



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

EL MÉTODO DE SOMMERFELD PARA LA SOLUCIÓN
DEL PROBLEMA DE DIFRACCIÓN SOBRE EL
SEMIPLANO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

P R E S E N T A :

TANIA RAQUEL GARIBAY VALLADOLID

DIRECTOR DE TESIS :

DR. ANATOLI MERZON

MORELIA MICHOACÁN, ABRIL DE 2019



*Dedicada con mucho cariño a quienes más quiero,
esas dos personas a las que no me alcanzan las palabras
para agradecer todo su esfuerzo, amor y apoyo.*

*Dedicada también a todos mis profesores
quienes me dieron su tiempo y me enseñaron
con humildad lo que es una verdadera educación,
de manera especial para el Dr. Anatoli Merzon
a quien aprecio mucho.*

Índice general

Resumen	IV
Abstract	v
Introducción	VI
1. Potenciales esféricos generados por funciones analíticas	1
1.1. Las funciones esféricas	1
1.2. “Levantamiento” de las funciones analíticas de una variable a la esfera unitaria.	4
1.3. Extensión de las funciones esféricas a \mathbb{R}^3	6
1.3.1. Extensión a las funciones homogéneas de grado cero (orden cero)	7
1.3.2. Extensión a las funciones homogéneas de grado -1 (orden cero)	8
1.3.3. Extensión a las funciones homogéneas de grado $-m - 1$	10
1.3.4. Simetrización de la función f_{-m-1}^+ dada por (1.56)	13
1.4. Las funciones f_{-m-1}^+ , $m = -1, 0, \dots$ son las funciones esféricas superficiales de orden m	15
2. Proceso límite: de Laplace a Helmholtz	17
2.1. El operador de Helmholtz como “límite” de la parte esférica del operador de Laplace	17
2.2. Obtención de las soluciones de la ecuación de Helmholtz	19
2.3. Comprobación de la ecuación de Helmholtz para U_1	21
3. Ejemplos espaciales de funciones generadas por potenciales analíticos	24
3.1. Soluciones finitas univaluadas en todas partes (la onda plana)	24
3.2. Contorno de integración	25
3.3. Solución ramificada (dos-valuada)	30
4. Aplicación de la teoría de Sommerfeld al problema de difracción sobre el semiplano	35
4.1. Análisis de la onda difractada	40
Apéndice	45

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
A. Demostraciones de algunas afirmaciones de la sección 2.1	45
B. Demostraciones de algunas afirmaciones de la sección 2.2	49
C. Completitud de la demostración del Lema 3.3.3	50

Resumen

Este trabajo se dedica a la justificación del proceso de la obtención de las soluciones de la ecuación de Helmholtz ramificadas, las cuales fueron obtenidas por A.Sommerfeld [5] para resolver el problema de difracción sobre el semiplano. Antes este proceso nunca fue descrito de manera estricta en la forma matemática.

Palabras Clave *Justificación, Obtención, Estricta, Soluciones, Helmholtz.*

Abstract

This work is dedicated to the justification of the process of obtaining the solutions of the branched Helmholtz equation, which was obtained by A.Sommerfeld [5] to solve the problem of diffraction on the half plane. Before this process was never described strictly in the mathematical form.

Introducción

Este trabajo está dedicado a la exposición de un método del gran físico-matemático A. Sommerfeld, elaborado por él en 1896 para resolver el problema de difracción de una onda plana sobre una pantalla semiplana. A. Sommerfeld fue el primero que resolvió el problema de forma completa usando métodos matemáticos no típicos para la física. Estos métodos incluyen la teoría de las funciones esféricas elaborada por Maxwell, la teoría de las superficies de Riemann y los métodos asintóticos para integrales, etc.

La teoría de A. Sommerfeld ha sido establecida en su famoso artículo [1] y en el libro [2]. Sin embargo todavía no existe una exposición de esta teoría en una forma matemática y la cual pudiera ser entendida a una clase amplia de los estudiantes ocupados de la Física-Matemática. Podemos sin embargo indicar el libro [5] en el cual la intención de exponer la teoría fue realizada. Nosotros proponemos otra versión de dicha exposición que según nosotros es más adecuada, por que demostramos todas las afirmaciones que son “evidentes” desde el punto de vista físico y no son así desde el punto de vista matemático.

El plan de trabajo es el siguiente. Investigamos el texto original [5] (traducido del inglés) y analizamos cada afirmación que frecuentemente tiene un carácter descriptivo. Además muchos cálculos están omitidos por el autor. Nosotros realizamos estos cálculos y justificamos matemáticamente las afirmaciones que no tienen carácter exacto, presentando demostraciones en el sentido matemático, convirtiendo de esta manera las afirmaciones descriptivas en afirmaciones matemáticas, es decir, lemas, teoremas etc. Además recuperamos todos los cálculos necesarios, los cuales a veces son bastante largos.

La tesis se organizó de la siguiente manera

1. En el Capítulo 1 exponemos una construcción de Sommerfeld de las funciones esféricas que satisfacen la parte esférica del operador de Laplace y que tienen orden $m = -1, 0, \dots$ estas funciones se definen por medio de la composición de una función holomorfa f y la proyección estereográfica.
2. En el Capítulo 2 exponemos como A. Sommerfeld lleva la parte esférica del operador de Laplace a la ecuación de Helmholtz, utilizando cambios de variables y un proceso límite, el cual conduce a obtener una familia de soluciones para la ecuación de Helmholtz.
3. En el Capítulo 3 damos dos soluciones a la ecuación de Helmholtz escogiendo funciones espaciales f . La primera función es univaluada y se convierte en la

onda incidente expresada a través de la integral de Sommerfeld. Esta función tiene período 2π con respecto de φ , pero aún no resuelve el problema de difracción sobre el semiplano. La segunda función tiene período 4π con respecto de φ y está cerca de resolver el problema de difracción.

4. En el Capítulo 4 exponemos la solución de Sommerfeld del problema de difracción sobre el semiplano.

Capítulo 1

Potenciales esféricos generados por funciones analíticas

El método de A. Sommerfeld para resolver el problema de difracción de una onda plana sobre el semiplano está basado a las soluciones ramificadas de la ecuación de Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$ sobre una superficie de Riemann. Estas soluciones se pueden obtener usando el método de series de potencias de la teoría de funciones analíticas, que sigue siendo válido para la ecuación de Helmholtz. Sin embargo el método del cálculo algebraico de soluciones ramificadas falla completamente desde el comienzo. Sommerfeld propuso un método indirecto y dio un procedimiento por el cual uno puede derivar con ciertas propiedades de una solución de la ecuación $\Delta u = 0$ a una solución de la ecuación de Helmholtz con las propiedades necesarias. Consecuentemente pudo obtener soluciones ramificadas a la ecuación de Helmholtz a partir de las soluciones univaluadas por operaciones algebraicas.

En este capítulo nosotros obtenemos tales soluciones de la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$. Primero necesitamos algunos hechos de la teoría de las funciones esféricas. Tomaremos un desvío dentro de la teoría de funciones esféricas.

1.1. Las funciones esféricas

Consideremos la ecuación de Laplace en \mathbb{R}^3 , $\Delta_3 = \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial \zeta^2}$ en las coordenadas esféricas (ρ, θ, φ)

$$\xi = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad \eta = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad \zeta = \rho \cos \theta, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (1.1)$$

Entonces

$$\Delta u = \Delta_3 u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1.2)$$

En el siguiente Lema analizamos soluciones de la ecuación de Laplace en el caso cuando las variables se separan en radial y esféricas.

Lema 1.1.1. *Sea*

$$u(\rho, \theta, \varphi) := R(\rho)Y(\theta, \varphi), \quad (1.3)$$

entonces u satisface (1.2) sii R y Y satisfacen el siguiente sistema

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + 2\rho R' - \lambda R(\rho) = 0 & (1.4) \\ \Delta_{\theta, \varphi} Y + \lambda Y = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \lambda Y(\theta, \varphi) = 0. & (1.5) \end{cases}$$

Demostración. Sustituimos $u(\rho, \theta, \varphi)$ en la ecuación (1.2) y obtenemos

$$\frac{Y(\theta, \varphi)}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{R(\rho)}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{R(\rho)}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (1.6)$$

lo que es equivalente a la siguiente ecuación

$$Y(\theta, \varphi) \left[\frac{2\rho R'(\rho) + \rho^2 R''(\rho)}{\rho^2} \right] = -\frac{R(\rho)}{\rho^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (1.7)$$

Usando el método de separación de variables en (1.7), obtenemos que (1.7) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} -\frac{R(\rho)}{2\rho R' + \rho^2 R''} = -\frac{1}{\lambda} & (1.8) \\ \lambda \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{Y(\theta, \varphi)}{\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2}} = -\frac{1}{\lambda} & (1.9) \end{cases}$$

el cual es equivalente al sistema de las ecuaciones (1.4) y (1.5). ■

Vamos a suponer que la función Y está definida sobre la esfera unitaria en las coordenadas (θ, φ) . Esto implica que Y es la función periódica con respecto de φ con el periodo 2π

$$Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi). \quad (1.10)$$

Definición 1.1.2. Las soluciones de la ecuación (1.5) que tienen las segundas derivadas continuas y que satisfacen (1.10) se llaman las funciones *esféricas*.

Vamos a buscar las soluciones de la ecuación (1.5) con el método de separación de variables. Suponiendo que

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi), \quad (1.11)$$

obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) = \Phi(\varphi) \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\Theta(\theta)\Phi(\varphi)) = \Theta(\theta)\Phi''(\varphi). \quad (1.13)$$

De (1.11), (1.12) y (1.13) se sigue

$$\begin{cases} \frac{-\Phi''}{\Phi} = \mu \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

De la primera ecuación de (1.14) obtenemos

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0. \quad (1.15)$$

Además (1.10) y (1.11) nos da que

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \quad (1.16)$$

Resolviendo (1.15) tenemos

$$\Phi = c_1 \cos \sqrt{\mu}\varphi + c_2 \sin \sqrt{\mu}\varphi, \quad (1.17)$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Tomando en cuenta (1.16), obtenemos que μ puede ser solamente k^2 , $k \in \mathbb{Z}$, ya que

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \Leftrightarrow 2\pi\sqrt{\mu} = 2k\pi \Leftrightarrow \sqrt{\mu} = k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto el sistema (1.15), (1.16) admite las soluciones linealmente independientes

$$\cos k\varphi, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \sin k\varphi, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.18)$$

Vamos a encontrar la función $\Theta(\theta)$ en (1.14). Introducimos la variable

$$t := \cos \theta \quad (1.19)$$

y denotando

$$\chi(t)|_{\cos \theta} = \chi(\cos \theta) = \Theta(\theta), \quad (1.20)$$

obtenemos de la segunda ecuación en (1.14), la siguiente ecuación

$$\frac{d}{dt} \left[(1-t^2) \frac{d\chi}{dt} \right] + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{1-t^2} \right) \chi = 0, \quad -1 < t < 1. \quad (1.21)$$

En efecto tenemos que $\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{dt}$. Esto implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(-\sqrt{1-t^2} \right) \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1-t^2} \left(-\sqrt{1-t^2} \right) \frac{d\chi}{dt} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[(1-t^2) \frac{d\chi}{dt} \right]. \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión obtenida en la segunda ecuación de (1.14) y usando (1.20), obtenemos (1.21).

De la forma general de las ecuaciones del tipo (1.21), la condición de acotación de la solución χ en los extremos $t = \pm 1$ es posible solamente si

$$\lambda = m(m+1), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (1.22)$$

(véase la referencia [3], párrafo 2 de la parte 2, complemento 2 : funciones especiales).

Definición 1.1.3. Las soluciones $Y(\theta, \varphi)$ de la ecuación (1.5) para λ de la forma (1.22) se llaman *las funciones esféricas superficiales de orden m* .

Nota 1. Las funciones esféricas superficiales de orden m son también las funciones esféricas superficiales de orden $(-m-1)$, ya que $m(m+1) = (-m-1)((-m-1)+1)$.

1.2. “Levantamiento” de las funciones analíticas de una variable a la esfera unitaria.

En esta sección consideramos una clase especial de funciones esféricas de orden cero que están generadas por una función analítica de una variable.

Consideremos el espacio \mathbb{R}^3 con las coordenadas cartesianas (ξ, η, ζ) y el plano

$$Z := \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \zeta = 0\}. \quad (1.23)$$

Vamos a considerar Z como el plano complejo, con la coordenada compleja $Z = \xi + i\eta$. Consideremos además la esfera unitaria $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$ con el centro en el origen (Véase Figura 1.1), y la proyección P estereográfica de \mathbb{S} a Z con el centro en el polo “sur”.

$$s = (0, 0, -1). \quad (1.24)$$

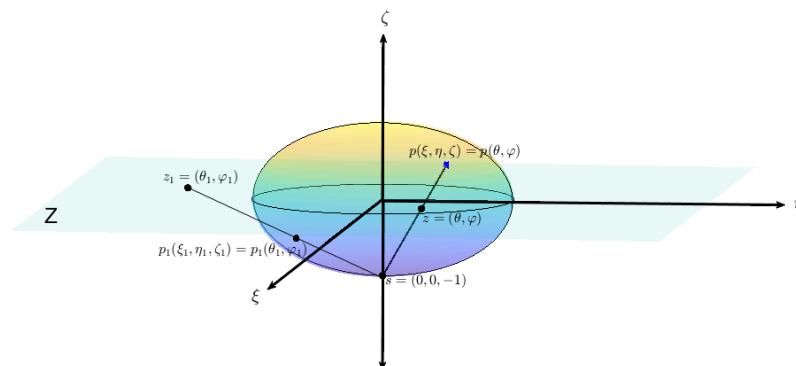


Figura 1.1: Esfera de Riemann

Lema 1.2.1. *La proyección estereográfica P se determina por la siguiente fórmula*

$$Z(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi + i\eta}{\zeta + 1}, \quad (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{S}. \quad (1.25)$$

Demostración. Sea $p = (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{S}$, entonces $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$. La ecuación paramétrica con el parámetro λ de la recta que une a p y s tiene la ecuación

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, -1) + \lambda(p - s), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo (1.24) tenemos

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda\xi, \lambda\eta, -1 + \lambda(\zeta + 1)), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.26)$$

Ya que la recta (1.26) interseca al plano Z cuando $\lambda_3 = 0$, obtenemos

$$-1 + \lambda(\zeta + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\zeta + 1}.$$

Sustituyendo esta λ en (1.26) obtenemos (1.25). ■

En las coordenadas (1.1) la función Z sobre la esfera unitaria, dada por (1.25), tiene la forma

$$Z(\theta, \varphi) = \frac{e^{i\varphi} \sin \theta}{\cos \theta + 1}, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (1.27)$$

En efecto, utilizando las coordenadas (1.1) con $\rho = 1$ en (1.25), tenemos que

$$Z(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\sin \theta \cos \varphi + i \sin \theta \sin \varphi}{\cos \theta + 1} = \frac{e^{i\varphi} \sin \theta}{\cos \theta + 1} := Z(\theta, \varphi).$$

La identidad (1.27) se demostró.

Definición 1.2.2. Sea f una función arbitraria compleja, entonces

$$f(Z(\theta, \varphi)) = f\left(\frac{e^{i\varphi} \sin \theta}{\cos \theta + 1}\right) = f\left(\frac{\xi + i\eta}{\zeta + 1}\right) = f(Z(\xi, \eta, \zeta)), \quad (1.28)$$

donde $Z(\theta, \varphi)$, $Z(\xi, \eta, \zeta)$ están dadas en (1.27) y (1.25) respectivamente.

Lema 1.2.3. *Sea $f(Z)$, $Z \in \mathbb{C}$ una función arbitraria compleja y analítica. Entonces $f(Z(\theta, \varphi))$ es una función esférica con $\lambda = 0$, en el sentido de la Definición 1.1.2 (es decir satisface la ecuación (1.5) con $\lambda = 0$) y tiene orden cero en el sentido de la Def. 1.1.3.*

Demostración. De (1.27) y (1.28) tenemos

$$\frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \theta} = \frac{e^{i\varphi}}{\cos \theta + 1} = \frac{Z(\theta, \varphi)}{\sin \theta}, \quad \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} = iZ(\theta, \varphi). \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial f \circ Z}{\partial \theta} = \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \theta} f'(Z(\theta, \varphi)) = \frac{Z(\theta, \varphi)}{\sin \theta} f'(Z(\theta, \varphi)). \quad (1.30)$$

De aquí, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f \circ Z}{\partial \theta} \right) &= \frac{\partial}{\partial \theta} (Z(\theta, \varphi) f'(Z(\theta, \varphi))) \\
&= f'(Z(\theta, \varphi)) \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + Z(\theta, \varphi) f''(Z(\theta, \varphi)) \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \\
&= \frac{Z(\theta, \varphi)}{\sin \theta} (f'(Z(\theta, \varphi)) + Z(\theta, \varphi) f''(Z(\theta, \varphi))); \tag{1.31}
\end{aligned}$$

similarmente, usando (1.29) y (1.30), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f \circ Z}{\partial \varphi} &= \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} f'(Z(\theta, \varphi)) = iZ(\theta, \varphi) f'(Z(\theta, \varphi)) \\
\frac{\partial^2 f \circ Z}{\partial \varphi^2} &= i \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} f'(Z(\theta, \varphi)) + iZ(\theta, \varphi) \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} f''(Z(\theta, \varphi)) \\
&= -Z(\theta, \varphi) (f'(Z(\theta, \varphi)) + Z(\theta, \varphi) f''(Z(\theta, \varphi))). \tag{1.32}
\end{aligned}$$

Sustituyendo (1.30), (1.31) y (1.32) en (1.5) con $\lambda = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\Delta_{\theta, \varphi} f \circ Z &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f(Z(\theta, \varphi))}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f(Z(\theta, \varphi))}{\partial \varphi^2} \\
&= \frac{Z(\theta, \varphi)}{\sin^2 \theta} (f'(Z(\theta, \varphi)) + Z(\theta, \varphi) f''(Z(\theta, \varphi))) \\
&\quad - \frac{Z(\theta, \varphi)}{\sin^2 \theta} (f'(Z(\theta, \varphi)) + Z(\theta, \varphi) f''(Z(\theta, \varphi))) = 0. \tag{1.33}
\end{aligned}$$

De aquí f es solución de (1.5), y (1.10) se cumple por (1.28). ■

1.3. Extensión de las funciones esféricas a \mathbb{R}^3

La función f dada por (1.28) es conocida como el potencial de dimensión dos, sobre la esfera unitaria.

Definición 1.3.1. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ se llama la función homogénea de grado $p \in \mathbb{R}$ si $\forall \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, f(\alpha x) = \alpha^p f(x)$.

Obviamente f es homogénea de grado p *sii*

$$f(\alpha x) = \alpha^p f(x), \quad x \in \mathbb{S}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} \tag{1.34}$$

o en otras palabras;

$$f(x) = |x|^p f\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \tag{1.35}$$

1.3.1. Extensión a las funciones homogéneas de grado cero (orden cero)

Vamos a extender la función $f\left(\frac{\xi + i\eta}{\zeta + 1}\right)$ definida sobre la esfera unitaria a todo el espacio \mathbb{R}^3 tomando los valores en el rayo $\{\rho(\xi, \eta, \zeta) \mid \rho > 0, (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{S}\}$ y definiendo el valor de f en el punto de intersección del rayo con la esfera \mathbb{S} , i.e en el punto $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{S}$.

Sea $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$f_0(\xi, \eta, \zeta) := f\left(\frac{\frac{\xi}{\rho} + i\frac{\eta}{\rho}}{\frac{\zeta}{\rho} + 1}\right) = f\left(\frac{\xi + i\eta}{\zeta + \rho}\right), \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \quad (1.36)$$

La función f_0 se llama *el potencial espacial*.

Lema 1.3.2. f_0 es una función homogénea de grado cero, es decir

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+, (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \quad f_0(\alpha\xi, \alpha\eta, \alpha\zeta) = f_0(\xi, \eta, \zeta). \quad (1.37)$$

Demostración. Sea $\rho_1 = \sqrt{\alpha^2\xi^2 + \alpha^2\eta^2 + \alpha^2\zeta^2}$ entonces $\rho_1 = \alpha\rho$, por (1.36)

$$f_0(\alpha\xi, \alpha\eta, \alpha\zeta) = f\left(\frac{\alpha\xi + i\alpha\eta}{\alpha\zeta + \rho_1}\right) = f\left(\frac{\alpha\xi + i\alpha\eta}{\alpha\zeta + \alpha\rho}\right) = f\left(\frac{\xi + i\eta}{\zeta + \rho}\right) = f_0(\xi, \eta, \zeta). \quad \blacksquare$$

Teorema 1.3.3. La función f_0 dada por (1.36), satisface la ecuación de Laplace espacial, i.e es la función armónica

$$\Delta_3 f_0 = \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (1.38)$$

Demostración. Utilizando las coordenadas (1.1) en f_0 dada por (1.36), y usando (1.27), obtenemos

$$f_0(\xi, \eta, \zeta) = f\left(\frac{\xi + i\eta}{\zeta + \rho}\right) = f\left(\frac{e^{i\varphi} \sin \theta}{\cos \theta + 1}\right) = f(Z(\theta, \varphi)). \quad (1.39)$$

Derivando Z , dada en (1.27) con respecto de θ y φ , tenemos

$$\frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \theta} = \frac{Z(\theta, \varphi)}{\sin \theta}, \quad \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} = iZ(\theta, \varphi). \quad (1.40)$$

Derivando (1.39) con respecto de θ , φ y usando (1.40), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial \theta} &= \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \theta} f'(Z(\theta, \varphi)) = \frac{Z(\theta, \varphi)}{\sin \theta} f'(Z(\theta, \varphi)) \\ \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} &= \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} f'(Z(\theta, \varphi)) = iZ(\theta, \varphi) f'(Z(\theta, \varphi)) \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial \varphi^2} &= iZ(\theta, \varphi) \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} f''(Z(\theta, \varphi)) + i \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} f'(Z(\theta, \varphi)) \\ &= -Z(\theta, \varphi) \left(f'(Z(\theta, \varphi)) + Z(\theta, \varphi) f''(Z(\theta, \varphi)) \right). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Sustituyendo (1.36) y (1.41) en (1.2), y usando (1.40), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \Delta_3 f_0 &= \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (Z(\theta, \varphi) f'(Z(\theta, \varphi))) - \frac{Z(\theta, \varphi)}{\rho^2 \sin^2 \theta} (f'(Z(\theta, \varphi)) + Z(\theta, \varphi) f''(Z(\theta, \varphi))) \\
 &= \frac{Z(\theta, \varphi)}{\rho^2 \sin^2 \theta} (f'(Z(\theta, \varphi)) + Z(\theta, \varphi) f''(Z(\theta, \varphi))) \\
 &\quad - \frac{Z(\theta, \varphi)}{\rho^2 \sin^2 \theta} (f'(Z(\theta, \varphi)) + Z(\theta, \varphi) f''(Z(\theta, \varphi))) = 0. \blacksquare
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Nota 2. *Nosotros hemos dado la demostración del Teorema 1.3.3 directa. Podemos demostrar este Teorema usando el Lema 1.1.1. En efecto por (1.39) $f_0(\xi, \eta, \zeta) = f(Z(\theta, \varphi))$, donde (ξ, η, ζ) y (ρ, θ, φ) se conectan por (1.1). Ya que $f(Z(\theta, \varphi))$ satisface (1.5) por Lema 1.2.3, entonces $f_0(\xi, \eta, \zeta)$ satisface la ecuación de Laplace (1.38) por Lema 1.1.1 con $R(\rho) \equiv 1$, y $R(\rho) \equiv 1$ satisface (1.4).*

1.3.2. Extensión a las funciones homogéneas de grado -1 (orden cero)

Ahora vamos a obtener la función $f_{-1}(\xi, \eta, \zeta)$ homogénea de grado -1 , extendiendo otra vez la función $f\left(\frac{\xi + i\eta}{\zeta + 1}\right)$, $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{S}$, definida por (1.28). Por la Definición 1.3.1 la función homogénea de grado -1 satisface

$$f_{-1}(\alpha\xi, \alpha\eta, \alpha\zeta) = \frac{1}{\alpha} f_{-1}(\xi, \eta, \zeta). \tag{1.43}$$

Definamos

$$f_{-1}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\rho} f\left(\frac{\xi + i\eta}{\zeta + \rho}\right), \quad (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3, \tag{1.44}$$

donde ρ está dado en (1.36) y $\rho \neq 0$.

Lema 1.3.4. *f_{-1} dada por (1.44) es la función homogénea de grado -1 .*

Demostración. Es suficiente demostrar (1.43).

De (1.44) tenemos

$$f_{-1}(\alpha\xi, \alpha\eta, \alpha\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 \xi^2 + \alpha^2 \eta^2 + \alpha^2 \zeta^2}} f\left(\frac{\alpha\xi + i\alpha\eta}{\alpha\zeta + \sqrt{\alpha^2 \xi^2 + \alpha^2 \eta^2 + \alpha^2 \zeta^2}}\right). \tag{1.45}$$

Transformando aquí la parte derecha y otra vez usando (1.44), obtenemos

$$f_{-1}(\alpha\xi, \alpha\eta, \alpha\zeta) = \frac{1}{\alpha\rho} f\left(\frac{\xi + i\eta}{\zeta + \rho}\right) = \frac{1}{\alpha} f_{-1}(\xi, \eta, \zeta). \blacksquare$$

Teorema 1.3.5. La función f_{-1} dada en (1.44), satisface la ecuación de Laplace espacial, i.e es la función armónica

$$\Delta_3 f_{-1} = \frac{\partial^2 f_{-1}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f_{-1}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f_{-1}}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (1.46)$$

Demostración. Consideremos el cambio de variables $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3$ por las coordenadas dadas en (1.1).

Primero, vamos a demostrar que Z dada por (1.27), satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta_2 Z(\theta, \varphi) = 0, \quad (1.47)$$

donde Δ_2 es la parte esférica del operador de Laplace en \mathbb{R}^3

$$\Delta_2 u = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (1.48)$$

Por (1.27), tenemos

$$\frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \theta} = \frac{Z(\theta, \varphi)}{\sin \theta}, \quad \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} = iZ(\theta, \varphi), \quad \frac{\partial^2 Z(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} = -Z(\theta, \varphi). \quad (1.49)$$

Sustituyendo (1.49) en la ecuación de Laplace (1.47), obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta_2 Z(\theta, \varphi) &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 Z(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \\ &= \sin \theta \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - Z(\theta, \varphi) = Z(\theta, \varphi) - Z(\theta, \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

De aquí (1.48) se demostró.

Ahora vamos a continuar la demostración de el Teorema 1.3.5.

Utilizando las coordenadas (1.1) en f_{-1} dada por (1.44), y usando (1.27), obtenemos

$$f_{-1}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\rho} f \left(\frac{\xi + i\eta}{\zeta + \rho} \right) = \frac{1}{\rho} f \left(\frac{e^{i\varphi} \sin \theta}{\cos \theta + 1} \right) = \frac{1}{\rho} f(Z(\theta, \varphi)). \quad (1.51)$$

Derivando (1.51) con respecto de ρ , θ , φ y usando (1.49), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{-1}}{\partial \rho} &= -\frac{1}{\rho^2} f(Z(\theta, \varphi)) \\ \frac{\partial f_{-1}}{\partial \theta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \theta} f'(Z(\theta, \varphi)) = \frac{1}{\rho} \frac{Z(\theta, \varphi)}{\sin \theta} f'(Z(\theta, \varphi)) \\ \frac{\partial f_{-1}}{\partial \varphi} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} f'(Z(\theta, \varphi)) = \frac{iZ(\theta, \varphi)}{\rho} f'(Z(\theta, \varphi)) \\ \frac{\partial^2 f_{-1}}{\partial \varphi^2} &= \frac{iZ(\theta, \varphi)}{\rho} \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} f''(Z(\theta, \varphi)) + \frac{i}{\rho} \frac{\partial Z(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} f'(Z(\theta, \varphi)) \\ &= -\frac{Z(\theta, \varphi)}{\rho} \left(f'(Z(\theta, \varphi)) + Z(\theta, \varphi) f''(Z(\theta, \varphi)) \right). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Sustituyendo (1.51) y (1.52) en (1.2), y usando (1.49), obtenemos

$$\begin{aligned}
\Delta_3 f_{-1} &= -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial f(Z(\theta, \varphi))}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^3 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (Z(\theta, \varphi) f'(Z(\theta, \varphi))) \\
&\quad - \frac{Z(\theta, \varphi)}{\rho^3 \sin^2 \theta} \left(f'(Z(\theta, \varphi)) + Z(\theta, \varphi) f''(Z(\theta, \varphi)) \right) \\
&= \frac{Z(\theta, \varphi)}{\rho^3 \sin^2 \theta} \left(f'(Z(\theta, \varphi)) + Z(\theta, \varphi) f''(Z(\theta, \varphi)) \right) \\
&\quad - \frac{Z(\theta, \varphi)}{\rho^3 \sin^2 \theta} \left(f'(Z(\theta, \varphi)) + Z(\theta, \varphi) f''(Z(\theta, \varphi)) \right) = 0. \blacksquare
\end{aligned} \tag{1.53}$$

El Teorema 1.3.5 dice que la función $f_{-1}(\xi, \eta, \zeta)$ dada en (1.44) es por un lado la función espacial, es decir definida en \mathbb{R}^3 , por otro lado es la función armónica, es decir satisface la ecuación (1.46). Tales funciones se llaman *armónicas esféricas superficiales*.

Nota 3. Similarmente a la Nota 2 se puede demostrar el Teorema 1.3.5 usando el Lema 1.1.1. Para esto es suficiente demostrar que $\frac{1}{\rho}$ satisface (1.4) con $\lambda = 0$. Pero esto es evidente. Entonces f_{-1} es la función esférica de orden cero.

1.3.3. Extensión a las funciones homogéneas de grado $-m-1$

Introducimos las funciones para $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3$ como

$$\begin{aligned}
f_{-m-1}^+(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \zeta^m} \frac{1}{\rho} f\left(\frac{\xi + i\eta}{\zeta + \rho}\right) \\
&= \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \zeta^m} f_{-1}(\xi, \eta, \zeta), \quad m = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Observación histórica

Esta idea llega en una forma más especial de Maxwell (Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism Chap ix) quien obtuvo una función esférica común racional, iniciando de la función compleja $f \equiv 1$ y usando la disposición apropiada de las direcciones de la diferenciación.

Una generalización para una función f arbitraria, que se uso aquí fue propuesta por F. Klein en una serie de lecciones sobre las funciones de Lamé en 1889 – 90.

En lo que sigue nosotros siempre fijamos la dirección de diferenciación como el eje ζ , el cual es distinguido por su posición con respecto del plano Z . Así nosotros construimos (con un factor apropiado) la función

$$\begin{aligned}
f_{-m-1}^+(\xi, \eta, \zeta) &:= \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \zeta^m} \left[\frac{1}{\rho} f\left(\frac{\xi + i\eta}{\zeta + \rho}\right) \right] \\
&= \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \zeta^m} f_{-1}(\xi, \eta, \zeta), \quad (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Para hacer el proceso de diferenciación más conveniente, transformamos esta expresión por el Teorema de Cauchy.

Lema 1.3.6. Las funciones $f_{-m-1}^+(\xi, \eta, \zeta)$, $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3$ se representan en la forma

$$\begin{aligned} f_{-m-1}^+(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\zeta} f\left(\frac{\xi + i\eta}{z + \rho}\right) \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}} \frac{dz}{\rho} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\zeta} \frac{f_{-1}(\xi, \eta, z)}{(\zeta - z)^{m+1}} dz, \end{aligned} \quad (1.56)$$

donde $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$ es tal que

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad (1.57)$$

y γ_ζ es un contorno cerrado alrededor del punto ζ .

Demostración. Sea $g \in H(D)$, entonces por la fórmula de Cauchy

$$g^m(\zeta) = \frac{m!(-1)^{m+1}}{2\pi i} \int_{\gamma_\zeta} \frac{g(z)}{(\zeta - z)^{m+1}} dz, \quad (1.58)$$

donde $\gamma_\zeta \subset D$ es un contorno cerrado alrededor de ζ . Apliquemos esta fórmula a la función f_{-1} dada por (1.44) como

$$f_{-1}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\rho(\xi, \eta, \zeta)} f\left(\frac{\xi + i\eta}{\zeta + \rho(\xi, \eta, \zeta)}\right), \quad (1.59)$$

(aquí (ξ, η) son fijos y ρ depende de ζ). Fijamos las variables ξ, η y consideramos $f_{-1}(\xi, \eta, \zeta)$ como la función de una variable ζ . Obtenemos (aplicando (1.58) a la función $g(\zeta) := f_{-1}(\xi, \eta, \zeta)$)

$$\frac{\partial^m}{\partial \zeta^m} f_{-1}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{m!(-1)^{m+1}}{2\pi i} \int_{\gamma_\zeta} f\left(\frac{\xi + i\eta}{z + \rho}\right) \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}} \frac{dz}{\rho}.$$

Aquí ρ es como en (1.57). De aquí (1.56) se sigue por (1.55). ■

Lema 1.3.7. La función f_{-m-1}^+ es la función homogénea de grado $-m-1$.

Demostración. Usando la ecuación (1.56) y tomando el argumento $(\alpha\xi, \alpha\eta, \alpha\zeta)$ en (1.56), tenemos

$$\begin{aligned} f_{-m-1}^+(\alpha\xi, \alpha\eta, \alpha\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\zeta} f\left(\frac{\alpha\xi + i\alpha\eta}{z + \sqrt{\alpha^2\xi^2 + \alpha^2\eta^2 + z^2}}\right) \frac{1}{(\alpha\zeta - z)^{m+1}} \frac{dz}{\sqrt{\alpha^2\xi^2 + \alpha^2\eta^2 + z^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\gamma_\zeta}{\alpha}} f\left(\frac{\alpha\xi + i\alpha\eta}{\alpha z_1 + \sqrt{\alpha^2\xi^2 + \alpha^2\eta^2 + \alpha^2 z_1^2}}\right) \frac{\alpha dz_1}{(\alpha\zeta - \alpha z_1)^{m+1} \sqrt{\alpha^2\xi^2 + \alpha^2\eta^2 + \alpha^2 z_1^2}} \\ &= \frac{\alpha^{-(m+1)}}{2\pi i} \int_{\frac{\gamma_\zeta}{\alpha}} f\left(\frac{\xi + i\eta}{z_1 + \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + z_1^2}}\right) \frac{1}{(\zeta - z_1)^{m+1}} \frac{dz_1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + z_1^2}} \\ &= \alpha^{-(m+1)} f_{-m-1}^+(\xi, \eta, \zeta). \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (1.60)$$

Observación 1. *Notemos que en la integral (1.56) podemos escoger otro contorno arbitrario de integración que es cerrado y que puede no contraer al punto ζ . Aún así obtenemos una función esférica de grado $-m - 1$ (no necesariamente coincidente con la función (1.55)). Esto se demuestra en el siguiente lema.*

Lema 1.3.8. *La función $f_{-m-1}^+(\xi, \eta, \zeta)$ dada por (1.56) satisface la ecuación de Laplace*

$$\Delta_3 f_{-m-1}^+(\xi, \eta, \zeta) = 0. \quad (1.61)$$

Demostración. El Teorema 1.3.5 implica que $\Delta_3 f_{-1}(\xi, \eta, \zeta) = 0$, entonces

$$\int_a^b \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_{-1}(\xi, \eta, z) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} f_{-1}(\xi, \eta, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f_{-1}(\xi, \eta, z) \right] \frac{dz}{(\zeta - z)^{m+1}} = 0, \quad (1.62)$$

ya que solamente cambiamos ζ por z en $f_{-1}(\xi, \eta, \zeta)$. Ahora, integrando por partes, tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial^2 f_{-1}(\xi, \eta, z)}{\partial z^2} \frac{dz}{(\zeta - z)^{m+1}} &= \frac{\partial f_{-1}(\xi, \eta, z)}{\partial z} \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}} \Big|_a^b \\ &\quad - \int_a^b \frac{\partial f_{-1}(\xi, \eta, z)}{\partial z} \frac{m+1}{(\zeta - z)^{m+2}} dz; \end{aligned} \quad (1.63)$$

de aquí

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial f_{-1}(\xi, \eta, z)}{\partial z} \frac{m+1}{(\zeta - z)^{m+2}} dz &= f_{-1}(\xi, \eta, z) \frac{m+1}{(\zeta - z)^{m+2}} \Big|_a^b \\ &\quad - \int_a^b f_{-1}(\xi, \eta, z) \frac{(m+1)(m+2)}{(\zeta - z)^{m+3}} dz. \end{aligned}$$

Pero para la integral en la parte derecha podemos escribir

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \int f_{-1}(\xi, \eta, z) \frac{dz}{(\zeta - z)^{m+1}}.$$

Si el camino de integración es cerrado ($a = b$), las expresiones en los paréntesis desaparecen. Entonces

$$\int_a^b \frac{\partial f_{-1}(\xi, \eta, z)}{\partial z} \frac{m+1}{(\zeta - z)^{m+2}} dz = -\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \int f_{-1}(\xi, \eta, z) \frac{dz}{(\zeta - z)^{m+1}};$$

de aquí y por (1.63), tenemos

$$\int_a^b \frac{\partial^2 f_{-1}(\xi, \eta, z)}{\partial z^2} \frac{dz}{(\zeta - z)^{m+1}} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \int f_{-1}(\xi, \eta, z) \frac{dz}{(\zeta - z)^{m+1}}. \quad (1.64)$$

Sustituyendo (1.64) en la ecuación (1.62), obtenemos

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_a^b \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_{-1}(\xi, \eta, z) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} f_{-1}(\xi, \eta, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f_{-1}(\xi, \eta, z) \right] \frac{dz}{(\zeta - z)^{m+1}} \\
 &= \int_a^b \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_{-1}(\xi, \eta, z) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} f_{-1}(\xi, \eta, z) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} f_{-1}(\xi, \eta, z) \right] \frac{dz}{(\zeta - z)^{m+1}} \\
 &= \Delta_3 \int_a^b f_{-1}(\xi, \eta, z) \frac{dz}{(\zeta - z)^{m+1}}, \tag{1.65}
 \end{aligned}$$

ya que se supone que f_{-1} es tal que la diferenciación en el parámetro es válida. ■

Observación 2. La ecuación (1.65) se cumple también para un camino no cerrado si las expresiones en paréntesis desaparecen para los límites a y b de la integral. Esto sucede por ejemplo cuando $a = \infty$.

Observación 3. Además podemos tomar m como un número negativo ó como un número arbitrario. En el último caso tenemos que tener en cuenta la ramificación del factor $(\zeta - z)^{m+1}$ en $z = \zeta$ a $z = \infty$ y escoger como un camino de integración un lazo doble que rodea a los puntos $z = \zeta$ y $z = \infty$ en sentido opuesto. En tal manera podemos definir la función esférica de grado arbitrario, que tiene una relación sencilla continua.

1.3.4. Simetrización de la función f_{-m-1}^+ dada por (1.56)

Consideremos (1.56). Notemos que la integral aquí no está definida cuando $\rho = 0$. Ya que después f_{-m-1}^+ será la base para la solución del problema de difracción, será necesario tener una función del tipo (1.56) que no tendrá la singularidad en $\rho = 0$. Para esto A.Sommerfeld introduce la función simétrica a f_{-m-1}^+ , tomando en lugar de

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + z^2}, \quad -\rho = -\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + z^2}. \tag{1.66}$$

Precisamente él define la función

$$f_{-m-1}^-(\xi, \eta, \zeta) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\zeta} f\left(\frac{\xi + i\eta}{z - \rho}\right) \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}} \frac{dz}{-\rho}, \quad (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3. \tag{1.67}$$

Poco después nosotros eliminaremos el punto de singularidad $\rho = 0$ agregando a la integral (1.56) la integral (1.67). Geométricamente esto significa que reflejamos primero el plano Z con respecto del origen (es decir reemplazamos $Z' = -Z$), y en el segundo proyectamos estereográficamente del polo norte de la esfera unitaria a este plano Z' (es decir, ponemos $z' = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$) y en el resto aplicamos todos los procesos los cuales han estado descritos anteriormente sobre la función f . Si nosotros denotamos por z_1 tal punto que de tal manera ha estado mapeado sobre el punto (ξ, η, ζ) de la esfera, entonces tenemos similarmente a (1.25) la expresión $z_1 = \frac{\xi + i\eta}{\zeta - 1}$.

En la sección 2.3 usaremos la representación (1.67), tomando la suma

$$\begin{aligned}
 F_{-m-1}(\xi, \eta, \zeta) &= f_{-m-1}^+(\xi, \eta, \zeta) + f_{-m-1}^-(\xi, \eta, \zeta) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\zeta} f\left(\frac{\xi + i\eta}{z + \rho}\right) \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}} \frac{dz}{\rho} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\zeta} f\left(\frac{\xi + i\eta}{z - \rho}\right) \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}} \frac{dz}{\rho} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\zeta} \left[f\left(\frac{\xi + i\eta}{z + \rho}\right) - f\left(\frac{\xi + i\eta}{z - \rho}\right) \right] \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}} \frac{dz}{\rho}, \tag{1.68}
 \end{aligned}$$

donde ρ está dada en (1.66). Ahora el integrando en (1.68) no tiene la ramificación para $\rho = 0$. Nótese además que para cada $z = \xi + i\eta$ fijo, la función

$$F(z) := \frac{1}{\rho} f\left(\frac{\xi + i\eta}{z + \rho}\right) = \frac{1}{\sqrt{|a|^2 + z^2}} f\left(\frac{\xi + i\eta}{z + \sqrt{|a|^2 + z^2}}\right), \quad a = \xi + i\eta, \tag{1.69}$$

se ramifica para $\rho = 0$, ya que

$$\rho = 0 \Leftrightarrow z = z_{1,2} = \pm i\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \pm i|a|.$$

De manera precisa en los puntos z_1, z_2 , la función $F(z)$ tiene los puntos de ramificación $z = z_1, z_2$, pues $\sqrt{|a|^2 + z_{1,2}^2} = 0$.

Lema 1.3.9. *Sea*

$$\begin{aligned}
 g(z) &:= \frac{1}{\rho} \left[f\left(\frac{\xi + i\eta}{z + \rho}\right) - f\left(\frac{\xi + i\eta}{z - \rho}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{|a|^2 + z^2}} \left[f\left(\frac{a}{z + \sqrt{|a|^2 + z^2}}\right) - f\left(\frac{a}{z - \sqrt{|a|^2 + z^2}}\right) \right], \quad a = \xi + i\eta, \tag{1.70}
 \end{aligned}$$

entonces $g(z)$ está bien definida cuando $z = \pm i|a|$, es decir $g(\pm i|a|)$ existe.

Demostración. Veamos que la función (1.70) no se ramifica en $z_1 = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = i|a|$. Sea $z_0 = z_1 + i\eta$, $\eta > 0$, como se muestra en la Figura 1.2, entonces

$$\begin{aligned}
 g(z_0 - 0) &= \frac{1}{\sqrt{|a|^2 + z_0^2}} \left[f\left(\frac{a}{z_0 + \sqrt{|a|^2 + z_0^2}}\right) - f\left(\frac{a}{z_0 - \sqrt{|a|^2 + z_0^2}}\right) \right] \\
 g(z_0 + 0) &= -\frac{1}{\sqrt{|a|^2 + z_0^2}} \left[f\left(\frac{a}{z_0 - \sqrt{|a|^2 + z_0^2}}\right) - f\left(\frac{a}{z_0 + \sqrt{|a|^2 + z_0^2}}\right) \right].
 \end{aligned}$$

De aquí $g(z_1 - 0) = g(z_1 + 0)$.

1. Por lo tanto $z_1 = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = i|a|$ no es un punto de ramificación para (1.70); análogamente para $z_2 = -i\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = -i|a|$.

2. $z = z_{1,2} = \pm i|a|$ son puntos singulares evitables. ■

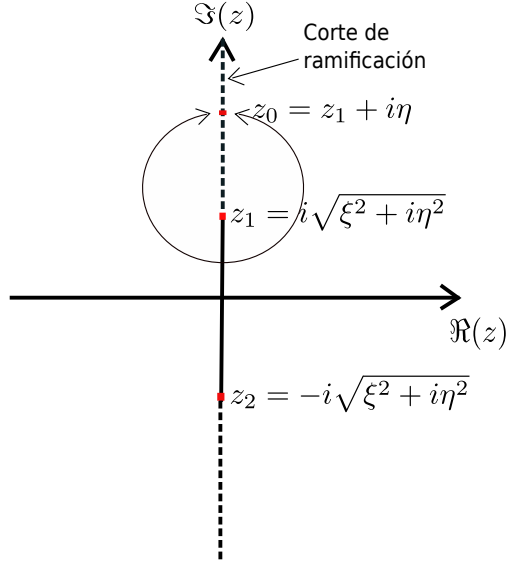


Figura 1.2: Cortes de ramificación

1.4. Las funciones f_{-m-1}^+ , $m = -1, 0, \dots$ son las funciones esféricas superficiales de orden m

Consideremos la función $f_{-m-1}^+(\xi, \eta, \zeta)$, $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{S}$ dada por (1.55). En el siguiente Lema mostramos que f_{-m-1}^+ es la función esférica superficial de grado $-m - 1$.

Lema 1.4.1. *La función $f_{-m-1}^+(\xi, \eta, \zeta)$, $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{S}$ satisface la ecuación (1.5) con $\lambda = m(m + 1)$, es decir es la función esférica superficial de orden $-m - 1$, o equivalentemente de orden m .*

Demostración. Por Lema (1.3.8) $f_{-m-1}^+(\xi, \eta, \zeta)$ satisface la ecuación de Laplace (1.61) en \mathbb{R}^3 o equivalentemente la ecuación (1.2). Por otro lado

$$f_{-m-1}^+(\xi, \eta, \zeta) := R(\rho)Y(\theta, \varphi), \quad (1.71)$$

donde

$$R(\rho) = \rho^{-m-1}, \quad Y(\theta, \varphi) = f_{-m-1}^+\left(\frac{1}{\rho}(\xi, \eta, \zeta)\right), \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \quad (1.72)$$

En efecto, por Lema (1.3.7) f_{-m-1}^+ es la función homogénea de grado $-m - 1$, lo que significa que

$$f_{-m-1}^+(\xi, \eta, \zeta) = \rho^{-m-1} f_{-m-1}^+\left(\frac{1}{\rho}(\xi, \eta, \zeta)\right), \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \quad (1.73)$$

De aquí (1.71), (1.73) se cumplen por la definición 1.3.1.

Por lo tanto $f_{-m-1}^+(\xi, \eta, \zeta)$, $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{S}$ satisface la ecuación (1.5), ya que $Y(\theta, \varphi)$ satisface (1.5).

Vamos a encontrar λ . Para eso es suficiente encontrar λ en la ecuación (1.4), para

$$R(\rho) = \rho^{-m-1}. \quad (1.74)$$

Sustituyendo (1.74) en (1.4) encontramos que

$$\lambda = m(m+1) = (-m-1)(-m). \quad (1.75)$$

Usando la Definición 1.1.3 obtenemos que $f_{-m-1}^+(\xi, \eta, \zeta)$, $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{S}$ es la función esférica superficial de orden $-m-1$. ■

Capítulo 2

Proceso límite: de Laplace a Helmholtz

2.1. El operador de Helmholtz como “límite” de la parte esférica del operador de Laplace

Todavía las funciones esféricas superficiales juegan un papel intermedio. Pero llegamos a soluciones de la ecuación de Helmholtz a partir de funciones esféricas superficiales a través de un apropiado *proceso límite*.

Sea $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{S}$, donde \mathbb{S} es la esfera unitaria (véase la Figura 1.1), y supongamos que

$$\xi = \frac{kx}{m}, \quad \eta = \frac{ky}{m}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad m \in \mathbb{N}, \quad k > 0, \quad (2.1)$$

donde x, y son constantes reales. Ahora vamos a aumentar m tal que $m \rightarrow \infty$. Mostraremos que la parte esférica de la ecuación de Laplace (1.5) se convierte a la ecuación de Helmholtz $\Delta_{x,y}u + k^2u = 0$ en el siguiente sentido. Cuando m tiende a infinito, los puntos (ξ, η, ζ) dados por (2.1) se aproximan al polo norte a lo largo de un meridiano de la esfera unitaria \mathbb{S} , si tomamos ζ positivo (si ζ es negativo (ξ, η, ζ) tiende al polo sur).

Sea $u_m(\theta, \varphi)$ una función superficial esférica de orden m (véase la Def.1.1.3 y (1.22)). Entonces por (1.5)

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_m}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_m}{\partial \theta} \right) + m(m+1)u_m = 0, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (2.2)$$

o

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_m}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial (\sin \theta)} \left(\sin \theta \frac{\partial u_m}{\partial (\sin \theta)} \cos \theta \right) \cos \theta + m(m+1)u_m = 0. \quad (2.3)$$

(La equivalencia de (2.2) a (2.3) se demuestra en Anexo 2.1, Lema (A.0.1)). Cambiamos las variables esféricas independientes de (θ, φ) por (r, φ) y

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.4)$$

De donde por (2.1), (2.4) y (1.1), tenemos

$$\sin \theta = \frac{kr}{m}, \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}}. \quad (2.5)$$

Vamos a considerar (x, y) como las coordenadas rectangulares del plano Z dado en (1.23). Entonces, resulta que (r, φ) son las coordenadas polares de (x, y) .

Lema 2.1.1. *Las coordenadas (r, φ) son las coordenadas polares de (x, y) .*

Demostración. Despejando x, y en (2.1) y usando las coordenadas (1.1) para (ξ, η) , tenemos

$$x = \frac{m\xi}{k} = \frac{m}{k} \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \frac{m\eta}{k} = \frac{m}{k} \sin \theta \sin \varphi. \quad (2.6)$$

Utilizando de (2.5) que el $\sin \theta = kr/m$, tenemos que

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad \blacksquare \quad (2.7)$$

Notemos que este plano ya tiene coordenadas (ξ, η) . Las coordenadas (x, y) en (2.1) se conectan con (ξ, η) a través de (2.1) y el factor k/m . Obviamente

$$e^{i\varphi} = \frac{x + iy}{r}. \quad (2.8)$$

Introducimos una nueva variable $\alpha \in \mathbb{C}$ en lugar de la variable de integración $z \in \mathbb{C}$ por la fórmula

$$z = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \cos \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (2.9)$$

Tomando (ξ, η) como en (2.1) y r como en (2.4), tenemos de (2.9) que

$$z = \frac{ikr}{m} \cos \alpha, \quad m \in \mathbb{N}, \quad k > 0. \quad (2.10)$$

Entonces la ecuación (2.3) se convierte en la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_m}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_m}{\partial r} \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} \right) \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} + \frac{m(m+1)k^2}{m^2} u_m = 0 \quad (2.11)$$

(véase Apéndice A, Proposición A.0.2).

Hacemos que $m \rightarrow \infty$ en (2.11). Supongamos que $u_m(r, \varphi)$ tiene un límite $u_\infty(r, \varphi)$. Entonces obtenemos

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\infty}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\infty}{\partial r} \right) + k^2 u_\infty = 0, \quad (2.12)$$

la cual es la ecuación de Helmholtz $\Delta u_\infty + k^2 u_\infty = 0$ de dimensión dos en coordenadas polares (r, φ) .

2.2. Obtención de las soluciones de la ecuación de Helmholtz

De (2.1) se tiene la siguiente expresión para ζ

$$\zeta = \left(1 - \frac{k^2(x^2 + y^2)}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{k^2 r^2}{2m^2} + \dots \Rightarrow \zeta = 1 + o(m^2) \text{ cuando } m \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

(véase Apéndice B).

Nuestro plan y de A.Sommerfeld es el siguiente. La función $f_{-m-1}^+(\xi, \eta, \zeta)$, $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{S}$ dada por (1.56) satisface la ecuación (1.5), por Lema 1.4.1, con $\lambda = m(m+1)$. Queremos pasar al límite cuando $m \rightarrow \infty$ y obtener la colección de las funciones (con f dadas como en (1.28)), cada una de la cual satisfaga la ecuación de Helmholtz en virtud del proceso límite descrito en la Sección 2.1.

Lema 2.2.1. *Sea ρ definida por (1.57), x, y, r, α se definen por (2.1), (2.4) y (2.9); z se define por (2.10), ζ satisface (2.13). Entonces se cumplen las siguientes identidades*

$$\rho = \frac{kr}{m} \sin \alpha, \quad \rho > 0. \quad (2.14)$$

$$z \pm \rho = \frac{kr}{m} e^{\mp i\alpha + \frac{i\pi}{2}}. \quad (2.15)$$

$$\frac{dz}{\rho} = -i d\alpha. \quad (2.16)$$

$$\frac{\xi + i\eta}{z \pm \rho} = e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2} \pm \alpha)}. \quad (2.17)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}} = e^{ikr \cos \alpha}. \quad (2.18)$$

Demostración. Primero demostramos (2.14). Sustituyendo (2.1) y (2.10) en (1.57), tenemos que

$$\rho^2 = \frac{k^2 x^2}{m^2} + \frac{k^2 y^2}{m^2} - \frac{k^2 r^2}{m^2} \cos^2 \alpha = \frac{k^2}{m^2} (x^2 + y^2 - r^2 \cos^2 \alpha). \quad (2.19)$$

Para r dada como en (2.4) tenemos que (2.19) es equivalente a

$$\rho^2 = \frac{k^2}{m^2} r^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \frac{k^2}{m^2} r^2 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \rho = \frac{kr}{m} \sin \alpha.$$

Entonces, (2.14) se demostró.

Demostremos (2.15). De (2.10) y (2.14), tenemos que

$$z \pm \rho = \frac{ikr}{m} \cos \alpha \pm \frac{kr}{m} \sin \alpha = \frac{ikr}{m} (\cos \alpha \mp i \sin \alpha) = \frac{kr}{m} e^{\frac{i\pi}{2}} e^{\mp i\alpha} = \frac{kr}{m} e^{\mp i\alpha + \frac{i\pi}{2}},$$

de la cual (2.15) se sigue.

Demostremos (2.16). De (2.10), tenemos que

$$\frac{dz}{d\alpha} = -\frac{ikr}{m} \sin \alpha, \quad (2.20)$$

de donde por (2.14), se sigue (2.16).

Demostremos (2.17). Sustituyendo (2.1) y (2.15) en (2.17), tenemos que

$$\frac{\xi + i\eta}{z \pm \rho} = \frac{x + iy}{re^{\mp i\alpha + i\frac{\pi}{2}}}. \quad (2.21)$$

Por (2.8), (2.21) se transforma en

$$\frac{\xi + i\eta}{z \pm \rho} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{\mp i\alpha + i\frac{\pi}{2}}} = e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2} \pm \alpha)}.$$

(2.17) se demostró.

Demostremos (2.18). Utilizando (2.13) y (2.10) en (2.18), tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + o(m^2) - \frac{ikr}{m} \cos \alpha)^{m+1}} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + o(m^2) - \frac{t}{m})^{m+1}} \quad \text{donde } t := ikr \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Continuamos la demostración del Lema 2.2.1.

Lema 2.2.2. $(1 - \frac{t}{m} + o(m^2))^{m+1} \sim (1 - \frac{t}{m})^{m+1}$, es decir

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{t}{m} + o(m^2)}{1 - \frac{t}{m}} \right)^{m+1} = 1, \quad (2.23)$$

lo cual es equivalente

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (m+1) \ln \left(\frac{1 - \frac{t}{m} + o(m^2)}{1 - \frac{t}{m}} \right) = 0. \quad (2.24)$$

Demostración.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (m+1) \ln \left(\frac{1 - \frac{t}{m} + o(m^2)}{1 - \frac{t}{m}} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} (m+1) \ln(1 + o(m^2)). \quad (2.25)$$

Utilizando en (2.25) que $\ln(1+x) \sim x$, tenemos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (m+1) \ln \left(\frac{1 - \frac{t}{m} + o(m^2)}{1 - \frac{t}{m}} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} (m+1) o(m^2) = 0. \quad (2.26)$$

Lema 2.2.2 se demostró.

Utilizando el Lema 2.2.2 en (2.22), se sigue

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - t/m)^{m+1}}. \quad (2.27)$$

Ahora usando la siguiente identidad en (2.27)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - t/m)^{m+1}} = e^t,$$

obtenemos (2.18) (véase Apéndice B, Lema B.0.1).

Lema 2.2.1 se demostró. ■

Regresamos a las ecuaciones (1.56), (1.67). Ahora vamos a representar $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{-m-1}^{\pm}(\xi, \eta, \zeta)$ en los términos r, φ .

Teorema 2.2.3. Sea $\gamma(r, \varphi)$ un contorno en el plano α que corresponde al contorno γ_{ζ} bajo el cambio de variables $z = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \cos \alpha$. Entonces

$$U_1^{\pm}(r, \varphi) := \lim_{m \rightarrow \infty} f_{-m-1}^{\pm}(\xi, \eta, \zeta) = \mp \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(r, \varphi)} f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \frac{\pi}{2})}) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha; \quad (2.28)$$

donde f_{-m-1}^+ , f_{-m-1}^- están dadas por (1.56) y (1.67) respectivamente.

Demostración. Por (1.56), (1.67) y para ρ dada como en (1.57), tenemos

$$\begin{aligned} U_1^{\pm}(r, \varphi) &= \lim_{m \rightarrow \infty} f_{-m-1}^{\pm} = \lim_{m \rightarrow \infty} \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\zeta}} f\left(\frac{\xi + i\eta}{z \pm \rho}\right) \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}} \frac{dz}{\rho} \\ &= \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\zeta}} f\left(\frac{\xi + i\eta}{z \pm \rho}\right) \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}} \frac{dz}{\rho}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Sustituyendo (2.17), (2.18) y (2.16) en (2.29), obtenemos

$$U_1^{\pm}(r, \varphi) = \mp \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(r, \varphi)} f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \frac{\pi}{2})}) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha. \quad (2.30)$$

Teorema 2.2.3 se demostró. ■

2.3. Comprobación de la ecuación de Helmholtz para U_1

En las secciones anteriores presentamos la familia apropiada de las soluciones de la ecuación de Helmholtz, las cuales tienen la forma (2.28), con f analítica arbitraria, pero los razonamientos ingeniosos de Sommerfeld que nos llevan a (2.28) no son estrictos, por tanto necesitamos revisar formalmente que las funciones del tipo (2.28) realmente satisfacen la ecuación de Helmholtz.

Teorema 2.3.1. Sea γ un contorno en el plano $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$U_1^\pm(r, \varphi) = \mp \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \quad (2.31)$$

converge y se queda convergente después de la diferenciación hasta n -veces del integrando

$$f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) e^{ikr \cos \alpha}$$

con respecto de φ y r . Además, supongamos en el caso de γ no cerrado con extremos γ_- y γ_+

$$f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) e^{ikr \cos \alpha} \Big|_{\gamma_-}^{\gamma_+} = f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) (\sin \alpha) e^{ikr \cos \alpha} \Big|_{\gamma_-}^{\gamma_+} = 0. \quad (2.32)$$

Entonces

$$(\Delta + k^2)U_1^\pm(r, \varphi) = 0. \quad (2.33)$$

Demostración. Diferenciando bajo el signo de la integral en (2.31), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1^\pm}{\partial r} &= \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) ik(\cos \alpha) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \\ \frac{\partial^2 U_1^\pm}{\partial r^2} &= -k^2 \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) (\cos^2 \alpha) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Observando que $\frac{\partial}{\partial \varphi} f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) = \pm \frac{\partial}{\partial \alpha} f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)})$ e integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1^\pm}{\partial \varphi} &= \int_\gamma \pm \frac{\partial}{\partial \alpha} [f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)})] e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \\ &= \pm f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) e^{ikr \cos \alpha} \Big|_{\gamma_-}^{\gamma_+} \pm \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) ikr(\sin \alpha) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \\ &= \pm \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) ikr(\sin \alpha) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha, \end{aligned}$$

por (2.32). Similarmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1^\pm}{\partial \varphi^2} &= \pm \int_\gamma \pm \frac{\partial}{\partial \alpha} [f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)})] ikr(\sin \alpha) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \\ &= f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) ikr(\sin \alpha) e^{ikr \cos \alpha} \Big|_{\gamma_-}^{\gamma_+} \\ &\quad - \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) e^{ikr \cos \alpha} (ikr \cos \alpha + k^2 r^2 \sin^2 \alpha) d\alpha \\ &= - \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) e^{ikr \cos \alpha} (ikr \cos \alpha + k^2 r^2 \sin^2 \alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Entonces de (2.31)–(2.35), tenemos

$$\begin{aligned}
(\Delta + k^2)U_1^\pm(r, \varphi) &= \frac{\partial^2 U_1^\pm}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1^\pm}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_1^\pm}{\partial \varphi^2} + k^2 U_1^\pm \\
&= \pm k^2 \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) (\cos^2 \alpha) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \\
&\mp \frac{1}{r} \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) ik(\cos \alpha) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \\
&\pm \frac{1}{r^2} \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) e^{ikr \cos \alpha} (ikr \cos \alpha + k^2 r^2 \sin^2 \alpha) d\alpha \\
&\mp k^2 \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Desarrollando, tenemos

$$\begin{aligned}
(\Delta + k^2)U_1^\pm(r, \varphi) &= \pm k^2 \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) (\cos^2 \alpha) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \\
&\mp \frac{1}{r} \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) ik(\cos \alpha) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \\
&\pm \frac{1}{r} \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) ik(\cos \alpha) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \\
&\pm k^2 \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) (\sin^2 \alpha) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \\
&\mp k^2 \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Asociando de manera conveniente, tenemos

$$\begin{aligned}
(\Delta + k^2)U_1^\pm(r, \varphi) &= \pm k^2 \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) e^{ikr \cos \alpha} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) d\alpha \\
&\mp k^2 \int_\gamma f(e^{i(\varphi \pm \alpha - \pi/2)}) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha = 0. \quad \blacksquare
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Consideremos

$$U_0(r, \varphi) := U_1^-(r, \varphi) + U_1^+(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \left(f(e^{i(\varphi - \alpha - \pi/2)}) - f(e^{i(\varphi + \alpha - \pi/2)}) \right) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha. \tag{2.39}$$

Corolario 2.3.2. Sea U_0 dada por (2.39). Entonces

$$(\Delta + k^2) U_0(r, \varphi) = 0. \tag{2.40}$$

Capítulo 3

Ejemplos espaciales de funciones generadas por potenciales analíticos

3.1. Soluciones finitas univaluadas en todas partes (la onda plana)

Primero consideramos la función $f(Z)$ fraccional lineal en $Z \in \mathbb{C}$ tal que $f = \infty$ en Z' y $|Z'| = 1$, $f(0) = 1$ y $f(\infty) = 0$. Tal función se escribe como

$$f(Z) = \frac{Z'}{Z' - Z} = \frac{1}{1 - \frac{Z}{Z'}}, \quad Z \in \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

Definiendo esta función y analizando el procedimiento dado en los Capítulos 1 y 2 obtenemos una función finita en todas partes y univaluada en el plano. Para esto necesitamos solamente insertar la función especial f dada por (3.1) en la ecuación (2.39). Denotaremos la función resultante por U_0 . Finalmente elegimos

$$Z' := e^{i(\varphi' - \pi/2)}, \quad \varphi' \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Lema 3.1.1. *Sea $U_0(r, \varphi)$ definida por (2.39). Entonces para f y Z' dadas como en (3.1) y (3.2), obtenemos la siguiente expresión para U_0*

$$u_0(r, \varphi) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sin \alpha e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \alpha - \cos(\varphi - \varphi')} d\alpha. \quad (3.3)$$

Demostración. Insertando f dada por (3.1) en (2.39), tenemos

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left(\frac{1}{1 - e^{i(\varphi - \varphi' - \alpha)}} - \frac{1}{1 - e^{i(\varphi - \varphi' + \alpha)}} \right) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sin \alpha e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \alpha - \cos(\varphi - \varphi')} d\alpha, \end{aligned} \quad (3.4)$$

ya que

$$\frac{1}{1 - e^{i(\varphi - \varphi' - \alpha)}} - \frac{1}{1 - e^{i(\varphi - \varphi' + \alpha)}} = -\frac{\sin \alpha}{i(\cos \alpha - \cos(\varphi - \varphi'))}. \quad (3.5)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - e^{i(\varphi - \varphi' - \alpha)}} - \frac{1}{1 - e^{i(\varphi - \varphi' + \alpha)}} &= \frac{e^{i(\varphi - \varphi' - \alpha)} - e^{i(\varphi - \varphi' + \alpha)}}{(1 - e^{i(\varphi - \varphi' - \alpha)})(1 - e^{i(\varphi - \varphi' + \alpha)})} \\ &= -\frac{e^{i(\varphi - \varphi')}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})}{1 - e^{i(\varphi - \varphi' + \alpha)} - e^{i(\varphi - \varphi' - \alpha)} + (e^{i(\varphi - \varphi' + \alpha)})(e^{i(\varphi - \varphi' - \alpha)})} \\ &= -\frac{e^{i(\varphi - \varphi')}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})}{1 - e^{i(\varphi - \varphi')}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) + e^{2i(\varphi - \varphi')}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Utilizando que $2i \sin \gamma = e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}$ y $2 \cos \gamma = e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ en (3.6), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - e^{i(\varphi - \varphi' - \alpha)}} - \frac{1}{1 - e^{i(\varphi - \varphi' + \alpha)}} &= -\frac{2i \sin \alpha e^{i(\varphi - \varphi')}}{1 - 2 \cos \alpha e^{i(\varphi - \varphi')} + e^{2i(\varphi - \varphi')}} \\ &= -\frac{2i \sin \alpha e^{i(\varphi - \varphi')}}{e^{i(\varphi - \varphi')}(e^{-i(\varphi - \varphi')} - 2 \cos \alpha + e^{i(\varphi - \varphi')})} \\ &= -\frac{2i \sin \alpha}{e^{-i(\varphi - \varphi')} + e^{i(\varphi - \varphi')} - 2 \cos \alpha}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nuevamente utilizando que $2 \cos \gamma = e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ y que $-i = 1/i$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - e^{i(\varphi - \varphi' - \alpha)}} - \frac{1}{1 - e^{i(\varphi - \varphi' + \alpha)}} &= -\frac{2i \sin \alpha}{2 \cos(\varphi - \varphi') - 2 \cos \alpha} \\ &= -\frac{\sin \alpha}{i(\cos \alpha - \cos(\varphi - \varphi'))}. \blacksquare \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.2. Contorno de integración

A.Sommerfeld sugiere el siguiente contorno de integración en (3.3), $\gamma = A$, donde A se presenta en la Figura 3.1. Se supone que $\exists \epsilon > 0$ tal que para $\alpha \in A$,

$$-\pi + \epsilon < \operatorname{Re}(\alpha) < 2\pi - \epsilon. \quad (3.9)$$

Vamos a mostrar que u_0 dada por (3.3) con $\gamma = A$ está bien definida y satisface la ecuación de Helmholtz.

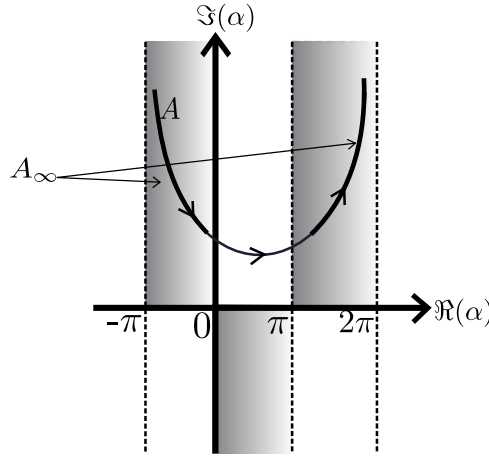


Figura 3.1: Contorno A

Proposición 3.2.1. La integral en la siguiente expresión

$$u_0(r, \varphi) := -\frac{1}{2\pi i} \int_A \frac{\sin \alpha e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \alpha - \cos(\varphi - \varphi')} d\alpha \quad (3.10)$$

converge.

Como veremos en adelante la integral y la función (3.10) se convierte en la función elemental (3.23), la cual obviamente satisface la ecuación de Helmholtz, lo que se demuestra directamente (véase Lema 3.2.4, 3.2.5). Sin embargo nosotros damos aquí una investigación completa de convergencia de la integral (3.10), porque necesitaremos aplicar razonamientos similares a la integral del tipo (3.30), la cual no se reduce a una función elemental como (3.10). Por lo tanto en el lugar correspondiente vamos a usar este razonamiento sin detalles (véase la siguiente sección 3.3).

Primero demostremos los siguientes Lemas.

Lema 3.2.2. Sea $\alpha \in A$ tal que $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, entonces $\exists c_0 \geq 1$ tal que

$$|e^{ikr \cos \alpha}| \leq c_0 e^{-\delta e^{\alpha_2}}, \quad \delta > 0. \quad (3.11)$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} |e^{ikr \cos \alpha}| &= |e^{ikr \cos(\alpha_1 + i\alpha_2)}| = |e^{ikr(\cos \alpha_1 \cosh \alpha_2 - i \sin \alpha_1 \sinh \alpha_2)}| \\ &= |e^{ikr \cos \alpha_1 \cosh \alpha_2 + kr \sin \alpha_1 \sinh \alpha_2}| = e^{kr \sin \alpha_1 \sinh \alpha_2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

1). Sea $\alpha \in A_\infty$, donde

$$A_\infty := \{\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in A : \alpha_1 < -\epsilon \vee \pi + \epsilon < \alpha_1, \alpha_2 > \alpha_2^0 > 0\}. \quad (3.13)$$

Entonces, para $\alpha \in A_\infty$, $-1 \leq \sin \alpha_1 < -\delta_1$, $\delta_1 > 0$. De aquí

$$kr \sin \alpha_1 \sinh \alpha_2 \leq -\delta e^{\alpha_2}, \quad \delta = \frac{kr}{4} \delta_1, \quad (3.14)$$

y usando (3.12), obtenemos

$$|e^{ikr \cos \alpha}| \leq e^{-\delta e^{\alpha_2}}, \quad \alpha \in A_\infty. \quad (3.15)$$

2). Sea $\alpha \in A_1 := A \setminus A_\infty$. Ya que A_1 es un conjunto cerrado, acotado y la función (3.12) es continua, entonces $\exists c > 0$ tal que

$$|e^{ikr \cos \alpha}| \leq c. \quad (3.16)$$

Consideremos la función $e^{-\delta e^{\alpha^2}}$, $\alpha \in A_1$. Existe

$$m = \min_{\alpha \in A_1} \{e^{-\delta e^{\alpha^2}}\} > 0,$$

ya que $e^{-\delta e^{\alpha^2}} \neq 0 \forall \alpha \in A_1$. Entonces por (3.16)

$$|e^{ikr \cos \alpha}| \leq \max(1, c/m)e^{-\delta e^{\alpha^2}}, \quad \alpha \in A_1. \quad (3.17)$$

La misma cota cumple para $\alpha \in A_\infty$, lo que se sigue de (3.15), ya que el $\max(1, c/m) \geq 1$. Tomando $c_0 = \max(1, c/m)$ terminamos la demostración del Lema 3.2.2. ■

Lema 3.2.3. Sean $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$ y $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in A$, donde A es el contorno dado en la Figura 3.1, entonces la función

$$M(\alpha) := \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \cos(\varphi - \varphi')} \quad (3.18)$$

es continua y acotada sobre A .

Demostración. Primero demostremos que $M(\alpha)$ es continua en A , es decir

$$\cos \alpha - \cos(\varphi - \varphi') \neq 0. \quad (3.19)$$

Dado que, $\cos \alpha = \cos \alpha_1 \cosh \alpha_2 - i \sin \alpha_1 \sinh \alpha_2 \in \mathbb{R}$ sii $\alpha_1 = 0$ o $\alpha_1 = \pi$, entonces $\forall \alpha \in A$ tal que $\alpha_1 \neq 0, \pi$, tenemos que (3.19) se cumple. Si $\alpha_1 = 0$ o $\alpha_1 = \pi$, entonces $\cos \alpha_1 = \pm 1$, además para $\alpha \in A$ $\cosh \alpha_2 > 1$, de donde (3.19) se cumple $\forall \alpha \in A$. Por lo tanto (3.18) es continua sobre A .

Ahora demostremos la acotación de (3.18) sobre A . Tenemos

$$\begin{aligned} |M(\alpha)| &= \left| \frac{\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}}{\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} - \cos(\varphi - \varphi')} \right| \\ &= \left| \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) - 2i \cos(\varphi - \varphi')} \right| \\ &= \left| \frac{e^{-i\alpha}(e^{2i\alpha} - 1)}{e^{-i\alpha}((e^{2i\alpha} + 1) - 2e^{i\alpha} \cos(\varphi - \varphi'))} \right| \\ &= \left| \frac{1 - e^{2i\alpha}}{1 + e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha} \cos(\varphi - \varphi')} \right|. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sustituyendo $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ en (3.20), tenemos

$$\begin{aligned} |M(\alpha)| &= \left| \frac{1 - e^{2i(\alpha_1+i\alpha_2)}}{1 + e^{2i(\alpha_1+i\alpha_2)} - 2e^{i(\alpha_1+i\alpha_2)} \cos(\varphi - \varphi')} \right| \\ &= \left| \frac{1 - e^{2i\alpha_1-2\alpha_2}}{1 + e^{2i\alpha_1-2\alpha_2} - 2e^{i\alpha_1-\alpha_2} \cos(\varphi - \varphi')} \right|. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Cuando $\alpha_2 \rightarrow \infty$, tenemos

$$\frac{1 - e^{2i\alpha_1-2\alpha_2}}{1 + e^{2i\alpha_1-2\alpha_2} - 2e^{i\alpha_1-\alpha_2} \cos(\varphi - \varphi')} \rightarrow 1. \quad (3.22)$$

De aquí y de la continuidad de (3.18), tenemos que (3.18) es acotada sobre A . Lema 3.2.3 se demostró. ■

Finalmente, la Proposición 3.2.1 se sigue del Lema 3.2.2 y del Lema 3.2.3. ■
Vamos a transformar la función u_0 .

Lema 3.2.4. *La función u_0 se representa como*

$$u_0(r, \varphi) = e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')}. \quad (3.23)$$

Demostración. Por el Teorema de Cauchy, la cota (3.11) y el Lema 3.2.3 podemos transformar A a A_1

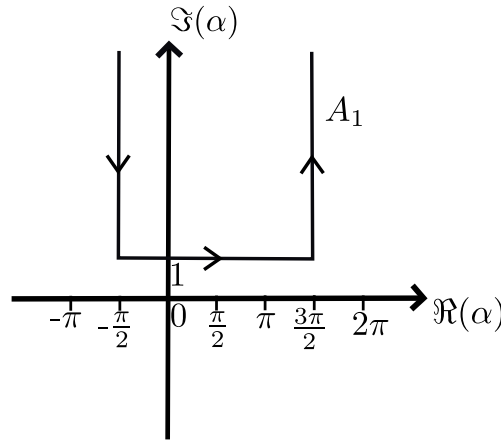
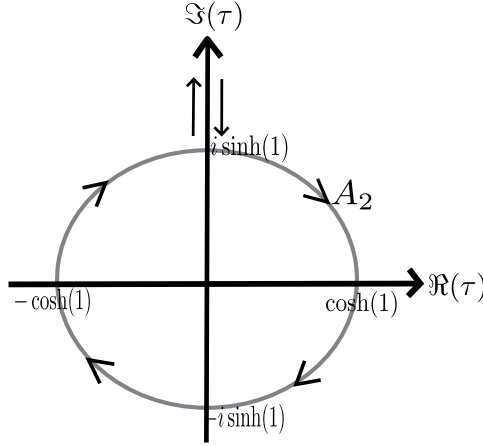


Figura 3.2: Contorno A_1

con la dirección como en la Figura 3. Haciendo cambio de la variable $\alpha \rightarrow \tau$, $\tau = \cos \alpha$. Obtenemos de (3.10) que

$$u_0(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{A_2} \frac{e^{ikr\tau}}{\tau - \cos(\varphi - \varphi')} d\tau, \quad (3.24)$$

donde A_2 es la imagen de A_1 bajo la transformación $\tau = \cos \alpha$, dada por la Figura 3.3.


 Figura 3.3: Contorno A_2

Dado que la función (3.24) tiene un polo simple para $\tau = \cos(\varphi - \varphi')$ y tomando $g(\tau) := e^{ikr\tau}$, tenemos de la Fórmula Integral de Cauchy que (3.24) es equivalente a (3.23), ya que las integrales por los contornos $\{i(\tau_2 + \sinh(1)), \tau_2 \geq 0\}$ convergen y se anulan. ■

Lema 3.2.5. *La función u_0 dada por (3.23), satisface la ecuación de Helmholtz*

$$(\Delta + k^2)u_0(r, \varphi) = 0. \quad (3.25)$$

Demostración. Diferenciando (3.23), con respecto de r, φ , respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial r} &= ik \cos(\varphi - \varphi') e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')} \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} &= -k^2 \cos^2(\varphi - \varphi') e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')} \\ \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} &= -ikr \sin(\varphi - \varphi') e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')} \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} &= -k^2 r^2 \sin^2(\varphi - \varphi') e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')} - ikr \cos(\varphi - \varphi') e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Entonces de (3.26) y (3.23), tenemos

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)u_0(r, \varphi) &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} + k^2 u_0 = -k^2 \cos^2(\varphi - \varphi') e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')} \\ &\quad + \frac{ik}{r} \cos(\varphi - \varphi') e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')} - k^2 \sin^2(\varphi - \varphi') e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')} \\ &\quad - \frac{ik}{r} \cos(\varphi - \varphi') e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')} + k^2 e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')} \\ &= -k^2 e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')} (\cos^2(\varphi - \varphi') + \sin^2(\varphi - \varphi')) + k^2 e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')} = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

(3.25) se demostró.

La función simple u_0 dada por (3.23), es la solución de la ecuación de Helmholtz, la cual opera casi exclusivamente en la óptica ordinaria, y posee las siguientes propiedades; es univaluada en el plano suave, continua y finita para todos los valores finitos de x, y . En lugar del punto singular $Z = Z'$ en el plano complejo, tenemos solamente un corte ramal $\varphi = \varphi'$ (“dirección de la onda incidente”). La función u_0 representa la distribución invariante de la luz paralela en el plano infinito.

3.3. Solución ramificada (dos-valuada)

Ahora buscamos otra solución a la ecuación Helmholtz análoga a u_0 en la superficie de Riemann descrita anteriormente con un polo de orden 1. Para ello no partimos de la función (3.1), que es univaluada en el plano suave, más bien de la función análoga sobre nuestra superficie de Riemann. Esta función resulta muy simple mediante un mapeo conforme, solamente necesitamos remplazar Z por $Z^{\frac{1}{2}}$ en (3.1). Como veremos esta función da solución al problema de difracción sobre el semiplano. Por conveniencia podemos escribir $Z'^{\frac{1}{2}}$ en lugar de Z' e introducir el factor $\frac{1}{2}$. Insertando la siguiente función

$$f(Z) = \frac{\frac{1}{2}Z'^{\frac{1}{2}}}{Z'^{\frac{1}{2}} - Z^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.28)$$

en la ecuación (2.39), con Z' dada como en (3.2), obtenemos

$$\begin{aligned} U_0(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_A \left(\frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{e^{i(\varphi-\alpha-\frac{\pi}{2})}}{e^{i(\varphi'-\frac{\pi}{2})}}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{e^{i(\varphi+\alpha-\frac{\pi}{2})}}{e^{i(\varphi'-\frac{\pi}{2})}}\right)^{\frac{1}{2}}} \right) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_A \left(\frac{1}{1 - e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi'-\alpha)}} - \frac{1}{1 - e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi'+\alpha)}} \right) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Mediante un procedimiento similar a la demostración del Lema 3.1.1, tenemos

$$U_0(r, \varphi) = -\frac{1}{4\pi i} \int_A \frac{\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right)} d\alpha. \quad (3.30)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi'-\alpha)}} - \frac{1}{1 - e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi'+\alpha)}} &= \frac{e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi'-\alpha)} - e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi'+\alpha)}}{(1 - e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi'-\alpha)})(1 - e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi'+\alpha)})} \\ &= -\frac{e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}(e^{\frac{i\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\alpha}{2}})}{1 - e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi'+\alpha)} - e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi'-\alpha)} + (e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi'+\alpha)})(e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi'-\alpha)})} \\ &= -\frac{e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}(e^{\frac{i\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\alpha}{2}})}{1 - e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}(e^{\frac{i\alpha}{2}} + e^{-\frac{i\alpha}{2}}) + e^{i(\varphi-\varphi')}}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Utilizando que $2i \sin \gamma = e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}$ y $2 \cos \gamma = e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ en (3.31), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - e^{\frac{i}{2}(\varphi - \varphi' - \alpha)}} - \frac{1}{1 - e^{\frac{i}{2}(\varphi - \varphi' + \alpha)}} &= -\frac{2i \sin \frac{\alpha}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')}}{1 - 2 \cos \frac{\alpha}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} + e^{i(\varphi - \varphi')}} \\ &= -\frac{2i \sin \frac{\alpha}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')}}{e^{\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} (e^{-\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} - 2 \cos \frac{\alpha}{2} + e^{\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')})} \quad (3.32) \\ &= -\frac{2i \sin \frac{\alpha}{2}}{e^{-\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} + e^{\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} - 2 \cos \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Nuevamente utilizando que $2 \cos \gamma = e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ y que $-i = 1/i$ en (3.32), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - e^{\frac{i}{2}(\varphi - \varphi' - \alpha)}} - \frac{1}{1 - e^{\frac{i}{2}(\varphi - \varphi' + \alpha)}} &= -\frac{2i \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{(\varphi - \varphi')}{2} - 2 \cos \frac{\alpha}{2}} \quad (3.33) \\ &= -\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{i(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi - \varphi')}{2})}. \end{aligned}$$

Notemos que los puntos $\alpha = \pm(\varphi - \varphi')$ quedan fuera de la región encerrada por el contorno de integración. Se ve inmediatamente que la función U_0 satisface la ecuación de Helmholtz bajo ciertas condiciones (al igual que todas las funciones que resultan de la ecuación (2.39), a través de la sustitución de una función compleja arbitraria f). Más adelante revisaremos estas condiciones.

Proposición 3.3.1. La integral (3.30) admite la diferenciación con respecto de r hasta n -veces.

Demostración. Diferenciando formalmente $U_0(r, \varphi)$ con respecto de r , obtenemos

$$\frac{\partial^n U_0(r, \varphi)}{\partial r^n} = -\frac{(ik)^n}{4\pi i} \int_A \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos^n \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi - \varphi')}{2}} e^{ikr \cos \alpha} d\alpha, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.34)$$

Del Lema 3.2.2 se sigue que para demostrar que (3.34) converge, es suficiente demostrar un lema similar al Lema 3.2.3.

Lema 3.3.2. Sea $\alpha \in A$, donde A es el contorno dado en la Figura 3.1, y sea

$$M_1(\alpha, \varphi) := M_1(\alpha) := \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right)} \quad (3.35)$$

entonces existe $c > 0$ tal que $|M_1(\alpha)| \leq c$.

Demostración. La demostración es análoga al Lema 3.2.3.

Lema 3.3.3. Sea $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in A$, $n \in \mathbb{N}$ y $M_1(\alpha)$ dada en (3.35), entonces existe $c > 0$ tal que

$$|M_1(\alpha) \cos^n \alpha| \leq ce^{n\alpha_2}. \quad (3.36)$$

Demostración. Para $\alpha \in A$

$$|\cos \alpha| = |\cos(\alpha_1 + i\alpha_2)| \leq e^{\alpha_2} \quad (3.37)$$

ya que $\alpha_2 > 0$ para $\alpha \in A$. De aquí $|\cos^n \alpha| \leq e^{n\alpha_2}$. Ahora el Lema 3.3.2 implica (3.36).

Lema 3.3.3 se demostró.

Finalmente del Lema 3.2.2 y del Lema 3.3.3, tenemos

$$\left| \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos^n \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi - \varphi')}{2}} e^{ikr \cos \alpha} \right| \leq c e^{n\alpha_2} c_0 e^{-\delta e^{\alpha_2}} = c_1 e^{-\delta e^{\alpha_2} + n\alpha_2} \leq k_0 e^{-\delta_0 e^{\alpha_2}}, \quad 0 < \delta_0 < \delta. \quad (3.38)$$

(véase la prueba de la última desigualdad en Apéndice C). Por lo tanto, (3.34) converge sobre A . ■

Ahora analicemos la $\frac{\partial^n}{\partial \varphi^n} U_0$, donde U_0 está dada por (3.30). Primero vamos a derivar n -veces el integrando en (3.30).

Lema 3.3.4. Sean $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} t^n(\varphi) &:= \frac{\partial^n}{\partial \varphi^n} \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi - \varphi')}{2}} \right) \\ &= \sum_{l=0}^n \frac{k_l(\varphi)}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi - \varphi')}{2} \right)^{(n+1)-l}}, \quad k_0, \dots, k_n \in C^\infty. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Demostración. Demostremos el Lemma 3.3.4 por inducción sobre n . Para $n = 0$ evidentemente (3.39) se cumple. Ahora supongamos que (3.39) se cumple $\forall 0 \leq r < n$, entonces para $r = n$, tenemos

$$t^r(\varphi) = \frac{\partial t^{r-1}(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sum_{l=0}^{r-1} \frac{k_l(\varphi)}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi - \varphi')}{2} \right)^{r-l}} \right), \quad k_l(\varphi) \in C^\infty, \quad l = 0, \dots, r-1. \quad (3.40)$$

Derivando cada uno de los términos, tenemos

$$\frac{k'_l(\varphi)}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi - \varphi')}{2} \right)^{r-l}} + (l-r) \frac{k_l(\varphi) \sin \frac{(\varphi - \varphi')}{2}}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi - \varphi')}{2} \right)^{r+1-l}}, \quad l = 0, \dots, r-1. \quad (3.41)$$

Agrupando y renombrando cada uno de estos, es fácil ver que se cumple (3.39).

Proposición 3.3.5. Sean $r > 0$ y $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n U_0(r, \varphi)}{\partial \varphi^n} &= -\frac{1}{4\pi i} \int_A \sum_{l=0}^n \frac{k_l(\varphi) \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi - \varphi')}{2} \right)^{(n+1)-l}} d\alpha, \\ &n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k_0, \dots, k_n \in C^\infty, \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde la integral en (3.42) converge.

Demostración. Sea $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in A$, definamos

$$k_n(\alpha) = \frac{1}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi-\varphi')}{2}\right)^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi-\varphi')}{2}}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3.43)$$

Es suficiente demostrar que

$$\left| k_n(\alpha) \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha} \right| \leq c(n+1)e^{-\delta e^{\alpha_2}}. \quad (3.44)$$

Por una prueba similar al Lema 3.3.2, existe $c_n > 0$, tal que

$$\left| \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi-\varphi')}{2}\right)^n} \right| \leq c_n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3.45)$$

Tomando $k = \max\{c_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ y por el Lema 3.2.2, obtenemos (3.44).

Proposición 3.3.5 se demostró. ■

Las Proposiciones 3.3.1, 3.3.5, implican el siguiente teorema.

Teorema 3.3.6. La integral en la expresión para U_0 dada por (3.30), se queda convergente después de la diferenciación n -veces con respecto de r , φ , es decir la función $U_0 \in C^\infty(r, \varphi)$, $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Vamos a seguir revisando las hipótesis del Teorema 2.3.1. Teorema 3.3.6 significa que se cumple la primera condición. El siguiente Lema enseña que se cumple la siguiente hipótesis.

Lema 3.3.7. Sean A^- , A^+ los extremos del contorno A y $M_1(\alpha)$ dada en (3.35), entonces

$$M_1(\alpha) e^{ikr \cos \alpha} \Big|_{A^-}^{A^+} = M_1(\alpha) \sin \alpha e^{ikr \cos \alpha} \Big|_{A^-}^{A^+} = 0. \quad (3.46)$$

Demostración.

1)

$$M_1(\alpha) e^{ikr \cos \alpha} \Big|_{A^+} = \lim_{(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow (2\pi - \epsilon, \infty)} M_1(\alpha_1 + i\alpha_2) e^{ikr \cos(\alpha_1 + i\alpha_2)} = 0, \quad (3.47)$$

por el Lema 3.3.2 y (3.11). Similarmente $M_1(\alpha) e^{ikr \cos \alpha} \Big|_{A^-} = 0$.

2) Ya que $|\sin \alpha| \leq e^{\alpha_2}$, $\alpha \in A$, y por el Lema 3.3.2, se tiene

$$|M_1(\alpha) \sin \alpha| \leq c e^{\alpha_2}, \quad c > 0. \quad (3.48)$$

Finalmente por (3.11) y (3.48) se tiene que $M_1(\alpha) \sin \alpha e^{ikr \cos \alpha} \Big|_{A^-}^{A^+} = 0$.

Lema 3.3.7 se demostró. ■

Finalmente formulemos el Teorema principal de esta sección.

Teorema 3.3.8. Sea A el contorno definido en la Figura 3.1 con las condiciones (3.9). Entonces, la función $U_0(r, \varphi)$ dada por (3.30) satisface la ecuación de Helmholtz

$$(\Delta + k^2)U_0(r, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi' \in \mathbb{R}. \quad (3.49)$$

Demostración. Del teorema 3.3.6 se tiene que existe una función $U_0(r, \varphi) \in C^\infty$, $r > 0$ y $\varphi \in \mathbb{R}$. Por otro lado (3.49) se cumple por el Teorema 2.3.1, ya que el contorno A tiene todas las propiedades del Teorema 2.3.1, donde U_0 es igual a (2.39) con f dada por (3.28). ■

Capítulo 4

Aplicación de la teoría de Sommerfeld al problema de difracción sobre el semiplano

La función u_0 dada por (3.23) se puede considerar como una onda incidente en ausencia del obstáculo que es la pantalla (semiplano $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{x_2 = 0, x_1 \geq 0\}$). Introducimos la onda incidente u_i (en presencia del obstáculo no transparente), tal que $u_i(r, \varphi) = u_0(r, \varphi)$, para $\varphi \in (0, \pi + \varphi')$ y $0 < \varphi' < \pi$ (véase Fig. 4.1). Consideremos el siguiente problema de difracción. Sea

$$u_i(x) := \begin{cases} e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')}, & r > 0, \quad \varphi \in (0, \pi + \varphi') \\ 0, & \varphi \in (\pi + \varphi', 2\pi] \end{cases} \quad (4.1)$$

la onda incidente que cae a la pantalla $\{x_2 = 0, x_1 > 0\}$, donde suponemos que $k > 0$. Sea

$$u_r(x) := \begin{cases} -e^{ikr \cos(\varphi + \varphi')}, & r > 0, \quad \varphi \in (0, \pi - \varphi') \\ 0, & \varphi \in (\pi - \varphi', 2\pi] \end{cases} \quad (4.2)$$

su respectiva onda de reflexión según la óptica geométrica (véase la Fig. 4.1).

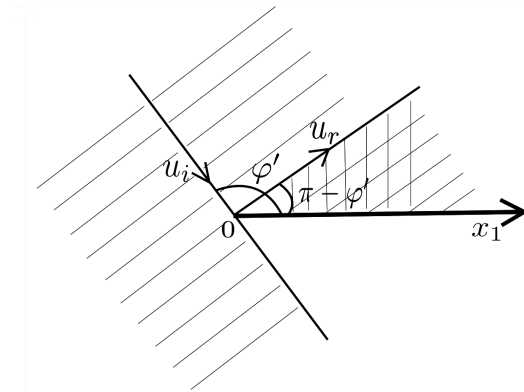


Figura 4.1: Óptica geométrica

Las funciones u_i y u_r son ondas incidentes y reflejadas, es fácil verificar que ellas satisfacen la ecuación de Helmholtz, $(\Delta + k^2)u = 0$ en sus dominios dados por (4.1) y (4.2) respectivamente. Estas ondas corresponden la parte óptica del problema de difracción, ya que

$$(u_i + u_r)(x) \Big|_{\overline{\mathbb{R}}_+} = \begin{cases} e^{ikr \cos(0-\varphi')} - e^{ikr \cos(0+\varphi')} = 0, & \varphi \in (0, \pi - \varphi') \\ 0, & \varphi \in (\pi + \varphi', 2\pi]. \end{cases} \quad (4.3)$$

Pero la solución óptica $u_i + u_r$ es una función discontinua en $\varphi = \pi \pm \varphi'$, que no satisface la ecuación de Helmholtz en $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathbb{R}}_+$, ya que las soluciones de la ecuación de Helmholtz son necesariamente continuas dado que $\Delta + w^2$ es el operador elíptico [4]. Por lo tanto $u_i + u_r$ no resuelve el problema de difracción de Sommerfeld.

La meta es construir una solución del problema de difracción

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u(x_1, x_2) = 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathbb{R}}_+ \\ u(x_1, x_2 + 0) = u(x_1, x_2 - 0) = 0, & x_1 > 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\quad (4.5)$$

tal que

$$u(x_1, x_2) = u_i(x) + u_r(x) + u_d(x) \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathbb{R}}_+), \quad (4.6)$$

donde $u(x)$ se llama la solución total del problema y

$$u_d(r, \varphi) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \varphi \neq \pi \pm \varphi'. \quad (4.7)$$

La base para tal solución es la función U_0 dada por (3.30). Esta función satisface la ecuación (4.4) lo cual se sigue del Teorema 3.3.8, pero esta función no satisface las condiciones de frontera (4.5). Para modificar U_0 a la función que satisfaga (4.5) A.Sommerfeld usa el método de simetrización, de manera precisa el define la función

$$u(x_1, x_2) = u(r, \varphi) := U_0(r, \varphi, \varphi') - U_0(r, \varphi, -\varphi'), \quad \varphi \in (0, 2\pi] \setminus \{\pi \pm \varphi'\}, \quad \varphi' \in (0, \pi), \quad (4.8)$$

donde $U_0(r, \varphi, \varphi') = U_0(r, \varphi)$ y $U_0(r, \varphi)$ se define en (3.30). Obviamente u satisface (4.4) y nos falta ahora revisar que u satisface (4.5).

Lema 4.0.1. $u(r, \varphi)$ dada por (4.8) satisface (4.5).

Demostración. De (4.8) y (3.30), tenemos

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{4\pi i} \int_A \frac{\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)} d\alpha - \frac{1}{4\pi i} \int_A \frac{\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right)} d\alpha \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_A \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha} \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right)} \right) d\alpha \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_A \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha} \left(\frac{\cos \frac{\varphi+\varphi'}{2} - \cos \frac{\varphi-\varphi'}{2}}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right)\right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)\right)} \right) d\alpha. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Entonces, tenemos $u(r, \varphi) \Big|_{\varphi=0} = 0$, y

$$u(r, \varphi) \Big|_{\varphi=2\pi} = \frac{1}{4\pi i} \int_A \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha} \left(\frac{\cos \left(\pi + \frac{\varphi'}{2} \right) - \cos \left(\pi - \frac{\varphi'}{2} \right)}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\pi - \frac{\varphi'}{2} \right) \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\pi + \frac{\varphi'}{2} \right) \right)} \right) d\alpha. \quad (4.10)$$

De aquí $u(r, \varphi) \Big|_{\varphi=2\pi} = 0$. ■

Nos falta describir $u_d(x)$. Para esto representemos $u(r, \varphi)$ dada en (4.8) usando la representación para U_0 dada en (3.30). Primero transformamos U_0 . Hacemos el cambio de variable $\alpha \rightarrow -\alpha$ en (3.30). Obtenemos

$$U_0(r, \varphi) = -\frac{1}{4\pi i} \int_{-A} \frac{-\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi-\varphi')}{2}} (-d\alpha) = -\frac{1}{4\pi i} \int_{-A} \frac{\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi-\varphi')}{2}} d\alpha \quad (4.11)$$

donde $-A$ es el reflejo simétrico de A con respecto de 0, véase la Fig. 4.2

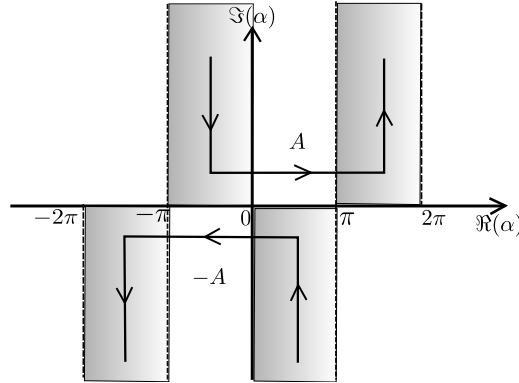


Figura 4.2: Contorno C

Sumando (3.30) con (4.11) y dividiendo entre dos, obtenemos

$$U_0(r, \varphi) = -\frac{1}{8\pi i} \int_C \frac{\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(\varphi-\varphi')}{2}} d\alpha, \quad (4.12)$$

donde $C = A \cup (-A)$, con las direcciones indicadas. Ahora escribimos $u(r, \varphi)$ dada por (4.8) usando el contorno C . Obtenemos

$$u(r, \varphi) = -\frac{1}{8\pi i} \int_C \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha} \left[\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi-\varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi+\varphi'}{2}} \right] d\alpha, \quad (4.13)$$

donde $\varphi \in (0, 2\pi] \setminus \{\pi \pm \varphi'\}$, $\varphi' \in (0, \pi)$. Esta función como veremos más adelante contiene a u_i y u_r . Para encontrarlas usaremos el contorno D (véase la Fig. 4.3).

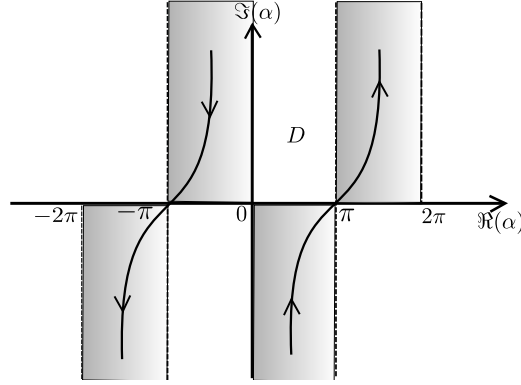


Figura 4.3: Contorno \$D\$

Usando el Teorema de residuos de Cauchy, podemos escribir

$$\begin{aligned}
 u(r, \varphi) = & -\frac{1}{8\pi i} \int_D \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha} \left[\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} \right] d\alpha \\
 & - \frac{1}{8\pi i} \int_{D_1} \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha} \left[\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} \right] d\alpha,
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde \$D_1\$ es el contorno representado en la Fig. 4.4.

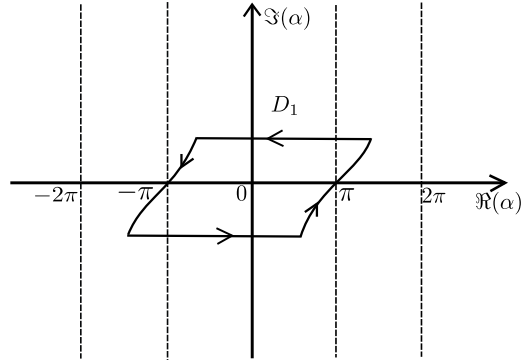


Figura 4.4: Contorno \$D_1\$

La integral sobre \$D_1\$ en (4.14) se calcula por residuos.

Lema 4.0.2. *Sea*

$$u_{D_1}(r, \varphi) := -\frac{1}{8\pi i} \int_{D_1} \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha} \left[\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} \right] d\alpha, \tag{4.15}$$

donde \$\varphi \in (0, 2\pi] \setminus \{\pi \pm \varphi'\}\$, \$\varphi' \in (0, \pi)\$ y

$$f(\alpha) := f_1(\alpha) + f_2(\alpha) := \frac{\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} - \frac{\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}}, \tag{4.16}$$

entonces

$$u_{D_1}(r, \varphi) = \begin{cases} e^{ikr \cos(\varphi-\varphi')} - e^{ikr \cos(\varphi+\varphi')}, & \varphi \in (0, \pi - \varphi') \\ e^{ikr \cos(\varphi-\varphi')}, & \varphi \in (\pi - \varphi', \pi + \varphi') \\ 0, & \varphi \in (\pi + \varphi', 2\pi]. \end{cases} \quad (4.17)$$

Demostración.

1. Supongamos $\varphi > \varphi'$. Si $\varphi \in (0, \pi - \varphi')$, tenemos que $\alpha_1 = (\varphi - \varphi')$, $\alpha_2 = (\varphi' - \varphi)$ y $\alpha_3 = (\varphi + \varphi')$, $\alpha_4 = (-\varphi - \varphi')$ son polos simples de f_1 , f_2 respectivamente dentro de el área acotada por D_1 . En efecto

$$\varphi \in (0, \pi - \varphi') \Leftrightarrow 0 < \varphi < \pi - \varphi' \Rightarrow -\pi < -\varphi' < \varphi - \varphi' < \pi - 2\varphi' < \pi. \quad (4.18)$$

De aquí $|\varphi - \varphi'| < \pi$. Análogamente $0 < |\varphi + \varphi'| < \pi$. Además

$$\begin{aligned} u_{D_1}(r, \varphi) &= -\frac{1}{8\pi i} \left(2\pi i \sum_{k=1}^2 \text{Res}_{\alpha=\alpha_k} f_1(\alpha) + \text{Res}_{\alpha=\alpha_{k+2}} f_2(\alpha) \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^2 \frac{h_1(\alpha_k)}{g_1'(\alpha_k)} - \frac{h_2(\alpha_{k+2})}{g_2'(\alpha_{k+2})} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(-4e^{ikr \cos(\varphi-\varphi')} + 4e^{ikr \cos(\varphi+\varphi')} \right) \\ &= e^{ikr \cos(\varphi-\varphi')} - e^{ikr \cos(\varphi+\varphi')}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde $h_1(\alpha) = h_2(\alpha) = \sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}$ y $g_{1,2}(\alpha) = \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi-\varphi'}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\varphi+\varphi'}{2}$, respectivamente.

2. Si $\varphi \in (\pi - \varphi', \pi + \varphi')$, entonces $\alpha_1 = (\varphi - \varphi')$, $\alpha_2 = (\varphi' - \varphi)$ son polos simples de f_1 dentro de el área acotada por D_1 . En efecto

$$\varphi \in (\pi - \varphi', \pi + \varphi') \Leftrightarrow \pi - \varphi' < \varphi < \pi + \varphi' \Rightarrow -\pi < \pi - 2\varphi' < \varphi - \varphi' < \pi. \quad (4.20)$$

De aquí $|\varphi - \varphi'| < \pi$ y $|\varphi + \varphi'| > \pi$. Además

$$\begin{aligned} u_{D_1}(r, \varphi) &= -\frac{1}{8\pi i} \left(2\pi i \text{Res} \sum_{k=1}^2 f_1(\alpha_k) \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(-4e^{ikr \cos(\varphi-\varphi')} \right) \\ &= e^{ikr \cos(\varphi-\varphi')}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

3. Si $\varphi \in (\varphi' + \pi, 2\pi]$, entonces $u_{D_1}(r, \varphi) = 0$, ya que $f(\alpha)$ no tiene polos. En efecto

$$\varphi \in (\varphi' + \pi, 2\pi] \Leftrightarrow \varphi' + \pi < \varphi \leq 2\pi \Rightarrow \pi < \varphi - \varphi' \leq 2\pi - \varphi' < 2\pi. \quad (4.22)$$

De aquí $\pi < \varphi - \varphi' < 2\pi$. Por tanto $f(\alpha)$ no tiene polos en D_1 .

4.1. Análisis de la onda difractada

La onda difractada es una onda que convierte la solución óptica $u_i + u_r$ a la solución total del problema de Sommerfeld.

Según nuestras exposiciones ella es

$$u_d(r, \varphi) = -\frac{1}{8\pi i} \int_D \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right)} - \frac{\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right)} \right) d\alpha, \quad (4.23)$$

que se sigue de (4.14) y del Lema (4.0.2), donde $\varphi \in (0, 2\pi]$, $\varphi' \in (0, \pi)$. Nuestra última meta en este trabajo es demostrar que

$$u_d(r, \varphi) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \varphi \neq \pi \pm \varphi'. \quad (4.24)$$

Lema 4.1.1. *4.24 se cumple.*

Demostración. Es suficiente demostrar que

$$u_d^\pm := \int_{D_\pm} \frac{\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\varphi \mp \varphi'}{2}\right)} d\alpha, \quad \varphi \in (0, 2\pi] \setminus \{\pi \pm \varphi'\}, \quad \varphi' \in (0, \pi), \quad (4.25)$$

satisface (4.24), donde D_+ es el contorno derecho de la Fig. 4.3 (otros casos se consideraran similarmente). Vamos a cambiar D_+ por γ_+ (véase Fig 4.5).

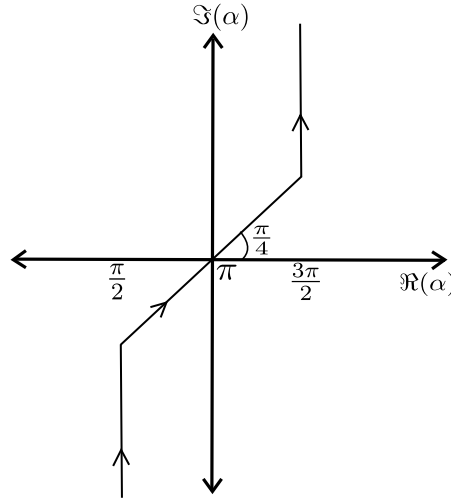


Figura 4.5: Contorno γ_+

Es suficiente demostrar (4.24) para $u_{d_1}^+$ y $u_{d_2}^+$, donde

$$u_d^+ := u_{d_1}^+ + u_{d_2}^+ := \int_{\gamma_1^+} \frac{\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right)} d\alpha + \int_{\gamma_2^+} \frac{\sin \frac{\alpha}{2} e^{ikr \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right)} d\alpha \quad (4.26)$$

γ_1^+ , γ_2^+ están dados en la Fig. 4.6. El caso u_d^- se considera similarmente. Primero veamos que existe $c(\varphi) > 0$ tal que $\forall \alpha \in \gamma_+$

$$|M_1(\alpha, \varphi)| \leq c(\varphi), \quad (4.27)$$

donde $M_1(\alpha, \varphi)$ se define en (3.35) (ahora nos importa la dependencia con respecto de φ).

Sea $\alpha \in \gamma_+$ y φ, φ' dadas como en (4.25) respectivamente, entonces $M_1(\alpha, \varphi)$ es continua, ya que $\cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha_1}{2} \cosh \frac{\alpha_2}{2} - i \sin \frac{\alpha_1}{2} \sinh \frac{\alpha_2}{2} \in \mathbb{R}$ sii $\alpha_2 = 0$, entonces $\forall \alpha_2 \neq 0 \in \gamma_+$, tenemos que $\cos \frac{\alpha}{2} - \cos(\frac{\varphi - \varphi'}{2}) \neq 0$. Si $\alpha_2 = 0$ entonces $\alpha_1 = \pi$ y $\cos \frac{\alpha}{2} = 0$. Por lo tanto $\cos(\frac{\varphi - \varphi'}{2}) = 0$ sii $(\varphi - \varphi') = (2k + 1)\pi$ para $k = 0, 1, \dots$, lo cual no es posible por definición de φ, φ' ya que $\varphi \neq \pi \pm \varphi'$.

1. Ahora veamos que $M_1(\alpha, \varphi)$ es acotada en $\gamma_{1,1}^+$, donde $\gamma_{1,1}^+$ es el contorno dado en la Fig. 4.6. Sea $\alpha \in \gamma_{1,1}^+$, por un procedimiento similar al del Lema 3.2.3, tenemos que

$$|M_1(\alpha, \varphi)| = \left| \frac{1 - e^{i\alpha}}{1 + e^{i\alpha} - 2e^{i\frac{\alpha}{2}} \cos\left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right)} \right|. \quad (4.28)$$

Sustituyendo $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ y tomando el límite de $M_1(\alpha, \varphi)$ cuando $\alpha_2 \rightarrow \infty$, tenemos

$$\frac{1 - e^{i\alpha_1 - \alpha_2}}{1 + e^{i\alpha_1 - \alpha_2} - 2e^{i\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2}} \cos\left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right)} \rightarrow 1. \quad (4.29)$$

De aquí y de la continuidad sobre γ_+ tenemos que

$$\exists c_1 > 0 : \forall \alpha \in \gamma_{1,1}^+ \quad |M_1(\alpha, \varphi)| \leq c_1.$$

2. Ahora analizando $M_1(\alpha, \varphi)$ sobre $\gamma_{1,2}^+$, dado en la Fig. 4.6 y factorizando $e^{i\alpha}$ en (4.28), tenemos que

$$|M_1(\alpha, \varphi)| = \left| \frac{1 - e^{-i\alpha}}{1 + e^{-i\alpha} - 2e^{-i\frac{\alpha}{2}} \cos\left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right)} \right| \quad (4.30)$$

y el $\lim_{\alpha_2 \rightarrow -\infty} M_1(\alpha, \varphi) = 1$. Por lo tanto $\exists c_2 > 0$ tal que $\forall \alpha \in \gamma_{1,2}^+ \quad |M_1(\alpha, \varphi)| \leq c_2$. Tomando $c(\varphi) = \max\{c_1, c_2\}$, se tiene que $\forall \alpha \in \gamma_+$, $|M_1(\alpha, \varphi)| \leq c(\varphi)$, $\varphi \neq \pi \pm \varphi'$.

3. Sea $u_{d_1}^+$ definida como en (4.26) y veamos que $u_{d_1}^+ \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. Si $M_1(\alpha, \varphi)$ es como en (3.35) y $\gamma_{1,1}^+, \gamma_{1,2}^+$ son los contornos mostrados en la Fig. 4.6, entonces

$$|u_{d_1}^+(\alpha)| \leq \left| \int_{\gamma_{1,1}^+} M_1(\alpha, \varphi) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \right| + \left| \int_{\gamma_{1,2}^+} M_1(\alpha, \varphi) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \right|. \quad (4.31)$$

Por (4.27), (3.12) y para $\gamma_{1,1}^+ = \frac{3\pi}{2} + i\alpha_2$, $\gamma_{1,2}^+ = \frac{\pi}{2} - i\alpha_2$, donde $\alpha_2 \in [\frac{\pi}{2}, \infty)$,

tenemos que

$$\begin{aligned}
 |u_{d_1}^+(\alpha)| &\leq c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-kr \sinh \alpha_2} d\alpha_2 + c \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} e^{kr \sinh \alpha_2} d\alpha_2 \\
 &= c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-kr \sinh \alpha_2} d\alpha_2 + c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{kr \sinh(-\alpha_2)} d\alpha_2 = 2c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-kr \sinh \alpha_2} d\alpha_2 \\
 &\leq 2c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-\frac{kr}{4} e^{\alpha_2}} d\alpha_2 \leq 2c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-\frac{kr}{4} \alpha_2} d\alpha_2 = -\frac{8c}{kr} e^{-\frac{kr}{4} \alpha_2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} = \frac{8c}{kr} e^{-\frac{kr\pi}{8}}.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

De aquí tenemos que $u_{d_1}^+ \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$.

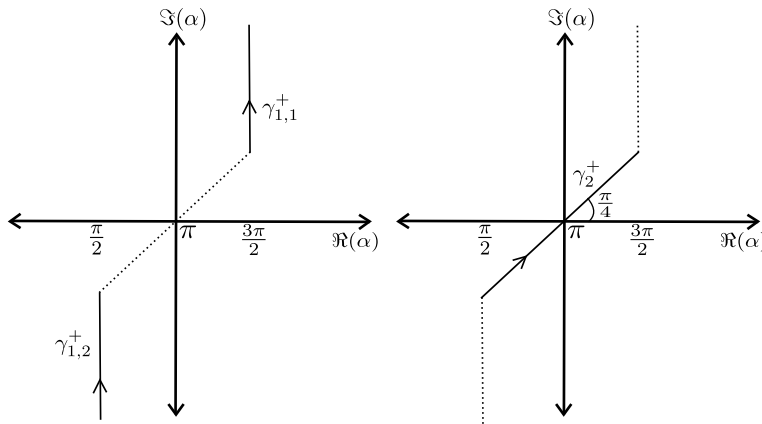


Figura 4.6: Contorno γ_1^+ , Contorno γ_2^+

Ahora veamos que $u_{d_2}^+ \rightarrow 0$, cuando $r \rightarrow \infty$. Por (4.27), (3.12) y para $\gamma_2^+ = (\alpha_2 + \pi) + i\alpha_2$, donde $\alpha_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, tenemos que $\forall \varphi \neq \pi + \varphi', \exists c(\varphi)$ tal que

$$\begin{aligned}
 |u_{d_2}^+(\alpha, \varphi)| &= \left| \int_{\gamma_2^+} M_1(\alpha, \varphi) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \right| \\
 &\leq c(\varphi) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{kr \sin(\alpha_2 + \pi) \sinh \alpha_2} d\alpha_2 \\
 &= c(\varphi) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-kr \sin \alpha_2 \sinh \alpha_2} d\alpha_2 \\
 &= c(\varphi) \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{-kr \sin \alpha_2 \sinh \alpha_2} d\alpha_2 + c(\varphi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-kr \sin \alpha_2 \sinh \alpha_2} d\alpha_2 \\
 &\leq c(\varphi) \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{-kr \frac{\alpha_2^2}{4}} d\alpha_2 + c(\varphi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-kr \frac{\alpha_2^2}{4}} d\alpha_2 \\
 &= 2c(\varphi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{kr}{4} \alpha_2^2} d\alpha_2 \leq 2c(\varphi) \int_0^{\infty} e^{-\frac{kr}{4} \alpha_2^2} d\alpha_2.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Tomando $\delta^2 = \frac{kr}{4}\alpha_2^2$ y teniendo en cuenta que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, tenemos que

$$|u_{d_2}^+(\alpha, \varphi)| \leq 2c(\varphi) \int_0^\infty e^{-\frac{kr}{4}\alpha_2^2} d\alpha_2 = \frac{4c(\varphi)}{\sqrt{kr}} \int_0^\infty e^{-\delta^2} d\delta = 2c(\varphi) \sqrt{\frac{\pi}{kr}}. \quad (4.34)$$

De aquí tenemos que $u_{d_2}^+ \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. Por lo tanto Lema 4.1.1 se demostró. ■

Nota 4. $c(\varphi) \rightarrow \infty$ cuando $\varphi \rightarrow \pi + \varphi'$.

Conclusión

En este trabajo hemos descrito el método de Sommerfeld para la obtención de las soluciones ramificadas de la ecuación de Helmholtz. Esto se hace en los capítulos del 1 al 3.

En el capítulo 4 enseñamos como se aplica este método para solución del problema de difracción sobre una pantalla no transparente. Además mostramos que la solución obtenida realmente satisface este problema.

Apéndice A

Demostraciones de algunas afirmaciones de la sección 2.1

Lema A.0.1. (2.2) \Leftrightarrow (2.3).

Demostración. Definamos

$$u_{m1}(\sin \theta, \varphi) := u_m(\theta, \varphi). \quad (\text{A.1})$$

Aquí u_{m1} está bien definida pues u_m es función, definida sobre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ por (2.2). Además

$$\frac{\partial u_{m1}}{\partial \theta} = \frac{\partial u_{m1}}{\partial \sin \theta} \cos \theta, \quad \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial (\sin \theta)^2} \cos^2 \theta - \frac{\partial u_{m1}}{\partial \sin \theta} \sin \theta \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial \sin \theta} (\sin \theta \cos \theta) = \cos \theta - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}. \quad (\text{A.3})$$

1. Sustituyendo (A.1) en (2.2) tenemos la siguiente ecuación equivalente a (2.2)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_{m1}}{\partial \theta} \right) + m(m+1)u_{m1} = \\ & = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial u_{m1}}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \theta^2} \right) + m(m+1)u_{m1}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

2. Sustituyendo (A.2) en la parte derecha de (A.4), tenemos la siguiente ecuación equivalente a (2.2)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_{m1}}{\partial \theta} \right) + m(m+1)u_{m1} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \varphi^2} \\ & + \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial u_{m1}}{\partial \sin \theta} \cos^2 \theta + \sin \theta \left(\cos^2 \theta \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial (\sin \theta)^2} - \sin \theta \frac{\partial u_{m1}}{\partial \sin \theta} \right) \right] + m(m+1)u_{m1} \\ & = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial u_{m1}}{\partial \sin \theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \sin \theta \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial (\sin \theta)^2} \right) + m(m+1)u_{m1}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

3. Factorizando el $\cos \theta$ en (A.5), obtenemos la ecuación equivalente a (2.2)

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial u_{m1}}{\partial \sin \theta} \left(\cos \theta - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right) + \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial (\sin \theta)^2} \sin \theta \cos \theta \right) \cos \theta + m(m+1)u_{m1}. \quad (\text{A.6})$$

4. Teniendo en cuenta (A.3) se obtiene que (A.6) \Leftrightarrow (2.3). Entonces (2.2) \Leftrightarrow (2.3). ■

Proposición A.0.2. (2.3) \Leftrightarrow (2.11).

La demostración se sigue de los Lemas (A.0.3) y (A.0.4), que se demuestran a continuación

Lema A.0.3. (2.11) es equivalente a (A.7), donde (A.7) es la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)^2} \frac{k^2}{m^2} r \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} \right. \\ & \left. + \frac{\partial u_{m1}}{\partial \frac{kr}{m}} \frac{k}{m} \left(\sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} - \frac{\frac{k^2 r^2}{m^2}}{\sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}}} \right) \right] \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} + \frac{m(m+1)k^2}{m^2} u_{m1} = 0 \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

y u_{m1} se define por (A.1).

Demostración.

1. De (2.5) tenemos la siguiente ecuación, y diferenciando dicha ecuación tenemos

$$u_{m1}(\sin \theta, \varphi) = u_{m1}\left(\frac{kr}{m}, \varphi\right); \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial u_{m1}}{\partial r} = \frac{\partial u_{m1}}{\partial \frac{kr}{m}} \frac{k}{m}, \quad \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)^2} \frac{k^2}{m^2}. \quad (\text{A.9})$$

2. Además

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} \right) = \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} - \frac{\frac{k^2 r^2}{m^2}}{\sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}}}. \quad (\text{A.10})$$

3. Derivando el producto de $\frac{\partial u_{m1}}{\partial r}$ y $r \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}}$ tenemos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_{m1}}{\partial r} \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial r^2} r \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} + \frac{\partial u_{m1}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} \right) \right). \quad (\text{A.11})$$

4. Sustituyendo (A.9) y (A.10) en la parte derecha de (A.11), obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_{m1}}{\partial r} \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} \right) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)^2} \frac{k^2}{m^2} r \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} \right. \\ & \left. + \frac{\partial u_{m1}}{\partial \frac{kr}{m}} \frac{k}{m} \left(\sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} - \frac{\frac{k^2 r^2}{m^2}}{\sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}}} \right) \right]. \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

5. Sustituyendo la parte derecha de (A.12) en (2.11) obtenemos (A.7). Por lo tanto (A.7) \Leftrightarrow (2.11). ■

Lema A.0.4. (2.3) \Leftrightarrow (A.7).

Demostración.

1. Sustituyendo (2.5) y (A.8) en (2.3), obtenemos la ecuación equivalente a (2.3)

$$\frac{m^2}{k^2 r^2} \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \varphi^2} + \frac{m}{kr} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)} \left(\frac{kr}{m} \frac{\partial u_{m1}}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)} \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} \right) \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} + m(m+1)u_{m1} = 0. \quad (\text{A.13})$$

2. Además

$$\frac{\partial}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)} \left(\frac{kr}{m} \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} \right) = \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} - \frac{\frac{k^2 r^2}{m^2}}{\sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}}}. \quad (\text{A.14})$$

3. Derivando el siguiente producto contenido en (A.13) y utilizando (A.14), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{m}{kr} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)} \left(\frac{kr}{m} \frac{\partial u_{m1}}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)} \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} \right) &= \frac{m}{kr} \left[\frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)^2} \frac{kr}{m} \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u_{m1}}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)} \left(\frac{kr}{m} \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} \right) \right] \\ &= \frac{m}{kr} \left[\frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)^2} \frac{kr}{m} \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} + \frac{\partial u_{m1}}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)} \left(\sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} - \frac{\frac{k^2 r^2}{m^2}}{\sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

4. Multiplicando el primer término de la parte derecha de (A.15) por $\frac{m}{k}$ y dividiendo el segundo término de la parte derecha de (A.15) por $\frac{m}{k}$ obtenemos que (A.15) es equivalente a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{m}{kr} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)} \left(\frac{kr}{m} \frac{\partial u_{m1}}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)} \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} \right) \\ = \frac{m^2}{k^2 r} \left[\frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)^2} \frac{k^2}{m^2} r \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} + \frac{\partial u_{m1}}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)} \frac{k}{m} \left(\sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} - \frac{\frac{k^2 r^2}{m^2}}{\sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

5. Sustituyendo la parte derecha de (A.16) en el segundo sumando de (A.13), obtenemos la ecuación equivalente a (A.13) dada como sigue

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{k^2 r^2} \frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \varphi^2} + \frac{m^2}{k^2 r} \left[\frac{\partial^2 u_{m1}}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)^2} \frac{k^2}{m^2} r \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} \right. \\ \left. + \frac{\partial u_{m1}}{\partial \left(\frac{kr}{m}\right)} \frac{k}{m} \left(\sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} - \frac{\frac{k^2 r^2}{m^2}}{\sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}}} \right) \right] \sqrt{1 - \frac{k^2 r^2}{m^2}} + m(m+1)u_{m1} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

6. Dividiendo entre $\frac{m^2}{k^2}$ (A.17), obtenemos (A.7), la cual es equivalente a (A.13). Ya que (A.13) \Leftrightarrow (2.3), entonces (A.7) \Leftrightarrow (2.3). ■

Apéndice B

Demostraciones de algunas afirmaciones de la sección 2.2

Demostración. de la expansión (2.13).

Aplicando la serie de Taylor a la función $(1-x)^{\frac{1}{2}}$, obtenemos

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \dots - \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n) \quad \text{cuando } x \rightarrow 0. \quad (\text{B.1})$$

Tomando $x = \frac{k^2 r^2}{m^2}$ en (B.1), obtenemos (2.13). ■

Lema B.0.1.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-t/m)^{m+1}} = e^t, \quad t \in \mathbb{C}. \quad (\text{B.2})$$

Demostración de Lema B.0.1

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m = e^t, \quad t \in \mathbb{C}. \quad (\text{B.3})$$

Utilizando (B.3), tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-t/m)^{m+1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-t/m)^m(1-t/m)} = \frac{1}{e^{-t}} = e^t. \quad \blacksquare \quad (\text{B.4})$$

Apéndice C

Completitud de la demostración del Lema 3.3.3

Lema C.0.1. Sean $\delta, \alpha > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces existen $c, \delta_0 > 0$, tal que

$$f(\alpha) := e^{-\delta e^\alpha + n\alpha} \leq c e^{-\delta_0 e^\alpha}, \quad 0 < \delta_0 < \delta. \quad (\text{C.1})$$

Demostración.

1). Primero demostraremos que $\exists \alpha_0 > 0$ tal que

$$e^{-\delta e^\alpha + n\alpha} \leq e^{-\delta_0 e^\alpha}, \quad \alpha \geq \alpha_0 > 0. \quad (\text{C.2})$$

Es suficiente demostrar

$$-\delta e^\alpha + n\alpha < -\delta_0 e^\alpha < 0, \quad \alpha \geq \alpha_0 > 0, \quad (\text{C.3})$$

equivalentemente

$$\frac{e^\alpha}{\alpha} > \frac{n}{\delta - \delta_0}, \quad \alpha \geq \alpha_0 > 0.$$

Dado que $\frac{e^\alpha}{\alpha} \rightarrow \infty$, cuando $\alpha \rightarrow \infty$, existe α_0 tal que (C.3) se cumple. Por lo tanto (C.2) se cumple $\forall \alpha > \alpha_0 > 0$.

2). Ahora veamos que (C.1) se satisface $\forall \alpha > 0$. Sean $g(\alpha), f(\alpha)$, sobre $[0, \alpha_0]$, donde $g(\alpha) := e^{\delta_0 e^\alpha}$ y f dada como en (C.1), ya que las funciones son continuas y cumplen que

$$f(\alpha), g(\alpha) > 0, \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_0].$$

Entonces $\exists c > 0$ tal que

$$\text{máx } f(\alpha) < c g(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_0]. \quad (\text{C.4})$$

Finalmente de aquí y de 1), tenemos

$$f(\alpha) < c g(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0, \infty). \quad (\text{C.5})$$

Lema C.0.1 se demostró. ■

Bibliografía

- [1] Sommerfeld A. Mathematische theorie der diffraction. *Mathematische Annalen*, Volume(47):317–374, 1896.
- [2] Sommerfeld A. Optics (lectures on theoretical physics). *New York: Academic Press*, Volume(4), 1954.
- [3] A.N.Tikhonov and A. A. Samarski. Equations of mathematical physics. *Dover Publications Inc., New York, translated from Russian by A. R. M. Robson and P. Basu, Reprint of the 1963 translation*, 1990.
- [4] L.C.Evans. Partial differential equations. *AMS, Providence, RI, Graduate Studies in Mathematics Volume(19)*, 1998.
- [5] R.J.Nagem M.Zampolli G.Sandri Arnold Sommerfeld. Mathematical theory of diffraction. *Springer Science+Business Media New York. Originally published by Birkhauser Boston, Progress in Mathematical Physics Volume(35)*, 2014.