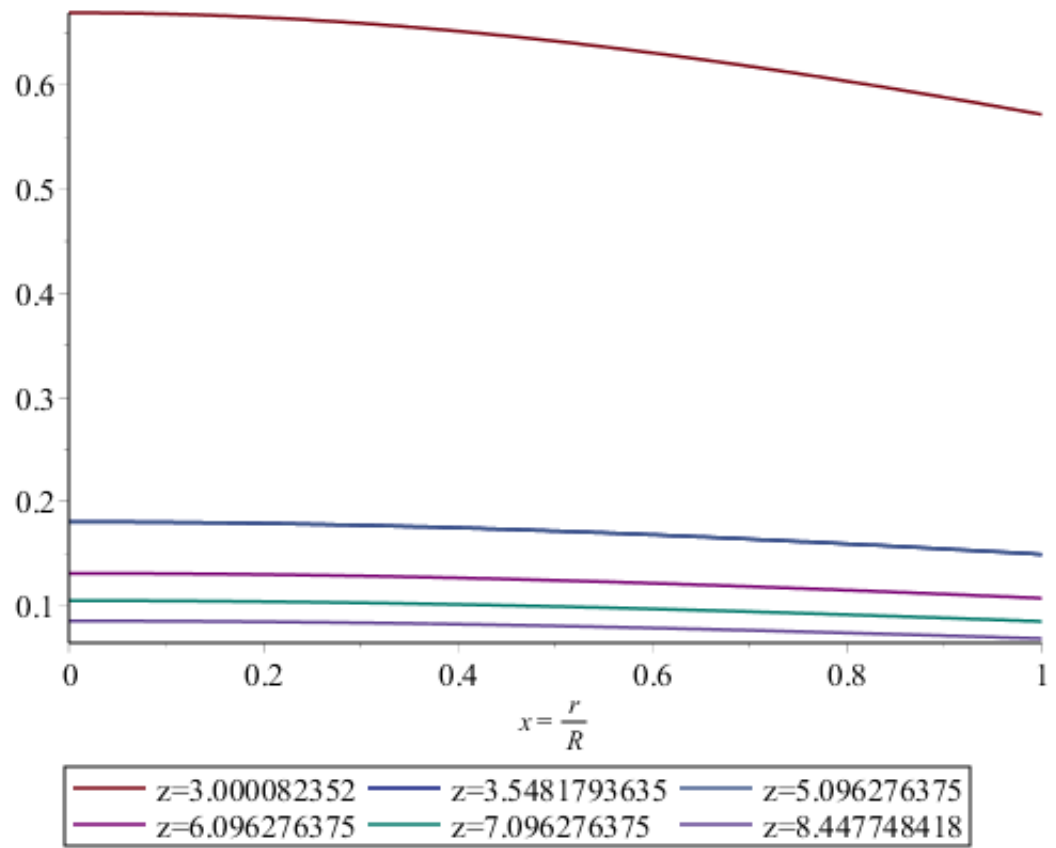


Figura 4.5: Comportamiento de la velocidad del sonido radial para $h=1.08565$

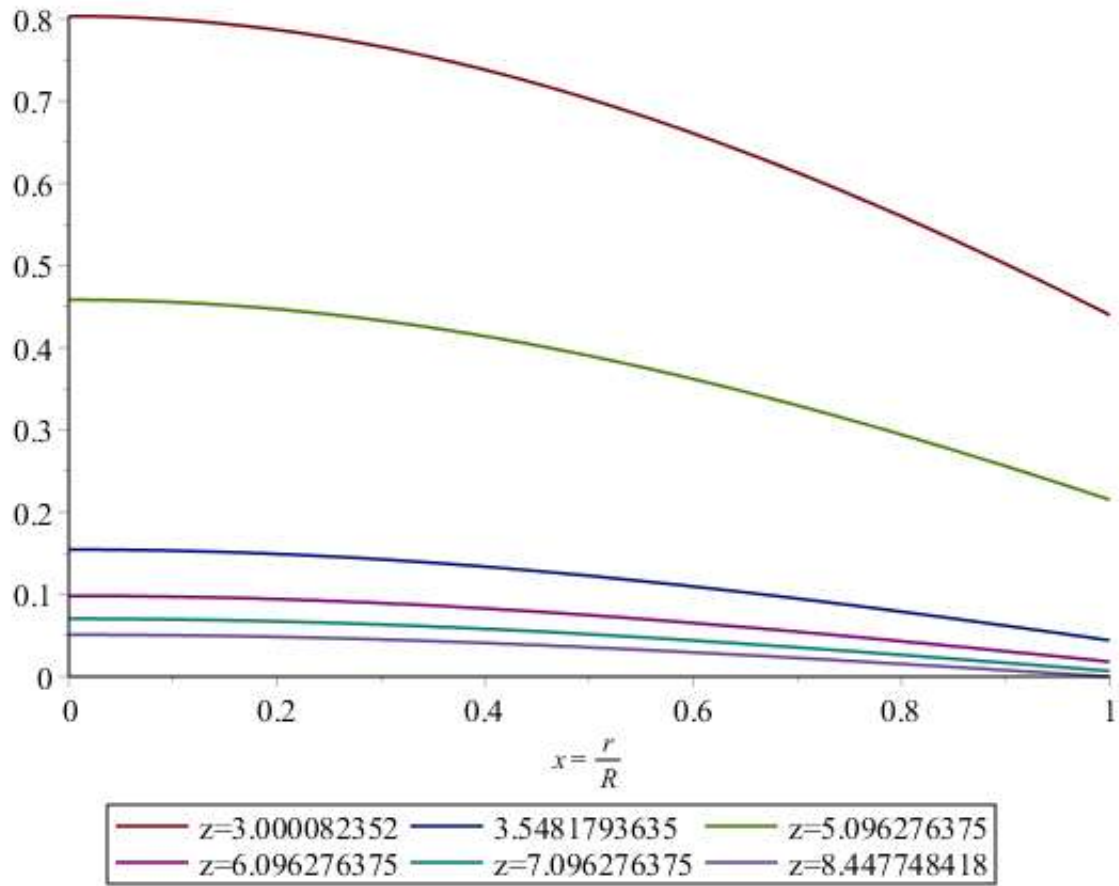


Figura 4.6: Comportamiento de la velocidad del sonido tangencial para $h=1.08565388$

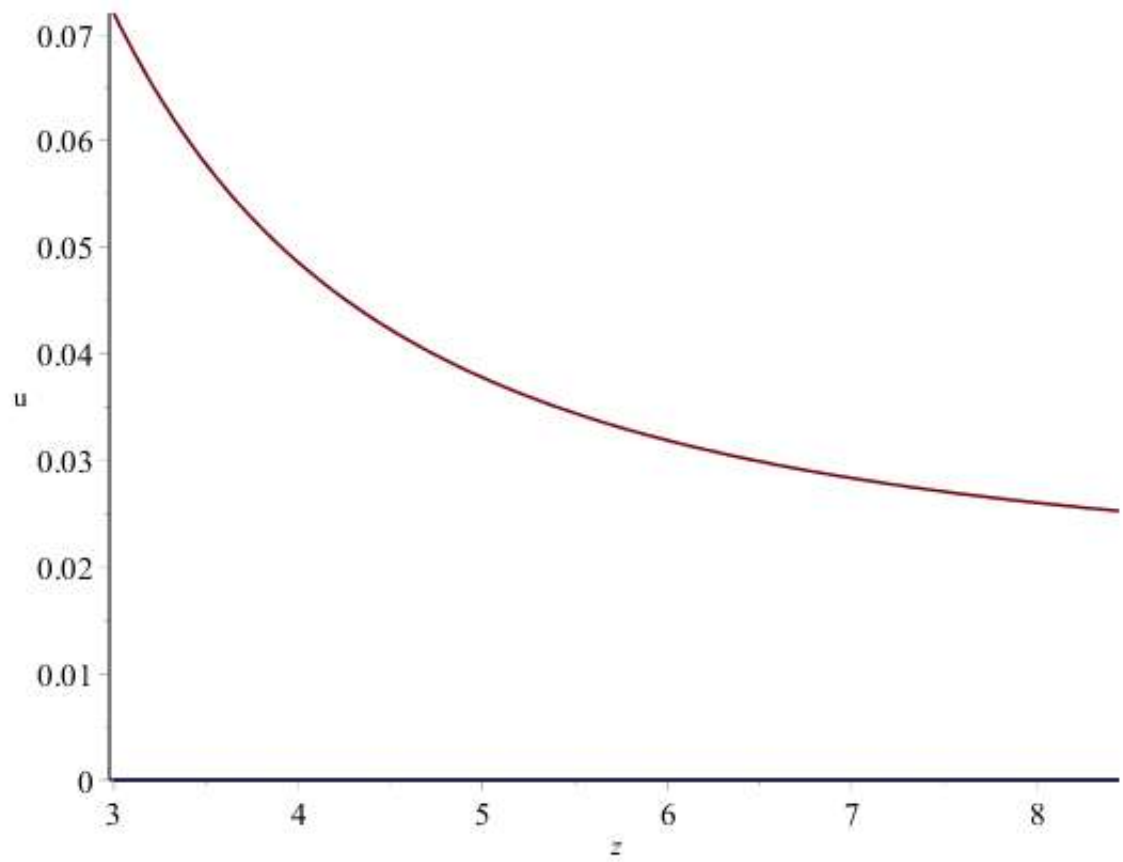


Figura 4.7: Razón de compacidad para $z \in (3,000082352, 8,447748418)$ y $h=1.08565388$

Capítulo 5

Conclusiones

La construcción de soluciones interiores en el marco de la teoría de la Relatividad General de Einstein es de relevancia particularmente cuando se desea describir estrellas compactas como las estrellas de neutrones, debido a que al valor de la densidad que éstas pueden tener. Con el objetivo de entender mejor estos objetos, en esta tesis se observa los siguientes puntos:

a) Propusimos una nueva ecuación de estado acotada $P = H(\rho^3 - S)$, que difiere de la ecuación de estado politrópica considerada regularmente para estrellas de neutrones por el término S , la propuesta de este término es una generalización del modelo de MIT Bag, cuyo origen surge en física de partículas.

b) Suponiendo esta ecuación de estado para la presión radial y un fluido anisotrópico en un espacio tiempo estático y esféricamente simétrico construimos una solución interior físicamente aceptable ya que el comportamiento de la geometría es regular al igual que las funciones hidrostáticas son regulares, además de que estas son funciones monótonas decrecientes para el intervalo de $z \in (3,000082352, 8,447748418)$.

c) Mostramos, a través del análisis de la solución, que la ecuación de estado y el modelo es útil para describir objetos compactos con razón de compacidad $u \leq 0,07201352393$, lo que indica que nuestro modelo es aplicable para representar estrellas compactas de baja masa.

El trabajo presentado es el inicio para el modelado de estrellas con este

tipo de ecuación de estado debido a que se puede tomar otra forma de la función de masa distinta a la función de masa del modelo de Tolman, lo cual puede ser analizado a futuro.

Bibliografía

- [1] Shapiro, Stuart L and Teukolsky, Saul A *Black holes, white dwarfs and neutron stars: the physics of compact objects* John Wiley & Sons,2008
- [2] Schmitt, Andreas *Dense matter in compact stars: A pedagogical introduction* Springer,2010
- [3] Hong, Deog Ki and Lee, Chang-Hwan and Lee, Hyun Kyu and Min, Dong-Pil and Park, Tae-Sun and Rho, Mannque *Compact Stars: The Quest for New States of Dense Matter* World Scientific,2004
- [4] Kippenhahn, Rudolf and Weigert, Alfred and Weiss, Achim *Stellar structure and evolution* Springer,1990
- [5] Silbar, Richard R and Reddy, Sanjay *Neutron stars for undergraduates* AAPT,2004
- [6] Wald, Robert M. *General relativity*. University of Chicago press, 2010
- [7] Hobson, Michael Paul and Efstathiou, George P and Lasenby, Anthony N *General relativity: an introduction for physicists*Cambridge University Press,2006
- [8] Delgaty, MSR and Lake, Kayll *Physical acceptability of isolated, static, spherically symmetric, perfect fluid solutions of Einstein's equations* Elsevier,1998
- [9] Bowers, Richard L and Liang, EPT *Anisotropic spheres in general relativity* The Astrophysical Journal,1974

- [10] Maurya, SK and Gupta, YK and Pratibha *Regular and well-behaved relativistic charged superdense star models* World Scientific,2011
- [11] Herrera, Luis and Santos, Nilton O *Local anisotropy in self-gravitating systems* Elsevier,1997