



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ ”

**ESTUDIO NUMÉRICO DE LA
INTERACCIÓN DE DOS CADENAS
CAÓTICAS ACOPLADAS POR UN
ELEMENTO NO CAÓTICO**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:

KARLA IVONNE SERRANO ARÉVALO

ASESOR:

M.C. GABRIEL ARROYO CORREA



MORELIA MICH.

ENERO 2019

El científico no estudia la naturaleza porque es útil; la estudia porque encuentra placer en ella, y encuentra placer en ella porque es hermosa. Si la naturaleza no fuera hermosa, no valdría la pena conocerla, y si no valiera la pena conocerla, la vida no valdría la pena vivirla.

Henri Poincaré.

A mis padres... porque ustedes son mi naturaleza.

Agradecimientos

Al esfuerzo, la dedicación, el amor y el apoyo incondicional de mis amados padres. Gracias a ustedes Raúl Serrano y Martha Arévalo, por su manera tan especial de ver la vida y enseñarme de ella, por llenarme de sus buenos valores y de su sabiduría, por ser los magníficos padres que son para mí y para mis hermanos. No tengo mas que darles infinitas gracias por este logro.

A mis hermanos, Tania y Kevin, por hacer siempre de mis días los mejores, por llenarlos de sonrisas y de locuras que me alegran la vida. Gracias Tani por mostrarme tu dedicación y por las enseñanzas. Gracias Kevin por darme otra versión de la vida y por complementarme con tu alegría. Espero ser un buen ejemplo para ustedes, mis pequeños hermanos.

A mis tíos, Mauro Serrano y Martha Martinez, por estar siempre pendientes de mi educación, por preocuparse en todo momento de mi bienestar, por el tiempo y sus consejos. Deben saber que estaré siempre agradecida con ustedes. Gracias tío por tanto apoyo, por el interés y por la fe que tienes en mí, nada de esto sería posible sin tu ayuda incondicional.

A mi compañero, mi mejor amigo, mi cómplice de aventuras, a ti Geovanni Rangel. Por motivarme en todo momento, por apoyarme y estar siempre presente, por inculcarme tu sapiencia y por tener las palabras correctas para alentarme, por el tiempo y por la ayuda. Te doy las gracias simplemente por estar en este momento de mi vida.

A mi asesor, por todo el apoyo brindado durante este largo tiempo (los últimos 3 años para ser exactos), por permitir acercarme a su trabajo apenas siendo una estudiante de segundo año. Gracias por confiar en mí, por las lecciones de clase y por las lecciones de vida también. Por ser tan buen profesor y procurar de sus estudiantes, por nunca perder una oportunidad para animarme a seguir adelante con mis estudios. Por todo eso y mucho más estaré eternamente agradecida con usted Gabriel Arroyo.

A mis tíos, Hector Emmanuel Serrano y a mi tía Celestina Serrano, quienes a pesar de estar lejos siempre encuentran la manera de demostrarme su apoyo y preocupación por mis estudios. Gracias por toda la ayuda desde siempre, tengo fe en que algún día podré reunir-

me con ustedes y agradecerles así un poco de todo lo que me han brindado.

A mi familia en general, a todos mis tíos que siempre me apoyan en cada paso y en cada decision, les agradezco, y hago presente mi gran afecto hacia ustedes, mi hermosa familia.

En especial agradezco a quienes contribuyeron a cumplir mi sueño de poder asistir a mi primer congreso. A mis tías, Verónica y Guadalupe Arévalo, por toda la ayuda desinteresada. Gracias a mi madrina Erendira Butanda, por todo el apoyo, por sus sabios consejos y por su inmensa bondad. Gracias a mis tíos Alejandro y Estrella Cazares, por su esfuerzo para ayudarme. Y por último a mi tío Luis López por estar siempre presente.

De alguna manera me gustaría agradecer a mi abuelita Kata, por inspirarme a ser fuerte, y mi abuelito Gaspar por que con sus ojos me inspira valentía.

A las personas que están y que estuvieron, a quienes de alguna forma u otra siempre me acompañan en el camino, a mis dos ángeles que recuerdo con cariño. Gracias Martha y Amado Nava.

A la Sra. Maria Elena Cervantes. Muchas gracias por todo el apoyo brindado desde que nos conocimos, por la ayuda, por motivarme siempre con sus bonitas palabras y su hermosa forma de ser.

A mis amigos, Alí Valdes y Luz Pacheco. Gracias amigos por el apoyo a la hora de estudiar, por convertirse en mis mejores amigos dentro de la facultad, por hacer menos pesadas las horas de clase y las horas de estudio también, gracias por todos esos momentos llenos de felicidad.

Gracias a todos los amigos y compañeros quienes forman parte de mi vida y de este logro también, a todos ustedes quienes de alguna forma estuvieron involucrados en este bonito proceso: Urani Mendoza, Mirandita Robles, Karen Reyes, Migue Ceja, Edgardo Morales, Filip Alvarez, Isa Conejo, Jona Sánchez, Peter Zaragoza, Gera Maldonado, Vene Chávez, Cesar Corral, Thelma Garcidueñas, Luis Castro, Misha López y Alyabra Vargas.

A mis Profesores, Joaquín Estévez, Héctor Igor Pérez, José Vega Cabrera y Jorge Isidro Aranda, gracias a todos y cada uno de ustedes. Por las clases y por tomarse el tiempo de revisar este trabajo. Por el buen trato, por toda la enseñanza y el conocimiento que me transmitieron durante estos años. Gracias Prof. Vega por siempre tener una buena actitud y sacarnos una sonrisa durante la clase. Gracias Prof. Joaquín por los consejos y las platicas. Gracias Prof. Héctor por permitirme convivir con usted y sus alumnos.

Por último agradezco a la vida y a mi Dios por darme la oportunidad de estar aquí.

Resumen

El circuito de Chua es el sistema dinámico autónomo más simple que puede ser utilizado para estudiar la dinámica no lineal en circuitos eléctricos, debido a que manifiesta una amplia variedad de las características comunes a otros sistemas no lineales, tales como bifurcaciones, caos y sincronización. Un problema relevante en la dinámica no lineal de sistemas caóticos es la sincronización de caos entre sistemas idénticos y no idénticos. En la literatura se ha reportado un amplio estudio de la sincronización de caos entre sistemas idénticos. En este trabajo estaremos interesados en estudiar numéricamente la dinámica de la interacción entre dos cadenas idénticas formadas por cuatro elementos del tipo de Chua (CC), cada una, y en donde el acoplamiento entre éstas se hace con un elemento no caótico. Los sistemas de acoplamiento considerados son tres: Duffing (CD), van der Pol (CP) y Dixon modificado (Dx). Se consideran las configuraciones de cadena abierta-cadena abierta y de cadena abierta-cadena cerrada. El trabajo presentado en esta tesis, hasta donde sabemos, no ha sido reportado en la literatura. Los resultados obtenidos muestran la existencia de tres escenarios posibles en la evolución del sistema. En el primer escenario, se mantiene la sincronización individual de cada cadena y entre ellas. En el segundo escenario, se mantiene la sincronización individual de cada cadena pero no entre ellas. En el tercer escenario, se mantiene la sincronización sólo en una de las cadenas pero no entre ellas. A partir de los resultados alcanzados es posible identificar conexiones específicas para mantener el sistema en un estado de sincronización que puede ser aplicado en esquemas de encriptación de información.

Palabras clave: sistemas dinámicos, sincronización de caos, sistema de Chua, sistema de Duffing, sistema de van der Pol, sistema de Dixon.

Abstract

The Chua's circuit is the simplest autonomous dynamical system that can be used to study non-linear dynamics in electric circuits, because it manifests a wide variety of features common to other non-linear systems, such as bifurcations, chaos and synchronization. A relevant problem in the non-linear dynamics of chaotic systems is the synchronization of chaos between identical and non-identical systems. In the literature, an extensive study of the synchronization of chaos between identical systems has been reported. In this work we will be interested in numerically studying the dynamics of the interaction between two chains formed by four elements of the Chua (CC) type, each one, and where the coupling between them is done with a non-chaotic element. The coupling systems considered are three: Duffing (CD), van der Pol (CP) and modified Dixon (Dx). The open chain-open chain and open chain-closed chain configurations are considered. The work presented in this thesis, as far as we know, has not been reported in the literature. The results obtained show the existence of three possible scenarios in the evolution of the system. In the first scenario, the individual synchronization of each chain and between them is maintained. In the second scenario, the individual synchronization of each chain is maintained but not between them. In the third scenario, synchronization is maintained only in one of the chains but not between them. From the results achieved it is possible to identify specific connections to keep the system in a state of synchronization that can be applied in information encryption schemes.

key words: Dynamical systems, chaos synchronization, Chua's system, Duffing's system, van der Pol's system, Dixon's system.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VI
1. Presentación	1
1.1. Introducción	1
1.2. El sistema de Chua	2
1.3. El sistema de Duffing	5
1.4. El sistema de van der Pol	5
1.5. El sistema de Dixon modificado	6
1.6. Objetivos de esta Tesis	8
2. La entropía de Shannon	9
2.1. Introducción	9
2.2. Elementos básicos de la teoría de Shannon	9
2.3. Construcción de la entropía de Shannon utilizada en esta tesis	12
2.3.1. Caracterización entrópica del sistema de Chua	13
2.3.2. Caracterización entrópica del sistema de Duffing	14
2.3.3. Caracterización entrópica del sistema de van der Pol	14
2.3.4. Caracterización entrópica del sistema de Dixon modificado	14
3. Cadenas caóticas	16
3.1. Introducción	16
3.2. La sincronización del caos	16
3.2.1. Sincronización del sistema de Chua-Duffing	17
3.2.2. Sincronización del sistema de Chua-van der Pol	18
3.2.3. Sincronización del sistema de Chua-Dixon modificado	21
3.3. Interacción entre dos cadenas abiertas acopladas por un elemento no caótico	23

3.4. Interacción entre una cadena abierta y una cadena cerrada acopladas por un elemento no caótico	26
3.5. Selección de los parámetros numéricos	27
4. Resultados	28
4.1. Introducción	28
4.2. Interacción cadena abierta-cadena abierta	28
4.2.1. Acoplamiento SD	29
4.2.2. Acoplamiento SP	33
4.2.3. Acoplamiento SDx	35
4.3. Interacción cadena abierta-cadena cerrada	36
4.3.1. Acoplamiento SD	36
4.3.2. Acoplamiento SP	39
4.3.3. Acoplamiento SDx	39
4.4. Discusión de los resultados	43
5. Conclusiones	45
Bibliografía	46

Índice de figuras

1.1. Circuito de Chua	2
1.2. Evolución del sistema Chua	4
1.3. Evolución del sistema Duffing	5
1.4. Evolución del sistema van der Pol	6
1.5. Evolución del sistema Dixon modificado	7
2.1. Elementos básicos de la teoría de la información de Shannon	10
2.2. Entropía de Shannon	13
2.3. Entropía de Shannon para el sistema de Chua	13
2.4. Entropía de Shannon para el Sistema Duffing	14
2.5. Entropía de Shannon para el Sistema van der Pol	15
2.6. Entropía de Shannon para el Sistema de Dixon modificado	15
3.1. Diagrama de acoplamiento para el sistema Chua-Duffing	18
3.2. Evolución dinámica unidireccional del sistema Chua-Duffing.	19
3.3. Evolución dinámica bidireccional del sistema Chua-Duffing	19
3.4. Diagrama de acoplamiento para el sistema Chua-van der Pol	20
3.5. Evolución dinámica unidireccional del sistema Chua-Van der Pol	20
3.6. Evolución dinámica bidireccional del sistema Chua-van der Pol.	21
3.7. Diagrama de acoplamiento para el sistema Chua-Dixon modificado	21
3.8. Evolución dinámica unidireccional del sistema Chua-Dixon modificado	22
3.9. Evolución dinámica bidireccional del sistema Chua-Dixon modificado	23
3.10. Interacción entre dos cadenas abiertas acopladas por un elemento no caótico	24
3.11. Interacción entre una cadena abierta y una cadena cerrada acopladas por un elemento no caótico	26
4.1. Simbología	29
4.2. Resultados para el caso ST del sistema SD cadena abierata-cadena abierta	30
4.3. Resultados para el caso SPA del sistema SD cadena abierta-cadena abierta	31
4.4. Resultados para el caso SPB del sistema SD cadena abierta-cadena abierta	32
4.5. Resultados para el caso ST del sistema SP cadena abierta-cadena abierta	33
4.6. Resultados para el caso SPA del sistema SP cadena abierta-cadena abierta	34

4.7. Resultados para el caso ST del sistema SDx cadena abierta-cadena abierta .	35
4.8. Resultados para el caso SPA del sistema SDx cadena abierta-cadena abierta	36
4.9. Resultados para el caso ST del sistema SD cadena abierta-cadena cerrada .	37
4.10. Resultados para el caso SPA del sistema SD cadena abierta-cadena cerrada .	38
4.11. Resultados para el caso ST del sistema SP cadena abierta-cadena cerrada . .	40
4.12. Resultados para el caso SPA del sistema SP cadena abierta-cadena cerrada .	41
4.13. Resultados para el caso ST del sistema SDx cadena abierta-cadena cerrada .	42
4.14. Resultados para el caso SPA del sistema SDx cadena abierta-cadena cerrada	42

Capítulo 1

Presentación

1.1. Introducción

Muchos trabajos acerca del caos en sistemas dinámicos no lineales utilizan circuitos eléctricos. Un ejemplo clásico es el sistema de Chua (SC) debido a su robustez, bajo costo en su construcción y gran variedad de regímenes dinámicos que presenta. Este sistema es de los pocos en que el comportamiento caótico tiene comprobación teórica, experimental y numérica; por ser simple de construir, lo que permite manipular fácilmente algunos de sus parámetros y mostrar una amplia gama de fenómenos relacionados con el comportamiento caótico [1]. A medida que ha aumentado el interés científico hacia el estudio de los fenómenos caóticos, el circuito electrónico de Chua ha ido obteniendo una gran importancia como objeto experimental, para analizar los más variados fenómenos, tales como: control y sincronización del caos, análisis de bifurcaciones y atractores; en aplicaciones como las comunicaciones seguras, biología, química, sonido y música, etc., habiendo sobre él numerosas publicaciones [1]. Pero no todo acerca de este sistema es sencillo. Su propio comportamiento contrasta con la simplicidad de manipulación de los parámetros, ofreciendo nuevas posibilidades de investigación. Otros ejemplos de sistemas dinámicos no lineales lo constituyen el sistema de Duffing (SD) y el sistema de van der Pol (SP). El modelo SD fue propuesto por Duffing en 1918 para explicar el comportamiento del pandeo de una viga al colocarse encima de ella un peso. Duffing encontró que este comportamiento podría ser modelado por una ecuación similar a la de una masa atada a un resorte no lineal [2]. El modelo SP lo propuso van der Pol en la década de 1920, para explicar el comportamiento de circuitos electrónicos contruidos con tubos al vacío que habían sido desarrollados en esa época. La importancia del modelo de van der Pol radica en su aplicación en problemas relacionados con el latido cardíaco, la actividad neuronal, los desórdenes bipolares, los terremotos, por mencionar solo algunos [2]. El sistema de Dixon (SDx) fue propuesto en 1993 por Dixon et al. como un modelo simplificado para describir la dinámica del campo magnético de una estrella de neutrones [3]. El modelo que se usa en este trabajo es una

modificación del modelo de Dixon [4].

En este capítulo se presentan las características básicas de los sistemas SC, SD, SP y SDx, que se usarán para armar cadenas caóticas con elementos del tipo SC y estudiar sus interacciones entre sí mediadas por elementos no caóticos (del tipo SD, SP o SDx). Al final del capítulo se describen los objetivos de esta tesis.

1.2. El sistema de Chua

El circuito de Chua es el sistema autónomo no lineal más sencillo que se puede construir con elementos pasivos. Este circuito, Fig. 1.1, se caracteriza principalmente por dos aspectos: primero, es autónomo; es decir, no está alimentado por fuentes de corriente alterna, y segundo, está compuesto por dos partes: una que presenta un comportamiento típico de un oscilador amortiguado (dos condensadores, una resistencia y una bobina) y la otra que constituye el único elemento no lineal denominado diodo de Chua. Este elemento, causante de la no linealidad actúa como la fuente de energía de todo el circuito, se ocupa de retroalimentarlo y lo mantiene oscilando.

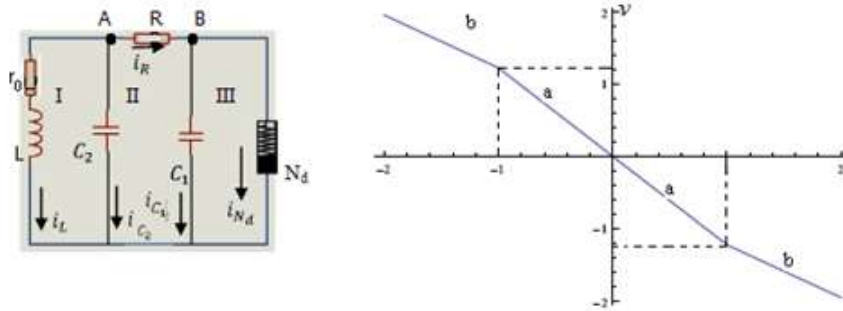


Figura 1.1: Circuito de Chua. En el gráfico de la izquierda se muestran tres mallas (I, II y III) y dos nodos (A y B) que utilizaremos para obtener las ecuaciones dinámicas del circuito. También se indican los sentidos de las corrientes en los elementos $L(i_L)$, $R(i_R)$, $N_d(i_{N_d})$, $C_1(i_{C_1})$ y $C_2(i_{C_2})$. El gráfico de la derecha da la relación voltaje-corriente del diodo de Chua N_d . Los puntos de quiebre son los responsables de la dinámica no lineal del circuito.

Las ecuaciones del circuito de Chua se obtienen aplicando las leyes de Kirchhoff [5] para los voltajes (conservación de la energía; se aplica en mallas) y las corrientes (conservación de la carga; se aplica en nodos)). De la Fig. 1.1, se tiene que para las mallas I, II y III, la ley de Kirchhoff para los voltajes da, respectivamente, las siguientes ecuaciones:

$$V_L + V_{C_2} = 0, \quad \Rightarrow \quad V_L = -V_{C_2}, \quad (1.1)$$

$$V_R + V_{C_1} - V_{C_2} = 0, \Rightarrow i_R R + V_{C_1} - V_{C_2} = 0, \quad (1.2)$$

$$V_{C_1} + V_{N_d} = 0. \quad (1.3)$$

En la Ec. (1.2) se hizo uso de la ley de Ohm: $V_R = i_R R$. De forma similar, al aplicar la ley de Kirchhoff para las corrientes a los nodos A y B de la Fig. 1.1, se tiene, respectivamente, que:

$$i_L = i_{C_2} + i_R, \quad (1.4)$$

$$i_R = i_{C_1} + i_{N_d}. \quad (1.5)$$

Teniendo en cuenta la relación que hay entre los voltajes y las corrientes en los capacitores (C_1 y C_2) y la bobina (L), es decir [5]:

$$V_L = L \frac{di_L}{dt_{real}}, \quad (1.6)$$

$$i_{C_1} = C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt_{real}}, \quad (1.7)$$

$$i_{C_2} = C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt_{real}}. \quad (1.8)$$

Las Ecs. (1.1)-(1.5) llevan finalmente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del circuito de Chua:

$$C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt_{real}} = \frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{R} - g(V_{C_1}), \quad (1.9)$$

$$C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt_{real}} = i_L - \frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{R}, \quad (1.10)$$

$$L \frac{di_L}{dt_{real}} = -V_{C_2}. \quad (1.11)$$

Aquí V_i es el voltaje al que se encuentra el capacitor C_i , i_L es la corriente que circula por la bobina y $g(V_{C_1})$ es la relación no lineal que da la corriente en el diodo de Chua (i_{N_d}) como función de su tensión, y que está dada por:

$$g(V_{C_1}) = i_{N_d} = m_b V_1 + \frac{1}{2} (m_a - m_b) (|V_{C_1} + B|) - (|V_{C_1} - B|), \quad (1.12)$$

donde los parámetros m_b , m_a y B , dependen de los componentes electrónicos con que se construya el diodo de Chua.

Para propósitos computacionales es más adecuado escribir las ecuaciones de Chua en

forma adimensional. Esto se logra haciendo los siguientes cambios de escala:

$$x = \frac{V_1}{B}, \quad y = \frac{V_2}{B}, \quad z = I \frac{R}{B},$$

$$a = m_a R, \quad b = m_b R, \quad \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \quad \beta = C_2 \frac{R^2}{L}, \quad t = \frac{t_{real}}{C_2 R} \quad (1.13)$$

Con estos cambios de escala, las Ecs. (1.9)-(1.12) se pueden rescribir como:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \alpha (y - h(x)), \quad (1.14)$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = x - y - z, \quad (1.15)$$

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z} = -\beta y, \quad (1.16)$$

$$h(x) = x + bx + \frac{1}{2} (a - b) (|x + 1| - |x - 1|). \quad (1.17)$$

En las Figs.1.2(a)-1.2(f) se muestra la evolución dinámica del circuito de Chua a medida que se varía el parámetro α y manteniendo fijos los demás valores: $\beta = 15$, $a = -0.28$, $b = 0.56$. Estos parámetros fijos se mantendrán como tal en el resto de esta tesis.

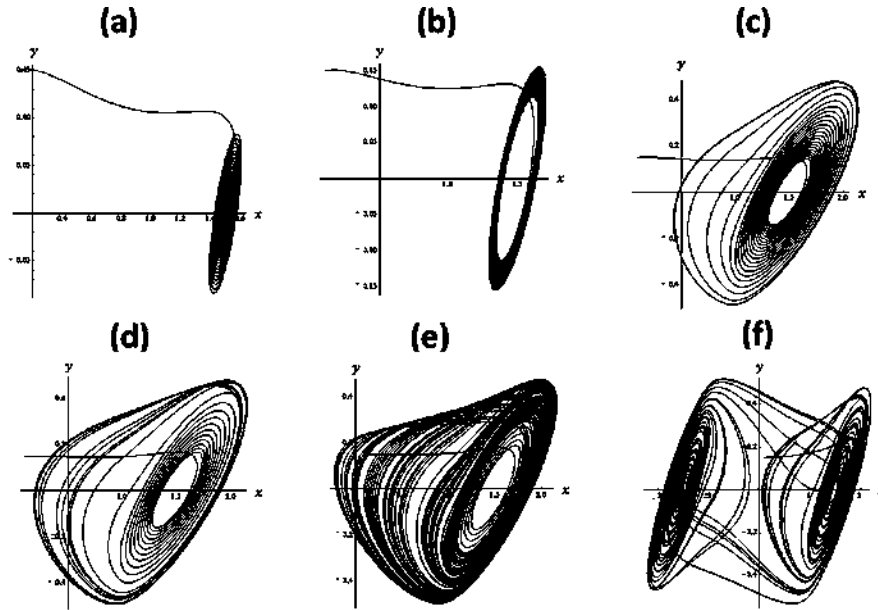


Figura 1.2: Evolución dinámica del sistema de Chua (en el espacio fase xy) para diferentes valores de α : (a) $\alpha = 6.4$, (b) $\alpha = 7$, (c) $\alpha = 7.6$, (d) $\alpha = 8$, (e) $\alpha = 8.4$, (f) $\alpha = 10$.

1.3. El sistema de Duffing

Duffing propuso en 1918 un modelo para explicar el comportamiento del pandeo de una viga al colocarse encima de ella un peso. Duffing encontró que este comportamiento podría ser modelado por una ecuación similar a la de una masa atada a un resorte no lineal, dada por [2]:

$$\dot{u} = v, \quad (1.18)$$

$$\dot{v} = u - pu^3, \quad (1.19)$$

con p como parámetro de control. En las Figs. 1.3(a)-1.3(f) se muestra la evolución dinámica de los ciclos límites del sistema SD como función del parámetro de control. Hay que recordar que un ciclo límite es una trayectoria cerrada aislada [6].

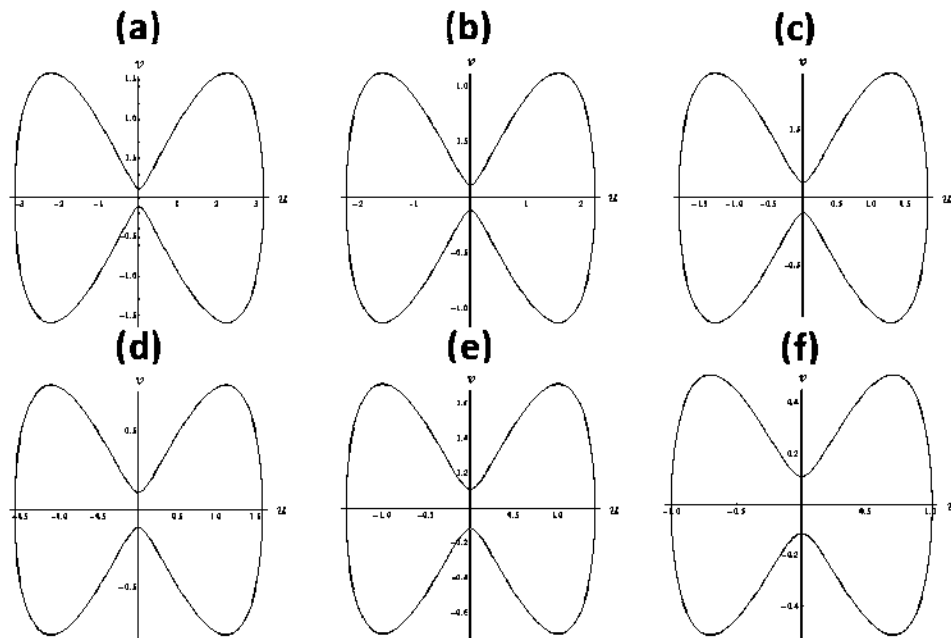


Figura 1.3: Evolución dinámica del sistema de Duffing (en el espacio fase uv) para diferentes valores de p : (a) $p = 0.2$, (b) $p = 0.4$, (c) $p = 0.6$, (d) $p = 0.8$, (e) $p = 1.0$, (f) $p = 2.0$.

1.4. El sistema de van der Pol

Balthasar van der Pol propuso un modelo matemático en la década de 1920, para explicar el comportamiento de circuitos electrónicos construidos con tubos al vacío que habían

sido desarrollados en esa época. La importancia del modelo de van der Pol radica en su aplicación en problemas relacionados con el latido cardiaco, la actividad neuronal, los desórdenes bipolares, los terremotos, por mencionar solo algunos. El sistema de van der Pol está dado por [2]:

$$\dot{u} = v, \quad (1.20)$$

$$\dot{v} = -u - q(u^2 - 1)v, \quad (1.21)$$

con q como parámetro de control. En las Figs. 1.4(a)-1.4(f) se muestra la evolución dinámica de los ciclos límites del sistema SP como función del parámetro de control. Para este sistema se pueden notar, a diferencia del sistema SD de la Fig. 1.3, transitorios antes del alcanzar el ciclo límite.

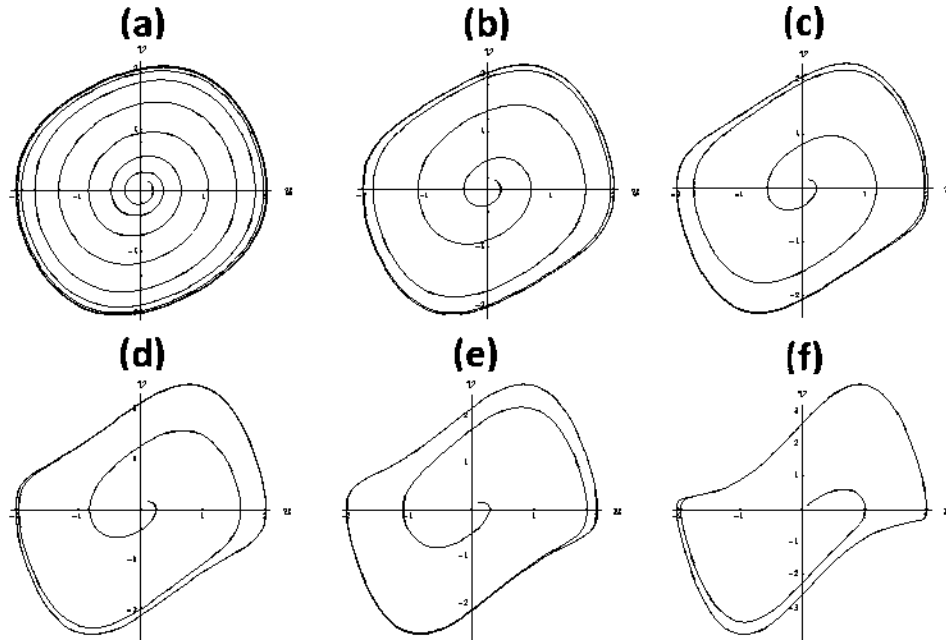


Figura 1.4: Evolución dinámica del sistema de van der Pol (en el espacio fase uv) para diferentes valores de q : (a) $q = 0.2$, (b) $q = 0.4$, (c) $q = 0.6$, (d) $q = 0.8$, (e) $q = 1.0$, (f) $q = 2.0$.

1.5. El sistema de Dixon modificado

En 1993 Dixon et al. introdujeron un modelo simplificado para describir la dinámica del campo magnético de una estrella de neutrones [3]. El modelo que se usa en este trabajo es una modificación del modelo de Dixon y está dado por [4]:

$$\dot{u} = \frac{uv}{10^{-4} + u^2 + v^2} - 0,3u, \quad (1.22)$$

$$\dot{v} = \frac{v^2}{10^{-6} + u^2 + v^2} - rv + r - 1, \quad (1.23)$$

con r como parámetro de control. En el modelo original de Dixon las componentes u y v están relacionados con las componentes de la magnetización en el plano ecuatorial y axial de la estrella, respectivamente; los valores -0.3 y r representan términos de amortiguamiento por viscosidad. De acuerdo con las Ecs. (1.22)-(1.23) en el caso de la ausencia de los factores 10^{-4} y 10^{-6} , el sistema es singular en el origen, de modo que no cumple con los requisitos del teorema de Poincaré-Bendixon. Como resultado de esto, todas las órbitas son atraídas hacia la singularidad y hay una alta sensibilidad a los más pequeños cambios en las condiciones iniciales [3]. Para remover esta singularidad, en este trabajo se incluyen los factores 10^{-4} y 10^{-6} . En este sentido, el sistema SDx se puede considerar como cuasi-singular. En las Figs. 1.5(a)-1.5(f) se muestra la evolución del sistema para diferentes valores del parámetro de control. Nótese que en este caso no se define un ciclo límite, como sucedió para los sistemas SD y SP. En los casos (b) y (c) no se puede hablar de atractores caóticos sino más bien de regiones de comportamiento irregular [3]. Hay que recordar que, en términos generales, un atractor es un conjunto al que convergen todas las trayectorias vecinas [6].

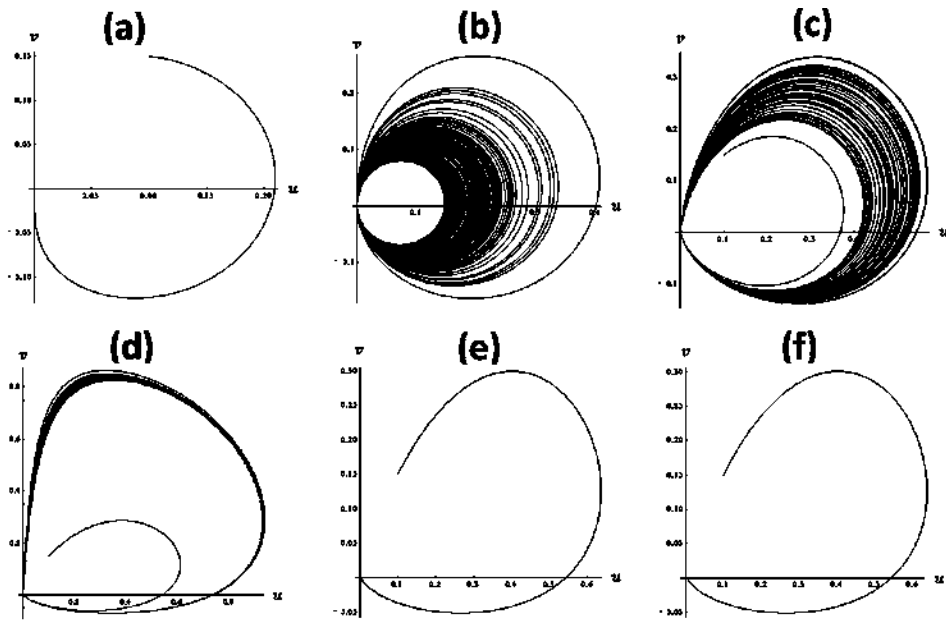


Figura 1.5: Evolución dinámica del sistema de Dixon modificado (en el espacio fase uv) para diferentes valores de r : (a) $r = 0.3$, (b) $r = 0.5$, (c) $r = 0.7$, (d) $r = 0.9$, (e) $r = 0.917$, (f) $r = 0.918$.

1.6. Objetivos de esta Tesis

El objetivo general de esta tesis es realizar un estudio numérico y puntual de la interacción entre cadenas caóticas acopladas por elementos no caóticos, para caracterizar las estructuras que permitan una sincronización entre ellas.

El primer objetivo particular es caracterizar la configuración cadena abierta-cadena abierta, cuando el acoplamiento es mediado por un elemento no caótico.

El segundo objetivo particular, es caracterizar la configuración cadena abierta-cadena cerrada, cuando el acoplamiento es mediado por un elemento no caótico.

La estructura del resto de la tesis es como sigue. En el capítulo 2 se hace una caracterización entrópica, basada en la entropía de Shannon, de los sistemas de Chua, Duffing, van der Pol y Dixon modificado. En el capítulo 3 se describen las ecuaciones que representan la interacción entre dos cadenas abiertas acopladas por un elemento no caótico y las ecuaciones para la interacción entre una cadena abierta y una cadena cerrada acopladas por un elemento no caótico. En el capítulo 4 se presentan los resultados de cada interacción con su respectivo elemento central, y el análisis para cada caso de evolución del sistema. En el capítulo 5 se presentan las conclusiones generales de esta tesis.

Capítulo 2

La entropía de Shannon

2.1. Introducción

En este capítulo se discute el concepto de entropía de Shannon. En la segunda sección se presentan los elementos básicos de la teoría de la información de Shannon. En la tercera sección se describe la forma en que se aplicará la entropía de Shannon para caracterizar la sincronización entre dos sistemas caóticos. En la última sección se presenta la caracterización entrópica de los sistemas que se usarán en este trabajo para construir las cadenas caóticas que se describen en el siguiente capítulo.

2.2. Elementos básicos de la teoría de Shannon

La publicación de la teoría de la información de Shannon en 1948, estableció un modelo matemático de la información definido en términos estrictamente estadísticos [7]. Uno de los postulados básicos de la teoría de Shannon es que la información se puede tratar como una cantidad física medible, tal como la densidad o la masa. La importancia del trabajo de Shannon radica en ser la base de la teoría actual de la codificación y comunicación. Su fin es establecer los límites de cuanto se puede llegar a comprimir la información y definir la mayor velocidad en la que se pueda transmitir dicha información. Esencialmente se trata de un método matemático que permite asignar valores cuantitativos a la información. Para ello, se define la información como la disminución en la incertidumbre que tenemos sobre alguna cosa. En la Fig. 2.1 muestra de forma esquemática la idea esencial en la teoría de la información de Shannon. La fuente de información envía los mensajes codificados a través de un canal, los cuales al llegar al decodificador son recibidos por la unidad receptora. La información se transmite por medio de mensajes. Un mensaje es una sucesión particular de símbolos discretos (dígitos, letras, notas musicales, colores, etc.) escogidos de un repertorio dado (el conjunto de los dígitos, el alfabeto, la escala musical, los colores, etc.). En la

teoría de la información no interesa que cantidad de información transporta el mensaje, ya que eso no nos dice nada sobre lo que el mensaje transmite.

Consideremos un ejemplo concreto, en donde los mensajes elementales (las letras) forman parte de un repertorio (alfabeto). Si el alfabeto tiene solo una letra, entonces la cantidad de información que transporta esa letra es cero, puesto que siempre sabemos de antemano que letra nos va a llegar. De esta manera, el alfabeto mínimo capaz de transportar información es uno con dos letras (un ejemplo, es la clave Morse; sus dos letras son el punto y la raya).

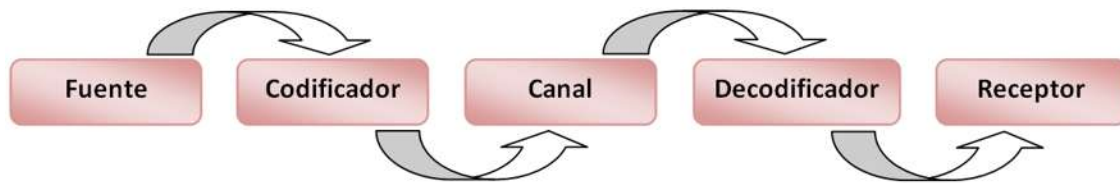


Figura 2.1: Transmisión de la información de acuerdo a la teoría de Shannon.

La cantidad de información que transporta cada símbolo de un alfabeto dado es función del número de letras de ese alfabeto; es decir que entre mayor sea el número de letras de un alfabeto, mayor es la incertidumbre acerca de cual de ellas nos va a llegar y, por lo tanto, cada una de ellas transporta mas información. La idea de Shannon es la siguiente. Supongamos que el repertorio del que podemos escoger los mensajes tiene n símbolos. La información contenida en cada símbolo será una cierta función de n , la cual denotamos por $I(n)$, será la información contenida en cada una de las n letras del alfabeto (nótese que $I(1) = 0$).

Supongamos que el mensaje elemental a está tomado de un alfabeto A , de n mensajes elementales, y que el mensaje elemental b está tomado de un alfabeto B , de m mensajes elementales, entonces la información contenida en a es $I(n)$ y la información contenida en b es $I(m)$. De esta manera, el mensaje compuesto ab puede considerarse como un mensaje elemental de un alfabeto AB formado por los $n \times m$ mensajes compuestos por dos letras, la primera de A y la segunda de B . Así la información contenida en este mensaje compuesto será $I(n \times m)$, y la condición de aditividad de la información se expresará, matemáticamente, como [8]:

$$I(n \times m) = I(n) + I(m). \quad (2.1)$$

Para que esta relación se cumpla, usamos la función logaritmo, ya que el $\log(n \times m) = \log(n) + \log(m)$ y definimos la cantidad de información que transporta un mensaje como:

$$I(n) = \log(n). \quad (2.2)$$

Observe que esta definición cumple automáticamente con la condición $I(1) = 0$. Dado un repertorio con un solo mensaje ($n = 1$) no sirve para transmitir información, el número mínimo de mensajes que debe de tener el repertorio es de dos, para ser capaz de transmitir información. En este sentido, si se requiere tener $I(2) = 1$, de la Ec.(2.2) se infiere que el tipo de logaritmos que conviene usar son los logaritmos en base dos. En conclusión, definimos la cantidad de información que transporta un mensaje tomado de un conjunto de n mensajes como:

$$I(n) = \log_2(n). \quad (2.3)$$

La unidad de información se llama *bit*, nombre que resulta al contraer las palabras (en inglés) *binary digit*. Así, por ejemplo, la información que transmitiría cada letra del alfabeto castellano de 27 letras (27 mensajes elementales) sería $\log_2(27) = 4,75 \text{ bits}$.

De acuerdo a Shannon, el uso de la función logarítmica como una medida de información está respaldado por las siguientes razones:

- Los parámetros usados en la ingeniería tal como el tiempo, ancho de banda, número de réplicas, etc., tienden a variar linealmente con el logaritmo.
- Se acerca más a la sensación intuitiva de la medición que se maneja en la información. Esto está aproximadamente relacionado con el punto anterior desde que mide entidades por comparaciones lineales con estándares comunes.
- Muchas de las operaciones limitadas son simples, en términos del logaritmo. La base logarítmica corresponde a la opción de una unidad para la medida de información.

En la Ec. (2.3), se supone que todos los mensajes son igualmente probables y, en general, este no es el caso. En el ejemplo del alfabeto castellano, si decimos que palabra de cuatro letras empieza con “a”, se está dando cierta cantidad de información, pero si decimos que la palabra empieza con “k” estamos dando más información, pues la palabra en cuestión queda más restringida en el segundo caso (sólo puede ser kepi, kilo o alguna otra de entre muy pocas posibilidades). Está claro que la información “k” es mayor que la información “a”, la razón es que “a” es mucho más probable que “k”. De esta manera, la cantidad de información que transporta el mensaje es menor cuanto más probable sea el mensaje en cuestión (si un mensaje tuviera probabilidad 1, la información que transportaría sería 0). Como $1/n$ es la probabilidad p de un mensaje de entre n posibles, si todos son igualmente probables, entonces notamos que la definición de información dada en la Ec. (2.3), puede expresarse en términos de probabilidades como:

$$I(p) = -\log_2(p), \quad (2.4)$$

que se reduce a la Ec. (2.3) cuando todos los mensajes son igualmente probables. Si los mensajes tienen diferentes probabilidades, no es posible saber con anticipación cuanta información transporta un mensaje dado; pero si es posible calcular la información promedio

que transporta un mensaje elemental. En general, la información promedio por mensaje elemental es [8]

$$\bar{I} = - \sum P_i \log_2 P_i, \quad (2.5)$$

en donde P_i es la probabilidad de ocurrencia del i -ésimo mensaje. Un ejemplo claro, si en la clave Morse hubiera 9 puntos por cada raya, $P_1 = 0,9$ y $P_2 = 0,1$, de modo que $\bar{I} = 0,469$ bits, contra un bit, que sería la información que transportaría cada punto o cada raya si ambos tuvieran la misma probabilidad ($P_1 = P_2 = 0,5$). En la Ec. (2.5) se supone naturalmente que:

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1. \quad (2.6)$$

La Ec. (2.5) da una medida de incertidumbre promedio, la cual se calcula a partir de la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los eventos. Esto es lo que identificó Shannon como la entropía asociada a una información determinada que se desea transmitir. El término de entropía (del griego tropos=cambio, transformación) lo utilizó originalmente Rudolf Clausius en 1851, como una medida de la pérdida de calor irreversible de un sistema y quien formuló la Segunda Ley de la Termodinámica como la noción de que “la entropía termodinámica de un sistema cerrado se incrementa a un máximo” [9].

2.3. Construcción de la entropía de Shannon utilizada en esta tesis

En el esquema planteado por Shannon, Ec. (2.5), resulta interesante aplicar este concepto de entropía de Shannon (llamada también entropía de información) a una señal. La idea básica se puede describir en los siguientes términos. Supóngase que se tiene un conjunto de puntos definidos en un plano (por ejemplo, el mapa de Poincaré o el plano de fase en un sistema dinámico) como se muestra en la Fig. 2.2 . Se define una malla (cuadrícula) la cual se divide en N celdas rectangulares idénticas. El número de puntos contenidos en una celda dividido entre el número total de puntos de la malla da la probabilidad de ocupación P_i de la i -ésima celda. Entonces, basándonos en la Ec. (2.5), la entropía de Shannon E_s la podemos definir como:

$$E_s = - \sum_{i=1}^N P_i \ln (P_i), \quad (2.7)$$

en donde $\ln$ denota el logaritmo natural. A pesar de que en la literatura existen otras definiciones para caracterizar entrópicamente a un sistema dinámico [10], creemos que el uso de la entropía de Shannon se ha subestimado. Este enfoque se ha aplicado para analizar resultados experimentales de la sincronización entre dos circuitos de Chua [11].

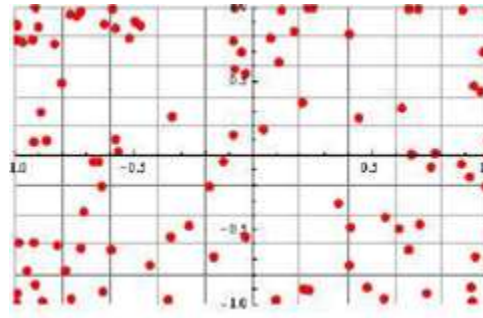


Figura 2.2: Mallado para construir la entropía de Shannon.

2.3.1. Caracterización entrópica del sistema de Chua

Como un ejemplo de la aplicación de la Ec. (2.7), en la Fig. 2.3 se presenta la evolución de la entropía de Shannon del sistema de Chua como función del parámetro α (véanse las Ecs. (1.14)-(1.17) y la Fig. 1.2, del capítulo 1). La entropía se calcula, según la Ec. (2.6), sobre la proyección de la dinámica del circuito de Chua en los planos XY , XZ y YZ . El rango de variación de α es de 6 a 11,3. Nótese que el comportamiento en los tres planos es similar. En la parte superior de la figura se muestran gráficos típicos del estado dinámico del sistema, en el plano XY , en las diferentes regiones definidas por las líneas punteadas. En esta tesis se estará considerando estados caóticos en el doble atractor de Chua ($8,5 < \alpha < 11,3$) y el análisis entrópico se hará en el plano XY .

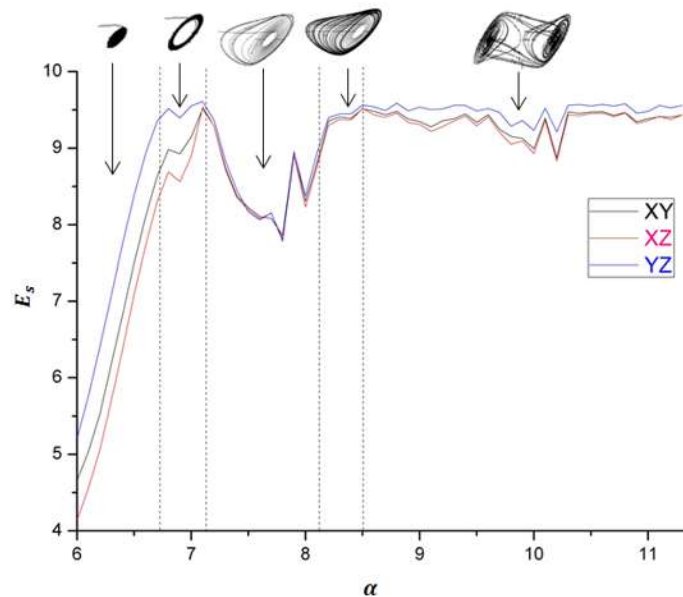


Figura 2.3: La entropía de Shannon del sistema de Chua en los planos XY , XZ y YZ .

2.3.2. Caracterización entrópica del sistema de Duffing

De igual manera que la subseccion anterior, en la Fig. 2.4 se muestra la caracterización entrópica del sistema de Duffing como función del parámetro p (véanse las Ecs. (1.18)-(1.19) y la Fig. 1.3, del capítulo 1). El rango de variación de p es de 0 a 5.4. La forma del estado dinámico no cambia, sólo disminuye a medida que p aumenta. Nótese como la variación de la entropía es más suave que la del sistema de Chua, lo cual es de esperarse para una trayectoria del tipo ciclo límite.

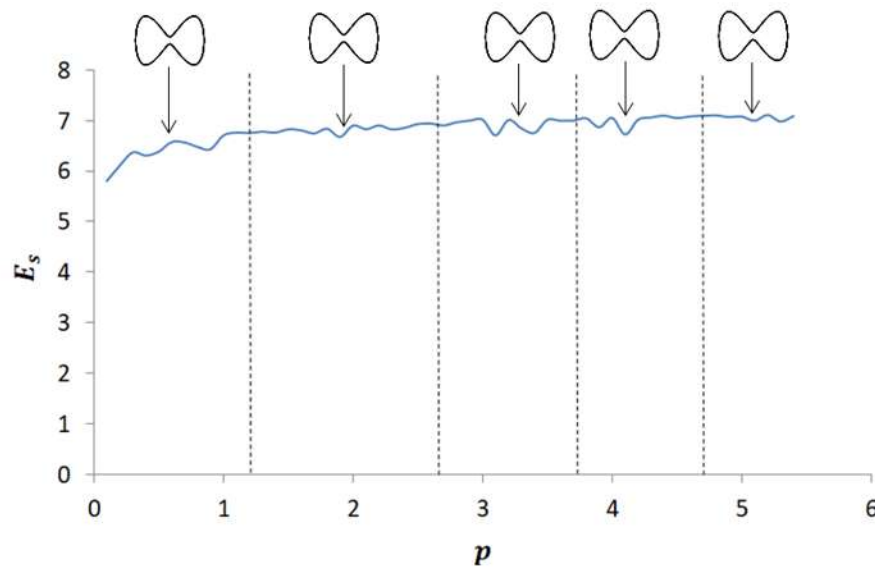


Figura 2.4: La entropía de Shannon del sistema de Duffing en el plano uv .

2.3.3. Caracterización entrópica del sistema de van der Pol

En la Fig. 2.5 se muestra la caracterización entrópica del sistema de van der Pol como función del parámetro q (véanse las Ecs. (1.20)-(1.21) y la Fig. 1.4, del capítulo 1). El rango de variación de q es de 0 a 5.4. La forma del estado dinámico cambia a medida que q aumenta. En este sistema también la variación de la entropía es más suave que la del sistema de Chua. Nótese como el comportamiento entrópico del sistema de van der Pol es diferente al del sistema Duffing.

2.3.4. Caracterización entrópica del sistema de Dixon modificado

En la Fig. 2.6 se muestra la caracterización entrópica del sistema de Dixon modificado como función del parámetro r (véanse las Ecs. (1.22)-(1.23) y la Fig. 1.5, del capítulo 1).

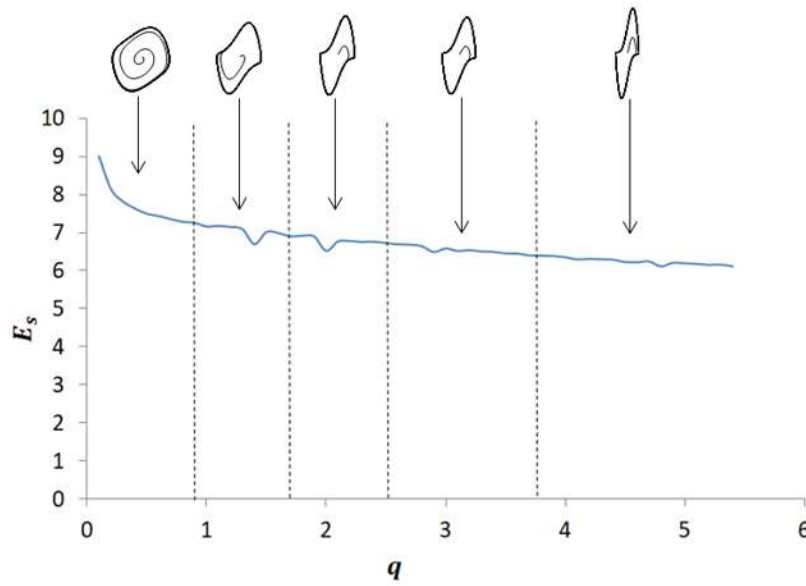


Figura 2.5: La entropía de Shannon del circuito de van der Pol en el plano uv .

El rango de variación de r es de 0 a 1. Para valores de r hasta el orden de 0.4, el sistema colapsa a un punto límite; para r en el rango entre 0.4 y 1 el sistema presenta un estado irregular (pero no caótico). Nótese como el comportamiento entrópico del sistema de Dixon modificado es diferente a la de los sistemas anteriores.

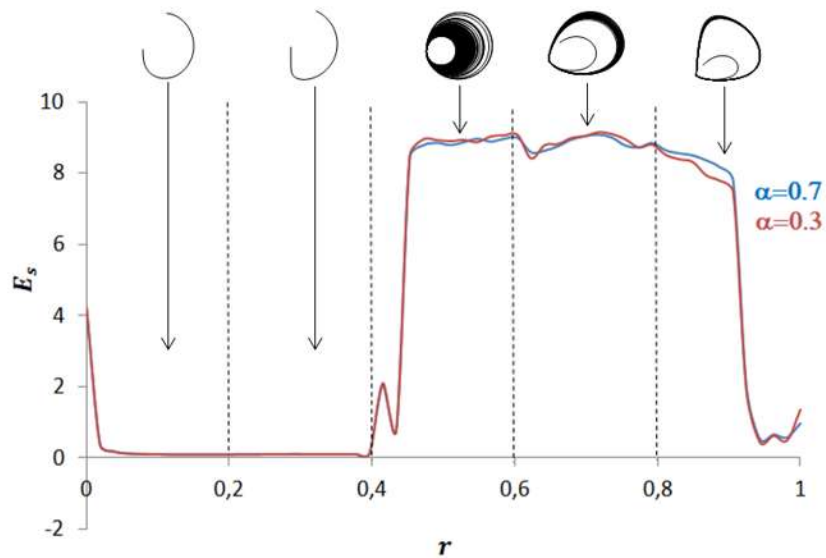


Figura 2.6: La entropía de Shannon del circuito de Dixon modificado en el plano uv con $\alpha = 0,3$ y $\alpha = 0,7$.

Capítulo 3

Cadenas caóticas

3.1. Introducción

En este capítulo se inicia con una descripción básica del problema de la sincronización entre sistemas caóticos. Después se prosigue con la presentación de los sistemas formados por dos cadenas caóticas que son acopladas por un elemento no caótico, que constituyen los objetivos de esta tesis. Se considera que cada cadena está formada por cuatro sistemas de Chua idénticos y que el elemento de acoplamiento es un elemento no caótico que puede ser el sistema de Duffing (SD), el sistema de van der Pol (SP) o el sistema de Dixon modificado (SDx).

3.2. La sincronización del caos

Uno de los rasgos más sobresalientes de los sistemas caóticos es su dependencia con las condiciones iniciales del sistema; es decir, que dos trayectorias que emergen de dos diferentes, pero muy cercanas, las condiciones iniciales se separan exponencialmente en el transcurso del tiempo. Como resultado, los sistemas caóticos violan intrínsecamente la sincronización, porque siempre que dos sistemas idénticos comienzan de condiciones iniciales ligeramente distintas evolucionará en el tiempo en una manera no sincronizada (la diferencia en los estados del sistema crecerá exponencialmente). La idea que subyace en el problema de sincronización es que dos sistemas caóticos, que inicialmente evolucionan sobre atractores diferentes, al acoplarse de algún modo, finalmente siguen una trayectoria común [12]-[13]. De este modo, la sincronización entre dos sistemas se consigue cuando uno de los dos sistemas cambia su trayectoria a la seguida por el otro sistema o bien a una nueva trayectoria común a ambos sistemas. La primera cosa a destacar es que hay una gran diferencia en los procesos a la consecución de estados sincronizados, dependiendo del tipo de acoplamiento.

El fenómeno de sincronización puede ser visto como una manifestación de la tendencia a la auto-organización en sistemas complejos. Una definición más formal es la siguiente [12, 13]:

Definición (Sincronización). *Considérese un sistema dado por $\vec{x} = \vec{f}(\vec{x})$ y otro por $\vec{y} = \vec{g}(\vec{y})$, donde $\vec{f}$ y $\vec{g}$ son campos vectoriales definidos en $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$, se dice que ambos sistemas se sincronizan si se cumple que:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{x}(t) - \vec{y}(t)\| = 0, \quad \vec{x}(0) = \vec{y}(0).$$

3.2.1. Sincronización del sistema de Chua-Duffing

De acuerdo a las ecuaciones que describen al sistema Chua (Ecs. (1.14)-(1.16)) y las ecuaciones que describen al sistema Duffing (Ecs. (1.18)-(1.19)), el sistema acoplado Chua-Duffing, Fig. 3.1, está descrito por [14]:

$$\dot{x} = 10 \left[y - x - bx - \frac{1}{2} (b - a) (|x + 1| - |x - 1|) \right] + k_{xu}(u - x), \quad (3.1)$$

$$\dot{y} = x - y - z + k_{yv}(v - y), \quad (3.2)$$

$$\dot{z} = -15y, \quad (3.3)$$

$$\dot{u} = v + k_{ux}(x - u), \quad (3.4)$$

$$\dot{v} = u - pu^3 + k_{vy}(y - v), \quad (3.5)$$

en donde las cuatro k 's son los parámetros de acoplamiento. En las Ecs. (3.1)-(3.5) se está suponiendo que el estado inicial del sistema de Chua corresponde al doble atractor, Fig. 1.2 (f), y el del sistema de Duffing al de la Fig. 1.3 (e).

Se resolvió numéricamente el sistema acoplado Chua-Duffing dado por las Ecs. (3.1)-(3.5), usando el programa libre DynPac escrito en el lenguaje Mathematica [15]. Se hablará de un esquema de conexión unidireccional (UNI) cuando sólo uno de los k 's es diferente de cero y el resto son nulos. En este caso de UNI se tienen cuatro posibilidades. Los esquemas de conexión bidireccional (BIDI) se entenderán por aquellos casos en donde simultáneamente un par de valores de k son no nulos y el par restante son nulos. En este esquema BIDI se tienen 6 posibilidades. Se realizó un total de diez combinaciones tanto bidireccionales

como unidireccionales, de las cuales cuatro de ellas presentaron buena sincronización. Los resultados obtenidos muestran que dependiendo del esquema de sincronización, el sistema puede colapsar a un punto límite, sincronizarse a un ciclo límite del tipo Duffing o sincronizarse al doble atractor caótico propio del circuito de Chua [14]. Para fines prácticos y de nuestro interés se presentan los casos en donde la evolución del sistema nos muestra la mejor sincronización posible tanto UNI (Fig. 3.2) como BIDI (Fig. 3.3) [14].

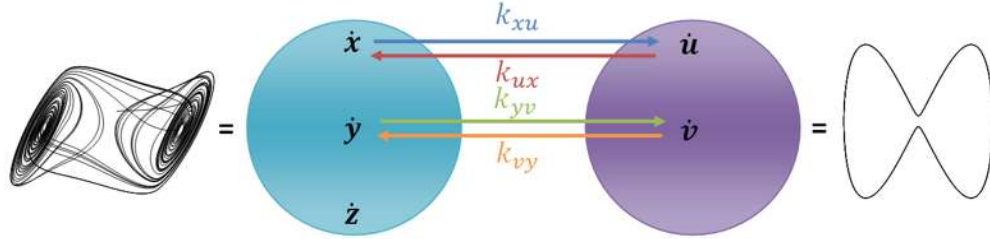


Figura 3.1: Diagrama de acoplamiento para el Sistema Chua-Duffing.

En la Fig. 3.2 se muestra la dinámica de la sincronización para el caso UNI del sistema Chua-Duffing con $k_{xu} \in [0, 100]$. La señal de sincronización se observa en el plano xu : se sabe que el sistema tiene una buena sincronización cuando al variar nuestro parámetro tenemos un acercamiento fino hacia una línea recta. Los estados de los sistemas cuando se alcanza la sincronización ($k_{xu} = 100$) están representados por: (d) Chua (plano xy) y (e) Duffing (plano uv) [9]. En la Fig. 3.3 se muestra la dinámica de la sincronización para el caso BIDI del sistema Chua-Duffing con $k_{yv} = k_{vy} \in [0, 100]$. La presentación de los gráficos es similar a la de la Fig. 3.2.

3.2.2. Sincronización del sistema de Chua-van der Pol

En la Fig. 3.4 se describe el diagrama de sincronización del sistema Chua-van der Pol. Este sistema se describe de manera similar que el sistema Chua-Duffing en las Ecs. (3.1)-(3.5), reemplazando las Ecs. (3.4)-(3.5) que describen al sistema Duffing por las Ecs. (1.20)-(1.21) típicas del sistema van der Pol, con los parámetros de acoplamiento correspondientes [16]:

$$\dot{u} = v + k_{ux}(x - u), \quad (3.6)$$

$$\dot{v} = -u - q(u^2 - 1)v + k_{vy}(y - v). \quad (3.7)$$

Se realizó el mismo análisis que en la subsección 3.2.1. Se hace un análisis numérico puntual y detallado del sistema.

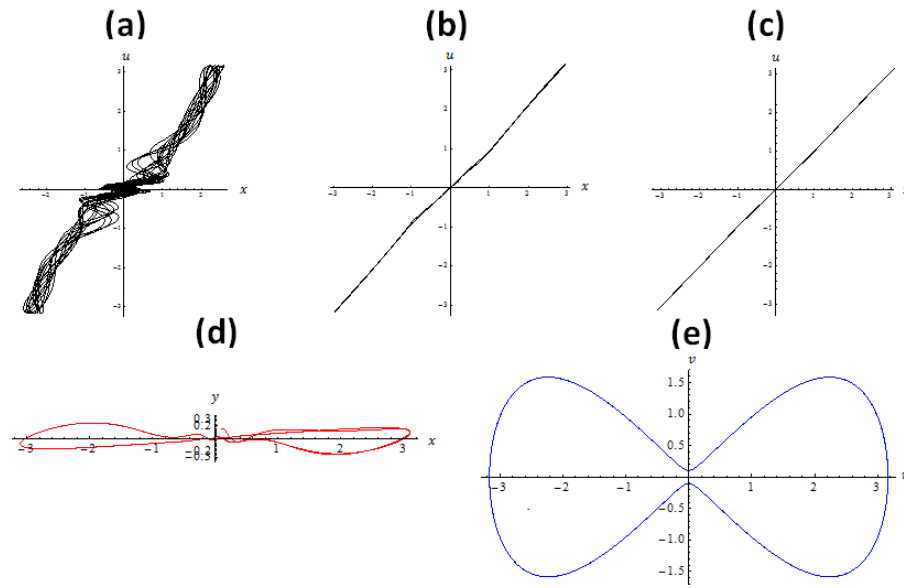


Figura 3.2: Evolución dinámica del sistema Chua-Duffing para el caso UNI ($k_{ux} = k_{yv} = k_{vy} = 0$): (a) $k_{xu} = 0$; (b) $k_{xu} = 50$; (c) $k_{xu} = 100$. En (d) y (e) se muestran los estados finales del sistema SC y SD, respectivamente, cuando $k_{xu} = 100$.

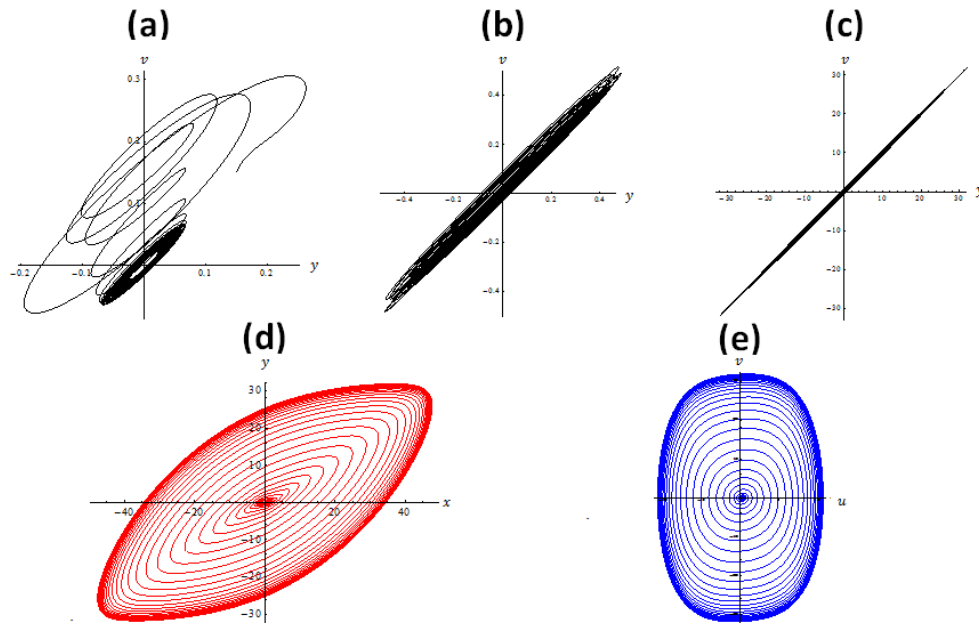


Figura 3.3: Evolución dinámica del sistema Chua-Duffing para el caso BIDI ($k_{yv} = k_{vy}$; $k_{xu} = k_{ux} = 0$): (a) $k_{yv} = 0$; (b) $k_{yv} = 50$; (c) $k_{yv} = 100$. En (d) y (e) se muestran los estados finales del sistema SC y SD, respectivamente, cuando $k_{yv} = 100$.

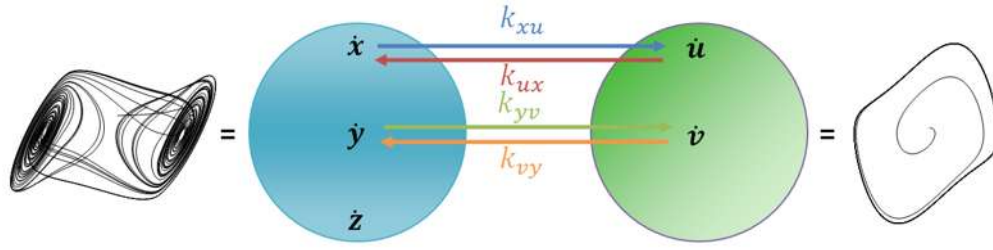


Figura 3.4: Diagrama de acoplamiento para el Sistema Chua-van der Pol.

En la Fig. 3.5 se muestra la dinámica de la sincronización para el caso UNI del sistema Chua-Van der Pol con $k_{vy} \in [0, 100]$ y la señal de sincronización se observa en el plano yv . En la Fig. 3.6 se muestra la dinámica de la sincronización para el caso BIDI del sistema con $k_{xu} = k_{ux} \in [0, 100]$.

Tanto para el caso UNI (Fig. 3.5) como BIDI (Fig. 3.6) los estados de los sistemas cuando se alcanza la sincronización están representados por: (d) Chua (plano xy) y (e) Van der Pol (plano uv). Los resultados obtenidos muestran que dependiendo de las conexiones, el sistema puede sincronizarse a un ciclo límite del tipo van der Pol o al doble atractor caótico propio del circuito de Chua.

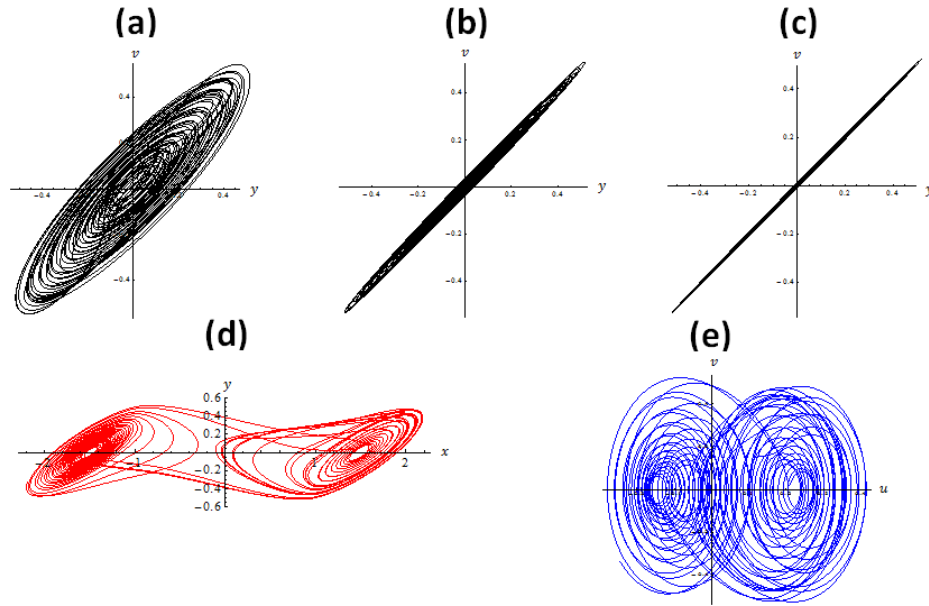


Figura 3.5: Evolución dinámica del sistema Chua-van der Pol para el caso UNI ($k_{xu} = k_{ux} = k_{vy} = 0$): (a) $k_{vy} = 0$; (b) $k_{vy} = 50$; (c) $k_{vy} = 100$. En (d) y (e) se muestran los estados finales del sistema SC y SP, respectivamente, cuando $k_{vy} = 100$.

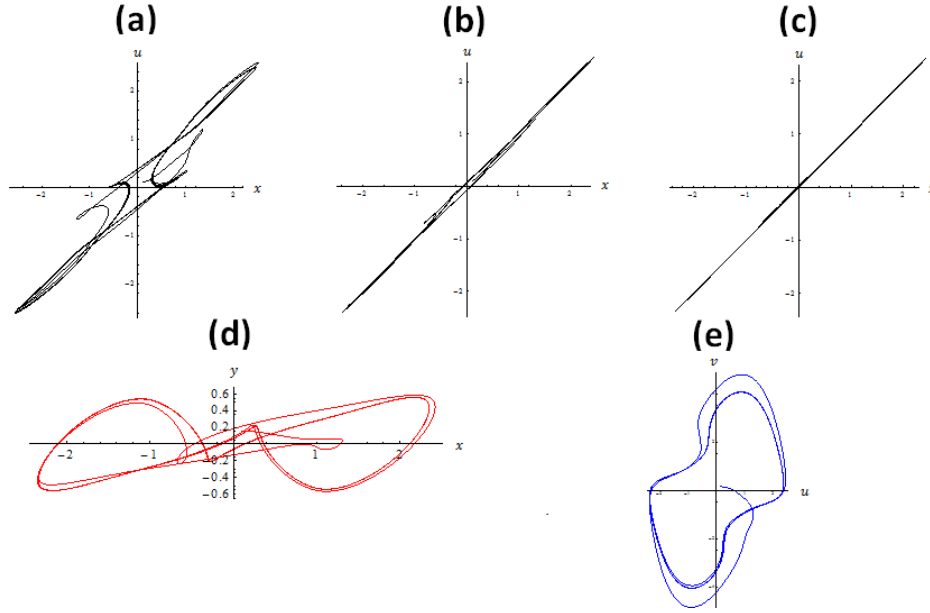


Figura 3.6: Evolución dinámica del sistema Chua-Van der Pol para el caso BIDI ($k_{xu} = k_{ux}$; $k_{yv} = k_{vy} = 0$): (a) $k_{xu} = 0$; (b) $k_{xu} = 50$; (c) $k_{xu} = 100$. En (d) y (e) se muestran los estados finales del sistema SC y SP, respectivamente, cuando $k_{xu} = 100$.

3.2.3. Sincronización del sistema de Chua-Dixon modificado

El caso del acoplamiento del sistema Chua-Dixon modificado, Fig. 3.7, se describe de manera similar que el sistema Chua-Duffing en las Ecs. (3.1)-(3.5), reemplazando las Ecs. (3.4)-(3.5) que describen al sistema Duffing por las Ecs. (1.22)-(1.23) típicas del sistema Dixon con los parámetros de acoplamiento correspondientes [4]:

$$\dot{u} = \frac{uv}{10^{-4} + u^2 + v^2} - 0,3u + k_{ux}(x - u), \quad (3.8)$$

$$\dot{v} = \frac{v^2}{10^{-6} + u^2 + v^2} - rv + r - 1 + k_{vy}(y - v). \quad (3.9)$$

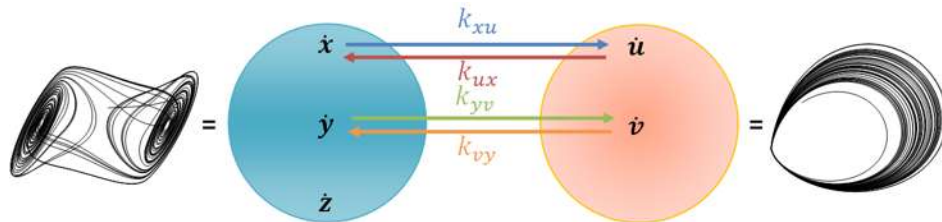


Figura 3.7: Diagrama de acoplamiento para el Sistema Chua-Dixon modificado.

En la Fig. 3.8 se muestra la dinámica de la sincronización para el caso UNI del sistema Chua-Dixon modificado con $k_{ux} \in [0, 100]$ y la señal de sincronización se observa en el plano xu . En la Fig. 3.9 se muestra la dinámica de la sincronización para el caso BIDI del sistema con $k_{yv} = k_{vy} \in [0, 100]$.

Tanto para el caso UNI (Fig. 3.8) como BIDI (Fig. 3.9) los estados de los sistemas cuando se alcanza la sincronización están representados por: (d) Chua (plano xy) y (e) Dixon modificado (plano uv) [10]. De manera similar a las dos secciones anteriores. Los resultados obtenidos muestran que dependiendo de la conexión entre los sistemas, el proceso de acoplamiento presenta tres escenarios. En el primer escenario los sistemas colapsan a un punto límite. En el segundo escenario los sistemas se cuasi-sincronizan a un atractor del tipo Dixon o a un atractor caótico del tipo Chua. En el tercer escenario los sistemas se sincronizan al doble atractor caótico del sistema de Chua.

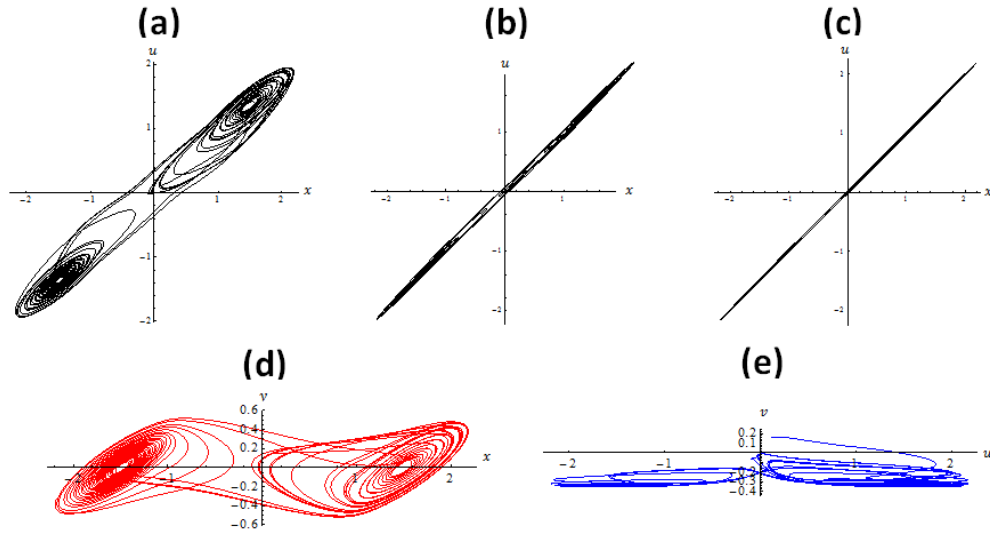


Figura 3.8: Evolución dinámica del sistema Chua-Dixon modificado para el caso UNI ($k_{xu} = k_{yv} = k_{vy} = 0$): (a) $k_{ux} = 0$; (b) $k_{ux} = 50$; (c) $k_{ux} = 100$. En (d) y (e) se muestran los estados finales del sistema SC y SDx, respectivamente, cuando $k_{ux} = 100$.

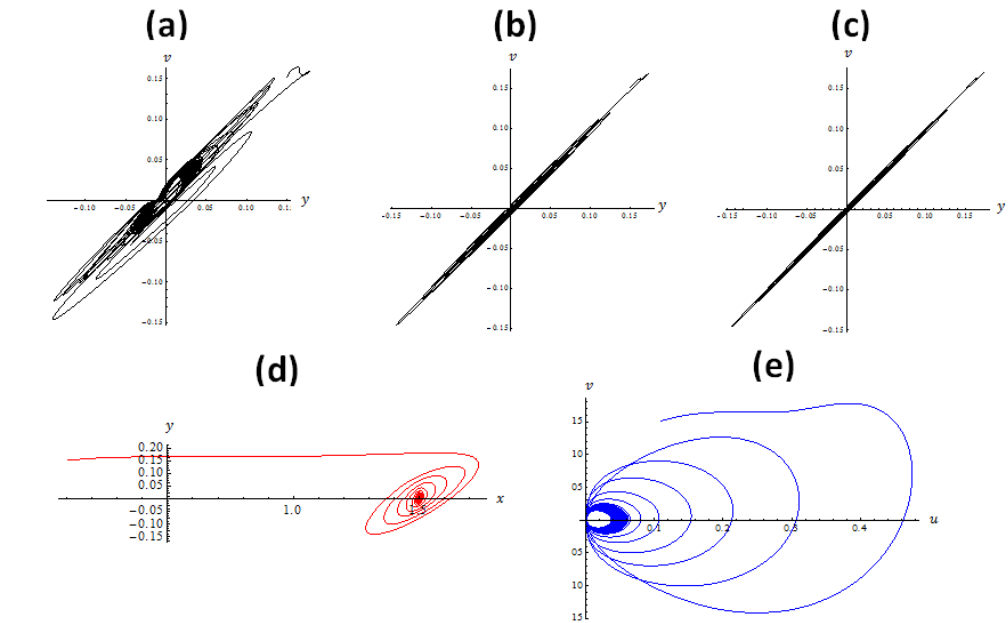


Figura 3.9: Evolución dinámica del sistema Chua-Dixon modificado para el caso BIDI ($k_{yv} = k_{vy}$; $k_{xu} = k_{ux} = 0$): (a) $k_{yv} = 0$; (b) $k_{yv} = 50$; (c) $k_{yv} = 100$. En (d) y (e) se muestran los estados finales del sistema SC y SDx, respectivamente, cuando $k_{yv} = 100$.

3.3. Interacción entre dos cadenas abiertas acopladas por un elemento no caótico

En la Fig. 3.10 se muestra gráficamente el sistema formado por dos cadenas abiertas acopladas por un elemento no caótico. Los elementos de Chua que constituyen cada cadena se suponen conectados en modo unidireccional en los canales x , como lo indican las flechas de la Fig. 3.10.

La dinámica completa del sistema consiste de veintiséis ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y acopladas. Inicialmente se sincronizan las dos cadenas, por separado, en el estado caótico del atractor de Chua. Teniendo en consideración las ecuaciones que describen al circuito de Chua (Ecs. (1.14)-(1.16)), a los circuitos Duffing (Ecs. (1.18)-(1.19)), al de van der Pol (Ecs. (1.20)-(1.21)) y al sistema Dixon modificado (Ecs. (1.22)-(1.23)), la dinámica de la interacción entre las dos cadenas acopladas está descrita por las siguientes ecuaciones:

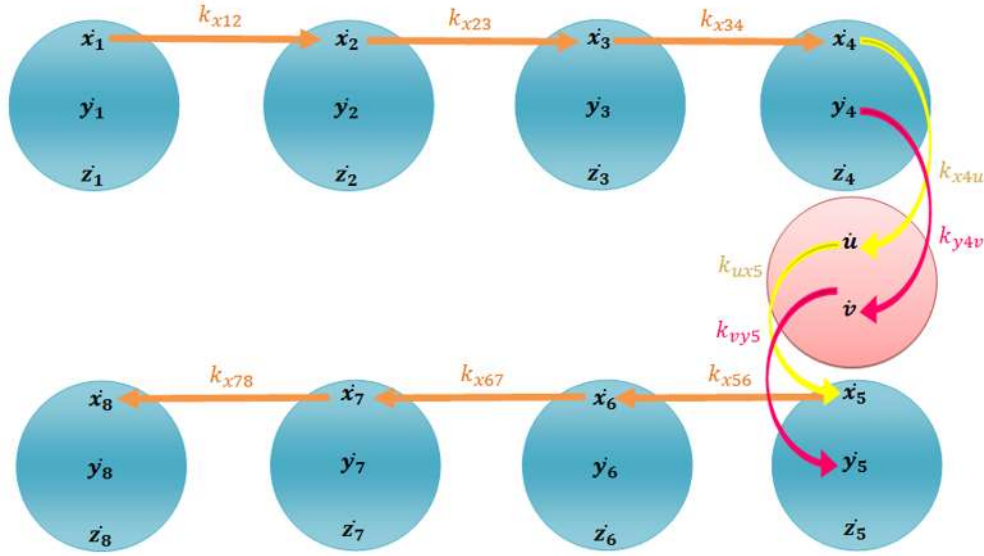


Figura 3.10: Caso general para la interacción entre dos cadenas abiertas acopladas por un elemento no caótico.

$$\dot{x}_i = \alpha \left[y - x_i - bx_i - \frac{1}{2} (b - a) (|x_i + 1| - |x_i - 1|) \right] + k_{xij}(x_j - x_i), \quad (3.10)$$

$$\dot{y}_i = x_i - y_i - z_i, \quad (3.11)$$

$$\dot{z}_i = -\beta y_i \quad (3.12)$$

$$(i = 1, 2, 3, 5, 6, 7; \quad j = i + j),$$

$$\dot{x}_4 = \alpha \left[y - x_4 - bx_4 - \frac{1}{2} (b - a) (|x_4 + 1| - |x_4 - 1|) \right] + k_{x4u}(u - x_4), \quad (3.13)$$

$$\dot{y}_4 = x_4 - y_4 - z_4 + k_{y4v}(v - y_4), \quad (3.14)$$

$$\dot{z}_4 = -\beta y_4, \quad (3.15)$$

$$\dot{x}_8 = \alpha \left[y - x_8 - bx_8 - \frac{1}{2} (b - a) (|x_8 + 1| - |x_8 - 1|) \right], \quad (3.16)$$

$$\dot{y}_8 = x_8 - y_8 - z_8, \quad (3.17)$$

$$\dot{z}_8 = -\beta y_8, \quad (3.18)$$

$$\dot{u} = [...] + k_{ux5}(x_5 - u), \quad (3.19)$$

$$\dot{v} = [...] + k_{vy5}(y_5 - v). \quad (3.20)$$

Las Ecs. (3.10)-(3.12) como caso general de acoplamiento en un sólo canal, describen la dinámica de los circuitos uno, dos y tres de la primera cadena y a los circuitos 5, 6 y 7 de la segunda cadena.

Las Ecs. (3.13)-(3.15) describen la dinámica del circuito cuatro de la primera cadena con parámetros de acoplamiento en x y y , esto para poder realizar el acoplamiento con el sistema central que consta de u y v .

Las Ecs. (3.16)-(3.18) describen la dinámica del circuito ocho de la segunda cadena.

Las Ecs. (3.19)-(3.20) describen la dinámica del elemento central, en donde $[...]$ representa las ecuaciones correspondientes a cada elemento de acoplamiento (SD, SP o SDx), que se discutirán en las subsecciones siguientes.

En esta tesis estamos interesados en analizar la interacción con el circuito central Duffing, van der Pol y el sistema Dixon modificado. De este manera, $[...]$ en las Ecs. (3.19)-(3.20), deben interpretarse, respectivamente, para los casos SD, SP y SDx, como:

$$\dot{u} = v + k_{ux5}(x_5 - u), \quad (3.21)$$

$$\dot{v} = u - pu^3 + k_{vy5}(y_5 - v), \quad (3.22)$$

$$\dot{u} = v + k_{ux5}(x_5 - u), \quad (3.23)$$

$$\dot{v} = -u - q(u^2 - 1)v + k_{vy5}(y_5 - v), \quad (3.24)$$

$$\dot{u} = \frac{uv}{10^{-4} + u^2 + v^2} - 0,3u + k_{ux5}(x_5 - u), \quad (3.25)$$

$$\dot{v} = \frac{v^2}{10^{-6} + u^2 + v^2} - rv + r - 1 + k_{vy5}(y_5 - v). \quad (3.26)$$

3.4. Interacción entre una cadena abierta y una cadena cerrada acopladas por un elemento no caótico

En la Fig. 3.11 se muestra gráficamente el sistema formado por una cadena abierta y una cadena cerrada acopladas por un elemento no caótico. Los elementos de Chua que constituyen cada cadena se suponen conectados en modo unidireccional en los canales x , tanto en la cadena abierta como en la cadena cerrada, como lo indican las flechas de la Fig. 3.11.

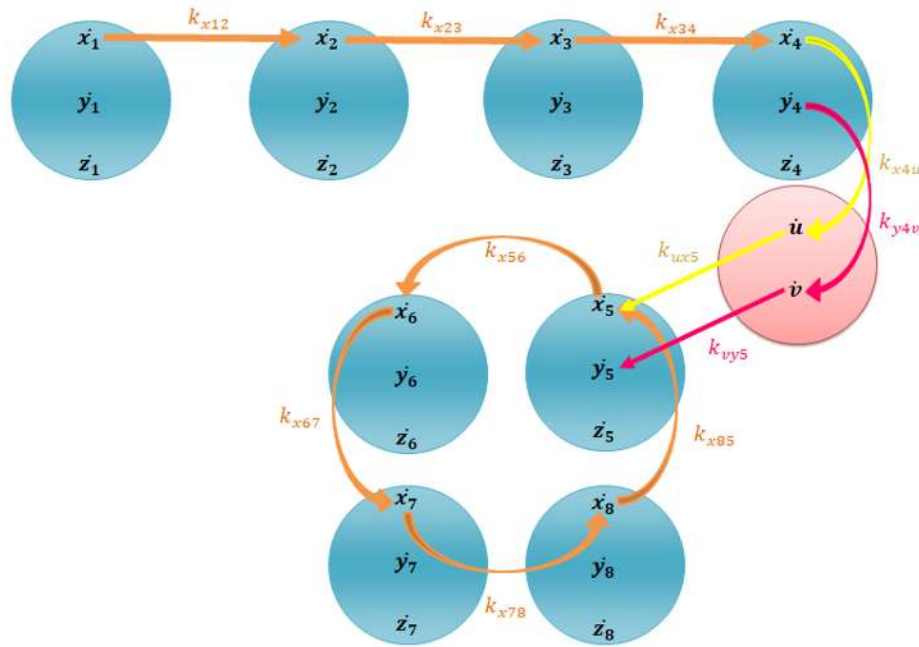


Figura 3.11: Caso general para la interacción entre una cadena abierta y una cadena cerrada acopladas por un elemento no caótico.

Para este caso la interacción completa del sistema consistió, de igual manera que en la sección 3.3, de veintiséis ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y acopladas. Inicialmente se sincronizó la cadena abierta y la cadena cerrada, por separado, en el estado caótico del atractor de Chua. La sincronización se realizó de manera unidireccional en x . De acuerdo a las ecuaciones que describen a cada circuito, el sistema está descrito por las mismas ecuaciones que en la sección 3.3, excepto que sólo es necesario hacer una modificación para cerrar la segunda cadena con un parámetro de acoplamiento más.

Para los circuitos uno, dos, tres, cinco, seis y siete las ecuaciones representativas son las Ecs. (3.10)-(3.12) con $i = 1, 2, 3, 5, 6$ y 7 , respectivamente. Para el circuito cuatro se tienen las Ecs. (3.13)-(3.15) y para el elemento central se tiene las Ecs. (3.19)-(3.20). En estas

últimas ecuaciones se entiende que, dependiendo del elemento central de acoplamiento, se sustituyen por las Ecs. (3.21)-(3.22) para el acoplamiento SD, por las Ecs. (3.23)-(3.24) para el acoplamiento SP, y por las Ecs. (3.25)-(3.26) para el acoplamiento SDx. En el circuito ocho de la segunda cadena, la modificación necesaria queda como:

$$\dot{x}_8 = \alpha \left[y - x_8 - bx_8 - \frac{1}{2} (b - a) (|x_8 + 1| - |x_8 - 1|) \right] + k_{x85}(x_5 - x_8), \quad (3.27)$$

$$\dot{y}_8 = x_8 - y_8 - z_8, \quad (3.28)$$

$$\dot{z}_8 = -\beta y_8. \quad (3.29)$$

3.5. Selección de los parámetros numéricos

Para el análisis de los resultados tenemos una selección de parámetros de acoplamiento entre los circuitos con valores numéricos distintos dependiendo de la interacción. En base a la caracterización entrópica de los sistemas SC (Chua), SD (Duffing), SP (van der Pol) y SDx (Dixon modificado), descritos en el capítulo 2, se tomaron los siguientes criterios de diseño. El sistema SC se entenderá que corresponde al doble atractor de Chua; el sistema SD el que corresponde al valor de $p = 1$; el sistema SP el que corresponde a $q = 0.8$; y el sistema SDx el que corresponde a $r = 0.7$.

Para la interacción entre dos cadenas abiertas acopladas por un elemento no caótico contamos con parámetros de acoplamiento entre las cadenas y el elemento central. Los parámetros de acoplamiento para las cadenas (conectadas de manera unidireccional) son los siguientes: $k_{x12} = k_{x23} = k_{x34} = k_{x56} = k_{x67} = k_{x78} = 100$. Para el elemento central se tienen ocho valores de acoplamiento, dependiendo del tipo de conexión que se quiera obtener: el valor de 100 cuando hay conexión y 0 cuando no hay conexión $k_{x4u}, k_{ux4}, k_{x5u}, k_{ux5}, k_{y4v}, k_{vy4}, k_{y5v}, k_{vy5}$.

Para la interacción entre una cadena abierta y una cadena cerrada acopladas por un elemento no caótico contamos con parámetros de acoplamiento entre las cadenas y el elemento central. Los parámetros de acoplamiento para las cadenas (conectadas de manera unidireccional) son los siguientes: $k_{x12} = k_{x23} = k_{x34} = k_{x56} = k_{x67} = k_{x78} = 100$ y $k_{x85} = 50$ este parámetro es considerado para cerrar la ultima cadena. Para el elemento central se toma la misma secuencia de valores como se indicó en el párrafo anterior.

Los resultados de las interacciones descritas en este capítulo se presentan en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Introducción

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos de las interacciones cuyas dinámicas fueron descritas en el capítulo 3. Se resolvieron numéricamente los problemas representados gráficamente en las Figs. 3.10 y 3.11, usando el programa libre DynPac escrito en el lenguaje Mathematica [11]. Para identificar la dinámica de los sistemas estudiados, se analizaron las señales de sincronización entre los circuitos extremos de cada cadena ($x_1 - x_4$ y $x_5 - x_8$), entre los circuitos extremos del sistema ($x_1 - x_8$), así como el cambio dinámico del elemento central ($u - v$), para diferentes esquemas de conexión entre las cadenas y el elemento de acoplamiento. Los resultados obtenidos muestran que dependiendo del esquema de conexión, los sistemas pueden evolucionar a diferentes escenarios como se indica en las secciones siguientes. Sin embargo, existen diferencias y similitudes que pueden ser explicadas en la evolución dinámica del elemento central de acoplamiento.

4.2. Interacción cadena abierta-cadena abierta

Después de un análisis numérico exhaustivo se encontraron tres escenarios en la evolución del sistema: *i*) Sincronización total en el sistema (caso ST), en donde se mantiene la sincronización entre las dos cadenas y también su sincronización individual; *ii*) sincronización parcial en el sistema (caso SPA), en donde no hay sincronización entre las dos cadenas, pero si se preserva su sincronización individual; *iii*) sincronización parcial en el sistema (caso SPB), en donde no hay sincronización entre las dos cadenas, pero se preserva la sincronización sólo en una de las cadenas.

Para mostrar los resultados obtenidos de acuerdo a la variación de los parámetros de acoplamiento, se generaron tablas representativas para los distintos casos mencionados arriba: ST, SPA y SPB. Se utiliza la simbología mostrada en la Fig. 4.1 .

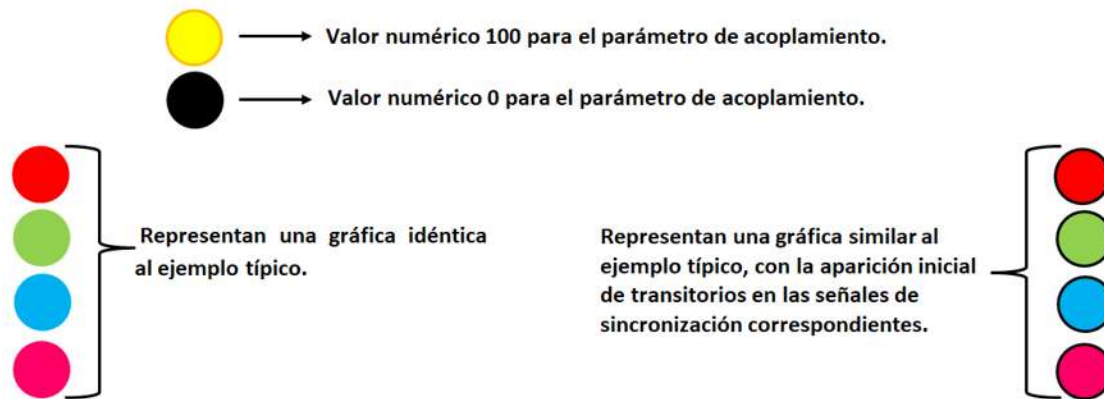


Figura 4.1: Simbología usada para la presentación de los resultados obtenidos en este trabajo.

4.2.1. Acoplamiento SD

En la Fig. 4.2 se muestra la tabla representativa para los resultados del primer caso ST. En la primera fila se muestran las señales de sincronización del sistema (primera gráfica), el estado dinámico adquirido por el elemento central, que en este caso corresponde al sistema de Duffing (segunda gráfica), así como las señales de sincronización de cada cadena (tercera y cuarta gráficas). Cuando existe una buena sincronización las gráficas de las señales de sincronización muestran una recta a 45 grados. En la segunda fila se muestran cinco columnas, la primera corresponde a los ocho parámetros que adquieren diferentes valores de acoplamiento (vda) del elemento central; la segunda, tercera y cuarta columnas indican los canales monitoreados en nuestro sistema. En las filas siguientes se analizan los casos similares al de la primera fila con la simbología descrita en la Fig. 4.1. Esto para no saturar este trabajo con demasiadas gráficas.

De la Fig. 4.2 se puede notar claramente que una sincronización completa del sistema está mediada cuando el elemento central adquiere el estado dinámico del doble atractor de Chua. Las últimas tres filas de la Fig. 4.2 presentan los resultados para el caso en que la evolución del elemento central SD adquiere un estado cuasi-periódico. Nótese como la señal de interacción entre las cadenas muestran unos transitorios antes de alcanzar una cuasi-sincronización entre ellas.

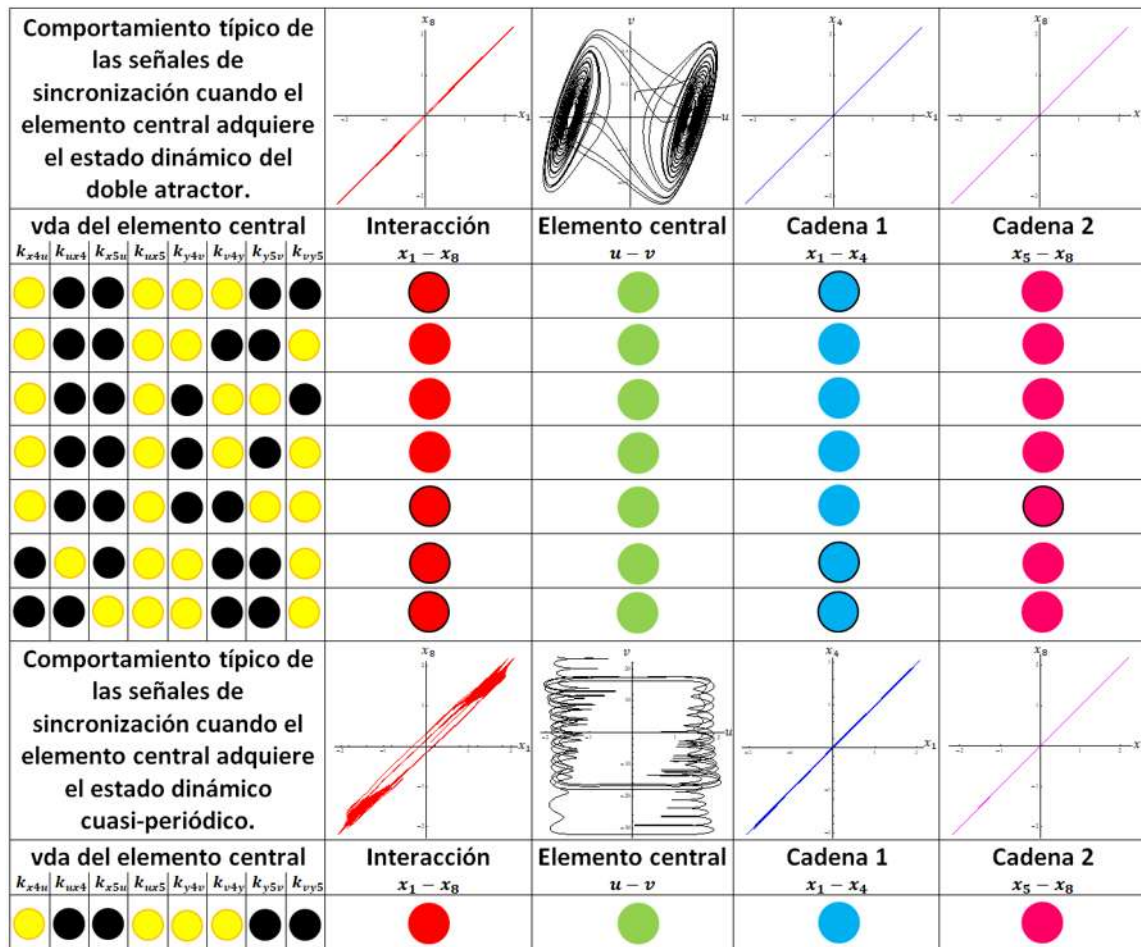


Figura 4.2: Resultados obtenidos para el caso ST y cuando el elemento central de acoplamiento es el sistema Duffing (SD). Nótese como en este caso, dependiendo de los valores de acoplamiento (vda), el elemento central evoluciona al doble atractor o a un estado cuasi-periódico.

En la Fig. 4.3 se muestran los resultados para el caso SPA. En este caso es evidente como la sincronización individual de cada cadena se mantiene pero se rompe la sincronización entre ellas. Se identificaron dos comportamientos del elemento central distintos; en el primero se puede observar que el elemento central Duffing se comporta como un doble atractor; en el segundo se observa que el elemento central Duffing adquiere un estado dinámico de triple atractor. Este último comportamiento es de sumo interés, pues nunca antes se habían reportado resultados similares en la literatura [12].

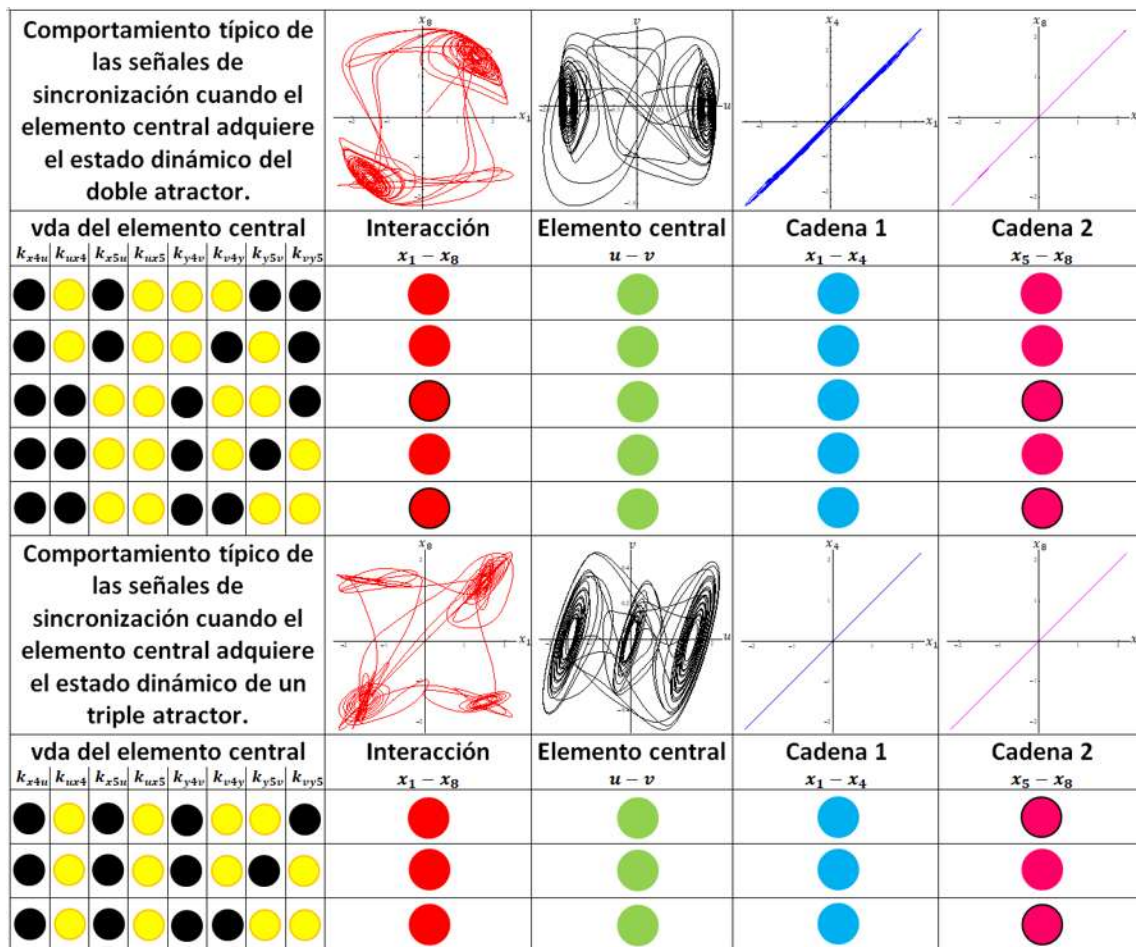


Figura 4.3: Resultados obtenidos para el caso SPA y cuando el elemento central de acoplamiento es el sistema Duffing (SD). Nótese como en este caso, dependiendo de los valores de acoplamiento (vda), el elemento central evoluciona al doble atractor o a un estado de triple atractor.

En la Fig. 4.4 se muestran los resultados para el caso SPB. Para este último caso se obtuvieron tres comportamientos del elemento central distintos: en el primer comportamiento se puede observar que el elemento central Duffing se comporta como un solo atractor; en el segundo se observa que el elemento central Duffing se está comportando como un doble atractor; en el tercer comportamiento el elemento central SD adquiere su estado original de ciclo límite. Desde el punto de vista de aplicaciones para encriptación de información, este caso es de poco interés y será omitido en el resto de este capítulo.

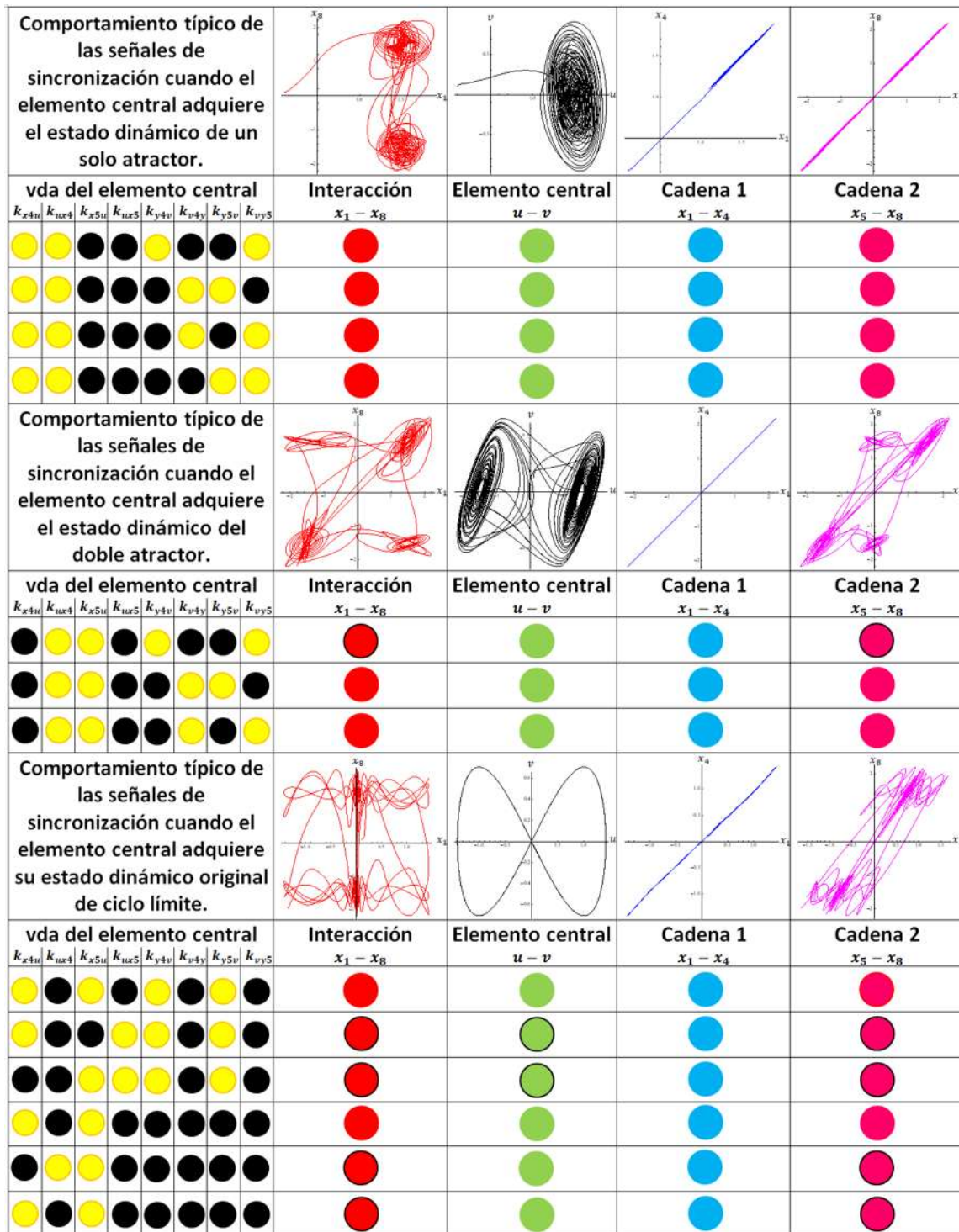


Figura 4.4: Resultados obtenidos para el caso SPB y cuando el elemento central de acoplamiento es el sistema Duffing (SD). Nótese como en este caso, dependiendo de los valores de acoplamiento (vda), el elemento central evoluciona a un sólo atractor, al doble atractor o a su estado dinámico original de ciclo límite.

4.2.2. Acoplamiento SP

Para nuestro interés se llegó a la conclusión de presentar sólo los resultados de los primeros dos casos de sincronización, el caso ST y SPA. Los resultados obtenidos en esta sección y en las siguientes se presentarán de manera similar a la subsección 4.2.1.

Primeramente en la Fig. 4.5 se muestra la tabla representativa para los resultados del caso ST, en donde se presenta un caso de evolución del elemento central SP. Los resultados muestran que para este caso el elemento central adquiere un estado de doble atractor. Nótese como en este caso el elemento central de acoplamiento no evoluciona a un estado cuasi-periódico, como sucedió para el caso en que el elemento de acoplamiento era el sistema de Duffing SD (Fig. 4.2).

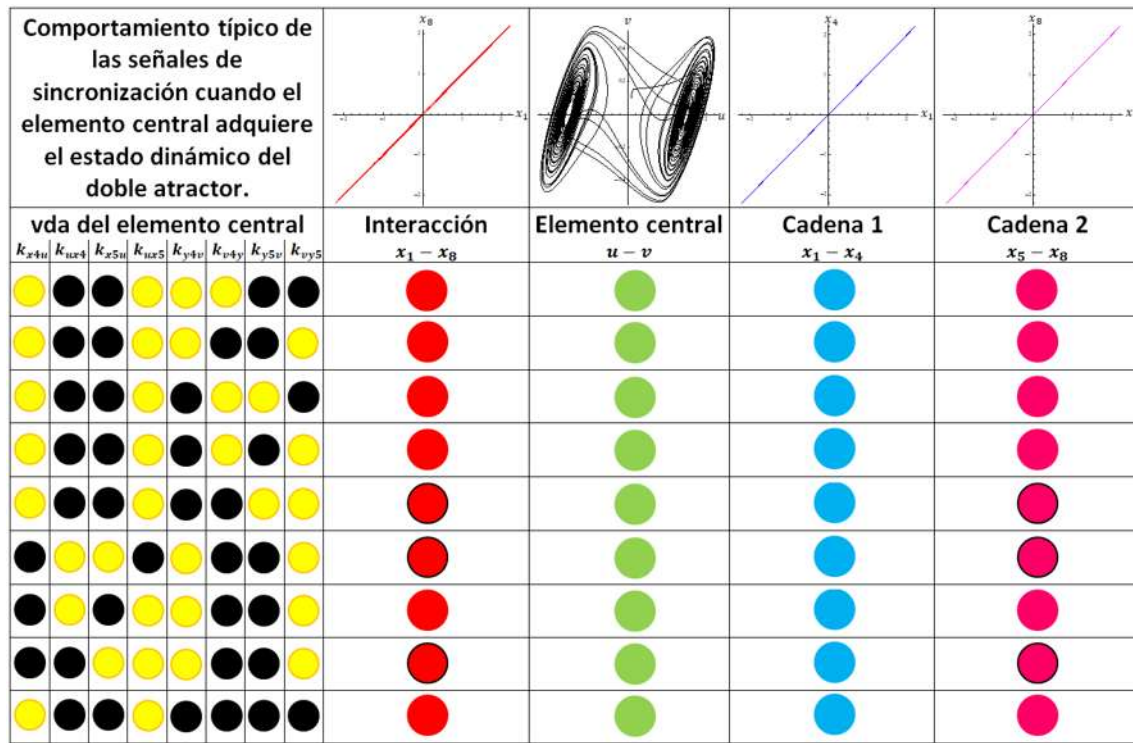


Figura 4.5: Resultados obtenidos para el caso ST cuando el elemento central de acoplamiento es el sistema van der Pol (SP). En este caso, independientemente de los valores de acoplamiento (vda), el elemento central siempre evoluciona al doble atractor.

En la Fig. 4.6 se muestran los resultados para el caso SPA. Se identificaron tres comportamientos del elemento central: en el primer caso se observa que el elemento central van der Pol se comporta como un doble atractor; en el segundo se puede apreciar que el elemento central adquiere un estado de triple atractor; en el tercero se observa como elemento central adquiere su estado dinámico original de ciclo límite.

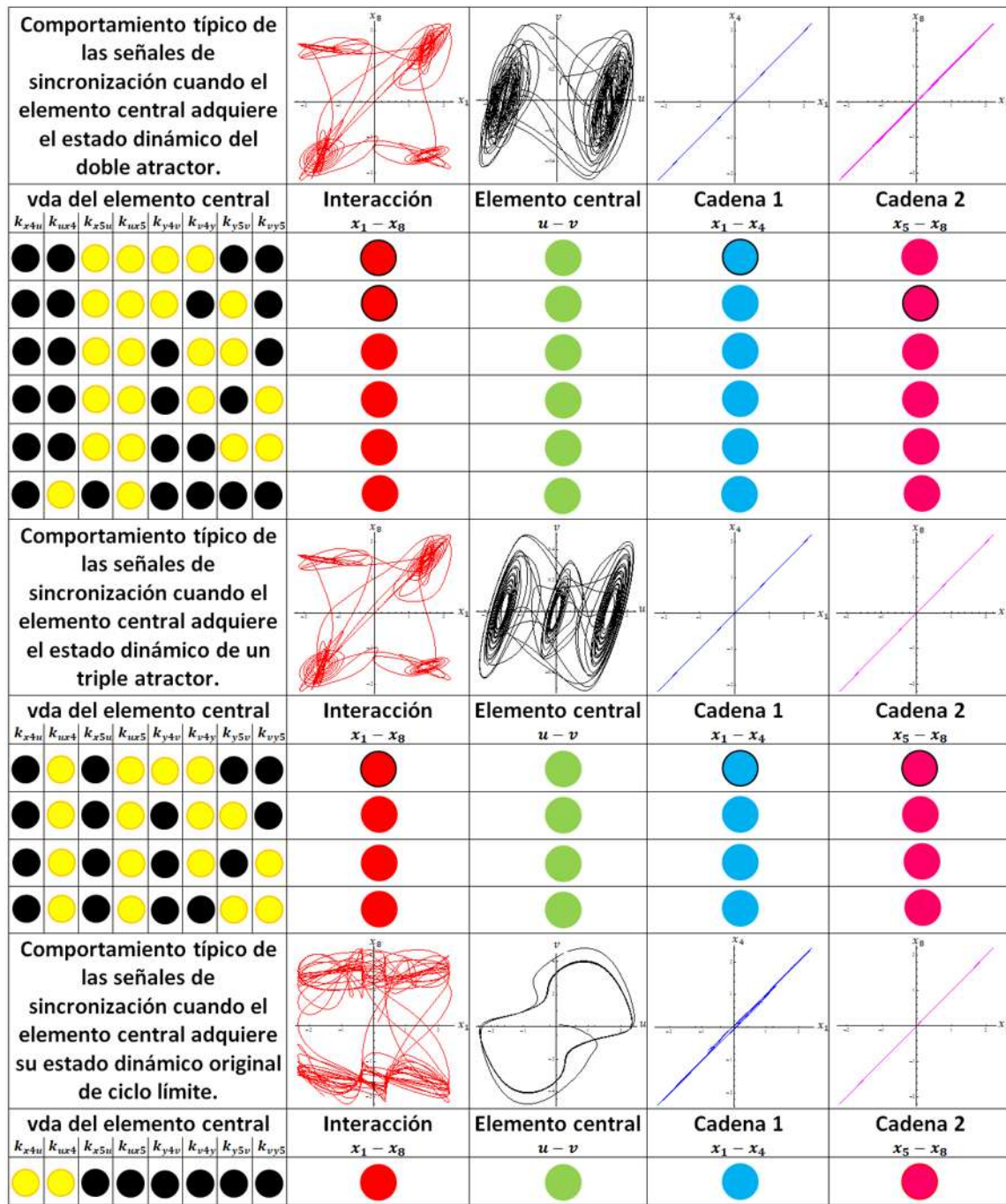


Figura 4.6: Resultados obtenidos para el caso SPA cuando el elemento central de acoplamiento es el sistema van der Pol (SP). Nótese como en este caso, dependiendo de los valores de acoplamiento (vda), el elemento central evoluciona al doble atractor, a un estado de triple atractor o a su estado dinámico original de ciclo límite.

Nótese como este último comportamiento (Fig. 4.6) no se presentó para el caso en que el elemento de acoplamiento era el sistema de Duffing SD (Fig. 4.3).

4.2.3. Acoplamiento SDx

En la Fig. 4.7 se muestra la tabla representativa para los resultados obtenidos del caso ST, en donde se presenta un único caso de evolución del elemento central SDx hacia el estado de doble atractor. Estos resultados son similares al caso de acoplamiento SP (Fig. 4.5) pero también se diferencia del caso de acoplamiento SD (Fig. 4.2) en donde el comportamiento del elemento central no tiende a un estado cuasi-periódico.

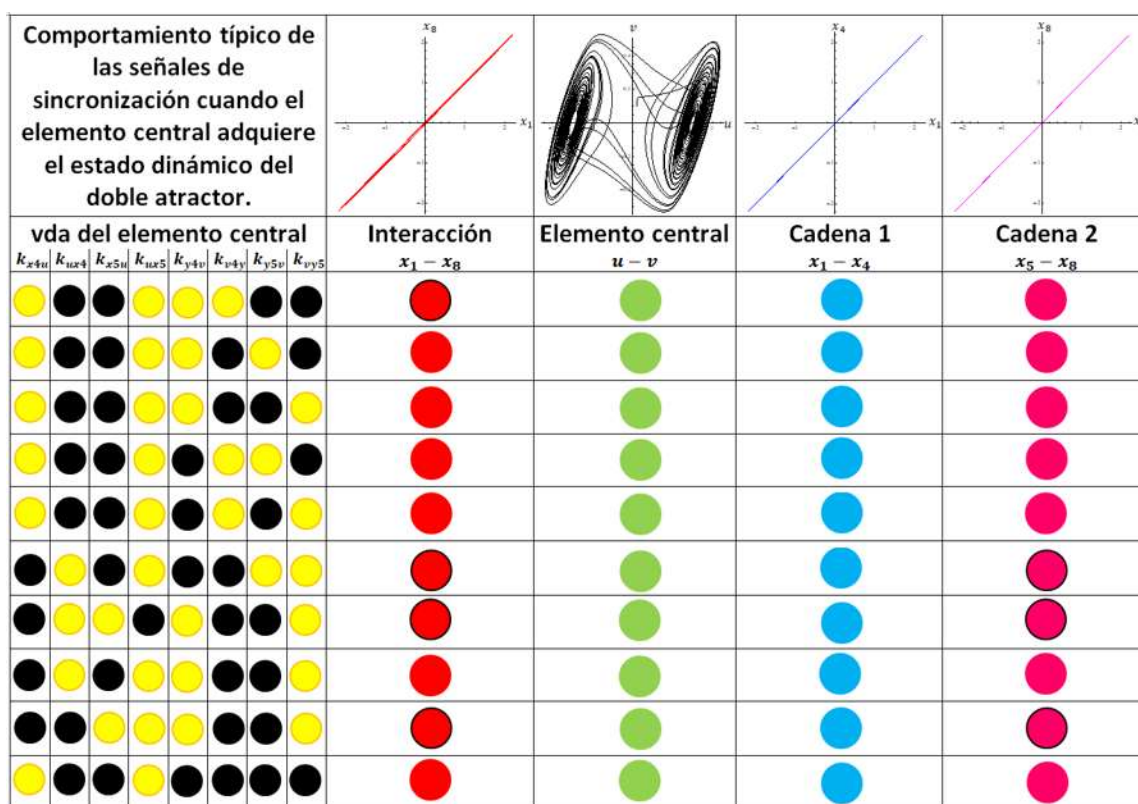
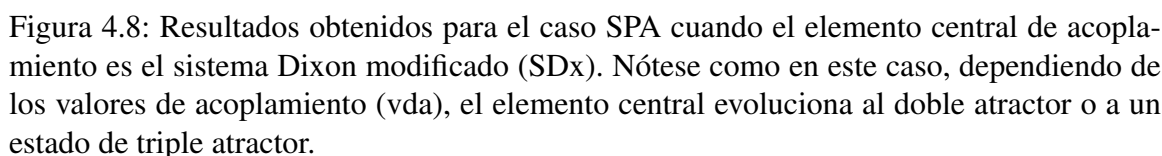


Figura 4.7: Resultados obtenidos para el caso ST cuando el elemento central de acoplamiento es el sistema Dixon modificado (SDx). En este caso, dependiendo de los valores de acoplamiento (v_{da}), el elemento central evoluciona al doble atractor.

En la Fig. 4.8 se pueden observar los resultados para el caso SPA. Para este caso se identificaron dos comportamientos del elemento central: en el primer comportamiento se observa que el elemento central SDx se comporta como un doble atractor; en el segundo comportamiento el elemento central define su comportamiento como un triple atractor.



Para mostrar los resultados obtenidos de la interacción de cadena abierta-cadena cerrada, se utiliza la misma estructura de presentación que en la sección 4.2.

En la Fig. 4.9 se muestra la tabla representativa para los resultados del caso ST, en donde se presentan tres comportamientos de evolución del elemento central SD: en el primero se observa que el elemento central van der Pol se comporta como un doble atractor; en el segundo el elemento central adquiere la forma de un estado dinámico cuasi-periódico; en el tercero el elemento central adquiere su estado original de ciclo límite.

Evidentemente estos resultados (Fig. 4.9) contrastan con su homólogo para el caso de configuración de cadenas abiertas (Fig. 4.2).

En la Fig. 4.10 se observan los resultados para el caso SPA. Para este caso se identificaron dos comportamientos del elemento central: en el primero se observa que el elemento central Duffing se comporta como un doble atractor; mientras que en el segundo el elemento central se comporta como un triple atractor. La comparación entre las Figs. 4.10 y 4.3 muestran, para este caso SPA, las similitudes y diferencias entre las configuraciones de cadenas abiertas y cerrada-abierta.

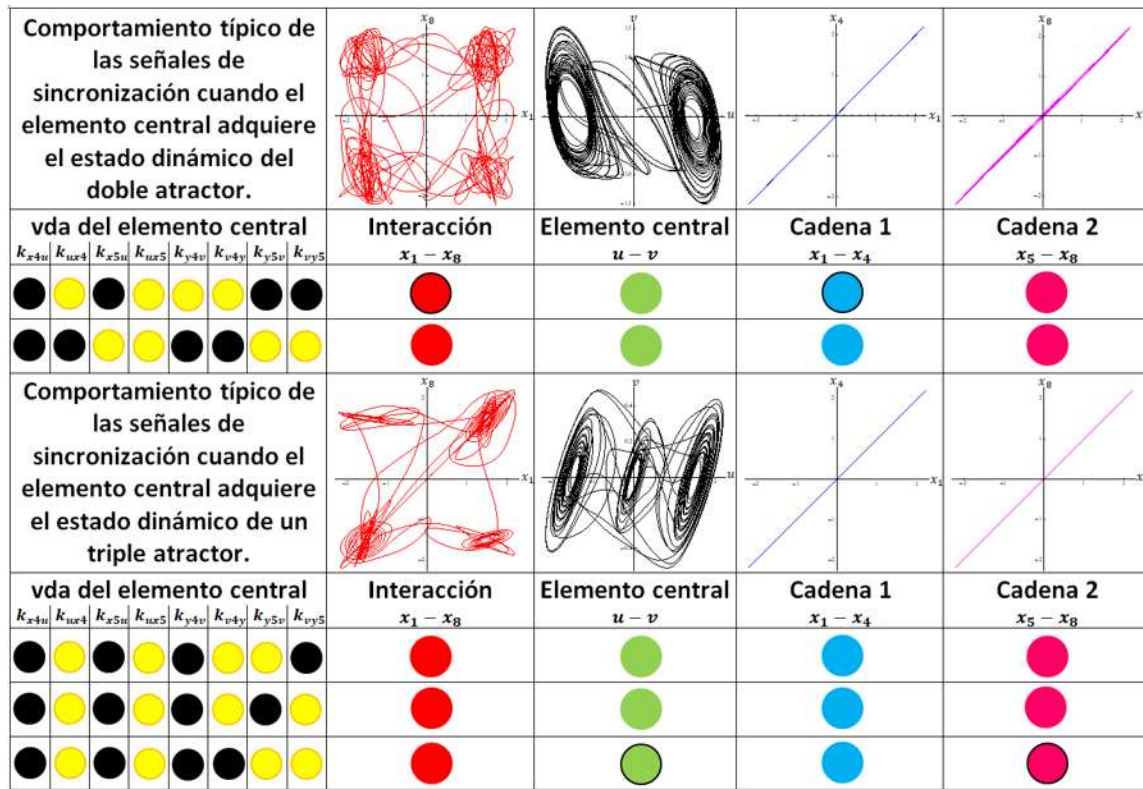


Figura 4.10: Resultados obtenidos para el caso SPA cuando el elemento central de acoplamiento es el sistema Duffin (SD). Nótese como en este caso, dependiendo de los valores de acoplamiento (vda), el elemento central evoluciona al doble atractor o a un estado de triple atractor.

4.3.2. Acoplamiento SP

En la Fig. 4.11 se presentan los resultados del caso ST, en donde se presentan tres comportamientos de evolución para el elemento central SP: en el primero se puede observar que el elemento central van der Pol se comporta como un doble atractor; en el segundo el elemento central adquiere su estado original de ciclo límite; en el tercero el elemento central adquiere un estado dinámico cuasi-periódico.

Una rápida comparación entre las Figs. 4.11 y 4.5 muestran claramente el efecto entre las configuraciones de cadena abierta-cadena abierta y cadena abierta-cadena cerrada. Esta última configuración favorece adicionalmente la sincronización total con estados periódicos y cuasi-periódicos en el elemento de acoplamiento.

En la Fig. 4.12 se muestran los resultados para el caso SPA. En este caso se identificaron tres comportamientos del elemento central distintos: en el primero se puede observar que el elemento central van der Pol se comporta como un doble atractor; en el segundo se observa que el elemento central adquiere un estado dinámico de triple atractor; y en el tercero se puede observar que el elemento central adquiere su estado dinámico original de ciclo límite. Para este caso se nota una gran similitud con su homólogo para la configuración de cadena abierta-cadena abierta (Fig. 4.6).

4.3.3. Acoplamiento SDx

En la Fig. 4.13 se muestran los resultados para el caso ST. En este caso se identificó un sólo comportamiento para el elemento central, donde se puede observar que el elemento central Dixon modificado se comporta como un doble atractor.

Al comparar las Figs. 4.13 y 4.7 se observa una gran similitud de los estados de evolución para las configuraciones de cadena abierta-cadena cerrada y cadena abierta-cadena abierta.

En la Fig. 4.14 se muestran los resultados para el caso SPA. En este caso se identificó un sólo comportamiento para el elemento central, donde se puede observar que el elemento central Dixon modificado se comporta como un triple atractor.

Al comparar las Figs. 4.14 y 4.8, se nota como la configuración cadena abierta-cadena cerrada excluye el caso SPA mediado a través del doble atractor en el elemento de acoplamiento.

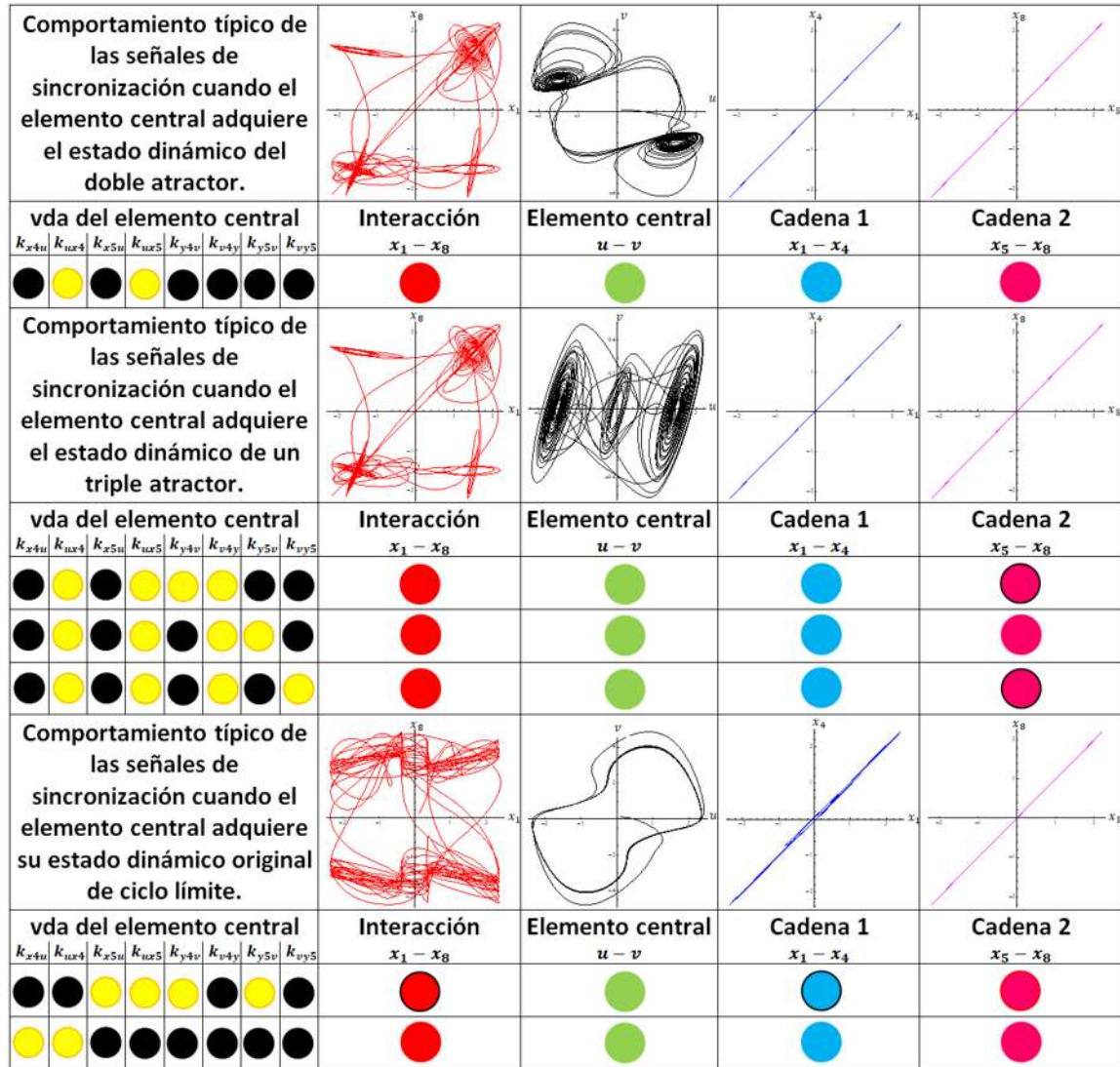


Figura 4.12: Resultados obtenidos para el caso SPA cuando el elemento central de acoplamiento es el sistema van der Pol (SP). Nótese como en este caso, dependiendo de los valores de acoplamiento (vda), el elemento central evoluciona al doble atractor, a un estado de triple atractor o adquirir su estado dinámico de ciclo límite.

4.4. Discusión de los resultados

Para este trabajo es de mucho interés analizar y dar importancia a los casos en donde el elemento central evoluciona a un doble o triple atractor, pues esto permitiría implementar esquemas para encriptación de información. En base a los resultados obtenidos podemos hacer las siguientes observaciones:

- Los resultados para el sistema SD del caso ST en la configuración cadena abierta-cadena abierta, en comparación con su homólogo de cadena abierta-cadena cerrada, muestran que la evolución del elemento central a un doble atractor se preserva en más casos en la cadena abierta-cadena cerrada. Para el caso SPA la cadena abierta- abierta preserva más casos que la cadena abierta-cadena cerrada, pues hay tres casos mas para la evolución del elemento central a un doble atractor, mientras que la evolución a un triple atractor son los mismos casos en ambas cadenas.
- Los resultados para el sistema SP del caso ST en la configuración cadena abierta-cadena abierta, en comparación con su homólogo de cadena abierta-cadena cerrada, muestran que la evolución del elemento central a un doble atractor se preserva en más casos en la cadena abierta-cadena cerrada. Para el caso SPA la cadena abierta-cadena abierta preserva más casos que la cadena abierta-cadena cerrada, pues hay cinco casos más para la evolución del elemento central a un doble atractor y para la evolución a un triple atractor también hay un caso más en las cadenas.
- Los resultados para el sistema SDx del caso ST en la configuración cadena abierta-cadena abierta, en comparación con su homólogo de cadena abierta-cadena cerrada, muestran que la evolución del elemento central a un doble atractor se preserva en más casos en la cadena abierta-cadena cerrada. Para el caso SPA la cadena abierta-cadena abierta preserva más casos que la cadena abierta-cadena cerrada, pues hay un caso más para la evolución del elemento central a un doble atractor y para la evolución del triple atractor se presentan tres casos, de los cuales ninguno se presenta en la cadena abierta-cadena cerrada.
- El sistema que presenta un mayor número de casos de ST de evolución del elemento central a un doble atractor en la configuración cadena abierta-cadena abierta es el sistema SDx.
- El sistema que presenta un mayor número de casos de SPA de evolución del elemento central a un doble y triple atractor en la configuración cadena abierta-cadena abierta es el sistema SP.
- El sistema que presenta un mayor número de casos de ST de evolución del elemento central a un doble atractor en la configuración cadena abierta-cadena cerrada son los sistemas SP y SDx ambos con once casos.

- El sistema que presenta un mayor número de casos de SPA de evolución del elemento central a un doble y triple atractor en la configuración cadena abierta-cadena cerrada es el sistema SD.

Capítulo 5

Conclusiones

Se cumplieron los objetivos planteados en esta tesis. De los resultados reportados en el capítulo 4 se puede concluir lo siguiente:

- a) Se presentó un análisis numérico de las ecuaciones que describen la dinámica no lineal de las interacciones de cadenas caóticas acopladas por un elemento no caótico.
- b) Se logró analizar el comportamiento del elemento central (SD, SP o SDx) tanto en la configuración de cadena abierta-cadena abierta como en la configuración de cadena abierta-cadena cerrada.
- c) Se identificaron tres casos importantes de evolución de los sistemas: caso ST, caso SPA y caso SPB. De los cuales los de mayor interés para este trabajo son el caso ST y SPA, pues ambos casos presentan buena sincronización en ambas cadenas y en las dos cadenas por separado.
- d) Fue posible identificar conexiones particulares que permiten mantener sincronizaciones adecuadas que pueden ser utilizadas en esquemas de encriptación de información.
- e) Se identificaron diferentes cambios en la estructura dinámica del elemento central de acoplamiento, que está relacionada con el comportamiento dinámico de las cadenas interactuantes.
- f) A pesar de la distinta naturaleza de los elementos no caóticos de acoplamiento, fue posible identificar similitudes y diferencias en la evolución dinámica de los casos SD, SP y SDx, tanto en las configuraciones de cadena abierta-cadena abierta como de cadena abierta-cadena cerrada.

Bibliografía

- [1] Fortuna, L., *Chua's Circuit Implementations: Yesterday, Today and Tomorrow*. World Scientific, Singapore (2009). pp. 1-74.
- [2] Sprott, J. C., *Elegant chaos: Algebraically simple chaotic flows*. Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (2014). pp. 41-47.
- [3] Sprott, J. C., *Elegant chaos: Algebraically simple chaotic flows*. Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (2014). pp. 109-112.
- [4] Arroyo Correa, G., Campos Hernández, A., *Dinámica no lineal de un sistema basado en una variante del sistema de Dixon*. XIII Encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia (2016).
- [5] Tipler, P. A., *Física para la Ciencia y la Tecnología*. 4ta. Ed., Vol. 2, Reverté, S. A. (2000). pp. 859-865.
- [6] Strogatz, S.H., *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books (1994). pp. 196-226.
- [7] Shannon, C. E., *Mathematical theory of communication*. The Bell System Technical Journal, Vol. 27: 379-423, 623-656 (1948).
- [8] Herrera, M. A., *Biofísica, Geofísica, Astrofísica: Para qué sirve la física*. UNAM, FCE (2001). pp. 103-109.
- [9] Schiff, J. L., *Cellular Automata: A Discrete View of the World*. Wiley-Interscience (2008). pp. 20-24.
- [10] Hilborn, R. C., *Chaos and Nolinear Dynamics*. 2nd Edition, Oxford University Press (2000). pp. 335-341.
- [11] Arroyo Correa, G., et al., *Estudio de caos y sincronización con el Circuito de Chua*. Ciencia Nicolaita (2009), 51: 195-205.
- [12] Bocaletti, S., *Phys. Rep.* 366, 1101 (2002).

-
- [13] Kapitaniak, T., *Chaos for Engineers: Theory, Applications and Control*. 2nd Edition, Springer (2000). pp. 120-127.
- [14] Serrano Arévalo, K. I., et al., *Dinámica de la Sincronización del Sistema Duffing-Chua*. 11 Congreso Estatal de Ciencia, Tecnología e Innovación (2016).
- [15] Clark, A., *DynPac: A dynamical systems package for Mathematica*. Disponible en: <http://www.me.rochester.edu/~clark/dynpac.html>. Fecha de consulta: agosto de 2018.
- [16] Rangel Cortes, G., et. al., *Estudio de la dinámica no lineal del sistema Van der Pol-Chua* 11 Congreso Estatal de Ciencia, Tecnología e Innovación (2016).